T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM SERİLERİ İLE İLGİLİ SPIRALLIKE FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Bade YILDIZHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Temmuz 2021

T.C

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Bade YILDIZHAN tarafından yapılan “Genelleştirilmiş Dağılım Serileri İle İlgili Spirallike Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY

Üye : Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

Üye : Prof. Dr. Halit ORHAN

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 01/07/2021

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının hazırlanması süresince kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösterici ve destek olan, kendisiyle çalışma şansı yakaladığım için kendimi ayrıcalıklı hissettiğim saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. H. Özlem Güney'e,

Hayatımın her döneminde yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bade YILDIZHAN

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR		I
İÇİNDEKİLER		II
ÖZET		III
ABSTRACT		IV
ŞEKİL LİSTESİ		V
KISALTMA VE SİMGELER		VI
1.	**GİRİŞ**	1
2.	**KAYNAK ÖZETLERİ**	5
3.	**MATERYAL ve METOT**	9
3.1.	Materyal	9
3.2.	Metot	9
3.3	Temel Tanımlar	9
3.4	Yalınkat Fonksiyonlar	14
3.5	Caratheodory Sınıfı	19
3.6	Subordinasyon İlkesi	21
3.7	Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları	23
3.8	Spirallike Fonksiyonlar Sınıfı	26
3.9	Genelleştirilmiş Dağılım Serisi	28
4.	**ARAŞTIRMA BULGULARI**	29
5.	**TARTIŞMA VE SONUÇ**	39
6.	**KAYNAKLAR**	41
ÖZGEÇMİŞ		45

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM SERİLERİ İLE İLGİLİ SPIRALLIKE FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bade YILDIZHAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2021

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş dağılım serileri ile ilgili spirallike fonksiyonların bazı alt sınıfları incelenmiştir.

Tezin başlangıcında, karmaşık fonksiyonlar kuramının temelini oluşturan önemli tanım ve teoremler yer almaktadır. Ardından, yalınkat fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturan tanım ve teoremlere yer verilerek, yalınkat fonksiyonların bazı önemli alt sınıfları tanıtılmıştır. Daha sonra spirallike fonksiyonların alt sınıflarının özellikleri ve genelleştirilmiş dağılım serisinin özellikleri tanıtılmıştır. Son olarak da spirallike fonksiyonların alt sınıflarına genelleştirilmiş dağılım serisi uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yalınkat Fonksiyon, Spirallike Fonksiyon, Genelleştirilmiş Dağılım Serisi

ABSTRACT

SOME SUBCLASSES OF SPIRALLIKE FUNCTION

RELATED TO GENERALIZED DISTRIBUTION SERIES

MSc THESIS

Bade YILDIZHAN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2021

In this thesis work, some subclasses of spirallike function related to generalized distribution series are examined.

At the beginning of the thesis, there are important definitions and theorems that form the basis of complex functions theory. Then, by giving place to definitions and theorems that form the basis of the theory of univalent functions, some important subclasses of the univalent functions are introduced. Then, the properties of the subclasses of spirallike functions and the properties of the generalized distribution series are introduced. Finally, a generalized distribution series is applied to subclasses of spirallike functions.

Key Words : Univalent Function, Spirallike Function, Generalized Distribution Series

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No		Sayfa
Şekil 1.1.	Paul Koebe	1
Şekil 1.2.	Bernard Riemann	1
Şekil 1.3.	Ludwig Bieberbach	2
Şekil 1.4.	Louis de Branges	2
Şekil 3.1.	Yalınkat fonksiyonların geometrik gösterimi	14
Şekil 3.2.	$f(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonunun geometrik gösterimi	15
Şekil 3.3.	$f(z)=(1+z)^3$ fonksiyonunun geometrik gösterimi	15
Şekil 3.4.	Koebe fonksiyonunun görüntüsü	17
Şekil 3.5.	Subordinasyon Prensibi	22
Şekil 3.6.	Yıldızıl küme	23
Şekil 3.7.	z noktasına göre yıldızıl küme	23
Şekil 3.8.	Yıldızıl fonksiyon	23
Şekil 3.9.	Konveks küme	24
Şekil 3.10.	Logaritmik Spiral	27

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}_\infty$: Genişletilmiş Karmaşık Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}$: Gerçel Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

U : Birim disk

$K(z)$: Koebe fonksiyonu

$L_0(z)$: Mobius fonksiyonu

A : Analitik fonksiyonlar kümesi

S : Yalınkat fonksiyonlar kümesi

S^* : Yıldızıl fonksiyonlar kümesi

C : Konveks fonksiyonlar kümesi

P : Pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar kümesi

$S^*(\alpha)$: α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar kümesi

$C(\alpha)$: α mertebeli konveks fonksiyonlar kümesi

Ω : Schwarz fonksiyonlar kümesi

$S^\gamma(\alpha)$: γ mertebeli spirallike fonksiyonlar kümesi

$K_\phi(z)$: Genelleştirilmiş dağılım serisi

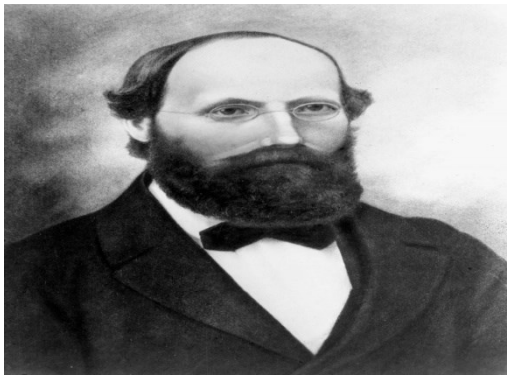
1. GİRİŞ

19. yy başlarında ortaya çıkan geometrik fonksiyonlar teorisi, karmaşık analizin önemli bir dalıdır. Analiz ile geometri arasında ilişki kurulmasını sağlayan bu teori, analitik fonksiyonların geometrik özellikleriyle ilgilenir. İlk olarak 1851 yılında G. Bernard Riemann tarafından literatürde "Riemann Dönüşüm Teoremi" olarak bilinen teori ile ortaya çıkmıştır. A. Cauchy ve K. Weierstrass bu alanda çalışma yapan diğer bilim insanlarıdır. Geometrik fonksiyonlar teorisinde, fonksiyonun seri açılımındaki katsayılar, fonksiyonun geometrik davranışı üzerinde etkilidir ve bu özellik bu teoriyi önemli kılan en önemli özelliklerinden biridir. Fakat, 20.yy başlarına kadar geometrik fonksiyonlar teorisi pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. Bazı araştırmacılara göre bu teori kullanışlı bulunmamış, bazı araştırmacılara göre de önemi fazla anlaşılmamıştır.

20.yy başlarında geometrik fonksiyonlar teorisinin önemli bir dalı olan yalınkat fonksiyonlar teorisi ortaya çıkmıştır. Yalınkat fonksiyonlar teorisi, belli bir bölgede analitik aynı zamanda yalınkat fonksiyonları konu alır. Bu konunun temeli Alman matematikçi Paul Koebe'nin 1907 yılında yayınladığı makale ile atılmıştır. Bu makalede Koebe yalınkat bir fonksiyonun kendisinin ve birinci mertebeden türevlerinin mutlak değeri üzerindeki sınırları ispatlamıştır. Koebe daha sonra Riemann dönüşüm teoremi ışığında çalışmalarını sürdürmüştür. Gronwall ve Bieberbach bu alanda çalışma yapan diğer bilim insanlarıdır. 1914 yılına Gronwall alan teoremini ispatlamıştır. 1916 yılında ise Bieberbach yalınkat fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçlarını vermiştir. Bu çalışmalar ile bu alandaki çalışmalar gelişmiştir.



Şekil 1.1. Paul Koebe



Şekil 1.2. Bernard Riemann

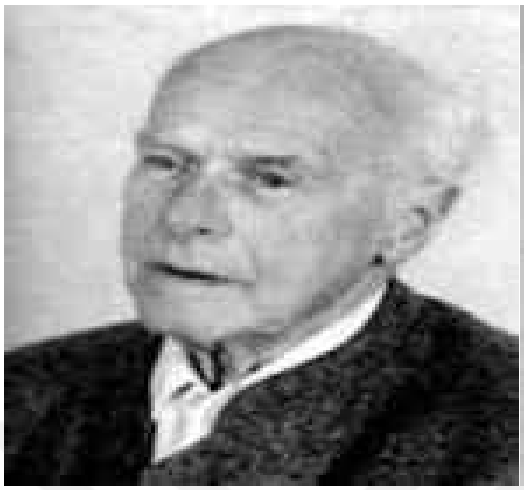
Yalınkat fonksiyonlar teorisi için önemli bir çalışmayı Montel (Paul Montel 1933) Paris'te 1933 yılında yayınladığı bir inceleme yazısı ile vermiştir. Montel bu inceleme yazısında genel konformal dönüşüm probleminden bahsetmiştir. 1966 ve 1977 yıllarında Bernardi tarafından iki cilt şeklinde yayınlanan bibliyografi makaleleri (Bernardi 1966, 1977) birçok ülkede ilgi görmüştür ve birçok yazarın ilgisini çekmiştir. Bu makaleler yaklaşık 220 dergide yayınlanmış ve pek çok yazar tarafından referans gösterilmiştir. Yalınkat fonksiyonlar teorisi konusunda bizi aydınlatacak ve yol gösterecek birçok kitap yazılmıştır. Nehari (Nehari 1952), Ahlfors (Alfors 1973), Goodman (Goodman 1983) ve Duren (Duren 1983) bu konuda kitap yazan yazarlardan bazılarıdır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisi geniş ve karmaşık bir konu olduğu için bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapılmıştır. Bu kısıtlamalardan biri Riemann dönüşüm teorisi ile ilgilidir. Riemann dönüşüm teorisi sayesinde keyfi basit bağlantılı D bölgesi yerine U birim diski alınabilir. Bu kısıtlama çalışmalarda büyük kolaylık sağlayacaktır. U birim diskinde yalınkat, analitik ve bazı normalizasyon koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı S olarak tanımlanmıştır ve yalınkat fonksiyonlar teorisi konusundaki çalışmalar bu alanda yoğunlaşmıştır.

1916 yılında Bieberbach büyük ilgi görecek bir makale yayınlamıştır. Bu makalede S sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ olduğunu ispatlamış ve makalenin sonunda dipnot olarak $|a_n| \le n$ olduğunu tahmin etmiştir. Bu tahmin altmış sekiz yıl matematikçileri meşgul etmiştir. Bieberbach tahmininin uzun yıllar ispatlanamaması birçok yeni metodun geliştirilmesine ve S sınıfının birçok alt sınıfının tanımlanmasını sağlamıştır. Loewner (1923) $|a_3| \le 3$ eşitsizliğini göstermiştir. 1955 yılına gelindiğinde Grunsky eşitsizliği yardımı ile Garabedian ve Schiffer $|a_4| \le 4$ olduğunu kanıtlamışlardır. Pederson (1968) ve Ozawa (1969) $|a_6| \le 6$ eşitsizliğini, 1972 yılında Pederson ve Schiffer $|a_5| \le 5$ olduğunu ispatlamışlardır. Genel ispatı yani $|a_n| \le n$ olduğunu 1985 yılında Fransız matematikçi Louis de Branges ispatlamıştır.

