T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLETİLMİŞ GAUSS-BONNET KURAMINDA KOZMOLOJİK GENİŞLEME PROBLEMİ VE ENTROPİNİN DOĞASI

Ali İhsan KESKİN

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Eylül 2015

T.C. DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Ali İhsan KESKİN tarafından yapılan "Genişletilmiş Gauss-Bonnet Kuramında Kozmolojik Genişleme Problemi ve Entropinin Doğası " konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ

Üye : Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Figen BİNBAY

Üye : Doç. Dr. Oktay AYDOĞDU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa SALTI

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 04/09/2015

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../.....

Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

TEŞEKKÜR

Hayatım boyunca maddi-manevi destekleri ile her zaman yanımda olan şefkatli Annem ve Babama, doktora eğitimim süresince türlü zorluklara rağmen yardımlarıyla her an yanımda olan sevgili eşime, neşe kaynaklarım olan son derece masum ve bir o kadar anlayışlı çocuklarıma, desteğini esirgemeyen danışmanım ve saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. İrfan AÇIKGÖZ'e, problemin belirlenmesinde katkısından dolayı Prof. Dr. Durmuş Ali DEMİR'e ve problemin çözümü aşamasında deneyimlerini paylaşan Yrd. Doç.Dr. Mustafa SALTI'ya çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR I

İÇİNDEKİLER II

ÖZET IV

ABSTRACT V

ŞEKİL LİSTESİ VI

EK LİSTESİ VII

1. GİRİŞ 1

1.1. Einstein'nin Kuramları 8

1.2. Genişleyen Evren ve Hubble Yasası 11

1.3. Friedmann Denklemleri 12

1.4. Evrenin Erken Zaman Şişme Dönemi 14

1.5. Evrenin Radyasyon ve Toz Bölgeleri (Deselerasyon) 15

1.6. Evrenin Şimdiki (veya Geç Zaman) İvmelenmesi-Karanlık Enerji 18

1.7. Termodinamik Yasaları ve Kütle-Çekimsel Geometri 24

2. KAYNAK ÖZETLERİ 27

3. MATERYAL ve METOT 33

3.1. Kullanılacak Notasyon ve Gösterim 33

3.2. Kullanılacak Metrik 33

3.3. $f(R,G)$-graviteye doğru 36

3.3.1. Einstein Alan Denklemi 36

3.3.2. $f(R)$ Kütle-Çekim Kuramının Metrik Formalizmi 37

3.3.3. Modifiye Edilmiş Gauss-Bonnet Kuramı 39

3.4. $f(R,G)$-gravite 39

3.5. $f(R,G)$ Kuramı ve GKEY 43

3.5.1. FRW Evreninde Görünen Ufuk ve GKEY 44

3.5.2. FRW Evreninde Olay Ufku ve GKEY 47

4. ARAŞTIRMA BULGULARI 49

4.1. Ölçek Çarpan Üstel Çözüm 49

4.2. Genişletilmiş Gauss-Bonnet Kuramı 50

4.2.1. Genişletilmiş Gauss-Bonnet Kuramı Ölçek Çarpanı Üstel Tam Çözümleri 54

4.3. $F(R,G)$-gravite 61

4.3.1. $F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R$ Modeli ve Üstel Çözümler 62
4.3.2. $F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R$ Modeli ve Phantom Evresi 70
4.4. $F(R,G)$ Kuramında Görünen Ufuk için GKEY ve Evrenin Gelişim Aşamaları 73
4.4.1. FRW Modelinde Evrenin Erken Zaman Şişme Dönemi 75
4.4.2. Radyasyon Bölgesi 76
4.4.3. Toz Bölgesi 78
4.4.4. FRW Evreninde Quintessence İvmelenme Bölgesi 79
4.4.5. FRW Evreninde Phantom Bölgesi 81
4.4.5.1. $h_1 = -2/3(1 + \mathrm{w})$ FRW Çözümü: $0 < h < 3$ Aralığında $(h \neq 1)$ 82
4.4.5.2. $h > 3$ Durumu için GKEY 83
4.5. $h_2 = -4/3(1 + \mathrm{w})$: Süper İvmeli Karanlık Enerji Çözümü 83
4.5.1. Süper İvmeli Aşamada Görünen Ufuk için GKEY 86
4.5.1.1. $1 < h < 3$ Aralığında GKEY 88
4.5.1.2. $0 < h < 1$ Aralığında GKEY 90
4.5.1.3. $h > 3$ Durumunda GKEY 90
4.6. Olay Ufkunda Phantom Bölgesi 91
4.6.1. $h = -2/3(1 + w)$ FRW Çözümü 92
4.6.1.1. $0 < h < 3$ Aralığında GKEY $(h \neq 1)$ 92
4.6.1.2. $h > 3$ Durumunda GKEY 93
4.7. Phantom Karanlık Enerji: $h = -4/3(1 + w)$ için Olay Ufkunda GKEY 94
4.7.1. $1 < h < 3$ Aralığında GKEY 95
4.7.2. $0 < h < 1$ Aralığında GKEY 95
4.7.3. $h > 3$ Durumunda GKEY 96
5. TARTIŞMA ve SONUÇ 97
6. KAYNAKLAR 107
EKLER 117

ÖZET

GENİŞLETİLMİŞ GAUSS-BONNET KURAMINDA
KOZMOLOJİK GENİŞLEME PROBLEMİ
VE ENTROPİNİN DOĞASI

DOKTORA TEZİ

Ali İhsan KESKİN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

2015

Bu çalışmada temel olarak Gauss-Bonnet kuramında termodinamiğin kozmolojik entropi yasası üzerine odaklandık ve termodinamiğin genelleştirilmiş kozmolojik entropi yasasını (GKEY) bu kuram için evrenin Görünen ve Olay ufuklarında tartıştık. İlk olarak, lagranjiyan yoğunluğu $R + f(G) + \alpha R^2$ biçiminde tanımlanan genişletilmiş Gauss-Bonnet kuramında alan denklemlerinin ölçek faktör üstel tam çözümünlerini elde ettik. Bu çözümler yardımıyla evrenin üç temel gelişim aşaması matematiksel olarak bütünleşik bir formda ifade edilmiştir. Sonrasında, $F(R,G)$-gravitede yazılan alan denklemlerinin $F(R,G) = f_1(G) + f_2(R)$ seçimine göre ölçek faktör üstel çözümü elde edildi. Evrenin Görünen ufuk ve Olay ufku için $F(R,G)$-gravitede GKEY'i ifade ettikten sonra, bulunan çözümler kullanılarak, modelin ön gördüğü evrenin gelişim aşamaları ayrıntılı biçimde tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Entropi, Karanlık Enerji, Einstein-Gauss- Bonnet gravite, Termodinamiğin Genelleştirilmiş İkinci Yasası, Friedmann Denklemleri.

ABSTRACT

COSMOLOGICAL EXPANSION PROBLEM AND
THE NATURE OF ENTROPY IN EXTENDED
GAUSS-BONNET GRAVITY

PhD THESIS

Ali İhsan KESKİN

DEPARTMENT OF PHYSICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2015

In this study, we mainly focus on cosmological entropy law of thermodynamics in Gauss-Bonnet gravity and we construct the generalized second law (GSL) of thermodynamics for this theory on the dynamical apparent and event horizons. First, we find the exact scale factor power law solutions of the field equations by assuming the lagrangian density is given as $R + f(G) + \alpha R^2$. Three evolutionary stages of our universe has been determined mathematically in a unified form. Next, we investigated the scale factor power law solutions of the corresponding field equation of $F(R, G)$ gravity by determining $F(R, G) = f_1(G) + f_2(R)$. After constructing GSL on the apparent and event horizons and applying corresponding solutions to the law, we analyzed evolutionary stages of the Universe in detail.

Key Words: Entropy, Dark Energy, Einstein-Gauss-Bonnet Gravity, Generalized Second Law of Thermodynamics, Friedmann Equations.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No		Sayfa
Şekil 1.1.	Cismin bir referans noktasına göre hareketi.	2
Şekil 1.2.	Güneş çevresinde ortalama bir yarıçapta ve v hızıyla eliptik yörüngede dolanan gezegen. Büyük ölçekteki bu iki cisim yörüngenin her noktasında eşit bir kuvvetle birbirlerini çekerler.	3
Şekil 1.3.	İvmeli hareket eden cisim ……..	5
Şekil 1.4.	Büyük patlama tekilliğinden sonra genişleyen evrenin dokusunda oluşan boyutlarda maddenin gelişigüzel hareketine bir örnek.	6
Şekil 1.5.	Dünya, Güneşin kütlesinden kaynaklanan eğrilikten dolayı "en az" direnç gösteren yolu izler.	9
Şekil 1.6.	**(a)** Düz uzay-zaman $R_{\mu\nu} = 0$. **(b)** Maddenin uzay-zamanı eğriltmesi ve eğrilen bu uzay-zamanda diğer bir cismin hareketi.	10
Şekil 1.7.	Schwarzschild çözümünün betimlediği kara delik modeli. Karadeliğin olay ufkuna giren her cisim gök cisminin merkezine doğru hareket edecektir.	24
Şekil 5.1.	FRW uzay-zaman modeli için görünen ufukta evrenin gelişim aşamaları.	100
Şekil 5.2.	FRW uzay-zaman modeli için olay ufkunda evrenimizin phantom bölgesi aşaması.	101
Şekil 5.3.	Süper ivmeli genişleyen evrenin görünen ufuk phantom bölgesi.	103
Şekil 5.4.	Süper ivmeli genişleyen evrenin olay ufku phantom bölgesi.	104
Şekil 5.5.	GKEY ile evrenin görünen ufuk ve olay ufkundaki ivmelenmesi.	105

EK LİSTESİ

EKLER

EK. 1. **Sayfa**

1.1. Christoffel Sembolü (Bağlantıları) 117

1.2. Metrik Tensörün Varyasyonu 118

1.3. Christoffel Sembolünün Varyasyonu 119

1.4. Riemann Tensörü ve Varyasyonu 120

1.5. Ricci Skalerinin Varyasyonu 121

1.6. $\sqrt{-g}$ Çarpanının Varyasyonu 122

1.7. Kuadratik Terimlerin Varyasyonu 122

1.7.1. R^2 Teriminin Varyasyonu 122

1.7.2. $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ Teriminin Varyasyonu 123

1.7.3. $R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}$ Teriminin Varyasyonu 124

EK. 2. 126

2.1. Bianchi Özdeşliği 127

2. 2.Genel Görelilik Kuramında Friedmann Denklemleri 128

2.3. $f(R)$ Gravitede Friedmann Denklemi 129

2.4. $R + f(G) + \alpha R^2$ Modeli ve Friedmann Denklemleri 130

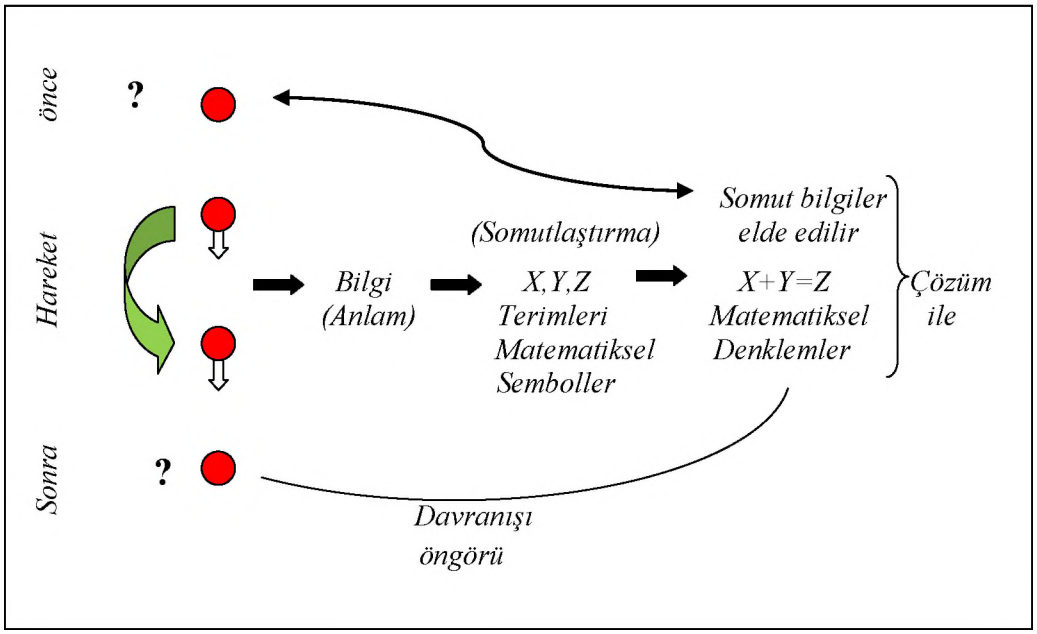
2.5. $f(R, G)$ Gravitede Friedmann Denklemleri 132

1.GİRİŞ

Doğada veya daha genel olarak evrende var olan sürekli değişken yapılı sistemleri anlamak için tarihsel süreçte birçok bilimsel çaba sarfedilmiştir. Madde ve hareketini tanımlama girişimi fizik kurallarının temelini oluşturur. Bu bağlamda Newton fiziğinden Einstein'nın Genel Görelilik kuramına ve hatta küçüklerin dünyasını betimlemeye çalışan kuantum mekaniğine kadar fizik kuralları, genel çerçeveden bakıldığında temelde maddeyi değişik yönleri ile ele alır. Örneğin, Newton'un maddenin hareketini tanımlayan denklemi, günlük yaşamda iç içe olduğumuz maddenin hızı, konumu, enerjisi gibi kavramları kesinliğe yakın bir biçimde hesaplamasının yanında gezegenlerin birbirlerini çekmesi ve yörüngesel hareketlerinin hesaplamada ciddi kolaylıklar sağlar. Fakat uzay-zamanın dokusu veya boşluğun ne olduğu hakkında bir açıklama getirmez. Newton'un mutlak ve statik bir evren yapısı öngörmesine karşın, Einstein madde ve maddenin göreceli hareketiyle uzay-zaman dokusunun bükülerek değişebileceğini gösteren düzgün yüzeyli eğri yapılı geometri ile yazılan denklemini tanımlamıştır. Diğer taraftan, kuantum fiziğindeki madde tanımı kendisini oluşturan yapı taşlarına indirgeyerek, bu düzeyde uzay-zaman dokusunun bu parçacıkların ve hatta dokunun bile sahip olabileceği kendi enerjileri (vakum enerjisi) ile sürekli dalgalanan karmaşık bir yapı olduğunu gösterir. Uzay-zamanı matematiksel olarak düzgün yüzeyli bir geometri ile betimleyen Einstein kuramı, kuantum fiziğinin betimlediği uzayın bu dalgalı ve çalkantılı yapısı ile uyumsuzluk içindedir (Greene 2003). Bu uyumsuzluğu gidermek adına, son yıllarda uzay-zamanın bölünemeyecek en küçük birimlerinin Planck boyutunda sicimlerden oluştuğu ve madde parçacıklarının evrenin dokusunu tamamen dolduran bu sicimlerin sürekli titreşen modlarına karşılık geldiğini ifade eden sicim kuramı ile dinamik bir evren resmi göz önüne serilmiştir.

Maddeyi tanımlamak adına gerçekleştirilen tüm çabalar onun hareketi üzerinde odaklanmaktadır. Daha açık bir ifadeyle evrendeki her bir madde seçilen bir referans sistemine göre ya makroskobik açıdan bakıldığında hareketlidir ya da onu oluşturan unsurlar (parçacıklar, sicimler) itibariyle mikroskobik açıdan bakıldığında hareketlidir (titreşim). Evrenin bu dinamik yapısını kuramsal olarak betimlemek için matematiksel ifadeler kullanılır. Bu bağlamda evren ve onu oluşturan birimler, dinamik oluşuyla uzay-zamana bir takım bilgiler (anlamlar) saçar. Kuramsal fizikçiler bu anlamların

analizini yapmak için matematiksel terimler ile sembolleştirir ve somutlaştırır. Dinamik bir sistemi somutlaştıran yapılar da matematiksel denklemlerdir. Denklemlerin çözümleri sonucunda, dinamik sistemlerin veya olaylar döngüsünün şimdiki ve geçmiş durumları hakkında bazı somut bilgiler elde edilir. Bunun yanında ileriki davranışları hakkında da bir takım öngörüler yapılır. Bu bağlamda madde ve onun hareketini tanımlamak için pek çok deneme, deney ve çalışma yapılmıştır.



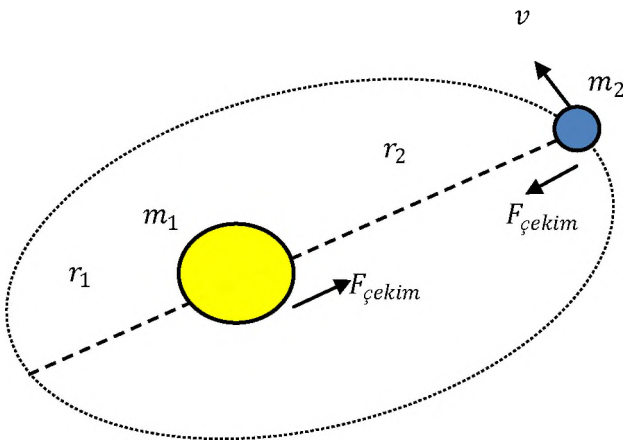
Şekil 1.1. Cismin bir referans noktasına göre hareketi.

Yukarıda da değinildiği gibi makroskobik cisimlerin hareketini ifade etmek için Newton'un ortaya attığı yasalar kesinliğe yakın uyumluluk içerir. Örneğin, evrendeki makroskobik cisimlerin (gezegen) birbirlerini çekmesine ve yörünge hareketlerine neden olduğu düşünülen kuvvet cisimlerin kütlelerinin çarpımı ile doğru ve aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır:

$$F_{çekim} \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{1.1}$$

Genel göreliliğin kütle-çekim kuramının aksine Newton'un kütle-çekim kuramında kuvvet kavramı vardır. Gezegenlerin yörünge hareketini ve küçük hızlardaki cisimlerin hareketsel davranışlarını güzel bir biçimde ifade etmesine rağmen bu kuvvetin ve cisimler arasındaki iletişimin nasıl olduğu hakkında bir öngörüsü yoktur. Ayrıca,

gezegenlerin eliptik yörünge hareketlerini tanımlayabilmesine rağmen, örneğin Merkür gezegeninin yörünge hareketinde meydana gelen kayma olayı gibi tasvir edemediği durumlar da vardır. Ayrıca çok yoğun kütle-çekim alanları ve yüksek (göreli) hızlar için Newton'un kuramı yetersiz kalmaktadır. Uzay ve zaman kavramları da bu kuramda birbirinden bağımsız olup, zaman kavramı uzay boyutlarının bağımsız bir parametresi olarak ele alınır.



Şekil 1.2. Güneş çevresinde ortalama bir yarıçapta ve v hızıyla eliptik yörüngede dolanan gezegen. Büyük ölçekteki bu iki cisim yörüngenin her noktasında eşit bir kuvvetle birbirlerini çekerler.

Diğer taraftan Einstein, uzaysal boyutların ve zaman kavramının birbirinden ayrı şeyler olmadığını daha sonra özel görelilik kuramı ile ifade edecektir. Bu kurama göre zaman da uzaysal boyutlar gibi bir boyuttur (3-uzay boyutu + 1-zaman boyutu). Yani en basit bir yaklaşımla ele alındığında uzaysal bir boyut, iki nokta arasında çizilen bir doğru ise bu boyutu oluşturmak için geçen süreden dolayı, aynı anda (doğru çizilirken ki her noktada) zamansal bir boyut da çizilir, oluşturulur. Bu bağlamda madde söz konusu ise en azından göreceli de olsa bir hareket ve bunun sonucu bir zaman boyutundan bahsedilir. Bu açıdan bakıldığında görünen evrenin varlığını sürdürebilmesi için her an dört-boyutlu uzay zamanı oluşturmasına bağlı olduğu (örneğin genişlemesi) sonucunu ortaya çıkacaktır.

Öte yandan evrende işlevselliği bulunan ve bu özelliği ile sistemi oluşturan birimlerin hareketli olmasını gerektiren termodinamiğin birinci ve ikinci yasaları ile de dinamik bir evren betimlemesi görülmektedir. Evreni oluşturan yapıların ifade ettiği

termodinamik yasalarının bu yapıların bütünü olan makro bir sistem olarak ele alınabilecek evren için de geçerli olması kaçınılmazdır.

Termodinamiğin birinci yasası, evrendeki (soyutlanmış ayrık bir sistemde) toplam enerjinin (E_{Evren}) sürekli sabit kaldığını, korunduğunu anlatır:

$$\Delta E_{Evren} = 0. \tag{1.2}$$

Birinci yasa korunumlu olan enerjinin biçim değiştirebileceğini ifade eder fakat bunun nasıl bir şekle dönüşeceğini ikinci yasa belirler.

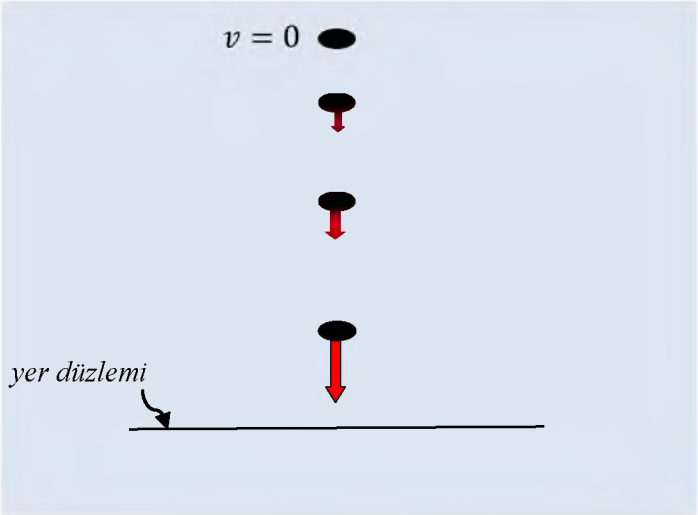
Termodinamiğin ikinci yasası entropi (S) yasasıdır. Kısaca, düzensizliğin bir ölçüsü veya ele alınan bir sistemin (içerdiği enerji ile) düzenli bir yapıdan daha düzensiz bir yapıya zamanla ileriye (tersinmez bir süreç) doğru sürekli evrildiğini gösteren ve bu göstergenin bir ölçütü olarak tanımlanan entropi, evrendeki tüm sistemlerde istisnasız geçerli olan bir yasadır. Birinci yasa bir korunum yasası olmasına rağmen, entropide böyle bir durum yoktur. Yani, evrendeki enerji korunsa bile bu enerji daha düşük bir seviyeye ve daha düzensiz bir biçime dönüşme eğilimindedir (artan entropi). İndirgenmiş ve düzensiz bu enerjinin yüksek entropiye sahip olduğu söylenir (Barrow 2002). Bu da evrendeki toplam entropi değişiminin pozitif olduğunu ve zamanla artacağını, sıfırdan büyük olacağını ifade eder:

$$\Delta S_{Evren} > 0. \tag{1.3}$$

Örneğin, sürtünmesiz bir ortamda yerden belirli bir yükseklikte potansiyel enerjiye sahip bir cisim serbest bırakıldığında bu enerjinin kütle-çekim ile zamanla minimum bir seviyeye gitme eğiliminde olduğu görülür. Cismin zamanla potansiyel enerjisi azalırken öte yandan kinetik enerjisi artmıştır. Enerji bir çeşitten başka bir çeşide dönüşmüştür. Yani, enerji korunumu vardır (birinci yasa). Fakat burada potansiyel enerjinin minimum değere indirgenme eğilimi ise olayın entropisi ile ilgilidir. Entropi artmıştır (ikinci yasa). Diğer bir ifadeyle, durağan ve bu sebeple belli bir düzene zorlanmış cismin harekete başlaması ile bir çeşit serbest (düzensiz) yapıya yönelme eğilimi ikinci yasa gereği entropinin artması ile ilgilidir. Bu, kendiliğinden tek

yönlü gerçekleşen bir olaydır. Yani cisim kendiliğinden tekrar eski durumuna geçiş yapamayacağından, entropi korunmaz, artar (Şekil 1.3).

Şekil 1.3'te verilen cismin hareketi Newton'a göre (1.1) denklemini ifade ederken Einstein'a göre uzay ve zamanın eğriliğini, termodinamiğin ikinci yasasına göre ise entropinin artış ilkesini betimlemektedir. Bu açıdan bakıldığında kütle çekimin hareket üzerine olan etkisi ile entropi arasında bir bağlantıdan bahsedilebilmektedir. Ayrıca Şekil 1.3'te verilen tasvir evrenin büyük patlama ile beraber genişlemesini *hareket açısından* betimlemeyen basit bir model olarak ta göz önüne alınabilir. Şekildeki cisim başlangıçta $v = 0$ 'da düzene zorlanmıştır. Renkli bölgenin de (evrenin dokusu) başlangıçta cisim boyutunda olduğu varsayılırsa, cismin harekete başlamasından (ilk oluş) sonraki davranışı kendisinden değil de büyük ölçekte renkli bölgenin ok yönünde ivmeli genişlemesinden kaynaklandığı düşünülebilir Buradaki cisim maddenin değişik formları olarak düşünülebilir (erken zamanda parçacık, geç zamanda galaksi). Diğer taraftan cisim ile renkli bölge ayrık iki sistem olarak ele alındığında, sistemlerin toplam entropi değişimi (1.3) eşitsizliğinde verildiği gibi daima pozitiftir.

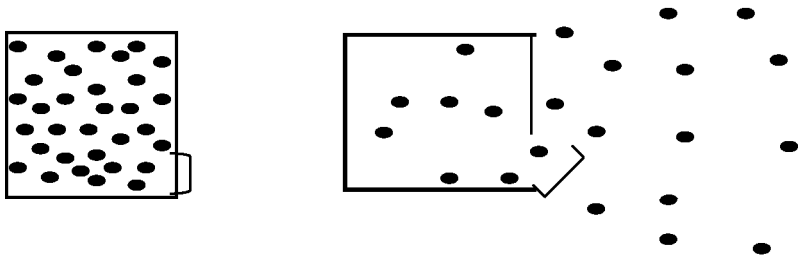


Şekil 1.3. İvmeli hareket eden cisim.

Örneğin, çevre ile soyutlanmış kapalı bir kapta tutulan ideal bir gaz kabın dışına çıkma eğilimindedir. Çünkü kapta makro düzeyde düzene zorlanmış moleküller ($S_{kap} = 0$) dışarıda serbest biçimde hareket eden düzensiz bir sisteme gitme, dağılma eğilimindedirler. Çevre etkileşimine izin verildiğinde moleküller dış ortama kendiliğinden geçerek $kap + çevre$ toplam sisteminin entropisini pozitif yönde artırır

(şekil 1.4). Bu bağlamda bakıldığında bir başlangıç tekilliğinde ($S_{evren} = 0$) olan evrenin her şeyiyle yayılmacı hareketi düzensizliğe ($\Delta S_{Evren} \geq 0$) doğru gittiğini gösterir. Buna şu açıdan da bakılabilir; evren başlangıç tekilliğinde iken veya henüz madde oluşmamışken, hareketten söz edilemez. Çünkü boyutlar henüz ortaya çıkmamıştır. Doğal olarak boyutlarda gezen veya titreşen bir madde de yoktur. Bu nedenle bir düzensizlikten bahsedilemez ve entropi sıfır olarak alınabilir. Diğer yandan bilinen fizik yasalarının henüz işlemediği bu sonsuz küçük tekillikle başlayan evrenin yayılmacı, genişleyen yapısı ile beraber birçok alt sistemler oluşmakta ve bu sistemler arasında sürekli etkileşimden dolayı ısı geçişleri olmaktadır. Bu da doğal olarak uzaysal boyutlarda gelişigüzel, karmaşık hareket biçimlerini ve düzensizlik kavramını oluşturmakta ve düzensizliği artırmaktadır.

Şekil 1.4.'te verilen gösterim genişleyen evreni betimlemek için çizilmiş basit bir model olarak düşünülebilir. Kapalı kabın hacmi sıfır (boyutsuz) olarak kabul edildiğinde sonsuz yoğunluktaki madde, büyük patlama ile ortaya çıkmakta ve genişleyen uzay-zaman dokusu ile beraber oluşan boyutlarda serbest biçimde hareket etmektedir. Doğal olarak bir başlangıç tekilliğinde sıfır entropi ile başlayan evrenin ivmeli genişlemesi ile entropisi (düzensizliği) kozmik zamanda sürekli artmaktadır.



Şekil 1.4. Büyük patlama tekilliğinden sonra genişleyen evrenin dokusunda oluşan boyutlarda maddenin gelişigüzel hareketine bir örnek.

Kısacası yıpranmanın, çürümenin, düzensizliğin bir göstergesi olan entropiyi ilk olarak tanımlayan Clausius' tur. Clausius eşitliği, S entropi olmak üzere

$$\delta Q = TdS \qquad (1.4)$$

şeklinde verilir (Cai ve ark. 2007). Burada δQ akan ısının varyasyonu iken, T kozmolojiksel olarak ufuk içinde ivmelenen gözlemci tarafından görünen sıcaklıktır. dS entropinin diferansiyeli, dinamiğidir.

Entropi ile beraber genel olarak termodinamiğin birinci yasasının diferansiyel biçimi,

$$dE + pdV = TdS \tag{1.5}$$

şeklinde ifade edilir (Cai ve ark. 2007). Burada p çarpanı dV hacmindeki basıncı betimler. $E = \rho V$ ise sistemin toplam enerjisini göstermektedir. Adyabatik (çevre ile ısı alışverişinin olmadığı sistem) bir süreç için bu denklem,

$$dE + pdV = 0 \tag{1.6}$$

biçiminde olur. Çünkü bu sistem için (1.4) ile verilen eşitlikte görüleceği üzere ısı değişimi sıfır olduğundan, entropi değişimi için $dS = 0$ ifadesi elde edilir.

Genel olarak tüm fizik yasalarının veya kuramlarının termodinamiğin ikinci yasasına uyması gerekmektedir. Arthur Eddington (1929) bu noktada, evren hakkındaki bir kuramın entropi yasası ile çelişmesi halinde hiçbir şansının olmadığını belirtir. Bu yüzden bu çalışmada yapılan çözümler termodinamiğin ikinci yasası açısından incelenmiştir.

Bu doktora tezinde temel olarak evrenin ‘‘erken zaman’’ büyük patlama tekilliğinden ‘‘geç zaman’’ ivmeli genişleme evresine kadar olan aşamaları, modifiye $f(R,G)$-gravite için yazılan alan denklemlerinin çözümleri ile bütünleşik bir formda gösterilmiştir. Bu gösterim termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasası ile de desteklenmiştir. Yani, bu kütle-çekim kuramında elde edilen çözümler kuramın *görünen ufuk* ve *gelecek olay ufku* üzerinde oluşturulan genelleştirilmiş kozmolojik entropi yasasına (GKEY) uygulanarak, evrenin gelişim aşamaları bu yasa çerçevesinde irdelenmiş ve evrenin geç zaman ivmelenmesini gösteren sonuçlar önceki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Bu doğrultuda tezde bu aşamadan sonra öncelikle evrenin kozmolojik olarak bilinen aşamaları hakkında bazı tanımlamalar ve kısa giriş bilgileri verildikten

sonra kütle-çekim ile termodinamik yasaları arasındaki bağlantı üzerine bazı sonuçlar verilecektir.

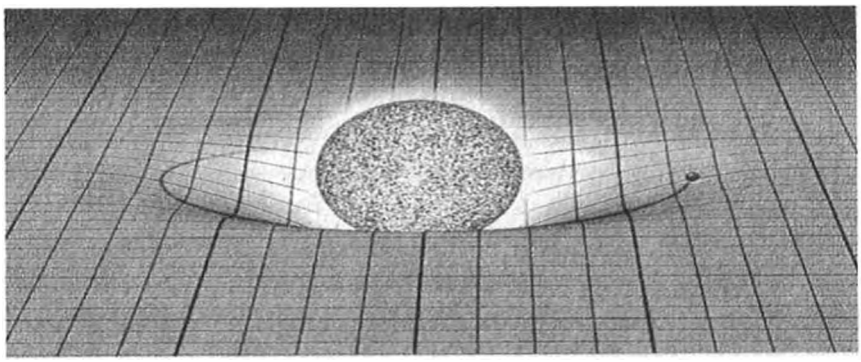
1.1.Einstein'nin Kuramları

Özel görelilik kuramı temelde iki ilkeye dayanır (Einstein 1905):

- Sabit hızla hareket eden eylemsiz (ivmesiz) referans sistemlerinde hareketli cisimler için fizik yasaları aynıdır. Evrende gözlem çerçevelerinde bir simetri olduğunu belirten bu ilke, yasaların incelendiği çerçeve ister durağan ister sabit hızlı olsun aynı (simetrik) kalacağını söyler.
- Işık hızı evrendeki en büyük hızdır ve gözlem çerçevelerine göre veya gözlemcinin hareketine göre değişmez.

Uzay ve zaman boyutlarını birbirine bağlayan kuramın matematiği kurulurken, bu boyutları birleşik bir formda ifade eden Minkowski geometrisi kullanılır.

Özel görelilik kuramı eylemli (ivmeli) referans sistemlerinde cisimlerin hareketini betimlemede yetersizdir. Bu eksikliği ortadan kaldırmak için Einstein, Genel Görelilik kuramı olarak bilinen daha kapsamlı bir kuram geliştirmiştir (Einstein 1916). Bu kuram kütlesel çekime Newton'dan farklı bir yaklaşım getirmiştir. Kuram, ivmelenen sistemin içindeki nesne üzerine yerçekimi kuvvetine benzer bir etki oluşacağını belirten, özel göreliliğin birleşik uzay ve zaman kavramıyla da uyumlu daha genel bir kuramdır. Newton kütle-çekim kuramında olduğu gibi bir kuvvet kavramı yoktur. Bunun yerine cisimlerin hareketi ve kütle-çekim etkileşimleri, madde tarafından eğrilen uzay-zaman'nın bir sonucu olarak tanımlanır (Peebles 1993). Yani, madde kütlesi ile bulunduğu uzayı ve zaman dokusunu eğerek diğer bir cisim üzerinde bir çekim alanı meydana getirir. Oluşan çekim alanında parçacıklar bu eğrilen uzay-zamanın jeodezik diye adlandırılan yörüngelerinde hareket eder. Örneğin, şekil 1.5'te Dünyanın Güneş çevresindeki yörünge durumu verilmiştir. Dünya, Güneşin eğriltmiş olduğu evren dokusunda bir yol üzerinde ilerler. (Greene 2003). Dünya da bulunduğu uzay dokusunu eğriltmiştir. Güneş ve diğer gezegenler bu eğrilikten az bir miktar etkilense de, örneğin Dünya'ya daha yakın olan Ay bu eğrilikten daha fazla etkilenmektedir. Ay bu etki ile Dünyanın çevresinde bir yol üzerinde hareket eder. Diğer yandan Dünya'nın üzerindekiler ise bu eğriliği yer çekimi olarak algılar.



Şekil 1.5. Dünya, Güneşin kütlesinden kaynaklanan eğrilikten dolayı "en az" direnç gösteren yolu izler (Greene 2003).

Genel Görelilik kuramı aynı zamanda Merkür'ün yörüngesindeki kayma ile beraber birçok kozmolojik açıklamalar, öngörüler ve sonuçlar ortaya koymuştur. Kuramın matematiği ise şekil 1.5'te görüldüğü gibi maddenin varlığında eğri uzay-zamanı ifade eden Riemann geometrisine dayanır. Temel olarak alan denkleminin elde edilişi, bu eğri uzay-zaman geometrisinde maddeyi temsil eden vektör (A^{μ}) hareketi (taşınması) ile ilgilidir. Bu geometri yardımıyla Genel Göreliliğin alan denklemleri tensörel formda ifade edilir.

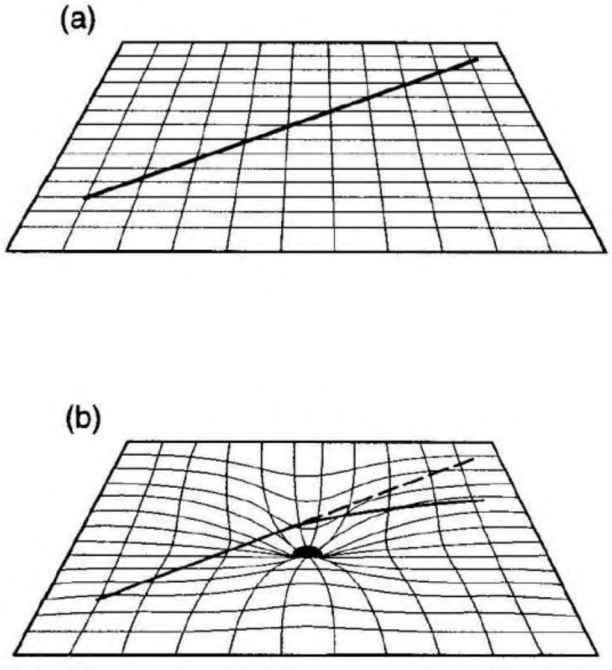
Einstein alan denklemi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k^2 T_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

biçimindedir. Burada $R_{\mu\nu}$, R, $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ sırasıyla Ricci tensörü, Ricci skaleri, metrik tensör, enerji-momentum tensörü'dür. k^2 ise $\widetilde{G}$ Newton (Gravitasyonel) sabiti olmak üzere $k^2 = 8\pi\widetilde{G}$ biçimindedir. Bu ifadede görüldüğü gibi denklemin sol tarafı uzay-zamanın geometrisini betimlerken sağ tarafı ise bu uzay-zamanda hareket eden maddeyi ifade eder. Uzay-zaman geometrisi ile madde dağılımı tek bir formda birleştirilmiştir. Fakat uzay-zamanda madde yoksa model düz bir uzaya karşılık gelir (Dirac 1975). Bu durumda eğriliği ifade eden Ricci tensörü $R_{\mu\nu} = 0$ olmaktadır (Şekil 1.6. (a)).

Genel Göreliliğin önemli öngörülerinden biri, yukarıda değinildiği gibi kütlenin eğriltiği uzayda zamanın da eğrilmesidir (Baez ve Bun 2006). Zamanın eğrilmesi, eğrilen uzay bölgesinin etki alanında zamanın yavaş akması demektir. Bu nedenle eğri uzay bölgesine giren bir cisim bu eğriliğin jeodeziklerinde hareket ederken üzerinde zaman daha yavaş akmaktadır. Gözlem verileriyle de doğrulanan bu olgu

doğrultusunda, madde kütlesi ile uzay zamanı eğrilttiği gibi (Şekil 1.6. (b)) eğrilen uzay-zaman da diğer bir cismin hareketini hem yönsel hem zamansal olarak etkiler.



Şekil 1.6. (a) Düz uzay-zaman $R_{\mu\nu} = 0$.
(b) Maddenin uzay-zamanı eğriltmesi ve eğrilen bu uzay-zamanda diğer bir cismin hareketi (htpp://www.ibphysicsstuff.wikidot.com).

Einstein'dan önce evrenin statik ve homojen olduğu düşünülüyordu. Fakat Genel Göreliliğin (1.7)'de verilen alan denklemi evrenin genel yapısına uygulandığında elde edilen çözümlerin evrenin büyük ölçekte dinamik bir yapıda olduğunu gösterir. Buna rağmen Einstein, eski düşünce yapısına bağlı kalmak için denklemin içine kozmolojik sabiti (Λ) elle doğrudan ekleyerek denklemini modifiye etti (Einstein 1917). Modifiye edilmiş alan denklemi,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

şeklindedir. Einstein her ne kadar evrenin statik olması gerektiği düşüncesi ile denkleme ekleme yapmış ve ilk etapta ''hatalı'' görülse de kendisinden sonra evrenin genişlediği

keşfi ile kozmolojik sabit terimi farklı bir önem kazanmıştır. (1.8)'deki alan denklemi aşağıdaki gibi yazıldığında

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = k^2 T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \ , \tag{1.9}$$

bu denklemin sol tarafı eğri uzay-zaman'nın geometrisini ifade ederken sağ tarafta yer alan $T_{\mu\nu}$ madde-enerji katkısı ile birlikte Λ ise vakum enerjisinin varlığını gösterir. Willem de Sitter, kozmolojik sabiti içeren (1.9) ile verilen Einstein denkleminin çözümünden kozmolojik genişleyen bir evren modeli yazmıştır. Daha sonra 1922 yılında Alexander Friedmann kozmolojik sabiti içermeyen (1.7) ile verilen Einstein denkleminin çözümünden uzay-zaman dokusunun genişlemesi ile galaksilerin birbirlerinden uzaklaşacağını ifade eden genişleyen bir evren modelini tanımlamıştır.

1.2. Genişleyen Evren ve Hubble Yasası

Friedmann'nın Einstein denkleminden kuramsal olarak genişleyen bir evren modelini bulmasından sonra Edwin Hubble (1929) gözlemleri sonucu galaksilerin birbirinden uzaklaştığını deneysel olarak kanıtlamıştır. Galaksilerin dünyadan ölçülen bir v hızıyla birbirinden uzaklaştığının keşfiyle (galaksilerden gelen ışık tayfının kırmızıya kayması) Edwin Hubble galaksiler arası mesafe ve kırmızıya kayma olayı arasında matematiksel bir ilişki bulmuştur. Buna göre iki galaksi arasında ölçülen mesafe r olmak üzere v'nin r ile doğru orantılı olduğunu göstermiştir. Matematiksel olarak Hubble yasası

$$\vec{v} = H\vec{r} \tag{1.10}$$

şeklinde verilir. Buradaki H (Hubble parametresi) galaksimizden diğer galaksilere ölçülen mesafe ile ilintili kozmolojik bir parametredir. Bu ifadenin ölçümlerinde elde edilen değerler pozitif olduğundan büzülmeden ziyade evrenin genişleme oranını gösterir (Carroll 1997, Liddle 2003). (1.10) denklemindeki $\vec{v}$, $\vec{r}$ ve H zamana bağlı niceliklerdir. Ayrıca Hubble parametresinin şimdiki zaman için değeri ''Hubble sabiti'' şeklinde bir sabit olarak ele alınır, yani $H(t) = H_0(t)$'dir. Hubble parametresi

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{1.11}$$

olarak verilir. Burada a (zamana bağlı) ölçek çarpanı diye adlandırılır ve evrenin genişlemesini veya büzülmesini gösteren bir niceliktir. Üst-nokta zamana göre türevi ifade eder. Burada adı geçen ölçek çarpanı şöyle de düşünülebilir: Bir fidanın gövdesi üzerine iki noktayı (iki galaksi) sabitleyelim. Fidan genişleyerek ağaç olurken fiziksel konum olarak sabitlenen noktalar zamanla birbirinden uzaklaşır. Bu uzaklaşma fidanın büyüdüğünü ve dokusunun genişlediğini gösterir. Büyük patlamadan hemen sonra oluşan madde, fiziksel konum itibariyle değişmez olsa bile evrenin sürekli genişlemesinden dolayı birbirinden uzaklaşır. Bu uzaklaşmayı gösteren nicelik kozmik zamana bağlı ölçek çarpanıdır. Burada kastedilen genişleme, galaksilerin birbirinden uzaklaşmasıdır. Güneş sistemindeki objelerin (gezegen v.s.) veya bir galaksi içindeki yıldızların birbirinden uzaklaşması değildir. Bunun nedeni, evrenin büyük ölçekli yapısına kıyaslandığında galaksilerin küçük ölçekteki boyutlarında etkin olan yıldızlar arası kütlesel çekimin yıldızları bir arada tutmasından veya galaksilerin her birinin merkezinde düşünülen dev kara deliğin çekiminden kaynaklandığı düşünülmektedir. Galaksi çapındaki bir ölçekte etkin olan kütlesel çekim, evren gibi büyük ölçeklere doğru gidildikçe etkisini yitirmektedir. Örneğin Şekil 1.3.'de verilen cisim bir galaksi olarak ele alınırsa; cismin içindeki molekülleri birbirine bağlayan bağ kuvveti gibi galaksi içindeki yıldızlar da birbirlerini kütle-çekim etkisi ile tutmaktadır. Bundan dolayı evrenin genişlemesi ile yani uzay-zaman dokusunun (Şekil 1.3'te renkli bölge) genişlemesinden dolayı büyük ölçekte galaksi toplulukları birbirlerinden uzaklaşırlar. Bu şekilde büyük ölçekten bakıldığında evrenin homojen ve izotropik bir yapıya sahip olduğu görülür. Yani, evrene hangi açıdan bakılırsa bakılsın benzer olduğu görülür (Liddle, 2003).

1.3. Friedmann Denklemleri

Friedmann denklemleri temel olarak evrenin genişlemesini tanımlar ve kozmolojik problemler için temel oluştururlar. Newton'un kütle-çekim kuramından hareketle enerji korunumu yazılarak türetilebilirler (Liddle 2003, Rayden 2006). Friedmann denklemleri Einstein'nin alan denkleminden de doğrudan elde edilebilmektedir. Denklemler elde edilirken (1.7) denkleminin sağ tarafı için madde

ortamının ideal bir akışkan olduğu ve sol tarafı da evrenin makro düzeyde homojen ve izotropik olduğu varsayılır.

İdeal akışkan için enerji-momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu} \tag{1.12}$$

şeklinde verilir. Burada ρ akışkanın enerji yoğunluğunu ve p akışkanın basıncını gösterirken, $u^{\mu} = (1,0,0,0)$ ise dörtlü hız vektörünü ifade eder. Genişleyen homojen ve izotropik evrenin geometrisini betimleyen metrik ise (Weinberg 1972):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right] \tag{1.13}$$

şeklinde olup Friedmann - Lemaitre – Robertson - Walker (FLRW) metriği diye bilinir. Burada k'nın alacağı -1,0,+1 değerlerine göre sırasıyla evrenin geometrik olarak açık, düz ve kapalı olduğu söylenir veya negatif eğriliğe sahip sonsuz açık evren, sonsuz düz evren ve pozitif eğriliğe sahip sonlu kapalı bir evren ifade edilir (Liddle 2003). $d\Omega^2 = dy^2 + dz^2$ ise birim yarıçaplı iki boyutlu kürenin metriğidir. (1.7)'de verilen standart Einstein denklemini kullanarak düz uzay-zaman için birinci tip standart Friedmann denklemi (Liddle 1999, Ryden 2003)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}, \tag{1.14}$$

ikinci tip standart Friedmann denklemi

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{1.15}$$

şeklinde elde edilir (bakınız Ek 2). Friedmann denklemi $a = a(t)$ ölçek çarpanını içerdiğinden dolayı evrenin uzunluk boyutunda nasıl değişim geçirdiğini anlatır. Örneğin, (1.14) denklemi evrenin genişleme veya büzülme hızı hakkında bilgi verirken (a terimi uzunluk boyutunda olduğundan birinci türevi hız ile ilgili bilgi içerir), (1.15) denklemi ise evrenin genişleme veya büzülürkenki ivmelenmesi hakkında bilgi verir ($\ddot{a}$

teriminden dolayı) veya kısaca ivmelenme denklemi olarak da bilinir (Carroll 2004). Genişlemenin ivmeli bir şekilde olduğunu gösteren bu denklemin sağ tarafındaki madde yoğunluğu ρ'nun pozitif olmasından dolayı bu ivmelenmenin, doğası gereği zamanla kütle çekimine sahip madde tarafından yavaşlatılacağını göstermektedir. Örneğin, (1.15) ile verilen denklemde görüleceği üzere ivmelenme için $\ddot{a} = -\frac{4\pi Ga}{3}(\rho + 3p) > 0$ eşitliğinde yoğunluk pozitif kabul edildiğinden dolayı

$$(\rho + 3p) < 0 \tag{1.16}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç $p < -\frac{\rho}{3}$ şeklinde verilen pozitif madde yoğunluğuna karşı basıncın negatif olduğunu belirtir. Basıncın negatif olma durumu evrenin ivmelenerek genişlediğini (veya karanlık enerjiyi) ifade eder (Liddle 2003).

Şimdi bu çalışmaya ön bilgi olması için evrenin ''erken zaman'' şişme bölgesi ($\ddot{a} > 0$), azalan bir ivmeyle genişlemeyi ifade eden deselerasyon (decceleration) bölgesi ($\ddot{a} < 0$) ve geç zaman ivmelenme ($\ddot{a} > 0$) durumları hakkında bilgiler verilecektir.

1.4. Evrenin Erken Zaman Şişme Dönemi

Evrenin genişlediğinin ispatlanmasından sonra Friedmann denklemlerinin çözümleri evren için bir başlangıç tekilliği verir. Yani kozmik zamanda geriye doğru gidildiğinde hacmi giderek küçülen, galaksilerin birbirine çarpıp parçalandığı, hem sıcaklığın hem de yoğunluğun arttığı, yoğun bir plazma haline gelmiş ve büzülen bir evren tipi ile karşılaşılır. Sonuçta, evren ve içindeki tüm maddenin sonsuz bir sıcaklık ve yoğunluğa sahip olduğu boyutsuz tekil bir noktadan başladığı bir durum ortaya çıkar. Bu temelde oluşturulan standart kozmoloji modeli evrenin böyle tekil bir noktadan büyük patlama ile var olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır. Model, kozmolojik problemlerden (ufuk, düzlük, tek kutupluluk, entropi problemleri) biri olan ufuk (horizon) problemini (Liddle 2003) çözmek için başlangıçta yetersiz kalmıştır. 2013 yılında Planck uzay teleskobunun resmettiği evrende birbirinden uzak uç bölgelerin aynı sıcaklıkta olmasının (ufuk problemi) sebebi açıklanamıyordu. Bununla beraber diğer bir kozmolojik problem olan düzlük (flatness) problemi de klasik büyük patlama kuramı ile açıklanamıyordu. Çünkü standart kozmoloji modelindeki klasik sıcak büyük patlama, evrenin eğri bir yapıda olması gerektiğini ön görür. Yani, düz bir yapıyı ön görmez. Bu

modelde oldukça sıcak bir tekillikten başlayan evrenin başlangıçtaki bu sıcak yapısı yapılan gözlemlerle uzayın her tarafından eşit büyüklükte gelen bir çeşit radyasyonla (kozmik arka plan ışınımı) desteklendi. Bu veriler evrenin oldukça düz bir yapıda olduğunu gösterirken, evrenin neden bu kadar düz olduğu açıklanamıyordu.

Yukarıda bahsedilen kozmolojik problemlerin çözümü noktasında Alan Guth, 1981 yılında evrenin büyük patlama tekilliğinden sonra çok kısa bir süre için çok hızlı (ışık hızından büyük) bir şekilde ivmelenerek genişlediğini ifade eden''**şişme modeli**'' ni öne sürdü (Guth 1981). Çok aşırı sıcak bir tekillikle başlayan evren, belli bir süre çok hızlı bir şekilde şişerek genişliyordu. Bu modelde evrenin doğumu esnasında ölçek çarpanı ivmeleniyordu. Yani ölçek çarpan için $\ddot{a} > 0$ ise, bu durum şişmeye (inflation) karşılık gelir (Liddle 2003).

Guth ile standart kozmolojik modelde yerini alan evrenin erken zaman ***şişme*** kavramı, daha sonra farklı ele alınma biçimiyle ve kuramsal olarak farklı modellerin kurulmasıyla irdelenmiştir. Bunlardan biri, kütle-çekim kuramında ilk defa yüksek dereceden terim kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Evrenin erken zamandaki şişmesinin radyasyon bölgesine kadar devam ettiğini belirten ve Starobinsky şişmesi olarak adlandırılan bu model, Einstein (R) terimine R^2 terimi eklenmesiyle oluşturulan bir modifiye kütle-çekim kuramıdır. Kuramın alan denkleminden evrenin erken zaman dönemi için büyük eğrilik durumunda Starobinsky teriminin (R^2) Einstein terimine baskın olduğu bir kozmolojik şişme modeli elde edilir (Starobinsky 1980). Bu şişme modelindeki genişleme yaklaşık de Sitter uzay-zamanı için ifade edilen genişlemeyi verir. Bu şişmeyi, yakın zamanda Planck uzay teleskobundan gelen bilgiler tam olarak desteklemiştir (Planck Collaboration 2013). Ayrıca BICEP2 gözlemlerinden elde edilen bilgiler de Starobinsky şişmesini büyük ölçüde doğrular mahiyettedir (Ade ve ark. 2014). Diğer yandan Starobinsky modeli modifiye edilerek bunun üzerinde farklı çalışmalar da yapılmıştır (Dayan ve ark. 2014, Sebastiani ve ark. 2014).

1.5. Evrenin Radyasyon ve Toz Bölgeleri (Deselerasyon)

Friedmann denklemlerinin çözümü yapılırken bu denklemdeki k'nın alacağı -1, 0 ve +1 değerlerine göre (açık, düz, kapalı evren modelleri) çözümler yapılır. Friedmann denklemi evrenin şimdiki veya geç zaman kozmik genişlemesini kozmolojik sabit kullanılmadan tam olarak betimleyemez. Çözümleri daha çok evrenin şişmeden

sonraki erken zaman gelişim aşamalarını gösterir. Bu sebeple evrenin erken zaman gelişim döneminde kozmolojik olarak en iyi bilinen aşamaları ***radyasyon*** ve geç zaman olarak da alınabilecek maddenin baskın olduğu ***toz*** bölgesi diye adlandırılan aşamalarıdır (Carroll 2004). Bu aşamaları Einstein denkleminden elde edilen Friedmann denklemlerinin ölçek çarpanı'nın üstel çözümleri tam olarak açıklamaktadır.

Radyasyon bölgesinde evrendeki maddenin formu relativistik (foton, nötron proton elektron vb.) parçacıklar biçiminde olup, büyük patlama tekilliğini takiben radyasyon bölgesine kadar devam eden şişmeden sonra evren, bu relativistik parçacıkların etkisi ile halen çok sıcaktır. Evren genişlemeye devam ettikçe artan hacmi ile beraber bu parçacıkların basıncı ve birbiriyle çarpışırkenki (azalan oranda) ortaya çıkan sıcaklık ve doğal olarak ta uzay-zaman üzerindeki bu sıcaklık etkisi kozmik zamanda azalacaktır. Giderek soğuyan evren bu parçacıkların hızını azaltığından serbest biçimde hareket eden elektronlar düşük hızdaki protonlara bağlanarak atomların ve dolayısıyla moleküllerin meydana geldiği, maddenin kabuk bağladığı relativistik olmayan maddenin baskın olduğu ''***toz*** bölgesi'' olarak adlandırılan aşamaya geçilir. Kozmolojide bu aşamalar ile birlikte diğer tüm aşamalar durum denklemi parametresi ile betimlenir.

Bu aşamaları gösteren standart Friedmann denkleminin ölçek çarpan üstel çözümüne geçmeden önce ideal akışkan için durum denklemini ve durum denklemi parametresinin (w) tanımını irdeleyeceğiz.

Durum denkleminin yazılmasında iyi bilinen bir yol olan termodinamikten faydalanılabilir (Liddle 2003, Ryden 2006). Bu çerçevede, ısı alışverişinin olmadığı adyabatik süreç için termodinamiğin birinci yasası:

$$dE = -pdV \tag{1.17}$$

şeklinde yazılabilir. Adyabatik bir sistem için dış çevre ile enerji alışverişi olmadığından sistemdeki enerji biçim değiştirse dahi korunur. Bu yüzden (1.17) denkleminden enerji korunum denklemi türetilebilir. Burada adyabatik bir sistem için E toplam enerji, p basınç ve V hacmi gösterir. (1.17) denkleminin zamana göre türevi alındığında,

$$\frac{dE}{dt} = -p\frac{dV}{dt} \tag{1.18}$$

biçiminde yazılan dinamik bir denklem elde edilir. Einstein'in ünlü $E = mc^2$ formülünden hareketle $c = 1$ alınıp $E = m$ eşitliğine $m = \rho V \equiv \rho\frac{4}{3}\pi R^3$ ifadesi yazılarak zamana göre türev alınırsa (burada sistem küresel simetrik olarak kabul edilir),

$$\frac{4}{3}\pi R^3\dot{\rho} + \rho 4\pi R^2\dot{R} = \frac{dE}{dt} \tag{1.19}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki $4\pi R^2\dot{R}$ terimi, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ile tanımlanan hacmin türevidir. $\frac{dV}{dt}$ ifadesi ve (1.19) ile verilen eşitlik (1.18)'de verilen denklemde yerine yazıldığında ve (1.11) eşitliği de göz önüne alındığında genişleyen uzay-zaman için aşağıdaki enerji korunum denklemi elde edilir (Liddle 1999):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0\ . \tag{1.20}$$

Bu denklem mükemmel bir akışkan için ayrıca durum denklemi olarak adlandırılır. ρ akışkanın yoğunluğu ve p akışkanın basıncı olmak üzere durum denklemi parametresi (Dodelson 2003),

$$w = \frac{p}{\rho} \tag{1.21}$$

şeklinde verilir ve zamandan bağımsız bir parametredir. (1.20) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü de (1.21) ve (1.11) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}\ . \tag{1.22}$$

Burada ρ_0 integralden gelen sabit bir değerdir.

Düz uzay-zaman için (1.14) ile verilen Friedmann denkleminde $w \neq -1$ olmak üzere bu denklem, ölçek çarpanı'nın $a = a_0 t^h$ şeklinde üstel çözümünü gerektirir. (1.22) ile verilen enerji yoğunluğu da kullanılarak ölçek çarpanı'nın üstel terimi

$$h = \frac{2}{3(1+w)} \tag{1.23}$$

biçiminde hesaplanır.

Radyasyon bölgesinde enerji yoğunluğu

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \tag{1.24}$$

ile verilir (Liddle 2003). Burada a ölçek çarpanı'dır. (1.24) ifadesinden görüleceği üzere evren genişlerken radyasyonun enerji yoğunluğu sürekli azalır. (1.24) ifadesini (1.22) ile verilen enerji yoğunluğu eşitliğinde yazarsak radyasyon evresinde durum parametresinin $w = \frac{1}{3}$ olduğu görülür. Bu değer (1.23)'de yazılırsa ***radyasyon*** evresi için h'nin değeri

$$h = \frac{1}{2} \tag{1.25}$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuca göre ölçek çarpanı $a \sim t^{\frac{1}{2}}$ şeklindedir. Burada ölçek çarpanı'nın zamana göre ikinci türevi için $\ddot{a} < 0$ olduğu görülür. Yani evren radyasyon bölgesinde iken ***deselerasyon*** (negatif ivme) ile genişlemektedir.

Toz bölgesinde ise $p = 0$ olduğundan (1.21) eşitliği göz önünde bulundurularak (1.23) ifadesinden h değeri

$$h = \frac{2}{3} \tag{1.26}$$

şeklinde elde edilir. Ölçek çarpanı $a \sim t^{\frac{2}{3}}$ olur ve $\ddot{a} < 0$ olduğundan bu bölgede de deselerasyon ile genişleme vardır.

1.6. Evrenin Şimdiki (veya Geç Zaman) İvmelenmesi-Karanlık Enerji

Büyük patlamadan sonra çok büyük bir hızla genişleyen evren için yukarıda da bahsedildiği gibi maddenin baskın olduğu toz evresinde iken oluşan galaksilerin kütle-çekim etkisi (galaksilerin birbirlerini çekmesi) ile evrenin genişleme hızının zamanla yavaşladığı düşünülür. Fakat 1988 ile 1998 yılları arasında yapılan gözlemler evrenin

erken zamandaki ivmeli şişmesine benzer bir şekilde tekrar artan bir ivmeyle hızla genişlediğini göstermektedir (Goldhaber 2009). Bunu destekler mahiyette 2011 yılında Nobel fizik ödülünü kazanan Saul Perlmutter ve arkadaşları tarafından uzak süpernovalar üzerine yapılan inceleme sonucunda bu ivmelenmeyi kanıtlamışlardır (Nobelprize 2015). Bu beklenmeyen duruma karşı kuramcılar bunun sebebinin ‘‘karanlık enerji’’ olarak adlandırılan enerjinin bilinmeyen bir formu olduğu fikrini öne sürdüler.

Kozmik arka plan ışınımının Planck-2013 gözlemleri, evrenin uzaysal olarak düz olmasının yanı sıra içindeki madde bileşenlerinin %68.3'nün karanlık enerjiden, %26.8'nin karanlık maddeden oluştuğunu göstermektedir (Ade ve ark. 2013). Geriye kalan %4.9'luk kısmı ise bilinen normal maddeden oluşmaktadır.

Kozmolojik kanıtlar ile evrenin bu denli ivmeli genişlemesine neden olduğu düşünülen ve neredeyse evrenin %95'ini oluşturan karanlık madde-enerji formunu açıklamaya yönelik birçok matematiksel kuram geliştirilmiştir. Bu matematiksel kuramlar içersinde karanlık enerjiyi tarif eden iki temel başlık vardır (Peebles 2003, Sami 2009):

- Birincisi, Einstein'nin Genel Göreliliği içinde kozmolojik sabitle ortaya çıkan karanlık enerji kavramıdır,
- İkincisi ise modifiye edilmiş kütle-çekim kuramlarıdır (De Felice 2010).

Birinci durum, standart Einstein-FRW denkleminin modifikasyonundan başka bir şey değildir. Bu durum şöyle de gösterilebilir: (1.8) ile verilen ve kozmolojik sabiti içeren Einstein denkleminin zaman bileşenli I.FRW denklemi

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.27}$$

şeklindedir. Burada kozmolojik sabit için $\Lambda = 0$ alındığında, bu denklem (1.14) ile verilen standart Einstein-FRW denklemine dönüşür. (1.27) denkleminin sağ tarafını normal madde-enerji yoğunluğu formuna benzer yazabilmek için kozmolojik sabit $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$ biçiminde tanımlanır. Burada ρ_Λ, karanlık enerji yoğunluğudur. Ayrıca $\rho_e \rightarrow \rho_\Lambda + \rho$ şeklinde normal madde-enerji yoğunluğuna karanlık enerji formunu dahil

ederek, (1.27) denklemini $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_e}{3}$ biçimindeki modifiye edilmiş standart Einstein-FRW denklemi formunda yazabiliriz. Burada, ρ_e etkin enerji yoğunluğudur. Bu denklem daha önce ifade ettiğimiz radyasyon ve toz bölgelerini veren çözümlerin yanı sıra ρ_Λ'yı da içerdiği için artık negatif basınçlı ivmeli evreni de göstermektedir. Bu durum özetlenirse; (1.14) ile verilen standart Einstein-FRW denklemindeki enerji yoğunluğu, enerjinin değişik formlarını içinde barındıran etkin enerji yoğunluğu gibi ele alınabilir (Mikhail ve ark. 2012). Bu etkin enerji yoğunluğu baskınlık durumuna göre evrenin geç zamanında karanlık enerji yoğunluğu gibi davranırken erken zamanda ise normal madde-enerji yoğunluğu gibi davranır.

Einstein denklemine geri dönersek, evrenin geç zamanında karanlık enerji için durum denklemi parametresi $w = -1$ alınırsa yukarıda yazılan denklemin çözümü aşağıdaki gibi olur:

$$a(t) = \pm e^{t\sqrt{\frac{8\pi G\,\rho_e}{3}}}. \qquad (1.28)$$

Görüldüğü gibi burada, radyasyon ve toz bölgesindeki üstel çözüm yerine ölçek çarpanın eksponansiyel bir çözümü elde edilmiştir. Burada, $\Lambda > 0$ olmak üzere $8\pi G\rho_\Lambda = 8\pi G\rho_e = \Lambda$ biçiminde karanlık enerji baskın olarak ele alınırsa yukarıdaki çözüm maksimum simetrik yapılı bir uzay-zaman modelini ifade eder. Bu model **de Sitter** evreni diye bilinir (Carroll 1997, Nojiri ve ark. 2006). Hubble parametresinin (1.11)'de verilen formülü kullanılırsa bu **parametre** şimdiki zamanın Hubble parametresi $H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ şeklinde bir ''**sabit**'' şeklinde elde edilir. Ölçek çarpanı'nın zamana göre ikinci türevi için $\ddot{a} = \frac{\Lambda}{3} > 0$ olduğundan de Sitter evrenini verecek şekilde ivmelenerek genişleyen bir modeli betimler.

Yukarıda kısaca değinildiği üzere standart Einstein-FRW denklemine eklenen kozmolojik sabit ile modifiye edilen bu denklem, karanlık enerjiye bir açıklama getirmektedir. Bunun dışında örneğin, quintessence (öz, cevher) türü veya phantom (hayalet) türü bir skaler alandan da karanlık enerji (ivmelenme) formu elde edilebilir (Capozziello 2002, Caldwell 2002, Sami 2009). Burada durum denklemi parametresinin

$-1 < w < -\frac{1}{3}$ aralığında verilen evrenin quintessence bölgesi olarak adlandırılan karanlık enerji türü, quintessence skaler alanı diye bilinen normal skaler alan kullanılarak tanımlanır (Fujii 1982, Caldwell ve ark. 1998, Peebles ve Vilenkin 1999, Sami 2009). Durum denklemi parametresi $w < -1$ ile verilen phantom bölgesi türü karanlık enerji ise phantom skaler alanı ile ilişkilendirilir. Bu skaler alanda kinetik terim negatif işaretlidir (Caldwell 2002, Nojiri ve Odintsov 2003, Cline ve ark. 2004). Bunların dışında $w > -1$'den $w < -1$'e geçişi tanımlayan quintom modeli vardır ve burada iki tane skaler alan tanımlaması yapılır (Linde 1991, 1994, Wei and Cai 2006).

Bu tez çalışmasında skaler alan kullanılmadan quintessence ve phantom bölgeleri karanlık enerji durumları kozmolojik entropi yasası çerçevesinde elde edilmiştir.

Einstein Genel Görelilik denkleminde kozmolojik sabit ile karanlık enerjiye yapılan vurguya benzer bir biçimde, Einstein denklemi değişik biçimlerde modifiye edilerek karanlık enerjiye yeni ve farklı bakış açıları oluşturulmuştur. Örneğin, bu modifiye kütle-çekim kuramlarından bir tanesi Einstein terimini (R) fonksiyon biçiminde ifade eden ve daha genel bir kütle-çekim kuramı olan $f(R)$-gravite'dir (Sotiriou 2007, Faraoni 2008, Michail 2012). Bu kurama ait eylem integralinin varyasyonundan elde edilen alan denklemleri kullanılarak yazılan modifiye edilmiş Friedmann denklemlerinden karanlık enerjiyi betimleyen terimler, seçilen özel modellere göre çeşitli bakış açılarıyla karanlık enerjiyi açıklamaya çalışır. Yani burada yapılan iş temel olarak Einstein terimini fonksiyonel biçimde modifiye edip, (1.27)'de verilen yapıya benzer bir şekilde standart Einstein denklemine göre fazladan terim elde etmek ve karanlık enerji ile ilgili değerlendirmeler yapmaktır.

Benzer yaklaşımlı diğer önemli kütle çekim modifikasyonları: Brans-Dicke kuramı (Sotiriou 2007), Gauss-Bonnet kuramı, fonksiyon biçiminde modifiye edilmiş Gauss-Bonnet $f(G)$-gravite (Nojiri ve ark. 2005), hem Einstein terimini hem de Gauss-Bonnet terimini içinde barındıran $F(R,G)$-gravite, $f(T)$ modifiye teleparallel kütle-çekim kuramı, skaler-tensör ve TeVeS kuramları ve Horava-Lifshitz kuramlarıdır (Mikhail 2012). Tüm modifiye edilmiş kuramlar, evrenin tekrar ivmelenmesine neden olduğu düşünülen karanlık enerjinin ne olabileceğine yönelik araştırmalardır. Bu modifikasyonlar kullanılarak durum denklemi parametresi için $w < -\frac{1}{3}$ veya $w < -1$

şeklinde karanlık enerji tanımları elde edilir. Karanlık enerjiye ait parametre elde edilirken genelde herhangi bir skaler alan kullanılmaz. Fakat bazen buradaki geometrik kuramlara skaler alanlar da dahil edilerek de karanlık enerji tanımlaması yapılır.

Değindiğimiz bu modifikasyonlar temel olarak uzay-zamanın geometrisi ile alakalıdır. Örneğin, standart Einstein-FRW denkleminin sol tarafı geometri ile alakalıyken sağ tarafı maddeye ilişkin bilgiler içerir. Madde ile uzay-zaman geometrisi birleşik formdadır. Benzer biçimde yapılan modifikasyonlarla tanımlanan fazladan geometrik terimlerin kullanılmasıyla karanlık enerjinin değişik formlarına işaret edilebileceği düşünülmektedir.

Bu çalışmada anılan kuramlar içerisinde αR^2 terimini içeren genişletilmiş Gauss-Bonnet-gravite ele alınmıştır.

Gauss-Bonnet-gravitede eylem integrali (Nojiri ve Odintsov 2005),

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left[\frac{1}{2k^2}R + f(G) + \mathfrak{L}_m\right] \tag{1.29}$$

biçiminde verilir. Buradaki $G = R^2 - 4\,R_{\mu\nu}\,R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\gamma\delta}\,R^{\mu\nu\gamma\delta}$ Gauss-Bonnet değişmezini ve $\mathfrak{L}_m$ ise madde lagranjiyanını betimler.

Yukarıda verilen eylem integralindeki $f(G)$ fonksiyonu standart Einstein-FRW denklemine göre fazladan eklenen terim olup karanlık enerjiyi üretir. Ayrıca farklı yaklaşımlarla yeni kozmolojik özellikler hakkında evrenin tarihsel gelişiminin yanı sıra sonlu zaman tekillikleri ve farklı modeller üzerine çalışmalar da yapılmıştır (Nojiri ve Odintsov 2005, Cognola ve ark. 2006, Nojiri ve Odintsov 2006, Nojiri ve ark. 2007, Goheer ve ark. 2009, Ito ve Nojiri 2009, Alimohammadi ve Ghalee 2009, Sadeghi ve ark. 2009, Sadeghi ve ark. 2009, Yong Zhou ve ark. 2010, Garcıa ve ark. 2010, Rastkar ve ark. 2011, Bamba ve ark. 2010, 2013, 2014, Zhao ve ark.2012, Andrey ve ark. 2013, Xu Jiang ve ark. 2013).

Bu tez çalışmasında ikinci önemli nokta olarak daha genel modifiye kütle-çekim kuramı olan ve fonksiyonel biçimde içinde eğrilik skaleri ve Gauss-Bonnet değişmezini barındıran $F(R,G)$ kütle çekim kuramı kullanılmıştır. Eylem integrali;

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left[\frac{1}{2k^2}F(R,G) + \mathfrak{L}_m\right]. \tag{1.30}$$

şeklinde tanımlanır. Modifiye kütle-çekim kuramları içinde $F(R,G)$-gravite üzerine farklı kozmolojik çalışmalar da yapılmıştır (Cognola ve ark. 2006, Alimohammadi ve Ghaleev 2009, Elizalde ve ark. 2010, Dombriz ve Gómez 2012, Atazadeh ve Darabi 2014).

Standart Einstein kuramı ve modifiye kütle-çekim kuramlarından elde edilen w durum denklemi parametresi ile evrenin aşamaları değerlendirilir. Yukarıda da kısaca değinildiği üzere w parametresinin değerleri için evren;

- $w \geq 1$ → Büyük patlamadan sonraki şişme durumu (burada $w = 1$ yoğun sıvı evresidir),
- $w = \frac{1}{3}$ → Şişmenin bittiği ve radyasyonun baskın olduğu evre,
- $w = 0$ → Basıncın sıfır olduğu tozla dolu aşama. Yani maddenin baskın olduğu evre,
- $-1 < w < \frac{-1}{3}$ → Etkin quintessence aşaması,
- $w = -1$ → Şişme faz durumuna geçiş, kozmolojik sabit,
- $w < -1$ → Etkin phantom aşaması.

Yukarıda verilen $w = \frac{-1}{3}$ sınır değeri evrenin ivmelenme faz durumu olarak da bilinir. Fakat evren bu değerde henüz ivmelenmeye başlamamıştır. Evren, w'nın bu değeri ile ivmelenme fazına geçişin başlangıcındadır.Daha genel bir çerçevede ele alınırsa evrenin üç temel gelişim aşamasının olduğu görülür. Bunlar:

1. Büyük patlamadan hemen sonra şişme (inflation) durumu ($w \geq 1$),
2. Deselerasyon fazı ile genişleme durumu (Radyasyon ve toz bölgesi),
3. İvmeli genişleme durumu (quintessence ve phantom bölgesi).

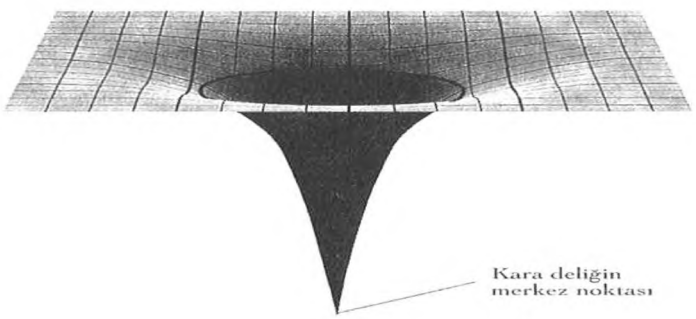
Burada üçüncü maddede verilen ivmeli genişleme durumu bir yönüyle evrenin en baştaki şişme durumuna benzer bir dinamik yapıdadır. Fakat evrenin erken zaman şişmesi şimdiki genişlemeden kat kat daha hızlıydı. Örneğin, klasik kozmolojik sabit yaklaşımının dışında kütle-çekim alan denklemlerinin ölçek çarpanın üstel $a = t^h$ çözümü araştırıldığında erken zaman şişmesinin elde edilmesi için h değerinin $h \gg 1$ şeklinde 1'den çok büyük olması gerekmektedir (Sadeghi ve ark. 2009). Öte taraftan evrenin geç zaman ivmelenmesi için de 1'e yakın olacak şekilde (gözlemlerle

uyumluluğu açısından) $h > 1$ olarak ele alınmaktadır. Her iki durum da ivmeli genişlemeyi gösterecek şekilde $\ddot{a} > 0$ 'dır.

Evrenin gelecek sonlu zamandaki tekillikleri üzerine de çalışmalar yapılmıştır: eğer evren Phantom faz sürecinde ise sonlu bir t_s zamanda büyük çöküş ile sonuçlanacak bir tekilliğe gider (Big Rip) (Nojiri ve ark. 2005). Bu bağlamda modifiye kütle-çekim kuramında karanlık enerji modelleri içerisinde gelecek zaman tekilliğini gösteren örnekler bulunmaktadır (Bamba ve ark. 2010, 2013).

1.7. Termodinamik Yasaları ve Kütle-Çekimsel Geometri

Genel Göreliliğin önemli sonuçlarından bir diğeride Einstein denklemlerinin kara delikleri öngörmesidir. İlk defa Schwarzschild'ın matematiksel olarak ifade ettiği çözümler (bugün ''Schwarzschild çözümü'' olarak ta bilinmektedir) ile kütlesi çok büyük bir yıldızın belli kritik küçük bir bölgede yoğunlaşması ile o bölge (uzay- zaman) öyle bir eğrilir ki oluşan cismin (kara deliğin) olay ufkuna giren ışık dahil olmak üzere herşey bu eğrilik etkisiyle karadelik tarafından yutulur ve karadeliğin bir parçası olur.



Şekil 1.7. Schwarzschild çözümünün betimlediği kara delik modeli. Karadeliğin olay ufkuna giren her cisim gök cisminin merkezine doğru hareket edecektir.

Şekil 1.7'den kara deliğin yüzeyinde ''görünen *olay ufku*'' yakınlarına gelen cisim veya herhangi bir şey kara deliğin merkez noktasına doğru inanılmaz bir şekilde çekilir. Klasik yaklaşıma göre kara deliğe düşen veya olay ufkuna giren bir cisim (ışık dahil) tekrar dışarı çıkamaz. Yani cisim ile ilgili herhangi bir bilgi kara delikten tekrar geri alınamaz. Fakat kuantum düzeyinde siyah cisim ışıması gibi kara delikler de bir sıcaklık ile termal ışıma (Hawking ışıması olarak bilinir) yayar (Hawking 1975, Gibbons ve Hawking 1977). Bu ışıma karadeliğin olay ufkunun yakınlarında gerçekleşen kuantum düzeyinde parçaçık-antiparçacık çiftlerinin yaratımı ile ilgilidir.

Olay ufkunun çok yakınında yaratılan bu çiftlenimli parçacıklardan biri kara delik tarafından çekilirken diğeri kütle çekimden kurtulabilir ve bu parçacık olay ufku dışındaki bir gözlemci için bir ışıma olarak görülür. Bu ışıma ise sıcaklık ve ısı geçişlerinden dolayı entropi ile ilişkili olup termodinamiksel sıcaklık (Hawking sıcaklığı), entropi (Bekenstein entropisi olarak bilinir) ve kara delik arasında bir bağlantı söz konusudur (Bekenstein 1973). Bu sıcaklık ve entropi görünen ufuk veya olay ufku yüzeyindeki kütle çekimi ile orantılıdır. Yani karadelik termodinamiğinde kara deliğin yüzey alanı ve entropisi ilişkili iken yüzey kütle çekimi ise sıcaklıklığı ile ilişkilidir (Bekenstein 1973, Hawking 1975). Bu doğrultuda kozmolojik olarak benzer şekilde evren görünen ufuk (R_A) ile sınırlandırılan termodinamik bir sistem olarak ele alınıp Einstein denklemi (geometri) ile termodinamiğin yasaları arasında bir ilişki ve tanımlama yapılır (Chakraborty ve ark. 2010).

Görünen ufuk yüzeyi üzerindeki Hawking sıcaklığı (T_A) ve Bekenstein entropisi (S_A) görünen ufuğun yarıçapı ile bağlantılı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır (Jacobson 1995, Padmanabhan 2005):

$$T_A = \frac{1}{2\pi R_A}, \quad S_A = \frac{A}{\tilde{\mathrm{G}}}. \tag{1.31}$$

Burada $A = \pi R_A^2$ görünen ufkun yüzey alanı (Bardeen ve ark. 1973) ve $\tilde{\mathrm{G}}$ ise Newton sabitidir.

Genel olarak evrenin görünen ufuğunun yarıçapı ile Hubble sabiti ilişkilendirilip kütle-çekim kuramları için (Friedmann denklemleri ile) GKEY elde edilir. Yasa elde edilirken görünen ufuğun entropisinin dinamiği (zamanla değişimi yani $\dot{S}_A$) hesaplanır. Daha sonra görünen ufuk içindeki maddenin entropisinin zamanla değişimi ($\dot{S}_{iç}$) hesaplanır. GKEY bu terimlerin toplamı olarak zamanla artan bir ifade biçiminde elde edilir:

$$S_{toplam} = \dot{S}_A + \dot{S}_{iç} \geq 0. \tag{1.32}$$

Bu bağlamda tezdeki birinci amaç, $R + f(G)$ kuramının eylemine αR^2 terimini ekleyerek Gauss-Bonnet kuramını genişletmek ve varyasyon hesabıyla yeni alan

denklemlerini elde etmektir. Burada eklenen αR^2 terimi ile evrenin erken zaman şişme durumu diğer aşamalara dahil edilmiştir. Genişletilmiş kuramın denklemleri kullanarak modifiye edilmiş Friedmann denklemlerini yazıp maddenin de baskın olduğu durumda ölçek çarpanın üstel *tam* çözümü ile evrenin *erken zaman şişme, deselerasyon* ve *geç zaman ivmelenme* durumlarını matematiksel olarak tek bir formda ifade etmektir.

Problem için eylem integrali,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k^2}R + f(G) + \alpha R^2 + \mathfrak{L}_m\right] \tag{1.33}$$

biçiminde seçilecektir. Burada α küçük bir parametredir.

İkinci amaç olarak, (1.30) eyleminin alan denklemlerinden hareketle seçilen $F(R,G) = f_1(G) + f_2(R)$ modeli için gözlem sonuçlarına uygun olacak şekilde evrenin şişme, deselerasyon ve ivmelenmesi hakkında çözümler üzerine tartışmaktır. Evrenin bu gelişim aşamalarını, söz konusu kütle-çekim kuramını görünen ufuk ve olay ufku üzerinde yapılandırılan GKEY çerçevesinde ele alarak seçilen modelin evrenin belirtilen aşamalarını tek bir formda ifade ettiğini göstermektir. Buna ek olarak evrenin genişleme karakteri bakımından gelecekteki olası davranışı hakkında GKEY çerçevesinde öngörülerde bulunmaktır.

Amaçlardan biri de evrenin büyük patlama tekilliğinden sonra geç zaman ivmelenmesine kadar ki süreçte, evrenin yaşam döngüsünü açıklamaya çalışan kozmolojik parametreyi (w), (1.30) eyleminden elde edilen yeni alan denklemlerini görünen ufuk ve gelecek olay ufku için oluşturulan GKEY geçerliliğine uygulayarak ayrıntılı bir şekilde yeniden yorumlamak ve modelin öngördüğü evrenin yaşam aşamalarını GKEY çerçevesinde açıklamaktır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Starobinsky (1980) yılında yaptığı çalışmayla evrenin erken zaman şişme evresini kütle-çekim kuramı kullanarak gösteren ilk kişi olmuştur. Basitçe, Einstein terimine $R + R^2$ şeklinde R^2 terimini ekleyerek evrenin büyük patlamadan sonraki şişme durumunu gözlemlerle tam olarak uyumlu biçimde açıklayabilmiştir. Yakın geçmişte lnR ve R^2 terimleri ile Einstein kütle-çekim kuramı yeniden modifiye edilerek evrenin erken zaman şişme ve geç zaman ivmelenme durumları da ifade edilebilmiştir (Nojiri ve Odintsov 2003). Diğer yandan, yüksek dereceli terimler ile modifiye kütle-çekim kuramında kozmolojik ivmelenme ve karanlık enerji durumları da tartışılmıştır. Einstein eylemine ilk olarak R^{-n} terimi eklenmesiyle kozmik ivmelenme ile phantom durumları elde edilmiştir. Daha genel modifiyeli eylem için R^{-n} terimine R^2 terimi ve $R^{\alpha}L_d$ şeklinde karanlık enerji bağlantılı terimler de eklenerek evrenin geç zaman davranışı ve evrenin sonlu zamanda çöküş tekillikleri incelenmiştir (Nojiri ve Odintsov 2004).

$\frac{1}{2k^2}R + f(G) + \mathfrak{L}_m$ lagranjiyan yoğunluğu ile tanımlanan modifiye Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramının alan denklemlerinden elde edilen I. Friedmann denklemi kullanılarak evrenin geç zaman ivmelenmesi elde edilebilmektedir (Nojiri ve ark. 2005). İlgili çalışmada, skaler alan kullanılmadan modifiye Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramı ile evrenin deselerasyon bölgesinden geç zaman ivmelenme (quintessence fazı, de Sitter uzayı, phantom faz durumuna geçiş) bölgesine geçiş durumunun elde edilebileceği gösterilmiştir. Yine Nojiri ve ark. bu çalışmasında ölçek çarpanın $a = a_0 t^h$ ve Gauss-Bonnet fonksiyonunun $f(G) = G^{\sigma}$ şeklinde yazılan üstel çözümlerinde $\sigma < 0$ şeklinde phantom durumunun elde edilebileceği gösterilmiştir. Yani σ 'nın pozitif olması durumunda phantom durumu elde edilemez. Diğer taraftan yukarıda verilen lagranjiyan yoğunluğu için Einstein terimi ve madde ihmal edilerek saf Gauss-bonnet kütle-çekim kuramında $\sigma > \frac{1}{4}$ olacak şekilde σ'nın pozitif değeriyle de evrenin phantom bölgesinde olduğu gösterilmiştir.