1985 yılında Fransız matematikçi Louis de Branges tarafından genel ispatın yapılması bu alandaki çalışmaların bitmesi anlamına gelmemektedir, aksine bu alanda

çalışan matematikçilerin yalınkat fonksiyonların diğer alt sınıflarındaki problemlere yönelmelerini sağlamıştır.



Şekil 1.3. Ludwig Bieberbach



Şekil 1.4. Louis de Baranges

S sınıfının alt sınıflarının en önemlileri; yıldızıl, konveks, konvekse yakın, α - mertebeli yıldızıl, α - mertebeli konveks, spirallike fonksiyonlar v.b sınıflarıdır. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfını ilk olarak Alexander (Alexander 1915) tanımlamıştır. 1921 yılında Nevalinna (Nevalinna 1921), f fonksiyonu yıldızıl fonksiyonlar sınıfındaysa her n pozitif tamsayısı için $|a_n| \le n$ olduğunu ispatlamıştır. Loewner (Loewner 1917), f konveks fonksiyonlar sınıfında ise her n pozitif tamsayısı için $|a_n| \le 1$ eşitsizliğinin sağlandığı sonucuna varmıştır. Alexander (Alexander 1915) aynı zamanda yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki önemli bir bağıntıyı incelemiştir. Spacek (Spacek 1933) yıldızıl fonksiyonlar sınıfını genişleterek $\beta-$ spirallike fonksiyonların S_β sınıfını tanımlamıştır. Önemli bir sonuç ise $\beta = 0$ olması durumunda bu sınıfın yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ile çakışmasıdır. Libera (Libera 1967) spirallike fonksiyonlar sınıfını genişleterek $S_\beta(\lambda)$ sınıfını vermiştir. Silvia, Keogh ve Merkes bu sınıfla ilgilenen yazarlardan birkaçıdır. Yakın zamanda ise Kim ve Sugawa bu sınıfla ilgili çalışmalar yapmıştır.

Analitik fonksiyonlar teorisinin yeni ve ilgi gören konularından biri de yalınkat fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıfları için dağılım serilerini incelemektir. Bu çalışmalarda dağılım serilerinin bu alt sınıflara ait olup olmadığı araştırılmıştır. Poisson

Pascal, Binom, Hipergeometrik, Genelleştirilmiş dağılım serileri bu serilerden bazılarıdır. Porwal (Porwal 2014), 2014 yılında Poisson fonksiyonu yardımıyla Poisson dağılım serisini tanıtmıştır. El-Deeb (El-Deeb 2019) Pascal dağılım serisini analitik fonksiyonların belli alt sınıflar için incelemiştir. Bulboaca ve Murugusundaramoorthy (Bulboaca ve Murugusundaramoorthy 2020), Frasin (Frasin 2020) yakın zamanda bu alanda çalışma yapan bilim insanlarından bazılarıdır.

Bu çalışmamızdaki amacımız, spirallike fonksiyonların belli alt sınıflarında genelleştirilmiş dağılım serisini uygulayarak, bu serinin bu alt sınıflara ait olması için gerek ve yeter koşulları elde etmektir.

Bu çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde Yalınkat fonksiyonlar, Genelleştirilmiş dağılım serisi ve Spirallike fonksiyonlar ile ilgili daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Kaynak özetlerinde tezi yazarken faydalandığımız bilimsel makalelerden ve bu makalelerde elde edilen önemli sonuçlardan söz edilmiştir.

Materyal ve Metot kısmında tez yazımı süresince yararlandığımız tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Araştırma Bulguları kısmında spirallike fonksiyonlar sınıfının belli alt sınıfı tanımlanıp genelleştirilmiş dağılım serisinin bu sınıflarda olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Tartışma ve Sonuç kısmında ise çalışmamızda bulduğumuz önemli sonuçlar verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları için dağılım serileri uygulamaları ile ilgili son yıllarda birçok matematikçi tarafından çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmayı yazma süresince faydalandığımız bilimsel makalelerin içeriğinden ve bu makalelerde elde edilen sonuçlardan aşağıda özetle bahsedilmiştir.

2019 yılında B.A. Frasin (Frasin 2019), $K(m,z)$ ile gösterilen Poisson dağılım serisini $S(k,\lambda)$ ve $C(k,\lambda)$ alt sınıflarının negatif katsayıları üzerine uygulamış ve bu serinin bu sınıflara ait olduğunu göstermiştir. $F(m,z)=2z-K(m,z)$ olmak üzere eğer $m>0$ $0<k\leq 1$ için $F(m,z)$,

$$(1+k)me^{m}\leq 2k$$

koşulunu sağlıyorsa $S(k)$ sınıfındadır ve,

$$(1+k)m^{2}e^{m}+2(1+2k)me^{m}\leq 2k$$

koşulunu sağlıyorsa $C(k)$ sınıfında olduğunu göstermiştir.

Son zamanlarda, Porwal (Porwal 2018) genelleştirilmiş dağılım serisini tanıtmıştır ve bu serinin yalınkat fonksiyonlar sınıfında olması için gerek ve yeter koşulları elde etmiştir.

Genelleştirilmiş dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$t_n\geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n$ yakınsak ve

$$\mathrm{D}=\sum_{n=0}^{\infty}t_n$$

olmak üzere

$$p(n)=\frac{t_n}{\mathrm{D}}$$

şeklinde verilir.

Saurabh Porwal (Porwal 2020), 2020 yılında $K_{\phi}(z)$ ile gösterilen genelleştirilmiş dağılım serisini yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları üzerinde göstermiştir. $TK_{\phi}(z) = 2z - K_{\phi}(z)$ olmak üzere $TK_{\phi}(z)$,

$$\lambda\phi''(1)+(1+2\lambda)\phi'(1)+(1-\alpha)\phi(1)\leq(1-\alpha)(\mathrm{D}+\phi(0))$$

şartını sağlıyorsa $TG(\lambda,\alpha)$ sınıfında ve,

$$\lambda\phi'''(1)+(1+5\lambda)\phi''(1)+(3+4\lambda-\alpha)\phi'(1)+(1-\alpha)\phi(1)\leq(1-\alpha)(\mathrm{D}+\phi(0))$$

şartını sağlıyorsa $TK(\lambda,\alpha)$ sınıfında olduğunu göstermiştir.

B.A. Frasin (Frasin 2020) 2020 yılında, $S(k,\lambda)$ ve $C(k,\lambda)$ alt sınıfları için Pascal dağılım serisini uygulamıştır. $\Phi_q^m = 2z - \psi_q^m(z)$ olmak üzere Φ_q^m,

$$\left((1-\lambda)+k(1+\lambda)\right)\frac{qm}{(1-q)^{m+1}}\leq 2k$$

koşulunu sağlıyorsa $S(k,\lambda)$ sınıfında ve,

$$\left[(1-\lambda)+k(1+\lambda)\right]\frac{q^2m(m+1)}{(1-q)^{m+2}}+\left[(1-\lambda)(2+k)+3k(1+\lambda)\right]\frac{qm}{(1-q)^{m+1}}\leq 2k$$

koşulunu sağlıyorsa $C(k,\lambda)$ sınıfında olduğunu göstermiştir.

2020 yılında G. Murugusundaramoorthy, B.A. Frasin ve Tariq Al-Hawary (Murugusundaramoorthy ve ark 2020) Pascal dağılım serisi ile ilgili çalışma yapmışlardır. $TSP_p(\alpha,\beta)$ ve $UCV_p(\alpha,\beta)$ spirallike fonksiyonlarının özelliklerini vererek Pascal dağılım serisinin bu sınıflara ait olduğunu sonucuna varmışlardır. Φ_q^m,

$$\frac{2qm}{1-q}+(2-\cos\alpha-\beta)\left[1-(1-q)^m\right]\leq\cos\alpha-\beta$$

koşulunu sağlıyorsa $TSP_p(\alpha,\beta)$ sınıfında ve,

$$\frac{2q^2m(m+1)}{(1-q)^2}+(6-\cos\alpha-\beta)\frac{qm}{1-q}+(2-\cos\alpha-\beta)\left[1-(1-q)^m\right]\leq\cos\alpha-\beta$$

koşulunu sağlıyorsa $UCT_p(\alpha,\beta)$ sınıfında olduğunu göstermişlerdir.

2020 yılında G. Murugusundaramoorthy Pascal dağılım serisi üzerinde çalışmıştır. Bu serinin, spirallike fonksiyonların belli alt sınıflarında olması için gerek ve yeter koşulları sağladığını göstermiştir. $\Theta_q^m(z)$,

$$\left[(1-\rho)sec\xi+\rho(1-\gamma)\right]\frac{qm}{(1-q)^{m+1}}\leq 1-\gamma$$

şartını sağlıyorsa $S(\xi,\ \gamma,\ \rho)$ sınıfında ve,

$$\left[(1-\rho)sec\xi+(1-\gamma)\right]\frac{m(m+1)q^2}{(1-q)^2}+\left[2(1-\rho)sec\xi+(1-\gamma)(4-\rho)\right]\frac{mq}{1-q}$$

$$+\left[(1-\gamma)(2-\rho)\right]\left(1-(1-q)^m\right)\leq 1-\gamma$$

şartını sağlıyorsa $K(\xi,\gamma,\rho)$ sınıfında olduğunu göstermiştir.

Bununla birlikte, bu tez çalışması süresince yalınkat fonksiyonların bazı özel altsınıfları için farklı dağılım serilerinin uygulandığı birçok bilimsel makale de incelenmiş olup, bu çalışmaların birkaçından aşağıda kısaca bahsedilmiştir.

Poisson dağılım serisi ile ilgili olarak 2016 yılında Murugusundaramoorthy ve ark., 2017 yılında Altınkaya ve Yalçın, 2019 yılında Porwal ve ark.;

Pascal dağılım serileri ile ilgili olarak 2020 yılında Şeker ve Eker;

Binom dağılım serisi ile ilgili olarak 2019 yılında Nazeer ve ark.;

Hipergeometrik dağılım serileri ile ilgili olarak da 2015 yılında Ahmad ve ark., 2017 yılında Porwal ve Kumar, 2018 yılında Porwal ve Gupta.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tez yazma süresince faydalandığımız tanım ve teoremlerden ispatsız bir şekilde bahsedilmiştir.

3.1. Materyal

Tezimiz, spirallike fonksiyonların belli alt sınıflarında, genelleştirilmiş dağılım serisini uygulama metodu ile yazılmıştır. Yalınkat fonksiyonların alt sınıflarında dağılım serilerinin uygulandığı birçok bilimsel makale başlıca materyal olarak alınmıştır.