Nojiri ve arkadaşları 2007 yılında yayınladıkları makalelerinde modifiye edilmiş kütle-çekim kuramları (skaler tensör kuramı, $f(R)$ ve Gauss Bonnet kuramları) ile evrenin genişleme aşamalarını incelediler. Bunlardan $f(R)$ kuramının Friedmann

denkleminin çözümü için $f(R) = -\frac{\alpha}{R} + \frac{R}{2k^2} + \beta R^2$ modeli ile evrenin erken zaman şişme evresinde üçüncü terim, deselerasyon bölgesi için ikinci terim ve ivmelenme içinse birinci terim baskın alınarak evrenin genişleme süreçleri incelenmiştir.

Diğer taraftan başka bir çalışmada, $R + f(R)$ tipi bir lagranjiyan yoğunluğu kullanılarak elde edilen Friedmann denkleminin üstel bir çözümü olmamasına rağmen (Hu ve Sawicki 2007, Oyaizu ve ark. 2008) Goheer ve arkadaşları 2009'da yayınladıkları makalelerinde yılındaki makalede madde lagranjiyan yoğunluğunun dahil olduğu $f(R)$ kütle-çekim kuramında yazılan Friedmann denkleminin üstel tam çözümünün var olduğunu göstermişlerdir.

Ayrıca modifiye edilmiş Gauss-Bonnet kuramının I. Friedmann denkleminin kozmik zaman cinsinden tam çözümleri de literatürde yer almaktadır (Goheer ve ark. 2009). Söz konusu çalışmada kurama ait Friedmann denklemi kozmik zaman cinsinden yazıldıktan sonra ölçek çarpan üstel biçimde tanımlanıp tam çözüm elde edilmiştir. Daha sonra bulunan çözüm Gauss-Bonnet değişmezi cinsinden aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$f(G) = c_1 G + c_2 G^{\frac{-h+1}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h^2(h-1)}{(h+1)} \quad \hat{G}^{\frac{1}{2}} + A_{hw} \hat{G}^{\frac{3}{4}h(1+w)} \tag{2.1}$$

Buradaki c_1 ve c_2 integral sabitleri olup

$$A_{hw} = \frac{-2^{2-\frac{9h(1+w)}{4}} 3^{-\frac{3}{4}h(1+w)} (h-1)\rho_0 a_0^{-3(1+w)}}{4-h(19+15w)+3h^2(4+7w+3w^2)}, \tag{2.2}$$

$$\hat{G} = \frac{24G}{\beta}, \tag{2.3}$$

$$\beta = 24h^3(h-1) \tag{2.4}$$

biçimindedir. (2.1) denklemindeki birinci terimin Friedmann denklemine bir katkısı olmadığı için $c_1 = 0$ seçilebilir. İkinci terim ise evrenin herhangi bir aşaması için değişmez (invaryant) olduğundan $c_2 = 0$ alınabilir (Bamba ve ark. 2010, 2013). Fakat h'nin reel değerli w parametresi cinsinden bu terim için reel bir sonuç elde edilebilir (Goheer ve ark. 2009). Böylelikle (2.1)'deki integrasyon sabitlerinin sıfıra eşit seçilmesi ile reel değerli fonksiyon aşağıdaki biçimde olacaktır,

$$f(G) = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{h^2(h-1)}{(h+1)} \quad \hat{G}^{\frac{1}{2}} + A_{hw}\hat{G}^{\frac{3}{4}h(1+w)} \,. \tag{2.5}$$

Yine aynı çalışmada Goheer ve arkadaşları (2.5) denklemiyle verilen fonksiyonun evrenin erken zaman deselerasyon bölgesinde fiziksel değeri için $G < 0$ durumundan kaçınmak ve geç zaman ivmelenmesi ile bütünleşik bir gösterim yapılmak için mutlak değer kullanmışlardır;

$$f(G) = A_{hw}\left|\hat{G}\right|^{\frac{3}{4}h(1+w)} - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{h^2(h-1)}{(h+1)} \quad \left|\hat{G}\right|^{\frac{1}{2}} \,. \tag{2.6}$$

Böylece evrenin deselerasyon evresinden (birinci terimle) ivmelenme evresine (ikinci terimle) geçişi bir arada tek bir formda göstermeyi başarmışlardır.

Diğer taraftan $f(G)$ ile elektromanyetik alanın ($F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$) minimum olmayan kütle çekimsel bağlantısını ifade eden modifiyeli eylem üzerine de çalışmalar yapılmıştır (Sadeghi ve ark. 2009). Bu eylem integrali ile evrenin erken zaman üstel şişme durumu betimlenmiştir. Ayrıca aynı eylem tanımına Gauss-Bonnet fonksiyonu eklenerek elde edilen yeni eylem integralinden evrenin erken zaman şişme ile beraber geç zaman ivmelenme durumları bir arada tanımlanabilmiştir. Diğer yandan, Elizalde ve ark. 2010 yılında yaptıkları çalışmalarında seçtikleri kozmolojik modellerle $f(G)$ ve $f(R,G)$ kuramlarının alan denklemleri ile evrenin erken zaman şişme ve geç zaman ivmelenmesini bütünleşik bir formda göstermişlerdir. Ayrıca, ilgili çalışmada $f(R,G)$ kuramının denklemleri ile phantom davranışlı çözümler de elde edilmiştir.

Gauss-Bonnet kütle çekim kuramına skaler alan dahil edilerek de çözümler elde etmek mümkündür (J. Sadeghi ve ark. 2009). Burada, madde lagranjiyan yoğunluğu yerine karanlık enerji lagranjıyan yoğunluğu Gauss-Bonnet fonksiyonu ile ilintili ele alınarak modifiye edilen Einstein alan denkleminden elde edilen I. Friedmann denkleminin üstel çözümü bulunmuştur. Çözüm yapılırken fonksiyon $f(G) = G^{\sigma}$ şeklinde seçilerek σ 'nın pozitif değeri ile phantom bölgesi elde edilmiştir. Daha sonra Rastkar ve arkadaşları 2011 yılında $R + f(G) + \Omega_m$ lagranjiyan yoğunluğuyla betimlenen Gauss-Bonnet kuramında üstel $a = a_0 t^h$ çözümüyle I. Friedmann denklemi (madde ile birlikte), Gauss-Bonnet değişmezi cinsinden yazarak G uzayında tam çözümlerin olabileceğini göstermişlerdir (A.R. Rastkar ve ark. 2011). Aynı Friedmann denklemi kullanılarak evrenin phantom bölgesindeki davranışı da ele alınmış ve üstel çözüm ile denklemin phantom bölgesinde de çözümünün olabileceği gösterilmiştir. Schmidt 2011 yılındaki çalışmasında $GlnG$ biçiminde Gauss-Bonnet lagranjiyan yoğunluğunu seçerek Friedmann denkleminin kozmolojik tam çözümünü hesaplamıştır. Gauss-Bonnet fonksiyonu ile minimum olmayan Yang-Mills alanının kütle çekimsel bağlantısını ifade eden eylem evrenin hem erken zaman şişme hem de geç zaman ivmelenme durumlarını ifade etmektedir (Banijamali ve Fazlpour 2011).

Gauss-Bonnet kütle çekiminde ΛCDM (Λ soğuk karanlık madde) modelinde kozmolojik çözümler de yapılmıştır (Myrzakulov ve ark. 2011). Álvaro de la Cruz ve ark. 2012 yılında yayınladıkları makalede $f(R,G)$ kuramını kullanarak ayrıntılı kozmolojik çözümler bulmuşlardır (de Sitter genişlemesi, ölçek çarpan üstel çözümü, ΛCDM çözümü). Bu çalışmada özellikle $f(R,G) = f_1(G) + f_2(R)$ tipinde seçilen lagranjiyan yoğunluğunun evrenin radyasyon ve toz bölgelerinde reel değerli olması için gerekli durumlar üstel çözüm ile ayrıntılı şekilde analiz edilmiştir.

Zhao ve ark. 2012'de hazırladıkları makalelerinde eğrilik (geometri)-madde bağlantılı Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramını tartışmışlardır. Madde lagranjiyanını $f(G)$ Gauss-Bonnet fonksiyonu ile çarparak tanımladıkları yeni eylem ifadesiyle alan denkleminden yazdıkları Friedmann denkleminin üstel çözümlerini hesapladılar. Söz konusu çalışmalarında Gauss-Bonnet fonksiyonu $f(G) \sim G^{\sigma}$ şeklinde üstel olarak ele alınmış I.Friedmann denkleminin üstel ölçek çarpanı çözümü ile evrenin geç zaman ivmeli genişleme durumları olan quintessence ve phantom bölgelerinde σ'nın durumları

incelenmiştir. Her iki bölgede de evrenin ivmelenmesi koşulunun σ' nın pozitif ve belirli değer aralıkları ile belirlenebileceğini göstermişlerdir. 2012 yılında Granda ve arkadaşları Einstein terimine skaler alan ve Gauss-Bonnet terimine kinetik bağlantılı terimler ekleyerek oluşturulan yeni kütle-çekim modelinde, quintessence ve phantom üstel çözümlerini elde ettiler. Yani ele alınan model ile evrenin söz konusu bölgelerinde üstel bir genişlemenin olup olmadığı araştırılmıştır.

Makarenko ve arkadaşları 2013'te $R + f(G) + \Omega_m$ lagranjiyan yoğunluğuyla tanımlanan Gauss-Bonnet kuramındaki Friedmann denklemini kozmik zaman cinsinden yazıp phantom üstel çözümlerini elde ettiler. Ayrıca $F(R,G)$ kuramında I. Friedmann denklemi,

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) \tag{2.7}$$

tipinde bir lagranjiyan yoğunluğuyla kozmik zaman cinsinden yine phantom çözümleri yazılmıştır. Her iki kuramda da de Sitter çözümleri de elde edilmiştir. Dayan ve arkadaşları 2014'te $f(R)$ kütle-çekim kuramında $f(R) = R + \alpha R^2 + R^2 log R$ tipi bir lagranjiyanı göz önüne alarak evrenin erken zaman şişme durumunu incelemişlerdir. Öte yandan $F(R,G)$-gravite kuramında gelecek zaman tekillikleri üzerine de farklı modeller ile çalışmalar yapılmıştır (Bamba ve ark. 2010, 2013).

Termodinamiğin birinci ve ikinci yasalarının kütle-çekim kuramlarından elde edilmesi ve uygulamaları literatürde birçok çalışmada ele alınmıştır (Cai ve Cao 2007, Wang ve ark. 2005, Sadjadi 2006, Jamil ve ark. 2010, Akbar ve Cai 2007, Gong ve ark. 2007, Debnath 2012). Davies 1988'de hazırladığı çalışmasında Einstein kütle-çekim kuramında termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasası irdelenmiştir. Jacobson 1995 yılında termodinamiğin birinci yasasından Einstein alan denklemlerini elde etmiştir. Padmanabhan 2002'de hazırladığı çalışmasında statik küresel bir uzay-zaman için Einstein denklemlerinden hareketle görünen ufuk üzerinde termodinamiğin birinci yasasını formülleştirmiştir. Chakraborty ve ark. (2010), Einstein denkleminden elde edilen Friedmann denklemini kullanarak kozmolojik olarak genelleştirilmiş entropi yasasını görünen ufkun ve madde ufuğunun toplamını kullanarak elde etmiştir. Hem quintessence hem de phantom bölgeleri için bu genel yasanın geçerliliği incelemiştir.

Sonrasında Sadjadi 2010'daki makalesinde FRW evreninde modifiye $F(R,G)$-gravite kuramı için termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasasını görünen ufuk için elde etmiştir. Görünen ufuğun içinde barındırdığı maddenin termal dengede olduğu farz edilmiş, model $F(R,G) = R + f(G)$ şeklinde Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramına indirgendikten sonra elde edilen Friedmann denkleminin $a = a_0 t^h$ üstel çözümü termodinamiğin genelleştirilmiş entropi yasasına uygulanarak evrenin deselerasyon evresinden ivmelenme aşamasına geçişi üstel terim h'nin makul aralığında bu yasa çerçevesinde elde edilmiştir. Yine aynı yazarın 2011'deki çalışmasında, modifiye Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramında termodinamiğin ikinci yasasının kuram için genelleştirilmiş biçimini elde etmiştir. Çalışmada, Friedmann denkleminin üstel ölçek çarpan phantom çözüm $a = a_0(t_s - t)^{-h}$ yazılmıştır. Çözüm elde edilen genelleştirilmiş ikinci yasaya uygulanarak üstel h terimi üzerine yasanın belirlediği çerçevede değerlendirmeler yapılmıştır.

Abdolmaleki ve ark. (2014), skaler-tensör kütle-çekim kuramında termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasası için genel bir ifade elde ettikten sonra bazı skaler-tensor modelleri için madde yoğunluğunun, ölçek çarpanın, Hubble parametresinin gelişimsel davranışlarını elde etmişlerdir. Ayrıca seçilen modellere göre söz konusu yasanın geçerliliğini incelemişlerdir. Diğer taraftan, Abdolmaleki ve Najafi 2015 yılındaki çalışmalarında modifiye Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramında görünen ufuk üzerinde termodinamiğin genelleştirilmiş ikinci yasasını ele almışlardır. Çalışmalarında seçilen $f(G)$ modelleri için evrenin erken zaman gelişim aşamalarından geç zaman phantom bölgesine olan aşamalar söz konusu yasanın çerçevesinde incelemişlerdir. Bu kozmolojik yasanın betimlediği çerçevede öngörülerde bulunmuşlardır.

3. MATERYAL ve METOT

Öncelikle $R + f(G) + \alpha R^2$ seçimine dayanan genişletilmiş Gauss-Bonnet kuramının alan denklemlerinden elde edilen Friedmann denklemlerinin çözümlerine bakacağız. Temel amaç evrenin deselerasyon ve geç zaman ivmelenerek genişlemesi ile birlikte erken-zaman şişmesini de modifiye edilmiş Gauss-Bonnet eylem integraline αR^2 terimi ekleyerek tek bir formda ifade etmektir. Burada kullanılacak yöntem modifiye $R + f(G) + \alpha R^2$ terimine göre yazılan Friedmann denklemini kozmik zaman cinsinden ifade ederek elde edilen diferansiyel denklemin çözümünü bulmaya dayanmaktadır.

İkinci amacımız daha genel olarak $f(R, G)$ -gravite kuramının alan denklemlerinin (Friedmann denklemlerinin) ölçek çarpan üstel çözümlerini elde etmektir. Takip edilen temel metod kurama ait GKEY'i kullanarak çözümlerin gösterdiği evren aşamalarını tartışmaya dayanmaktadır. Elde edilen çözümler kuramsal olup kozmolojik gözlem verileri ile karşılaştırılmıştır. Bu kısımda bu amaçlara temel olacak materyaller verilecektir

3.1. Kullanılacak Notasyon ve Gösterim

$(\mu, \nu, \beta, \gamma, \delta, \alpha, \sigma)$ şeklindeki alfabetik gösterimler dört boyutlu uzay-zamanı işaret eder. Her bir indis (0,1,2,3) değerlerini alırken, sıfır zaman bileşenini, (1,2,3) rakamları uzay bileşenlerini verir. $(i, j, k, \ldots)$ şeklinde verilen alfabetik gösterimdeki her bir indis ise sadece (1,2,3) ile uzay bileşenlerini betimler.

3.2. Kullanılacak Metrik

Bu çalışmada dört boyutlu düz uzay-zamanı betimleyen FRW metriği kullanılacaktır. Bu metrik,

$$ds^2 = h_{AB} dx^A dx^B + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \tag{3.1}$$

biçiminde yazılır (Bamba ve Geng 2011). Buradaki $\tilde{r} = a(t)r$, $h_{AB} = diag(-1, \frac{a^2}{1-kr^2})$ ve $(x^0,\ x^1 = t, r)$ olarak tanımlanır. $r = 1$ ve $d\Omega^2 = dy^2 + dz^2$ olduğunda (3.1) metriği aşağıdaki gibi olur:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]\,. \tag{3.2}$$

Bu uzay-zaman modelinde metrik tensör $g_{\mu\nu} = diag(-1, a^2, a^2, a^2)$ şeklindedir. Kontravaryant biçimi ise $g^{\mu\nu} = diag(-1, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2})$'dir. EK 1'de (6) eşitliği ile verilen Christoffel sembolünün (3.2)'de verilen metriğe göre sıfır olmayan bileşenleri hesaplandığında

$$\Gamma^t_{ii} = a\dot{a} \ , \ \Gamma^i_{it} = \Gamma^i_{ti} = \frac{\dot{a}}{a} \tag{3.3}$$

sonuçları elde edilir. Burada t ile belirtilen indis zaman bileşenini göstermektedir.

Riemann tensörü aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$R^{\rho}_{\alpha\beta\nu} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} \ . \tag{3.4}$$

Bu ifadede ρ üst indisi (kontravaryant) $g_{\mu\rho}$ metrik tensörü ile aşağıya (kovaryant) indirilebilmektedir (Dirac 1975):

$$g_{\mu\rho} R^{\rho}_{\alpha\beta\nu} = R_{\mu\alpha\beta\nu} \ . \tag{3.5}$$

Denklem (3.5) ile tanımlanan Riemann tensörünün aşağıda verilen indisleri arasında belirtilen simetriler vardır:

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} = R_{\beta\nu\mu\alpha} = R_{\nu\beta\alpha\mu} \ , \tag{3.6}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\nu} = -R_{\alpha\mu\beta\nu} \ . \tag{3.7}$$

Denklem (3.3)'te verilen sonuçlar kullanıldığında (3.2) metriğine göre (3.4)'te verilen Riemann tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri şunlardır:

$$R^i_{tti} = (\dot{H} + H^2), \tag{3.8}$$

$$R^i_{jij} = a^2 H^2 . \tag{3.9}$$

Denklem (3.4)'te ρ ve β indisleri üzerinden büzme işlemi yapıldığında Ricci tensörü elde edilir. Buna göre Ricci tensörünün tanımı

$$R_{\alpha\nu} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\sigma\nu} \tag{3.10}$$

biçiminde olmaktadır. Burada $\alpha \to \mu$ yapıldığında Ricci tensörü

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\sigma\nu} \tag{3.11}$$

formunda tekrar yazılabilir. Denklem (3.2)'de verilen metriğe göre bu tensörün bileşenleri ise

$$R_{tt} = -3(\dot{H} + H^2)\ ,\ R_{ii} = a^2(\dot{H} + 3H^2) \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilmektedir. (3.11) ifadesinin metrik tensör ile büzme işlemi $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ile Ricci skaleri (eğrilik skaleri) elde edilir. Einstein toplama kuralı ile (3.2) metriği göz önünde alındığında Ricci skaleri

$$R = 6\left[\dot{H} + 2H^2\right] \tag{3.13}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer yandan, Gauss-Bonnet değişmezi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktaydı,

$$G = R^2 - 4\,R_{\mu\nu}\,R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\gamma\delta}\,R^{\mu\nu\gamma\delta}\ . \tag{3.14}$$

(3.8), (3.9), (3.12), (3.13) ifadeleri kullanılarak Gauss-Bonnet değişmezi için

$$G = 24\left(\dot{H}H^2 + H^4\right) \tag{3.15}$$

sonucuna ulaşılır. Burada aşağıdaki eşitlikler kullanılmıştır:

$$R^{\mu\nu\gamma\delta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\gamma\rho} g^{\delta\tau} R_{\alpha\beta\rho\tau} \ , \tag{3.16}$$

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} \ . \tag{3.17}$$

3.3. $f(R, G)$-gravite'ye Doğru

$f(R,G)$ kütle-çekim kuramı hem Einstein teriminin hem de Gauss-Bonnet değişmezinin fonksiyonel biçimde ele alınmış biçimi olduğundan ilgili alan denklemini yazmadan önce adım adım Einstein denklemini, $f(R)$ kütle-çekim kuramını ve $R + f(G)$ şeklinde modifiye edilmiş Gauss-Bonnet kuramı tartışılacaktır. Daha sonra $f(R,G)$-gravite'nin alan denklemi verildikten sonra ilgili kurama ait GKEY görünen ufuk ve olay ufku için ele alınacaktır.

3.3.1. Einstein Alan Denklemi

Einstein'nin Genel Görelilik kuramının alan denklemi Einstein-Hilbert eyleminden elde edilebilmektedir. Einstein-Hilbert eylemi S_{EH} ve madde kısmı S_m ile birlikte aşağıdaki gibi verilir (Wald 1984, Carrol 1997, Wagner ve ark 2003, Sotiriou 2007):

$$S_{EH} + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi) = \int d^4x\sqrt{-g}\ \left[\frac{1}{2k^2}R + \mathfrak{L}_m\right]. \tag{3.18}$$

Burada R eğrilik skalerini ve $\mathfrak{L}_m$ ifadesi ise Ψ madde alanlarını ve $g_{\mu\nu}$ metrik tensörüne bağlı madde lagranjiyan yoğunluğunu gösterir. Minimum eylem ilkesine göre (Hamilton prensibi) (3.18) integralinin metrik tensöre göre varyasyonu sıfıra eşit olmalıdır yani $\delta(S_{EH} + S_m) = 0$. Buna göre (3.18) ifadesinden

$$\delta(S_{EH} + S_m) = \int d^4x(\delta(\sqrt{-g})\left[\frac{1}{2k^2}R + \mathfrak{L}_m\right] + \sqrt{-g}\ \delta\left[\frac{1}{2k^2}R + \mathfrak{L}_m\right]) = 0 \tag{3.19}$$

yazılır. (3.19) ifadesi aşağıdaki biçimde yeniden düzenlenebilir:

$$\int d^4x \left(\frac{1}{2k^2}\delta\left(R\sqrt{-g}\right) + \delta\left(\mathfrak{L}_m\sqrt{-g}\right)\right) = 0 \tag{3.20}$$

$$\int d^4x \frac{1}{2k^2}\left(R\delta\left(\sqrt{-g}\right) + \sqrt{-g}\delta(R)\right) + \int d^4x\, \delta\left(\mathfrak{L}_m\sqrt{-g}\right) = 0. \tag{3.21}$$

EK 1'de verilen (25.b) ve (27) eşitlikleri (3.21)'de kullanıldığında

$$\int d^4x \frac{1}{2k^2}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - R^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} = \int d^4x\,(-\delta\left(\mathfrak{L}_m\sqrt{-g}\right)) \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir. Burada $(\nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)1 = 0$ hesabı kullanılmıştır.

Diğer yandan enerji-momentum tensörü (Carrol 1997)

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2\delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m)}{\sqrt{-}\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.23}$$

şeklinde verilir. (3.22) eşitliği düzenlenerek (3.23) eşitliği de kullanıldığında aşağıda verilen meşhur Einstein denklemi elde edilecektir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k^2T_{\mu\nu}\ . \tag{3.24}$$

3.3.2. $f(R)$ Kütle-Çekim Kuramının Metrik Formalizmi

Einstein'in Genel Görelilik kuramında yazılan alan denkleminin genelleştirilmiş biçimidir. Einstein-Hilbert eyleminin içine eğrilik skaleri R yerine eğrilik skalerinin fonksiyon biçimi $f(R)$ yazılarak kuramın alan denklemleri türetilmektedir. Bu kuram üzerinde çok çeşitli tartışmalar yapılmıştır (Sotiriou ve Faraoni 2010, De Felice ve Tsujikawa 2010). Kozmolojik uygulamaları da literatürde yer almaktadır (Carrol 2005, Jaime ve ark. 2012, Faraoni 2008, Nojiri ve Odintsov 2006, Elizalde ve G´omez 2011). Bu kuramın eylem integrali aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\mathrm{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k^2}f(R) + \mathfrak{L}_m\right]. \tag{3.25}$$

(3.25)'te yazılan eylemin metrik tensöre göre varyasyonu sıfıra eşitlendiğinde, bu kütle-çekim kuramı için alan denklemleri elde edilmektedir. Alan denklemi için (3.25)'te verilen modifiye eylemin $g_{\mu\nu}$'ye göre varyasyonu alındığında

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{1}{2k^2}\left(\delta\sqrt{-g}\, f(R)\right) + \delta\left(\mathfrak{L}_m\sqrt{-g}\right)\right) = 0, \tag{3.26}$$

$$\int d^4x \frac{1}{2k^2}\left(\delta\left(\sqrt{-g}\right)f(R) + \sqrt{-g}\delta f(R)\right) = \int d^4x \left(-\delta\left(\mathfrak{L}_m\sqrt{-g}\right)\right), \tag{3.27}$$

sonuçları elde edilir. (3.27)'deki eşitliğin sol tarafında yazılan ikinci terimdeki varyasyon incelendiğinde,

$$\delta f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial R}{\partial g_{\mu\nu}} f_R \delta g_{\mu\nu} = \delta(R) f_R \tag{3.28}$$

ifadesi bulunur. Burada $f_R = \frac{\partial f(R)}{\partial R}$ biçiminde tanımlanmıştır. Hesaplanan (3.28) ifadesi (3.27)'de yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilmektedir;

$$\int d^4x \frac{1}{2k^2}\left(\delta\left(\sqrt{-g}\right)f(R) + \sqrt{-g}\,\delta(R)\, f_R\right) = -\int d^4x\, \delta\left(\mathfrak{L}_m\sqrt{-g}\right) \tag{3.29}$$

Bu eşitlikte birinci terimdeki varyasyonda EK 1'de verilen (27) eşitliği, ikinci terimdeki varyasyonda da (25.b) ile verilen ifade kullanıldığında aşağıdaki denklem elde edilmektedir;

$$\int d^4x \frac{1}{2k^2}\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f_R - \nabla_\mu\nabla_\nu f_R + g_{\mu\nu}\nabla^2 f_R\right)\delta g^{\mu\nu} +$$

$$\int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m\right) = 0. \tag{3.30}$$

(3.23)'te verilen eşitlik kullanıldığında $f(R)$-gravite için alan denklemi aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$R_{\mu\nu}f_R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f_R + g_{\mu\nu}\nabla^2 f_R = k^2 T_{\mu\nu}\ . \tag{3.31}$$

Bu alan denklemi eğrilik skalerinin fonksiyon biçimi olduğundan Einstein'nin Genel Görelilik denkleminden daha geneldir. Örneğin, bu alan denkleminde fonksiyonun $f(R) = R$ özel seçimi ile standart Einstein alan denklemi elde edilebilmektedir.

3.3.3. Modifiye Edilmiş Gauss-Bonnet Kuramı

Modifiye Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramı, Einstein eyleminin $f(G)$ fonksiyonu tarafından modifiye edilerek oluşturulan kütle çekim kuramıdır. Bu kurama ait eylem integrali aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Nojiri ve Odintsov 2005);

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k^2}R + f(G) + \mathfrak{L}_m\right]. \tag{3.32}$$

Bu eyleminin metrik tensöre göre varyasyonundan aşağıdaki alan denklemleri elde edilmektedir (Nojiri ve Odintsov 2005);

$$\frac{1}{2k^2}\left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(G) - 2RR^{\mu\nu}f_G - 4f_G R^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} + 4f_G R^{\mu}{}_{\rho}R^{\nu\rho} -$$

$$2f_G R^{\mu}{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}f_G) - 2g^{\mu\nu}R(\nabla^2 f_G) - 4R^{\beta\mu}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\nu}f_G\right) - 4R^{\nu\beta}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\mu}f_G\right) +$$

$$4R^{\mu\nu}(\nabla^2 f_G) + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\beta}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\beta}f_G\right) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\tau}f_G\right) + \frac{T^{\mu\nu}}{2} = 0. \tag{3.33}$$

3.4. $f(R, G)$-gravite

Bu çalışmada ikinci önemli nokta olarak $f(R, G)$ kütle-çekim kuramına odaklanılmış ve kuramın alan denklemlerinin ölçek çarpan üstel çözümleri elde edilmiştir. Yapılan çözümler kuramda ifade edilen GKEY kullanılarak evrenin gelişim aşamaları hakkında sonuçlar elde edilmiş ve gerekli değerlendirmeler yapılmıştır. Ayrıca ele alınan modele göre hesaplanan çözümlerin evrenin aşamalarını betimlemesi hakkında bütünleşik bir form sunduğu gösterilmiştir.

Bu kütle-çekim kuramının eylem integrali aşağıdaki biçimdedir:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k^2}f(R, G) + \mathfrak{L}_m\right]. \tag{3.34}$$

Burada da alan denklemini elde etmek için önceki başlıklarda yer alanlara benzer bir yol ile yukarıdaki eylemin varyasyonu alınacaktır. (3.34) eyleminin metrik tensör $g_{\mu\nu}$'ye göre varyasyonu sıfıra eşit olmalıdır yani

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2k^2} \left(f(R,G)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta f(R,G) \right) + \delta\left(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m\right) \right\} = 0 \quad (3.35)$$

Burada verilen eşitliğin solundaki ikinci terim aşağıdaki gibi de yazılabilmektedir,

$$\sqrt{-g}\delta f(R,G) = \sqrt{-g}(\delta R \frac{\partial f(R,G)}{\partial R} + \delta G \frac{\partial f(R,G)}{\partial G}). \quad (3.36)$$

Bu eşitlik (3.35)'te yerine yazıldığında

$$\delta S = \int d^4x \frac{1}{2k^2} \left(f(R,G)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\frac{\partial f(R,G)}{\partial R}\,\delta R + \sqrt{-g}\frac{\partial f(R,G)}{\partial G}\,\delta G \right) +$$

$$\int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m\right) = 0 \quad (3.37)$$

ifadesi elde edilir. EK 1'deki (25.b) ve (27) ifadeleri (3.37) ile verilen eylem integralinde yerine yazıldığında

$$\int d^4x \frac{1}{k^2} \left(f(R,G)(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})) \; + F_R\,(-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)\delta g_{\mu\nu} + \right.$$

$$\left. F_G\,\delta G \right) = -\int d^4x \frac{2\delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m)}{\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \quad (3.38)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $F_R = \frac{\partial f(R,G)}{\partial R}$ ve $F_G = \frac{\partial f(R,G)}{\partial G}$ biçiminde tanımlanmıştır.

(3.23) eşitliği kullanıldığında (3.38)'den aşağıdaki alan denklemleri elde edilmektedir,

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} f(R,G) + \nabla^\mu\nabla^\nu F_R - g^{\mu\nu}\nabla^2 F_R - R^{\mu\nu}F_R - 2RR^{\mu\nu}F_G - 4F_G R^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} +$$

$$4F_G R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} - 2F_G R^\mu{}_{\rho\varepsilon\sigma} R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R(\nabla^\mu\nabla^\nu F_G) - 2g^{\mu\nu}R(\nabla^2 F_G) - 4R^{\beta\mu}\left(\nabla_\beta\nabla^\nu F_G\right) -$$

$$4R^{\nu\beta}\left(\nabla_\beta\nabla^\mu F_G\right) + 4R^{\mu\nu}(\nabla^2 F_G) + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\beta}\left(\nabla_\rho\nabla_\beta F_G\right) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\left(\nabla_\rho\nabla_\tau F_G\right) + k^2 T^{\mu\nu} =$$

$$0. \quad (3.39)$$

Eşitlik (3.38)'de eşitliğin sol tarafındaki δG ile verilen Gauss-Bonnet değişmezinin varyasyonu sonraki bölümde ele alınacaktır.

(3.39) ile verilen alan denklemleri belli limitler altında bazı özel kuramlara indirgenebilmektedir;

i. $f(R,G) \rightarrow R$: Einstein alan denklemi,

ii. $f(R,G) \rightarrow f(R)$: Modifiye Einstein alan denklemi,

iii. $f(R,G) \rightarrow R + f(G)$: Modifiye Gauss-Bonnet alan denklemi.

(3.39) alan denklemlerinin 00-zaman bileşeninden I. FRW denklemi elde edilmektedir (bakınız EK 2.):

$$\frac{1}{2}\left(GF_G - F(R,G) - 24H^3\dot{F}_G\right) + 3\left(\dot{H} + H^2\right)F_R - 3H\dot{F}_R = -k^2\rho. \tag{3.40}$$

Diğer yandan 11-bileşeninden ise II. FRW denklemi elde edilir (bakınız EK 2):

$$\frac{F(R,G)}{2} - \frac{1}{2}(RF_R + GF_G) + \ddot{F}_R + 2H\dot{F}_R + 4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 8H^3\dot{F}_G +$$

$$\left(2\dot{H} + 3H^2\right)F_R = -k^2 p\,. \tag{3.41}$$

(3.40) ve (3.41) denklemleri,

$$\frac{3H^2}{k^2} = \frac{1}{F_R}\left\{\rho + \frac{1}{2k^2}\left[12H^2F_R - f(R,G) - 6H\dot{F}_R + 6\dot{H}F_R - 24H^3\dot{F}_G + GF_G\right]\right\} \tag{3.42}$$

$$\frac{-(2\dot{H}+3H^2)}{k^2} = \frac{1}{F_R}\left\{p + \frac{1}{2k^2}(-12H^2F_R + f(R,G) + 4H\dot{F}_R - 6\dot{H}F_R + 2\ddot{F}_R - GF_G +\right.$$

$$\left. 16H\dot{H}\dot{F}_G + 16H^3\dot{F}_G + 8H^2\ddot{F}_G)\right\} \tag{3.43}$$

şeklinde de yazılabilmektedir (Bamba ve ark. 2010). İdeal mükemmel akışkan için etkin enerji yoğunluğu ρ_e ve etkin basınç p_e olmak üzere etkin durum denklemi parametresi

$$w_e = \frac{p_e}{\rho_e} \tag{3.44}$$

biçiminde tanımlandığında (3.42) ve (3.43) ifadeleri Einstein kuramının Friedmann denklemleri formunda yazılabilmektedir;

$$\rho_e k^2 = 3H^2 \,, \tag{3.45}$$

$$p_e k^2 = -(2\dot{H} + 3H^2) \,. \tag{3.46}$$

Burada ρ_e ve p_e aşağıdaki gibidir (Bamba ve ark. 2010):

$$\rho_e = \frac{1}{F_R}\left\{\rho + \frac{1}{2k^2}\left[12H^2F_R - f(R,G) - 6H\dot{F}_R + 6\dot{H}F_R - 24H^3\dot{F}_G + GF_G\right]\right\} \tag{3.47}$$

$$p_e = \frac{1}{F_R}\left\{p + \frac{1}{2k^2}\left[-12H^2F_R + f(R,G) + 4H\dot{F}_R - 6\dot{H}F_R + 2\ddot{F}_R - GF_G + 16H\dot{H}\dot{F}_G + 16H^3\dot{F}_G + 8H^2\ddot{F}_G\right]\right\} . \tag{3.48}$$

Genel Görelilik yaklaşıklığı için (3.47) ve (3.48) denklemlerinde $f(R,G) \to R$ ve $\rho_e = \rho$ ve $p_e = p$ alınması durumunda ilgili denklemler standart FRW denklemlerine dönüşür (Bamba ve ark. 2010).

Evrendeki mükemmel akışkan için durum denklemi parametresi $w = \frac{p}{\rho}$ olmak üzere (3.47) ve (3.48) denklemleri birleştirildiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$Z = \left[k^2(p_e - w\rho_e) + 2\dot{H} + 3H^2(1+w)\right]F_R \,. \tag{3.49}$$

Burada Z açık olarak aşağıdaki gibidir:

$$Z = 4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 4H^3\dot{F}_G(2+3w) - \frac{G}{2}F_G(1+w) + \frac{F(R,G)}{2}(1+w) + \ddot{F}_R + H\dot{F}_R(2+3w) - \dot{H}F_R(1+3w) - 3H^2F_R(1+w) \,. \tag{3.50}$$

3.5. $f(R,G)$ Kuramı ve GKEY

Genel olarak ivmelenen evren modellerinde entropinin doğasını belirleyen ufuklar vardır. Bunlardan biri de doğal olarak geçerliliği olan ve çok kullanılan ***görünen ufuk'*** tur (Hubble ufuğu olarak da bilinir). Bu ufuğun yarıçapı R_A ile sembolize edilip FRW evreninde aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Chakraborty ve ark. 2010, Debnath ve ark. 2012):

$$R_A = \frac{1}{\sqrt{H^2+\frac{k}{a^2}}}. \tag{3.51}$$

Bu eşitlikte $k = 0$ için $R_A = \frac{1}{H}$ olarak elde edilmektedir.

Diğer bir ufuk tanımı daha çok kara deliğin ufuk ifadesine benzeyen ***gelecek olay ufku*** 'dur. Olay ufkunun yarıçapı R_E ile sembolize edilebilmekte olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Chakraborty ve ark. 2010, Sadjadi 2011, Debnath ve ark. 2012):

$$R_E = a(t)\int_t^\infty \frac{dt}{a(t)}. \tag{3.52}$$

Şimdiki zamandan gelecek herhangi bir zamana yolculuk eden ışığın mesafesini tanımlayan (Debnath ve ark. 2012) (3.52) denkleminde sonlu bir gelecek zamandan bahsediliyorsa $\infty \to t_s$ yapılır. Kozmolojik olarak ***olay ufku*** tüm FRW evrenlerinde her zaman var olmamasına rağmen ***görünen ufuk*** her zaman vardır (Debnath ve ark. 2012). Yani ivmelenen evren görünen ufuk tarafından çevrili olduğunda GKEY ifade edilmektedir. Fakat diğer yandan olay ufku içinde ivmeli genişleyen evren için bu durum söz konusu olmamaktadır (Bamba ve Geng 2011).

Bu tez çalışmasında, FRW evreninde $f(R,G)$ kütle-çekim kuramı için GKEY yazılırken

- Evrenin tüm aşamalarında ***görünen ufuğun*** yarıçapı için
- Evren phantom karanlık enerji ile dolu iken gelecek ***olay ufku*** yarıçapı için

ele alınacaktır. Ayrıca FRW evreninde gelecek olay ufku üzerinde oluşturulan GKEY eşitsizliği incelenecektir.

3.5.1. FRW Evreninde Görünen Ufuk ve GKEY

S_A ile verilen dinamik ufuğun entropisi Genel Görelilikte (1.31)'deki eşitlikte verilmiştir. $f(R)$ kütle çekim kuramında ise görünen ufuğun entropisi Noether yük korunumu yönteminden elde edilmektedir ve Wald entropisi olarak bilinir (Wald 1993, Iyer ve Wald 1994). Bu entropi fonksiyonu $S_A = \frac{A}{4G} f_R$ biçiminde tanımlanmaktadır. $f(T)$ modifiye teleparallel kütle çekim kuramında ise benzer şekilde $S_A = \frac{A}{4G} f_T$ olarak betimlenmektedir (Bamba ve Geng 2011). Burada $f_T = \frac{df(T)}{dT}$ biçimindedir.