3.2. Metot

Spirallike fonksiyonların belli alt sınıfları tanımlanıp, bu sınıflarla ilgili katsayı eşitsizlikleri elde edilip, ardından genelleştirilmiş dağılım serisinin bu alt sınıflarda olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

3.3. Temel Tanımlar

Tanım 3.3.1 (Komşuluk) $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olacak şekilde $B(z_0;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesi z_0 noktasının ε*-komşuluğu* şeklinde tanımlanır. $B(z_0;\varepsilon)$ kümesi z_0 merkezli ε yarıçaplı çemberin içidir. Aynı zamanda "$B(z_0;\varepsilon)$ komşuluğu" yerine "$\mathbb{C}$ de bir disk" ifadesi kullanılır. $\overline{B}(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ kümesi ise z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disktir ve bu küme $B(z_0,\varepsilon)$ kümesinin kapanışıdır. $B(z_0;\varepsilon) - \{z_0\}$ kümesine z_0 noktasının *delinmiş* ε*-komşuluğu* denir.

Tanım 3.3.2 (İç nokta) $E \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olmak üzere, E kümesinden alınan bir z_0 noktasının ε- komşuluğunun tamamı E kümesinin içinde kalıyorsa z_0 noktasına E kümesinin bir *iç noktası* denir.

Tanım 3.3.3 (Yığılma noktası) $E \subset \mathbb{C}$ boş olmayan küme ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. E kümesinde z_0 noktasından farklı herhangi bir z noktası alındığında, bu nokta z_0

noktasının her $\varepsilon-$ komşuluğunda varsa "z_0 *noktasına* E *kümesinin yığılma noktası"* denir.

Tanım 3.3.4 (Açık küme) $E \subset \mathbb{C}$ boş olmayan kümesinden alınan her z noktası E kümesinin iç noktası oluyorsa E kümesine *açık küme* denir.

Tanım 3.3.5 (Kapalı küme) $E \subset \mathbb{C}$ boş olmayan kümesi alındığında E kümesinin tümleyeni olan E' kümesi açık küme oluyorsa E kümesine *kapalı küme* denir

Tanım 3.3.6 (Bağlantılı küme, Bağlantısız küme) $E \subset \mathbb{C}$ boş olmayan alt kümesi için $\mathbb{C}$'de

$$E \subseteq G \cup F,\ E \cap G \neq \varnothing,\ E \cap F \neq \varnothing \text{ ve } E \cap G \cap F = \varnothing$$

şeklinde G ve F açık, ayrık kümeleri bulunamıyorsa, E kümesine *bağlantılı küme* denir. $\mathbb{C}$ de bu özelliklere sahip G ve F kümeleri varsa E kümesine *bağlantısız küme* denir.

Tanım 3.3.7 (Bölge) Karmaşık düzlemde boş kümeden farklı bir küme alındığında, bu küme eğer açık ve bağlantılı oluyorsa bu kümeye *bölge* denir.

Tanım 3.3.8 (Eğri) $[c,d] \subset \mathbb{R}$ olacak şekilde, $\gamma: [c,d] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu $\mathbb{C}$ düzleminde *eğri* olarak adlandırılır. Başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla $\gamma(c)$ ve $\gamma(d)$ olan γ eğrisi alındığında $\gamma(c)=\gamma(d)$ oluyorsa bu eğriye *kapalı eğri* denir. Eğer bir eğri kendi kendini kesmiyorsa bu eğri basit eğridir. Bir eğri hem basit hem de kapalı ise bu eğriye *Jordan eğrisi* veya *basit kapalı eğri* denir.

Tanım 3.3.9 (Limit) $\boldsymbol{E \subset \mathbb{C}}$, $f: E \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon, z_0 noktası E kümesinin yığılma noktası ve ψ_0 bir karmaşık sayı olmak üzere, tüm $\varepsilon > 0$ değerleri için $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını karşılayan, E kümesindeki tüm z elemanları için $|f(z) - \psi_0| < \varepsilon$ biçiminde bir $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcutsa, bu fonksiyonun *limit* ψ_0 *karmaşık sayısıdır* denir.

Tanım 3.3.10 (Süreklilik) $f: E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon ve z_0 noktası E kümesinin bir elemanı olacak şekilde, tüm $\varepsilon > 0$ değerleri için $|z - z_0| < \delta$ olduğu

zaman $\left|f(z)-f(z_0)\right|<\varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde $\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı bulunuyorsa f fonksiyonu z_0'da *süreklidir.*

Tanım 3.3.11 (Diferensiyellenebilirlik) $E \subset \mathbb{C}$ ve $f: E \to \mathbb{C}$ olmak üzere, z_0 noktası E'nin iç noktası olacak şekilde

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Limiti varsa bu fonksiyon z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* diğer adıyla *türevlenebilir* denir ve elde edilen limite fonksiyonun z_0 noktasındaki *türevi* denir ve $f'(z_0)$ ya da $\frac{df}{dz}(z_0)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3.12 (Analitiklik) $E \subset \mathbb{C}$, $f: E \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, z_0 iç noktasında ve bu noktanın uygun olan komşuluğunda bulunan tüm noktalarda diferensiyellenebilirse, f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir.

Teorem 3.3.13 (Türevler İçin Cauchy İntegral Formülü) Pozitif yönlü olacak şekilde, basit kapalı γ eğrisi üzerinde ve içinde analitikliği sağlayan f fonksiyonu alındığında, z_0 eğrinin içinde bir nokta olmak üzere bütün n doğal sayıları için,

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

sağlanır (Ponnusamy ve Silverman 2006). Bu teoreme Cauchy-Türev Formülü de denir.

Cauchy-Türev Formülü'nün en dikkat çeken sonucu, belli bir bölgede f fonksiyonu analitik ise, tüm mertebeden türeve o bölgede sahiptir ayrıca o bölgede f fonksiyonun türevleri analitik olacaktır. O halde analitik f fonksiyonunun z_0 noktasında $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ biçiminde ifade edilen Taylor açılımı vardır.

Teorem 3.3.14 (Maksimum ve Minimum Modül Değeri) E sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu bu bölgede analitik ve sınırında sürekli olmak üzere, f fonksiyonu E

bölgesinde sabit olmadığı sürece *maksimum değerini E* bölgesinin sınırında alır. Bu teorem $\frac{1}{f}$ fonksiyonuna uygulanırsa fonksiyonun *minimum değeri* elde edilir (Duren 1983).

Aşağıda vereceğimiz Schwarz Yardımcı Önermesi, Maksimum Modül Teoreminin en önemli sonucudur.

Tanım 3.3.15 (Schwarz Fonksiyonu) $U = \{z: |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliklerine sahip olan f fonksiyona *Schwarz fonksiyonu* denir. Schwarz fonksiyonların kümesi Ω ile ifade edilir.

Yardımcı Önerme 3.3.16 (Schwarz Yardımcı Önermesi) U 'da analitik bir f fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon Schwarz fonksiyonu özelliğini gösteriyorsa $|f'(0)| \le 1$ ve $|f(z)| \le |z|$ eşitsizlikleri doğrudur. Eşitlik durumu yalnızca $\theta \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $f(z) = e^{i\theta} z$ ile elde edilir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 3.3.17 (Konform Dönüşüm) $E \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, $f: E \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. E bölgesindeki herhangi bir z_0 noktasından geçecek şekilde aralarında β açısı olan ψ_1 ve ψ_2 eğrileri verilsin. Bu eğrilerin görüntü eğrileri olan $f(\psi_1)$ ve $f(\psi_2)$ eğrilerinin de büyüklük ve yön açısından aralarında β açısı oluyorsa, f fonksiyonu z_0 noktasında *konform dönüşüm* özelliğindedir denir. E bölgesinin tüm noktaları için bu özellik sağlanıyorsa bu fonksiyon E bölgesinde konformdur denir.

a, b, c, d karmaşık sabitleri olmak üzere Mobius dönüşümü

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

şeklinde ifade edilir ve genişletilmiş karmaşık düzlemi $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kendisi üzerine konform resmeder. Mobius dönüşümü, konform dönüşüme verilebilecek önemli bir örnektir.

Teorem 3.3.18 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathbb{C}$'de basit bağlantılı olan $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi ve z_0 noktası bu bölgede bir iç nokta olarak verilsin. O halde verilen bölgeyi $U = \{z : |z| < 1\}$ birim diski üzerine konform olacak şekilde resmeden, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) \geq 0$ koşullarını karşılayan sadece bir f fonksiyonu bulunur (Duren 1983).

Tanım 3.3.19 (Karmaşık Dizi) $\mathbb{N}: \{1,2,3,\ldots\ldots\}$ doğal sayılar kümesi ve $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olacak şekilde tanımlanan fonksiyona *karmaşık dizi* denir.

Tanım 3.3.20 (Karmaşık Seri) (z_n) karmaşık dizisi alındığında

$$z_1 + z_2 + z_3 .... + z_n ... = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

toplamına *karmaşık seri* denir.

Tanım 3.3.21 (Kuvvet Serisi) a_n ve z_0 karmaşık sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklinde ifade edilen seriye z_0 merkezli *kuvvet serisi* denir.

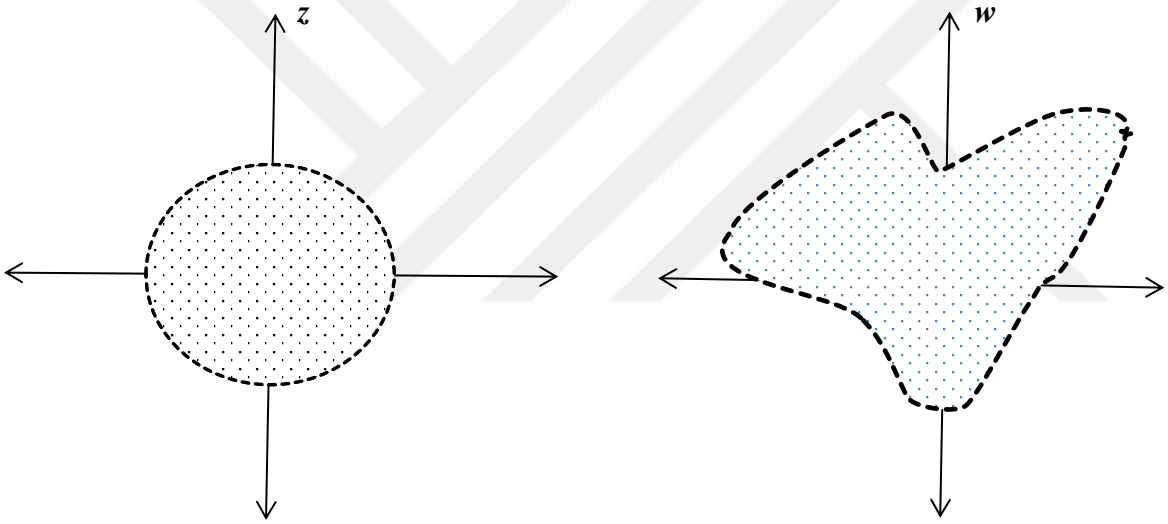
z_0 noktasında analitik olarak verilen bir f fonksiyonu bu noktanın komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

biçiminde olan kuvvet serisi açılımına sahiptir ve bu şekildeki açılıma *Taylor serisi* denir. Maclaurin serisi de Taylor serisinin özel bir halidir ve Taylor serisinde $z_0 = 0$ alınırsa elde edilir.