$f(R,G)$ kütle çekim kuramı içinde görünen ufuk entropisi Noether yük korunumu yöntemiyle hesaplanmaktadır (Wald 1993, Carrol ve ark. 2005, Maeda 2010). Denklem (3.34)'te verilen eşitlikte ifade edilen lagranjiyana göre Noether yük metodu,

$$S_A = -\frac{\pi}{k^2}\int\left(\frac{\partial(f(R,G)+\mathfrak{L}_m)}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}\right)\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma}\,dA \tag{3.53}$$

$$S_A = -\frac{\pi}{k^2}\int\left(\frac{\partial R}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}F_R + \frac{\partial G}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}F_G\right)\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma}\,dA \tag{3.54}$$

şeklinde yazılmaktadır. Buradaki $\varepsilon_{\mu\nu}$ ufuk yüzeyi için binormal vektör olup dA ise diferansiyel yüzey elemanıdır. $\frac{\partial R}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$ ve $\frac{\partial G}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$ çarpanlarının hesabı

$$\frac{\partial R}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma} = -2\,, \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial G}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma} = -\frac{8}{R_A^2} \tag{3.56}$$

biçimindedir (Maeda 2010). Denklem (3.55) ve (3.56) ile verilen ifadeler (3.54)'te yerine yazıldığında

$$S_A = -\frac{\pi}{k^2}\left(-2F_R - \frac{8}{R_A^2}F_G\right)R_A^2\int dA\,, \tag{3.57}$$

$$S_A = \frac{2\pi A}{k^2}\left(F_R + \frac{4}{R_A^2}F_G\right) \tag{3.58}$$

biçiminde FRW evreninde yazılmış görünen ufuk entropisi elde edilmektedir. Buradaki $A = 4\pi R_A^2$ görünen ufukta yüzey alanıdır. (3.51) eşitliğinden FRW düz uzay-zaman için görünen ufuk yarıçapı $R_A = \frac{1}{H}$ olacaktır dolayısıyla (3.58) ile verilen ifade aşağıdaki gibi yazılır (Sadjadi 2010) ($k^2 = 8\pi\tilde{G}$ ve $\tilde{G}$=1 seçimi ile birlikte):

$$S_A = \pi(H^{-2}F_R + 4F_G) \, . \tag{3.59}$$

Görünen ufuk entropisinin dinamiği için aşağıdaki gibi bir sonuç elde edilmektedir (Sadjadi 2010):

$$\dot{S}_A = -2\pi H^{-3}\dot{H}F_R + \pi H^{-2}\dot{F}_R + 4\pi\dot{F}_G \, . \tag{3.60}$$

Denklem (1.32)'de verilen eşitlik gereği eğer (3.34)'te yazılan lagranjiyanda madde katkısı ihmal edilirse GKEY ifadesi (3.60) eşitliğine dönüşür. GKEY'e göre şu sonuca ulaşılmaktadır:

$$\dot{S}_A = -2\pi H^{-3}\dot{H}F_R + \pi H^{-2}\dot{F}_R + 4\pi\dot{F}_G \geq 0 \, . \tag{3.61}$$

Ancak, genel bir ifade yazmak için madde entropisinin dahil edilmesi gerekmektedir. Ufuk içindeki maddenin entropisini ($\dot{S}_{iç}$) hesaplamak için termodinamiğin birinci yasasından yararlanılabilir:

$$dE + pdV = Td\dot{S}_{iç}. \tag{3.62}$$

Burada $V = \frac{4}{3}\pi R_A^3$ ve $R_A = \frac{1}{H}$ olmak üzere $V = \frac{4\pi}{3H^3}$ yazılabilir. Madde entropisinin doğasını tartışmak için (3.62)'nin zamana göre türevi alındığında

$$\frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} = T\frac{dS_{iç}}{dt} \tag{3.63}$$

eşitliği elde edilmektedir. Buradaki $E = m = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3H^3}$ ve bunun zamana göre türevi olan $\frac{dE}{dt} = \dot{\rho}\frac{4\pi}{3H^3} + \rho(-4\pi H^{-4}\dot{H})$ ile $\frac{dV}{dt} = -\frac{4\pi}{H^4}\dot{H}$ ifadeleri kullanıldığında (3.63) ifadesi aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\dot{\rho}\frac{4\pi}{3H^3} + \rho\left(-4\pi H^{-4}\dot{H}\right) - p\frac{4\pi}{H^4}\dot{H} = T\dot{S}_{iç} . \tag{3.64}$$

(1.20)'de verilen enerji korunum denklemi ile (1.31)'de verilen Hawking sıcaklığı kullanıldığında (3.64) eşitliğinden

$$\dot{S}_{iç} = -8\pi^2 H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)(\rho + p) \tag{3.65}$$

ifadesi elde edilmektedir. (1.22)'de verilen $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$ için ($a_0 = 1$ seçilmiştir) madde ile enerji yoğunluğu kullanılarak madde entropisinin dinamiği için aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır:

$$\dot{S}_{iç} = -8\pi^2 H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)\rho_0(1 + w)a^{-3(1+w)} . \tag{3.66}$$

Sonuç olarak denklem (1.32)'den GKEY aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$-2\pi H^{-3}\dot{H}F_R + \pi H^{-2}\dot{F}_R + 4\pi\dot{F}_G$$

$$-8\pi^2 H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)\rho_0(1 + w)a^{-3(1+w)} \geq 0. \tag{3.67}$$

Madde yoğunluğu ve w durum parametresini (3.65)'teki ifadeden elde etmek mümkündür. Bunun için denklem (3.40) ve (3.41) ile verilen I. ve II. FRW denklemleri toplanarak $\rho + p$ ifadesi,

$$\rho + p = -\frac{1}{k^2}(4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G - 4H^3\dot{F}_G + \ddot{F}_R - H\dot{F}_R + 2\dot{H}F_R). \tag{3.68}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece (3.68) eşitliği (3.65)'te yerine yazıldığında ($k^2 = 8\pi\widetilde{\mathrm{G}}$ ve $\widetilde{\mathrm{G}} = 1$ seçimleriyle) $\dot{S}_{iç}$ daha kullanışlı bir formda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\dot{S}_{iç} = \pi H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)(4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G - 4H^3\dot{F}_G + \ddot{F}_R - H\dot{F}_R + 2\dot{H}F_R). \quad (3.69)$$

Dolaysıyla GKEY eşitsizliği ($\dot{S}_{top} = \dot{S}_A + \dot{S}_{iç} \geq 0$),

$$\dot{S}_{top} = -2\pi H^{-3}\dot{H}F_R + \pi H^{-2}\dot{F}_R + 4\pi\dot{F}_G + \pi H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)(4H^2\ddot{F}_G$$

$$+8H\dot{H}\dot{F}_G - 4H^3\dot{F}_G + \ddot{F}_R - H\dot{F}_R + 2\dot{H}F_R) \geq 0. \quad (3.70)$$

biçiminde olacaktır.

3.5.2. FRW Evreninde Olay Ufku ve GKEY

(3.52)'de yazılan eşitlikten (1.11)'deki Hubble sabitini de kullanarak olay ufku yarıçapının zamana göre türevi aşağıdaki gibi elde edilmektedir (Sadjadi 2011, Debnath ve ark. 2012),

$$\dot{R}_E = HR_E - 1\,. \quad (3.71)$$

Olay ufku entropisi için (3.54)'te verilen Noether yük yöntemi kullanılabilir. (3.54)'ten gelecek zaman olay ufku (3.58) ile verilen eşitliğe benzer elde edilmektedir,

$$S_E = \frac{2\pi A}{k^2}\left(F_R + \frac{4}{R_E^2}F_G\right). \quad (3.72)$$

Buradaki yüzey alanı çarpanı için $A = 4\pi R_E^2$ 'dir. (3.72) ifadesinin zamana göre türevi ile ($k^2 = 8\pi\widetilde{\mathrm{G}}$ ve $\widetilde{\mathrm{G}}$=1 seçimleriyle birlikte)

$$\dot{S}_E = 2\pi R_E\dot{R}_E F_R + \pi R_E^2\dot{F}_R + 4\pi\dot{F}_G \quad (3.73)$$

eşitliği elde edilmektedir (Sadjadi 2011, Debnath ve ark. 2012). (3.71) ifadesi (3.73)'te yerine yazıldığında olay ufku entropisinin dinamiğini tartışmak için şu sonuca ulaşılmaktadır,

$$\dot{S}_E = 2\pi R_E F_R (HR_E - 1) + \pi R_E^2 \dot{F}_R + 4\pi \dot{F}_G \ . \tag{3.74}$$

Gelecek olay ufku madde entropisinin dinamiği için yine termodinamiğin birinci yasası kullanılabilir. Enerji $E = \rho V$ ve zamana göre türevi $\dot{E} = V\dot{\rho} + \rho\dot{V}$, hacim $V = \frac{4}{3}\pi R_A^3$ ve zamana göre türevi $\dot{V} = 4\pi R_E^2 \dot{R}_E$ ile birlikte (1.20)'de verilen enerji korunum denklemi ve (3.71) ifadesi kullanılarak (3.66)'da yazılan eşitlik

$$\dot{S}_{iç} = \frac{4\pi R_E^2}{T}\rho(1+w) \tag{3.75}$$

şeklinde yeniden yazılabilmektedir (Debnath ve ark. 2012). Madde yoğunluğu $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$ ve (1.31)'de verilen Hawking sıcaklığı kullanıldığında (Sadjadi 2011, Davies 1988) madde entropisi için aşağıdaki gibi bir sonuç bulunmaktadır:

$$\dot{S}_{iç} = 8\pi^2 R_E^3 \rho_0 a^{-3(1+w)}(1+w) \ . \tag{3.76}$$

Sonuç olarak GKEY aşağıdaki gibi elde edilmektedir;

$$2\pi R_E F_R (HR_E - 1) + \pi R_E^2 \dot{F}_R + 4\pi \dot{F}_G + 8\pi^2 R_E^3 \rho_0 a^{-3(1+w)}(1+w) \geq 0. \tag{3.77}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

İlk olarak, denklem (1.33)'te yazdığımız eylem integraliyle betimlediğimiz genişletilmiş Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramı için alan denklemlerini elde ettikten sonra ilgili alan denklemlerinin ölçek çarpan üstel *tam* çözümlerini tartışacağız. Elde edilecek çözümler ile evrenin genel çerçevede üç temel gelişim aşaması irdelenecektir:

1) Erken zaman şişme aşaması,
2) Deselerasyon (azalan ivme ile genişleme),
3) Geç zaman ivmelenme.

Söz konusu aşamalar bu kütle-çekim kuramında bütünleşik bir formda ifade edilmeye çalışılacaktır, temel amaçlarımızdan bir tanesi de budur.

İkincil aşama olarak eylem integrali (3.34) ile verilen daha genel modifiye Gauss-Bonnet kütle-çekim kuramının alan denklemlerinin üstel çözümleri araştırılacaktır. Çözümlerin gösterdiği evrenin gelişim aşamaları kuramda yazılan GKEY çerçevesinde irdelenecektir. Özellikle kuramın alan denklemlerinin çözümlerinden FRW çözümleri ve phantom süper ivmeli evre (karanlık enerji) çözümleri araştırılacaktır. FRW ve süper ivmeli çözümler görünen ufuk ve olay ufku için yazılan kozmolojik entropi fonksiyonu çerçevesinde değerlendirilecektir. Belirlenen aşamaların yukarıda genel olarak verilen evrenin üç gelişim aşamasını da destekler mahiyette olacaktır.

Bu çalışma boyunca yapılacak çözümler ölçek çarpanın üstel biçiminde olacaktır. Bu nedenle ilk olarak ölçek çarpanın üstel çözümü hakkında kısa bir bilgi verildikten sonra yukarıda bahsedilen birinci ve ikinci hedefler üzerine yoğunlaşılacaktır.

4.1. Ölçek Çarpan Üstel Çözüm

Ölçek çarpanın üstel çözümü temel olarak aşağıdaki tanımlanmaktadır:

$$a = a_0 t^h \ . \tag{4.1}$$

Bu üstel çözüme göre Hubble parametresi ve zamana göre türevi

$$H = \frac{h}{t}, \dot{H} = -\frac{h}{t^2}. \tag{4.2}$$

biçiminde olmaktadır. Sırasıyla (3.13) ve (3.15)'te verilen Ricci skaleri ile Gauss-bonnet değişmezi (4.2) eşitlikleri kullanılarak

$$R = \frac{6h(2h-1)}{t^2}, \; G = \frac{24h^3(h-1)}{t^4} \tag{4.3}$$

biçiminde elde edilmektedirler. Bunların zamana göre türevleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\dot{R} = \frac{-12h(2h-1)}{t^3}, \dot{G} = \frac{-96h^3(h-1)}{t^5}. \tag{4.4}$$

(4.1) eşitliği için $h > 1$ durumu ivmelenerek genişleyen evreni gösterirken $0 < h < 1$ ise deselerasyonu ifade etmektedir. $h < 0$ ise büzülen bir evren modelini işaret eder. $h > 1$ iken Gauss-Bonnet değişmezi $G = 24h^3(h-1)t^{-4} = \beta t^{-4}$ şeklinde ifade edilirse, $\beta > 0$ olduğundan $G > 0$'dır. $0 < h < 1$ iken $\beta < 0$ olduğundan $G < 0$ olur. $h = 1$ iken evren ivmelenme fazının başlangıcındadır fakat henüz ivmelenmemiştir ve $G = 0$ 'dır.

4.2. Genişletilmiş Gauss-Bonnet Kuramı

(3.32) eylemi ile verilen modifiye Gauss-Bonnet kuramı αR^2 terimi ile genişletilerek oluşturulan yeni eylem integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k^2}R + f(G) + \alpha R^2 + \mathfrak{L}_m\right]. \tag{4.5}$$

Bu yeni kütle-çekim kuramının alan denklemleri (4.5)'te verilen eylem integralinin metrik tensöre göre varyasyonundan elde edilir. Eylem'in metrik tensöre göre varyasyonu alındığında şu sonuca ulaşırız:

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2k^2} \left[R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta(R) \right] + \delta\sqrt{-g}f(G) + \sqrt{-g}\delta f(G) + \right.$$

$$\left. \delta\sqrt{-g}(\alpha R^2) + \sqrt{-g}\delta(\alpha R)^2 + \delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m) \right\} = 0 \,. \qquad (4.6)$$

Bu ifadede dördüncü terimde verilen fonksiyonun varyasyonu kısaca

$$\delta f(G) = f_G \delta(G) \qquad (4.7)$$

biçimindedir. Burada $f_G = \frac{\partial f(G)}{\partial G}$ tanımı yapılmıştır. (4.7) ifadesi (4.6)'daki eylemde yerine yazılırsa,

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2k^2} \left[R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta(R) \right] + \delta\sqrt{-g}f(G) + \sqrt{-g}f_G\delta(G) + \right.$$

$$\left. \delta\sqrt{-g}(\alpha R^2) + \sqrt{-g}\delta\alpha R^2 + \delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m) \right\} = 0 \qquad (4.8)$$

eşitliği elde edilir. Öncelikle (4.8)'deki eylemde $f_G\delta G$ çarpanını içeren dördüncü terime odaklanacağız. Denklem (3.14)'te verilen Gauss-Bonnet değişmezi kullanıldığında bu terim aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f_G\delta G = f_G\delta R^2 - 4f_G\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + f_G\delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}) \,. \qquad (4.9)$$

EK 1'de yazılan (31), (35), (40) eşitlikleri kullanıldığında (4.9) ifadesi,

$$f_G\delta G =$$

$$2RR_{\mu\nu}f_G\delta g^{\mu\nu} + f_G R\nabla^\tau\nabla^\nu\delta g_{\tau\nu} + f_G R\nabla^\mu\nabla^\rho\delta g_{\mu\rho} +$$

$$2Rg_{\mu\nu}f_G\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - 4f_G R^{\alpha\nu}\nabla^\mu\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} - 4f_G R^{\beta\nu}\nabla^\mu\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} + 4f_G R^{\mu\nu}\nabla^2\delta g_{\mu\nu} +$$

$$4f_G R^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} + 8f_G R^{\beta\nu}R^\mu_\beta\delta g_{\mu\nu} - 2f_G R^\mu{}_{\nu\varepsilon\sigma}R^{\alpha\nu\varepsilon\sigma}\delta g_{\mu\alpha} -$$

$$2f_G R^{\mu\beta\nu\tau}\nabla_\tau\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} + 2f_G R^{\alpha\mu\nu\tau}\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} \qquad (4.10)$$

biçiminde olmaktadır. (4.10) ifadesinde EK 2'de verilen (47) eşitliği kullanıldıktan sonra, EK 1'deki (9) eşitliği ile indisler $\delta g_{\mu\nu}$ için ayarlandığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f_G\delta G = \Big[-2RR^{\mu\nu}f_G + \nabla^\mu\nabla^\nu(Rf_G) + \nabla^\mu\nabla^\nu(Rf_G) - 2g^{\mu\nu}\nabla^2(Rf_G) -$$

$$4\nabla_\alpha\nabla^\mu(R^{\alpha\nu}f_G) - 4\nabla_\beta\nabla^\mu\big(R^{\nu\beta}f_G\big) + 4\nabla^2(f_GR^{\mu\nu}) + 4g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\big(R^{\alpha\beta}f_G\big) + 8R^{\beta\nu}R^\mu_\beta f_G -$$

$$2R^\mu{}_{\alpha\varepsilon\sigma}R^{\nu\alpha\varepsilon\sigma}f_G + 4\nabla_\tau\nabla_\alpha(R^{\alpha\mu\nu\tau}f_G)\Big]\delta g_{\mu\nu}\ . \qquad (4.11)$$

Buradaki onbirinci terim için $\beta \to \alpha$ işlemi yapılmıştır. Buna göre (4.11) ifadesindeki beşinci terimde $\alpha \to \beta$ ve $\mu \leftrightarrow \nu$ işlemleri ile birlikte son terimde ise $\mu \leftrightarrow \alpha$ işlemi yapıldığında gerekli düzenlemelerden sonra aşağıdaki ifade bulunmaktadır;

$$f_G\delta G = \Big[-2RR^{\mu\nu}f_G + 2f_G\nabla^\mu\nabla^\nu R + 2R(\nabla^\mu\nabla^\nu f_G) - 2g^{\mu\nu}f_G\nabla^2R -$$

$$2g^{\mu\nu}R(\nabla^2f_G) - 4R^{\beta\mu}\big(\nabla_\beta\nabla^\nu f_G\big) - 4f_G\nabla_\beta\nabla^\nu R^{\beta\mu} - 4R^{\nu\beta}\nabla_\beta\nabla^\mu(f_G) - 4f_G\nabla_\beta\nabla^\mu R^{\nu\beta} +$$

$$4R^{\mu\nu}(\nabla^2f_G) + 4f_G\nabla^2R^{\mu\nu} + 4f_Gg^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta R^{\alpha\beta} + 4R^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\big(\nabla_\alpha\nabla_\beta f_G\big) + 8R^{\beta\nu}R^\mu_\beta f_G -$$

$$2R^\mu{}_{\alpha\varepsilon\sigma}R^{\nu\alpha\varepsilon\sigma}f_G + 4f_G\nabla_\alpha\nabla_\tau R^{\alpha\mu\nu\tau} - 4R^{\mu\alpha\nu\tau}(\nabla_\alpha\nabla_\tau f_G)\Big]\delta g_{\mu\nu}\ . \qquad (4.12)$$

EK 2'de yazılan (51), (58) ve (59) numaralı Bianchi eşitlikleri kullanıldığında (4.12) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$f_G\delta G = \Big[-2RR^{\mu\nu}f_G - 4f_GR^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} + 4f_GR^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} - 2f_GR^\mu{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} +$$

$$2R(\nabla^\mu\nabla^\nu f_G) - 2g^{\mu\nu}R(\nabla^2f_G) - 4R^{\beta\mu}\big(\nabla_\beta\nabla^\nu f_G\big) - 4R^{\nu\beta}\big(\nabla_\beta\nabla^\mu f_G\big) + 4R^{\mu\nu}(\nabla^2f_G) +$$

$$4g^{\mu\nu}R^{\rho\beta}\big(\nabla_\rho\nabla_\beta f_G\big) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\big(\nabla_\rho\nabla_\tau f_G\big)\Big]\delta g_{\mu\nu}\ . \qquad (4.13)$$

Burada sırasıyla $\alpha \to \rho$ ve $\rho \leftrightarrow \mu$ işlemleri uygulanmıştır. Bu sonuçla birlikte EK 1'deki (25.b), (27), (31) eşitlikleri (4.8)'de verilen eylemde yerine yazıldığında genişletilmiş eylem

$$\delta S = \int d^4x \left\{\frac{1}{2k^2}\left[R(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})) + \sqrt{-g}(-R^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\nabla^{\nu} - g^{\mu\nu}\nabla^2)\delta g_{\mu\nu}\right] + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})\right)f(G) + \sqrt{-g}\left(-2RR^{\mu\nu}f_G - 4f_G R^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} + 4f_G R^{\mu}{}_{\rho}R^{\nu\rho} - 2f_G R^{\mu}{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}f_G) - 2g^{\mu\nu}R(\nabla^2 f_G) - 4R^{\beta\mu}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\nu}f_G\right) - 4R^{\nu\beta}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\mu}f_G\right) + 4R^{\mu\nu}(\nabla^2 f_G) + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\beta}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\beta}f_G\right) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\tau}f_G\right)\right)\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})(\alpha R^2) + \sqrt{-g}\left(2\alpha R R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2\alpha R\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}\delta g_{\mu\nu} + 2\alpha R g_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu}\right)\right\}$$

$$+ \int d^4x\,\delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m) = 0 \qquad (4.14)$$

biçiminde olacaktır. (4.14) eyleminde EK 1'deki (7.c) ve (9) ile verilen eşitlikler kullanılarak $\delta g_{\mu\nu}$'ye göre ayarlanıp gerekli düzenleme yapıldığında aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\int d^4x \left\{\frac{1}{2k^2}(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(G) - 2RR^{\mu\nu}f_G - 4f_G R^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} + 4f_G R^{\mu}{}_{\rho}R^{\nu\rho} - 2f_G R^{\mu}{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}f_G) - 2g^{\mu\nu}R(\nabla^2 f_G) - 4R^{\beta\mu}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\nu}f_G\right) - 4R^{\nu\beta}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\mu}f_G\right) + 4R^{\mu\nu}(\nabla^2 f_G) + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\beta}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\beta}f_G\right) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\tau}f_G\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\alpha R^2 - 2\alpha R R^{\mu\nu} + 2\alpha\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}R - 2\alpha g^{\mu\nu}\nabla^2 R)\right\}\delta g_{\mu\nu} = -\int d^4x \frac{1}{2}\left(\frac{2\delta(\sqrt{-g}\mathfrak{L}_m)}{\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu}\,. \qquad (4.15)$$

Denklem (3.23)'te verdiğimiz eşitliği burada kullanılarak genişletilmiş Gauss-Bonnet kuramının alan denklemleri genel olarak,

$$\frac{1}{2k^2}\left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(G) - 2RR^{\mu\nu}f_G - 4f_G R^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} + 4f_G R^{\mu}{}_{\rho}R^{\nu\rho} - 2f_G R^{\mu}{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}f_G) - 2g^{\mu\nu}R(\nabla^2 f_G) - 4R^{\beta\mu}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\nu}f_G\right) - 4R^{\nu\beta}\left(\nabla_{\beta}\nabla^{\mu}f_G\right) + 4R^{\mu\nu}(\nabla^2 f_G) + 4g^{\mu\nu}R^{\rho\beta}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\beta}f_G\right) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\left(\nabla_{\rho}\nabla_{\tau}f_G\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\alpha R^2 - 2\alpha R R^{\mu\nu} + 2\alpha\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}R - 2\alpha g^{\mu\nu}\nabla^2 R + \frac{T^{\mu\nu}}{2} = 0 \qquad (4.16)$$

biçiminde elde edilir. Denklem (4.16)'da $\alpha = 0$ seçildiğinde (3.33)'te verilen modifiye Gauss-Bonnet kuramının alan denklemleri doğrudan elde edilebilmektedir (Nojiri ve ark. 2005).

(4.16) ile verilen alan denkleminin I. FRW denklemi aşağıdaki gibidir (Ek 2):

$$\frac{3H^2}{k^2} - Gf_G + f(G) + 24\dot{f}_G H^3 + \alpha R^2 - 12\alpha \dot{H} R - 12\alpha H^2 R + 12\alpha H \dot{R} = \rho. \tag{4.17}$$

Burada $\alpha = 0$ ve $G = 0$ seçilirse (4.5) eylem integrali Einstein-Hilbert eylemine indirgenir ve (4.17) ile verilen denklem standart Einstein-FRW denklemine dönüşür. (4.17) denklemi kozmik zaman cinsinden yazılıp çözülecektir. Daha sonra elde edilen çözüm (4.3)' te verilen ikinci eşitlik kullanılarak

$$t = \left(\frac{24h^3(h-1)}{G}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\beta}{G}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.18}$$

şeklinde Gauss-Bonnet değişmezi formunda yazılacaktır. Bu şekilde G-eksenli bir çözüm elde edilecektir.

4.2.1. Genişletilmiş Gauss-Bonnet Kuramı Ölçek Çarpanı Üstel Tam Çözümleri

Bu başlık altında denklem (4.17) ile verilen I. FRW denkleminin tam çözümleri tartışılacaktır. Buna göre (4.18)'de verilen kozmik zamanın $\frac{dt}{dG}$ şeklinde Gauss-Bonnet değişmezine göre türevi $\frac{dt}{dG} = -\frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{4} G^{\frac{-5}{4}}$ olmak üzere (4.17) denklemi kozmik zaman cinsinden yazılırken;

$$f_G = \frac{df(G)}{dG} = \frac{df(G)}{dt}\frac{dt}{dG} = -\frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{4} G^{\frac{-5}{4}} \frac{df(G)}{dt}, \tag{4.19a}$$

$$\dot{f}_G = \frac{d}{dt} f_G = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{4} G^{\frac{-5}{4}} \frac{df(G)}{dt}\right) \tag{4.19b}$$

ifadeleri kullanılacaktır. Buradaki $\frac{df(G)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$ şeklinde zamanın bir fonksiyonudur. (4.18) ile verilen ifade kullanılarak

$$\dot{f}_G = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{4} G^{\frac{-5}{4}} \frac{df(t)}{dt}\right) =$$

$$-\frac{1}{4\beta}\frac{d}{dt}\left(t^5 f'(t)\right) = -\frac{1}{4\beta}[5t^4 f'(t) + t^5 f''(t)] \tag{4.19c}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (4.2)'de verilen ifadeler ile birlikte (4.3) ve (4.4) denklemlerinde yazılan Ricci skaleri ve onun türevi kullanılarak (4.17)'deki denklemde α'lı terimler kozmik zaman cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\alpha R^2 - 12\alpha \dot{H} R - 12\alpha H^2 R + 12\alpha H \dot{R} = -108h^2(2h-1)\alpha t^{-4}. \tag{4.19d}$$

(1.22)'den madde akışkan enerji yoğunluğu için (4.1) kullanılarak,

$$\rho_m = \rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+w)} = \rho_0 {a_0}^{-3(1+w)} t^{-3h(1+w)} \tag{4.20}$$

eşitliği yazılabilir. (4.2)'deki Hubble parametresi ile birlikte (4.19a), (4.19c), (4.19d) ve (4.20) eşitlikleri (4.17) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\frac{t^2}{4(h-1)} f''(t) + \left(\frac{-h+6}{4(h-1)}\right) t f'(t) - f(t) = N t^{-3h(1+w)} + K_\alpha t^{-4} + \frac{3h^2}{k^2} t^{-2} \tag{4.21}$$

biçiminde kozmik zamana bağlı ikinci mertebeden homojen olmayan bir diferansiyel denklem elde edilmektedir. Burada $N = -\rho_0 a_0^{-3(1+w)}$ ve $K_\alpha = -108h^2(2h-1)\alpha$ olarak tanımlanmıştır. Buradaki denklemin $f_1 = f_1(t)$ ile betimlenen homojen ve $f_2 = f_2(t)$ ile tanımlanan özel çözümü bulunduktan sonra $f(t) = f_1 + f_2$ şeklinde genel çözüm elde edilir.

Homojen çözümü bulmak için (4.21) denklemin sol tarafı sıfıra eşitlenir:

$$\frac{t^2}{4(h-1)}f''(t)+\left(\frac{-h+6}{4(h-1)}\right)tf'(t)-f(t)=0. \tag{4.22}$$

Bu denklemde $f_1=t^m$, $f'_1=mt^{m-1}$, $f''_1=m(m-1)t^{m-2}$ üstel çözümleri önerilerek (4.22) denkleminde kullanıldığında,

$$(m+4)(m+1-h)=0 \tag{4.23}$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada $m_1=-4$ ve $m_2=h-1$ şeklinde iki kök bulunur. $f_1=\sum_{p=1}^{2}c_p\,t^{m_p}=c_1t^{m_1}+c_2t^{m_2}$ olmak üzere (c_1 ve c_2 sabit) homojen çözüm aşağıdaki gibi olacaktır,

$$f_1=c_1g_1+c_2g_2=c_1t^{-4}+c_2t^{h-1}. \tag{4.24}$$

Bu ifade $g_1=g_1(t)=t^{-4}$ ve $g_2=g_2(t)=t^{h-1}$ olarak kullanılmıştır.

f_2 özel çözümü bulmak için (4.21) denklemini $\frac{4(h-1)}{t^2}$ ile çarptığımızda ilgili denklem

$$f''(t)+\frac{(-h+6)}{t}f'(t)-\frac{4(h-1)}{t^2}f(t)=4(h-1)Nt^{-3h(1+w)-2}+4(h-1)K_\alpha t^{-6}+\frac{12h^2(h-1)}{k^2}t^{-4} \tag{4.25}$$

şeklinde düzenlenebilir. Ayrıca, (4.25) eşitliğinin sağ tarafı zamanın bir fonksiyonu olacak şekilde

$$A(t)=4(h-1)Nt^{-3h(1+w)-2}+4(h-1)K_\alpha t^{-6}+\frac{12h^2(h-1)}{k^2}t^{-4} \tag{4.26}$$

biçiminde tanımlanabilir. f_2 özel çözümü, $U_1 = U_1(t)$ ve $U_2 = U_2(t)$ iki fonksiyon tanımı yapılmak üzere $f_2 = U_1 g_1 + U_2 g_2$ şeklinde yazılabilir. Buradaki U_1 ve U_2 fonksiyonlarının bilinen çözümleri

$$U_1 = -\int \frac{g_2 A(t)}{W} dt \,, \tag{4.27a}$$

$$U_2 = -\int \frac{g_1 A(t)}{W} dt \tag{4.27b}$$

biçimindedir. Denklemlerde yazılan W Wronskiyen fonksiyonu olup $W = g_1 g'_2 - g'_1 g_2$ biçimindedir. Değeri ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$W = g_1 g'_2 - g'_1 g_2 = t^{h-6}(h+3). \tag{4.28}$$

Yukarıda verdiğimiz (4.26) ve (4.28) eşitlikleri ile g_1 ve g_2 fonksiyonları kullanılarak (4.27a) ve (4.27b) integralleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$U_1 = -\frac{4(h-1)Nt^{-3h(1+w)+4}}{(h+3)(-3h(1+w)+4)} - \frac{4K_\alpha(h-1)}{(h+3)} lnt - \frac{6h^2(h-1)}{k^2(h+3)} t^2 \,, \tag{4.29a}$$

$$U_2 = \frac{4(h-1)Nt^{-3h(1+w)-h+1}}{(h+3)(-3h(1+w)-h+1)} - \frac{4K_\alpha(h-1)}{(h+3)^2} t^{-h-3} - \frac{12h^2(h-1)}{k^2(h+3)(h+1)} t^2. \tag{4.29b}$$

Dolaysıyla özel çözüm aşağıdaki gibi bulunur;

$$f_2 = U_1 g_1 + U_2 g_2 = \left\{ \frac{4(h-1)N}{\left[-3h\left(w+\frac{4}{3}\right)+1\right][-3h(1+w)+4]} \right\} t^{-3h(1+w)}$$

$$- \frac{4(h-1)K_\alpha}{(h+3)} (t^{-4} lnt + \frac{1}{(h+3)} t^{-4}) - \frac{6h^2(h-1)}{(h+1)k^2} t^{-2} \,. \tag{4.30}$$

Buna göre genel çözüm için şu sonuca ulaşırız,

$$f(t) = f_1 + f_2 =$$

$$c_1 t^{-4} + c_2 t^{-1+h} + \left\{ \frac{4(h-1)N}{\left[-3h\left(w+\frac{4}{3}\right)+1\right][-3h(1+w)+4]} \right\} t^{-3h(1+w)} - \frac{4(h-1)K_\alpha}{(h+3)} (t^{-4} lnt +$$

$$\frac{1}{(h+3)} t^{-4}) - \frac{6h^2(h-1)}{(h+1)k^2} t^{-2}. \qquad (4.31)$$

Daha önce (4.18) numaralı denklemde verilen ifade kullanıldığında bu fonksiyon ($\breve{G} = \frac{G}{\beta}$ olmak üzere) Gauss-Bonnet değişmezi cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(G) = c_1 G + c_2 G^{\frac{1-h}{4}} + AG\left(ln\breve{G} + G_0\right) + B\breve{G}^{\frac{3h(1+w)}{4}} + D\breve{G}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.32)$$

Buradaki

$$G_0 = -\frac{4}{(h+3)}\ , A = \frac{-9(2h-1)\alpha}{2h(h+3)}, \qquad (4.33)$$

$$B = \frac{4(h-1)N}{\left[-3h\left(w+\frac{4}{3}\right)+1\right][-3h(1+w)+4]}\ , D = -\frac{6h^2(h-1)}{(h+1)k^2} \qquad (4.34)$$

biçimindedir. Yukarıda yazılan lineer G teriminin alan denklemine bir katkısı olmadığı için $c_1 = 0$ alınabilir (Goheer ve ark.2009). Böylelikle (4.32) ile verilen fonksiyon

$$f(G) = c_2 G^{\frac{1-h}{4}} + AG\left(ln\breve{G} + G_0\right) + B\breve{G}^{\frac{3h(1+w)}{4}} + D\breve{G}^{\frac{1}{2}} \qquad (4.35)$$

şeklinde olur. (4.35)'deki fonksiyonda B değerini tanımsız yapan h'nin w cinsinden reel değeri yapılacak değerlendirmelerin dışında tutulacaktır.

Naureen Goheer ve ark. 2009'daki çalışmalarında, $\alpha = 0$ ile (4.35) çözümünü Genel Görelilik yaklaşıklığına indirgemek için

$$k^2\rho_0 = 3h^2\ ,\ h = \frac{2}{3(1+w)} \qquad (a_0 = 1) \tag{4.36}$$

biçiminde standart Einstein-FRW çözümlerini kullandıklarında (4.35)'te üçüncü ve dördüncü terimler birbirlerini yok etmektedirler. Bu araştırmacılar, $f(G) = 0$ olması için $c_2 = 0$ olmalıdır sonucunu elde etmişlerdir. Bu durumda (4.5) eylemi Genel Görelilik yaklaşıklığına indirgenir. Bu doğrultuda reel değerli (4.35) fonksiyonu $c_2 = 0$ ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(G) = AG\left(ln\check{G} + G_0\right) + B\check{G}^{\frac{3h(1+w)}{4}} + D\check{G}^{\frac{1}{2}}\ . \tag{4.37}$$

(4.37) fonksiyonunda $\check{G} = \frac{G}{\beta} = t^{-4}$ olduğundan $t > 0$ başlangıç tekilliğinden sonra evrenin tüm aşamalarında bu fonksiyonun tüm terimleri pozitiftir olacaktır.

α parametresi pozitif ise evrenin çok erken zamanlarında ($t \to 0$ limitine yakın) denklem (4.37)'de verilen fonksiyonda birinci terim diğer terimlere baskın olacaktır veya başlangıç tekilliğine yakın eğrilik büyük olacağından R^2 terimi Einstein terimi olan R'ye baskın olur. Evrenin başlangıç tekilliğinden sonra (4.37)'deki fonksiyonda baskın olan birinci terim ile şişme durumu betimlenir ve $t = 0$'dan sonra birinci terim ile fonksiyon monoton şekilde artan bir fonksiyondur. Bu şişme durumu $h = \frac{1}{2}$ radyasyon bölgesinde sona erer ve birinci terim yok olur ve evren deselerasyon (toz) evresine yani maddenin baskın olduğu aşamaya geçer. Bu durum ikinci terimin baskınlığı ile ortaya çıkar. Üçüncü terim ile de ivmelenme fazına geçiş açıklanır. Çünkü bu terimin $h > 1$ olacak şekilde reel bir değeri vardır.

Yukarıda verilen (4.37) çözüm sisteminin evrenin tüm aşamalarını *bir arada* ifade etmesi isteniyorsa yazılan terimlerin mutlak değeri alınmalıdır (Goheer ve ark. 2009). Çünkü evren şişme fazında iken $h \gg 1$ veya ivmelenme fazında iken $h > 1$ olduğundan $\beta > 0$ ve $G > 0$ olur, ayrıca bu esnada deselerasyon aşaması da göz önüne alındığında $\beta < 0$ ve $G < 0$ olur. Bu nedenle evrenin deselerasyon evresinde Gauss-Bonnet değişmezi ($G < 0$) ile genişlerken diğer terimler fiziksel olarak tanımsız olmaktadır. Deselerasyon evresi boyunca fonksiyonun tanımlı olması için diğer terimler

mutlak değer ile gösterilmelidir. Öte yandan şişme veya ivmelenme aşamalarında ise ikinci terimin tanımlı olması için mutlak değer kullanılmalıdır. Sonuç olarak, *bir arada* - reel değerli çözüm sistemi,

$$f(G) = AG\left(ln\left|\check{G}\right| + G_0\right) + B\left|\check{G}\right|^{\frac{3h(1+w)}{4}} + D\left|\check{G}\right|^{\frac{1}{2}} \tag{4.38}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu haliyle (4.38) fonksiyonu evrenin şişme, deselerasyon ve sonrasındaki ivmelenme bölgelerini *bir arada* (bütünleşik) ifade etmektedir. Diğer taraftan Genel Görelilik yaklaşıklığına şöyle gidilebilir: $\alpha = 0$ ve $h = 1$ seçimleri ile $G = 0$ ve bu nedenle (4.38)'deki fonksiyon sıfır olur. Bu durumda (4.5) eylemi R'ye indirgenir. Bu aşamada evren genel görelilik yaklaşıklığı ile genişler. Bu şartlar (4.17)'de kullanıldığında,

$$\frac{3H^2}{k^2} = \rho_m \tag{4.39}$$

eşitliği elde edilir. (4.1) çözümü ve (4.20) eşitliği yardımıyla,

$$3h^2t^{-2} = k^2\rho_0{a_0}^{-3(1+w)}t^{-3h(1+w)} \tag{4.40}$$

şeklinde ($a_0 = 1$ seçimiyle) denklem (4.36) ile verilen standart Einstein - FRW çözümü elde edilir. Burada $h = 1$ ve $w = -\frac{1}{3}$ ile evrenin genişlemesi betimlenir. Bu aşamadan sonra $D\left|\check{G}\right|^{\frac{1}{2}}$ terimi ve $w < -\frac{1}{3}$ ile evren ivmelenme fazına geçiş yapar.

Burada, maddenin dahil olduğu ve eylem lagranjiyan yoğunluğu $R + f(G) + \alpha R^2 + \mathfrak{L}_m$ şeklinde verilen genişletilmiş Gauss-Bonnet kuramının alan denklemlerinin ölçek çarpan üstel *tam* çözümünün var olduğu gösterilmiş ve evrenin üç gelişim aşaması matematiksel olarak bütünleşik formda ifade edilmiştir.

4.3. $F(R,G)$-gravite

Bu başlık altında $f(R,G)$ kuramının alan denklemlerinin maddeninde dahil olduğu (4.1) ile verilen üstel çözümü ve ölçek çarpanın $a = a_0(t_s - t)^{-h}$ şeklindeki phantom çözümleri ele alınacaktır. Bu kuramda Friedmann denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır (bakınız EK 2) :

$$-12H^3\dot{F}_G + \frac{G}{2}F_G - \frac{F(R,G)}{2} + 3\left(\dot{H} + H^2\right)F_R - 3H\dot{F}_R = -k^2\rho, \tag{4.41}$$

$$\frac{F(R,G)}{2} - \frac{1}{2}(RF_R + GF_G) + \ddot{F}_R + 2H\dot{F}_R + 4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 8H^3\dot{F}_G +$$

$$\left(2\dot{H} + 3H^2\right)F_R = -k^2p. \tag{4.42}$$

Burada verilen alan denklemleri birleştirilir ve (1.21) eşitliği kullanılırsa (3.50)'den ($Z = 0$ için) aşağıdaki denklem elde edilir:

$$4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 4H^3\dot{F}_G(2 + 3w) - \frac{G}{2}F_G(1 + w) + \frac{F(R,G)}{2}(1 + w) + \ddot{F}_R +$$

$$H\dot{F}_R(2 + 3w) - \dot{H}F_R(1 + 3w) - 3H^2F_R(1 + w) = 0. \tag{4.43}$$

Buna göre (3.49) denkleminde $Z = 0$ olması için aşağıdaki ifadeler kullanılır:

$$w = \frac{p_e}{\rho_e} = w_e \tag{4.44}$$

ve

$$w = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \tag{4.45}$$

Normal koşullarda (4.45) eşitliği standart Einstein-FRW denkleminden elde edilirken yukarıda birleşik formda yazılan (4.43) denklemi, hem mükemmel bir akışkan için w

parametresinin etkin bir parametre olduğunu hem de bu parametrenin (4.45) ile verilen değere eşit olduğu sonucunu vermektedir.

Şimdi (4.43) denkleminin çözümleri üzerine odaklanacağız. Basitçe, $F(R,G)$ fonksiyonunu yine bu fonksiyonun alt kümelerinden iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazabiliriz (Andrey ve ark. 2013):

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R)\ . \tag{4.46}$$

(4.46) fonksiyonu (4.43)'te verilen denklemde yerine yazıldığında

$$4H^2\ddot{f}_{1G} + 8H\dot{H}\dot{f}_{1G} + 4H^3\dot{f}_{1G}(2+3w) - \frac{G}{2}f_{1G}(1+w) + \left[\frac{f_1(G)}{2} + \frac{f_2(R)}{2}\right](1+$$

$$w) + \ddot{f}_{2R} + H\dot{f}_{2R}(2+3w) - \dot{H}f_{2R}(1+3w) - 3H^2f_{2R}(1+w) = 0 \tag{4.47}$$

sonucu elde edilir. Burada çözüm için (4.47) aşağıdaki gibi ikiye ayrılabilir (Elizalde ve ark. 2010):

$$4H^2\ddot{f}_{1G} + 8H\dot{H}\dot{f}_{1G} + 4H^3\dot{f}_{1G}(2+3w) + \left[\frac{f_1(G)}{2} - \frac{G}{2}f_{1G}\right](1+w) = 0, \tag{4.48}$$

$$\ddot{f}_{2R} + H\dot{f}_{2R}(2+3w) - \dot{H}f_{2R}(1+3w) - 3H^2f_{2R}(1+w) + \frac{f_2(R)}{2}(1+w) = 0\ . \tag{4.49}$$

Genel olarak, (4.48) ve (4.49) diferansiyel denklemlerinin çözümleri ile (4.46) fonksiyonu bu çözümlerin toplamı şeklinde elde edilir.

4.3.1. $F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R$ Modeli ve Üstel Çözümler

Ele aldığımız bu model (4.5) ile verilen eylem integraline benzer. Yani (4.41) denkleminde fonksiyonun $F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R$ tanımı ile (4.17) denklemi eşdeğerdir. Bu yüzden daha önce bu modelde I. FRW denklemi kozmik zaman cinsinden yazılarak çözülmüştü. Burada ise $F(R,G)$-gravitenin (4.47) ile verilen birleşik diferansiyel denklem sistemi ele alınarak (4.46) ile verilen özel seçim yardımıyla daha

genel matematiksel yöntem kullanılacaktır. Ele alınan model ile diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

- αR^2 ile belirtilen Starobinsky terimi yardımıyla erken zaman şişme evresi,
- R ile betimlenen Einstein terimi yardımıyla deselerasyon aşaması,
- $f(G)$ fonksiyonu ile karanlık enerji durumları olarak bilinen evrenin gelişim aşamalarını veren bütünleşik form elde edilecektir.

Çözümleri elde etmek için (4.48) denkleminden başlanılacaktır. Bu denklem ve I. FRW denklemini kullanarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$4H^2\ddot{f}_{1G} + 8H\dot{H}\dot{f}_{1G} - 4H^3\dot{f}_{1G} = \left[\frac{f_2(R)}{2} - 3\dot{H}f_{2R} - 3H^2 f_{2R} + 3H\dot{f}_{2R} - k^2\rho\right](1+w). \quad (4.50)$$

(4.50) diferansiyel denklemi kozmik zaman cinsinden çözülüp daha sonra Gauss-Bonnet değişmezine dönüştürülecektir. Burada, (4.21)'de verilen diferansiyel denklemin çözümünde takip edilen yoldan farklı bir yaklaşım ile çözümler tartışılacaktır.