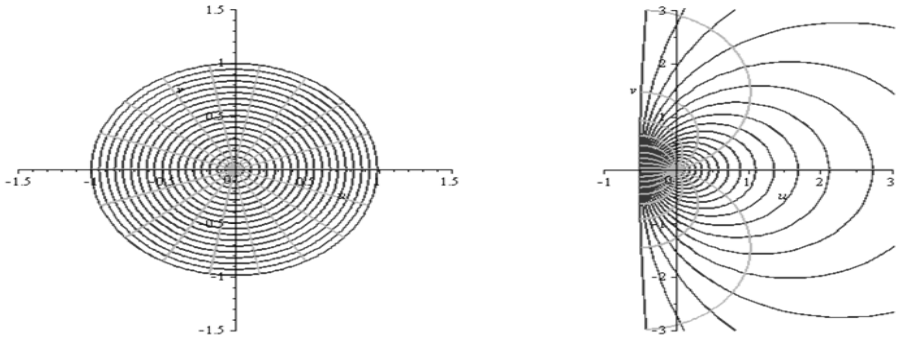
3.4. Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 3.4.1 (Yalınkat Fonksiyon) Karmaşık D bölgesinde analitik olan bir f fonksiyonu verilsin. Bu bölgeden alınan tüm z_1, z_2 elemanları için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ (ya da $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$) oluyorsa f fonksiyonuna bu bölgede *yalınkat (univalent) fonksiyon* denir. Yalınkat fonksiyonları geometrik olarak D bölgesinin görüntüsü olan $f(D)$ bölgesinin katlı olmaması şeklinde yorumlayabiliriz. Dikkat çeken bir diğer özellik ise yalınkat f fonksiyonunun D bölgesini w düzlemindeki bir bölgeye birebir ve konform olarak dönüştürmesidir. Yalınkat fonksiyonun geometrik gösterimi aşağıda verilmiştir (Şekil 3.1).



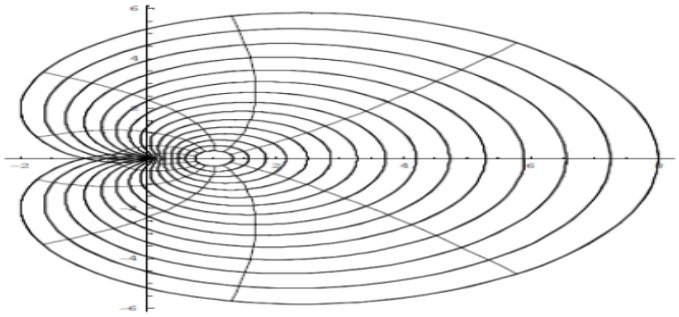
Şekil 3.1. Yalınkat Fonksiyonların Geometrik Gösterimi

Yalınkat fonksiyonlara örnek olarak $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu verilebilir. Bu fonksiyonu geometrik olarak incelediğimizde verilen bölgeyi $Re(w) > -1/2$ bölgesi üzerine birebir olarak resmeder. Bu fonksiyonun geometrik gösterimi aşağıda verilmiştir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. $f(z)=z/1-z$ fonksiyonunun geometrik gösterimi

$f(z)=(1+z)^3$ ise yalınkat olmayan bir fonksiyon örneğidir. Gerçekten de bu fonksiyon geometrik olarak incelendiğinde verilen bölgeyi görüntü bölgesine birebir olarak dönüştürmez. Aşağıda bu fonksiyonun geometrik gösterimi verilmiştir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. $f(z)=(1+z)^3$ fonksiyonunun geometrik gösterimi

Tanım 3.4.2 (Yerel Yalınkat) f fonksiyonu D bölgesinde bir fonksiyon olmak üzere D bölgesinden alınan z_0 noktasının komşuluğunda yalınkat oluyorsa bu fonksiyona z_0 noktasında *yerel yalınkat* fonksiyon denir.

Bir f fonksiyonu alındığında bu fonksiyonun $z_0 \in D$ noktasında yerel yalınkat olması için $f'(z_0)\neq 0$ koşulunun sağlanması gerekir (Duren 1983).

D bölgesinde olan bir f fonksiyonu ve bu fonksiyon D bölgesinden alınan bir z_0 noktasında yerel yalınkat ise $f'(z_0)$ türevi bu fonksiyonun z_0 noktası etrafındaki yerel geometrik davranışını verir. Uzunlukların yerel büyüme çarpanını $|f'(z)|$ ve yerel büyüme çarpanı ise $\arg f'(z)$ ile bulunur. Yerel yalınkat bir fonksiyon açıları ve yönü koruduğu için yerel yalınkat bir fonksiyon konform dönüşümle eşdeğer görülür.

D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu yalınkat bir fonksiyon olması için gerek koşul iken yeter koşul değildir. Başka bir ifade ile yerel yalınkat olan bir f fonksiyonu yalınkat olmayabilir. Bir örnekle açıklayacak olursak $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \left\{ z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$ bölgesindedir ve D bölgesindeki her z_0 noktası $f'(z_0) \neq 0$ koşulunu sağladığından yerel yalınkat bir fonksiyondur. Ama

$$f\left(\frac{3}{5\sqrt{2}} + i\frac{3}{5\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{3}{5\sqrt{2}} - i\frac{3}{5\sqrt{2}}\right) = i\frac{9}{25}$$

olduğundan bu fonksiyon yalınkat değildir.

Tanım 3.4.3 Normalizasyon şartları olan $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını karşılayan ve birim diskte yalınkat ve analitik fonksiyonlar sınıfı S ile ifade edilir. S sınıfındaki her fonksiyon

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots\ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad |z| < 1 \, , \; a_n \in \mathbb{C}$$

şeklindeki Taylor serisi açılımına sahiptir.

Aşağıda S sınıfında olan bazı örnekler verilmiştir.

(i) $f(z) = z$ birim fonksiyonu birim diski birebir olarak kendi üzerine konform olarak dönüştürür.

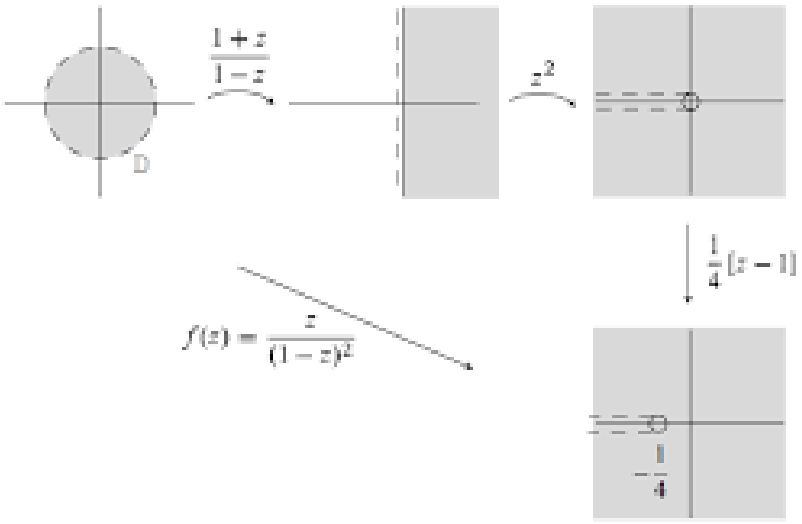
(ii) $f(z)=\frac{1}{2}log\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu birim diski $\left\{w:-\frac{\pi}{4}<Im(w)<\frac{\pi}{4}\right\}$ yatay şeridi üzerine resmeder.

(iii) $f(z)=\frac{2z-z^2}{2}$ fonksiyonu U birim diskini bir kardioidin içine resmeder.

S sınıfı için verilebilecek örneklerden en önemlisi adını Paul Koebe'den alan ve birim diski $-\frac{1}{4}$ den başlayıp $-\infty$ a kadar uzanan bölge dışında kalan kısmı, karmaşık düzleme konform olacak şekilde resmeden Koebe fonksiyonudur (Şekil 3.4). Koebe foksiyonu

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n,\ \ (z\in U)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.4. Koebe fonksiyonunun görüntüsü

S sınıfındaki f ve g fonksiyonları için $f+g\in S$ olmak durumunda değildir yani S sınıfı toplama işlemine göre kapalı değildir. Bir örnekle açıklayacak olursak, S sınıfında bulunan $t(z)=\frac{z}{1-z}$ ve $s(z)=\frac{z}{1+iz}$ fonksiyonlarını alalım.

$$t'(z)+s'(z)=\frac{2-(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

olur ve $z=\frac{1}{1-i}\in U$ noktasında $t'(z)+s'(z)=0$ olur. Bu durumda $t(z)+s(z)\notin S$ olduğu görülür.

Teorem 3.4.4 (Bieberbach Teoremi) Tüm $f\in S$ fonksiyonları $|a_2|\le 2$ eşitsizliğini sağlar. $|a_2|=2$ eşitsizliğinin sağlanması için sadece f fonksiyonun Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olması gerek ve yeter koşuldur (Bieberbach 1916).

Koebe örtme teoremi, Bieberbach teoreminin ilk uygulamasıdır. S sınıfında olan her h fonksiyonu $h(0)=0$ koşulunu sağlayacak şekilde açık bir dönüşüm özelliği gösterdiğinden bu dönüşümlerin görüntüsü de merkezi orjin olan bir diski kapsayacaktır. Koebe, ψ mutlak sabit olacak şekilde, S sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntülerinin, ortak $|w|\le\psi$ diskini kapsadıkları ifade etmiştir.

Bieberbach ise $\psi=1/4$ olabileceğini gösteren Koebe Dörtte Bir Teoremini ispatlamıştır. Bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.4.5 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfında olan tüm f fonksiyonlarının $f(U)$ değer bölgesi $\left\{w:|w|\le\frac{1}{4}\right\}$ diskini kapsar (Duren 1983).

Bieberbach tarafından $|a_2|\le 2$ eşitsizliğinin ispatlanması, Konform dönüşümün geometrik teorisinin konularından olan büyüme ve bükülme teoremleri gibi daha ileri düzeydeki uygulamaların bulunmasını sağlamıştır.

Büyüme teoremi, S sınıfındaki her f fonksiyonu üzerinde $|f(z)|$ için sınır oluşturur. Bükülme teoremi ise, S sınıfına ait her f fonksiyonunun dönüşümü altında sonsuz küçük büyütme çarpanı olan $|f'(z)|$ nin geometrik çıkarımından ya da alanın sonsuz küçük büyütme çarpanı olması ise $|f'(z)|^2$ Jakobiyen işleminin neticesinden oluşmuştur.

Aşağıda önce Bükülme Teoremi ve ardından Büyüme Teoremi verilmiştir.

Teorem 3.4.6 (Bükülme Teoremi) Analitik f fonksiyonu S sınıfında ise,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad , \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği doğrudur (Goodman 1983).

Teorem 3.4.7 (Büyüme Teoremi) Analitik f fonksiyonu S sınıfında ise,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2} \quad , \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği doğrudur (Goodman 1983).

Büyüme ve Bükülme Teoremlerinin birleştirilmesi ile elde edilen aşağıda vereceğimiz teorem bazı konularda daha kullanışlı olacaktır.

Teorem 3.4.8 Analitik f fonksiyonu S sınıfında ise,

$$\frac{1-r}{1+r} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+r}{1-r} \quad , \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği doğrudur (Duren 1983).

Teorem 3.4.9 (Bieberbach Kestirimi veya Branges Teoremi) S sınıfından alınan her f fonksiyonu $n \ge 2$ olacak şekilde $|a_n| \le n$ eşitsizliğini sağlar. f fonksiyonunun, Koebe fonksiyonu ya da onun bir rotasyonu olmadığı taktirde eşitlik sağlanmış olur (Bieberbach 1916).

Bieberbach'ın her n için $|a_n| \le n$ tahmini araştırmacıları uzun yıllar meşgul etmiş ve genel ispat yapılana kadar bu konu üzerinde çalışılmıştır. Genel ispat, 1985 yılında Fransız matematikçi L. De Branges tarafından yapmıştır.

3.5. Caratheodory Sınıfı

U diskinde $p(0) = 1$ ve $Re p(z) > 0$ koşullarını karşılayan

$$f(z)=1+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n \qquad (3.1)$$

şeklinde gösterilen fonksiyonların sınıfına Caratheodory sınıfı veya pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar sınıfı denir ve P ile gösterilir.

Eğer bir f fonksiyonu P sınıfında ise bu fonksiyonun yalınkat olmasını gerektirmez. Bir örnek üzerinde görecek olursak, herhangi bir $n\geq 0$ tamsayısı alındığında $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait bir fonksiyondur ama $n\geq 2$ alındığında bu fonksiyon yalınkat değildir. Koebe fonksiyonun S sınıfında önemli bir yere sahip olması gibi

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

şeklinde ifade edilen Mobius fonksiyonu P sınıfında aynı öneme sahiptir. Bu fonksiyon U birim diskini sağ yarım düzleme konform olarak dönüştürür. Yalınkat fonksiyonlar için iki önemli örnek olan Koebe ve Möbius fonksiyonları arasında önemli bir fark vardır. Koebe fonksiyonu, S sınıfı için birçok ekstremal problemin yegane çözümüdür ama Möbius fonksiyonu için bu durum söz konusu değildir. Möbius fonksiyonu P sınıfında olan p_n katsayılarını maksimize eder. $n\geq 2$ için $p_n=2$ koşulunu sağlayan P sınıfında sonsuz sayıda fonksiyon vardır. Bu fonksiyonların hepsi birbirinden farklıdır ve birinden diğerini bir rotasyonla elde etmek mümkün değildir.

1907 yılında Caratheodory (Caratheodory 1907) tarafından aşağıdaki Caratheodory teoremi ispatlanmıştır. Bu teorem aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.5.1 (Caratheodory Teoremi) M , $M\geq 1$ olacak şekilde bir tamsayı ve f fonksiyonu (3.1) de gösterilen forma sahip P sınıfında bir fonksiyon ise $|p_n|\leq 2$ eşitsizliği sağlanır. $\psi=e^{2\pi i/M}$ ve $m=1,2,3,\ldots.M$ verilsin. $\vartheta_k\geq 0$ olduğunda

$$F(z)=\sum_{m=1}^{M}\vartheta_m\frac{1+\psi^m z}{1-\psi^m z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

ve $\sum_{m=1}^{M} \vartheta_k = 1$ oluyorsa f fonksiyonu P sınıfındadır ve $p_n = 2$ dir.

Pozitif gerçel kısımlı fonksiyonlar sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında önemli bir bağ vardır ve bir fonksiyonun özelliğini kullanarak diğer fonksiyon sınıfı elde edilebilir. Şöyle ki,

$$p \in P \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} \ , \quad \omega \in \Omega$$

3.6. Subordinasyon İlkesi

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan subordinasyon kavramıyla ilgili çalışmalar son yıllarda artmıştır. Bu kavramı ortaya çıkaran 1909 yılında Lindelöf(1909) olmuştur ama temel bağıntıları detaylı bir şekilde Littlewood (1925) ve Rogosinski(1943) elde etmişlerdir.

Tanım 3.6.1 (Subordinasyon) U 'da analitik olacak şekilde f ve g fonksiyonları alındığında

$$f(z) = g(\omega(z))$$

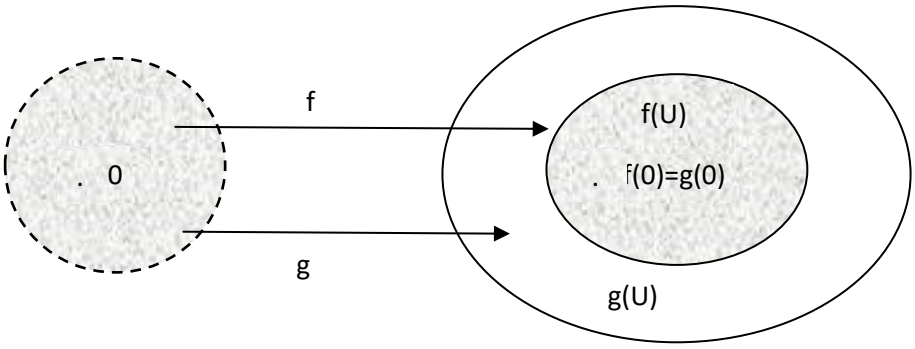
şeklinde olan $\omega \in \Omega$ fonksiyonu mevcutsa f *fonksiyonu* g *fonksiyonuna subordinedir* denir. f 'in g 'ye subordine olması, $f \prec g$ şeklinde ifade edilir.

Yardımcı Önerme 3.6.2 Birim diskte g fonksiyonu yalınkat olacak şekilde

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(U) \subset g(U)$$

önermesi doğrudur (Duren 1983).

Teorem 3.6.3 (Subordinasyon Prensibi) U 'da g fonksiyonu yalınkat olacak şekilde $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ şartları sağlanıyorsa her $r \in (0,1)$ değerleri için $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ kapsaması sağlanır (Pommerenke 1975) (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. Subordinasyon Prensibi

U birim diskinde $p(0)=1$ şartını karşılayan analitik bir fonksiyonun P sınıfına ait bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ subordinasyonunu sağlamalısıdır. Aynı zamanda birim diskte $\omega(0)=0$ eşitliğini sağlayan analitik bir fonksiyon Ω sınıfına ait bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $\omega(z) \prec z$ subordinasyonunu sağlamasıdır.

Örneğin; Birim diskte analitik olacak şekilde $f(z)=1+z$ ve $g(z)=\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonları alındığında $f \prec g$ dir. Bunu görebilmek ancak $\forall z \in U$ iken $f(z)=g(\omega(z))$ biçiminde olan $\omega(0)=0$ ve $|\omega(z)|<1$ şartlarını sağlayan bir ω fonksiyonun mevcut olduğunu göstermekle mümkündür. Buna göre,

$$f(z)=g(\omega(z)) \Rightarrow z+1=\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} \Rightarrow \omega(z)=\frac{z}{z+2}$$

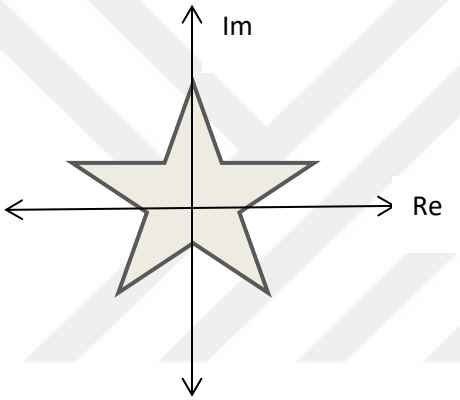
elde edilir ve

$$\omega(0)=0 \text{ ve } |\omega(z)|=\left|\frac{z}{z+2}\right| \leq \frac{1}{|z+2|}<1$$

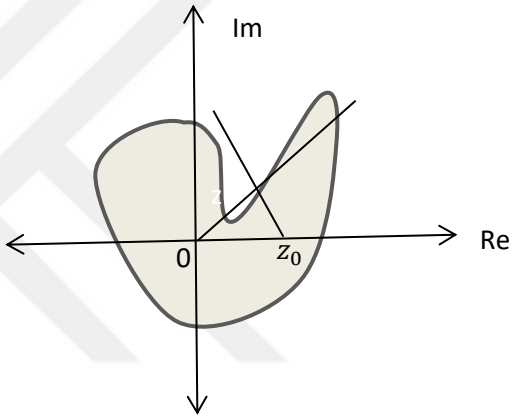
olduğu görülür yani $f \prec g$ dir.

3.7. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Tanım 3.7.1 (Yıldızıl Küme) $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, B kümesinden bir z_0 noktası alındığında bu noktayı diğer tüm $z \in B$ noktaları ile bir araya getiren doğru parçasının tamamı B kümesi içinde ise, B kümesine z_0 *noktasına göre yıldızıl (starlike) küme* denir (Şekil 3.7). Eğer, $z_0 = 0$ alınırsa B kümesine *orjine göre yıldızıl* ya da kısaca *yıldızıl (starlike) küme* denir (Şekil 3.6).

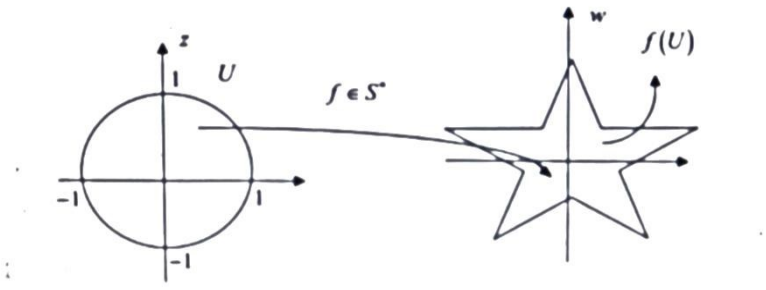


Şekil 3.6. Yıldızıl küme



Şekil 3.7. z noktasına göre yıldızıl küme

Tanım 3.7.2 (Yıldızıl Fonksiyon) Yalınkat bir f fonksiyonu alındığında, bu fonksiyon birim diski görüntü kümesi orjine göre yıldızıl bir kümeye dönüştürüyorsa bu fonksiyona *yıldızıl (starlike) fonksiyon* denir (Şekil 3.8). Yıldızıl fonksiyonlar kümesini ilk olarak 1915 yılında Alexander (Alexander 1915) tanımlamıştır. Bu fonksiyonların sınıfı S^* şeklinde gösterilir.