Ele alınan modelde $f_2(R)$ fonksiyonu $f_2(R) = R + \alpha R^2$ şeklindedir. Bu fonksiyonun türevleri

$$f_{2R} = 1 + 2\alpha R, \;\; \dot{f}_{2R} = 2\alpha\dot{R}, \quad (4.51)$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki eşitlikler ile birlikte (4.3) ve (4.4) denklemlerinde verilen Ricci skaleri ve türevleri ve (4.20)'de verilen madde akışkan enerji yoğunluğu kullanıldığında (4.50) denklemi aşağıdaki şekli alacaktır,

$$4H^2\ddot{f}_{1G} + 8H\dot{H}\dot{f}_{1G} - 4H^3\dot{f}_{1G} = Nt^{-3h(1+w)} - \frac{54h^2(2h-1)\alpha(1+w)}{t^4} + \frac{3h^2(1+w)}{t^2}. \quad (4.52)$$

Burada $N = -k^2\rho_0 a_0^{-3(1+w)}(1+w)$ 'dir. Denklemin sol tarafının fonksiyonun zamana bağlı türevleri ile Hubble sabiti ve onun zamana bağlı türevinden oluştuğu görülmektedir. Bu yüzden $\dot{f}_{1G} = g(t)$ olarak tanımlan(abilir)ırsa (4.52) denklemi,

$$4H^2\dot{g}(t) + 8H\dot{H}g(t) - 4H^3g(t) = Nt^{-3h(1+w)} - \frac{54h^2(2h-1)\alpha(1+w)}{t^4} + \frac{3h^2(1+w)}{t^2} \tag{4.53}$$

biçimde yazılabilmektedir. Ayrıca bu denklemi de

$$4\frac{d}{dt}(H^2g(t)) - 4H^3g(t) = Nt^{-3h(1+w)} - 54h^2(2h-1)\alpha(1+w)t^{-4} + 3h^2(1+w)t^{-2}\,, \tag{4.54}$$

şeklinde düzenleyip $H^2g(t) = U(t) = U$ seçilirse (ki burada üstel çözüm için (4.2) eşitliğinde görüleceği üzere Hubble sabiti zamana bağlıdır) (4.54) ile verilen denklem,

$$4\frac{d}{dt}U - 4\frac{h}{t}U = Nt^{-3h(1+w)} - 54h^2(2h-1)\alpha(1+w)t^{-4} + 3h^2(1+w)t^{-2} \tag{4.55}$$

biçiminde kozmik zamana bağlı birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denkleme dönüştürülür. Denklemin homojen ve tek yanlı çözümleri ile istenen fonksiyon elde edilecektir.

Homojen çözümü bulmak için (4.55) ile verilen denklem

$$4\frac{d}{dt}U - 4\frac{h}{t}U = 0, \tag{4.56}$$

şeklinde yazılabilir. Bu homojen diferansiyel denkleminin çözümünden U fonksiyonu,

$$U = U_0t^h \tag{4.57}$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki U_0 zamana bağlı bir çarpandır. (4.57) eşitliğinin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{dU}{dt} = t^h \frac{dU_0}{dt} + U_0 h t^{h-1} \tag{4.58}$$

eşitliği elde edilir. (4.57) ve (4.58) ile verilen ifadeler (4.55) denkleminde yerine yazıldığında,

$$dU_0 = [\frac{N}{4} t^{-3h(1+w)-h} - \frac{54h^2(2h-1)\alpha(1+w)}{4} t^{-4-h} + \frac{3h^2(1+w)}{4} t^{-2-h}]dt \tag{4.59}$$

biçiminde bir diferansiyel denklem elde edilir. Her iki tarafın integrali alındığında U_0

$$U_0 = \frac{N}{4[-3h(1+w)-h+1]} t^{-3h(1+w)-h+1}$$

$$+ \frac{54h^2(2h-1)\alpha(1+w)}{4(h+3)} t^{-3-h} - \frac{3h(1-h)(1+w)}{4(h+1)} t^{-1-h} + c_1 \tag{4.60}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1 integral sabitidir. Bu ifade (4.57) eşitliğinde yazıldığında U fonksiyonu,

$$U = -\frac{Nt^{-3h(1+w)+1}}{4[4h+3hw-1]} + \frac{54h^2(2h-1)\alpha(1+w)}{4(h+3)} t^{-3} - \frac{3h^2(1+w)}{4(h+1)} t^{-1} + c_1 t^h \tag{4.61}$$

olarak elde edilir. Daha önce verilen U'nun $H^2 g(t) = U(t)$ şeklindeki tanımı (4.61) eşitliğinde yazıldığında,

$$g(t) = \dot{f}_{1G} = -\frac{Nt^{-3h(1+w)+3}}{4h^2[4h+3hw-1]} + \frac{54(2h-1)\alpha(1+w)}{4(h+3)} t^{-1} - \frac{3(1+w)}{4(h+1)} t + \frac{c_1}{h^2} t^{h+2} \tag{4.62}$$

ifadesi elde edilir. (4.62) ile verilen eşitliğin zamana göre integrali alındığında ise,

$$f_{1G} = -\frac{Nt^{-3h(1+w)+4}}{4h^2[4h+3hw-1][-3h(1+w)+4]} + \frac{54(2h-1)\alpha(1+w)}{4(h+3)} lnt - \frac{3(1+w)}{8(h+1)} t^2 + \frac{c_1}{h^2(h+3)} t^{h+3} + c_2 \quad (4.63)$$

sonucuna ulaşılır. Burada c_2 integralden gelen sabittir. $f_{1G} = \frac{df_1(G)}{dG}$ türevi (4.63) eşitliğinde yerine yazılarak (4.18) eşitliğinde verilen $t = \left(\frac{24h^3(h-1)}{G}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\beta}{G}\right)^{\frac{1}{4}}$ Gauss-Bonnet değişmezi kullanıldığında G-formunda bir çözüm bulunur:

$$f_1(G) = \frac{k^2\rho_0(1+w)\beta}{h^2[4h+3hw-1][-3h(1+w)+4][3h(1+w)]}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{3h(1+w)}{4}} - \frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{8(h+3)}\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] - \frac{3(1+w)}{4(h+1)}\beta^{\frac{1}{2}}G^{\frac{1}{2}} + \frac{4c_1\beta^{\frac{h+3}{4}}}{h^2(h+3)(1-h)}G^{\frac{-h+1}{4}} + c_2G\ . \quad (4.64)$$

Burada $a_0 = 1$ alınmıştır. Denklem (4.64)'teki fonksiyonda lineer c_2G teriminin alan denklemine bir katkısı yoktur. Bu yüzden $c_2 = 0$ alınabilir (Goheer ve ark.2009, Sadjadi 2011). $c_1 = 0$ koşuluyla birlikte (4.64) fonksiyonu (4.37)'de verilen fonksiyonla karşılaştırıldığında evrenin üç gelişim aşamasını bütünleşik formda ifade ettiği görülmektedir.

Böylelikle (4.48) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü ile $f_1(G)$ fonksiyonu bulunarak $F(R,G)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) + R + \alpha R^2 = \frac{k^2\rho_0(1+w)\beta}{h^2[4h+3hw-1][-3h(1+w)+4][3h(1+w)]}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{3h(1+w)}{4}} - \frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{8(h+3)}\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] - \frac{3(1+w)}{4(h+1)}\beta^{\frac{1}{2}}G^{\frac{1}{2}} + \frac{4c_1\beta^{\frac{h+3}{4}}}{h^2(h+3)(1-h)}G^{\frac{-h+1}{4}} + R + \alpha R^2. \quad (4.65)$$

Ele alınan modelde, $f_2(R) = R + \alpha R^2$ tanımı (4.49) ile verilen diferansiyel denklemde yerine yazıldığında hangi çözümlerin olabileceği veya üretilebileceği de

araştırılmalıdır. Normal olarak R terimi FRW çözümünü, αR^2 terimi ise süper ivmelenmeyi üretmesi gerekmektedir. Bu çözümlerin üretilip üretilmeyeceği (4.49) ile verilen denklem kullanılarak anlaşılabilir. Buna göre $f_2(R) = R + \alpha R^2$ ile türevleri $f_{2R} = 2\alpha R + 1,\ \dot{f}_{2R} = 2\alpha\dot{R},\ \ddot{f}_{2R} = 2\alpha\ddot{R}$, Ricci skaleri $R = \frac{6h(2h-1)}{t^2}$ ve türevleri $\dot{R} = \frac{-12h(2h-1)}{t^3}$, $\ddot{R} = \frac{36h(2h-1)}{t^4}$ ve (4.2) eşitliğinde verilen Hubble sabiti ile türevi (4.49) denkleminde yazıldığında son derece estetik olan

$$X\frac{1}{t^4} + Y\frac{1}{t^2} = 0 \tag{4.66}$$

sonucu elde edilir. Burada $X = 18\alpha h(2h-1)[4-3h-3hw]$ ve $Y = h[-2+3h+3hw]$ şeklinde zamandan bağımsız ifadelerdir. (4.66) ile verilen denklemde kozmik zaman $t > 0$ olduğundan denklemin sağlanması için özel bir çözüm (trivial, aşikar çözüm); $X = 0$ ve $Y = 0$ alınabilir. $Y = 0$ 'dan h 'nin reel w parametreli değeri aşağıdaki gibi olur,

$$h_1 = \frac{2}{3(1+w)}. \tag{4.67}$$

Bu değer $f_2(R) = R$ şeklindeki Genel Göreliliğin FRW çözümüdür. $X = 0$'dan h'nin diğer bir değeri

$$h_2 = \frac{4}{3(1+w)} \tag{4.68}$$

biçiminde olacaktır. Bu değer $f_2(R) = \alpha R^2$ teriminden geldiğinden süper ivmeli kozmik genişlemeyi ifade eder (Nojiri ve Odintsov 2003, Elizalde ve G´omez 2011). Böylece (4.49) denkleminin tam olarak $f_2(R) = R + \alpha R^2$ modelinin öngördüğü (4.67) ve (4.68) ile verilen değerleri ürettiği görülmüştür ve bu hedeflenen sonuçtur. Modelin ürettiği yukarıdaki çözümler yardımıyla evrenin gelişim aşamaları incelenecektir.

Sonuç olarak; (4.65)'te verilen fonksiyon ile birlikte (4.46)'da yazılan toplam fonksiyonu sade bir biçimde,

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) + R + \alpha R^2 = A\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{3h(1+w)}{4}} + B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] + F(\frac{G}{\beta})^{\frac{1}{2}} + DG^{\frac{-h+1}{4}} + R + \alpha R^2. \quad (4.69)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki

$$A = \frac{k^2\rho_0(1+w)\beta}{h^2[4h+3hw-1][-3h(1+w)+4][3h(1+w)]}, B = -\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{8(h+3)}, \quad (4.70)$$

$$F = -\frac{3(1+w)\beta}{4(h+1)}, D = \frac{4c_1\beta^{\frac{h+3}{4}}}{h^2(h+3)(1-h)} \quad (4.71)$$

biçimindedir. Genel Görelilik yaklaşıklığını $F(R,G)$ eyleminde göstermek için $\alpha = 0$, standart Einstein-FRW çözümü olan $k^2\rho_0 = 3h^2$ ve $h = \frac{2}{3(1+w)}$ ifadeleri (4.64) ile verilen $f_1(G)$ fonksiyonunda yerine yazıldığında bu fonksiyondaki birinci ve üçüncü terimlerin toplamı $A\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + F(\frac{G}{\beta})^{\frac{1}{2}} = 0$ olur. Dolaysıyla fonksiyon $f_1(G) = DG^{\frac{-h+1}{4}}$ biçimine indirgenir. Burada $f_1(G) = 0$ olması gerektiğinden $c_1 = 0$ olmalıdır. Bu durumda (4.46) fonksiyonu Genel Görelilik yaklaşıklığına indirgenir. Yani $F(R,G) = f_2(R) = R$ olur. Bu indirgenmiş fonksiyon (4.49)'daki denklemde yazıldığında (4.67) ile verilen standart FRW çözümlerine ulaşılır.

Naureen Goheer ve ark. 2009 yılında $f_1(G) + R$ modifiye Gauss-Bonnet kuramının I. FRW denklemini üstel çözüm Genel Görelilik yaklaşıklığına bakarak $k^2\rho_0 = 3h^2$ ve $h = \frac{2}{3(1+w)}$ yardımıyla $f_1(G) = 0$ olması için $c_1 = 0$ olmalıdır sonucunu elde ettiler. Fakat bu gerekli bir sonuç değildir. Yani $c_1 \neq 0$ olma durumunda da $f_1(G)$ fonksiyonunun reel bir değeri elde edilebilmektedir (Sadjadi 2010). Bu doğrultuda ileriki başlıklar altında kuramın GKEY'i incelendiğinde reel değerli c_1'i içeren Gauss-Bonnet terimin evrenin geç zaman ivmelenmesini ürettiği görülecektir.

Diğer taraftan eğer $\alpha \neq 0$ ise $k^2\rho_0 = 3h^2$ ve $h = \frac{2}{3(1+w)}$ FRW çözümleri kullanılarak (4.64)'te verilen fonksiyonda birinci ve üçüncü terimler sıfır olduğu

görülmektedir. Fonksiyon ise $f_1(G) = DG^{\frac{-h+1}{4}} + B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right]$ biçimine indirgenir. Burada belirtilen FRW evreninde iki temel durum söz konusudur:

1) Eğer $c_1 = 0$ ise $f_1(G)$ fonksiyonu $f_1(G) = B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right]$ biçiminde süper ivmeli genişlemeyi veren karanlık enerji terimine indirgenir. Bu terimin süper ivmelenmeyi ürettiğini görmek için fonksiyon ve türevleri (4.48) denkleminde yazıldığında

$$\frac{27h^2(2h-1)\alpha(1+w)(3hw+3h-4)}{2t^4} = 0 \tag{4.72}$$

sonucu elde edilir. Buradaki olası çözümlerden biri süper ivmelenme değeri olan h 'nin w parametreli (4.68) ile verilen reel değeridir. O halde FRW evreninde $f_1(G) = B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right]$ fonksiyonu süper ivmeli genişlemeyi betimler (çok erken zaman ve/veya geç zaman karanlık enerji). Yani bu fonksiyon karanlık enerjiyi betimler.

Diğer yandan $f_2(R) = R + \alpha R^2$ şeklindedir. Bu fonksiyonun (4.49) denkleminde yerine yazılması ile (4.66) denklemi elde edilir. (4.66) denkleminde (4.72) eşitliğinin verdiği süper ivmelenme değeri kullanılırsa ilgili denklem aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{8}{3(1+w)t^2} = 0. \tag{4.73}$$

FRW evrenini ifade eden bu denklemin $w \to \infty$ limitiyle başlangıç tekilliğini gösteren tek bir çözümü vardır. Sonuç olarak, FRW çözümü ile bir başlangıç tekilliğinden başlayan evrende, $F(R,G) = f_1(G) = B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right]$ fonksiyonu ile erken zamanda süper ivmeli şişme modeli de üretilebilmektedir.

2) $c_1 \neq 0$ ise $f_1(G) = DG^{\frac{-h+1}{4}} + B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right]$ fonksiyonunda birinci terimin $h = \frac{2}{3(1+w)}$ olacak şekilde reel değerine bakılabilir. Reel değerli olacak şekilde eğer

$\frac{-h+1}{4} = \sigma$ ise $\sigma < 0$ olmak üzere birinci terim evrenin geç zaman ivmelenmesini gösterir.

Yukarıda analiz edilen temel durumlar kuramın termodinamiğinde de incelenecektir.

4.3.2. $F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R$ Modeli ve Phantom Evresi

Bu kısımda temel olarak evren phantom bölgesinde iken (4.48) denkleminin çözümlerinin olup olmadığı incelenecektir. Aynı zamanda (4.49) ile verilen denklemin bu modele göre phantom bölgesinde hangi çözümlerinin olduğu araştırılacaktır. Burada önceki bölümde yapılan çözüm yöntemine benzer bir yol izlenecektir.

Phantom bölgesinde ölçek çarpanı ve Hubble parametresi ile zamana göre türevi

$$a = a_0(t_s - t)^{-h} \qquad H = \frac{h}{t_s - t}, \quad \dot{H} = \frac{h}{(t_s - t)^2} \qquad (h > 0,\ h \neq 1) \qquad (4.74)$$

şeklinde olur. Burada t şimdiki kozmik zamanı ve t_s ise gelecek herhangi bir zamanda oluşabilecek büyük çöküş anını göstermektedir. Yani (4.74)'te ölçek çarpan için $t_s = t$ limitinde $a \to +\infty$ şeklinde büyük çöküş tekilliğini gösterir.

Denklem (4.51)'de verilen ifadeler,

$$f_2(R) = R + \alpha R^2,\ f_{2R} = 2\alpha R + 1,\ \ \dot{f}_{2R} = 2\alpha \dot{R} \qquad (4.75)$$

şeklindedir. (4.74) çözümü kullanılarak (1.22) ve (3.13) ile verilen eşitlikler aşağıdaki gibi yazılabilmektedir;

$$R = \frac{6h(2h+1)}{(t_s - t)^2},\ \dot{R} = \frac{12h(2h+1)}{(t_s - t)^3},\ \rho = \rho_0 a_0^{-3(1+w)}(t_s - t)^{3h(1+w)}. \qquad (4.76)$$

Öncelikle (4.48) denklemi çözülecektir. Bu denklem (4.50)'de verildiği gibi yazılabilir:

$$4H^2\ddot{f}_{1G} + 8H\dot{H}\dot{f}_{1G} - 4H^3\dot{f}_{1G} = \left[\frac{f_2(R)}{2} - 3\dot{H}f_{2R} - 3H^2 f_{2R} + 3H\dot{f}_{2R} - k^2\rho\right](1 + w). \qquad (4.77)$$

Denklem (4.77)'de $H^2 g(t) = U(t) = U$ ve $\dot{f}_{1G} = g(t)$ olmak üzere (4.74), (4.75), (4.76) ile verilen ifadeler kullanıldığında,

$$4\frac{d}{dt}U - 4\frac{h}{(t_s-t)}\,U = -k^2\rho_0 a_0^{-3(1+w)}(1+w)(t_s-t)^{3h(1+w)} + 54h^2(2h+1)\alpha(1+w)(t_s-t)^{-4} + 3h^2(1+w)(t_s-t)^{-2} \tag{4.78}$$

denklemi elde edilir. Buradan hareketle

$$g(t) = \dot{f}_{1G} = \frac{k^2\rho_0 a_0^{-3(1+w)}(1+w)}{4h^2[4h+3hw+1]}(t_s-t)^{3h(1+w)+3} - \frac{54(2h+1)\alpha(1+w)}{4(h-3)}(t_s-t)^{-1} - \frac{3(1+w)}{4(h-1)}(t_s-t) + \frac{c_1}{h^2}(t_s-t)^{-h+2} \tag{4.79}$$

sonucuna ulaşılır. Önceki bölümde yapılan çözüme benzer bir yol takip edildiğinde $f_1(G)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$f_1(G) = \check{A}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{-3h(1+w)}{4}} + \check{B}\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] + \breve{D}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + \check{F}G^{\frac{h+1}{4}} + c_2 G. \tag{4.80}$$

Burada

$$\check{A} = \frac{k^2\rho_0 a_0^{-3(1+w)}(1+w)\beta}{h^2[4h+3hw+1][3h(1+w)+4][3h(1+w)]}\,,\ \check{B} = -\frac{27(2h+1)\alpha(1+w)}{8(h-3)}\,, \tag{4.81}$$

$$\breve{D} = \frac{3(1+w)\beta}{4(h-1)}\ ,\ \check{F} = \frac{4c_1\beta^{\frac{-h+3}{4}}}{h^2(h-3)(1+h)} \tag{4.82}$$

biçimindedir. Ayrıca (4.64)'te ile verilen fonksiyonda $h \to -h$ değişimi yapıldığında (4.80) ile verilen fonksiyon elde edilmektedir. Şimdi (4.49) denklemini ele alalım. Bu denklemde (4.74), (4.75) ifadeleri ile beraber $\dot{f}_{2R} = 2\alpha\ddot{R}$ ve $\ddot{R} = \frac{36h(2h+1)}{(t_s-t)^4}$ eşitliklerini kullandığımızda,

$$\frac{18\alpha h(2h+1)}{(t_s-t)^4}[4+3h+3hw]+\frac{h}{(t_s-t)^2}[2+3h+3hw]=0 \tag{4.83}$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Burada (4.66)'da verilen denklemde yapılan yaklaşıma benzer bir yaklaşım ile h 'nin iki tane reel değeri elde edilebilir:

$$h_1=-\frac{2}{3(1+w)}, \tag{4.84}$$

$$h_2=-\frac{4}{3(1+w)}. \tag{4.85}$$

Bu değerler (4.67) ve (4.68)'de verilen ifadelerin $h\to -h$ değişiminden dolayı eksi işaretlisidir. Ayrıca bu değerler $w<-1$ şeklinde verilen phantom bölgesi için (4.74)'te verilen $h>0$ olma durumuna da uygundur.

Sonuç olarak (4.46) ile verilen toplam fonksiyonu,

$$F(R,G)=f_1(G)+f_2(R)=f_1(G)+R+\alpha R^2=\check{A}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{-3h(1+w)}{4}}+\check{B}\left[G\ln\frac{G}{\beta}-G\right]+\check{D}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}+\check{F}G^{\frac{h+1}{4}}+c_2G\ +R+\alpha R^2 \tag{4.86}$$

biçiminde elde edilir. Burada $c_2=0$ alınabilir (Sadjadi 2011). Genel Görelilik çözümü için

$$k^2\rho_0=3h^2\ ,h=-\frac{2}{3(1+w)} \tag{4.87}$$

değerleri $\alpha=0$ ile birlikte (4.80)'de yazılan fonksiyon uygulandığında $F(R,G)=f_1(G)=\check{F}G^{\frac{h+1}{4}}$ olur, bu durum $c_1=0$ olmasını gerektirmektedir. Bu nedenle (4.86)'da verilen fonksiyon $F(R,G)=R$ şeklinde Genel Görelilik yaklaşıklığına sahiptir.

4.4. $F(R,G)$ Kuramında Görünen Ufuk için GKEY ve Evrenin Gelişim Aşamaları

Tezin bu aşamasında (4.69) ve (4.86) çözümlerinin GKEY çerçevesinde uygulaması yapılacaktır.

Denklem (3.59)'da irdelenen görünen ufuk için yazılan GKEY eşitsizliğinin açık hali aşağıdaki gibi olmaktadır,

$$-2\pi H^{-3}\dot{H}f_R + \pi H^{-2}\dot{f}_R + 4\pi\dot{f}_G - 8\pi^2 H^{-5}\left(H^2+\dot{H}\right)(1+w)\rho_0 a^{-3(1+w)} \geq 0. \tag{4.88}$$

Ele alınan model olan $F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) + R + \alpha R^2$ seçimi ve (4.20)'de verilen eşitlik denklem (4.88)'de yerine yazıldığında,

$$-2\alpha R H^{-3}\dot{H} - H^{-3}\dot{H} + \alpha\dot{R}H^{-2} + 2\dot{f}_G - 4\pi H^{-5}\left(H^2+\dot{H}\right)(1+ w)\rho_0 {a_0}^{-3(1+w)} t^{-3h(1+w)} \geq 0 \tag{4.89}$$

ifadesi bulunmaktadır. (4.2) ile verilen Hubble parametresi ve türevi ile (4.3) ve (4.4) ile verilen Ricci skaleri ve türevi (4.89) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$2\dot{f}_G + \frac{t}{h^2} \geq \frac{4\pi(h-1)(1+)}{h^4}\rho_0 {a_0}^{-3(1+w)} t^{-3h(1+w)+3} \tag{4.90}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.62) ifadesi (4.90) eşitsizliğinde yazıldığında ($k^2 = 8\pi$G ve G= 1 , $a_0 = 1$ seçimleriyle birlikte),

$$\frac{4\pi\rho_0(1+w)t^{-3h(1+w)+3}}{h^2[4h+3hw-1]} + \frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)}t^{-1} - \frac{3(1+w)}{2(h+1)}t + \frac{2c_1}{h^2}t^{h+2} + \frac{t}{h^2} \geq \frac{4\pi(h-1)(1+w)}{h^4}\rho_0 t^{-3h(1+w)+3} \tag{4.91}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade t ile çarpılıp düzenlenirse GKEY,

$$\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)} \geq \frac{4\pi\rho_0(1+w)}{h^2}\left[\frac{(h-1)}{h^2} - \frac{1}{[4h+3hw-1]}\right]t^{-3h(1+w)+4} + \left(\frac{3(1+w)}{2(h+1)} - \frac{1}{h^2}\right)t^2 - \frac{2c_1}{h^2}t^{h+3} \quad (4.92)$$

biçiminde olmaktadır. (4.92) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terimde kozmik zamanın üssünde yer alan h 'nin w parametresi cinsinden reel değeri bilinmeden GKEY'in geçerliliği hakkında değerlendirme yapmak oldukça zordur. Bu nedenle R teriminin çözümünden gelen ve standart FRW evrenini gösteren (4.67) ve (4.84) değerleri yada süper ivmeli genişleyen evreni veren ve αR^2 teriminden gelen (4.68) ve (4.85) değerleri kullanılacaktır. Bu değerler (4.92)'de verilen eşitsizliğin sağ tarafında yer alan ilk terimindeki $t^{-3h(1+w)+4}$ çarpanının üstel ifadesini reelleştirmek için kullanılacaktır. Bu sayede bir kıyaslama yapmak mümkün olacaktır. Diğer bir ifade ile kozmik zamanın üstel ifadesine $h = \frac{2}{3(1+w)}$ değeri yazıldığında bu çarpan standart FRW evrenini gösterirken $h = \frac{4}{3(1+w)}$ değeri kozmik zamanda ilerleyen süper ivmeli evreni ifade edecektir. Kozmik zamanın üstel ifadesi dışında kalan GKEY eşitsizliğinde yer alan h değerleri veya aralıklarını ya eşitsizliğin kendisi ya da ele alınan modeldeki terimler belirleyecektir. Eşitsizlik için h'nin aralığı veya değeri biliniyorsa bu tüm h terimlerine de uygulanır. Fakat karşılaştırma yapma ve işlem kolaylığı için her zaman yazılmayacaktır. Bu durum ele alınan yaklaşımı bozmayacaktır.

İlk olarak $h = \frac{2}{3(1+w)}$ FRW çözümü üzerinde bir inceleme yapılacaktır. Daha sonra ise $h = \frac{4}{3(1+w)}$ ile betimlenen süper ivmeli çözüm ele alınacaktır. Şimdi (4.92)'de verilen GKEY eşitsizliğine geri dönecek olursak, $h = \frac{2}{3(1+w)}$ şeklindeki standart FRW evreni tanımı için bu eşitsizlik

$$\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)} \geq Pt^2 - \frac{2c_1}{h^2}t^{h+3} \quad (4.93)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $P = \frac{4\pi\rho_0(1+w)}{h^2}\left[\frac{(h-1)}{h^2} - \frac{1}{[4h+3hw-1]}\right] + \left(\frac{3(1+w)}{2(h+1)} - \frac{1}{h^2}\right)$ 'dir. Genel olarak (4.93)'teki eşitsizlik için $f_1(G)$ 'den gelen çözüm, R ile temsil edilen

standart Einstein-FRW çözümü ve ρ normal madde enerji yoğunluğundan gelen çözümler söz konusudur. Yani (4.93)'te yazılan GKEY eşitsizliği madde ile beraber $F(R,G) = R + \alpha R^2 + f(G)$ tanımında betimlenen modeldeki tüm terimleri içinde barındırıyor. Bundan dolayı (4.93) eşitsizliği çerçevesinde;

1) $f_1(G)$ terimi ile evrenin başlangıç tekilliğinden sonraki süper şişme dönemi,
2) R terimi ile şişmeden sonraki deselerasyon aşaması,
3) GKEY 'in belirlediği çerçevede quintessence ve/veya phantom evreleri

araştırılacaktır. Burada üçüncü maddedeki quintessence ve phantom karanlık enerji formu $f_1(G)$ fonksiyonu kullanılarak ta türetilebilmektedir.

4.4.1. FRW Modelinde Evrenin Erken Zaman Şişme Dönemi

(4.93) eşitsizliğinde iki önemli parametre yer almaktadır; α ve c_1. GKEY'in belirlediği çerçevede yazılan çözümde (şişme için üstel terim $h \gg 1$olduğundan) $c_1 = 0$ olması gerekmektedir. Bu durumda (4.93) eşitsizliği,

$$\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)} \geq Pt^2 \qquad (4.94)$$

şeklinde olmaktadır. Eşitsizliğin sol tarafı süper ivmeli evreni gösterirken sağ tarafı evrenin başlangıç tekilliğinden sonraki kozmik zamanda ilerleyen maddenin oluşumuna işaret etmektedir.

Çok büyük eğrilik durumunda (evrenin başlangıç tekilliğine çok yakın) madde için $(1+w) > 0$ 'dir. Buradaki w parametresinin (4.44) eşitliği göz önüne alındığında etkin bir parametre olduğu görülür. (4.45) ile verilen eşitliğe (4.2) 'deki üstel çözüm yazıldığında bu parametre $w = -1 + \frac{2}{3h}$ veya $h = \frac{2}{3(1+w)}$ olarak elde edilir. Bu değer (tam uyumlu bir şekilde) yukarıda verilen (4.93) eşitliği elde edilirken FRW evrenini gösterecek biçimde kullanılmıştı. Yine yukarıdaki $(1+w) > 0$ eşitsizliği ile evrenin en erken zamanında madde - enerji formunun etkin quintessence karanlık enerji ve normal maddeden oluştuğu düşünülmüştür. Şişme evresi için (4.1) eşitliğinde evrenin ivmelenmesinde ölçek çarpanın ikinci türevi için $\ddot{a} \gg 0$ olacağından

üstel terim için $h \gg 1$ şeklindedir. Bu durumda (4.36) veya (4.67)'de verilen çözümden değeri ile $P = -\frac{27}{8}(1+w)^3 < 0$ koşulu elde edildiğinden, GKEY eğer $\alpha > 0$ ise geçerlidir. $t \to 0$ limitinde sıfır entropi ile bir başlangıç tekilliğine sahip evrenin (ki bu limitte de GKEY sağlanıyor), şişme evresini veren eşitsizliğin sol tarafındaki terim ile ani ve süper ivmeli durumlar elde edilir. Bu esnada eşitsizliğin sağ tarafındaki terim ortaya çıkmakta ve madde oluşmaktadır. Böylelikle evrenin en erken zamanı için bir şişme modeli elde edilir.

Artan kozmik zamanda şişme evresi $h = \frac{1}{2}$ değeri ile radyasyon bölgesine geçişe kadar devam eder ve bu bölgede ilgili terim yok olur. (4.94) eşitsizliğinde yazılan GKEY 'in α parametresi için bir sınırlama getirdiği görülmektedir.

(4.92)'de GKEY çerçevesinde (4.69)'da verilen fonksiyon için FRW evreninde

$$F(R,G) = f_1(G) = -\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{8(h+3)}\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] \tag{4.95}$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha > 0$ durumu ve $t \to 0$ limitinde bu fonksiyon $F(R,G) \to -\infty$ tekilliğine sahiptir. Bu tekillik ile başlayan fonksiyon, $h = \frac{1}{2}$ radyasyon bölgesine kadar kozmik zamanda monoton bir şekilde artan fonksiyondur ve erken zaman şişme dönemine karşılık gelir. (4.94) eşitsizliğinde veya (4.95) fonksiyonunda şişmeden sonraki radyasyon bölgesinde αR^2'li terimden gelen çözüm düşmektedir. Radyasyon bölgesinden sonra evrenin aşamalarında yapılacak tüm incelemelerde $\alpha < 0$ alınacaktır (Nojiri ve Odintsov 2008, 2011).

4.4.2. Radyasyon Bölgesi

FRW evreninde (4.92) ifadesi (4.93)'te verilen eşitsizliğin biçimindedir, yani

$$\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)} \geq Pt^2 - \frac{2c_1}{h^2}t^{h+3}. \tag{4.96}$$

Radyasyon bölgesinde $h = \frac{1}{2}$ koşuluyla (4.96) ifadesi

$$Pt^2 - 8c_1 t^{\frac{7}{2}} \leq 0 \tag{4.97}$$

şeklinde olmaktadır. GKEY çerçevesinde $c_1 = 0$ olması gerekir. Bu kısıtlama ile

$$Pt^2 \leq 0\,, \tag{4.98}$$

eşitsizliği elde edilir. Radyasyon bölgesi için durum denklemi parametresi $w = \frac{1}{3}$ olduğundan $P < 0$'dır ve GKEY geçerlidir. Eşitsizliğin sağ tarafı sıfır olduğu için adyabatik bir genişleme söz konusudur. (4.98)'de yazdığımız GKEY Genel Görelilik tipi bir genişlemeyi verir. Bu durum (4.66) denklemindeki ikinci ifadede verilen t^2'li çarpandan da görülebilir (Genel Görelilik çözümü için $f_1(G) = 0$ olması gerektiği daha önce tartışılmıştı). Bu durumda (4.46)'da verilen $F(R,G)$ fonksiyonu $F(R,G) = f_2(R) = R$'ye indirgenir ve alan denklemi (4.47)'de veya (4.49)'da kullanıldığında,

$$\frac{h}{t^2}[-2 + 3h + 3hw] = 0 \tag{4.99}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin w parametreli sadece $h = \frac{2}{3(1+w)}$ çözümü vardır. $h = \frac{1}{2}$ koşuluyla (4.98) eşitsizliğinde bu bölge için madde-enerji yoğunluğu sıfırdan farklı olduğu müddetçe doğal radyasyon bölgesi genişlemesi söz konusu olur ($w = \frac{1}{3}$).

Bu durum (4.69)'da verilen fonksiyon yardımıyla kolay bir şekilde incelenebilir:

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) + R = A\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + FG^{\frac{1}{2}} + +DG^{\frac{-h+1}{4}} + R \tag{4.100}$$

(4.98)'de verilen eşitsizliğin belirlediği çerçevede Genel Görelilik yaklaşıklığı için $f_1(G) = 0$ olacak şekilde $h = \frac{2}{3(1+w)}$, $k^2\rho_0 = 3h^2$ sonuçları (4.100)'deki fonksiyona uygulandığında A ve F değerleri birbirini yok eder ve dolaysıyla $c_1 = 0$ olması gerektiği ortaya çıkar. Bu durumda (4.100) ile verilen fonksiyonun $F(R,G) = R$

biçimine indirgenmesi gerekir. Daha sonra, bu fonksiyon alan denklemi olan (4.47)'de veya (4.49)'da yerine yazıldığında (4.99)'da verilen sonuç elde edilir.

4.4.3. Toz Bölgesi

Radyasyon bölgesinden sonra evrenin soğuyarak kabuk bağladığı ve maddenin oluştuğu geç zaman olarak alınabilecek toz bölgesi için $h=\frac{2}{3}$ seçimi ile (4.96)'da verilen GKEY eşitsizliği göz önüne alındığında FRW evreninde çözüm için yine $c_1 = 0$ olmalıdır. Bu durumda GKEY eşitsizliği,

$$\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)} \geq Pt^2 \tag{4.101}$$

biçimini alacaktır. Radyasyon bölgesinden sonra $\alpha < 0$, toz bölgesinde standart FRW çözümünde w ile h değerleri için $w = 0,\ h=\frac{2}{3}$ sonuçları ve bu değerlerle (4.101)'den $P < 0$ elde edildiğinden geç zaman (t çok büyük) toz bölgesi için (4.101)'de verilen GKEY sağlanır.

Denklem (4.101)'de yazılan eşitsizliği eksi ile çarparsak,

$$Pt^2 \geq \frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)} \tag{4.102}$$

ifadesi elde edilir ve artık adyabatik bir genişleme yoktur ($\alpha \neq 0$). Kozmik zaman çok büyük olduğu için (4.102)'nin sol tarafı için $Pt^2 \gg \alpha$'dır. Bu nedenle, evrenin bu bölgedeki genişlemesi GKEY'in belirlediği çerçevede geç zaman limitinde sol taraftaki terim ile gerçekleşir. Burada eşitsizliğin sağ tarafı sıfırdan farklı küçük bir değerdir ve adyabatik bir genişlemenin olmadığını ifade eden rolü vardır, sol taraf radyasyon bölgesinde olduğu gibi t^2'den dolayı Genel Görelilik çözümünü ifade eder.

GKEY 'in belirlediği çerçevede (4.69) fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = A\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{3h(1+w)}{4}} + B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] + FG^{\frac{1}{2}} + R + \alpha R^2. \tag{4.103}$$

Genel görelilik çözümü ($h = \frac{2}{3(1+w)}$ ve $k^2\rho_0 = 3h^2$) ile (4.103)'te $f_1(G)$ fonksiyonunda birinci ve üçüncü terimlerin toplamı sıfır olur. Bu durumda fonksiyon aşağıdaki gibi olacaktır:

$$F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R = B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] + R + \alpha R^2. \tag{4.104}$$

Burada $\alpha < 0$ olduğundan (4.70)'den $B > 0$'dır. Ayrıca Gauss-Bonnet değişmezinin $G = \beta t^{-4}$ şeklinde ve $\beta = 24h^3(h-1)$ olduğu göz önünde alınırsa (4.104) ile verilen fonksiyon kozmik zaman cinsinden

$$F(R,G) = f_1(G) + \alpha R^2 + R = B\frac{\beta}{t^4}\left[\ln\frac{1}{t^4} - 1\right] + \frac{18\alpha h(2h-1)}{t^4}[4 - 3h - 3hw] +$$

$$\frac{h}{t^2}[-2 + 3h + 3hw] \tag{4.105}$$

biçiminde yazılır. Bu bölge için $\beta < 0$ olduğundan evrenin geç zaman toz bölgesinde üçüncü terim baskındır veya evrenin geç zamanında eğrilik küçük olduğundan (4.105) fonksiyonunda Einstein terimi baskın gelir ve fonksiyon $F(R,G) = R$'ye indirgenir. İndirgenen fonksiyon (4.49) ile verilen denklemde yerine yazıldığında (4.99) denklemi elde edilir. $w = 0$ değeri (4.99) denkleminde yazıldığında $h = \frac{2}{3}$ seçimi ile ile Genel Göreliliğin doğal toz bölgesi genişlemesi betimlenmiş olur. Sonuç olarak evrenin deselerasyon bölgesindeki genişlemesinin GKEY çerçevesinde R terimi ile gerçekleştiği gösterilmiştir.

4.4.4. FRW Evreninde Quintessence İvmelenme Bölgesi

Bu bölge deselerasyon bölgesinden sonra evrenin tekrar ivmelenmeye geçtiği bölgedir. (4.45) veya (4.67) eşitliğinden hareketle etkin durum parametresinin aralığı $-1 < w < \frac{-1}{3}$'tür. (4.96)'da verilen GKEY ifadesi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\frac{27(2h-1)\alpha(1+w)}{(h+3)t^2} + \frac{2c_1}{h^2}t^{h+1} \geq P\,. \tag{4.106}$$

Quintessence bölgesi evrenin geç zamanıdır. (4.106) eşitsizliğinde $h = \frac{2}{3(1+w)}$ biçimindeki reel değerli ifade ile t çok büyük iken c_1'li terim α'lı terime baskındır. Yani, evren bu bölgede reel değerli c_1 terimi ile genişler. Bu durum, (4.106) eşitsizliğinde açık bir şekilde görülmektedir. Böylece (4.106) eşitsizliği FRW evreninde baskın olan terim etkisiyle aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{2c_1}{h^2} t^{h+1} \geq P \, . \tag{4.107}$$

Buradan görüleceği üzere Gauss-Bonnet fonksiyonunun $c_1 \neq 0$ şeklinde reel bir değeri (GKEY'in sağlanması için) olmak zorundadır. Bu eşitsizlik için standart FRW evreninde: $h = \frac{2}{3(1+w)}$, $k^2\rho_0 = 3h^2$ değerleri ile $P = -\frac{27}{8}(1+w)^3$ 'tür. Etkin durum denklemi parametresinin bu bölgedeki aralığı $P < 0$ 'dır. $c_1 > 0$ ise GKEY geçerlidir. Burada GKEY'in c_1 parametresi üzerinde bir kısıtlama getirdiği görülüyor. (4.107) ile verilen GKEY 'in belirlediği çerçevede (4.69) fonksiyonu;

$$F(R,G) = f_1(G) = DG^{\frac{-h+1}{4}} \tag{4.108}$$

şeklinde ve FRW evreninde reel değeri,

$$F(R,G) = DG^{\frac{3w+1}{12(1+w)}} \tag{4.109}$$

biçiminde olup burada $D = \frac{36(1+w)^2 c_1}{(11+9w)(1+3w)}$ şeklindedir. $\sigma = \frac{3w+1}{12(1+w)}$ ise $-1 < w < \frac{-1}{3}$ ile verilen quintessence türü karanlık enerjinin aralığı için σ'nın negatif değeri ile artan ivmeli genişlemeyi verir. Bu durum (4.73) ile verilen denklem ve sonrasındaki 2. durumda verilen değerlendirme ile uyuşmaktadır.

Normal maddenin de dahil olduğu evrenin karanlık enerji bölgesinde GKEY'in belirlediği çerçevede $F(R,G) = f_1(G) = DG^{\sigma}$ biçiminde saf Gauss-Bonnet tanımı σ'nın negatif değeri ile evrenin ivmeli genişlemesini (etkin karanlık enerji) verecek

modelde yer almıştır. Yani negatif σ'lı DG^{σ} ile verilen Gauss-Bonnet terimi ana fonksiyondaki diğer terimlere baskın olup quintessence tipi karanlık enerjiyi üretir.

4.4.5. FRW Evreninde Phantom Bölgesi

Bu evre için (4.84) ve (4.85)'te verilen phantom çözümleri kullanılacaktır. Bunun için (4.89)'da verilen GKEY eşitsizliği bu bölge için yeniden elde edilmelidir. Bu bağlamda (4.74)-(4.76) ile verilen çözümler kullanıldığında görünen ufuk için

$$2\dot{f}_G - \frac{(t_s-t)}{h^2} \geq \frac{4\pi(h+1)(1+w)\rho_0(t_s-t)^{3h(1+w)+3}}{h^4} \tag{4.110}$$

sonucuna ulaşılır. (4.79)'da yazılan fonksiyon (4.110) eşitsizliğinde kullanıldığında

$$-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w)}{(h-3)(t_s-t)} + \frac{4\pi\rho_0(1+w)}{h^2}\left[\frac{1}{3h(1+w)+h+1} - \frac{h+1}{h^2}\right](t_s-t)^{3h(1+w)+3} -$$

$$\left[\frac{3(1+w)}{2(h-1)} + \frac{1}{h^2}\right](t_s-t) + \frac{2c_1}{h^2}(t_s-t)^{2-h} \geq 0 \tag{4.111}$$

eşitsizliği elde edilecektir. Bu eşitsizlik $\frac{1}{(t_s-t)}$ ile çarpılıp düzenlendiğinde

$$-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w)}{(h-3)(t_s-t)^2} + \frac{4\pi\rho_0(1+w)}{h^2}\left[\frac{1}{3h(1+w)+h+1} - \frac{h+1}{h^2}\right](t_s-t)^{3h(1+w)+2} -$$

$$\left[\frac{3(1+w)}{2(h-1)} + \frac{1}{h^2}\right] + \frac{2c_1}{h^2}(t_s-t)^{1-h} \geq 0 \tag{4.112}$$

biçiminde GKEY elde edilecektir. Denklem (4.74)'te verilen Hubble parametresi ve onun türevi denklem (4.45)'de verilen eşitlikte yerine yazıldığında $h = -\frac{2}{3(1+w)}$ sonucu elde edilir. Bu değer kullanılarak (4.112) eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w)}{(h-3)(t_s-t)^2} + \frac{2c_1}{h^2(t_s-t)^{h-1}} \geq T. \tag{4.113}$$

Burada

$$T = \left[\frac{3(1+w)}{2(h-1)} + \frac{1}{h^2} + \frac{4\pi\rho_0(1+w)}{h^2}\left\{\frac{h+1}{h^2} - \frac{1}{3h(1+w)+h+1}\right\}\right] \tag{4.114}$$

biçiminde olup FRW çözümleri kullanıldığında w cinsinden $T = \frac{27}{8}(1+w)^3$ ifadesi elde edilecektir. Phantom bölgesinde etkin durum denklemi parametresi $(1+w) < 0$ olduğundan $T < 0$ olup $T \neq 0$ için adyabatik bir genişleme yoktur.

Şimdi (4.113) eşitsizliği ile verilen GKEY'in geçerliliği $0 < h < 3$ ve $h > 3$ aralıklarında incelenecektir. Bu aralıklar aslında (4.113) ile verilen GKEY eşitsizliğinin bir sınırlandırılma halidir.

4.4.5.1. $h_1 = -\frac{2}{3(1+w)}$ FRW Çözümü: $0 < h < 3$ Aralığında ($h \neq 1$)

Evrenin geç zaman phantom bölgesinde verilen aralıkta denklem (4.113)'te yazılan eşitsizlik için α'lı terim c_1'li terime baskındır. Bu durum, geç zaman (t çok büyük) için (4.113) eşitsizliğinden açıkça görülmektedir, zira evrenin genişlemesi α'lı terimle betimlenir. Ayrıca $\alpha < 0$ olduğundan $t = t_s$'de (4.113) eşitsizliğinden büyük çöküş için de GKEY sağlanır.

Bu durumda (4.86)'da verilen fonksiyon ise GKEY'in belirlediği çerçevede

$$F(R,G) = f_1(G) \cong \check{B}\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] \tag{4.115}$$

biçimini alacaktır. Burada, $0 < h < 3$ aralığında $h_1 = -\frac{2}{3(1+w)}$ eşitliğinden etkin durum denklemi parametresinin aralığı $w < -\frac{11}{9}$'dur. (4.81)'den $\check{B}$'nin değeri (4.115) ile verilen fonksiyonda yazıldığında kozmik zaman cinsinden

$$F(R,G) = -\frac{27(2h+1)\alpha(1+w)3h^3(h+1)}{(h-3)(t_s-t)^4}\left[\ln\frac{1}{(t_s-t)^4} - 1\right] \tag{4.116}$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\alpha < 0$ ve $(1+w) < 0$ biçimindedir. h'nin söz konusu aralığında $t = t_s$ olması durumunda $F(R,G) \to +\infty$ şeklinde elde edilir ve (4.74)'te verilen ölçek çarpanı $a \to +\infty$ ile büyük çöküş tekilliğine sahip olacaktır.

4.4.5.2. $h > 3$ Durumu için GKEY

h'nin belirtilen durumu için (4.113) eşitsizliğinden büyük t değerlerinde c_1'li terim diğer terime baskın olur. Verilen durum için GKEY'in belirlemesi ile Gauss-Bonnet fonksiyonunun $c_1 \neq 0$ biçiminde reel bir değerinin olduğu görülüyor. Eğer $c_1 > 0$ ise GKEY sağlanır ve evrenin genişlemesini bu terim ifade eder. Ayrıca, bu bölge için GKEY c_1 parametresi üzerinde yine $c_1 > 0$ şeklinde bir kısıtlama getirmektedir.

GKEY çerçevesinde (4.86)'da verilen fonksiyon,

$$F(R,G) = f_1(G) = \check{F} G^{\frac{h+1}{4}} \tag{4.117}$$

şeklinde olur. $\frac{h+1}{4} = \sigma$ olmak üzere, $h > 3$ için $\sigma > 1$ ve etkin durum denklemi parametresinin aralığı $-\frac{11}{9} < w < -1$ olarak bulunur. Söz konusu aralıkta $t = t_s$ 'de $F(R,G) \to +\infty$ ile büyük çöküş tekilliği görülmektedir.

4.5. $h_2 = -\frac{4}{3(1+w)}$: Süper İvmeli Karanlık Enerji Çözümü

Phantom bölgesinde h_2 'nin verilen değeri (4.86)'da verilen fonksiyonda yazıldığında (4.81)'den $\check{A}$ teriminde bir belirsizlik oluşmaktadır. Bundan dolayı (3.34) eylem integralinde verilen madde lagranjiyanı ihmal edilecektir. Bu durum evrenin süper ivmeli olduğu aşamada phantom akışkanının normal madde akışkanına tamamen baskın geldiği sonucunu doğurur. Önceki bölümde phantom bölgesinde etkin durum denklemi parametresi normal maddeyi içeriyordu, fakat evrenin geç zaman evresinde phantom karanlık enerji akışkanı normal maddeye baskındı. Oysa Burada evren tamamen phantom mükemmel akışkanı ile doludur. Yani bir süper ivmeli durum söz konusudur. Bu nedenle saf $F(R,G)$ kütle-çekim kuramı üzerinde yoğunlaşmamız gerekmektedir.

Madde lagranjiyanı ihmal edildiğinde (3.47) ve (3.48)'de verilen ifadeler aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\rho_e = \frac{1}{2k^2F_R}\left[12H^2F_R - f(R,G) - 6H\dot{F}_R + 6\dot{H}F_R - 24H^3\dot{F}_G + GF_G\right], \quad (4.118)$$

$$p_e = \frac{1}{2k^2F_R}\left[-12H^2F_R + f(R,G) + 4H\dot{F}_R - 6\dot{H}F_R + 2\ddot{F}_R - GF_G + 16H\dot{H}\dot{F}_G + 16H^3\dot{F}_G + 8H^2\ddot{F}_G\right]. \quad (4.119)$$

Buradan alan denklemleri de aşağıdaki gibi elde edilir (Bamba ve ark. 2010):

$$\frac{1}{2}\left(GF_G - F(R,G) - 24H^3\dot{F}_G\right) + 3\left(\dot{H} + H^2\right)F_R - 3H\dot{F}_R = 0 \quad (4.120)$$

$$\frac{F(R,G)}{2} - \frac{1}{2}(RF_R + GF_G) + \ddot{F}_R + 2H\dot{F}_R + 4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 8H^3\dot{F}_G + \left(2\dot{H} + 3H^2\right)F_R = 0. \quad (4.121)$$

(4.118) ve (4.119) ifadelerini kullanarak (3.49)'da verilen $Z = \left[k^2(p_e - w_{ph}\rho_e) + 2\dot{H} + 3H^2(1 + w_{ph})\right]F_R$ değeri phantom bölgesi için yazılırsa (3.50)'de verilen denklem elde edilmektedir, dolaysıyla

$$Z = 4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 4H^3\dot{F}_G\left(2 + 3\,w_{ph}\right) - \frac{G}{2}F_G\left(1 + w_{ph}\right) + \frac{F(R,G)}{2}\left(1 + w_{ph}\right) + \ddot{F}_R + H\dot{F}_R\left(2 + 3\,w_{ph}\right) - \dot{H}F_R\left(1 + 3\,w_{ph}\right) - 3H^2F_R\left(1 + w_{ph}\right). \quad (4.122)$$

olacaktır. Burada $w_{ph} = \frac{p_{ph}}{\rho_{ph}}$ tanımı yapılmıştır, p_{ph} phantom mükemmel akışkanının basıncını ve ρ_{ph} phantom mükemmel akışkanın enerji yoğunluğunu göstermek üzere w_{ph} phantom bölgesi için sabit akışkan parametresidir. Süper ivmeli genişleyen evren bu akışkan ile doludur.

(4.120) ve (4.121) denklemleri; (4.118), (4.119) ifadeleri göz önüne alınarak (3.45) ve (3.46)'daki gibi Einstein denklemi şeklinde yazılabilir:

$$\rho_e k^2 = 3H^2, \tag{4.123}$$

$$p_e k^2 = -(2\dot{H} + 3H^2)\,. \tag{4.124}$$

Böylece bu denklemler kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$k^2(p_e - w_{ph}\rho_e) = -2\dot{H} - 3H^2(1 + w_{ph}). \tag{4.125}$$

Buradaki eşitlik $Z = \left[k^2(p_e - w_{ph}\rho_e) + 2\dot{H} + 3H^2(1 + w_{ph})\right]F_R$ 'de kullanıldığında (4.122) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$4H^2\ddot{F}_G + 8H\dot{H}\dot{F}_G + 4H^3\dot{F}_G(2 + 3\,w_{ph}) - \frac{G}{2}F_G(1 + w_{ph}) + \frac{F(R,G)}{2}(1 + w_{ph}) + \ddot{F}_R + H\dot{F}_R(2 + 3\,w_{ph}) - \dot{H}F_R(1 + 3\,w_{ph}) - 3H^2F_R(1 + w_{ph}) = 0\,. \tag{4.126}$$

Bu denklem tam olarak (4.43) denklemiyle aynıdır ve çözüm önceden elde edildiği için burada tekrardan bir çözüm yapılmayacaktır. Ayrıca (4.123) ve (4.124) denklemlerinden etkin durum denklemi parametresi $w_e = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}$ biçiminde (4.45)'teki gibi elde edilir. Phantom bölgesi için (4.74)'te verilen Hubble parametresi kullanıldığında etkin durum parametresi $w_e = -1 - \frac{2}{3h}$ olarak elde edilir. Süper ivmelenme için $h = -\frac{4}{3(1+w_{ph})}$ değeri kullanıldığında bu defa etkin parametre $w_e = -1 + \frac{1+w_{ph}}{2}$ biçiminde bulunur. Evrenin süper ivmelenme çözümü ile genişleme olayı incelendiğinde durum denklemi parametresinin bu etkin değeri kullanılacaktır.

(4.120) ve (4.121) denklemleri göz önüne alınarak önceden uygulanan çözüm yöntemine benzer bir yol izlendiğinde (sadece ρ madde yoğunluğundan gelen katkı ihmal edilerek) çözüm phantom karanlık enerji akışkanı için (4.86)'da yazılan aynı ifadeyle bulunur:

$$F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) + R + \alpha R^2 = \check{B}\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right] + \check{D}\left(\frac{G}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\check{F}G^{\frac{h+1}{4}} + c_2 G + R + \alpha R^2. \quad (4.127)$$

Burada lineer G teriminin alan denklemine bir katkısı yoktur, yani $c_2 = 0$ alınabilir.

4.5.1. Süper İvmeli Aşamada Görünen Ufuk için GKEY

Buraya kadar yapılan tüm incelemeler görünen ufuk için tartışılan GKEY üzerineydi. Burada da evrenin karanlık enerjiyle dolu olduğu (4.127) ile verilen çözüm yine görünen ufuk için oluşturulan GKEY çerçevesinde ele alınacaktır.

Görünen ufuk entropisi saf $F(R,G)$ kuramında (3.54) ile verilen ifade kullanılarak aşağıdaki gibi yazabilir (Maeda 2010):

$$S_A = -2\pi\int\left(\frac{\partial R}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}F_R + \frac{\partial G}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}F_G\right)\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma}\,dA\,. \quad (4.128)$$

Burada (3.55) ve (3.56) kullanıldığında

$$S_A = 16\pi^2 R_A^2\left(F_R + \frac{4}{R_A^2}F_G\right), \quad (4.129)$$

eşitliği elde edilir. Görünen ufuğun yarıçapı $R_A = \frac{1}{H}$ seçildiğinde (4.129) ifadesi

$$S_A = 16\pi^2\left(H^{-2}F_R + 4F_G\right) \quad (4.130)$$

biçimini alır. (4.130) eşitliğinin zamana göre türevi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\dot{S}_A = -32\pi^2 H^{-3}\dot{H}F_R + 16\pi^2 H^{-2}\dot{F}_R + 64\pi^2\dot{F}_G. \quad (4.131)$$

Böylelikle görünen ufuk için entropinin dinamiği oluşturulmuştur.

Görünen ufukta phantom akışkanının entropisi (3.62)'de verilen termodinamiğin birinci yasasından bulunur (Sadjadi 2006). (3.62)'den sonra takip edilen yol phantom akışkanı için yinelendiğinde $\dot{S}_{iç}$, (3.65)'teki gibi elde edilmektedir:

$$\dot{S}_{iç} = -8\pi^2 H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)(\rho_{ph} + p_{ph}). \tag{4.132}$$

(1.20) ile verilen enerji korunum denklemi, evrenin phantom mükemmel karanlık enerji akışkanı ile dolu olduğu durum için yeniden yazılabilmektedir,

$$\dot{\rho}_{ph} + 3H\left(\rho_{ph} + p_{ph}\right) = 0. \tag{4.133}$$

Bu denklemin çözümünden enerji yoğunluğu,

$$\rho_{ph} = \rho_{0ph} a^{-3(1+w_{ph})} \tag{4.134}$$

biçiminde elde edilir. Buradaki ρ_{0ph} integral sabitidir (Elizalde ve G´omez 2011).

Denklem (4.134) eşitliği kullanılarak (4.132) ifadesi için

$$\dot{S_{iç}} = -8\pi^2 H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)\rho_{0ph}(1 + w_{ph})a^{-3(1+w_{ph})} \tag{4.135}$$

sonucu elde edilir. Buna göre $\dot{S}_{top} = \dot{S}_A + \dot{S}_{iç} \geq 0$ ifadesine göre görünen ufuk için GKEY şöyle olur:

$$-32\pi^2 H^{-3}\dot{H}F_R + 16\pi^2 H^{-2}\dot{F}_R + 64\pi^2\dot{F}_G - 8\pi^2 H^{-5}\left(\dot{H} + H^2\right)\rho_{0ph}(1 + w_{ph})a^{-3(1+w_{ph})} \geq 0\,. \tag{4.136}$$

(4.136) ile verilen ifadeden

$$\left(-\frac{54(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)}-\frac{(h+1)(1+w_{ph})\tilde{\rho}_0}{2h^4}\right)\frac{1}{(t_s-t)^2}+\frac{4c_1}{h^2(t_s-t)^{h-1}}\geq\left[\frac{3(1+w_{ph})}{(h-1)}+\frac{2}{h^2}\right] \tag{4.137}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\tilde{\rho}_0=\rho_{0ph}a_0^{-3(1+w_{ph})}$, dır. Bu eşitsizliğin sağ tarafı için $L=\left[\frac{3(1+w_{ph})}{(h-1)}+\frac{2}{h^2}\right]$ olmak üzere $h_2=-\frac{4}{3(1+w_{ph})}$ değeri kullanıldığında

$$L=\frac{9(1+w_{ph})^2(3w_{ph}-1)}{8(7+3w_{ph})} \tag{4.138}$$

sonucunu elde ederiz. Tezin bu aşamasında (4.137) eşitsizliğinin vereceği aralıklar için GKEY tartışılacaktır.

4.5.1.1. $1<h<3$ Aralığında GKEY

$h=-\frac{4}{3(1+w_{ph})}$ ifadesinden geç zamanda durum denklemi parametresi,

$$w_{ph}=-1-\frac{4}{3h} \tag{4.139}$$

biçiminde yazılabilir. h'nin seçilen aralığı için durum denklemi parametresi için $\frac{-7}{3}<w_{ph}<\frac{-13}{9}$ sonucuna ulaşılır. Evrenin geç zaman phantom bölgesi için (4.137) eşitsizliğinde α'lı ve $\tilde{\rho}_0$'lı terimler c_1'li terime baskın gelir. Diğer yandan $\frac{-7}{3}<w_{ph}<\frac{-13}{9}$ için $L<0$ olduğundan GKEY $\alpha<0$ ise geçerlidir. Bu nedenle (4.137) eşitsizliği,

$$\left(-\frac{54(2h+1)\alpha(1+w)}{(h-3)}-\frac{(h+1)(1+w)\tilde{\rho}_0}{2h^4}\right)\frac{1}{(t_s-t)^2}\geq L \tag{4.140}$$

biçimini alacaktır. Dolaysıyla ivmelenmeyi veren $f(G)$ fonksiyonu ve $\tilde{\rho}_0$ phantom evrenin süper ivmeli genişleme durumunu ifade eder, yani süper ivmeli genişleme sonucu hem phantom akışkanı hem de $f(G)$ fonksiyonundan kaynaklanmaktadır. Ayrıca phantom bölgesi süper ivmeli çözümü için GKEY verdiği kısıtlamayla diğer geç

zaman (toz, quintessence, phantom) çözümlerinde de olduğu gibi $\alpha < 0$ olması gerektiği sonucu elde edilir. Etkin durum denklemi parametresinin $w_e = -1 + \frac{1+w_{ph}}{2}$ ifadesinden $w_{ph} = 2w_e + 1$ sonucu elde edilir. Phantom akışkanı durum parametresi $\frac{-7}{3} < w_{ph} < \frac{-13}{9}$ aralığında değerler aldığında etkin parametre için $\frac{-5}{3} < w_e < \frac{-11}{9}$ olacaktır. Yani evren phantom bölgesindeyken yine etkin phantom türü karanlık enerji etkisiyle ivmelenerek genişlemektedir.

Phantom akışkanının zamanla değişimini incelemek için (4.134) ile verilen eşitlikte phantom ölçek çarpan çözümü olan $a = a_0(t_s - t)^{-h}$ kullanılırsa,

$$\rho_{ph} = \tilde{\rho}_0 (t_s - t)^{3h(1+w_{ph})} \tag{4.141}$$

eşitliği elde edilmektedir. $h_2 = -\frac{4}{3(1+w_{ph})}$ değerini kullandığımızda ise (4.141) ifadesi

$$\rho_{ph} = \tilde{\rho}_0 \frac{1}{(t_s-t)^4} \tag{4.142}$$

biçimini almaktadır. Artan kozmik zaman için bu eşitlikten phantom akışkanı (yada karanlık enerji) yoğunluğunun da hızla artmakta olduğu görülür. Yani, evrenin süper ivmeli durumda genişlediğini göstermektedir.

Diğer yandan GKEY'in belirlediği çerçevede (4.127)'de verilen fonksiyon için ($\check{B} = -\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{8(h-3)}$ ve $G = 24h^3(h+1)(t_s - t)^{-4} = \beta(t_s - t)^{-4}$ ile birlikte)

$$F(R,G) = f_1(G) = -\frac{81(2h+1)\alpha(1+w_{ph})h^3(h+1)}{(h-3)} \frac{1}{(t_s-t)^4} \left[\ln \frac{1}{(t_s-t)^4} - 1\right] \tag{4.143}$$

ifadesi elde edilmektedir. $t_s = t$ durumunda $F(R,G) \to +\infty$ olup (4.141)'de verilen phantom enerji yoğunluğu $\rho_{ph} \to +\infty$ ile büyük çöküş tekilliğini vermektedir (Bamba ve ark. 2010).

4.5.1.2. $0 < h < 1$ Aralığında GKEY

Söz konusu aralıkta (4.139)'da verilen durum denklemi parametresi için $w_{ph} < \frac{-7}{3}$ sonucu söz konusudur ve $L > 0$ olur. Böylece (4.140) eşitsizliğinde α'lı ve $\tilde{\rho}_0$'lı terimler baskın olmakta birlikte kozmik zaman için $t \sim t_s$ ise ve $\tilde{\rho}_0 (t_s - t)^{-2} \gg L$ olması durumunda evren phantom akışkanıyla tam dolu iken GKEY geçerli olmaktadır. Eğer bu şart sağlanamıyor ise $t = t_s$ seçiminde GKEY geçerli olur. Bu da durum denklemi parametresinin $w_{ph} < \frac{-7}{3}$ aralığında ve etkin parametre için $w_e < \frac{-5}{3}$ ile büyük çöküş tekilliğinin açıklanabilir olduğunu belirtmektedir.

4.5.1.3. $h > 3$ Durumda GKEY

$h > 3$ için (4.139)'da verilen durum denklemi parametresi $\frac{-13}{9} < w_{ph} < -1$ aralığındadır. $h > 3$ için (4.137)'de verilen eşitsizliğin solundaki c_1'li terim diğer terimlere baskın gelir. Durum denklemi parametresinin bu aralığında (4.138) ile verilen ifadeden $L < 0$ olarak hesaplanır. Eğer $c_1 > 0$ ise GKEY geçerlidir ve evren c_1'li terimin etkisiyle genişler. Etkin durum denklemi parametresi ise $\frac{-11}{9} < w_e < -1$ olarak bulunur. Yani evren phantom bölgesinde yine etkin phantom akışkanı ile süper ivmelenerek genişlemektedir.

GKEY çerçevesinde (4.127) ile verilen fonksiyon

$$F(R, G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) = \check{F} G^{\frac{h+1}{4}} \tag{4.144}$$

biçiminde olacaktır. Kullanılan üstel çözüm $h_2 = -\frac{4}{3(1+w_{ph})}$ ifadesi ile (4.126) fonksiyonunun reel bir üst - G değeri elde edilebilir:

$$F(R, G) = \frac{4 c_1 \beta^{\frac{-h+3}{4}}}{h^2 (h-3)(1+h)} G^{\frac{(3w_{ph}-1)}{12(1+w_{ph})}} . \tag{4.145}$$

Burada $\sigma = \frac{3w_{ph}-1}{12(1+w_{ph})}$ olmak üzere $\frac{-13}{9} < w_{ph} < -1$ aralığında $\sigma > 1$ olarak elde edilir. Yani (4.127) foksiyonunda σ'nın pozitif değeri ile evrenin süper ivmeli bir genişlemesi

elde edilir. Ayrıca (4.145)'te $t = t_s$ limitinde fonksiyon $F(R,G) = +\infty$ büyük çöküş tekilliğine sahiptir.

Süper ivmeli bu çözümde $F(R,G)$ fonksiyonu saf Gauss-Bonnet fonksiyonuna indirgenerek σ'nın pozitif değeri ile evrenin phantom bölgesinde olabileceği bu modelin görünen ufuk ile oluşturulmuş GKEY çerçevesinde belirlenmiştir.

4.6. Olay Ufkunda Phantom Bölgesi

Bu başlıkta olay ufku için phantom davranışı incelenecektir. Phantom bölgesi için (3.52) ile verilen olay ufku yarıçapını hesaplamak için (4.74)'te verilen ölçek çarpan çözümü kullanıldığında olay ufkunun yarıçapı (Sadjadi 2011),

$$R_E = a\int_t^{\infty} \frac{(t_s-t)^h dt}{a_0}$$

$$R_E = \frac{(t_s-t)}{h+1} \tag{4.146}$$

olarak bulunur. (4.74)'te verilen ölçek çarpan çözümünü ve (4.146) ifadesi kullanıldığında (3.77) ile verilen GKEY eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{-(t_s-t)}{(h+1)^2} + 2\dot{f}_G + \frac{4\pi\tilde{\rho}_0(1+w_{ph})(t_s-t)^{3+3h(1+w_{ph})}}{(h+1)^3} \geq 0\,. \tag{4.147}$$

Burada $\tilde{\rho}_0 = \rho_{0ph}a_0^{-3(1+w_{ph})}$'dir. (4.147)'de (4.79) ifadesi (normal madde enerji yoğunluğu ihmal edilerek) kullanıldığında bu eşitsizlik ($k^2 = 8\pi\tilde{G}$ ve $\tilde{G}$=1 seçimiyle)

$$4\pi\tilde{\rho}_0(1+w_{ph})(t_s-t)^{3+3h(1+w_{ph})}\left(\frac{1}{h^2[4h+3hw_{ph}+1]}+\frac{1}{(h+1)^3}\right) - (t_s - t)\left(\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{3(1+w_{ph})}{2(h-1)}\right) - \frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)}(t_s-t)^{-1} + \frac{2c_1}{h^2}(t_s-t)^{-h+2} \geq 0 \tag{4.148}$$

biçiminde elde edilir.

4.6.1. $h = \frac{-2}{3(1+w)}$ FRW Çözümü

Söz konusu çözüm ile (4.148) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)(t_s-t)^2}+\frac{2c_1}{h^2(t_s-t)^{h-1}}\geq J. \tag{4.149}$$

Burada

$$J=-4\pi\tilde{\rho}_0(1+w_{ph})\left(\frac{1}{h^2[4h+3hw_{ph}+1]}+\frac{1}{(h+1)^3}\right)+\left(\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{3(1+w_{ph})}{2(h-1)}\right) \tag{4.150}$$

biçimindedir. FRW çözümü ($a_0=1$ ile) kullanıldığında $J=\frac{9(1+w_{ph})^2(3w_{ph}-1)}{(3w_{ph}+1)^3}$ şeklinde elde edilir. Evren $w_{ph}<-1$ şeklinde phantom bölgesinde iken (4.149)'daki eşitsizlikte $J>0$ olduğu görülür. Ayrıca buradaki w_{ph} ile verilen phantom akışkanına ait durum parametresi olup (4.44) ile verilen eşitlik göz önüne alındığında bu aynı zamanda etkin durum parametresidir. Şimdi (4.149) eşitsizliğinin betimleyeceği h'nin uygun değerlerinde olay ufku için GKEY'in geçerliliği incelenecektir.

4.6.1.1. $0<h<3$ Aralığında GKEY ($h\neq 1$)

Verilen aralıkta, evrenin geç zamanı için (4.149) eşitsizliğinde α'lı terim c_1'li terime baskın gelir. Bu durumda (4.149) eşitsizliği aşağıdaki şekle indirgenebilir:

$$-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)(t_s-t)^2}\geq J. \tag{4.151}$$

Phantom bölgesinde durum parametresi $w_{ph}<-1$ olduğundan $0<h<3$ aralığı için $\alpha<0$ ise $t_s\sim t$ şeklinde büyük çöküş zamanına yakın GKEY geçerli olabilir veya büyük çöküş tekilliği $t=t_s$ 'de GKEY geçerlidir. $0<h<3$ aralığında etkin durum parametresi ise $w_e=w_{ph}<-\frac{11}{9}$ 'dur. Evrenin olay ufkundaki ivmelenmesi, GKEY'in belirlediği çerçevede FRW evreninde α'lı terim ile $t_s\sim t$ limitinde gerçekleşir veya

GKEY büyük çöküş esnasında sağlanır. (4.127)'de verilen fonksiyon ise söz konusu koşul altında

$$F(R,G) = -\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})3h^3(h+1)}{(h-3)(t_s-t)^4}\left[\ln\frac{1}{(t_s-t)^4} - 1\right] \tag{4.152}$$

biçiminde olacaktır. Yukarıda verilen α parametresi ve h'nin aralığı için $t = t_s$ limitinde fonksiyonda $F(R,G) \to +\infty$ tekilliği vardır.

Buradan şu sonuç çıkarılabilir: FRW evreninde olay ufku üzerinde evrenin ivmelenmesi tam olarak görülmüyor. GKEY eşitsizliği açık bir şekilde $t = t_s$ limitinde sağlandığı görülüyor.

4.6.1.2. $h > 3$ Durumunda GKEY

$h > 3$ iken (4.149) ile verilen eşitsizlikte c_1'li terim diğer terime baskın gelir. Bu durumda eşitsizlik,

$$\frac{2c_1}{h^2(t_s-t)^{h-1}} \geq J \tag{4.153}$$

şeklinde olur. Verilen aralık göz önüne alındığında $J > 0$ olduğundan $c_1 > j(t_s - t)^{h-1}$ ise GKEY geçerlidir. Bu da Gauss-Bonnet teriminin büyük bir değer alması anlamına gelmektedir. Eğer c_1 küçük bir parametre ise $t = t_s$ limitinde GKEY sağlanır.

FRW çözümünden $h > 3$ için etkin durum denklemi parametresi $\frac{-11}{9} < w_{ph} = w_e < -1$ aralığında hesaplanır.

(4.86) veya (4.127)'deki fonksiyon söz konusu koşullarda aşağıdaki gibi olacaktır:

$$F(R,G) = f_1(G) = \frac{4c_1\beta^{\frac{-h+3}{4}}}{h^2(h-3)(1+h)}G^{\frac{h+1}{4}}. \tag{4.154}$$

Burada $\frac{h+1}{4}=\sigma$ olmak üzere $\frac{-11}{9}<w_{ph}<-1$ aralığında $\sigma>1$ olarak bulunur. Eğer c_1 parametresi büyük bir parametre ise olay ufkunda evrenin ivmelenmesi, karanlık enerjiyi temsil eden (4.154) ile verilen Gauss-Bonnet fonksiyonun büyük değeri ile mümkün olur. Bu bağlamda görünen ufuk için (4.117)'de bulunan sonuç ile uyuşmaktadır. Diğer yandan bu parametre yeterince büyük değilse büyük çöküş tekilliğinde GKEY sağlanır. Bu durumda FRW evreninin olay ufku üzerinde ivmelenmesi elde edilmez.

4.7. Phantom Karanlık Enerji: $h=\frac{-4}{3(1+w)}$ için Olay Ufkunda GKEY

h'nin verilen değerinde evrenin süper ivmelendiği bu bölgede (3.34)'te verilen normal madde lagranjiyanı, önceki bölümlerde görünen ufuk için yapılan değerlendirmede olduğu gibi (4.80)'de verilen fonksiyonda belirsizlik oluşturduğundan dolayı burada da ihmal edilecektir. Phantom akışkanının evreni tamamen doldurduğu bu aşamada fonksiyon için (4.127) çözümü geçerlidir. Ayrıca (4.147)'de yazılan olay ufku için GKEY eşitsizliği bu bölge için de göz önüne alınacaktır. $h=\frac{-4}{3(1+w_{ph})}$ değeri kullanıldığında kozmik zaman- üssü reel değerli (4.148) eşitsizliği

$$\left[4\pi\tilde{\rho}_0\left(1+w_{ph}\right)\left(\frac{1}{h^2[4h+3hw_{ph}+1]}+\frac{1}{(h+1)^3}\right)-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)}\right](t_s-t)^{-1}-$$

$$(t_s-t)\left(\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{3(1+w_{ph})}{2(h-1)}\right)+\frac{2c_1}{h^2}(t_s-t)^{-h+2}\geq 0 \qquad (4.155)$$

şeklinde olacaktır. Bu eşitsizlik $(t_s-t)^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\left[4\pi\tilde{\rho}_0\left(1+w_{ph}\right)\left(\frac{1}{h^2[4h+3hw_{ph}+1]}+\frac{1}{(h+1)^3}\right)-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)}\right]\frac{1}{(t_s-t)^2}+$$

$$\frac{2c_1}{h^2}\frac{1}{(t_s-t)^{h-1}}\geq M \qquad (4.156)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $M=\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{3(1+w_{ph})}{2(h-1)}$ biçimindedir. $h=\frac{-4}{3(1+w_{ph})}$ olmak üzere M değeri,

$$M = -\frac{9(1+w_{ph})^2[(9w_{ph}+13)(w_{ph}-1)-16w_{ph}]}{2(3w_{ph}-1)^2(7+3w_{ph})}. \quad (4.157)$$

biçiminde hesaplanır. Şimdi ise olay ufku için oluşturulan ve (4.156) ile verilen GKEY incelemesi yapılacaktır (GKEY eşitsizliğinin göstereceği aralıklarda).

4.7.1. $1 < h < 3$ Aralığında GKEY

(4.139) eşitliğinden durum denklemi parametresi $-\frac{7}{3} < w_{ph} < \frac{-13}{9}$ aralığında hesaplanır. Bu aralıkta (4.157) ifadesinden $M < 0$ bulunur. Etkin durum denklemi parametresi ise $-\frac{5}{3} < w_e < \frac{-11}{9}$ biçimindedir. Bu nedenle phantom karanlık enerji türü bir genişleme söz konusudur.

(4.156)'da verilen aralıkta eşitsizliğin solunda birinci terim c_1'li terime baskın gelir. Bu durumda eşitsizlik

$$Y\frac{1}{(t_s-t)^2} \geq M \quad (4.158)$$

şeklinde olur. Burada

$$Y = \left[4\pi\tilde{\rho}_0(1+w_{ph})\left(\frac{1}{h^2[4h+3hw_{ph}+1]}+\frac{1}{(h+1)^3}\right)-\frac{27(2h+1)\alpha(1+w_{ph})}{(h-3)}\right] \quad (4.159)$$

biçimindedir. Yukarıda verilen durum denklemi parametresinin aralığı ve $h = \frac{-4}{3(1+w_{ph})}$ değeri kullanılarak $\alpha < 0$ ise $Y > 0$ olarak bulunur. Bundan dolayı (4.158) ile verilen GKEY eşitsizliği geçerlidir. Evrenin genişlemesi hem α'lı terimle hem de phantom akışkanı ile süper ivmeli şekilde gerçekleşmektedir ($\tilde{\rho}_0 > 0$). Öte yandan (4.127) fonksiyonu (4.158)'de verilen GKEY çerçevesinde incelendiğinde (4.143) ile verilen durumun geçerli olduğu görülür.

4.7.2. $0 < h < 1$ Aralığında GKEY

Verilen aralıkta önceki başlıkta verilen söz konusu terimler baskın olmakla birlikte $M > 0$ olduğundan büyük çöküş esnasında GKEY geçerlidir. Süper ivmelenme

değeri kullanıldığında durum denklemi parametresi, $w_{ph} < -\frac{7}{3}$ biçiminde elde edilir. Etkin durum denklemi parametresi ise $w_e < -\frac{5}{3}$ şeklinde bulunur.

4.7.3. $h > 3$ Durumunda GKEY

Verilen durum (4.158) eşitsizliğinde incelendiğinde $h = \frac{-4}{3(1+w_{ph})}$ değeri için durum parametresi $\frac{-13}{9} < w_{ph} < -1$ aralığında ve (4.157) eşitliğinden $M < 0$ olduğu görülür. Etkin durum denklemi parametresi ise $\frac{-11}{9} < w_e < -1$ olarak bulunur. $h > 3$ için (4.156)'daki eşitsizlikte c_1'li terim diğer terime baskın gelir. $c_1 > 0$ ise GKEY geçerlidir ve evren bu terimle ivmeli bir şekilde genişler. Bundan dolayı fonksiyon için (4.145)'te verilen durumun aynısı geçerlidir.

Sonuç olarak FRW evreninde olay ufku üzerinde ivmelenme veya karanlık enerji davranışı tam olarak görülemezken, süper ivmeli bir evrende phantom akışkanının da rol aldığı GKEY eşitsizliğinde olay ufku üzerinde evrenin ivmelenmesi elde edilmiştir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada genişletilmiş Gauss-Bonnet ve $F(R,G)$ -gravite kuramları ele alınarak evrenin genel gelişim aşamaları, söz konusu kuramların alan denklemlerinin ölçek çarpan üstel çözümü yapılarak belirlenmiştir. Bunun dışında $F(R,G)$-gravite'de elde edilen çözümler GKEY'e uygulanarak seçilen model ile hem diferansiyel denklemlerin çözümünün işaret ettiği evrenin genel aşamaları desteklenmiş hem de bu aşamalar entropi çerçevesinde detaylı bir şekilde incelenmiştir.

1) İlk olarak eylem lagranjiyanı $R + f(G) + \alpha R^2$ şeklinde verilen ve madde lagranjiyanını da içeren genişletilmiş Gauss-Bonnet kuramın ait I. FRW denkleminin ölçek çarpan üstel *tam çözümü* gerçekleştirilmiştir. (4.37) ile verilen bu çözümde evrenin genel olarak erken zaman şişme, deselerasyon ve geç zaman ivmelenme durumları matematiksel olarak bütünleşik bir formda ifade edilmiştir. Burada üstel çözüm gerçekleştirilmesine rağmen erken zaman şişmenin logaritmik bir şekilde olduğu görülmüştür.

Daha önce $R + f(G)$ ile verilen modifiye edilmiş Gauss-Bonnet eylemiyle evrenin erken zaman deselerasyondan geç zaman ivmelenme fazına geçiş durumları üstel çözümler ile gerçekleştirilmiştir (Nojiri ve ark. 2005, Goheer ve ark. 2009). Bu çalışmada söz konusu lagranjiyana αR^2 terimi eklenerek evrenin erken zaman şişme durumu da diğer aşamalara dahil edilerek, genel olarak evrenin üç gelişim aşaması matematiksel olarak bütünleşik bir şekilde elde edilmiştir. Bu doğrultuda αR^2 terimi ile beraber maddeninde dahil olduğu genişletilmiş Gauss-Bonnet kuramının alan denklemlerinin üstel çözümünün var olabileceği gösterilmiştir.

2) İkinci olarak $F(R,G)$- gravite'nin matematiği üzerine odaklanılmıştır. Eylem lagranjiyan yoğunluğu $F(R,G) = f_1(G) + f_2(R) = f_1(G) + R + \alpha R^2$ şeklinde iki fonksiyonun toplamı olarak ele alınan modelin maddenin de dahil olduğu kuramın (4.43) ile verilen birleştirilmiş alan denklem sistemi ele alınarak ölçek çarpan üstel çözümü yapılmıştır (ayrıca birleştirilmiş denklemin $Z = 0$ ile (3.50) ile verilen denklem olduğu görüldü). Yukarıda verilen 1. durumu da içinde barındıracak şekilde daha kapsamlı çözümler elde edilmiştir. Söz gelimi $f_2(R) = R + \alpha R^2$ fonksiyonunun (4.49) denkleminde yazılmasıyla (4.67) ile verilen standart Einstein-FRW çözümü ve (4.68) ile

verilen süper ivmeli çözümler elde edilmiştir. Ayrıca αR^2 teriminden kaynaklı logaritmik $f_1(G) = B\left[G\ln\frac{G}{\beta} - G\right]$ çözümünün (4.48) denkleminde yazılması ile elde edilen (4.72) denkleminin olası çözümlerden birinin (4.68)'de verilen karanlık enerji çözümünü ürettiği görülmüştür. Modelin bu çözümleri üretmesi GKEY incelenmesinde kolaylık sağlamıştır. Bunun yanında evren phantom bölgesinde iken birleştirilmiş denklemin çözümü araştırılmış ve maddenin de baskın (dahil) olduğu birleştirilmiş diferansiyel denklem sisteminin phantom çözümü gerçekleştirilmiştir.

● Bu çözümler görünen ufuk için GKEY'e uygulanarak bu yasanın betimlediği çerçevede FRW evreninde aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir:

a) Eşitsizlik (4.94)'te logaritmik bir şişme modeli elde edilmiştir. GKEY α parametresi üzerinde $\alpha > 0$ şeklinde bir sınırlama getirmiştir. Yani evrenin erken zamanında karşıt kütle-çekim görülmemektedir (Nojiri ve Odintsov 2008, 2011). Evrenin erken zaman şişmesinde karşıt kütle-çekimin olmama durumu GKEY çerçevesinde tespit edilmiştir.

b) (4.96) ile verilen entropi eşitsizliğinin analizinde hem radyasyon hem de toz evreleri için R ile temsil edilen Einstein terimi ile deselerasyon aşamaları elde edilmiştir. Standart Einstein denkleminden elde edilen sonuç ile uyumlu bir şekilde, sonuçlar bu kuramda oluşturulan GKEY çerçevesinde belirlenmiştir. Burada, GKEY c_1 parametresi üzerinde $c_1 = 0$ şeklinde bir kısıtlama getirmiştir.

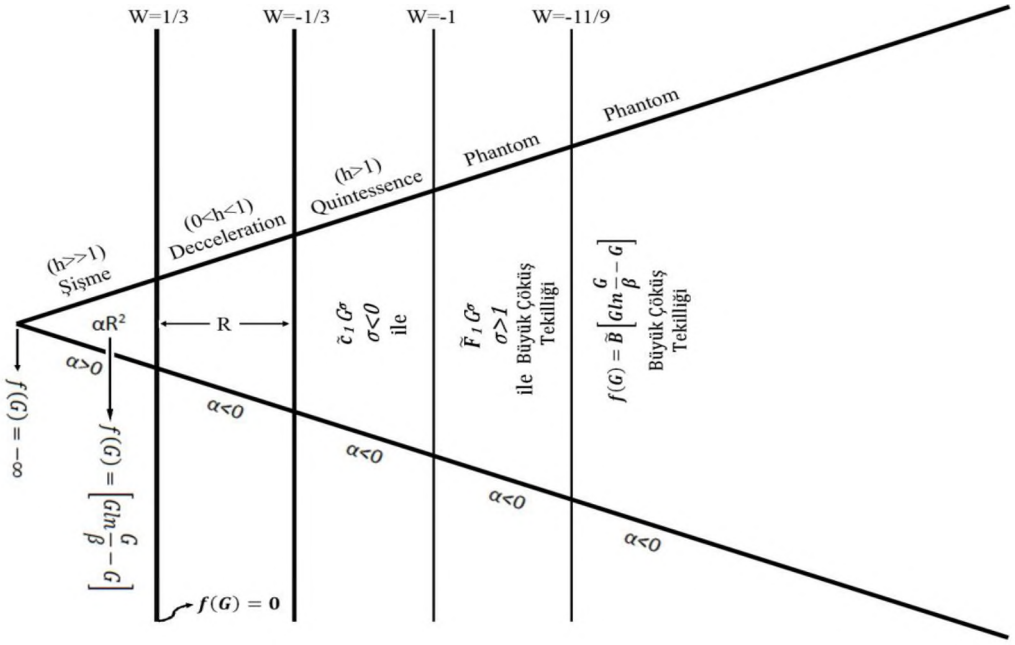
c) (4.106) eşitsizliği ile evrenin quintessence karanlık enerji bölgesi c_1'li terimin baskınlığı ile elde edilmiştir. Yani fonksiyon DG^{σ} şeklinde (4.109) ile verilen formda iken $\sigma < 0$ olması durumunda evrenin quintessence fazında genişlemesi elde edilmiştir. Sadjadi 2010'daki çalışmasında aynı kuramın ölçek çarpan üstel çözümü ile eylem lagranjiyan yoğunluğu $F(R,G) = R + f(G)$ biçimindeyken görünen ufuk için GKEY eşitsizliğinde evrenin geç zaman ivmelenme durumunun elde edilebilmesi için c_1 parametresinin $c_1 = 0$ şeklinde olması gerektiğini bulmuştur. Fakat burada $F(R,G) = R + f(G) + \alpha R^2$ seçimiyle gerçekleştirilen ölçek çarpan çözümü (4.107)'de verilen GKEY eşitsizliği çerçevesinde veya (4.109) ile verilen fonksiyonda c_1'li terimin

baskınlığı ve reel değeri ile evrenin söz konusu bölgesinde ivmeli genişlemesinin elde edilebileceği gösterilmiştir.

d) Phantom bölgesi için (4.113) eşitsizliği elde edilmiştir. GKEY'in h değeri üzerinde zorunlu kıldığı aralıklarla etkin durum parametresinin $-\frac{11}{9} < w < -1$ ve $w < -\frac{11}{9}$ şeklinde iki farklı aşaması incelenmiştir. Etkin durum parametresinin $w < -\frac{11}{9}$ aralığında evrenin genişlemesi (4.116) fonksiyonu ile betimlenirken $-\frac{11}{9} < w < -1$ aralığında ise (4.117) ile verilen fonksiyonda reel değerli c_1'li Gauss-Bonnet terimi ile betimlenmektedir. Burada $f(G) = G^{\sigma}$ ve $\frac{h+1}{4} = \sigma$ olmak üzere durum parametresinin $-\frac{11}{9} < w < -1$ aralığında $\sigma > 1$ şeklinde σ'nın pozitif değeri ile phantom bölgesi elde edilmiştir.

Nojiri ve ark. 2005 yılında yaptığı çalışmada (4.5) eyleminde $\alpha = 0$ olmak üzere modifiye edilmiş Gauss-Bonnet kuramının I. FRW denkleminin $f(G) = G^{\sigma}$ ve (4.74)'te verilen ölçek çarpan çözümlerini kullanarak FRW evreninde eğer $\sigma < 0$ ise evrenin phantom bölgesinde olacağı sonucunu elde etmişlerdir. Bu araştırmacılar, σ'nın aralığının $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ olması durumunda evrenin phantom bölgesinde olamayacağını belirtmişlerdir. Burada GKEY'in belirlediği çerçevede $F(R,G)$ fonksiyonu yukarıda verildiği gibi $F(R,G) = f(G) = G^{\sigma}$ şeklinde Gauss-Bonnet kuramına indirgenerek (maddenin de dahil olduğu) σ'nın pozitif değeri ile evrenin phantom bölgesinde olabileceği sonucu elde edilmiştir. Ayrıca Sadeghi ve ark. 2009'daki makalelerinde karanlık enerji skaler alanı ile ilintili modifiye edilmiş Gauss-Bonnet kuramında $f(G) = G^{\sigma}$ ve ölçek çarpanın üstel çözümü ile $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ aralığında σ'nın pozitif değeri ile phantom bölgesini elde etmişlerdir. Burada GKEY'in belirlediği çerçevede skaler alan kullanmaksızın bu bölge için σ'nın pozitif değeri elde edilmiştir.

Görünen ufuk üzerinde yapılan GKEY incelenmesinde elde edilen sonuçlar şekil 5.1.'de ifade edilmeye çalışılmıştır.



Şekil 5.1. FRW uzay-zaman modeli için görünen ufukta evrenin gelişim aşamaları.

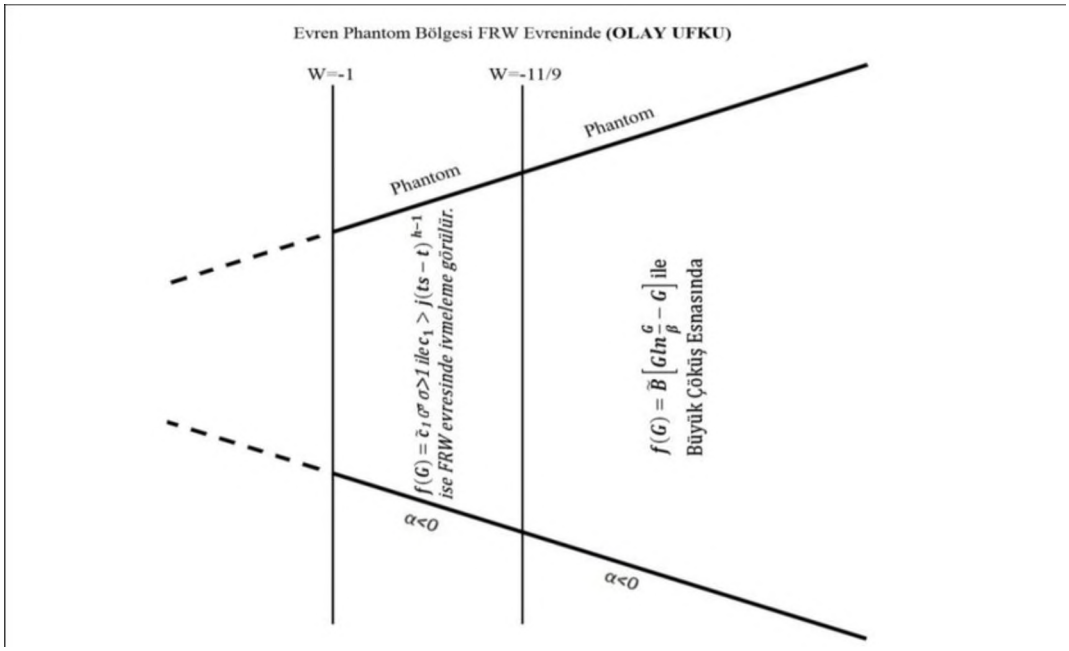
$F(R,G)$ kuramında olay ufku için GKEY elde edilmiştir. Bu yasa standart Einstein-FRW evreninde ve süper ivmeli yani karanlık enerjinin baskın olduğu evrende incelenmiştir.

● Standart Einstein-FRW evreninde GKEY sonuçları aşağıda verilmiştir (OLAY UFKU):

1) $0 < h < 3$ aralığında etkin durum parametresi $w < -\frac{11}{9}$ aralığında olduğu görülmüştür. Bu aralıkta, (4.149) ile verilen eşitsizlikte veya (4.151) fonksiyonunda görüleceği üzere α'lı terimle $t_s \sim t$ limitinde evrenin ivmelenerek genişlemesi elde edildi veya büyük çöküş esnasında GKEY'in geçerli olduğu tespit edilmiştir. $t_s > t$ olması durumunda olay ufku için FRW evreninde ivmelenme görülmemiştir.

2) $h > 3$ değeri için etkin durum parametresi $\frac{-11}{9} < w < -1$ aralığında elde edilmiştir. (4.149) ile verilen GKEY eşitsizliğinin gösterdiği üzere $c_1 > j(t_s - t)^{h-1}$ olması durumunda c_1'li terim ile olay ufkunda evrenin ivmeli genişlemesi elde edilmiştir. Yani, FRW evreninde Gauss-Bonnet teriminin çok büyük bir değer alması durumunda evrenin olay ufkunda ivmelenmesi görülmektedir. Bu terim karanlık enerjiyi

gösteren bir terim olmasından dolayı, evrende karanlık enerji baskın iken olay ufkunda ivmelenmesinin FRW evreninde gerçekleşebilir olduğunu ifade etmektedir. c_1 parametresi küçük bir parametre olması durumunda ise büyük çöküş esnasında GKEY'in geçerli olduğu görülmüştür. (4.153) ile verilen fonksiyonda $\sigma > 1$ ile yukarıda görünen ufuk için FRW evreninde d) maddesi ile açıklanan durumun aynısı elde edilmiştir. Ayrıca GKEY'in c_1 parametresi üzerinde $c_1 > 0$ sınırlamasını getirdiği tespit edilmiştir. Şekil 5.2'de FRW evreninde olay ufku için phantom bölgesinde ivmeli genişleme tasvir edilmiştir.



Şekil 5.2. FRW uzay-zaman modeli için olay ufkunda evrenimizin phantom bölgesi aşaması.

FRW evreni dışında (4.68) ve (4.85) ile verilen süper ivmeli çözüm ile GKEY irdelenmiştir. Normal maddenin ihmal edilmesi gerektiği ve evrenin süper ivmelendiği ve tamamen phantom akışkanı yani karanlık enerji ile dolu olması gerektiği görülmüştür. Bu durumu betimlemek için (4.127) ile verilen saf Gauss-Bonnet fonksiyonu bulunmuştur. Evrenin phantom akışkanı ile dolu olduğu durumda görünen ufuk için (4.137) ile verilen GKEY eşitsizliği oluşturuldu. Bu eşitsizlik h parametresi üzerinde üç aşamalı phantom bölgesini göstermiştir.

● Görünen ufuk için evrenin süper ivmelendiği phantom karanlık enerji bölgesi için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

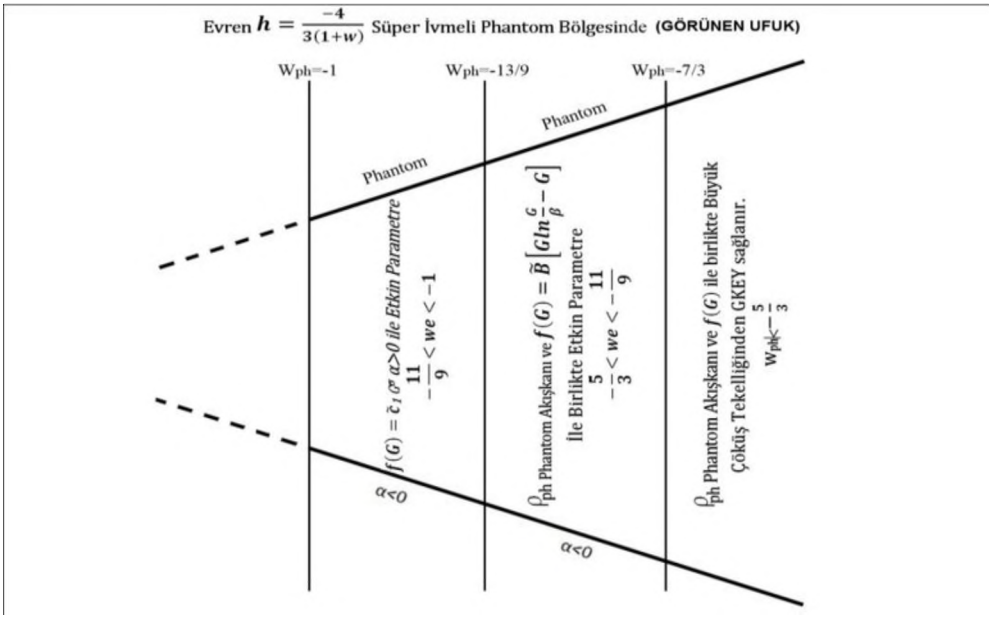
A) $1 < h < 3$ için durum parametresi $\frac{-7}{3} < w_{ph} < \frac{-13}{9}$ aralığında ve etkin durum parametresi $-\frac{5}{3} < w_e < -\frac{11}{9}$ aralığında elde edilmiştir. (4.140) ile verilen GKEY çerçevesinde evrenin hem phantom akışkanından hem de $f(G)$ fonksiyonundan gelen katkı ile süper ivmeli genişlemesi elde edilmiştir. Yani evren yukarıda verilen w_{ph} aralığı ile phantom bölgesinde iken yine etkin phantom türü karanlık enerjinin baskın olduğu w_e ile süper genişleme durumu elde edilmiştir. Bunu destekler mahiyette (4.141) ile verilen eşitlikte artan kozmik zamanda phantom karanlık enerji yoğunluğunun baskınlığının hızla arttığı görülmüştür. Ayrıca diğer yaklaşımlara uyumlu biçimde $\alpha < 0$ olması gerektiği bulunmuştur.

B) $0 < h < 1$ için durum parametresi $w_{ph} < \frac{-7}{3}$ şeklinde ve etkin durum parametresi $w_e < -\frac{5}{3}$ biçiminde elde edilmiştir. $t = t_s$ limitinde (4.137) eşitsizliği ile verilen GKEY'in geçerli olduğu görülmüştür.

C) $h > 3$ için durum parametresi $\frac{-13}{9} < w_{ph} < -1$ aralığında (4.137) ile verilen GKEY eşitsizliğinde c_1'li terimin baskın olduğu görülmüştür. Etkin durum parametresi de $\frac{-11}{9} < w_e < -1$ aralığında elde edilmiştir. Yani evren phantom bölgesinde iken yine phantom karanlık enerji türü etkin durum parametresinin söz konusu aralığında genişlediği anlamına gelmektedir. Bu doğrultuda reel değerli (4.127) fonksiyonunda $\sigma > 1$ ile phantom bölgesinde evrenin süper ivmeli genişlemesi elde edilmiştir.

Phantom bölgesinde verilen tüm sonuçlar için büyük çöküş tekilliği elde edildi. Özellikle süper ivmeli evrende B) maddesi ile GKEY'in $t = t_s$ limitinde geçerli olduğu tespit edilmiştir. Yani evren görünen ufuk ile çevrili iken süper ivmelenmesi, etkin durum parametresinin $w_e = -\frac{5}{3}$ sınır değerine kadar gerçekleştiği hesaplanmıştır. Bu sınır değerinin ötesinde entropi yasası ele alınan modele göre büyük çöküş tekilliğini ifade etmektedir.

Süper ivmeli evrende görünen ufuk için GKEY çerçevesinde elde edilen sonuçların özeti şekil 5.3. ile ifade edilmeye çalışılmıştır.



Şekil 5.3. Süper ivmeli genişleyen evrenin görünen ufuk phantom bölgesi.

● Süper ivmeli evrende olay ufku için GKEY sonuçları aşağıda verilmiştir.

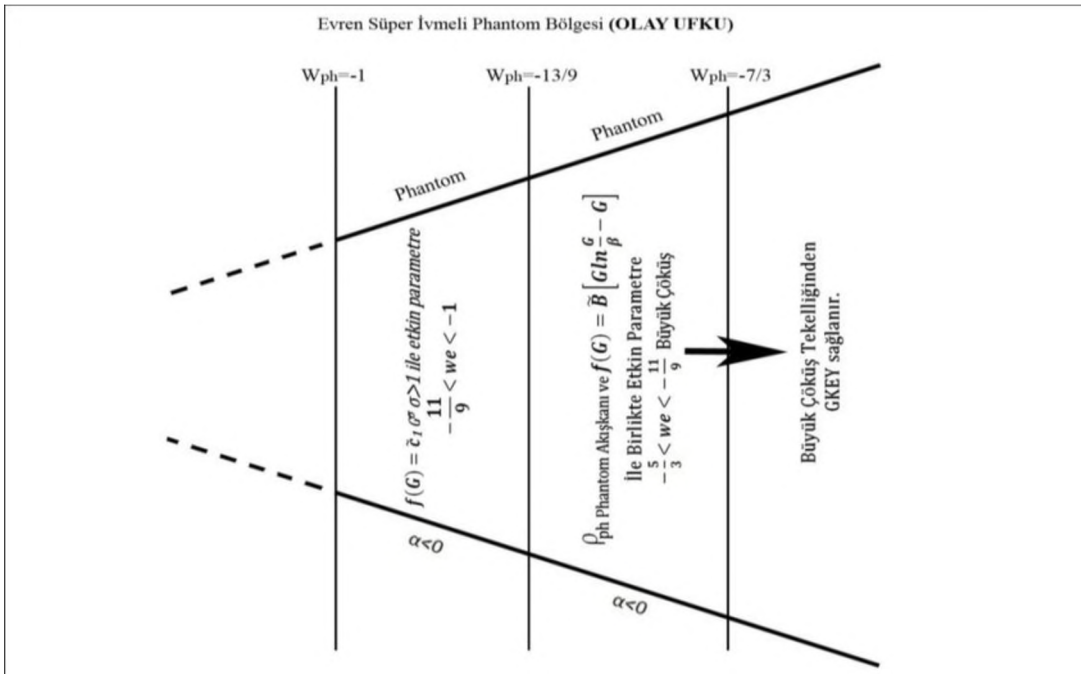
A) $1 < h < 3$ aralığında durum paramatresi $\frac{-7}{3} < w_{ph} < \frac{-13}{9}$ aralığında elde edildi. Evren phantom'un bu bölgesinde iken etkin durum denklemi parametresi ise $\frac{-5}{3} < w_e < \frac{-11}{9}$ aralığında hesaplanmıştır. Söz konusu aralıkta (4.157) eşitsizliği ile ifade edilen GKEY çerçevesinde evrenin olay ufku üzerinde ivmelenmeli genişlemesi hem α'lı terimle hem de phantom akışkanıyla dolu iken elde edilmiştir.

B) $h > 3$ aralığı için durum parametresi $\frac{-13}{9} < w_{ph} < -1$ aralığında ve etkin durum parametresi $\frac{-11}{9} < w_e < -1$ aralığında bulunmuştur. Phantom'un verilen bu aşamasında evrenin GKEY çerçevesinde c_1'li terim ile ivmelenerek genişlediği ve GKEY'in c_1 parametresi üzerinde $c_1 > 0$ şeklinde bir sınırlama getirdiği tespit edilmiştir. Yukarıda verilen görünen ufuk için evrenin süper ivmelendiği bölgede C) maddesi ile verilen durumun aynısı elde edilmiştir.

C) $0 < h < 1$ aralığında durum parametresi $w_{ph} < -\frac{7}{3}$ ve etkin durum parametresi $w_e < -\frac{5}{3}$ aralıklarında bulunmuştur. Evren phantom bölgesinin bu

aşamasında $t_s > t$ iken GKEY eşitsizliğine göre ivmelenmesi görülmezken büyük çöküş esnasında GKEY'in geçerli olduğu tespit edilmiştir.

Evrenin süper ivmeli phantom bölgesinde olay ufku üzerinde davranışı, GKEY çerçevesinde şekil 5.4'te özetlenmiştir.



Şekil 5.4. Süper ivmeli genişleyen evrenin olay ufku phantom bölgesi.

Şekil 5.4'de **olay ufkunda** evrenin genişlemesinin **süper ivmeli** bir şekilde olduğu görülmektedir. Durum denklemi parametresinin $-\frac{7}{3}$ sınır değerini aşması durumda, evren olay ufku üzerinde iken GKEY çerçevesinde büyük çöküş tekilliği görülebilir.

Phantom karanlık enerji bölgesinde yapılan analizlerde, FRW evreninde **görünen ufuk** üzerinde ivmeli bir genişleme görülürken gelecek **olay ufkunda** ivmelenme görülmemektedir. Sadece şekil 5.2'de birinci bölgede Gauss-Bonnet teriminin büyük bir değer alması durumunda ivmeli genişleme görülmektedir.

Planck-2013 gözlemleri, kozmik mikrodalga arka plan (CMB) ışınımı ve baryon akustik salınımı (BAO) gözlemleri kullanılarak phantom bölgesinde karanlık enerji için durum denklemi parametresi $w = -1.13^{+0.13}_{-0.10}$ aralığında bulunmuştur (Ade ve ark. 2014). CMB ve BAO bilgilerine SNLS süpernova gözlemlerinden gelen bilgiler

eklenerek parametre $w = -1.135 \pm 0.069$ aralığında, H_0 Hubble sabiti ölçümleri eklenerek parametre $w = -1.244 \pm 0.095$ aralığında elde edilmiştir (Ade ve ark. 2014). Evrenin ivmelenerek genişlemesi, yukarıdaki şekillerde sonuçları gösterilen parametrenin verilen aralıklarında gözlem sonuçları ile uyum içindedir. Yukarıdaki şekillerde, hem görünen ufukta hem de olay ufkunda etkin parametrenin $w < -\frac{5}{3} \sim -1.666$ aralığında büyük çöküş esnasında GKEY'in geçerli olduğu tespit edilmiştir. Yani, bir bütün olarak evrenin tüm aşamalarını betimleyen modelin phantom bölgesinde yapılan çözümleri, $w < -1.66$ aralığında büyük çöküşte GKEY'in geçerli olabileceğini göstermektedir. Bunun dışında, etkin durum parametresinin $-1 < w < -\frac{11}{9} \sim -1.222$ aralığında karanlık enerjinin baskın olduğu evrenin ivmelenerek genişlemesi, hem görünen ufukta hem de olay ufkunda görülmektedir. Bu durum, yukarıda verilen Planck-2013 gözlemleri ile uyumludur.

Şekil 5.5'te GKEY ile evrenin ivmelenerek genişlemesinin görünen ufuk ve olay ufkundaki durumları verilmiştir.

Etkin parametre aralığı	Genelleştirilmiş Kozmolojik Entropi Yasası ile ivmelenme			
	Görünen ufukta		**Olay ufkunda**	
	FRW evreninde	Süper ivmeli evrende	FRW evreninde	Süper ivmeli evrende
$-\frac{11}{9} < w < -1$	**var**	**var**	$c_1 > j(t_s - t)^{h-1}$ **ise**	**var**
$\frac{-5}{3} < w < \frac{-11}{9}$	**var**	**var**	**yok**	**var**
$w < \frac{-5}{3} \sim -1.666$	**yok**	**yok**	**yok**	**yok**

Şekil 5.5. GKEY ile evrenin görünen ufuk ve olay ufkundaki ivmelenmesi.

6. KAYNAKLAR

Abdolmaleki, A. Najafi, T. and Karami, K. 2014. Generalized second law of thermodynamics in scalar-tensor gravity. arXiv:1401.7549v2.

Abdolmaleki, A. Najafi, T. 2015. Generalized second law of thermodynamics on the apparent horizon in modified Gauss-Bonnet gravity. arXiv:1504.03544v1

Ade, P.A.R. and al. 2013. Planck 2013 results. XII. Component separation. arxiv e – print:1303. 5072.

Ade, P.A.R. and al. 2014. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. arXiv:1303.5076v3 [astro-ph.CO].

Ade, P.A.R. et al. BICEP2 collaboration. 2014. Detection of B-Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2, Phys. Rev. Lett. 112 241101 [arXiv:1403. 3985] .

Ade, P.A.R. et al. 2014. BICEP2 collaboration. BICEP2 II: Experiment and Three-Year Data Set, Astrophys. J. 792 62 [arXiv:1403. 4302] .

Andrey, N. M. Valery, V.O. Iliy, V. K. 2013. From Big to Little Rip in modified *F(R,G)* gravity**.** Astrophys Space Sci. 343:481–488 DOI 10.1007/s10509-012-1240-1.

Artymowskia, M. Lalak, Z. 2014.Inflation and dark energy from f(R) gravity. Journal of cosmology and astroparticle physics. JCAP 09 036. arXiv:1405.7818v2 [hep-th].

Akbar, M. Cai, R.G. 2007. Thermodynamic Behavior of Friedmann Equation at the Apparent Horizon of the FRW Universe. Phys. Rev. D 75, 084003. arXiv: hep-th/0609128v4 .

Alimohammadi, M. Ghalee, A. 2009.The phase-space of generalized Gauss-Bonnet dark energy. Phys. Rev. D80 043006. arXiv:0908.1150v2 [gr-qc].

Alimohammadi, M. Ghalee, A. 2009. Remarks on generalized Gauss-Bonnet dark energy. Phys. Rev. D 79, 063006. arXiv:0811.1286v2 [gr-qc].

Atazadeh, K. Darabi, F. 2014. Energy conditions in f(R,G) gravity. Gen. Rel. Grav. 46 1664. arXiv:1302.0466v4 [gr-qc].

Baez, J.C., E. F. Bunn, E.F. 2006. The meaning of Einstein's equation. USA. 04.01.2006.

Bamba, K. Odintsov, S.D. Sebastiani, L. and Zerbini, S. 2010. Finite-time future singularities in modified Gauss-Bonnet and F(R,G) gravity and singularity avoidance. European Physical Journal C 67: 295-310. arXiv:0911.4390v2 [hep-th].

Bamba, K. and Geng, C.Q. 2011. Thermodynamics of cosmological horizons in f(T) gravity. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. JCAP11 008.

Bamba, K. Nojiri, S. Odintsov, S.D.2013. Odintsov. Modified gravity: walk through accelerating cosmology. arXiv:1302.4831v1 [gr-qc].

Bamba, K. Makarenko, A.N.Myagky, A.N.Odintsov, S.D. 2014. Bouncing cosmology in modified Gauss–Bonnet gravity. Physics Letters B 732 349–355.

Banijamali, A. Fazlpour, B. 2011. Early and Late-time Cosmic Acceleration in Non-minimal Yang-Mills-f(G) Gravity. The European Physical Journal C. 71: 1684 arXiv:1105.6165v2 [physics. gen-ph].

Bardeen, J.M. Carter, B. Hawking, S. 1973. The four laws of black hole mechanics,Commun. Math. Phys. 31 161.

Barrow, JD., 2002, Olanaksızlık Bilimin Sınırları ve Sınırların Bilimi (çev.:Nermin Arık) , İstanbul , Sabancı Üniversitesi, 198.

Bekenstein, J.D. 1973. Black holes and entropy, Phys. Rev. D 7 2333.

Capozziello, S. 2002. Curvature quintessence, Int. J. Mod. Phys. D 11 483 [gr-qc/0201033].

Caldwell, R. R. , R. Dave and P. J. Steinhardt. 1998. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State. Phys. Rev. Lett. 80, 1582.

Caldwell, R. R. , 2002. Phantom Energy and Cosmic Doomsday, Phys. Lett. B 545, 23.

Caldwell, R. R., "A Phantom Menace? Cosmological Consequences of a Dark Energy Component with Super-negative Equation of State", Physics Letters B, Vol.545, pp. 23-29, 2002.

Carroll, S.M.1997.Lecture notes on general relativity. University of California, Oakland. http://arxiv.org/pdf/grqc/.9712019v1.pdf, 1997.

Carroll, S. M. 2004. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison Wesley.

Carroll, S. M. et al. 2005. The Cosmology of generalized modified gravity models. Phys. Rev. D71. 063513 astro-ph/0410031.

Chakraborty, S. Mazumder, N. Biswas, R. 2010. The generalized second law of thermodynamics and the nature of the entropy function. A Letters Journal Exploring the Frontiers of physics, 91 40007.

Gen - Cai, R. Li - Cao, M. 2007. Unified First Law and Thermodynamics of Apparent Horizon in FRW Universe. Phys. Rev. D 75, 064008 arXiv: gr-qc/0611071v2.

Cognola, G. Elizalde, E. Nojiri, S. Odintsov,S.D. Zerbini,S.2006. Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: late-time acceleration and the hierarchy problem. Physical Review D 73 (8), 084007 arXiv: hep-th/0601008v2 .

Cline, J. M. Jeon, S. Moore, G. D. 2004. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts. Phys. Rev. D 70, 043543.

Davies, P. C. W. 1988. Cosmological horizons and entropy Class. Quantum Grav. 5 1349.

Davies, P. C. 1988.Ann. Inst. Henri Poincare 49, 297.

Dayan, I.B. Jing, S. Torabian, M. Westphal, A. Zarate, L. 2014. R2 logR quantum corrections and the inationary observables. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 09, article id. 005, pp. arXiv:1404.7349v1 [hep-th].

Debnath, U. Chattopadhyay, S. Hussain, I. Jamil, M. Myrzakulov, R. 2012. Generalized Second Law of Thermodynamics for FRW Cosmology with Power-Law Entropy Correction. Eur. Phys. J. C (2012) 72: 1875 arXiv:1111.3858v3 [gr-qc].

De Felice, A. 2010. Tsujikawa, S. f(R) theories. Living Rev. Rel. 13, 3 1002. 4928.

Dirac, P.A.M. 1975.General Theory of Relativity. AWiley-interscience publication. Florida State University.

Dombriz, A.C. Gómez, D.S. 2012. On the stability of the cosmological solutions in f(R;G) gravity. Classical and quantum gravity, 29 (24). ISSN 0264-9381 arXiv:1112.4481v2 [gr-qc].

Dodelson, S. 2003. Modern Cosmology. Foundations of Physics,Volume 34, Issue 3, pp 541-544. Academic Press, London.

Eddington, A. 1929. The Nature Of The Physical World, Macmillan, New York, 1929, s. 74.

Elizalde, E. Myrzakulov, R. Obukhov, V.V. G´omez, S. 2010. ΛCDM epoch reconstruction from F(R,G) and modified Gauss-Bonnet gravities. Classical and Quantum Gravity 27 (9), 095007 arXiv:1001.3636v1 [gr-qc].

Elizalde, E. G´omez. D.S. 2011. F(R) cosmology in presence of a phantom fluid and its scalar-tensor counterpart: towards a unified precision model of the evolution of the universe. Phys. Rev. D 80, 044030. arXiv:0903.2732v3 [hep-th].

Einstein, A. 1905. Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der physik, 322(10):891-921.

Einstein, A. 1916. The Foundation of the General Theory of the Relativit. Annalen der Physik, 49.769-822.

Einstein, A. 1917. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativittstheorie. Sitzungsberichte der Preubischen Akademie der Wissenschaften, 142.

Faraoni, V. 2008. f(R) gravity: successes and challenges. arXiv:0810.2602v1 [gr-qc].

Fujii, Y. 1982. Origin of the gravitational constant and particle masses in a scale-invariant scalar-tensor theory. Phys. Rev. D 26, 2580.

Garcıa, N.M. Harko, T. Lobo, F.S.N. Mimoso, J.P.2010. Energy conditions in modified Gauss-Bonnet gravity. Phys. Rev. D83 104032 arXiv:1011.4159v1 [gr-qc].

Granda, L. N. Jimenez, D.F. Sanchez, C. 2012. Quintessential and phantom power-law solutions in scalar tensor model of dark energy. Int. J. Mod. Phys. D 22, 1350055 (2013) [22 pages]. arXiv:1211.3457v1 [astro-ph. CO].

Greene, B. R. 2003. Evrenin Zarafeti. TÜBİTAK popüler bilim kitapları 3. Basım. Sayfa: 83, 94.

Goheer, N. Goswami, R. Dunsby, P.K.S. Ananda, K. 2009. On the co–existence of matter dominated and accelerating solutions in f(G)–gravity. Phys. Rev. D79 121301 arXiv:0904.2559v1 [gr-qc].

Goheer, N. Larena, J. Dunsby, P.K.S. 2009. Power-law cosmic expansion in f(R) gravity models. Phys. Rev. D80 061301 arXiv:0906.3860v1 [gr-qc].

Goldhaber, G.2009. The Acceleration of the Expansion of the Universe: A Brief Early History of the Supernova Cosmology Project (SCP). AIP Conf. Proc. 1166 53-72 arXiv:0907.3526v1 [astro-ph. CO] .

Gong, Y. Wang, B. Wang, A. 2007. Thermodynamical properties of the Universe with dark energy. JCAP01 024 doi:10.1088/1475-7516. arXiv: gr-qc/0610151v2.

Gibbons, G. W. Hawking, S. W. 1977. Cosmological event horizons, thermodynamics and particle Creation. Phys. Rev. D 15, 2738.

Guth, Alan H.1981. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. Phys. Rev. D 23 2.

Hawking, S. 1975. Particle creation by black holes, Commun. Math. Phys. 43 199 [Erratum ibid. 46 (1976) 206-206].

Hubble, 1929. E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. Proceedings of the National Academy of Sciences. 15(3):168 173.

Hu, W. Sawicki, I. 2007. Models of f(R) cosmic acceleration that evade solar system tests. Phys. Rev. D 76, 064004 arXiv: 0705. 1158.

Jacobson, T. 1995. Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State. Phys. Rev. Lett. 75, 1260.

Jamil, M. Saridakis, E.N. Setare, M.R. 2010. Thermodynamics of dark energy interacting with dark matter and radiation. Phys. Rev. D 81, 023007. arXiv:0910.0822v3 [hep-th].

Jaime, L. G. Patino, L. Salgado, M. 2012. f(R) Cosmology revisited. arXiv: 1206. 1642.

Maeda, H. 2010. Gauss-Bonnet black holes with non-constant curvature horizons. Phys. Rev. D 81, 124007. arXiv:1004.0917v4 [gr-qc].

Makarenko, A.N. Valery, V. O. Iliy, V. K. 2013. From Big to Little Rip in modified *F(R,G)* gravity. Astrophys Space Sci 343:481–488 DOI 10. 1007/s10509-012-1240-1.

Mikhail, M.I. Wanas, M.I. 2012. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci. 342 155.

Myrzakulov, R. Gómez, D.S. Tureanu, A. 2011. On the *Λ*CDM Universe in f(G) gravity. Gen Relativ Gravit. 43: 1671–1684 DOI 10. 1007/s10714-011-1149-y.

Nojiri, S. Odintsov, S. D. 2003. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: unification of the inflation and of the cosmic acceleration. Phys. Rev. D 68 123512. [arxiv: hep-th/0307288].

Nojiri, S. Odintsov, S. D. 2003. Quantum de Sitter cosmology and phantom matter Physics Letters B 562 (3), 147-152.

Nojiri, S. Odintsov, S. D. 2004. Dark Energy and Cosmic Speed-Up from Consistent Modified Gravity. Proceedings of 4th International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics (WC 2004), Rio de Janeiro, Brazil, PoS WC2004 024. arXiv: hep-th/0412030v1 2 Dec 2004.

Nojiri, S. Odintsov, S. D. 2005. Modified Gauss-Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy. Phys. Lett. B 631, 1 .[arxiv: hep-th/0508049].

Nojiri, S. Odintsov, S. D., Gorbunova, O.G. 2005.Dark energy problem: from phantom theory to modified Gauss-Bonnet gravity. arXiv: hep-th/0510183v2 22.

Nojiri, S. Odintsov, S. D., Tsujikawa, S. 2005. Properties of singularities in (phantom) dark energy universe. Phys. Rev. D 71 063004. arXiv: hep-th/0501025v2.

Nojiri, S. Odintsov, S.D. 2006. Introduction To Modified Gravity And Gravitational Alternative For Dark Energy. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 04, 115. arXiv:hep-th/0601213v5 31.

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. 2006. Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy. General Relativity and Gravitation, vol. 38, pp. 1285–1304. arXiv:hep-th/0506212v3.

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. 2006. Modified f(R) gravity consistent with realistic cosmology: from matter dominated epoch to dark energy universe. Phys. Rev. D74 086005. arXiv: hep-th/0608008v3.

Nojiri, S. and Odintsov, S. D, Tretyakov. P.V. 2007. Dark energy from modified *F(R)*-scalar-Gauss–Bonnet gravity. Physics Letters B 651 224–231.

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. 2007. Modified gravity and its reconstruction from the universe expansion history. Journal of Physics: Conference Series 66 012005.

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. 2008. Modified gravity as realistic candidate for dark energy, inflation and dark matter. AIP Conf. Proc. 1115 212-217 arXiv: 0810.1557v1 [hep-th].

Nojiri, S. and Odintsov, S. D. 2011. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. Phys. Rept. 505 59-144. arXiv:1011.0544v4 [gr-qc].

Ito, Y. Nojiri. S.2009. Gauss-Bonnet Chameleon Mechanism of Dark Energy. Phys. Rev. D79 103008. arXiv:0904.0367v1 [hep-th].

Iyer, V. Wald, R.M. 1994. Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy, Phys. Rev. D50 846.

Padmanabhan T. 2002. Classical and Quantum Thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes. Class. Quantum Grav., 19 5387.

Padmanabhan, T. 2005. Gravity and the thermodynamics of horizons**.** Phys. Rept. 406, 49 – 125.

Peebles, P. J. E. 1993. Principles of physical cosmology. Princeton University Press. Sayfa: 736. New Jersey, USA.

Peebles, P. J. E. and Vilenkin, A. 1999. Quintessential inflation. Phys. Rev. D 59, 063505.

Peebles, P. J. E. and Ratra, B. 2003. The cosmological constant and dark energy. Rev. Mod. Phys. 75, 559.

Perlmutter,S. Schmidt, B.P. Riess, A.G. 2015. The Nobel Prize in Physics 2011. Erişim: (http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates). Erişim tarihi: 10.06.2015.

Planck Collaboration. 2013 Planck results. XXII. Constraints on inflation. Astron. Astrophys 43. [arXiv:1303. 5082].

Rastkar, A. R. Setare, M. R. Darabi, F. 2011. Phantom phase power-law solution in f(G) gravity. Astrophys Space Sci 337:487–491. arXiv:1104.1904v2 [gr-qc].

Ryden, B. 2006. Introduction to cosmology. Department of Astronomy The Ohio State University press. 65. Ohio, USA.

Ryden, B.S. 2003. Introduction to cosmology. Addison-Wesley,. (ISBN 0-8053-8912-1). 44. San Francisco.

Sadjadi, H.M. 2006. Schwarzschild black hole and generalized second law in phantom-dominated universe. Phys. Lett. B645 108-112. arXiv: gr-qc/0611114v3 16 Dec 2006.

Sadjadi, H.M. 2010.Cosmological entropy and generalized second law of thermodynamics in F(R,G) theory of gravity. Europhys. Lett. 92 50014. arXiv:1009.2941v2 [gr-qc].

Sadjadi, H.M. 2011. On thermodynamics second law in the modified Gauss Bonnet gravity. Phys. Scripta 05 055006. arXiv:1009.1839v2 [gr-qc].

Sadeghi, J. Setare, M.R. Banijamali, A. 2009. Cosmic acceleration and crossing of $w = -1$ in non-minimal modified Gauss–Bonnet gravity. Physics Letters B 679 302–305.

Sadeghi, J. Setare, M.R. Banijamali, A. 2009. Non-minimal Maxwell-Modified Gauss-Bonnet Cosmologies: Inflation and Dark Energy. Eur. Phys. J. C 64: 433-438. arXiv:0906.0713v1 [hep-th].

Sami, M.2009. A primer on problems and prospects of dark energy. Curr. Sci. 97. 887 arXiv:0904. 3445 [hep-th].

Sebastiani, L. Cognola, G. Myrzakulov, R. Odintsov, S.D. and Zerbini, S. 2014. Nearly Starobinsky inflation from modifed gravity, Phys. Rev. D 89 023518.

Sotiriou, T. P.2007. Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology. Doktora Tezi, SİSSA. preprint: 0710. 4438.

Schmidt, H. 2011. Gauss-Bonnet lagrangian G ln G and cosmological exact solutions. Phys. Rev. D 83, 083513. arXiv:1102.0241v2 [gr-qc].

Starobinsky, A.A. 1980. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without singularity, Phys. Lett. B 91 99.

Linde, A. D. 1991.Axions in inflationary cosmology. Phys. Lett. B 259, 38.

Liddle A., 1999. *An Introduction to Modern Cosmology*. second edition, üniversity of Sussex. John Wiley & Sons POl9 8SQ. Sayfa : 18. England.

Liddle A.2003. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley Inc.,West Susex, Sayfa:21,101,106. England.

Zhao, Y.Y. Wu, T.B. Lu, J.B. Zhang, Z. Han,W.L. Lin.L.L. 2012. Modified f(G) gravity models with curvature-matter coupling. Eur. Phys. J. C 72 1924. arXiv:1203.5593v1 [astro-ph. CO].

Xu Jiang, P. Wei Hu, J. Kuan Guo, Z.2013. Inflation coupled to a Gauss-Bonnet term. Phys. Rev. D 88, 123508. arXiv:1310.5579v2 [hep-th].

Yong Zhou, S. Copeland, E.J. Saffin, P.M.2010. Cosmological Constraints on f(G) Dark Energy Models. JCAP07(2009)009. arXiv:0903.4610v3 [gr-qc].

Wagner,W.G.Feynman, R.P.Morinigo,F. B.2003. Feynman lectures on gravitation. *Eur. J. Phys.* 24 330.

Wang, B. Gong, Y. Abdalla, E. 2005. Thermodynamics of an accelerated expanding universe. Phys. Rev. D 74, 083520. arXiv: gr-qc/0511051v1. Chicago, London.

Wald, R.M. 1993. Black hole entropy is the Noether charge, Phys. Rev. D 48 3427.

Wei, H. and Cai, R. A. 2006. Note on Crossing the Phantom Divide in Hybrid Dark Energy Model. Physics Letters B, vol. 634, pp. 9–13.

Weinberg, S. 1972. Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity. John Wiley & Sons, printed United States of America.179. NewYork.

EKLER

EK 1

1.1. Christoffel Sembolü (Bağlantıları)

A_μ kovaryant bir tensör olmak üzere $A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu A_\mu$ 'dür. Bu, söz konusu tensör için normal türevdir. Bir vektörün (tensörün) eğri uzay-zamanda normal türev ile koordinat dönüşümü yapılamaz. Yani koordinat dönüşümleri altında normal türev invaryant (değişmez) değildir. Bunun yerine kovaryant türev alınır. Bundan dolayı A_μ bir vektör olmak üzere eğri uzayda taşınması kovaryant türev ile ilgilidir (Dirac 1975):

$$\nabla_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \ . \tag{1}$$

Burada $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ Christoffel sembolü diye adlandırılır.

Einstein Genel Görelilik alan denklemlerinin temelinin düzgün eğri uzayı ifade eden Riemann geometrisine dayandığından daha önce bahsedilmişti. Bu geometride uzay-zamanın yapısı $g_{\mu\nu}$ metrik tensörü ile ifade edilir. Uzay-zamanda koordinat dönüşümleri altında değişmez olan en kısa mesafe ds olmak üzere,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{dx}^\mu \mathrm{dx}^\nu \tag{2}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu mesafenin nasıl olması gerektiğini ifade eden metrik tensör ise kovaryant türev altında bir sabit olarak ele alınır (Dirac 1975):

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

Ayrıca metrik tensör simetrik bir tensördür. Yani $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ 'dür. (1) ile verilen eşitlik metrik tensör için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - g_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} = 0 \ . \tag{4}$$

(4)'teki eşitlik farklı indisler üzerinden düzenlendiğinde;

$$g_{\mu\nu,\sigma} = g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} + g_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}, \tag{5.a.}$$

$$g_{\mu\sigma,\nu} = g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}, \tag{5.b.}$$

$$g_{\nu\sigma,\mu} = g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} + g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \tag{5.c.}$$

ifadeleri elde edilir.

(5.a.) ile verilen eşitlik eksi işareti ile çarpılıp tüm eşitlikler toplandığında aşağıda verilen Christoffel sembolü (bağlantı) elde edilir:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right). \tag{6}$$

Christoffel sembolü bir tensör değildir. Metrik tensör ve türevlerinden oluşan bir bağlantı eşitliğidir. Metrik tensörün simetriliğinden dolayı bu bağlantının alt iki indisi simetriktir ($\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$).

1.2. Metrik Tensörün Varyasyonu

Metrik tensörün varyasyonu için (Dirac 1975)

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\beta} = g^{\mu}_{\beta} = \delta^{\mu}_{\beta} \quad (\mu = \beta = 1 \ , \ \mu \neq \beta = 0) \tag{7.a}$$

ifadesi kullanılarak, varyasyon ile

$$\delta\left(g^{\mu\nu} g_{\nu\beta}\right) = 0 \tag{7.b}$$

$$g_{\nu\beta}\,\delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\nu}\,\delta\left(g_{\nu\beta}\right). \tag{7.c}$$

eşitlikleri elde edilir. (7.c) eşitliğinde $g^{\sigma\beta}$ ile büzme işlemi yapıldığında,

$$\delta^{\sigma}_{\nu}\delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\sigma\beta} g^{\mu\nu}\,\delta\left(g_{\nu\beta}\right) \tag{8}$$

ifadesi bulunur. Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\delta(g^{\mu\sigma}) = -g^{\sigma\beta} g^{\mu\nu}\,\delta\left(g_{\nu\beta}\right). \tag{9}$$

1.3. Christoffel Sembolünün Varyasyonu

(6) ile verilen bağlantının varyasyonu alındığında

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\delta g^{\lambda\sigma}\left(g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right) + g^{\lambda\sigma}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}\right)\} \tag{10}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede son terim için (4) ile verilen eşitlik kullanıldığında aşağıdaki ifade yazılabilmektedir:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\lambda\sigma} + g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu} + 2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha})\}. \tag{11}$$

Bu ifade elde edilirken Christoffel sembolünün alt iki indisinin simetriklik özelliği kullanılmıştır ($\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$). (11) ile verilen eşitlikte işleme devam edildiğinde;

$$= \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}\right) + g^{\lambda\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}), \tag{12.a.}$$

$$= \delta g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\nu\mu} + g^{\lambda\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}), \tag{12.b.}$$

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \delta g^{\lambda\sigma}g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + g^{\lambda\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha} + \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}) \tag{12.c}$$

şeklinde verilen (12.c.) eşitliği elde edilir. (12.c.)'de sağ tarafta ilk iki terim için (9) ile verilen eşitlik kullanılarak aşağıdaki düzenleme yapılırsa;

$$-g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\delta g_{\mu\nu}g_{\sigma\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\lambda\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g_{\mu\sigma}g_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}, \tag{13.a}$$

$$-g^{\mu\lambda}g^{\nu}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - g^{\lambda}_{\mu}g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{13.b}$$

$$g_{\nu\alpha}\, g^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} - g^{\lambda}_{\mu} g_{\nu\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} = 0 \qquad (13.c)$$

şeklinde bu terimler sıfır olur. (13.c)'de elde edilen sonuç (12.c)'de yazıldığında Christoffel sembolünün varyasyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}\right). \qquad (14)$$

1.4. Riemann Tensörü ve Varyasyonu

Riemann tensörü aşağıdaki gibidir (Carroll 1997, Dirac 1975):

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\ . \qquad (15)$$

Bu ifadenin varyasyonu alındığında

$$\delta R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} = \partial_{\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\ \delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\ , \qquad (16.a)$$

$$\delta R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} = (\partial_{\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\ \delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \boldsymbol{\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}) - \left(\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \right.$$

$$\left.\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} - \boldsymbol{\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}\right) + \boldsymbol{\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}} - \boldsymbol{\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}} \qquad (16.b)$$

ifadesi elde edilmektedir. Koyu renkte verilen terimler uygun şekilde eklenen terimlerdir.

Daha önce değinildiği gibi Christoffel sembolü bir tensör değil bir bağlantıdır. Bu nedenle tensör gibi kovaryant türevi alınamaz. Fakat $\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ terimi bir tensördür. Çünkü varyasyonla iki farklı bağlantının bir tensör gibi dönüşümü alınabilir. Bundan dolayı (16.b)'de birinci parantezdeki ifade $\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$ tensörünün kovaryant türevidir:

$$\nabla_{\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} = \partial_{\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\ \delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \boldsymbol{\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}\ , \qquad (17)$$

ikinci parantez ise $\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ tensörünün kovaryant türevidir:

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\,\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\,\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} - \boldsymbol{\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}. \qquad (18)$$

(16.b)'de son iki terim birbirlerini yok ettikten sonra (17) ve (18) ile verilen eşitlikler kullanılarak Riemann tensörünün varyasyonu,

$$\delta R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} = \nabla_{\beta}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \tag{19}$$

şeklinde elde edilir. (19)'da μ ve β indisleri üzerinden büzme işlemi ve sonra $\alpha \leftrightarrow \mu$ ve $\alpha \rightarrow \rho$ işlemi yapıldığında Ricci tensörünün varyasyonu aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}. \tag{20}$$

Ricci tensörünü metrik tensör ile büzme işlemi yapıldığında Ricci skaleri (eğrilik skaleri) elde edilir:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{21}$$

1.5. Ricci Skalerinin Varyasyonu

(21)'de verilen Ricci skalerinin varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta R = \delta\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) = R_{\mu\nu}\,\delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}\,\delta(R_{\mu\nu}). \tag{22}$$

(20) ile verilen eşitlik (22)'de yazıldığında,

$$\delta R = R_{\mu\nu}\,\delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}\left(\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\right) \tag{23}$$

ifadesi elde edilmektedir.

Bunun dışında, (23)'de eşitliğin sağındaki ikinci terim için (14)'te verilen bağlantıyı kullanarak

$$\delta R = R_{\mu\nu}\,\delta(g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu}\,\frac{1}{2}\left[\nabla_{\alpha}g^{\alpha\sigma}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}\right) - \nabla_{\mu}g^{\alpha\sigma}\left(\nabla_{\alpha}\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\alpha\nu}\right)\right], \tag{24.a}$$

$$= R_{\mu\nu}\,\delta(g^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\left[\nabla^{\sigma}\nabla^{\nu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla^{\sigma}\nabla^{\mu}\delta g_{\mu\sigma} - g^{\mu\nu}\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu} - \nabla^{\nu}\nabla^{\sigma}\delta g_{\sigma\nu} - g^{\alpha\sigma}\nabla^{\nu}\nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\sigma} + \nabla^{\nu}\nabla^{\alpha}\delta g_{\alpha\nu}\right] \tag{24.b}$$

eşitliğini elde ederiz. (24.b)'deki indisler (9) ile verilen ifade kullanılarak $\delta g_{\mu\nu}$ olacak şekilde μ ve ν indislerine göre ayarlama yapılıp $\nabla^2 = \nabla^\mu \nabla_\mu$ ile verilen D'Alembertian işlemcisi kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla^2 \delta g_{\mu\nu}, \tag{25.a}$$

$$\delta R = (-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)\delta g_{\mu\nu} \, . \tag{25.b}$$

1.6. $\sqrt{-g}$ Çarpanının Varyasyonu

Bu terimin varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = \frac{\partial(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(-g)^{\frac{-1}{2}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \, . \tag{26}$$

Burada $\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = -g g^{\mu\nu}$ formülü (Carroll 1997) kullanıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \, . \tag{27}$$

1.7. Kuadratik Terimlerin Varyasyonu

1.7.1. R^2 Teriminin Varyasyonu

Bu terimin varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta R^2 = 2R\delta(R) = 2R\delta\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) = 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2Rg^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \, . \tag{28}$$

(28)'deki eşitliğin ikinci terimi için (20)'de ve (14)'te verilen eşitlikler kullanıldığında;

$$= 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + Rg^{\mu\nu}\left[\nabla_\rho g^{\rho\tau}\left(\nabla_\mu \delta g_{\tau\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\tau\mu} - \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu g^{\rho\tau}\left(\nabla_\mu \delta g_{\tau\rho} + \nabla_\rho \delta g_{\tau\mu} - \nabla_\tau \delta g_{\mu\rho}\right)\right] \tag{29.a}$$

$$= 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R(\nabla^{\tau}\nabla^{\nu}\delta g_{\tau\nu} - g^{\mu\nu}\nabla^{\tau}\nabla_{\tau}\delta g_{\mu\nu} - g^{\rho\tau}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\delta g_{\tau\rho} - \nabla^{\mu}\nabla^{\tau}\delta g_{\tau\mu} + \nabla^{\mu}\nabla^{\rho}\delta g_{\mu\rho}) \quad (29.b)$$

ifadesi elde edilmektedir. Burada (9) ile verilen formül kullanılarak indisler μ ve ν'ye göre ayarlandığında,

$$= 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - Rg_{\tau\nu}g_{\mu\nu}\nabla^{\tau}\nabla^{\nu}\delta g^{\mu\nu} + Rg_{\mu\nu}\nabla^{\tau}\nabla_{\tau}\delta g^{\mu\nu} + Rg^{\rho\tau}g_{\mu\tau}g_{\nu\rho}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\nu} - Rg_{\mu\rho}g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\nabla^{\rho}\delta g^{\mu\nu} \quad (30.a)$$

$$= 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta^{\mu}_{\tau}\nabla^{\tau}\nabla^{\nu}\delta g_{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}\nabla^{\tau}\nabla_{\tau}\delta g_{\mu\nu} + R\delta^{\rho}_{\mu}g_{\nu\rho}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta^{\nu}_{\rho}\nabla^{\mu}\nabla^{\rho}\delta g_{\mu\nu} \quad (30.b)$$

eşitliği elde edilmektedir. Buradan işleme devam edildiğinde δR^2 'nin varyasyonu

$$\delta R^2 = 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\nabla^{\tau}\nabla^{\nu}\delta g_{\tau\nu} + R\nabla^{\mu}\nabla^{\rho}\delta g_{\mu\rho} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu}, \quad (31.a)$$

$$\delta R^2 = 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2R\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}\delta g_{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} \quad (31)$$

biçiminde bulunmaktadır.

1.7.2. $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ Teriminin Varyasyonu

Bu terimin varyasyonunu aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu} \quad (32.a)$$

$$= R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}) \quad (32.b)$$

$$= R^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}R^{\mu}_{\beta}\delta g^{\nu\beta} + R_{\mu\nu}R^{\mu}_{\beta}\delta g^{\nu\beta} + R^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \quad (32.c)$$

$$= 2R_{\mu\nu}R^{\mu}_{\beta}\delta g^{\nu\beta} + 2R^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}. \quad (32.d)$$

(32.d) ifadesinde ikinci terim için (20) ile verilen eşitlik kullanıldığında aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = 2R_{\mu\nu}R^{\mu}_{\beta}\delta g^{\nu\beta} + 2R^{\alpha\beta}(\nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \nabla_{\beta}\delta\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}). \tag{33}$$

(14)'te verilen ifade göz önüne alınarak (33) eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = 2R_{\mu\nu}R^{\mu}_{\beta}\delta g^{\nu\beta} + R^{\alpha\beta}\left[\nabla_{\rho}g^{\rho\tau}\left(\nabla_{\alpha}\delta g_{\tau\beta} + \nabla_{\beta}\delta g_{\tau\alpha} - \nabla_{\tau}\delta g_{\alpha\beta}\right) - \nabla_{\beta}g^{\rho\tau}\left(\nabla_{\alpha}\delta g_{\tau\rho} + \nabla_{\rho}\delta g_{\tau\alpha} - \nabla_{\tau}\delta g_{\alpha\rho}\right)\right], \tag{34.a}$$

$$= 2R_{\mu\nu}R^{\mu}_{\beta}\delta g^{\nu\beta} + R^{\alpha\beta}(\nabla^{\tau}\nabla_{\alpha}\delta g_{\tau\beta} + \nabla^{\tau}\nabla_{\beta}\delta g_{\tau\alpha} - \nabla^{\tau}\nabla_{\tau}\delta g_{\alpha\beta} - g^{\rho\tau}\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\delta g_{\tau\rho} - \nabla_{\beta}\nabla^{\tau}\delta g_{\tau\alpha} + \nabla_{\beta}\nabla^{\rho}\delta g_{\rho\alpha}\ . \tag{34.b}$$

(34.b) ifadesi μ ve ν indislerine göre düzenlendiğinde varyasyon aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = (R^{\alpha\nu}\nabla^{\mu}\nabla_{\alpha} + R^{\beta\nu}\nabla^{\mu}\nabla_{\beta} - R^{\mu\nu}\nabla^{2} - R^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha} - 2R^{\nu\beta}R^{\mu}_{\beta})\delta g_{\mu\nu}. \tag{35}$$

1.7.3. $R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}$ Teriminin Varyasyonu

Bu terimin varyasyonu aşağıdaki gibidir:

$$\delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}) = R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}\ \delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}) + R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\,\delta(R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}),$$

$$= R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}\ \delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}) + R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\,\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\varepsilon\rho}g^{\sigma\tau}R_{\alpha\beta\rho\tau})\ . \tag{36}$$

Bu eşitlikte ikinci terimdeki varyasyon açık halde yazılarak;

$$= R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}\ \delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}) + R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\,\delta g^{\mu\nu}R_{\alpha}{}^{\nu\varepsilon\sigma} + R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\,\delta g^{\beta\nu}R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\varepsilon\sigma} + R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\,\delta g^{\varepsilon\rho}R^{\mu\nu}{}_{\rho}{}^{\sigma} + R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\,\delta g^{\sigma\tau}R^{\mu\nu\varepsilon}{}_{\tau} + R^{\alpha\beta\rho\tau}\ \delta(R_{\alpha\beta\rho\tau}), \tag{37.a}$$

$$= 2R^{\alpha\beta\rho\tau}\ \delta(R_{\alpha\beta\rho\tau}) + (R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\, R_{\alpha}{}^{\nu\varepsilon\sigma} + R_{\nu\mu\varepsilon\sigma} R_{\alpha}{}^{\nu\varepsilon\sigma} + R_{\varepsilon\nu\mu\sigma} R^{\varepsilon\nu}{}_{\alpha}{}^{\sigma} + R_{\sigma\nu\varepsilon\mu} R^{\nu\varepsilon\sigma}{}_{\alpha})\delta g^{\mu\alpha},$$

(37.b)

$$= 2R^{\alpha\beta\rho\tau}\ \delta(R_{\alpha\beta\rho\tau}) + 4R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\, R_{\alpha}{}^{\nu\varepsilon\sigma}\, \delta g^{\mu\alpha} \tag{37.c}$$

(37.c) ile verilen eşitlik bulunur. Burada birinci terim üzerinden işlem yapıldığında

$$= 2R^{\alpha\beta\rho\tau}\ \Big[R^{\mu}{}_{\beta\rho\tau}\, \delta g_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}(\nabla_{\rho}\nabla_{\tau}\delta g_{\alpha\beta} + \nabla_{\rho}\nabla_{\beta}\delta g_{\alpha\tau} - \nabla_{\rho}\nabla_{\alpha}\delta g_{\tau\beta} - \nabla_{\tau}\nabla_{\rho}\delta g_{\alpha\beta} -$$

$$\nabla_{\tau}\nabla_{\beta}\delta g_{\alpha\rho} + \nabla_{\tau}\nabla_{\alpha}\delta g_{\rho\beta})\Big] + 4R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\, R_{\alpha}{}^{\nu\varepsilon\sigma}\, \delta g^{\mu\alpha} \tag{38.a}$$

$$= 2R^{\alpha\beta\rho\tau}\, R^{\mu}{}_{\beta\rho\tau}\, \delta g_{\mu\alpha} - 4R^{\mu}{}_{\nu\varepsilon\sigma} R^{\alpha\nu\varepsilon\sigma}\, \delta g_{\mu\alpha} + R^{\mu\beta\rho\nu}\, \nabla_{\rho}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} - R^{\alpha\mu\rho\nu}\, \nabla_{\rho}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu} -$$

$$R^{\mu\beta\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} + R^{\alpha\mu\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu} \tag{38.b}$$

$$= -2R^{\mu}{}_{\nu\varepsilon\sigma} R^{\alpha\nu\varepsilon\sigma}\, \delta g_{\mu\alpha} - 2R^{\mu\nu\rho\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu} + R^{\mu\beta\rho\nu}\, \nabla_{\rho}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} - R^{\alpha\mu\rho\nu}\, \nabla_{\rho}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu} -$$

$$R^{\mu\beta\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} + R^{\alpha\mu\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu} \tag{38.c}$$

(38.c) ile verilen ifade elde edilir. Bu ifadede üçüncü ve dördüncü terimde $\rho \to \tau$ işlemi ile (38.c) ifadesi,

$$= -2R^{\mu}{}_{\nu\varepsilon\sigma} R^{\alpha\nu\varepsilon\sigma}\, \delta g_{\mu\alpha} - 2R^{\mu\nu\rho\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu} - 2R^{\mu\beta\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu} \tag{39}$$

biçiminde olur. Buradaki ifadede ikinci terimdeki Riemann tensöründeki anti-simetrik ve metrik tensördeki simetrik olan $\mu\nu$ indislerinin çarpımı sıfır olduğu göz önüne alınmıştır.

Böylelikle $\delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\, R^{\mu\nu\varepsilon\sigma})$ teriminin varyasyonu aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$\delta(R_{\mu\nu\varepsilon\sigma}\, R^{\mu\nu\varepsilon\sigma}) = -2R^{\mu}{}_{\nu\varepsilon\sigma} R^{\alpha\nu\varepsilon\sigma}\, \delta g_{\mu\alpha} - 2R^{\mu\beta\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\beta}\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}\, \nabla_{\tau}\nabla_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}.$$

(40)

EK 2

$T^{\nu\beta}$ tensör alanı olmak üzere $\left(T^{\nu\beta}\right)\left(\delta g_{\mu\nu}\right)$ terimine ∇_β türevi uygulanırsa,

$$\nabla_\beta\left(T^{\nu\beta}\right)\left(\delta g_{\mu\nu}\right) = \left(\delta g_{\mu\nu}\right)\left(\nabla_\beta T^{\nu\beta}\right) + \left(T^{\nu\beta}\right)(\nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) \tag{41}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğe soldan ∇^μ türevi uygulanırsa,

$$\nabla^\mu\ \nabla_\beta T^{\nu\beta}\,\delta g_{\mu\nu} = \left(\nabla_\beta T^{\nu\beta}\right)\left(\nabla^\mu \delta g_{\mu\nu}\right) + \delta g_{\mu\nu}\nabla^\mu\ \nabla_\beta T^{\nu\beta} + \left(\nabla^\mu T^{\nu\beta}\right)\left(\nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}\right) + T^{\nu\beta}\nabla^\mu\ \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} \tag{42}$$

ifadesi elde edilir. Öte taraftan ∇^μ türevi $(\nabla_\beta T^{\nu\beta})\left(\delta g_{\mu\nu}\right)$ terimine uygulandığında,

$$\nabla^\mu\left(\nabla_\beta T^{\nu\beta}\right)\left(\delta g_{\mu\nu}\right) = \left(\delta g_{\mu\nu}\right)\nabla^\mu\ \nabla_\beta T^{\nu\beta} + \left(\nabla_\beta T^{\nu\beta}\right)(\nabla^\mu \delta g_{\mu\nu}) \tag{43}$$

ifadesi bulunur. (42) ve (43) ifadelerinde eşitliğin sol tarafı tam diferansiyel olduğu için eylem integralinde sıfır olur (Dirac 1975). Bundan dolayı (43) eşitliği,

$$\left(\delta g_{\mu\nu}\right)\nabla^\mu\ \nabla_\beta T^{\nu\beta} = -\left(\nabla_\beta T^{\nu\beta}\right)(\nabla^\mu \delta g_{\mu\nu}) \tag{44}$$

biçiminde olur. (44) eşitliği (42) ile verilen ifadede yazıldığında,

$$-\left(\nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}\right)\left(\nabla^\mu T^{\nu\beta}\right) = T^{\nu\beta}\nabla^\mu\ \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} \tag{45}$$

eşitliği elde edilir. Buradan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$T^{\nu\beta}\nabla^\mu\ \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\mu T^{\nu\beta}\ . \tag{46}$$

Genel bir ifade için $T^{\nu\beta} = f_G R^{\nu\beta}$ eşitliği (46)'da yazıldığında,

$$f_G R^{\nu\beta}\nabla^\mu\ \nabla_\beta(\delta g_{\mu\nu}) = \delta g_{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\mu(R^{\nu\beta} f_G) \tag{47}$$

ifadesi elde edilir.

2.1.Bianchi Özdeşliği

Bianchi özdeşliği aşağıdaki gibi verilir (Dirac 1975):

$$\nabla_\beta R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + \nabla_\rho R^\alpha_{\mu\sigma\beta} + \nabla_\sigma R^\alpha_{\mu\beta\rho} = 0 \tag{48}$$

veya

$$\nabla_\beta R_{\alpha\mu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\alpha\mu\sigma\beta} + \nabla_\sigma R_{\alpha\mu\beta\rho} = 0\ . \tag{49}$$

Burada (49) ile verilen eşitlik sırası ile $g^{\alpha\rho}$ ve $g^{\mu\beta}$ ile çarpıldığında

$$\nabla^\alpha R_{\alpha\mu\sigma\beta} = \nabla_\sigma R_{\mu\beta} - \nabla_\beta R_{\mu\sigma}, \tag{50.a}$$

$$2\nabla^\alpha R_{\alpha\sigma} = \nabla_\sigma R \tag{50.b}$$

şeklinde verilen iki eşitlik elde edilir. (50.b) ile verilen eşitlik ∇^σ ile çarpıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\nabla^\sigma \nabla^\alpha R_{\alpha\sigma} = \frac{1}{2}\nabla^2 R. \tag{51}$$

(50.a) göz önüne alındığında ise bu eşitlik ∇^σ ile çarpıldığında,

$$\nabla^\sigma \nabla^\alpha R_{\alpha\mu\sigma\beta} = \nabla^2 R_{\mu\beta} - \nabla_\sigma \nabla_\beta R_\mu^{\ \sigma} \tag{52}$$

ifadesi elde edilir. Burada μ ile σ indislerinin yerleri değiştirilmiştir.

Reimann tensörünün tanımından hareketle aşağıdaki ifade yazılabilmektedir (Carroll 1997, Dirac 1975):

$$\nabla_\sigma \nabla_\rho R_{\mu\beta} - \nabla_\rho \nabla_\sigma R_{\mu\beta} = R_{\alpha\beta} R^\alpha_{\ \mu\rho\sigma} + R_{\mu\alpha} R^\alpha_{\ \beta\rho\sigma}\ . \tag{53}$$

Burada α ve μ indisleri kaydırılarak,

$$\nabla_\sigma \nabla_\rho R^\mu_\beta = \nabla_\rho \nabla_\sigma R^\mu_\beta + R^\alpha_\beta R_\alpha^{\ \mu}{}_{\rho\sigma} + R^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{54}$$

eşitliği yazılabilmektedir. (54)'teki ifadede $\sigma \to \mu$ değişimi ile

$$\nabla_\mu \nabla_\rho R^\mu_\beta = \nabla_\rho \nabla_\mu R^\mu_\beta + R^\alpha_\beta R_{\alpha\rho} - R^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\rho} \tag{55}$$

eşitliği bulunmaktadır. (55)'teki eşitliğin sağ tarafındaki birinci terime yazılmak üzere (50.b) ile verilen ifade ∇_ρ türevi ile çarpılırsa $(\alpha \to \mu, \sigma \to \beta)$,

$$\nabla_\rho \nabla_\mu R^\mu_\beta = \frac{1}{2} \nabla_\rho \nabla_\beta R \tag{56}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (55)'teki eşitlikte yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\nabla_\mu \nabla_\rho R^\mu_\beta = \frac{1}{2} \nabla_\rho \nabla_\beta R + R_{\alpha\rho} R^\alpha_\beta - R^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\rho}. \tag{57}$$

(57) ile verilen ifade (52) ile verilen eşitlikte yazıldığında,

$$\nabla^\sigma \nabla^\alpha R_{\alpha\mu\sigma\beta} = \nabla^2 R_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\beta \nabla_\mu R - R_{\alpha\beta} R^\alpha_\mu + R^{\alpha\sigma} R_{\alpha\mu\sigma\beta} \tag{58}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan (57) ifadesinde ρ ve β indisleri yukarı kaydırılarak bu ifade aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\nabla_\mu \nabla^\rho R^{\mu\beta} = \frac{1}{2} \nabla^\rho \nabla^\beta R + R^{\alpha\beta} R^\rho_\alpha - R^{\alpha\beta\mu\rho} R_{\alpha\mu}. \tag{59}$$

2.2. Genel Göreliliğin Friedmann Denklemleri

(3.24)'te verilen Einstein denkleminin zaman bileşeni,

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = k^2 T_{00} \tag{60}$$

şeklinde yazılabilir. (3.12)'de verilen Ricci tensörünün zaman bileşeni, (3.13) eşitliği ve (3.2) metriği (60)'taki alan denkleminde yazıldığında;

$$-3\left(\dot{H}+H^2\right)+\frac{1}{2}6\left[\dot{H}+2H^2\right]=k^2\rho, \tag{61}$$

$$3H^2=k^2\rho \tag{62}$$

şeklinde standart Einstein-FRW denklemi elde edilmektedir.

(3.24)'teki denklemin uzay bileşeni kullanıldığında,

$$R_{11}-\frac{1}{2}g_{11}R=k^2g_{11}T_1^1 \tag{63}$$

eşitliği elde edililir. II. Friedmann denklemi için (3.12)'de verilen Ricci tensörünün uzay bileşeni, (3.13) eşitliği ve (3.2) metriği, (63) ile verilen alan denkleminde yerine yazıldığında;

$$a^2\left(\dot{H}+3H^2\right)-\frac{1}{2}a^2 6\left[\dot{H}+2H^2\right]=a^2k^2p, \tag{64.a}$$

$$-(\dot{2}H+3H^2)=k^2p \tag{64.b}$$

biçiminde ikinci standart Einstein-FRW denklemi elde edilir.

2.3. $f(R)$ Gravitede Friedmann Denklemi

İlk olarak zaman bileşenli Friedmann denklemi elde edilecektir. Bunun için (3.31) ile verilen alan denkleminin 00-zaman bileşenli kısmı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_{00}f'(R)-\frac{1}{2}g_{00}f(R)-\nabla_0\nabla_0f'(R)+g_{00}\nabla^2f'(R)=k^2T_{00}. \tag{65}$$

Burada $f'(R)=f_R$ olmak üzere yukarıdaki denklem,

$$R_{00}f_R-\frac{1}{2}g_{00}f(R)-\nabla_0\nabla_0f_R+g_{00}\nabla^2f_R=k^2T_{00} \tag{66}$$

biçiminde yazılabilir. (66) denklemindeki türevler aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\nabla_0\nabla_0 f_R = f_{R,00} - \Gamma^0_{00} f_{R,0} = \ddot{f}_R, \tag{67}$$

$$\nabla^2 f_R = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f_R = g^{\mu\nu} f_{R,\mu\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} f_{R,\rho} = g^{00}\left(f_{R,00} - \Gamma^0_{00} f_{R,0}\right) + g^{ii}\left(f_{R,ii} - \Gamma^t_{ii} f_{R,t}\right) = -\ddot{f}_R - 3H\dot{f}_R\ . \tag{68}$$

Burada (3.12) ve (3.2) ile verilen metrik ile beraber (67) ve (68) ile verilen değerler kullanıldığında (66)'daki alan denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilmektedir;

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} f_R + \frac{1}{2} f(R) + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{R} f_{RR} = k^2 g^{00} T^0_0\ . \tag{69}$$

Burada $\dot{f}_R = \dot{R} f_{RR}$ eşitliği kullanılmıştır. (3.13) ile verilen Ricci skaleri kullanılarak,

$$3 f_R H^2 + \frac{1}{2}[f(R) - R f_R] + 3H\dot{R} f_{RR} = k^2\rho \tag{70}$$

biçiminde $f(R)$-gravite'nin I. FRW denklemi elde edilir.

2.4. $R + f(G) + \alpha R^2$ Modeli ve Friedmann Denklemleri

Bu kurama ait (4.16)'da verilen alan denkleminin 00-bileşenli kısmı ile I. FRW denklemi elde edilmektedir. Bunun için alan denkleminin zaman bileşeni,

$$\frac{1}{2k^2}\left(-R^{00} + \frac{1}{2} g^{00} R\right) + \frac{1}{2} g^{00} f(G) - 2R R^{00} f_G - 4 f_G R^{0\beta\sigma 0} R_{\beta\sigma} + 4 f_G R^0{}_\rho R^{0\rho} - 2 f_G R^0{}_{\rho\varepsilon\sigma} R^{0\rho\varepsilon\sigma} + 2R(\nabla^0\nabla^0 f_G) - 2 g^{00} R(\nabla^2 f_G) - 4R^{\beta 0}\left(\nabla_\beta\nabla^0 f_G\right) - 4R^{0\beta}\left(\nabla_\beta\nabla^0 f_G\right) + 4R^{00}(\nabla^2 f_G) + 4 g^{00} R^{\rho\beta}\left(\nabla_\rho\nabla_\beta f_G\right) - 4R^{0\rho 0\tau}\left(\nabla_\rho\nabla_\tau f_G\right) + \frac{1}{2} g^{00}\alpha R^2 - 2\alpha R R^{00} + 2\alpha\nabla^0\nabla^0 R - 2\alpha g^{00}\nabla^2 R = -\frac{1}{2} T^{00} \tag{71}$$

şeklindedir. V skaler potansiyel olmak üzere $\nabla_\mu\nabla_\nu V = V_{,\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_{,\rho}$ formülü kullanılarak (Dirac 1975) aşağıda verilen hesaplamalar kullanılacaktır:

$$\nabla_0\nabla_0 f_G = f_{G,00} - \Gamma^0_{00} f_{G,0} = \ddot{f}_G, \tag{72}$$

$$\nabla^2 f_G = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f_G = g^{\mu\nu} f_{G,\mu\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} f_{G,\rho}\ , \tag{73}$$

$$\nabla^2 f_G = g^{00}\left(f_{G,00} - \Gamma^0_{00} f_{G,0}\right) + g^{ii}\left(f_{G,ii} - \Gamma^t_{ii} f_{G,t}\right) = -\ddot{f}_G - 3H\dot{f}_G, \tag{74}$$

$$\nabla^2 R = -\ddot{R} - 3H\dot{R}. \tag{75}$$

Yukarıdaki değerlerle birlikte (3.2), (3.8), (3.9), (3.12) ve (3.13) değerleri kullanıldığında (71) ile verilen alan denklemi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\frac{1}{2k^2}\left(3\dot{H} + 3H^2 - 3\left(\dot{H} + 2H^2\right)\right) - \frac{1}{2}f(G) - 12\left(\dot{H} + 2H^2\right)\left(-3\dot{H} - 3H^2\right)f_G + 12f_G\left(\dot{H} + 3H^2\right)\frac{\ddot{a}}{a} + 36f_G\left(\dot{H}^2 + H^4 + 2\dot{H}H^2\right) + 12\frac{\ddot{a}^2}{a^2}f_G - 12f_G\left(\dot{H} + 3H^2\right)\frac{\ddot{a}}{a} + 2R\ddot{f}_G + 2R\left(-\ddot{f}_G - 3H\dot{f}_G\right) - 24\ddot{f}_G\left(\dot{H} + H^2\right) + 4\left(-\dot{3}H - 3H^2\right)\left(-\ddot{f}_G - 3H\dot{f}_G\right) - 4\left(R^{00}\nabla_0\nabla_0 f_G + R^{ii}\nabla_i\nabla_i f_G\right) - 12\frac{\ddot{a}}{a}H\dot{f}_G - \frac{1}{2}\alpha R^2 + 6\alpha\dot{H}R + 18\alpha H^2 R - 6\alpha H\dot{R} = -\frac{1}{2}g^{00}g^{00}T_{00} = -\frac{\rho}{2}. \tag{76}$$

Burada

$$\nabla_1\nabla_1 f_G = f_{G,11} - \Gamma^0_{11} f_{G,0} = -a\dot{a}\dot{f}_G,$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a},\ \ \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \tag{77}$$

ifadeleri de kullanılarak kurama ait aşağıdaki I. FRW denklemi elde edilmektedir:

$$\frac{3H^2}{k^2} - Gf_G + f(G) + 24H^3\dot{f}_G + \alpha R^2 - 12\alpha\dot{H}R - 12\alpha H^2 R + 12\alpha H\dot{R} = \rho. \tag{78}$$

FRW denklemlerinin uzay bileşenli kısmı için (4.13)'da verilen alan denklemi,

$$\frac{1}{2k^2}\left(-R^{11}+\frac{1}{2}g^{11}R\right)+\frac{1}{2}g^{11}f(G)-2RR^{11}f_G+4f_GR^1{}_\rho R^{1\rho}-2f_GR^1{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{1\rho\varepsilon\sigma}-$$
$$4f_GR^{1\beta\sigma1}R_{\beta\sigma}+2R(\nabla^1\nabla^1f_G)-2g^{11}R(\nabla^2f_G)-4\left(\nabla_\beta\nabla^1f_G\right)R^{\beta1}-4\left(\nabla_\beta\nabla^1f_G\right)R^{1\beta}+$$
$$4R^{11}(\nabla^2f_G)+4g^{11}R^{\rho\beta}\left(\nabla_\rho\nabla_\beta f_G\right)-4R^{1\rho1\tau}\left(\nabla_\rho\nabla_\tau f_G\right)=-\frac{1}{2}T^{11} \quad (79)$$

biçimindedir. Bu denklemi de aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{1}{2k^2}\left(-\frac{1}{a^2}\left(\dot{H}+3H^2\right)+\frac{3}{a^2}\left(\dot{H}+2H^2\right)\right)+\frac{1}{2a^2}f(G)-\frac{2}{a^2}R\left(\dot{H}+3H^2\right)f_G+\frac{4}{a^2}\left(\dot{H}+3H^2\right)^2f_G-$$
$$2(R^1{}_{010}R^{1010}+R^1{}_{001}R^{1001}+R^1{}_{212}R^{1212}+R^1{}_{313}R^{1313}+R^1{}_{221}R^{1221}+R^1{}_{331}R^{1331})f_G-$$
$$4\left(\frac{1}{a^2}R^1{}_{001}R_{00}+\frac{1}{a^6}R^1{}_{221}R_{22}+\frac{1}{a^6}R^1{}_{331}R_{33}\right)f_G+2R\frac{1}{a^4}\left(-a^2H\dot{f_G}\right)-\frac{2}{a^2}R\left(-\ddot{f_G}-3H\dot{f_G}\right)-$$
$$4\left(\frac{1}{a^2}\nabla_1\nabla_1f_G\right)R^{11}-4\left(\frac{1}{a^2}\nabla_1\nabla_1f_G\right)R^{11}+\frac{4}{a^2}\left(\dot{H}+3H^2\right)\left(-\ddot{f_G}-3H\dot{f_G}\right)+\frac{4}{a^2}R^{11}(3\nabla_1\nabla_1f_G)-$$
$$4\left(\frac{1}{a^2}R^1{}_{010}\nabla_0\nabla_0f_G+\frac{1}{a^6}R^1{}_{212}\nabla_2\nabla_2f_G+\frac{1}{a^6}R^1{}_{313}\nabla_3\nabla_3f_G\right)+\frac{4}{a^2}(\nabla_0\nabla_0f_G)R^{00}=-\frac{1}{2}g^{11}T_1^1. \quad (80)$$

(80) ile verilen denklem üzerinde gerekli işlemler yapıldığında bu kütle-çekim kuramına ait II. FRW denklemi elde edilir:

$$\frac{2\dot{H}+3H^2}{k^2}+f(G)-Gf_G+16\dot{f_G}\dot{H}H+16\dot{f_G}H^3+8\ddot{f_G}H^2=-p. \quad (81)$$

2.5. $f(R,G)$ Gravitede Friedmann Denklemleri

Bu kurama ait (3.39)'da verilen alan denkleminin zaman bileşenli kısmı ile I. FRW denklemi elde edilir. Denklemin zaman bileşeni,

$$\frac{1}{2}g^{00}f(R,G)+\nabla^0\nabla^0f_R-g^{00}\nabla^2f_R-R^{00}f_R-2RR^{00}f_G+4f_GR^0{}_\rho R^{0\rho}-2f_GR^0{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{0\rho\varepsilon\sigma}-$$
$$4f_GR^{0\beta\sigma0}R_{\beta\sigma}+2R(\nabla^0\nabla^0f_G)-2g^{00}R(\nabla^2f_G)-4R^{\beta0}\left(\nabla_\beta\nabla^0f_G\right)-4R^{0\beta}\left(\nabla_\beta\nabla^0f_G\right)+$$
$$4R^{00}(\nabla^2f_G)+4g^{00}R^{\rho\beta}\left(\nabla_\rho\nabla_\beta f_G\right)-4R^{0\rho0\tau}\left(\nabla_\rho\nabla_\tau f_G\right)=-k^2T^{00} \quad (82)$$

şeklindedir. Yukarıda (71) ile verilen denkleme benzer bir yol izlendiğinde aşağıda verilen I. FRW denklemi elde edilir:

$$\frac{1}{2}\left(GF_G-F(R,G)-24H^3\dot{F_G}\right)+3\left(\dot{H}+H^2\right)F_R-3H\dot{F_R}=-k^2\rho. \quad (83)$$

(3.39)'da verilen alan denkleminin uzay bileşeninden II. FRW denklemi elde edilir. Denklemin uzay bileşeni,

$$\frac{1}{2}g^{11}f(R,G)+\nabla^1\nabla^1 f_R-g^{11}\nabla^2 f_R-R^{11}f_R-2RR^{11}f_G+4f_G R^1{}_\rho R^{1\rho}-2f_G R^1{}_{\rho\varepsilon\sigma}R^{1\rho\varepsilon\sigma}-4f_G R^{1\beta\sigma 1}R_{\beta\sigma}+2R(\nabla^1\nabla^1 f_G)-2g^{11}R(\nabla^2 f_G)-4R^{\beta 1}\left(\nabla_\beta\nabla^1 f_G\right)-4R^{1\beta}\left(\nabla_\beta\nabla^1 f_G\right)+4R^{11}(\nabla^2 f_G)+4g^{11}R^{\rho\beta}\left(\nabla_\rho\nabla_\beta f_G\right)-4R^{1\rho 1\tau}\left(\nabla_\rho\nabla_\tau f_G\right)=-k^2T^{11} \quad (84)$$

biçiminde yazılabilir. Yukarıda (79) ile verilen denkleme benzer bir yol izlendiğinde bu kurama ait II. FRW denklemi elde edilir:

$$\frac{F(R,G)}{2}-\frac{1}{2}(RF_R+GF_G)+\ddot{F}_R+2H\dot{F}_R+4H^2\ddot{F}_G+8H\dot{H}\dot{F}_G+8H^3\dot{F}_G+\left(2\dot{H}+3H^2\right)F_R=-k^2p. \quad (85)$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ali İhsan KESKİN

Doğum Yeri : Diyarbakır

Doğum Tarihi : 03.10.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum Ve Yıl)

Lise : Yunus Emre Lisesi, 1997

Lisans : Dicle Üniversitesi, 1998-2003 (Fizik Öğretmenliği)

Yüksek Lisans : Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (Fizik) 2009-2011

Çalıştığı Kurum : Şırnak Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Enerji Sistemleri Müh. Bölümü, Öğretim Görevlisi (2012-Devam ediyor)

SCI (Uluslararası) Yayınlar:

- Keskin, A.I., Binbay, F. Saltı, M. ve Açıkgöz, I. 2013. *Spin-1/2 Particles in Torsion Gravity When a Constant Electric Field is Present.* Rom. Jour. Phys. 58: 271-278.