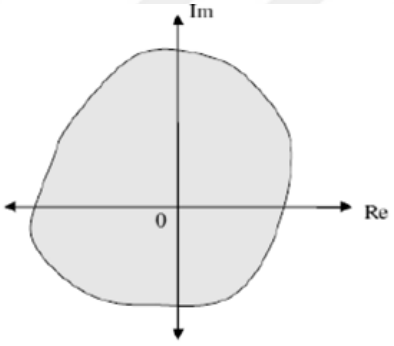


Şekil 3.8. Yıldızıl fonksiyon grafiği

$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu yıldızıl fonksiyonlar sınıfı için önemli bir örnektir.

Tanım 3.7.3 (Konveks Küme) $B \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z_1, z_2 \in B$ noktalarını birleştiren doğru parçası yine B kümesinde kalıyorsa B kümesine *konveks küme* denir (Şekil 3.9).

Tanım 3.7.4 (Konveks Fonksiyon) U birim diskini, $f(U)$ görüntü bölgesine konveks küme olarak resmeden f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. Konveks fonksiyonlar kümesi C ile ifade edilir.



Şekil 3.9. Konveks küme

Örneğin; $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıflarını Caratheodory sınıfı yardımıyla da tanımlayabiliriz. Diğer bir ifadeyle, U birim diskinde analitik ve normalizasyon şartlarını karşılayan f fonksiyonu alındığında

$$f(z)\in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)}\in P$$

veya eşdeğer olarak,

$$f(z)\in S^* \Leftrightarrow Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

önermeleri sağlanır.

U birim diskinde analitik ve normalizasyon şartlarını karşılayan f fonksiyonu alındığında

$$f(z) \in C \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

veya eşdeğer olarak,

$$f(z) \in C \Leftrightarrow Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

önermeleri sağlanır.

Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları arasında $C \subset S^* \subset S \subset A$ şeklinde bir kapsama vardır. Bu fonksiyonlar için önemli bir bağıntı da Alexander (Alexander 1915) tarafından verilmiştir. Bu teorem aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.7.5 (Alexander Teoremi) Analitik bir f fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun konveks olmasının gerek ve yeter şartı zf' nin yıldızıl olması durumudur (Alexander 1915).

1921 yılında Nevalinna, S^* sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.7.6 f fonksiyonu S^* sınıfına ait bir fonksiyon ise her $n \geq 1$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu bir $n \geq 2$ olması durumunda sağlanırsa o zaman f Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur (Nevalinna 1921).

1917 yılında Loewner, C sınıfındaki fonksiyonlar için aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem 3.7.7 f fonksiyonu C sınıfına ait bir fonksiyon ise her $n \geq 1$ için $|a_n| \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu bir $n \geq 2$ olması durumunda sağlanıyorsa o zaman f fonksiyonu $z/1-z$ fonksiyonun bir rotasyonudur (Loewner 1917).

Tanım 3.7.8 (α-Mertebeli Yıldızıl Fonksiyon) f analitik bir fonksiyon ve $0 \le \alpha < 1$ olacak şekilde

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \ge \alpha$$

şartını karşılayan fonksiyonuna $\alpha -$*mertebeden yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonlar sınıfı $S^*(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.7.9 (α-Mertebeli Konveks Fonksiyon) f analitik bir fonksiyon ve $0 \le \alpha < 1$ olacak şekilde

$$Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \ge \alpha$$

şartlarını karşılayan fonksiyonu $\alpha -$ *mertebeden konveks fonksiyon* denir. Fonksiyonların oluşturduğu bu sınıf $C(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

3.8. Spirallike Fonksiyonlar Sınıfı

1932 yılında Spacek (Spacek 1932) spirallike (sarmal) fonksiyonlar sınıfını tanımlamıştır.

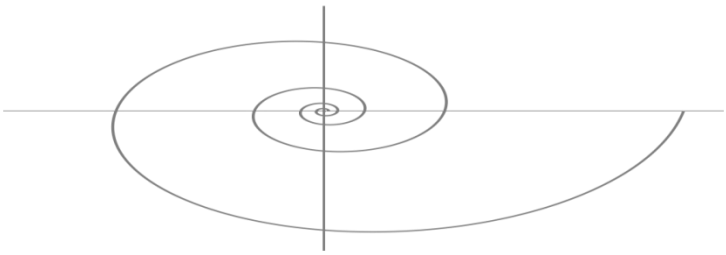
$\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ olsun. ω_0 sıfır olmayan karmaşık bir sayı olmak üzere, logaritmik β – spiral

$$\omega = \omega_0 exp\left(-e^{i\beta}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

ile verilen bir eğridir. Dolayısıyla $\omega = \omega(t)$ logaritmik β – spiral ise,

$$Im\left[e^{i\beta} log\omega(t)\right] = sabit, \qquad t \in \mathbb{R}$$

olur (Şekil 3.10).



Şekil 3.10. Logaritmik Spiral

Tanım 3.8.1 (Spirallike bölge) $D \subseteq \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, her $\omega \in D$ için, ω den çıkan β – spiral yay orjinle birleşirse D ' ye β – spirallike bir bölgedir denir.

Her $\omega = \omega(t)$, β – logaritmik spirali sadece tek noktada γ eğrisi ile kesiştiğinde, kapalı olan γ eğrisi logaritmik açıdan β – tipinde spirallike olur. Bu γ eğrisinin Jordan eğrisi olması gerekir ve γ eğrisi ile sınırlanan bu bölgenin β – spirallike bölge olduğu görülür. $f: U \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ şeklinde tanımlanan analitik bir fonksiyon ve $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ verilsin. Bu durumda, f fonksiyonu U da yalınkat ve $f(U)$ değer bölgesi, β – tipinde spirallike bölge olduğunda f fonksiyonu, β – tipinde spirallike olur. β – tipinde normalize edilmiş olan spirallike fonksiyonlar sınıfı S_β şeklinde gösterilir. $\beta = 0$ olması durumunda bu sınıf yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ile çakışır.

Teorem 3.8.2 $f: U \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olacak şekilde analitik bir fonksiyon olsun. $\beta \in \mathbb{R}, |\beta| < \pi/2$ omak üzere f , β – tipinde spirallike olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$Re\left[e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, \qquad z \in U$$

sağlamasıdır. (Spacek 1932).

Teorem 3.8.3 $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ve $\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} \cos\beta$ olsun. $f \in S_\beta$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$f(z)=z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\alpha}, \qquad z\in U$$

olacak şekilde bir $g\in S^{*}$ fonksiyonunun varolmasıdır (Libera ve Zeigler 1972).

Teorem 3.8.4 $f(z)=z+a_2z^2+...$ fonksiyonu $\beta\in(-\pi/2,\pi/2)$ tipinde spirallike bir fonksiyon olsun.Bu durumda $|\alpha_2|\le 2\cos\beta$ dır. Bu sınır kesindir (Goodman 1983).

3.9. Genelleştirilmiş Dağılım Serisi

Genelleştirilmiş dağılım serisi, Porwal (Porwal 2018-2020) tarafından tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, $t_n\ge 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n$ yakınsak seri ve

$$D=\sum_{n=0}^{\infty}t_n$$

olmak üzere,

$$p(n)=\frac{t_n}{\mathrm{D}} \quad , \; n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

şeklinde verilir. Bununla birlikte,

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t_nx^n$$

şeklinde ifade edilir.

Genelleştirilmiş dağılım serisi ise,

$$K_{\phi}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t_{n\text{-}1}}{\mathrm{D}}z^n$$

şeklinde ifade edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm, çalışmamızda elde ettiğimiz bulgulardan oluşmaktadır. Yalınkat fonksiyonlar sınıfının bir alt sınıfı olan spirallike fonksiyonlar sınıfının alt sınıflarında genelleştirilmiş dağılım serisini uygulayarak bu serinin bu sınıfa ait olması için gerek ve yeter koşullar verilecektir.

Öncelikle bazı önemli bilgileri hatırlayalım.

U 'da analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \qquad (4.1)$$

şeklindeki fonksiyonlar sınıfı A, U 'da yalınkat olan (4.1) şeklindeki A 'daki fonksiyonların sınıfı S ve

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n \qquad (4.2)$$

şeklindeki fonksiyonları kapsayan A 'nın alt sınıfı T ile gösterilsin. Yine $S^*(\alpha)$ ve $C(\alpha)$, sırasıyla tanım 3.7.8 ve tanım 3.7.9 daki fonksiyon sınıfları olsun. Bununla birlikte, (4.1) şeklindeki bir $f(z)$ fonksiyonunun $S^{\gamma}(\beta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul,

$$Re\left(e^{i\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\beta\cos\gamma \;;\; 0\le\beta<1,\ |\gamma|<\frac{\pi}{2}$$

olmasıdır (Spacek 1932). $S^{\gamma}(\beta)$, β -mertebeli γ -spirallike fonksiyonların sınıfı olarak bilinir. Özellikle S^{γ}, Spacek (Spacek 1932) tarafından verilen γ - spirallike fonksiyonların sınıfı olmak üzere $S^{\gamma}(0)=S^{\gamma}$ dır. Yine $S^0=S^*$ olduğu da Silverman (Silverman 1975) tarafından gösterilmiştir. Benzer şekilde, (4.1) şeklindeki f fonksiyonu $C^{\gamma}(\beta)$ sınıfına ait bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul,

$$Re\left(e^{i\gamma}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)>\beta\cos\gamma$$

olmasıdır (Chichra ve Sizuk 1975).

f fonksiyonlarının C^{γ} sınıfı, zf' U'da γ-spirallike olacak şekilde Robertson (Robertson 1969) tarafından verilmiştir ve özellikle $C^{\gamma}(0)=C^{\gamma}$ dır. $C^{\gamma}(\beta)$ sınıfı da Chichra (Chichra 1975) ve Sizuk (Sizuk 1975) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır.

2012 yılında Murugusundaramoorthy (Murugusundaramoorthy 2012) γ-spirallike fonksiyonların aşağıdaki alt sınıfını tanımlamıştır.

Tanım 4.1: $0\le\xi<1$, $0\le\beta<1$, $|\gamma|<\frac{\pi}{2}$ için (4.1) şeklindeki $f\in A$ fonksiyonunun $S(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul,

$$Re\left(e^{i\gamma}\frac{zf''(z)}{(1-\xi)f(z)+\xi zf'(z)}\right)>\beta\cos\gamma$$

olmasıdır.

Aynı zamanda Alexander bağıntısı yardımıyla aşağıdaki sınıfı tanımlamıştır.

Tanım 4.2: $0\le\xi<1$, $0\le\beta<1$, $|\gamma|<\frac{\pi}{2}$ için (4.1) şeklindeki $f\in A$ fonksiyonunun $C(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul,

$$Re\left(e^{i\gamma}\frac{zf''(z)+f'(z)}{f'(z)+\xi zf''(z)}\right)>\beta\cos\gamma$$

olmasıdır.

Tanım 4.1 ve tanım 4.2 de

$$S(\gamma,\beta,0)=S^{\gamma}(\beta) \text{ ve } C(\gamma,\beta,0)=C^{\gamma}(\beta)$$

olduğunu söylemek kolaydır.

Şimdi de,

$$TS(\gamma,\beta,\xi)\equiv S(\gamma,\beta,\xi)\cap T$$

ve

$$TC(\gamma,\beta,\xi) \equiv C(\gamma,\beta,\xi) \cap T$$

sınıflarını tanımlayalım.

Yukarıda verilen sınıflardaki f fonksiyonunun katsayıları için yeterli şartlar aşağıda verilecektir.

Önerme 4.3: (4.1) şeklinde verilen f fonksiyonunu alalım. Eğer, $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \xi < 1$, $0 \le \beta < 1$ olacak şekilde

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma + (1-\beta)(1+n\xi-\xi) \right] |\beta_n| \le 1-\beta \qquad (4.3)$$

ise f, $S(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfında olur (Murugusundaramoorthy 2012).

Yardımcı Önerme 4.4: (4.1) şeklinde verilen f fonksiyonunu alalım. Eğer $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \xi < 1$, $0 \le \beta < 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma + (1-\beta)(1+n\xi-\xi) \right] |\beta_n| \le 1-\beta \qquad (4.4)$$

ise f, $C(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır (Murugusundaramoorthy 2012).

T sınıfındaki f fonksiyonları için yukarıda verilen şartların gerekli olduğu da kolaylıkla gösterilir.

Yardımcı Önerme 4.5: (4.2) şeklinde tanımlı $f \in T$ fonksiyonunun $TS(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul (4.3) eşitliğinin sağlanmasıdır.

Yardımcı Önerme 4.6: (4.2) şeklinde tanımlı $f \in T$ fonksiyonunun $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşul (4.4) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2004'de Swaminathan (Swaminathan 2004) tarafından $R^{\tau}(\theta,\delta)$ sınıfı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.7: (4.1) şeklinde tanımlı f fonksiyonunu alalım. $\tau \in \mathbb{C}-\{0\},\ 0<\theta\leq 1,$ $\delta<1$ olmak üzere

$$\left|\frac{(1-\theta)\frac{f(z)}{z}+\theta f'(z)-1}{2\tau(1-\delta)+(1-\theta)\frac{f(z)}{z}+\theta f'(z)-1}\right|<1,\ z\in U$$

ise $f(z)$ fonksiyonu $R^{\tau}(\theta,\delta)$ sınıfındadır denir.

Yine Swaminathan aynı çalışmada $R^{\tau}(\theta,\delta)$ sınıfındaki f fonksiyonunun genel katsayısı için aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır.

Yardımcı Önerme 4.8: (4.1) şeklindeki f fonksiyonu $R^{\tau}(\theta,\delta)$ sınıfında ise

$$|\alpha_n|\leq\frac{2|\tau|(1-\delta)}{1+\theta(n-1)},\ n\in\mathbb{N}-\{1\}$$

olur. Eşitsizlik kesindir.

Son zamanlarda, Porwal (Porwal 2018) genelleştirilmiş dağılımı tanımlamış ve yalınkat fonksiyonlarla ilişkili geometrik özelliklerini incelemiştir. Genelleştirilmiş dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$t_n\geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n$ yakınsak ve

$$D=\sum_{n=0}^{\infty}t_n$$

olmak üzere

$$p(n)=\frac{t_n}{D} \qquad (4.5)$$

şeklinde verilir. Şimdi,

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t_n x^n \qquad (4.6)$$

serimizi tanımlayalım.

(4.5) den yola çıkarak (4.6) ile verilen seri $x=1$ ve $|x|<1$ için yakınsaktır.

Ayrıca, Porwal (Porwal 2020) yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıflarına için genelleştirilmiş dağılım serileri tanımlamış, ve

$$K_{\phi}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}z^{n} \qquad (4.7)$$

ve

$$TK_{\phi}(z)=2z-K_{\phi}(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}z^{n} \qquad (4.8)$$

alt sınıflarına ait genelleştirilmiş dağılım serileri için gerekli ve yeterli koşullar elde etmiştir.

$f\in A$ ve $g(z)\in A$ şeklinde verilen iki fonksiyonun Hadamard çarpımı (ya da konvülasyonu)

$$g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_{n}z^{n} \quad , \quad z\in U$$

olmak üzere,

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n}b_{n}z^{n}=(g*f)(z) \quad , \quad z\in U \qquad (4.9)$$

olur.

(4.9) ifadesini kullanarak Porwal (Porwal 2020) (4.1) şeklindeki analitik f fonksiyonları için konvoluasyon operatörü $K_{\phi}(f,z)$'yi

$$K_{\phi}(f,z)=K_{\phi}(z)*f(z)$$

$$K_{\phi}(f,z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n}t_{n-1}}{\mathrm{D}}z^{n} \qquad (4.10)$$

şeklinde tanımlamıştır.

Bu bölümde, Porwal (Porwal 2018) in sonuçlarından motive olarak, $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonunun $TS(\gamma,\beta,\xi)$ ve $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıflarında olması için gerekli ve yeterli şartları elde edeceğiz. Aynı zamanda $R^{\tau}(A,B)$ ve $C(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfları arasındaki ilişkiyi göstereceğiz. Son olarak $TS_{\phi}(f,z)=\int_{n=0}^{z}\frac{TS_{\phi}(f,t)}{t}dt$ integralinin $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli koşulları vereceğiz.

Teorem 4.9 (4.8) şeklinde tanımlı $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonunu alalım. $|\gamma|<\frac{\pi}{2}$, $0\le\xi<1$, $0\le\beta<1$ olmak üzere

$$\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]\phi'(1)+(1-\beta)\phi(1)\le(1-\beta)\left[\mathrm{D}+\phi(0)\right] \qquad (4.11)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonu $TS(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır.

İspat: $TK_{\phi}(z)\in TS(\gamma,\beta,\xi)$ olduğunu kanıtlamak için, yardımcı önerme 4.5'ten aşağıdaki eşitsizliği göstermeliyiz;

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}\le 1-\beta$$

Verilen hipoteze göre

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)+(1-\beta)(n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(n-1)\xi+(1-\beta)\right]t_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right)(n-1)+(1-\beta)\right]t_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right](n-1)t_{n-1}+(1-\beta)t_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]nt_{n}+(1-\beta)t_{n}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}}\left(\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi\right]\phi'(1) + (1-\beta)\left(\phi(1)-\phi(0)\right)\right) \leq 1-\beta$$

bulunur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.10 (4.8) şeklinde tanımlı $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \xi < 1$, $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi\right]\phi''(1) + \left[2(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)(2\xi+1)\right]\phi'(1) + (1-\beta)\phi(1) \leq (1-\beta)\left[\mathrm{D} + \phi(0)\right] \quad (4.12)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonu $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır.

İspat: $TK_{\phi}(z) \in TK(\gamma,\beta,\xi)$ olduğunu kanıtlamak için, yardımcı önerme 4.6'dan aşağıdaki eşitsizliği göstermeliyiz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma + (1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}} \leq 1-\beta.$$

$n^2 - n = (n-1)(n-2) + 2(n-1)$ olduğu göz önüne alınırsa, verilen hipoteze göre

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma + (1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi\right](n-1)(n-2) + 2\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi + (1-\beta)\right](n-1) + (1-\beta)\right)t_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi\right](n-1)(n-2)t_{n-1} + 2\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi + (1-\beta)\right](n-1)t_{n-1} + (1-\beta)t_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi\right]n(n-1)t_n + \left[2(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)(2\xi+1)\right]nt_n + (1-\beta)t_n$$

$$= \frac{1}{\mathrm{D}}\left(\left[(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)\xi\right]\phi''(1) + \left[2(1-\xi)sec\gamma + (1-\beta)(2\xi+1)\right]\phi'(1) + (1-\beta)\left(\phi(1)-\phi(0)\right)\right) \leq 1-\beta$$

bulunur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.11 $f \in R^{\tau}(\omega,\varsigma)\left(\tau \in C-\{0\}, 0<\omega\leq 1; \varsigma<1\right)$ ve

$$\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\left[\left((1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right)\phi'(1)+(1-\beta)\left(\phi(1)-\phi(0)\right)\right]\leq 1-\beta$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda (4.10) ile tanımlı $K_{\phi}(f,z)$ fonksiyonu $C(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır.

İspat: Yardımcı önerme 4.4'e göre, aşağıdaki eşitsizliği göstereceğiz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}|\beta_n|\leq 1-\beta.$$

$1+\omega(n-1)\geq \omega n$ olduğunu biliyoruz. Yardımcı önerme 4.8'den $f \in R^{\tau}(\omega,\varsigma)$ olduğundan

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}|\beta_n|$$

$$\leqslant \frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}$$

$$=\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)+(1-\beta)(n\xi-\xi)\right]t_{n-1}$$

$$=\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(n-1)\xi+(1-\beta)\right]t_{n-1}$$

$$=\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right)(n-1)+(1-\beta)\right]t_{n-1}$$

$$=\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right](n-1)t_{n-1}+(1-\beta)t_{n-1}$$

$$=\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]nt_n+(1-\beta)t_n$$

$$=\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega \mathrm{D}}\left[\left((1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\rho\right)\phi'(1)+(1-\beta)\left(\phi(1)-\phi(0)\right)\right]\leq 1-\beta$$

bulunur ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.12 $TS_{\phi}(f,z)=\int_{0}^{z}\frac{TS_{\phi}(f,t)}{t}dt$ fonksiyonunun $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul (4.11)'i sağlamasıdır.

İspat: $TS_{\phi}(f,z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t_{n-1}}{\mathrm{D}}\frac{z^{n}}{n}$ olduğundan, yardımcı önerme 4.6'ya göre

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{n\,\mathrm{D}}\leq 1-\beta$$

olduğunu göstermeliyiz.

Verilen hipoteze göre,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)(1+n\xi-\xi)\right]\frac{t_{n-1}}{n\mathrm{D}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)(n-1)sec\gamma+(1-\beta)+(1-\beta)\xi(n-1)\right]t_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right](n-1)t_{n-1}+(1-\beta)t_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]nt_{n}+(1-\beta)t_{n}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\left(\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]\phi'(1)+(1-\beta)\left(\phi(1)-\phi(0)\right)\right)\trianglelefteq 1-\beta$$

bulunur ki bu teoremin ispatını tamamlar.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmamızda spirallike fonksiyon sınıfının alt sınıfları olan $TS(\gamma,\beta,\xi)$ ve $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıflarında, genelleştirilmiş dağılım serisini uyguladık ve bu serinin bu sınıflara ait olması için gerek ve yeter koşulları verdik.

Tezin bu bölümünde araştırma ve bulgular kısmında ulaştığımız sonuçlara yer verilmektedir.

Sonuç 5.1 (4.8) şeklinde tanımlı $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonunu alalım. $|\gamma|<\frac{\pi}{2}$, $0\le\xi<1$, $0\le\beta<1$ olmak üzere

$$\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]\phi'(1)+(1-\beta)\phi(1)\le(1-\beta)\left[\mathrm{D}+\phi(0)\right]$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonu $TS(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır.

Sonuç 5.2 (4.8) şeklinde tanımlı $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonunu alalım. $|\gamma|<\frac{\pi}{2}$, $0\le\xi<1$, $0\le\beta<1$ olmak üzere

$$\left[(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right]\phi''(1)+\left[2(1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)(2\xi+1)\right]\phi'(1)+(1-\beta)\phi(1)\le(1-\beta)\left[\mathrm{D}+\phi(0)\right]$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $TK_{\phi}(z)$ fonksiyonu $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır.

Sonuç 5.3 $f\in R^{\tau}(\omega,\varsigma)\left(\tau\in C-\{0\},0<\omega\le1;\varsigma<1\right)$ ve

$$\frac{2|\tau|(1-\varsigma)}{\omega\mathrm{D}}\left[\left((1-\xi)sec\gamma+(1-\beta)\xi\right)\phi'(1)+(1-\beta)\left(\phi(1)-\phi(0)\right)\right]\le1-\beta$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda (4.10) ile tanımlı $K_{\phi}(f,z)$ fonksiyonu $C(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfındadır.

Sonuç 5.4 $TS_{\phi}(f,z)=\int_0^z\frac{TS_{\phi}(f,t)}{t}dt$ fonksiyonunun $TC(\gamma,\beta,\xi)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul (4.11)'i sağlamasıdır.

6. KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V., Sario, L. 1960. Riemann Surfaces, Princeton University Press.

Ahmad, M.S., Mehmood, Q., Nazeer, W., and Haq, A.U. 2015. An application of a Hypergeometric distribution series on certain analytic functions. ***Sci. Int.***, 27: 2989-2992.

Alexander, JW. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. ***Ann. Of Math.***, 17: 12-22.

Altınkaya, Ş., Yalçın Tokgöz, S. 2017. Poisson distribution series for certain subclasses of starlike functions with negative Coefficients. ***Annals of Oradea University - Mathematics Fascicola***, 24(2): 5–8.

Bernardi, S.D. 1966/1977. A Bib!iography of Schlicht Functions, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, Part 1 1966, Part II 1977.

Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Pottenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsber***. Preuss. Akad. Wiss. Phys- Math.***, Kl. Pp: 940-955.

Bulboaca, T. and Murugusundaramoorthy, G. 2020. Univalent functions with positive coefficients involving Pascal distribution series. ***Communications of the Korean Mathematical Society***, 35(3): 867-877.

Caratheodory, C. 1907. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen***, die gegebene Werte nicht annehmen Math. Ann.***, 64: 95-115.

Chichra, P.N. 1975. Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α -spirallike. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 49: 151-160.

De Branges, L. A. 1985. Proof of the Bieberbach Conjecture. ***Acta Math.***, 154: 137-152.

Duren, PL. 1983. Univalent Functions. Springer- Verlag, Newyork, page: 384.

El-Deeb, S., Bulboaca, T. and Dziok, J. 2019. Pascal distribution series connected with certain subclasses of univalent functions. ***Kyungpook Mathematical Journal***, 59(2):301-314.

Frasin, B.A. 2019. On certain subclasses of analytic functions associated with Poisson distribution series. ***Acta Univ. Sapientiae, Mathematıca***, $11(1)$: 78-86.

Frasin, B.A. 2020. Subclasses of analytic functions associated with Pascal distribution series. ***Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications***, $4(2)$: 92-99.

Garabedian, R. and Schiffer, M. 1955. A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient. ***J. Rational Mech. Anal.***, 4: 427-465.

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions. Vols. I and II. Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Gronwall, T.H. 1914. Some remarks on conformal representation***. Ann. of Math.***, 16(2): 72–76.

Kim, Y.C. and Sugawa, T. 2012. Correspondence between spirallike functions and starlike functions. ***Math. Nachr.***, 285:322-333.

Keogh, F.R., Merkes, E.P. 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 20: 8-12

Koebe, P. 1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven. ***Nach. Ges. Wiss. Gottingen***: 191-210.

Libera R.J. 1967.Univalent α−spiral functions. ***Canad. J. Math.***, 19: 449-456.

Libera, R.J., Ziegler, M.R. 1972. Regular functions f for which $zf'(z)$ is α -spiral. ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 166: 361-370.

Lindelˆf, E. 1909. MÈmoire sur certaines inÈgalitis dans la thÈorie des functions monogÈnses et sur quelques propriÈtÈs nouvelles de ces fonctions dans levoisinage díun point singulier essentiel. ***Ann. Soc. Sci. Fenn.***, 35: 1-35.

Littlewood, J.E. 1925. On inequalities in the theory of functions. Proc. ***London Math. Soc.***, 23: 481-519.

Loewner, C. 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises |z|<1, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. ***Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig***, 69: 89-106.

Loewner, K. 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. ***I. Math. Ann.***, 89: 103-121.

Montel, P., Cartan, H., Marty, F. 1933. Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, Gauthier-Villars, Paris.

Murugusundaramoorthy, G. 2012. Subordination results for spiral-like functions associated with the Srivastava-Attiya operator. ***Integral Transforms Spec. Funct.***, $23(2)$: 97-103.

Murugusundaramoorthy, G. Certain subclasses of spirallike univalent functions related with pascal distribution series. http://arxiv.org/abs/2007.10386v1.

Murugusundaramoorthy, G., Vijaya, K. and Porwal, S. 2016. Some inclusion results of certain subclass of analytic functions associated with Poisson distribution series. ***Hacettepe J. Math. Stat.***, $45(4)$: 1101-1107.

Murugusundaramoorthy, G., Frasin, B.A. and Al-Hawary, T. 2001. Uniformly convex spiral functions and uniformly spirallike function associated with Pascal distribution series. https://arxiv.org/pdf/2001.07517.pdf.

Nazeer, W., Mehmood, Q., Kang, S.M. and Haq, A.U. 2019. An application of a Binomial distribution series on certain analytic functions***. J. Comput. Anal. Appl.***, 26: 11-17.

Nehari, Z. 1952. Conformal mapping (International series in pure and applied mathematics). 1st Edition, McGraw-Hill, 1st edition.

Nevanlinna, R. 1920. Über die Konforme Abbildung von Sternebieten, Översikt av Finska Vetenskaps. ***Societetens Förhandlingar***, $63(6)$: 1-21.

Ozawa, M. 1969. On the Bieberbach Conjecture for the Sixth Coefficient. ***Kodai Math. Sem. Rep.,*** 21: 97-128.

Pederson, R. N. 1968/1969. "A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Sixth Coefficient." ***Arch. Rational Mech. Anal.***, 31: 331-351.

Pederson, R. and Schiffer, M. 1972. A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fifth Coefficient. ***Arch. Rational Mech. Anal.***, 45: 161-193.

Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprechet, Gottingen.

Porwal, S. 2014. An application of a Poisson distribution series on certain analytic functions. ***Journal of Complex Analysis***: 1-3.

Porwal, S. 2018. Generalized distribution and its geometric properties associated with univalent functions. ***J. Complex Anal.Vol.***, Art. ID 8654506: 1-5.

Porwal, S. 2020. Mapping properties of certain subclasses of analytic functions associated with generalized distribution series. ***Applied Math-E-Notes***, 20: 39-45.

Porwal, S. and Gupta, A. 2018. Some properties of convolution for hypergeometric distribution type series on certain analytic univalent functions. ***Acta Univ. Apul.***, 56: 69-80.

Porwal, S. and Kumar, S. 2017. Confluent hypergeometric distribution and its applications on certain classes of univalent functions. ***Afr. Mat.***, 28: 1-8.

Porwal, S., Altınkaya, Ş., Yalçın Tokgöz, S. 2019. The Poisson Distribution Series of General Subclasses of Univalent Functions. ***Acta Universitatis Apulensis***, 58(2): 45–52.

Rogosinski, W. 1943. On the coec/ cients of subordinate functions. ***Proc. Lond. Math. Soc.***, 48: 48-82.

Robertson, M.S. 1969. Univalent functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is γ-spirallike. ***Michigan Math. J.***, 16: 97-101.

Silverman, H. 1975. Univalent functions with negative coefficients. ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 51: 109-116.

Silvia, E. M. 1974. On a Subclass of Spiral-Like Functions. ***Proceedings of the American Mathematical Society***, $44(2)$: 411–420. .

Sizuk, P.I. 1975. Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is $\theta-$spiral shaped of order α ***Sibirsk. Math. Z.***, 16: 1286-1290.

Spacek, L. 1932. Contribution `ala th`eorie des fonctions univalentes. ***Casopis Pest. Math.***, 62 : 12-19.

Swaminathan, A. 2004. Certain sufficiency conditions on Gaussian hypergeometric functions. ***Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics***, $5(4)$: 1-10.

Şeker, B., Sümer Eker, S. 2020. On certain subclasses of starlike and convex functions associated with Pascal distribution series. ***Turkish Journal of Mathematics***, 44(6): 1982–1989.

ÖZGEÇMİŞ

İlkokul, ortaokul ve lise eğitimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2009 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik öğretmenliği bölümüne başladım ve 2013 yılında mezun oldum. 2013 yılında MEB de İlköğretim Matematik öğretmeni olarak göreve başladım ve halen devam etmekteyim. 2018 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimime başladım.

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	BADE YILDIZHAN
ÖĞRENCİ NO	18804004
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2020-2021
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	MATEMATİK
PROGRAM	Yüksek Lisans / Doktora
TEZ KONUSU	GENELLEŞTİRİLMİŞ DAĞILIM SERİLERİ İLE İLGİLİ SPIRALLIKE FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	53
BENZERLİK ORANI	%12
RAPORLAMA TARİHİ	27/07/ 2021

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 53 sayfalık kısmına ilişkin, 27/07/2021 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *TURNITIN* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 12 'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

☒Kabul/Onay sayfaları hariç,
☒Kaynakça hariç
☒Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☒Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esaslarını inceledim ve bu Uygulama Esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Öğrencinin
Adı ve Soyadı: Bade YILDIZHAN
Tarih:27/07/2021
İmza:

Tez Danışmanı	**Anabilim Dalı Başkanı**
Adı ve Soyadı: Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY Tarih:27/07/2021 İmza:	Adı ve Soyadı: Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY Tarih:27/07/2021 İmza:

Formdaki bilgiler, bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersizdir.