GECİKMELİ TERİM İÇEREN HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

HAZAL YÜKSEKKAYA

ARALIK 2022
DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ TERİM İÇEREN HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

HAZAL YÜKSEKKAYA

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

ARALIK 2022
DİYARBAKIR

GECİKMELİ TERİM İÇEREN HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Hazal YÜKSEKKAYA tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ _____
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN _____
Danışman, **Matematik Bölümü**

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Alaattin ESEN (*) _____
Matematik Bölümü, İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**) _____
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan BULUT _____
Matematik Bölümü, Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ _____
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Muhammet Ali ARSERİM _____
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Dicle Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 21 / 12 / 2022

(*) Sınav Jürisi kısmının birinci satırına Jüri Başkanının bilgilerini yazınız.
(**) Sınav Jürisi kısmının ikinci satırına Tez Danışmanının bilgilerini yazınız.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Hazal YÜKSEKKAYA

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca her türlü desteğini esirgemeyen, tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan çok değerli danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama sonsuz saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, bu doktora çalışmasına destek sunan Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne (ZGEF.20.009) teşekkür ederim.

Özellikle, bugünlere gelmemde en çok emeği geçen, her zaman yanımda olan ve destekleyen kıymetli aileme: canım anneme, canım babama ve canım kardeşlerime sonsuz sevgilerimi, saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR v

İÇİNDEKİLER vi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT x

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5

3. ÖN BİLGİLER 13

3.1 Yakınsaklık 13

3.2 Lebesgue Uzayı 14

3.3 Sobolev Uzayı 15

3.4 Bazı Önemli Eşitlikler, Eşitsizlikler ve Teoremler 15

3.5 Değişken Üslü Uzaylar 19

3.5.1 Temel kavramlar 19

3.5.2 Değişken üslü Lebesgue uzayı 20

3.5.3 Değişken üslü Sobolev uzayı 21

3.5.4 Değişken üslü uzaylarda bazı önemli eşitlikler, eşitsizlikler ve teoremler 21

3.6 Faedo-Galerkin Metodu 23

3.7 Yarıgrup Metodu 24

3.8 Georgiev ve Todorova Metodu 30

3.9 Logaritmik Konvekslik Metodu 31

3.10 Potansiyel Well (Derinlik) Metodu 31

4. GECİKMELİ TERİM İÇEREN DEĞİŞKEN ÜSLÜ DENKLEMLER 35

4.1 Gecikmeli Terim İçeren Değişken Üslü p(x)-Laplacian Denklemin Çözümlerinin Patlaması ve Azalması 36

4.1.1 Çözümlerin patlaması 39

4.1.2 Çözümlerin azalması 48

4.2 Gecikmeli Terim İçeren Değişken Üslü Viskoelastik Bir Dalga Denkleminin Çözümlerinin Varlığı ve Patlaması 58

4.2.1 Çözümlerin varlığı ve tekliği 61

4.2.2 Çözümlerin patlaması 76

5. GECİKMELİ TERİM İÇEREN LOGARİTMİK KAYNAK TERİME SAHİP DENKLEMLER 87

5.1 Gecikmeli Terim İçeren Logaritmik Kirchhoff Denkleminin Çözümlerinin Global Varlığı, Üstel Azalması ve Patlaması 87

5.1.1 Global varlık 90

5.1.2 Üstel azalma 92

5.1.3 Çözümlerin patlaması 94

5.2 Gecikmeli Terim ve Dağılımlı Gecikmeli Terim İçeren Logaritmik Dalga Denkleminin Çözümlerinin Lokal Varlığı, Global Varlığı ve Azalması 101

5.2.1 Dağılımlı gecikmeli terim içeren dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve azalması 101

5.2.2 Gecikmeli terim içeren dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve azalması 115

6. GECİKMELİ TERİM İÇEREN POLİNOMAL KAYNAK TERİME SAHİP DENKLEM 127

6.1 Gecikmeli Terim İçeren Yüksek Mertebeden Kirchhoff Tipli Denklemin Çözümlerinin Varlığı, Azalması ve Patlaması 128

6.1.1 Global varlık 129

6.1.2 Çözümlerin azalması 134

6.1.3 Çözümlerin patlaması 139

7. GECİKMELİ TERİM İÇEREN DENKLEM SİSTEMİ 145

7.1 Dağılımlı Gecikmeli Terim İçeren Viskoelastik Kirchhoff Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi 145

7.1.1 Üstel büyüme 147
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 157
KAYNAKLAR 159
ÖZGEÇMİŞ 169

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	p. mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
$L^{p(x)}(\Omega)$	Değişken Üslü Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p(x)}(\Omega)$	Değişken Üslü Sobolev Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradiyent)
Δ	Laplace operatörü

ÖZET

GECİKMELİ TERİM İÇEREN HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Yüksekkaya, Hazal
Doktora, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Aralık 2022, 180 sayfa

Gecikmeli terim içeren denklemler ilk olarak 18. yüzyılda Bernoulli kardeşler ve Leonard Euler tarafından ele alınmışlardır. Bu denklemlerin sistematik olarak çalışılmaya başlanması ise 1940 da Myshkis ve Bellman tarafından başlanmıştır. Zaman gecikmeleri genellikle termal, ekonomik olaylar, biyolojik, kimyasal ve fiziksel gibi birçok farklı problemde ortaya çıkar. Birçok durumda, gecikme bir kararsızlık kaynağıdır ve hatta gelişigüzel küçük bir gecikme bile, ek koşullar veya kontrol şartları kullanılmadığı sürece, normal bir gecikme olmaksızın da düzgün, asimptotik olarak kararlı olan bir sistemin dengesini bozabilir. Ancak bazı denklemler için gecikmenin varlığı dengeleyici bir etkiye sahip olabilir. Bu nedenle, zaman gecikmeli denklemlerin, kararlılık analizi ve sağlam kontrolü teorik ve pratik öneme sahiptir. Bu tezin ilk bölümünde fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan gecikmeli terim içeren denklemlere kısaca değinilmiştir. İkinci bölümde gecikmeli terim içeren denklemlerle ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimi ele alınmıştır. Üçüncü bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, lemma, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Dördüncü bölümün ilk kısmında gecikmeli terim içeren, p(x)-Laplacian tipli değişken üslü denklemin çözümlerinin patlaması ve azalması; ikinci kısmında ise gecikmeli terim içeren, değişken üslü viskoelastik dalga denkleminin çözümlerinin varlığı ve patlaması çalışılmıştır. Beşinci bölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Beşinci bölümün ilk kısmında dağılımlı gecikmeli terim içeren logaritmik Kirchhoff tipli denklemin çözümlerinin global varlığı, azalması ve patlaması; ikinci kısmında ise gecikmeli terim içeren logaritmik dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve azalması çalışılmıştır. Altıncı bölümde, gecikmeli terim içeren, polinomal kaynak terime sahip, bir yüksek mertebeden Kirchhoff tipli denklemin çözümlerinin varlığı, azalması ve patlaması ispatlanmıştır. Yedinci bölümde ise, dağılımlı gecikmeli terim içeren bir viskoelastik Kirchhoff sisteminin çözümlerinin üstel büyümesi çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli terim, Patlama, Enerji azalması, Varlık ve teklik, Üstel büyüme.

ABSTRACT

MATHEMATICAL BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS WITH DELAY TERM

Yüksekkaya, Hazal
Doctorate of Science in Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
December 2022, 180 pages

In the eighteenth century, the first equations with delay were considered by brothers Leonard Euler and Bernoulli. By A. Myshkis and R. Bellman, systematical study started at the 1940s. Time delays often appear in many various problems, such as, thermal, economic phenomena, biological, chemical and physical. In many cases, delay is a source of instability and even an arbitrarily small delay may destabilize a system which is uniformly asymptotically stable in the absence of delay unless additional conditions or control terms have been used. However, for some equations, the presence of delay can have a balancing effect. Therefore, stability analysis and robust control of time-delayed equations are of theoretical and practical importance. In the first section of this thesis, the equations with delay term that emerged in applied sciences such as science and engineering are briefly mentioned. In the second section, the historical development of the studies on the equations with delay terms is discussed. In the third section, the basic definition, lemma, theorem and inequalities that will be used throughout the thesis are given. The fourth section consists of two subsections. In the first subsection the blow up and decay of solutions for p(x)-Laplacian equation with delay term and variable exponents; in the second subsection the existence and blow up of solutions for viscoelastic wave equation with delay term and variable exponents are studied. The fifth section consists of two subsections. In the first subsection the global existence, decay and blow up of solutions for logarithmic Kirchhoff type equation with distributed delay; in the second subsection the local existence, global existence and decay of solutions for logarithmic wave equation with delay term are studied. In the sixth section the existence, decay and blow up of solutions for higher order Kirchhoff type equation with delay term and polynomial source term are proved. In the seventh section, the growth of solutions for viscoelastic Kirchhoff system with distributed delay term is studied.

Keywords: Delay term, Blow up, Energy decay, Existence and uniqueness, Exponential growth.

1. GİRİŞ

Gecikmeli terim içeren denklemler ilk olarak 18. yüzyılda Bernoulli kardeşler ve Leonard Euler tarafından ele alınmışlardır. Bu denklemlerin sistematik olarak çalışılmaya başlanması ise 1940 da Myshkis ve Bellman tarafından başlanmıştır. Özellikle, 2000 li yıllardan sonra gecikmeli terimli denklemler oldukça aktif bir şekilde çalışılmaktadır (Fridman, 2014).

Gecikmeli terim içeren denklemler, sonradan etkili denklemler, sapma argümanlı denklemler veya diferansiyel fark denklemleri olarak da adlandırılır. Böyle bir denklemin en basit örneği, $x(t) \in R$ için

$$x'(t) = -x(t-\tau)$$

dır, burada $\tau > 0$ gecikmeli zamanı göstermektedir. Zaman gecikmesi genellikle birçok kontrol sisteminde (iletişim ağları, uçak, veya kimyasal gibi), hem kontrol girişinde hem de ölçüm durumlarında görülür. Böylece, ölçüm, taşıma veya iletişim gecikmeleri olabilir. Kontrol sistemlerinde genellikle, öncelikle karar verme için gereken bilgileri elde etmek, kontrol kararları oluşturmak ve bu kararları uygulamak için gereken süre nedeniyle, gecikmeler görülür. Geri bildirim döngülerine dahil olan aktüatörler, sensörler ve saha ağları genellikle gecikmelere neden olur. Gecikmeler, iletişim ve bilgi teknolojilerinin; ağ bağlantılı kontrol sistemlerinin kararlılığı veya yüksek hızlı iletişim ağları gibi zorlu alanlarında sıkça görülür (Richard, 2003).

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler, popülasyon dinamikleri teorisinde önemli roller oynamıştır. Bununla birlikte, diferansiyel denklemler, genellikle kabul edilen gerçek sistemlerin ilk yaklaşımlarıdır. Daha gerçekçi modeller ise, bu sistemlerin geçmişteki bazı durumlarını içermelidir; yani gerçek bir sistem, zaman gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenmelidir.

Peki, gecikmeli terim içermeyen denklemler hakkında pek çok bilgi bulunuyorken, neden gecikmeli diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulur? Cevap; tıp, biyoloji, kimya, fizik, mühendislik, ekonomi vb. hem doğal hem de insan yapımı birçok

sürecin zaman gecikmeleri içermesinde saklıdır. Hemen hemen her durumda, zaman gecikmeleri o kadar sık meydana gelir ki, onları görmezden gelmek gerçeği görmezden gelmektir. Doğada basit bir örnek olarak, yeniden ağaçlanma verilebilir. Kesilmiş bir ormanın yeniden dikilmesinden sonra herhangi bir olgunluğa erişmesi en az yirmi yıl alacaktır. Bazı ağaç türleri için bu süre çok daha uzun olacaktır. Bu nedenle, herhangi bir matematiksel orman hasadı ve yenilenmesi modelinin içinde zaman gecikmeleri olabilir. Başka bir örnek olarak, hayvanların daha sonraki faaliyetleri ve tepkileri gerçekleşmeden önce yiyeceklerini sindirmek için zaman ayırması gerektiğidir. Bu nedenle, gecikmeli terim içeren denklemler, herhangi bir tür dinamiği modeli için iyi yaklaşımlardır. Gerçekçi bir model, sistemin geçmiş tarihini içermelidir. Bir model, geçmiş tarihine bir bağımlılık içermediğinde, genellikle adi diferansiyel denklemlerden veya kısmi diferansiyel denklemlerden oluşur. Geçmişi içeren modeller, genellikle gecikmeli diferansiyel denklemleri içerir (Kuang, 1993).

Son yıllarda, kısmi diferansiyel denklemler için çözümlerin davranışlarının zaman gecikmesi etkileri ile kontrolü aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. Genellikle gecikme etkileri, birçok uygulamada ve fiziksel, kimyasal, biyoloji, termal ve ekonomi gibi pratik problemlerde ortaya çıkar. Birçok durumda, gecikme bir kararsızlık kaynağıdır. Gelişigüzel küçük bir gecikme bile, ek koşullar veya kontrol şartları kullanılmadığı sürece, normal bir gecikme olmaksızın da düzgün, asimptotik olarak kararlı olan bir sistemin dengesini bozabilir. Ancak bazı denklemler için gecikmenin varlığı dengeleyici bir etkiye sahip olabilir. Bu nedenle, zaman gecikmeli denklemlerin, kararlılık analizi ve sağlam kontrolü teorik ve pratik öneme sahiptir (Datko vd., 1986).

Gecikmeli terim içeren, denklem olarak modellenen bazı olaylar:

1. Araç trafiği akışları,
2. Su (şofben) sistemi,
3. Salgın hastalıklar,
4. Nöral ağlar,
5. Nüfus dinamikleri,

6. Lazer modeli,
7. Sondaj (delme) sistemi modeli,
8. Tünel diyotlu uzun hat,
9. İletişim ağlarında tıkanıklık kontrolü,
10. Örneklenmiş veri kontrolü ve ağa bağlı kontrol sistemi.

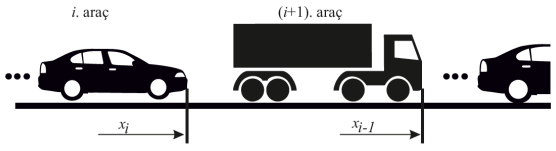
Verilen bazı olayların modellemelerini açıklayalım:

1. Trafik akışları:

Trafik akış modellerinde, sürücülerin; algılama, kavrama, tepki ve seçim unsurlarından oluşan gecikme reaksiyonlarının tümü dikkate alınmalıdır. Bu gecikmeler, insan davranışının öneminde, trafik akış stabilitesinin analiz edilmesinde ve uyarlanabilir hız kontrol cihazları kullanılarak, çarpışmasız trafik akışının tasarlanmasında büyük öneme sahiptir. Araç trafiği akışını modellemek için çok sayıda yaklaşım kullanılmaktadır (Abdallah vd., 2011). Örneğin, şekilde gösterildiği gibi araçların tek bir şeritte birbirini takip ettiğini varsayalım. Ortaya çıkan modeller, sürücülerin tepkilerinin gecikmelerinden etkilenirler. Şimdi, gecikmeli zaman içeren basit bir model verelim:

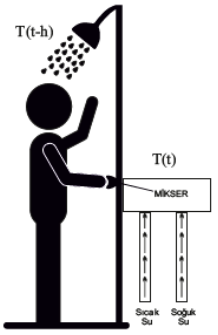
$$x_i''(t) = k\left[x_{i+1}'(t-\tau) - x_i'(t-\tau)\right] \tag{1.1}$$

burada, $i = 1, \ldots, n$ dir, ve n, araçların sayılarını göstermektedir. (1.1) modelinde, x_i'' ve x_i', sırasıyla, sabit bir v hızına sahip i aracının, ivme ve hız değişimleridir. Bu modelde, k pozitif bir sabit



ve τ sürücünün tepki gecikmesidir. Bu modelin kararlılık analizi, ayrıca, trafiğin akış özelliklerini, trafik sıkışıklıklarının nasıl oluştuğunu ve sürücülerin etkilerini analiz etmek için kullanılabilir. Bu analiz, trafiğin, çevreyi ve ekonomiyi nasıl etkilediği ile ilgilidir.

2. Su (şofben) sistemi: Gecikmeli zaman sisteminin basit bir örneği aşağıdaki gibidir. Bir kişi, soğuk ve sıcak su karışımını içeren mikserin kolunu çevirerek istediği T_d su sıcaklığı değerine ulaşmak istesin (Kolmanovskii ve Myshkis, 2012). $T(t)$ mikser çıkışındaki su sıcaklığını göstersin



ve suyun mikser çıkışından sonra ihtiyaç duyduğu gerekli süre τ olsun. Sıcaklık değişiminin tutamacın dönüş açısıyla orantılı olduğunu varsayalım, tutamacın dönüş hızı ise $T(t) - T_d$ ile orantılıdır. t anında kişi, mikserden çıkan suyun sıcaklığını $t - \tau$ zamanında hisseder, bu da sabit τ gecikmeli aşağıdaki denklemle sonuçlanır, $k \in R$ için,

$$T'(t) = -k\left[T(t-\tau) - T_d\right] \tag{1.2}$$

dır (Fridman, 2014).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin orjinal kısmını dört, beş, altı ve yedinci bölümler oluşturmaktadır. Tezin esas amacı:

Dördüncü bölümün ilk kısmında yer alan

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta_{p(x)} u + \mu_1 u_t \left|u_t\right|^{m(x)-2} + \mu_2 u_t \left(x, t-\tau\right) \left|u_t \left(x, t-\tau\right)\right|^{m(x)-2} \\ = \; & bu \left|u\right|^{q(x)-2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

gecikmeli terim içeren, değişken üslü $p\left(x\right)$-Laplacian denkleminin çözümlerinin patlamasını ve azalmasını (Antontsev vd., 2021) ve ikinci kısmında yer alan

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right) \Delta u\left(s\right) ds + \mu_1 u_t \left|u_t\right|^{m(x)-2} \\ & + \mu_2 u_t \left(x, t-\tau\right) \left|u_t \left(x, t-\tau\right)\right|^{m(x)-2} \\ = \; & bu \left|u\right|^{p(x)-2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

gecikmeli terim içeren, değişken üslü viskoelastik denklemin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve patlamasını (Yüksekkaya vd., 2022a) ve beşinci bölümün ilk kısmında yer alan

$$u_{tt} - M\left(\left\|\nabla u\right\|^2\right) \Delta u + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) u_t\left(x, t-s\right) ds = u \left|u\right|^{p-2} \ln \left|u\right|^k \tag{2.3}$$

dağılımlı gecikmeli terim içeren, Kirchhoff tipli denklemin çözümlerinin global varlığını, azalmasını ve patlamasını (Pişkin ve Yüksekkaya, 2022a) ve ikinci kısmında yer alan

$$u_{tt} - \Delta u - \mu_1 \Delta u_t\left(x, t\right) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) \Delta u_t\left(x, t-s\right) ds = u \left|u\right|^{p-2} \ln \left|u\right|^k \tag{2.4}$$

dağılımlı gecikmeli terim içeren, logaritmik dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığını, global varlığını ve azalmasını (Yüksekkaya ve Pişkin, 2022a; Yüksekkaya ve Pişkin, 2022b) ve altıncı bölümde yer alan

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \left(\int_\Omega \left|A^{\frac{1}{2}} u\right|^2 dx\right)^q Au + \mu_1 \left|u_t\left(x, t\right)\right|^{r-1} u_t\left(x, t\right) \\ & + \mu_2 \left|u_t\left(x, t-\tau\right)\right|^{r-1} u_t\left(x, t-\tau\right) \\ = \; & \left|u\right|^{p-1} u \end{aligned} \tag{2.5}$$

gecikmeli terim içeren, polinomal kaynak terime sahip yüksek mertebeden Kirchhoff tipli denklemin çözümlerinin varlığını, azalmasını ve patlamasını (Yüksekkaya

vd., 2021c) ve yedinci bölümde yer alan

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds + \mu_1 u_t\left(x,t\right) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2\left(\varrho\right)\right| u_t\left(x,t-\varrho\right)d\varrho = f_1\left(u,v\right), \\ v_{tt} - M\left(\|\nabla v\|^2\right)\Delta v + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta v\left(s\right)ds + \mu_3 v_t\left(x,t\right) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_4\left(\varrho\right)\right| v_t\left(x,t-\varrho\right)d\varrho = f_2\left(u,v\right) \end{cases} \tag{2.6}$$

dağılımlı gecikmeli terim içeren, viskoelastik Kirchhoff sisteminin çözümlerinin üstel büyümesini (Pişkin vd., 2021) incelemektir.

Şimdi, gecikmeli terim içeren denklemler ile ilgili daha önce yapılmış çalışmaları verelim:

Datko (1978)

$$u_{tt} - u_{xx} + 2au_t\left(x,t-\tau\right) = 0$$

denkleminde, hız terimindeki gecikmenin kararsızlığa neden olduğunu göstermiştir. Datko (1986) çalışmasında ise aynı denklemi farklı sınır koşullarıyla incelemiştir. Chen (1979) çalışmasında gecikmeli terim içermeyen bu denklem düzgün asimptotik kararlıdır. Datko (1988) farklı sınır koşullarını kullanarak, küçük bir gecikmenin neden olduğu, kararsız olan iki hiperbolik kısmi diferansiyel denklem örneğini ele almıştır.

Nicaise ve Pignotti (2006)

$$u_{tt} - \Delta u + a_0 u_t + au_t\left(x,t-\tau\right) = 0$$

gecikmeli terim içeren dalga denklemini ele almışlardır, burada, a_0, a pozitif reel parametrelerdir. $0 \leq a \leq a_0$ için, sistemin kararlılığı incelenmiştir. $a \geq a_0$ için, çözümün kararsız olduğunu göstermişlerdir. Liu (1997) ve Zuazua (1990) denklemin, gecikmeli terim içermeksizin ($a = 0$, $a_0 > 0$), kararlılığını incelemişlerdir. Nicaise vd., (2009) değişmeli gecikmeli zaman içeren bir boyutlu uzayda dalga denklemini çalıştılar. Bu çalışmada,

$$a \leq \sqrt{1-d}a_0$$

koşulu altında, kararlılık sonucunu gösterdiler, $\forall t > 0$ için

$$\tau'\left(t\right) \leq d < 1$$

dir ve burada d bir sabittir.

Denklem gecikmeli terim içerdiğinde ($a > 0$), Nicaise ve Pignotti (2008) ($a < a_0$) için denklemin kararlılığını ispatlamışlardır. Denklemdeki gecikmeli terim ($u_t(x, t-\tau)$) yerine

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)\, u_t(x, t-s)\, ds$$

dağılımlı gecikmeli terimi bırakıldığında ve

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} a(s)\, ds < a_0$$

koşulu altında, Nicaise ve Pignotti (2006) denklemin çözümlerinin üstel kararlılığını ispatlamışlardır. Ayrıca son yıllarda, Kirane ve Said-Houari (2011) ve, Dai ve Yang (2014) gecikmeli terim içeren viskoelastik dalga denkleminin bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Mustafa ve Kafini (2016)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\, \Delta^2 u(s)\, ds + \mu_1 u_t + s\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(t-s)\, ds = u|u|^{\gamma}$$

viskoelastik denkleminin çözümlerinin enerji azalmasını çalışmışlardır.

Kafini ve Messaoudi (2016)

$$u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m-2}\nabla u\right) + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = b|u|^{p-2}u$$

denkleminin, sonlu bir zamanda patlamasını çalışmışlardır.

Mustafa ve Kafini (2017)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^{\infty} g(s)\, \Delta^2 u(t-s)\, ds + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(t-\tau) = u|u|^{\gamma}$$

denkleminin çözümlerinin azalmasını çalışmışlardır.

Taouaf vd., (2018)

$$u_{tt} - \Delta_e u + \mu_1 u_t(x,t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2 u_t(x, t-s)\, ds = 0$$

Lamé sisteminin iyi konulmuşluğunu ve kararlılığını ispatlamışlardır. Ayrıca, Lyapunov fonksiyonelinden faydalanarak, asimptotik davranışı incelemişlerdir.

Kafini ve Mustafa (2018a)

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\, \Delta u(s)\, ds + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = |u|^{p-1}u$$

viskoelastik denklemin çözümlerinin patlamasını çalışmışlardır.

Kafini ve Mustafa (2018b)

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(x,s)\,ds + \mu_1 \Delta u_t + \mu_2 \Delta u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-1} u$$

denkleminin çözümlerinin patlamasını ispatlamışlardır.

Kang (2018)

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \mu_1 |u_t|^{m-2} u_t + \mu_2 u_t(t-\tau)\,|u_t(t-\tau)|^{m-2} \\ = \;& u\,|u|^{p-2} \end{aligned}$$

denkleminin başlangıç enerjisi pozitif iken $E(0) > 0$, çözümlerinin patlamasını ispatlamışlardır.

Mahdi vd., (2018)

$$\begin{aligned} & u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \mu_1 |u_t|^{m-1} u_t \\ & + \mu_2 |u_t(x,t-\tau)|^{m-1} u_t(x,t-\tau) \\ = \;& |u|^{p-1} u \end{aligned}$$

Kirchhoff tipli viskoelastik dalga denkleminin çözümlerinin patlamasını ve azalmasını elde etmişlerdir.

Wu (2019)

$$|u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = b\,|u|^{p-2} u$$

viskoelastik dalga denkleminin çözümlerinin patlamasını çalışmıştır.

Kafini ve Messaoudi (2019)

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} + \mu_2 u_t(x,t-\tau)\,|u_t|^{m(x)-2}(x,t-\tau) = bu\,|u|^{p(x)-2}$$

denklemin çözümlerinin azalmasını ve patlamasını çalışmışlardır.

Kafini ve Messaoudi (2020a)

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-2} u$$

denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ve pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını ispatlamışlardır.

Kafini ve Messaoudi (2020b)

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t (x, t-\tau) = u |u|^{p-2} \ln |u|^k$$

denkleminin çözümlerinin lokal varlık ve patlamasını ele almışlardır.

Choucha vd., (2020)

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u - \omega \Delta u_t + \int_0^t \omega (t-\tau) \Delta u (\tau) d\tau \\ & + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2 (\tau)| u_t (x, t-\tau) d\tau \\ = \; & b |u|^{p-2} u \end{aligned}$$

denklemin çözümlerinin üstel büyümesini ispatlamışlardır.

Park (2020)

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t + \beta u_t (x, t-\tau) = u \ln |u|^{\gamma}$$

denkleminin çözümlerinin global varlık, enerji azalması ve patlama özelliklerini ele almıştır.

Pişkin ve Yüksekkaya (2020a)

$$\begin{aligned} & |u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{m-2} \nabla u \right) + \int_0^t g (t-s) \Delta u (s) ds \\ & - \Delta u_{tt} + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t (x, t-\tau) \\ = \; & b |u|^{p-2} u \end{aligned}$$

denkleminin çözümlerinin patlamasını ispatlamışlardır.

Pişkin ve Yüksekkaya (2020b)

$$\begin{aligned} & |u_t|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \Delta_p u + \int_0^t g (t-s) \Delta u (s) ds \\ & - \Delta u_{tt} + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t (x, t-\tau) \\ = \; & ku \ln u \end{aligned}$$

denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ispatlamışlardır.

Mezouar vd., (2020)

$$\begin{aligned} & |u_t|^{l} u_{tt} - M \left(\|\nabla u\|^2 \right) \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t h (t-s) \Delta u (s) ds \\ & + \mu_1 g_1 (u_t) + \mu_2 g_2 (u_t (x, t-\tau (t))) \\ = \; & ku \ln |u| \end{aligned}$$

viskoelastik Kirchhoff denkleminin, lokal-global varlığını ayrıca azalmasını elde etmişlerdir.

Rahmoune vd., (2020)

$$\begin{cases} u_{tt} + m_1 u^2 - \Delta u - \omega_1 \Delta u_t + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds \\ +\mu_1 u_t \ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)|\, u_t(x, t-\varrho)\,d\varrho = f_1(u,v), \\ v_{tt} + m_2 v^2 - \Delta v - \omega_2 \Delta v_t + \int_0^t h(t-s)\,\Delta v(s)\,ds \\ +\mu_3 v_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)|\, v_t(x, t-\varrho)\,d\varrho = f_2(u,v) \end{cases}$$

Klein-Gordon sisteminin çözümlerinin üstel büyümesini ispatlamışlardır.

Yüksekkaya ve Pişkin (2021a)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = |u|^{p-2} u$$

Petrovsky denkleminin lokal varlığını yarıgrup metoduyla ve pozitif başlangıç enerjili patlamasını elde etmişlerdir.

Yüksekkaya ve Pişkin (2021b)

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + m^2 u + \mu_1 u_t |u_t|^{r(x)-2} + \mu_2 u_t(x, t-\tau) |u_t(x, t-\tau)|^{r(x)-2} \\ = \ & bu|u|^{p(x)-2} \end{aligned}$$

Klein-Gordon denkleminin çözümlerinin patlamasını ve azalmasını ispatlamışlardır.

Kafini (2021)

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\,ds = u|u|^{p-2} \ln|u|^k$$

denkleminin çözümlerinin lokal-global varlığını ve üstel azalmasını çalışmıştır.

Pişkin ve Yüksekkaya (2021a)

$$u_{tt} + (-\Delta)^m u + \mu_1 u_t |u_t|^{q(x)-2} + \mu_2 u_t(x, t-\tau) |u_t(x, t-\tau)|^{q(x)-2} = bu|u|^{p(x)-2}$$

yüksek mertebeden dalga denkleminin çözümlerinin patlamasını elde etmişlerdir.

Pişkin ve Yüksekkaya (2021b)

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = u|u|^{p-2} \ln|u|^k$$

logaritmik viskoelastik dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ve patlamasını ispatlamışlardır.

Park (2021)

$$\begin{aligned} & u_{tt} - \Delta u + \int_0^t k(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + c_1 |u_t|^{q-2} u_t + c_2 |u_t(t-\tau)|^{q-2} u_t(t-\tau) \\ = \; & |u|^{p-2} u \ln |u| \end{aligned}$$

logaritmik kaynak terimli viskoelastik denklemin çözümlerinin patlamasını çalışmıştır.
Yüksekkaya vd., (2021a)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha u_t + \beta u_t(x, t-\tau) = u \ln |u|^{\gamma}$$

denkleminin çözümlerinin varlığını, yokluğunu ve azalmasını elde ettiler.
Yüksekkaya vd., (2021b)

$$\left(|u_t|^{l-2} u_t\right)_t - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \mu_1 u_t + \mu_2 u_t(x, t-\tau) = u\,|u|^{p-2} \ln |u|^k$$

Kirchhoff denkleminin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.
Yüksekkaya ve Pişkin (2022c)

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u - \Delta u_t + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} \\ & + \mu_2 u_t(x, t-\tau) |u_t(x, t-\tau)|^{m(x)-2} \\ = \; & b u |u|^{p(x)-2} \end{aligned}$$

Timoshenko denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ve patlamasını elde etmişlerdir.
Pişkin ve Yüksekkaya (2022b)

$$u_{tt} - \Delta u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\, ds = u\,|u|^{q-2} \ln |u|^k$$

denkleminin çözümlerinin global varlığını, üstel azalmasını ve patlamasını çalışmışlardır.
Pişkin, Yüksekkaya vd., (2022)

$$\begin{aligned} & |u_t|^{\rho} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_{tt} - \int_0^t h(t-\sigma)\,\Delta^2 u(x, \sigma)\, d\sigma \\ & + \mu_1 u_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, u_t(x, t-s)\, ds \\ = \; & b u \ln u \end{aligned}$$

denkleminin çözümlerinin varlığını ve azalmasını incelemişlerdir.

Yüksekkaya vd., (2022b)

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds \\ +\mu_1 u_t\left(x,t\right) + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right| u_t\left(x,t-\varrho\right)d\varrho = f_1\left(u,v\right), \\ v_{tt} - M\left(\|\nabla v\|^2\right)\Delta v + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta v\left(s\right)ds \\ +\mu_3 v_t\left(x,t\right) + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right| v_t\left(x,t-\varrho\right)d\varrho = f_2\left(u,v\right) \end{cases}$$

viskoelastik Kirchhoff sisteminin çözümlerinin patlamasını ispatlamışlardır.

Ayrıca, gecikmeli terim içermeyen, yukarıda ifade ettiğimiz denklemlere benzer yapılan bazı çalışmalar: Antontsev (2011a, 2011b); Birula ve Mycielski (1975, 1976); Bartkowski ve Gorka (2008); Cazenave ve Haraux (1980); Gao vd., (2011); Ghegal vd., (2020); Gorka (2009); Li (2004); Matsuma ve Ikehata (1996); Messaoudi ve Houari (2007); Messaoudi vd., (2017); Messaoudi vd., (2018); Messaoudi (2020); Ono (1997); Park ve Kang (2019); Pişkin ve Polat (2013); Ye (2013) şeklindedir.

3. ÖN BİLGİLER

Öncelikle, fonksiyonel analiz ile ilgili bazı kavramlar verilecektir. Sonrasında, Lebesgue uzayları, Sobolev uzayları ve bazı önemli eşitlik, eşitsizlik ve teoremler verilecektir. Daha sonra da, değişken üslü Lebesgue uzayı, değişken üslü Sobolev uzayı ve değişken üslü uzaylarla ilgili bazı önemli eşitlik, eşitsizlik ve teoremler verilecektir. En son ise Faedo-Galerkin metodu, Yarıgrup metodu, Georgiev ve Todorova metodu, Logaritmik Konvekslik metodu ve Potansiyel well (derinlik) metoduna yer verilecektir. (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Cruz-Uribe vd., 2003, 2004; Diening vd., 2011; Evans, 1998; Fan vd., 2001; Kesavan, 1989; Kováčik ve Rákosnik, 1991; Pişkin, 2013, 2017; Polat, 2005; Radulescu ve Repovs, 2015).

3.1 Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 V normlu uzayında bir dizi (u_n) olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_V = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in V$ varsa (u_n) dizisine güçlü yakınsak dizi denir ve bu yakınsama $u_n \to u$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2 V normlu uzayında bir dizi (u_n) olsun

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)$$

sağlayan bir $u \in V$ varsa (u_n) dizisine zayıf yakınsak dizi denir ve bu yakınsama $u_n \rightharpoonup u$ veya $u_n \xrightarrow{z} u$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.3 V normlu bir uzay olmak üzere, V üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi V uzayının dual uzayını oluşturur. V' ya da V^* ile gösterilen bu uzay, $\forall f$ fonksiyoneli için

$$\|f\|_{V'} = \sup_{u\in V, u\neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|_V} < \infty$$

normuna sahip bir Banach uzayıdır. V' uzayının duali $(V')' = V''$ biçimindeki lineer vektör uzayıdır ve ikinci dual olarak isimlendirilir.

Tanım 3.1.4 (f_n), V normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olmak üzere, her $x \in V$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

sağlayan bir $f \in V'$ varsa (f_n) dizisine zayıf* yakınsaktır denir ve $f_n \overset{z*}{\to} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.5 V vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $C_1, C_2 > 0$ sabitleri için

$$C_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C_2 \|u\|_1$$

eşitsizliği V uzayındaki her u noktası için sağlanıyorsa, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 3.1.6 (u_n), $(V,\ \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n, m > N_\varepsilon$ olduğunda

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε na bağlı en az bir N_ε doğal sayısı varsa (u_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

3.2 Lebesgue uzayı $\left(L^P(\Omega)\right)$

Tanım 3.2.1 Ω, R^n de bir bölge olsun ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, Ω da tanımlı tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfı

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa $L^p(\Omega)$ uzayı olarak adlandırılır. Bu bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, bu uzay

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna sahip Banach uzayıdır.

Tanım 3.2.2 X ve Y normlu iki uzay olmak üzere, eğer;

I) X in tüm elemanları Y de ise $(X \subset Y)$ ve

II) u dan bağımsız bir c sabiti ve $\forall u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq c \|u\|_X$$

oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

3.3 Sobolev Uzayı $(W^{m,p}(\Omega))$

Tanım 3.3.1 Ω, R^n de bir bölge olsun, m negatif olmayan bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir ve bu uzay $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

normları ile Banach uzayıdır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

3.4 Bazı Önemli Eşitlik, Eşitsizlik ve Teoremler

Lemma 3.4.1 (Young eşitsizliği) Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği ya da

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.4.2 (Hölder eşitsizliği) $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.4.3 (Sobolev-Poincaré eşitsizliği) $2 \leq p < \infty$ $(n = 1, 2)$ ve $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ olsun, bu durumda $C_* = C_*(\Omega, p)$ sabit sayısı ve $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_* \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

sağlanır.

Lemma 3.4.4 (Gronwall eşitsizliği (Diferansiyel form)) $[0, T]$ aralığında, $\eta(t)$ negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan, $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olsun,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda tüm $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds \right)$$

olur.

Lemma 3.4.5 (Gronwall eşitsizliği (İntegral form))

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun, bu durumda hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

sağlanır.

(ii) Özel durum olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds$$

ise, bu durumda her yerde $\xi(t) = 0$ sağlanır.

Lemma 3.4.6 (Green özdeşliği) $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

sağlanır, burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dir.

Teorem 3.4.7 (Komornik eşitsizliği) $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ artmayan bir fonksiyon olsun ve sabit $c > 0$ sayısı $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h(\tau)\, d\tau \leq c h(t)$$

eşitsizliğini sağlasın, bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0)\, e^{1 - \frac{t}{c}}$$

dir, ayrıca

$h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ artmayan bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $c > 0$ sabit sayıları, $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau \leq c h^\alpha(0)\, h(t)$$

eşitsizliğini sağlasın, bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0) \left(\frac{c + \alpha t}{c + \alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

dir (Komornik, 1994).

Teorem 3.4.8 (Nakao eşitsizliği) $\phi(t)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, artmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun ; $w_0 > 0$, $\alpha \geq 0$ ve $t \geq 0$olmak üzere

$$\phi^{1+\alpha}(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1))$$

eşitsizliği sağlansın, bu durumda $\forall t \geq 0$ için

$$\begin{cases} \phi(t) \leq \phi(0) e^{-w_1[t-1]^+}, & \alpha = 0, \\ \phi(t) \leq \left(\phi(0)^{-\alpha} + w_0^{-1}\alpha[t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

sağlanır. Burada $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ ve $w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0-1}\right)$ dır (Nakao, 1977; Nakao, 1978).

Tanım 3.4.9 (**Daralma dönüşümü**) Bir (X, d) metrik uzayında, $T : X \to X$ bir fonksiyon ve $\forall x, y \in X$ olmak üzere

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz sürekli fonksiyon denir. Eğer $0 \leq \alpha < 1$ ise T ye daraltma (büzülme) dönüşümü denir.

Tanım 3.4.10 (**Lipschitz koşulu**) X banach uzayından D kümesinde tanımlanan bir dönüşüm

$$A : D \to X$$

olsun. $\forall x, y \in D$ olmak üzere

$$\|Ax - Ay\| \leq k \|x - y\|$$

$0 \leq k < 1$ koşulunu sağlayan k sayısı varsa A dönüşümüne daralma (büzülme) dönüşümü denir. k sayısına da daralma katsayısı denir. Aynı zamanda bu ifade "Lipschitz koşulu" olarak da adlandırılır.

Teorem 3.4.11 (Banach sabit nokta teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve T daralma dönüşümü olsun. Bu durumda, T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 3.4.12 Bir bilineer $a : H \times H \to R$ formu, $\forall u, v \in H$ için eğer
(i) $|a(u, v)| \leq C|u||v|$ sağlayacak şekilde bir C sabiti varsa, **sürekli**dir,
(ii) $a(v, v) \geq \alpha |v|^2$ sağlayacak şekilde bir $\alpha > 0$ sabiti varsa, **koersiv (coercive)** dir denir (Brezis, 2011).

Teorem 3.4.13 (Lax-Milgram teoremi) Kabul edelim ki $a(u,v)$, H Hilbert uzayında bir sürekli koersiv bilineer form olsun. Herhangi $\varphi \in H^* \subset H$ verilsin, bu durumda $u \in H$ olacak şekilde bir tek elemanı vardır ve

$$a(v,v) = \langle \varphi, v \rangle \, , \forall v \in H$$

olur. Ayrıca, eğer a simetrik ise, bu durumda u

$$u \in H \text{ ve } \frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

özelliğini sağlar (Brezis, 2011). Bu teorem, bir H Hilbert uzayında, sınırlı lineer fonksiyonları temsil eder.

3.5 Değişken Üslü Uzaylar

3.5.1 Temel kavramlar

Tanım 3.5.1.1 Ω, R^n de pozitif ölçümlü bir bölge olsun. Bu durumda

$$p : \Omega \to [1, \infty]$$

ölçülebilir fonksiyonuna *değişken üs* denir. Değişken üslü fonksiyonların ailesi $P(\Omega)$ ile gösterilir.

$$p^- = ess \inf_{x \in \Omega} p(x) \text{ ve } p^+ = ess \sup_{x \in \Omega} p(x)$$

olmak üzere

$$1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq \infty$$

dur. Ayrıca Ω bölgesi

$$\Omega_\infty^{p(.)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$$

$$\Omega_1^{p(.)} = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}$$

$$\Omega_*^{p(.)} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}$$

şeklinde üç kümeye ayrılır. Bu üç küme sırasıyla, $p(.)$ yazılmadan Ω_∞, Ω_1, Ω_* şeklinde de yazılabilir.

Tanım 3.5.1.2 $p(.)$ üs fonksiyonunun eşleneği $p'(.)$ şeklinde gösterilir. Burada $x \in \Omega$ olmak üzere

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

dır. Ayrıca

$$(p'(.))^{+} = \left(p^{-}\right)'$$

$$(p'(.))^{-} = \left(p^{+}\right)'$$

yazılabilir.

Tanım 3.5.1.3 $\Omega \subset R$, $r : \Omega \to R$ olsun. $\forall x, y \in \Omega$ ve $|x-y| < \frac{1}{2}$ için

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{c_0}{-\ln|x-y|}$$

olacak şekilde c_0 sabiti varsa $r(.)$ fonksiyonuna lokal log-Hölder süreklidir denir ve $r(.) \in LH_0(\Omega)$ ile gösterilir.

3.5.2 $L^{p(x)}(\Omega)$ Uzayı

Tanım 3.5.2.1 Ω, R^n de pozitif ölçüme sahip bir bölge olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varrho_{p(.)}(u) &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)} dx + ess \sup_{x \in \Omega_\infty} |u(x)| \\ &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)} dx + \|u(x)\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} < \infty \end{aligned}$$

veya $p^+ < \infty$ ise

$$\varrho_{p(.)}(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $u(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ veya $L^{p(.)}(\Omega)$ ile gösterilir. Burada $\varrho_{p(.)}(u)$ (veya $\varrho(u)$) modular fonksiyoneli olarak isimlendirilir.

Tanım 3.5.2.2 $p^+ < \infty$ ise değişken üslü Lebesgue uzayında norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{p(x)} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \varrho_{p(.)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega} \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norma Luxemburg normu denir. Burada $p(.) = p$ (sabit) olursa klasik Lebesgue uzayındaki norm elde edilir.

3.5.3 $W^{m,p(x)}(\Omega)$ Uzayı

Tanım 3.5.3.1 $\Omega \subset R^n$, m pozitif bir tamsayı, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ çoklu indis ve $p \to [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun

$$W^{m,p(.)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(.)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(.)}(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}$$

uzayına değişken üslü Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p(.)}(\Omega)} = \|u\|_{m,p(.)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p(.)}$$

normu ile Banach uzayıdır.

3.5.4 Değişken üslü uzaylarda bazı önemli eşitlik, eşitsizlik ve teoremler

Teorem 3.5.4.1 (Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q(.) \leq q^+ < \infty$, $\frac{1}{p(.)} + \frac{1}{q(.)} = 1$, $u \in L^{p(.)}(\Omega)$ ve $v \in L^{q(.)}(\Omega)$ olsun, bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) \|u\|_{p(.)} \|v\|_{q(.)}$$

dır. Eğer $\frac{1}{p(.)} + \frac{1}{q(.)} = \frac{1}{r(.)}$, $u \in L^{p(.)}(\Omega)$ ve $v \in L^{q(.)}(\Omega)$ ise

$$\|uv\|_{r(.)} \leq c \|u\|_{p(.)} \|v\|_{q(.)}$$

genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.5.4.2 (Poincaré eşitsizliği) Kabul edelim ki $q(\cdot)$ (4.1.4) koşulunu sağlasın ve Ω, R^n de sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda, $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq c \|\nabla u\|_{p(\cdot)}$$

sağlanır, burada $c = c(p^-, p^+, |\Omega|) > 0$ dır.

Lemma 3.5.4.3 Eğer $p(\cdot) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $q : \Omega \to [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar ise, $ess \inf_{x \in \Omega} (p^*(x) - q(x)) > 0$ dır ve, p^* (4.1.3) denklemini sağlasın, bu durumda

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

gömülmesi, sürekli ve kompakttır.

Lemma 3.5.4.4 Eğer, $p^+ < \infty$ ve $p : \Omega \to [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar ise, bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğundur.

Lemma 3.5.4.5 (Hölder eşitsizliği) $p, q, s \geq 1$, Ω bölgesi üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olsun ve

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)}\ , y \in \Omega$$

sağlansın. Eğer, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $g \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ ise, bu durumda, $fg \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$ dır ve

$$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{q(\cdot)}$$

sağlanır.

Lemma 3.5.4.6 (Birim yuvar özelliği) $p \geq 1$, Ω bölgesi üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1 \text{ ancak ve ancak } \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1$$

dır, burada

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx$$

dır.

Lemma 3.5.4.7 Eğer $p \geq 1$, Ω bölgesi üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise, bu durumda herhangi bir $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $x \in \Omega$ için,

$$\min\left\{ \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} \right\} \leq \varrho_{p(\cdot)}(u) \leq \max\left\{ \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} \right\}$$

sağlanır.

3.6 Faedo-Galerkin Metodu: Bu metot çözümlerin varlığının ispatında kullanılan önemli metotlardan biridir.

Tanım 3.6.1 H, ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun ve f, aşağıda verilen aksiyomları sağlayan sonlu boyutlu vektör uzaylarının bir ailesi olsun: V nin yoğun bir alt uzayı V_n olmak üzere

1. $V_n \subset V$, $boy V_n < \infty$,

2. $V_n < \infty$ iken $V_n \to V$ dir.

Bu durumda, $\forall u \in V_n$ için aşağıda verildiği gibi bir $\{u_n\}_{n \in N^*}$ dizisi bulunabilir:

$n \to \infty$ iken, $\forall n, u_n \in V_n$ için V uzayında $u_n \to u$ olur.

Böylece, V_n uzayı, $n.$ mertebeden bir Galerkin yaklaşımı olarak adlandırılır.

Faedo-Galerkin metodunun şeması:

Ayrılabilir bir V Hilbert uzayında tanımlı bir fonksiyon uzayında, bir (P) probleminin çözümlerinin varlığını bulmak isteyelim. Bu (P) probleminin tek bir çözümü u olsun.

V nin bir V_n Galerkin yaklaşımını seçtikten sonra, sonlu boyutlu (V_n) uzayında, tek bir (u_n) çözümüne sahip yaklaşık bir (P_n) problemini tanımlamamız gerekir. Daha sonra aşağıdaki adımları uygularız:

Adım 1: (P_n) probleminin çözümü u_n olsun.

Adım 2: u_n nin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için u_n üzerinde kestirimler oluştururuz.

Adım 3: u_n nin düzgün sınırlı olmasından dolayı, 2. adımdaki kestirimleri içeren uzayın zayıf topolojisinde, bir limite sahip, $\{u_n\}_{n \in N^*}$ dizisinin bir $\{u'_n\}_{n \in N^*}$ alt dizisini seçmek mümkündür.

Elde edilen limit u olsun.

Adım 4: (P) probleminin çözümünün u olduğunu gösteririz.

Adım 5: Böylece, güçlü yakınsaklık sonuçlarını elde ederiz.

Yaklaşım sürecinin oluşturulmasının esas amacı, bir çözümün varlığının elde edilmesini sağlamaktır, bu süreç $u_n(x,t)$ ya, $(x,t) \in \Omega \times [0;T]$ için

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, w_i$$

olacak şekilde w_i tabanlarının fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu olarak yaklaşmaya tekabül eder.

Başka bir deyişle, bir problem için yaklaşık bir problem tanımlanır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, ele alınan yaklaşık sistemin, lineer olmayan terimleri düzgün olduğundan Zorn Lemması kullanılarak maksimal bir $[0, t_m)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüme sahiptir. Sonraki adım olarak bazı kestirimler elde edilir. Böylece, tüm $t > 0$ için tanımlı bir çözüm oluşturmak için aralık $[0, t_m)$ dışına genişletilebilir (Lions, 1969).

Lemma 3.6.2 (Zorn lemması). Boş olmayan kısmi sıralı bir küme içindeki her zincirin o küme içinde bir üst sınırı varsa, bu kısmi sıralı kümenin bir maksimal elemanı vardır.

Lemma 3.6.3 (Aubin-Lions lemması) X, V, Y uzayları Banach uzayları olsun. $X \hookrightarrow V$ kompakt ve $V \hookrightarrow Y$ sürekli, gömülmeleri $1 \leq p \leq \infty$ ve $q = 1$ veya $p = \infty$ ve $q > 1$ şartları sağlansın. U kümesi $L^p(0, T; X)$ de sınırlı ve $\frac{\partial U}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} : u \in U \right\}$, $L^q(0, T; Y)$ de sınırlı ise U kümesi $L^p(0, T; V)$ de kompakttır (Aubin, 1963; Lions, 1969).

3.7 Yarıgrup Metodu

Yarıgrup metodu evolüsyon denklemlerin çözümlerinin varlığında kullanılan güçlü bir yöntemdir.

3.7.1 Sınırlı olmayan lineer operatörler

Evolüsyon denklem çalışmalarında, yarıgrup teorisinde lineer operatörler önemli bir rol oynamaktadır. V ve W Banach uzayları olsun. V üzerinde tanımlı bir lineer A operatörünün tanım kümesi $D(A)$ olsun.

Tanım 3.7.1.1 $C > 0$ olacak şekilde, her $u \in D(A)$ için, eğer

$$\|Au\|_W \leq C \|u\|_V \tag{3.7.1.1}$$

oluyorsa, A lineer operatörü $A : D(A) \subset V \to W$ **sınırlıdır**. Aksi taktirde,

sınırlı değildir. Eğer $\overline{D(A)} = V$ ise, A operatörü **yoğundur**. Eğer

$$G(A) = \{(u, Au) \,|u \in D(A)\} \subset V \times W \tag{3.7.1.2}$$

grafiği, $V \times W$ nin bir alt uzayı olarak kapalı ise, A lineer operatörü **kapalı** operatördür.

Tanım 3.7.1.2 V bir Hilbert uzayı olsun ve $A : D(A) \subset V \to V$ yoğun lineer bir operatör olsun. Eğer $\forall u, v \in D(A)$ için,

$$(Au, v) = (u, A^* v) \tag{3.7.1.6}$$

ise, A operatörü **simetriktir.** Eğer, $A^* = A$ ise, A operatörü **özeşleniktir.**

Not 3.7.1.3 Bir V Hilbert uzayında, eğer $\forall u \in D(A)$ için $(Au, u) \geq 0$ ise, $A : D(A) \subset V \to V$ operatörü **monotondur;** ve eğer monoton ve $\mathcal{R}(I + A) = V$ ise **maximal monoton** olur.

3.7.2 Üstel dönüşüm

V bir Banach uzayı olsun ve $A : V \to V$ sınırlı lineer bir operatör olsun. $t \geq 0$ için,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), \\ u(0) = u_0 \in V \end{cases} \tag{3.7.2.1}$$

adi diferansiyel denklemini ele alalım. Verilen başlangıç-değer probleminin bir tek çözümü vardır.

$$\exp(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{3.7.2.2}$$

serisi biçiminde tanımlanan lineer dönüşümü ele alalım. Bu seri yakınsaktır ve böylece, V üzerinde sınırlı lineer bir operatör tanımlar. Şimdi,

$$u(t) = e^{tA} u_0 \tag{3.7.2.3}$$

olsun. u nun (3.7.2.1) in çözümü olduğunu doğrulayalım. Öncelikle, $u(0) = u_0$ olduğu açıktır. Şimdi

$$\frac{e^{tA}u_0 - u_0}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k u_0 = Au_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k u_0$$

olur. Böylece, $|t| \to 0$ iken

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k u_0 \right\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|t|^{k-1}}{k!} \|A\|^k \|u_0\| \\ &\leq |t| \|A\|^2 \|u_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \\ &= |t| \|A\|^2 \|u_0\| e^{|t|\|A\|} \to 0\end{aligned}$$

olur. $t, s \in R$ için

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} \tag{3.7.2.4}$$

dir ve

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} e^{tA} \frac{\left(e^{hA} u_0 - u_0\right)}{h} = e^{tA} A u_0 \\ &= A e^{tA} u_0 = A u(t)\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece, (3.7.2.1) başlangıç-değer probleminin çözümü, (3.7.2.4) formunda bir çözümdür.

3.7.3 C_0-yarıgrupları

Tanım 3.7.3.1 V bir Banach uzayı olsun ve V üzerinde sınırlı lineer operatörlerin bir ailesi $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ olsun. Eğer, aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa :
(i). V üzerindeki özdeşlik operatörü, $S(0) = I$ ise,
(ii). $\forall t, s \geq 0$ için, $S(t+s) = S(t) S(s)$ ise,
(iii). $\forall u \in V$ için, $t \to 0^-$ iken,

$$S(t) u \to u$$

ise, bu bir C_0-yarıgrubudur.

Teorem 3.7.3.2 Kabul edelim ki $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, V üzerinde bir C_0-yarıgrubu olsun. Bu durumda, $M \geq 1$ ve ω vardır öyle ki, her $t \geq 0$ için

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \tag{3.7.3.1}$$

dir.

Tanım 3.7.3.3 Eğer $M = 1$ ve $\omega = 0$ ise, böylece $t \geq 0$ için, $\|S(t)\| \leq 1$ dir, böylece $\{S(t)\}$ **daralma (büzülme) yarıgrubu**dur.

Tanım 3.7.3.4 Kabul edelim ki $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, V üzerinde bir C_0-yarıgrubu olsun. Yarıgrubun **sonsuz küçük üreteci**, A lineer bir operatörüdür ve

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in V | \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{S(t)u-u}{t} \right\} \\ Au = \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{S(t)u-u}{t}, \ u \in D(A) \end{cases} \tag{3.7.3.2}$$

sağlanır.

Teorem 3.7.3.5 Kabul edelim ki $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, bir C_0-yarıgrubu olsun ve A sonsuz küçük üreteci olsun. $u \in D(A)$ olsun. Bu durumda,

$$S(t)u \in C^1([0,\infty); V) \cap C([0,\infty); D(A))$$

ve

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au \tag{3.7.3.3}$$

olur.

Not 3.7.3.6 Eğer A, bir $\{S(t)\}$ C_0-yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci ise, bu durumda

$$u(t) = S(t)u_0$$

$t \geq 0$ için,

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.7.3.4}$$

başlangıç-değer probleminin tek çözümüdür.

Teorem 3.7.3.7 Kabul edelim ki A, V üzerinde bir $\{S(t)\}$ C_0-yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci olsun. Bu durumda, herhangi bir $u \in V$ için, $\int_0^t S(\tau)\, u d\tau \in D(A)$ ve

$$A\left(\int_0^t S(\tau)\, u d\tau\right) = S(t)\, u - u \tag{3.7.3.5}$$

olur.

Sonuç 3.7.3.8 Eğer A, bir $\{S(t)\}$ C_0-yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci ise, bu durumda A operatörü kapalı ve yoğundur.

Sonuç 3.7.3.9 Eğer, $\{S(t)\}$ C_0-yarıgrubunun A sonsuz küçük üreteci sınırlı ise, bu durumda $S(t) = e^{tA}$ dır.

3.7.4 Hille-Yosida teoremi

Teorem 3.7.4.1 (Hille-Yosida) Eğer A operatörü

(i) kapalı,

(ii) yoğun,

(iii) $\forall \lambda > 0$ için, $(\lambda I - A)^{-1}$ lineer sınırlı bir operatör ve

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{3.7.4.1}$$

ise, sınırlı olmayan lineer A operatörü, V Banach uzayında daralma yarıgrunun sonsuz küçük bir üretecidir.

Teorem 3.7.4.2 A, $w \geq 0$ için, $\|S(t)\| \leq e^{wt}$ sağlanan bir daralma C_0-yarıgrubunun sonsuz küçük üreteci ise ancak ve ancak A, kapalı ve yoğundur ayrıca, $\forall \lambda > w$ için, $(\lambda I - A)^{-1}$ mevcuttur ve

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq (\lambda - w)^{-1} \tag{3.7.4.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

C_0-yarıgruplarının, sonsuz küçük üreteçlerini tanımlamak için, $\{S(t)\}$, $M \geq 1$, $w \geq 0$ olmak üzere

$$\|S(t)\| \leq M e^{wt} \tag{3.7.4.3}$$

eşitsizliğini sağlar.

3.7.5 Hilbert uzayında daralma yarıgrupları

Kabul edelim ki A, $\{S(t)\}$ daralma yarıgruplarının sonsuz küçük bir üreteci olsun. $u \in D(A)$ olsun. Bu durumda,

$$\|S(t)u\| \leq \|u\|$$

dır. Böylece,

$$(S(t)u - u, u) \leq 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t ye bölüp ve $t \to 0^-$ alırsak, $\forall u \in D(A)$ için

$$(Au, u) \leq 0 \tag{3.7.5.1}$$

olur.

Böylece, A **dissipative (dağıtıcı) operatör** olur. Ayrıca, Hille-Yosida teoreminden, $\mathcal{R}(I - A) = V$ olur, ($I - A$ tersinirdir). Bundan dolayı, A **maximal dissipative** olur.

Teorem 3.7.5.1 A maximal dissipative olsun. Bu durumda, A kapalı ve yoğundur; ve $\forall \lambda > 0$ için, $(\lambda I - A)$ tersinirdir, böylece

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \lambda^{-1} \tag{3.7.5.2}$$

olur.

Teorem 3.7.5.2 A, maximal dissipative bir operatör ve $u_0 \in V$ olsun. Bu durumda, $t > 0$ için

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.7.5.3}$$

başlangıç-değer probleminin bir tek u çözümü vardır ve

$$u \in C([0, \infty); V) \cap C^1((0, \infty); V) \cap C((0, \infty); D(A))$$

sağlanır. Ayrıca

$$\begin{cases} \|u(t)\| \leq \|u_0\|, & t \geq 0, \\ \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\| = \|Au(t)\| \leq \frac{1}{t} \|u_0\|, & t > 0 \end{cases} \tag{3.7.5.4}$$

olur (Kesavan, 1989; Zheng, 2004).

3.8 Georgiev ve Todorova Metodu

Georgiev ve Todorova metodu, 1994 yılında Georgiev ve Todorova (Georgiev and Todorova, 1994) tarafından elde edilmiştir. Bu metodun temel fikri uygun seçilmiş bir $\psi(t)$ fonksiyoneli için

$$\psi'(t) \geq c_1 \psi^{c_2}(t)$$

($c_1 > 0$, $c_2 > 1$, $t \geq 0$) diferansiyel eşitsizliğini elde etmektir. Buradan, $(0, t)$ aralığında integrallenirse

$$\frac{\psi'(t)}{\psi^{c_2}(t)} \geq c_1$$

$$\frac{\psi^{1-c_2}(t)}{1-c_2} - \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{1-c_2} \geq c_1 t$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\psi^{c_2-1}(t) \geq \frac{1}{\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t}$$

elde edilir. Böylece paydayı sıfır yapan

$$\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t = 0$$

$$t = \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{c_1(c_2-1)}$$

zamanında $\psi(t)$ sınırsız olur (Georgiev ve Todorova, 1994; Pişkin, 2021).

3.9 Logaritmik Konveslik Metodu

Çözümlerin patlama olayı genel olarak sonlu zamanda çözümlerin sonsuza ıraksaması ($t \to T^-$ iken $u \to \infty$) olarak düşünülmesine karşın bazı olaylarda çözümler sonsuz zamanda sonsuza ıraksayabilir ($t \to \infty$ iken $u \to \infty$). Bu olaya sonsuz zamandaki blow up veya çözümlerin üstel büyümesi denir. Çözümlerin üstel büyümesi ile ilgili önemli bir metot logaritmik konvekslik metodudur. Bu metot konkavlık metodundaki

$$F''(t) F(t) - (1+\alpha) (F'(t))^2 \geq 0 \tag{3.9.1}$$

koşulunun $\alpha \to 0$ için limiti olarak düşünülebilir. Bu durumda (3.9.1) eşitsizliği

$$F''(t) F(t) - (F'(t))^2 \geq 0 \tag{3.9.2}$$

eşitsizliğine dönüşür. $F(t) > 0$ için (3.9.2) ifadesi $F^2(t)$ ile bölünürse

$$\frac{F''(t) F(t) - (F'(t))^2}{F(t)^2} \geq 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} [\ln F(t)] \geq 0$$

elde edilir. Buradan $F(t)$ nin t değişkenine bağlı logaritmik konveks bir fonksiyon olduğu görülür. Bu ifade $(0,t)$ aralığında integrallenirse

$$F(t) \geq F(0) e^{\frac{F'(0)t}{F(0)}}$$

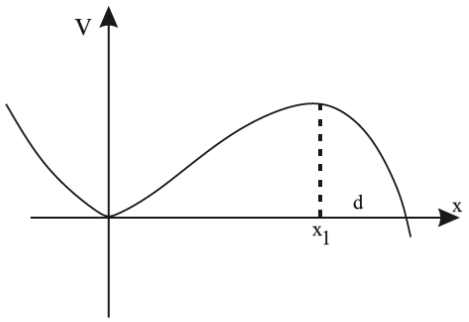
ifadesi elde edilir. Buradan $t \to \infty$ için limit alınırsa $F(t) \to \infty$ olur (Pişkin, 2021; Straughan, 1998).

3.10 Potansiyel Well (Derinlik) Metodu: Genel olarak bu metot denklem çözümlerinin varlığının ispatında kullanılan önemli bir metottur. Potensiyel derinlik metodu, Sattinger tarafından (1968) deki çalışmasında

$$u_{tt} - \Delta u + f(x,u) = 0 \tag{3.10.1}$$

denkleminde ele alınmıştır. Buradaki amaç, problemin global çözümlerinin varlığını ispatlamaktır. Sattinger, (3.10.1) denkleminin, doğrusal olmayan $f(x,u)$

fonksiyonuna bazı ek koşullar ekleyerek global zayıf çözümün varlığını elde etmiştir. Potansiyel well metodu, denklemlerin enerji integralleri üzerine kurulu bazı analizlere dayanmaktadır.



Şekilden de görüleceği gibi

$$W = \{x : \ V(x) < d, \ x < x_1\}$$

kümesi, bir potansiyel derinlik aralığını tanımlar. d potansiyel derinliği

$$d = \inf_{u \in H_0^1} J(\lambda_1 u)$$

olarak tanımlansın. d nin $0 \leq d \leq \infty$ olduğu açıktır. Eğer $d > 0$ ise, potential derinlik

$$W = \left\{u : u \in u \in H_0^1, \ 0 \leq J(\lambda u) < d, \ 0 \leq \lambda \leq 1\right\}$$

olarak tanımlanır.

Payne ve Sattinger (1975) tarafından geliştirilen potansiyel derinlik metodu ile kısmi diferansiyel denklemin global varlığı çalışıldı. Diferansiyel denklemlerin toplam enerjisi, kinetik ve potansiyel enerjinin toplamından oluşur. Potansiyel enerjinin skaler fonksiyonları bulunduğu küme boyunca incelenirse, potansiyel enerjide çukur veya derinlik olarak adlandırabileceğimiz bir d yüksekliği olduğu görülür. d yüksekliği pozitif olduğundan, derinlikte yer alan başlangıç verilerine bağlı çözümler için, çözümün potansiyel enerjisinin derinliği aşamayacağı görülür. Genelde, kaynak terimden gelen enerjinin toplam enerjinin büyüklüğünün sonlu zamanda sonsuza gitmesine (patlamasına) yol açabilir. Fakat derinliğin büyük bir

bölümü zamanla sınırlı olan potansiyel enerji ile sınırlı kalır. Böylece, çözümün toplam enerjisi herhangi bir zaman aralığında sınırlı kalır ve bu da global varlığını gösterir (Payne and Sattinger, 1975; Sattinger, 1968).

4. GECİKMELİ TERİM İÇEREN DEĞİŞKEN ÜSLÜ DENKLEMLER

Birinci kısımda, Antontsev vd., 2021 tarafından çalışılmış olan "Gecikmeli terim içeren değişken üslü $p(x)$-Laplacian denkleminin çözümlerinin patlaması ve azalması" çalışması ele alınmıştır. İkinci kısımda ise, Yüksekkaya vd., (2022a) tarafından çalışılmış olan "Gecikmeli terim içeren değişken üslü bir viskoelastik dalga denkleminin çözümlerinin varlığı ve patlaması" çalışması ele alınmıştır.

Değişken üslü uzayların tarihçesi:

Değişken üslü Lebesgue uzayları literatürde ilk kez Orlicz tarafından 1931 de çalışıldı. Bu uzaylar 1931 de tanımlanmasına karşılık, aktif olarak çalışılmaya başlanması 1990 lı yılların başında olmuştur. Orlicz tarafından 1931 de çalışılan makalede şu soru ele alınmıştır: (p_i) $(p_i > 1$ için) ve (x_i), reel sayılar dizisi olsun öyle ki $\sum_i x_i^{pi}$ yakınsaktır. Peki, $\sum_i x_i y_i$ nin yakınsak olması için (y_i) dizisiyle ilgili yeterli ve gerekli koşullar nelerdir? Cevap: Bazı $\lambda > 0$ ve $p_i' = p_i/(p_i - 1)$ için $\sum_i (\lambda y_i)^{p_i'}$ yakınsak olmalıdır. Bu aslında, $L^{p(.)}$ uzayında Hölder eşitsizliğine karşılık gelir. Orlicz ayrıca, $L^{p(.)}$ değişken üslü fonksiyon uzayını, reel eksen üzerinde ele aldı ve böylece Hölder eşitsizliğini ispatladı.

Sonra, Orlicz kendi adını taşıyan fonksiyon uzayları teorisine çalıştı (Musielak ve Orlicz, 1959). Orlicz uzayları teorisinde, bazı $\lambda > 0$ için

$$\varrho(\lambda u) = \int_\Omega \varphi(\lambda |u(x)|)\, dx < \infty$$

olacak şekilde, $u : \Omega \to R$ ölçülebilir fonksiyonlarını içeren bir L^φ uzayını tanımladı. Nakano (1950, 1951) sistematik olarak, modüler fonksiyon uzaylarını çalıştı. Bu çalışmalarda, Nakano ele aldığı genel uzaylarda, değişken üslü Lebesgue uzaylarından bahseder. Nakano'nun çalışmasının ardından, modüler uzaylar Sapporo (Japonya), Voronezh (SSCB) ve Leiden (Hollanda) gibi önemli araştırmacılar tarafından çalışıldı. Sonra, modüler fonksiyon uzayların daha açık versiyonu Hudzik, Kamińska ve Musielak gibi Polonyalı matematikçiler tarafından çalışıldı.

Reel eksen üzerindeki değişken üslü Lebesgue uzayları, Rus araştırmacılar, özellikle Sharapudinov tarafından geliştirilmiştir. Bu araştırmalar Tsenov'un (1961) tarihli bir makalesinde ele alındı ve Portnov (1966, 1967) tarafından kısaca değinildi. Tsenov tarafından gündeme getirilen ve Sharapudinov (1979, 1983, 1986) tarafından

$$\int_a^b |u(x) - v(x)|^{p(x)}\, dx$$

ele elındı, burada u sabit bir fonksiyondur ve v, $L^{p(\cdot)}([a,b])$ nin sonlu boyutlu bir alt uzayı üzerinde değişkenlik gösterir. 1979'da Sharapudinov ayrıca Lebesgue uzayı için Lüksemburg normunu tanımladı ve eğer $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ şartı sağlanırsa, bu uzayın yansımalı olduğunu gösterdi.
Değişken üs uzaylarının araştırılmasındaki büyük adım, 1990'ların başında, Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada, R^n de Lebesgue ve Sobolev uzaylarının temel özelliklerinin çoğundan bahsedilmiştir.

Daha sonraki yıllarda, standart olmayan büyüme ve koersiv (coercive) koşullara sahip, değişken üs uzayları ve varyasyon integralleri arasında bağlantı yapıldı. Bu standart olmayan varyasyon problemlerinin elektroreolojik akışkanların modellenmesiyle ilgili olduğu da gözlemlenmiştir. Ayrıca, fizik ve mühendislikteki son gelişmeler, bu akışkanların akışkan mekanik özelliklerinin incelenmesini önemli kılmıştır. Daha sonra termoreolojik akışkanlarda ve görüntü işlemede başka uygulamalar ortaya çıkmıştır. Sonuç olarak, değişken üs içeren problemler bilimdeki birçok dalda ortaya çıkar. Örneğin; elastisite teorisi, elektroreolojik akışkanlar ve görüntü işlemede görülür (Diening vd., 2011).

4.1 Gecikmeli Terim İçeren Değişken Üslü $p(x)-$Laplacian Denkleminin Çözümlerinin Patlaması ve Azalması

Electrorheological (ER) akışkanlara karşılık gelen matematiksel modeller, standart olmayan büyüme koşullu denklem türündendir. Non-Newtonian akışkan olarak da bilinen ER akışkanlar, standart olmayan büyüme koşullu denklemlerle ilgili çalışmalar içerisinde ayrı bir öneme sahiptir. Standart olmayan büyüme koşullu ($p(x)$ büyüme koşullu) kısmi diferansiyel denklemlerin uygulama alan-

larında rol alan elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesaplamalar ve Non-Newtonian akışkanların matematiksel modelleri Electrorheological akışkanlardır. ER akışkanların hareketine karşılık gelen temel matematiksel model i) $u_t + \operatorname{div} S(u) + (u.\nabla)\, u + \nabla v = f$ dır. Burada $u : R^{3+1} \to R^3$, akışkanın hızını veren fonksiyonu; $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ gradient operatörünü; $v : R^{3+1} \to R^3$ basınç fonksiyonunu; $f : R^{3+1} \to R^3$ harici kuvvetleri temsil eden fonksiyonunu ve $S : W^{1,1}_{loc} \to R^{3\times 3}$ fonksiyonu da ekstra stres tensörünü gösterir, bu tensör ii) $S(u)(x) = \mu(x)\left(1 + |\nabla u(x)|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \nabla u(x)$ dır, burada $Du : \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^r)$, u fonksiyonunun grandientinin simetrik kısmıdır. (ii) de $p(x) = 2$ iken (i) denklemi boyutlandırılmamış Navier-Stokes denklemine dönüşür. Ayrıca, (i) denklemi bilinen Laplace denklemlerinden daha karmaşık olmasına rağmen, en yüksek mertebeden türeve sahip terim için, $\lambda = 1$ iken iii) $\operatorname{div}\left(\lambda + |\nabla u(x)|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \nabla u(x)$ Laplace denklemlerine oldukça benzerdir. Nitekim dejenere durumda, yani $\lambda = 0$ iken, (iii) ifadesi $p(x)$-Laplace operatörüne dönüşür. $p(x)$-Laplace operatörü,

$$
\begin{aligned}
-\Delta_{p(x)} u &= -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right), \\
\Delta_{p(x)} u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\right]^{\frac{p(x)-2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. ER akışkanlar belirli bir manyetik alanla karşılaştıklarında bu akışkanların parçacıkları hareket esnasında belli bir miktar kütle kaybına uğramaktadırlar. Kaybolan bu kütle miktarını p kuvveti sabit iken $x \in R^n$ nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca eşit kabul etmek zorunluluğu ortaya çıkmakta ve dolayısıyla bu farklı kütle kayıpları hesaba katılamamaktadır. Kaybolan bu kütle miktarını bu şekilde eşit kabul etmek ise bazı fizik, mekanik ve özellikle ER akışkanlarla ilgili problemlere karşılık gelen matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulamamasına sebep olmaktadır. Ancak; p kuvveti $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon şeklinde seçilirse, o zaman $x \in R^n$ nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca ortaya çıkan farklı kütle kayıpları hesaba katılabilmekte bu da matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulabilmesine imkân vermektedir (Rajagopal ve Růžička, 2001; Růžička, 2000).

Bu kısımda

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{p(x)} u + \mu_1 u_t \left|u_t\right|^{m(x)-2} \\ +\mu_2 u_t \left(x, t-\tau\right) \left|u_t \left(x, t-\tau\right)\right|^{m(x)-2} \\ = bu \left|u\right|^{q(x)-2}, & \Omega \times [0,\infty), \\ u\left(x,t\right) = 0, & \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), & \Omega, \\ u_t\left(x,t-\tau\right) = f_0\left(x,t-\tau\right), & \Omega \times (0,\tau) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

başlangıç sınır değer problemini ele alacağız (Antontsev vd., 2021). R^n de Ω, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir, $\tau > 0$ gecikmeli zaman terimidir, μ_1 pozitif bir katsayı, μ_2 reel (gerçel) bir sayı ve $b \geq 0$ bir sabittir. $\Delta_{p(\cdot)} u = \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \nabla u\right)$, $p\left(\cdot\right)$-Laplacian terimi olarak adlandırılır. u_0, u_1, f_0 başlangıç fonksiyonlarıdır.

$p\left(\cdot\right)$, $q\left(\cdot\right)$ ve $m\left(\cdot\right)$, $\overline{\Omega}$ bölgesinde ölçülebilir değişken üs fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$\begin{cases} 2 \leq p^- \leq p\left(x\right) \leq p^+ \leq p^*, \\ 2 \leq q^- \leq q\left(x\right) \leq q^+ \leq q^*, \\ 2 \leq m^- \leq m\left(x\right) \leq m^+ \leq m^* \end{cases} \tag{4.1.2}$$

burada

$$\begin{cases} p^- = ess \inf\limits_{x\in\Omega} p\left(x\right), \quad p^+ = ess \sup\limits_{x\in\Omega} p\left(x\right), \\ q^- = ess \inf\limits_{x\in\Omega} q\left(x\right), \quad q^+ = ess \sup\limits_{x\in\Omega} q\left(x\right), \\ m^- = ess \inf\limits_{x\in\Omega} m\left(x\right), \quad m^+ = ess \sup\limits_{x\in\Omega} m\left(x\right) \end{cases}$$

dir ve

$$p^* = \begin{cases} ess \inf_{x\in\Omega} \frac{np(x)}{(n-p(x))}, & p^+ < n, \\ +\infty, & p^+ > n \end{cases} \tag{4.1.3}$$

olur. Ayrıca, $p\left(\cdot\right)$, $q\left(\cdot\right)$ ve $m\left(\cdot\right)$ Lokal-Hölder süreklilik koşulunu

$$\left|q\left(x\right) - q\left(y\right)\right| \leq -\frac{A}{\log\left|x-y\right|},\ x, y \in \Omega,\ \ \left|x-y\right| < \delta \tag{4.1.4}$$

sağlasın, burada $A > 0$ ve $0 < \delta < 1$ dır.

4.1.1 Çözümlerin patlaması

Burada, $b > 0$ iken, negatif başlangıç enerjisi için, (4.1.1) probleminin çözümlerinin patlamasını ispatlayacağız. Öncelikle, Nicaise ve Pignotti (2006) çalışmasına benzer olarak bir

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t-\tau\rho), \ x \in \Omega, \ \rho \in (0,1), \ t > 0$$

fonksiyon tanımlayalım. Burada $t - \tau\rho = y$ alınırsa $z = u_t(x,y)$ olur. Zincir kuralı uygulanırsa

$$z_t = \frac{\partial u_t(x,y)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial u_t(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u_t(x,y)}{\partial y}$$

ve

$$z_\rho = \frac{\partial u_t(x,y)}{\partial \rho} = \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial u_t(x,y)}{\partial y} = -\tau\frac{\partial u_t(x,y)}{\partial y}$$

bulunur. Böylece

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \ x \in \Omega, \ \rho \in (0,1), \ t > 0$$

olur.

Yukarıdaki dönüşümü kullanarak (4.1.1) problemimiz

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} \\ \quad +\mu_2 z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2} = bu|u|^{q(x)-2}, & \Omega\times(0,\infty), \\ \quad \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & \Omega\times(0,1)\times(0,\infty), \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), & \Omega\times(0,1), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega\times[0,\infty), \\ \quad u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \end{cases} \tag{4.1.1.1}$$

formunda yazılabilir.

Tanım. $T > 0$ olsun. (u,z), (4.1.1.1) probleminin bir çözümü olsun. Böylece,

$t \in [0,T)$ ve $(v,w) \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u \in W^{2,p(.)}([0,T);L^2(\Omega)) \cap W^{1,p(.)}([0,T);H_0^1(\Omega)) \\ \quad \cap L^{\infty}([0,T);H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ u_t \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,T)), \\ z \in W^{1,\infty}([0,1] \times [0,T);L^2(\Omega)) \\ \quad \cap L^{\infty}\left([0,1];L^{m(\cdot)}(\Omega) \cap [0,T)\right) \end{cases} \tag{4.1.1.2}$$

olur,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{tt}(\cdot,t)\, v dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(|\nabla u(\cdot,t)|^{p(\cdot)-2} \nabla u(\cdot,t)\right) v dx \\ & +\mu_1 \int_{\Omega} |u_t(\cdot,t)|^{m(\cdot)-2} u_t(\cdot,t)\, v dx \\ & +\mu_2 \int_{\Omega} |z(\cdot,1,t)|^{m(\cdot)-2} z(\cdot,1,t)\, v dx \\ = \; & b \int_{\Omega} |u(\cdot,t)|^{q(\cdot)-2} u(\cdot,t)\, v dx \end{aligned} \tag{4.1.1.3}$$

ve

$$\tau \int_{\Omega} z_t(\cdot,\rho,t)\, w dx + \int_{\Omega} z_{\rho}(\cdot,\rho,t)\, w dx = 0 \tag{4.1.1.4}$$

sağlanır.

Lemma 4.1.1.1 Varsayalım ki (u,z), (4.1.1.1) probleminin çözümü olsun. Bu durumda, $C_0 > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$E'(t) \leq -C_0 \int_{\Omega} \left(|u_t|^{m(x)} + |z(x,1,t)|^{m(x)}\right) dx \leq 0. \tag{4.1.1.5}$$

İspat. (4.1.1.1) probleminin, birinci denklemini u_t ile çarpıp ve Ω üzerinde integralini alırsak, ikinci denklemini ise $\frac{1}{\tau}\xi(x)|z|^{m(x)-2} z$ ile çarpıp $\Omega \times (0,1)$ üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right. \\ & \left. + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho - b\int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} dx\right] \\ = \; & -\mu_1 \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx - \frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\int_0^1 \xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)-2} z z_{\rho}(x,\rho,t)\, d\rho dx \\ & -\mu_2 \int_{\Omega} u_t z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2} dx. \end{aligned} \tag{4.1.1.6}$$

olur. (4.1.1.6) probleminin sağ tarafındaki son iki terimi için aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\xi(x)\left|z(x,\rho,t)\right|^{m(x)-2}zz_{\rho}(x,\rho,t)\,d\rho dx \\ = & -\frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\xi(x)\left|z(x,\rho,t)\right|^{m(x)}}{m(x)}\right)d\rho dx \\ = & \frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\frac{\xi(x)}{m(x)}\left(\left|z(x,0,t)\right|^{m(x)}-\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}\right)dx \\ = & \int_{\Omega}\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}\left|u_t\right|^{m(x)}dx-\int_{\Omega}\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}. \end{aligned}$$

Son terim için Young eşitsizliği, $q=\frac{m(x)}{m(x)-1}$ ve $q'=m(x)$ kullanırsak

$$\left|u_t\right|\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-1}\leq\frac{1}{m(x)}\left|u_t\right|^{m(x)}+\frac{m(x)-1}{m(x)}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} & -\mu_2\int_{\Omega}u_t z\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-2}dx \\ \leq & \left|\mu_2\right|\left(\int_{\Omega}\frac{1}{m(x)}\left|u_t(t)\right|^{m(x)}dx+\int_{\Omega}\frac{m(x)-1}{m(x)}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx\right) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} \leq & -\int_{\Omega}\left[\mu_1-\left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}+\frac{\left|\mu_2\right|}{m(x)}\right)\right]\left|u_t(t)\right|^{m(x)}dx \\ & -\int_{\Omega}\left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}-\frac{\left|\mu_2\right|(m(x)-1)}{m(x)}\right)\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx \end{aligned}$$

sağlanır. Sonuç olarak, $\forall x\in\overline{\Omega}$ için, (4.1.1.8) bağıntısından,

$$f_1(x)=\mu_1-\left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}+\frac{\left|\mu_2\right|}{m(x)}\right)>0,$$

$$f_2(x)=\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}-\frac{\left|\mu_2\right|(m(x)-1)}{m(x)}>0$$

olur.

$m(x)$ nin sınırlı olması, ve dolayısıyla $\xi(x)$ nın sınırlı olmasından dolayı, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ de sınırlı olur. Herhangi bir $x\in\overline{\Omega}$ için

$$C_0(x)=\min\left\{f_1(x),\ f_2(x)\right\}>0$$

olsun ve $C_0 = \inf_{x\in\overline{\Omega}} C_0(x)$ alalım, bu durumda $C_0(x) \geq C_0 > 0$ olur. Böylece

$$E'(t) \leq -C_0 \left[\int_\Omega |u_t(t)|^{m(x)} dx + \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)} dx \right] \leq 0$$

olur. Böylece, (4.1.1.1) probleminin enerji fonksiyoneli, $t \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho - b \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} dx \end{aligned} \tag{4.1.1.7}$$

olur, burada ξ sürekli bir fonksiyondur ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\tau |\mu_2| (m(x) - 1) < \xi(x) < \tau (\mu_1 m(x) - |\mu_2|), \; x \in \overline{\Omega}. \tag{4.1.1.8}$$

Çözümlerin patlamasını ispatlamak için, $E(0) < 0$ olduğunu varsayalım.

$$H(t) = -E(t) \tag{4.1.1.9}$$

olsun. Buradan

$$H'(t) = -E'(t) \geq 0$$

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq b \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} dx \leq \frac{b}{p^-} \varrho(u) \tag{4.1.1.10}$$

olur ve burada

$$\varrho(u) = \varrho_{q(\cdot)}(u) = \int_\Omega |u|^{q(x)} dx$$

dır.

Lemma 4.1.1.2 Kabul edelim ki Lemma 3.5.4.3 şartları sağlansın. Bu durumda, $C > 1$ için

$$\varrho^{s/q^-}(u) \leq C \left(\|\nabla u\|_{p(\cdot)}^{p^-} + \varrho(u) \right) \tag{4.1.1.11}$$

olur. Bu durumda, herhangi bir $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ve $p^- \leq s \leq q^-$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

i)

$$\|u\|_{q^-}^s \leq C \left(\|\nabla u\|_{p(\cdot)}^{p^-} + \|u\|_{q^-}^{q^-} \right) \tag{4.1.1.12}$$

ii)

$$\begin{aligned}\varrho^{s/q^-}(u) &\leq C\left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \varrho(u)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho\right)\end{aligned} \tag{4.1.1.13}$$

iii)

$$\begin{aligned}\|u\|_{q^-}^s &\leq C\left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{q^-}^{q^-}\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho\right)\end{aligned} \tag{4.1.1.14}$$

dır. (u,z), (4.1.1.1) probleminin bir çözümü olsun, bu durumda

iv)

$$\varrho(u) \geq C\|u\|_{q^-}^{q^-} \tag{4.1.1.15}$$

v)

$$\int_\Omega |u|^{m(x)} dx \leq C\left(\varrho^{m^-/q^-}(u) + \varrho^{m^+/q^-}(u)\right) \tag{4.1.1.16}$$

dır (Messaoudi ve Talahmeh, 2017).

Teorem 4.1.1.3 $u_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ olsun. Farz edelim ki (4.1.4) koşulu sağlansın ve

$$2 \leq \max\{m^+, p^+\} < q^- \leq q(x) \leq q^+ \leq p_*(x)$$

olsun, burada

$$p_*(x) = \begin{cases} \frac{np(x)}{ess\inf_{x\in\Omega}(n-m(x))}, & p^+ < n, \\ +\infty, & p^+ > n \end{cases}$$

dır. Ayrıca, $E(0) < 0$ sağlansın, bu durumda, (4.1.1.1) probleminin çözümleri sonlu bir zamanda patlar.

İspat. Yeterince küçük ε için

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t(x,t)\,dx \tag{4.1.1.17}$$

fonksiyonelini tanımlayalım ve

$$0<\alpha\leq\min\left\{\frac{q^{-}-2}{2q^{-}},\ \frac{q^{-}-m^{+}}{q^{-}\left(m^{+}-1\right)}\right\} \tag{4.1.1.18}$$

olsun. (4.1.1.17) nin türevinden ve (4.1.1.1) probleminin ilk denkleminden

$$\begin{aligned}L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\int_{\Omega}u_t^2dx-\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\\ &+\varepsilon b\int_{\Omega}|u|^{q(x)}dx-\varepsilon\mu_1\int_{\Omega}uu_t(x,t)\left|u_t(x,t)\right|^{m(x)-2}dx\\ &-\varepsilon\mu_2\int_{\Omega}uz(x,1,t)\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-2}dx\end{aligned}$$

elde edilir. $H(t)$ tanımından ve $0<a<1$ için

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq C_0(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\left[\int_{\Omega}|u_t(t)|^{m(x)}dx+\int_{\Omega}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx\right]\\ &+\varepsilon\left((1-a)q^{-}H(t)+\frac{(1-a)q^{-}}{2}\|u_t\|^2\right)\\ &+\varepsilon(1-a)q^{-}\int_{\Omega}\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\\ &+\varepsilon(1-a)q^{-}\int_0^1\int_{\Omega}\frac{\xi(x)\left|z(x,\rho,t)\right|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho\\ &+\varepsilon\int_{\Omega}u_t^2dx-\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx+\varepsilon ab\int_{\Omega}|u|^{q(x)}dx\\ &-\varepsilon\mu_1\int_{\Omega}uu_t(x,t)\left|u_t(x,t)\right|^{m(x)-2}dx\\ &-\varepsilon\mu_2\int_{\Omega}uz(x,1,t)\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-2}dx\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}L'(t) &\geq C_0(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\left[\int_{\Omega}|u_t(t)|^{m(x)}dx+\int_{\Omega}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx\right]\\ &+\varepsilon(1-a)q^{-}H(t)+\varepsilon\frac{(1-a)q^{-}+2}{2}\|u_t\|^2\\ &+\varepsilon\left(\frac{(1-a)q^{-}}{p^{+}}-1\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^{p(x)}dx\\ &+\varepsilon(1-a)q^{-}\int_0^1\int_{\Omega}\frac{\xi(x)\left|z(x,\rho,t)\right|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho+\varepsilon ab\varrho(u)\\ &-\varepsilon\mu_1\int_{\Omega}uu_t(x,t)\left|u_t(x,t)\right|^{m(x)-2}dx\\ &-\varepsilon\mu_2\int_{\Omega}uz(x,1,t)\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-2}dx\end{aligned} \tag{4.1.1.19}$$

olur. Young eşitsizliğinden,

$$\int_\Omega |u_t|^{m(x)-1} |u| \, dx \leq \frac{1}{m^-} \int_\Omega \delta^{m(x)} |u|^{m(x)} \, dx + \frac{m^+ - 1}{m^+} \int_\Omega \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |u_t|^{m(x)} \, dx \tag{4.1.1.20}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)-1} |u| \, dx \\ \leq \; & \frac{1}{m^-} \int_\Omega \delta^{m(x)} |u|^{m(x)} \, dx \\ & + \frac{m^+ - 1}{m^+} \int_\Omega \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |z(x,1,t)|^{m(x)} \, dx \end{aligned} \tag{4.1.1.21}$$

olur. (δ, t ye bağlıdır).

$$\delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = kH^{-\alpha}(t)$$

olsun, burada $k \geq 1$ dir, böylece

$$\int_\Omega \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |u_t|^{m(x)} \, dx = kH^{-\alpha}(t) \int_\Omega |u_t|^{m(x)} \, dx \tag{4.1.1.22}$$

$$\int_\Omega \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |z(x,1,t)|^{m(x)} \, dx = kH^{-\alpha}(t) |z(x,1,t)|^{m(x)} \, dx \tag{4.1.1.23}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_\Omega \delta^{m(x)} |u|^{m(x)} \, dx &= \int_\Omega k^{1-m(x)} H^{\alpha(m(x)-1)}(t) |u|^{m(x)} \, dx \\ &\leq \int_\Omega k^{1-m^-} H^{\alpha\left(m^+-1\right)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} \, dx \end{aligned} \tag{4.1.1.24}$$

sağlanır.

(4.1.1.15) ve (4.1.1.16) dan

$$\begin{aligned} & H^{\alpha\left(m^+-1\right)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} \, dx \\ \leq \; & C \left[(\varrho(u))^{m^-/q^- + \alpha\left(m^+-1\right)} + (\varrho(u))^{m^+/q^- + \alpha\left(m^+-1\right)} \right] \end{aligned} \tag{4.1.1.25}$$

olur. (4.1.1.18) den

$$s = m^- + \alpha q^- \left(m^+ - 1\right) \leq q^- \text{ ve } s = m^+ + \alpha q^- \left(m^+ - 1\right) \leq q^-$$

elde ederiz. Böylece, Lemma 4.1.1.2 den

$$H^{\alpha\left(m^+-1\right)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} \, dx \leq C \left(\|\nabla u\|^{p^-}_{p(\cdot)} + \varrho(u) \right) \tag{4.1.1.26}$$

olur. (4.1.1.20)-(4.1.1.26) dan

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) \left[C_0 - \varepsilon \left(\frac{m^+ - 1}{m^+}\right) ck\right] \int_\Omega |u_t(t)|^{m(x)} dx \\ & + (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) \left[C_0 - \varepsilon \left(\frac{m^+ - 1}{m^+}\right) ck\right] \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)} dx \\ & + \varepsilon \left(\frac{(1-a) q^- - p^+}{p^+} - \frac{C}{m^- k^{(m^- - 1)}}\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \\ & + \varepsilon \left(ab - \frac{C}{m^- k^{m^- - 1}}\right) \varrho(u) \\ & + \varepsilon \frac{(1-a) q^- + 2}{2} \|u_t\|^2 + \varepsilon (1-a) q^- H(t) \\ & + \varepsilon (1-a) q^- \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho \end{aligned} \tag{4.1.1.27}$$

elde ederiz. a yı yeterince küçük seçersek

$$\frac{(1-a) q^- + 2}{2} > 0$$

olur ve k yı yeterince büyük seçersek

$$\frac{(1-a) q^- - p^+}{p^+} - \frac{C}{m^- k^{(m^- - 1)}} > 0 \text{ ve } ab - \frac{C}{m^- k^{(m^- - 1)}} > 0$$

sağlanır. k ve a sabit olduğundan, yeterince küçük ε için,

$$C_0 - \varepsilon \left(\frac{m^+ - 1}{m^+}\right) ck > 0$$

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_\Omega u_0(x) u_1(x) dx > 0$$

dır. Böylece, sabit $\eta > 0$ için, (4.1.1.27)

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \varepsilon\eta \left[H(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|_{p(\cdot)}^{p^-} + \varrho_{p(\cdot)}(u) \right. \\ & \left. + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho \right] \end{aligned} \tag{4.1.1.28}$$

halini alır. Böylece, $\forall t \geq 0$ için

$$L(t) \geq L(0) > 0$$

sağlanır. Şimdi, σ, $\Gamma > 0$ sabitleri için,

$$L'(t) \geq \Gamma L^\sigma(t)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega} uu_t(x,t)\,dx\right| &\leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \\ &\leq C\|u\|_{q^-} \|u_t\|_2\end{aligned}$$

dır, buradan

$$\left|\int_{\Omega} uu_t(x,t)\,dx\right|^{1/(1-\alpha)} \leq C\|u\|_{q^-}^{1/(1-\alpha)} \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)}$$

sağlanır ve Young eşitsizliğinden

$$\left|\int_{\Omega} uu_t(x,t)\,dx\right|^{1/(1-\alpha)} \leq C\left[\|u\|_{q^-}^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\Theta/(1-\alpha)}\right]$$

olur, burada $1/\mu + 1/\Theta = 1$ dır. $\Theta = 2(1-\alpha)$ seçersek

$$\mu/(1-\alpha) = 2/(1-2\alpha) \leq q^-$$

sağlanır. Böylece

$$\left|\int_{\Omega} uu_t(x,t)\,dx\right|^{1/(1-\alpha)} \leq C\left[\|u\|_{q^-}^{s} + \|u_t\|_2^2\right]$$

olur, burada $s = \mu/(1-\alpha)$ dır. (4.1.1.14) ten

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega} uu_t(x,t)\,dx\right|^{1/(1-\alpha)} \\ \leq\ & C\left[|H(t)| + \|u_t(t)\|^2 + \varrho(u)\right. \\ &\left. + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho\right]\end{aligned} \tag{4.1.1.29}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned}L^{1/(1-\alpha)}(t) &= \left[H^{(1-\alpha)}(t) + \varepsilon\int_{\Omega} uu_t(x,t)\,dx\right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{\alpha/(1-\alpha)}\left[H(t) + \left|\int_{\Omega} uu_t dx\right|^{1/(1-\alpha)}\right] \\ &\leq C\left[|H(t)| + \|u_t(t)\|^2 + \varrho(u)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho\right]\end{aligned} \tag{4.1.1.30}$$

dır. Dolayısıyla, $\Psi > 0$ için, (4.1.1.28) den

$$L'(t) \geq \Psi L^{1/(1-\alpha)}(t)$$

elde ederiz. $(0,t)$ için basit bir integral alırsak,

$$L^{\alpha/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Psi\alpha t/(1-\alpha)}$$

olur. Böylece, çözümler sonlu bir T^* zamanda patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Psi\alpha\left[L(0)\right]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.2 Çözümlerin azalması

Bu bölümde, $b=0$ durumu için çözümlerin azalmasını ispatlayacağız. Öncelikle, aşağıda verilen fonksiyonu tanımlayalım:

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho),\ x\in\Omega,\ \rho\in(0,1),\ t>0$$

böylece

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0,\ x\in\Omega,\ \rho\in(0,1),\ t>0$$

olur. Bu dönüşümü kullanırsak, (4.1.1) problemi

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + \mu_1 u_t |u_t|^{m(x)-2} & \\ \quad +\mu_2 z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2} = 0, & \Omega\times(0,\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & \Omega\times(0,1)\times(0,\infty), \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), & \Omega\times(0,1), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega\times[0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \end{cases} \tag{4.1.2.1}$$

halini alır. (4.1.2.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx + \int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho \tag{4.1.2.2}$$

şeklindedir, burada, ξ, (4.1.1.8) deki gibi sürekli bir fonksiyondur ve $t\geq 0$ dır. Lemma 4.1.1.1 e benzer olarak, $\mu_1 > |\mu_2|$ ve $C_0>0$ için,

$$E'(t) \leq -C_0\int_\Omega \left(|u_t|^{m(x)} + |z(x,1,t)|^{m(x)}\right)dx \leq 0 \tag{4.1.2.3}$$

olur.

Lemma 4.1.2.1 $F(t)$ fonksiyonu

$$F(t) = \tau \int_0^1 \int_\Omega e^{-\rho\tau} \xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)} dx d\rho$$

olsun, bu durumda

$$F'(t) \leq \int_\Omega \xi(x) |u_t|^{m(x)} dx - \tau e^{-\tau} \int_0^1 \int_\Omega \xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)} dx d\rho$$

sağlanır (Kafini ve Messaoudi, 2019).

Lemma 4.1.2.2 u, (4.1.2.1) probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda, $C > 0$ için

$$\varrho_{p(x)}(\nabla u) \geq C \|\nabla u\|_{p^-}^{p^+} \tag{4.1.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi vd., 2018).

Teorem 4.1.2.3 $u_0 \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ ve $m(\cdot)$, $p(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$ olsun. Farzedelim ki (4.1.4) koşulu sağlansın ve

$$2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ \leq p^{-^*}, \forall x \in C\left(\overline{\Omega}\right)$$

olsun, burada

$$p^{-^*} = \begin{cases} ess\inf_{x\in\Omega} \frac{np^-}{(n-p^-)}, & p^- < n, \\ +\infty, & p^- \geq n \end{cases}$$

dır. Bu durumda, t den bağımsız c, $\alpha > 0$ sabitleri için, (4.1.2.1) probleminin çözümleri

$$\begin{cases} E(t) \leq ce^{-\alpha t}, & m(x) = 2, \\ E(t) \leq cE(0) / (1+t)^{2/\left(m^+-2\right)}, & m^+ > 2 \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. (4.1.2.1) probleminin, $r>0$ için, ilk denklemi $uE^{r}(t)$ ile çarpılıp ve $s<T$ iken $\Omega\times(s,T)$ bölgesi üzerinde integral alırsak

$$\begin{aligned}&\int_{s}^{T}E^{r}(t)\int_{\Omega}\left[\begin{array}{c}uu_{tt}-u\operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\nabla u\right)\\+\mu_{1}uu_{t}\left|u_{t}\right|^{m(x)-2}\\+\mu_{2}uz\left(x,1,t\right)\left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)-2}\end{array}\right]dxdt\\=\;&0\end{aligned}$$

elde ederiz, buradan

$$\begin{aligned}&\int_{s}^{T}E^{r}(t)\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\frac{d}{dt}\left(uu_{t}\right)+\mu_{1}uu_{t}\left(x,t\right)\left|u_{t}\left(x,t\right)\right|^{m(x)-2}\\-u_{t}^{2}+\left|\nabla u\right|^{p(x)}\\+\mu_{2}uz\left(x,1,t\right)\left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)-2}\end{array}\right)dxdt\\=\;&0\end{aligned}\tag{4.1.2.5}$$

sağlanır. Enerji fonksiyoneli $E(t)$ ve

$$\frac{d}{dt}\left(E^{r}(t)\int_{\Omega}uu_{t}dx\right)=rE^{r-1}(t)E'(t)\int_{\Omega}uu_{t}dx+E^{r}(t)\frac{d}{dt}\int_{\Omega}uu_{t}dx$$

eşitliğinden, (4.1.2.5) denklemi

$$\begin{aligned}&2\int_{s}^{T}E^{r+1}(t)\,dt\\\leq\;&-\int_{s}^{T}\frac{d}{dt}\left(E^{r}(t)\int_{\Omega}uu_{t}dx\right)dt+r\int_{s}^{T}E^{r-1}(t)E'(t)\int_{\Omega}uu_{t}dxdt\\&+2\int_{s}^{T}E^{r}(t)\int_{\Omega}u_{t}^{2}dxdt-\mu_{1}\int_{s}^{T}E^{r}(t)\int_{\Omega}uu_{t}\left|u_{t}\right|^{m(x)-2}dxdt\\&-\mu_{2}\int_{s}^{T}E^{r}(t)\int_{\Omega}uz\left(x,1,t\right)\left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)-2}dxdt\\&+2\int_{s}^{T}E^{r}(t)\int_{0}^{1}\int_{\Omega}\frac{\xi(x)\left|z\left(x,\rho,t\right)\right|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho dt\end{aligned}\tag{4.1.2.6}$$

halini alır. Şimdi, (4.1.2.6) denkleminin sağ tarafındaki terimler için sırasıyla kestirimler elde edelim:

İlk terim:

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_s^T \frac{d}{dt}\left(E^r(t)\int_\Omega uu_t dx\right)dt\right| \\
=\;&\left|E^r(s)\int_\Omega uu_t(x,s)\,dx - E^r(T)\int_\Omega uu_t(x,T)\,dx\right| \\
\leq\;&\frac{1}{2}E^r(s)\left[\int_\Omega u^2(x,s)\,dx+\int_\Omega u_t^2(x,s)\,dx\right] \\
&+\frac{1}{2}E^r(T)\left[\int_\Omega u^2(x,T)\,dx+\int_\Omega u_t^2(x,T)\,dx\right] \\
\leq\;&E^r(s)\left[\frac{1}{2}c_*\int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2\,dx+E(s)\right] \\
&+E^r(T)\left[\frac{1}{2}c_*\int_\Omega |\nabla u(x,T)|^2\,dx+E(T)\right]
\end{aligned}$$

olur, burada c_* gömülme sabitidir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_s^T \frac{d}{dt}\left(E^r(t)\int_\Omega uu_t dx\right)dt\right| \\
\leq\;&E^r(s)\left[c\|\nabla u(s)\|_{p^-}^2+E(s)\right] \\
&+E^r(T)\left[c\|\nabla u(T)\|_{p^-}^2+E(T)\right] \\
\leq\;&E^{r+1}(s)+cE^r(s)\left(\|\nabla u(s)\|_{p^-}^{p^+}\right)^{\frac{2}{p^+}} \\
&+E^{r+1}(T)+cE^r(T)\left(\|\nabla u(T)\|_{p^-}^{p^+}\right)^{\frac{2}{p^+}}
\end{aligned}$$

elde ederiz, burada c pozitif bir sabittir. (4.1.2.4) ve $E(t)$ nin artmayan bir fonksiyon olmasından

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_s^T \frac{d}{dt}\left(E^r(t)\int_\Omega uu_t dx\right)dt\right| \\
\leq\;&E^{r+1}(s)+cE^r(s)\left(\varrho_{p(x)}(\nabla u(s))\right)^{\frac{2}{p^+}} \\
&+E^{r+1}(T)+cE^r(T)\left(\varrho_{p(x)}(\nabla u(T))\right)^{\frac{2}{p^+}} \\
\leq\;&E^{r+1}(s)+c\left(E(s)\right)^{r+\frac{2}{p^+}}+E^{r+1}(T)+c\left(E(T)\right)^{r+\frac{2}{p^+}} \\
\leq\;&E^{r+1}(s)+c\left(E(s)\right)^{r+\frac{2}{p^+}} \qquad (4.1.2.7)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikte, $p^- > 2$ için, Hölder eşitsizliğinden

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq |\Omega|^{\frac{p^- -2}{p^-}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p^-}\,dx\right)^{\frac{2}{p^-}}$$

olur. (4.1.2.7) eşitsizliği, $p^- = 2$ durumu için de sağlanır.

Benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\left| r\int_s^T E^{r-1}(t)\,E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt \right| \\
\leq\ & -c\int_s^T E^{r-1}(t)\,E'(t)\left[E(T)+cE^{\frac{2}{p^+}}(t)\right]dt \\
\leq\ & -c\left[\int_s^T E^{r}(t)\,E'(t)+\int_s^T (E(t))^{r+\frac{2}{p^+}-1}E'(t)\,dt\right] \\
\leq\ & c\left[E^{r+1}(s)+(E(s))^{r+\frac{2}{p^+}}\right] \qquad (4.1.2.8)
\end{aligned}$$

olur.

Diğer terim için

$$\begin{aligned}
\Omega_+ &= \{x\in\Omega,\ |u_t(x,t)|\geq 1\},\\
\Omega_- &= \{x\in\Omega\ ,\ |u_t(x,t)|<1\}
\end{aligned}$$

alalım, Hölder ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_s^T E^{r}(t)\int_\Omega u_t^2 dxdt\right| \\
=\ & \left|2\int_s^T E^{r}(t)\left[\int_{\Omega_+} u_t^2 dx+\int_{\Omega_-} u_t^2 dx\right]dt\right| \\
\leq\ & c\int_s^T E^{r}(t)\left[\left(\int_{\Omega_+}|u_t|^{m^-}dx\right)^{2/m^-}\right. \\
& \left.+\left(\int_{\Omega_-}|u_t|^{m^+}dx\right)^{2/m^+}\right]dt \\
\leq\ & c\int_s^T E^{r}(t)\left[\left(\int_{\Omega}|u_t|^{m(x)}dx\right)^{2/m^-}\right. \\
& \left.+\left(\int_{\Omega}|u_t|^{m(x)}dx\right)^{2/m^+}\right]dt \\
\leq\ & c\int_s^T E^{r}(t)\left[(-E'(t))^{2/m^-}+(-E'(t))^{2/m^+}\right]dt \\
\leq\ & c\varepsilon\int_s^T (E(t))^{rm^-/(m^--2)}\,dt+c_\varepsilon\int_s^T(-E'(t))\,dt \\
& +c\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt+c_\varepsilon\int_s^T(-E'(t))^{2(r+1)/m^+}dt
\end{aligned}$$

olur, burada $c_\varepsilon=\frac{1}{r+1}\left(\frac{\varepsilon(r+1)}{r}\right)^{-r}$ dır.

$r=m^+/2-1$ alınırsa, $\frac{rm^-}{m^--2}=r+1+\frac{m^+-m^-}{m^--2}$ olur. Şimdi, $m^->2$ ve $m^-=2$ durumlarını ele alalım.

$m^- > 2$ için,

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_s^T E^r(t)\int_\Omega u_t^2 dxdt\right| \\
\leq\ & c\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + c\varepsilon\left(E(0)\right)^{\frac{m^+-m^-}{m^--2}}\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + c_\varepsilon E(s) \\
\leq\ & \widetilde{c}\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + c_\varepsilon E(s) \qquad (4.1.2.9)
\end{aligned}$$

sağlanır, burada $\widetilde{c}$ pozitif bir sabittir.

$m^- = 2$ için,

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_s^T E^r(t)\int_\Omega u_t^2 dxdt\right| \\
=\ & \left|2\int_s^T E^r(t)\left[\int_{\Omega_+} u_t^2 dx + \int_{\Omega_-} u_t^2 dx\right]dt\right| \\
\leq\ & c\int_s^T E^r(t)\left[\int_{\Omega_+}|u_t|^{m(x)}dx + \left(\int_{\Omega_-}|u_t|^{m^+}dx\right)^{2/m^+}\right]dt \\
\leq\ & c\int_s^T E^r(t)\left[\int_{\Omega}|u_t|^{m(x)}dx + \left(\int_{\Omega}|u_t|^{m(x)}dx\right)^{2/m^+}\right]dt \\
\leq\ & c\int_s^T E^r(t)\left(-E'(t)\right)dt + c\int_s^T E^r(t)\left(-E'(t)\right)^{2/m^+}dt \\
\leq\ & cE^{r+1}(s) + c\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + c_\varepsilon\int_s^T\left(-E'(t)\right)^{2(r+1)/m^+}dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece, $r = m^+/2 - 1$ seçersek

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_s^T E^r(t)\int_\Omega u_t^2 dxdt\right| \\
\leq\ & cE^{r+1}(s) + c\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + c_\varepsilon E(s) \\
\leq\ & c\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + \left(c_\varepsilon + cE^r(0)\right)E(s) \\
\leq\ & c\varepsilon\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + \widetilde{c}_\varepsilon E(s) \qquad (4.1.2.10)
\end{aligned}$$

olur, burada $\widetilde{c}_\varepsilon = c_\varepsilon + cE^r(0)$ dır.

$m^+ \geq p^+$ ve $r = \frac{m^+}{2} - 1$ olduğundan, $r + \frac{2}{p^+} - 1 \geq 0$ olur. Böylece, (4.1.2.7) ve

(4.1.2.8) kestirimleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\left|-\int_s^T \frac{d}{dt}\left(E^r(t)\int_\Omega uu_t dx\right)dt\right| \\
\leq\ & E^{r+1}(s)+c\left(E(s)\right)^{r+\frac{2}{p^+}} \\
\leq\ & \left[E^r(0)+c\left(E(0)\right)^{r+\frac{2}{p^+}-1}\right]E(s) \\
=\ & \widetilde{c}E(s) \qquad (4.1.2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|r\int_s^T E^{r-1}(t)E'(t)\int_\Omega uu_t dxdt\right| \\
\leq\ & c\left[E^{r+1}(s)+\left(E(s)\right)^{r+\frac{2}{p^+}}\right] \\
\leq\ & c\left[E^r(0)+\left(E(0)\right)^{r+\frac{2}{p^+}-1}\right]E(s) \\
=\ & \widetilde{c}E(s) \qquad (4.1.2.12)
\end{aligned}$$

olur.

Diğer terim için, Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|-\mu_1\int_s^T E^r(t)\int_\Omega u\left|u_t\right|^{m(x)-1}dxdt\right| \\
\leq\ & \varepsilon\int_s^T E^r(t)\int_\Omega |u|^{m(x)}dxdt \\
&+c\int_s^T E^r(t)\int_\Omega c_\varepsilon(x)\left|u_t\right|^{m(x)}dxdt \\
\leq\ & \varepsilon\int_s^T E^r(t)\left[\int_{\Omega_+}|u|^{m^-}dx+\int_{\Omega_-}|u|^{m^+}dx\right]dt \\
&+c\int_s^T E^r(t)\int_\Omega c_\varepsilon(x)\left|u_t\right|^{m(x)}dxdt
\end{aligned}$$

olur, burada

$$p(x)=\frac{m(x)}{m(x)-1} \text{ ve } p'(x)=m(x)$$

dır ve böylece

$$c_\varepsilon(x)=(m(x)-1)\,m(x)^{m(x)/(1-m(x))}\,\varepsilon^{1/(1-m(x))}$$

olur.

Gömülmeden

$$\begin{aligned}
&\left|-\mu_1\int_s^T E^r(t)\int_\Omega u\left|u_t\right|^{m(x)-1}dxdt\right| \\
\leq\ & \varepsilon\int_s^T E^r(t)\left[c_1\left\|\nabla u\right\|_{p^-}^{m^-}+c_2\left\|\nabla u\right\|_{p^-}^{m^+}\right] \\
&+\int_s^T E^r(t)\int_\Omega c_\varepsilon(x)\left|u_t\right|^{m(x)}dx
\end{aligned}$$

olur, burada c_1 ve c_2, ε dan bağımsız pozitif sabitlerdir.

(4.1.2.2) ve (4.1.2.4) ten,

$$\begin{aligned}
& \left| -\mu_1 \int_s^T E^r(t) \int_\Omega u |u_t|^{m(x)-1} dxdt \right| \\
\leq\ & \varepsilon \int_s^T E^r(t) \left[c_1 \left(\varrho_{p(x)}(\nabla u) \right)^{\frac{m^-}{p^+}} + c_2 \left(\varrho_{p(x)}(\nabla u) \right)^{\frac{m^+}{p^+}} \right] dt \\
& + c \int_s^T E^r(t) \int_\Omega c_\varepsilon(x) |u_t|^{m(x)} dxdt \\
\leq\ & \varepsilon c_1' \int_s^T E^{r+1}(t) \left(E(t) \right)^{\frac{m^-}{p^+}-1} dt + \varepsilon c_2' \int_s^T E^{r+1}(t) \left(E(t) \right)^{\frac{m^+}{p^+}-1} dt \\
& + c \int_s^T E^r(t) \int_\Omega c_\varepsilon(x) |u_t|^{m(x)} dxdt \\
\leq\ & c' \varepsilon \left(\left(E(0) \right)^{\frac{m^-}{p^+}-1} + \left(E(0) \right)^{\frac{m^+}{p^+}-1} \right) \int_s^T E^{r+1}(t) dt \\
& + \int_s^T E^r(t) \int_\Omega c_\varepsilon(x) |u_t|^{m(x)} dxdt
\end{aligned} \tag{4.1.2.13}$$

elde ederiz, burada c', c_1' ve c_2' pozitif sabitlerdir.

Benzer olarak, (4.1.2.6) nin diğer terimi

$$\begin{aligned}
& \left| -\mu_2 \int_s^T E^r(t) \int_\Omega u |z(x,1,t)|^{m(x)-1} dxdt \right| \\
\leq\ & \varepsilon \int_s^T E^r(t) \left[c_1 \left(\varrho_{p(x)}(\nabla u) \right)^{\frac{m^-}{p^+}} + c_2 \left(\varrho_{p(x)}(\nabla u) \right)^{\frac{m^+}{p^+}} \right] dt \\
& + c \int_s^T E^r(t) \int_\Omega c_\varepsilon(x) |z(x,1,t)|^{m(x)} dxdt \\
\leq\ & c' \varepsilon \left(\left(E(0) \right)^{\frac{m^-}{p^+}-1} + \left(E(0) \right)^{\frac{m^+}{p^+}-1} \right) \int_s^T E^{r+1}(t) dt \\
& + c \int_s^T E^r(t) \int_\Omega c_\varepsilon(x) |z(x,1,t)|^{m(x)} dxdt
\end{aligned} \tag{4.1.2.14}$$

olur. (4.1.2.6) nin son terimi için, Lemma 4.1.2.1 den

$$\begin{aligned}
& 2\int_s^T E^r(t)\int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho dt \\
\leq\ & \frac{2}{m^-}\int_s^T E^r(t)\int_0^1\int_\Omega \xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}\,dxd\rho dt \\
\leq\ & -\frac{2\tau}{m^-}\int_s^T E^r(t)\frac{d}{dt}\left(\int_0^1\int_\Omega e^{-\rho\tau}\xi(x)\,|z|^{m(x)}\,dxd\rho\right)dt \\
& +\frac{2}{m^-}\int_s^T E^r(t)\int_\Omega \xi(x)\,|u_t|^{m(x)}\,dxdt \\
\leq\ & -\frac{2\tau}{m^-}\left[E^r(t)\int_0^1\int_\Omega e^{-\rho\tau}\xi(x)\,|z|^{m(x)}\,dxd\rho\right]_{t=s}^{t=T} \\
& +\frac{2}{m^-}\int_s^T E^r(t)\int_\Omega \xi(x)\,|u_t|^{m(x)}\,dxdt
\end{aligned}$$

olur. $\xi(x)$ sınırlı olduğundan, $c^*>0$ için, (4.1.2.2) den

$$\begin{aligned}
& 2\int_s^T E^r(t)\int_0^1\int_\Omega \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho dt \\
\leq\ & \frac{2\tau e^{-\tau}}{m^-}E^r(s)E(s)+\frac{2c}{m^-}E^{r+1}(T) \\
\leq\ & \frac{2\tau e^{-\tau}}{m^-}E^r(0)E(s)+\frac{2c}{m^-}E^r(T)E(s)\leq c^*E(s) \qquad (4.1.2.15)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(4.1.2.6)-(4.1.2.15) ten

$$\begin{aligned}
& \int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \\
\leq\ & c\varepsilon\left(1+(E(0))^{\frac{m^-}{p^+}-1}+(E(0))^{\frac{m^+}{p^+}-1}\right)\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \\
& +cE(s)+c\int_s^T E^r(t)\int_\Omega c_\varepsilon(x)\,|z(x,1,t)|^{m(x)}\,dxdt \qquad (4.1.2.16)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$c\varepsilon\left(1+(E(0))^{\frac{m^-}{p^+}-1}+(E(0))^{\frac{m^+}{p^+}-1}\right)<1$$

olur. Bu durumda

$$\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt\leq cE(s)+c\int_s^T E^r(t)\int_\Omega c_\varepsilon(x)\,|z(x,1,t)|^{m(x)}\,dxdt$$

olur.

ε sabit olduğundan, $c_{\varepsilon}(x) \leq M$ olur, çünkü $m(x)$ sınırlıdır. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_s^T E^{r+1}(t)\,dt &\leq cE(s) + cM\int_s^T E^r(t)\int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)}\,dxdt \\
&\leq cE(s) - C_0M\int_s^T E^r(t)\,E'(t)\,dt \\
&\leq cE(s) + \frac{C_0M}{r+1}\left(E^{r+1}(s) - E^{r+1}(T)\right) \\
&\leq cE(s) \qquad (4.1.2.17)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $T \to \infty$ iken

$$\int_s^\infty E^{\frac{m^+}{2}}(t)\,dt \leq cE(s)$$

olur. Böylece, Komornik Lemmasından ($\sigma = r = m^+/2 - 1$ dır) istenen sonuç elde edilir.

4.2 Gecikmeli Terim İçeren Değişken Üslü Viskoelastik Bir Dalga Denkleminin Çözümlerin Varlığı ve Patlaması

Tamamen elastik bir malzeme, mekanik enerjiyi dağılmadan depolama kapasitesine sahiptir. Tam elastik bir malzemenin zıttı, viskoz bir malzemedir. Viskoz malzemelerle ilgili önemli olan unsur, kuvvet kaldırıldığında eski şekline dönmezler. Bu iki teorinin kapsamı dışında kalan malzemeler, onları deforme etmek için yapılan çalışmaların tamamı olmasa da bir kısmının geri kazanılabileceği malzemeler olacaktır. Bu tür malzemeler, mekanik enerjiyi depolama ve dağıtma kapasitesine sahiptir. Bunlar viskoelastik malzemelerdir. Viskoelastik malzemelerin dinamik özellikleri, doğa bilimlerindeki birçok uygulamada ortaya çıktıkları için büyük öneme sahiptirler. Son yıllarda, pek çok araştırmacı, uzun bir süredir bu maddelere dikkat çekmiş ve çok ilerleme kaydetmişlerdir (Guo vd., 2015). Viskoelastik malzemeler doğal sönümleme özelliğine sahiptirler, bu malzemelerin geçmiş olayları muhafaza etme özelliğinden kaynaklanmaktadır. Matematiksel açıdan bakıldığında, bu sönümleme etkileri integro-diferansiyel operatörler tarafından modellenir. Basit bir örnek

$$u_{tt} - \Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,dx = 0$$

viskoelastik denklemidir. Denklemdeki konvolüsyon (memory) terim, herhangi bir t anındaki gerilimin, malzemenin 0 dan t ye kadar, maruz kaldığı gerinimlerin geçmişine bağlı olduğunu ifade eder.

Bu kısımda

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds + \mu_1 u_t\left(x,t\right)\left|u_t\right|^{m(x)-2}\left(x,t\right) \\ &+ \mu_2 u_t\left(x,t-\tau\right)\left|u_t\right|^{m(x)-2}\left(x,t-\tau\right) \\ &= bu\left|u\right|^{p(x)-2},\ \Omega\times(0,\infty) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

gecikmeli terim içeren değişken üslü viskoelastik dalga denklemini ele alalım, sınır koşulları

$$u\left(x,t\right) = 0\,,\ \partial\Omega\times(0,\infty) \tag{4.2.2}$$

ve başlangıç koşulları

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ \Omega,$$
$$u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau),\ \Omega \times (0,\tau) \tag{4.2.3}$$

şeklindedir, burada Ω, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip, R^n de sınırlı bir bölgedir ve $n \geq 1$ dir. $\tau > 0$ zaman gecikmesini, μ_1 pozitif bir sabiti, μ_2 reel bir sayıyı, ve $b \geq 0$ pozitif bir sabiti gösterir. u_0, u_1, f_0 başlangıç fonksiyonlarıdır.
$m(\cdot)$ ve $p(\cdot)$, $\overline{\Omega}$ de değişken üslü sürekli fonksiyonlardır ve

$$\begin{cases} 2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ \leq m^*, \\ 2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq p^* \end{cases} \tag{4.2.4}$$

sağlanır, burada

$$m^- = ess\inf_{x\in\Omega} m(x), \quad m^+ = ess\sup_{x\in\Omega} m(x),$$
$$p^- = ess\inf_{x\in\Omega} p(x), \quad p^+ = ess\sup_{x\in\Omega} p(x)$$

ve

$$\begin{cases} 2 \leq m^*, p^* < \infty, & n < 3, \\ 2 \leq m^*, p^* \leq \frac{2n}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

olur.

Farzedelim ki $\forall x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{A}{\log|x-y|} \text{ ve } |m(x) - m(y)| \leq -\frac{B}{\log|x-y|} \tag{4.2.5}$$

Lokal-Hölder koşulu sağlansın, burada $A, B > 0$ ve $0 < \delta < 1$, $|x-y| < \delta$ dır.

Şimdi, gerekli varsayımları verelim:

(A1) $g : [0,\infty) \to (0,\infty)$ artmayan ve diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun, bu durumda

$$1 - \int_0^\infty g(s)\,ds = l > 0$$

sağlanır,

(A2) $g(s) \geq 0$, $g'(s) \leq 0$ ve $0 < a < 1$ için

$$\int_0^\infty g(s)\,ds < \frac{(1-a)\,p^- - 2 - \frac{2C}{m^- k^{1-m^-}}}{(1-a)\,p^- - 2 + \frac{1}{2\lambda}}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-s)\,(\nabla u(s), \nabla u_t(t))\,ds \\ = & -\frac{1}{2}g(t)\,\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\,(g' o \nabla u)(t) \\ & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(go\nabla u)(t) - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u(t)\|^2\right\} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olur, burada

$$(go\nabla u)(t) = \int_0^t g(t-s)\,\|\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2\,ds$$

dır. μ_1 ve μ_2

$$|\mu_2| < \frac{m^-}{m^+}\mu_1 \tag{4.2.7}$$

şartını sağlasın.

Nicaise ve Pignotti (2006), benzer olarak, $x \in \Omega$, $\rho \in (0,1)$, $t > 0$ olmak üzere yeni bir

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t - \tau\rho)$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve $x \in \Omega$, $\rho \in (0,1)$, $t > 0$ için

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0$$

olur. Bu dönüşümden, (4.2.1)-(4.2.3) problemimiz:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \mu_1 u_t(x,t)\,|u_t(x,t)|^{m(x)-2} & \\ +\mu_2 z(x,1,t)\,|z(x,1,t)|^{m(x)-2} = bu\,|u|^{p(x)-2}, & \Omega \times (0,\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0\,, & \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x)\,,\ u_t(x,0) = u_1(x)\,, & \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x, -\tau\rho)\,, & \Omega \times (0,1), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t)\,, & \Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{4.2.8}$$

formuna dönüşür. (4.2.8) denklemimizin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\ &\quad + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho - b\int_\Omega \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

şeklindedir, burada, $t \geq 0$ dır ve

$$\tau|\mu_2|(m(x)-1) < \xi(x) < \tau(\mu_1 m(x) - |\mu_2|),\ x \in \overline{\Omega} \tag{4.2.10}$$

şartı sağlanır.

4.2.1 Çözümlerin varlığı ve tekliği

Daralma dönüşüm teoremi ve Faedo-Galerkin metodundan (4.2.8) probleminin çözümlerinin lokal varlığını elde edeceğiz.

Öncelikle

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds + \mu_1 u_t(x,t)\,|u_t(x,t)|^{m(x)-2} \\ \quad + \mu_2 z(x,1,t)\,|z(x,1,t)|^{m(x)-2} = g(x,t),\ \Omega \times (0,\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \qquad \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, \qquad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\tau\rho), \qquad \Omega \times (0,1), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), \qquad \Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{4.2.1.1}$$

başlangıç-değer problemini ele alalım.

Teorem 4.2.1.1 A(1)-A(2) kabulleri ve (4.2.7) koşulu sağlansın. $g \in L^2(\Omega \times (0,T))$ olsun ve $m(x)$, (4.2.4)-(4.2.5) koşullarını sağlasın. Bu durumda, her $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $f_0 \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,1))$ ve $T > 0$ için, (4.2.1.1) probleminin zayıf tek bir (u,z) çözümü vardır ve

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left((0,T); H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t &\in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,T)), \\ z &\in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,1)) \end{aligned}$$

dir.

İspat.

Varlık: $\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$, $H_0^1(\Omega)$ uzayının bir tabanı (bazı) ve $L^2(\Omega)$ uzayında da ortonormal olsun.

$$V_k = span\{\upsilon_1, \cdots, \upsilon_k\}$$

olarak alınsın ve $\|\upsilon_j\| = 1$ dir, ayrıca, $1 \leq j \leq k$ için, $\varphi_j(x,\rho)$ dizisi

$$\varphi_j(x,0) = \upsilon_j(x)$$

olsun. $L^2(\Omega \times [0,1])$ uzayında, $\varphi_j(x,0)$ dizisi yerine $\varphi_j(x,\rho)$ dizisi alınsın ve $U_k = span\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\}$ olarak alınsın.

$$u^k(t) = \sum_{j=1}^{k} d_j(t)\upsilon_j(x) \text{ ve } z^k(t) = \sum_{j=1}^{k} e_j(t)\varphi_j(x,\rho)$$

olarak verilsin, burada $(u^k(t),\, z^k(t))$

$$\begin{cases} \int_\Omega u_{tt}^k(x,t)\upsilon_j(x)dx + \int_\Omega \nabla u^k(x,t)\nabla\upsilon_j(x)dx \\ -\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\nabla u^k(x,s)\nabla\upsilon_j(x)dsdx \\ +\mu_1\int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2}u_t^k(x,t)\upsilon_j(x)dx \\ +\mu_2\int_\Omega \left|z^k(x,1,t)\right|^{m(x)-2}z^k(x,1,t)\upsilon_j(x)dx \\ = \int_\Omega g(x,t)\upsilon_j(x)dx, \\ u^k(x,0) = u_0^k,\ u_t^k(x,0) = u_1^k, \\ z^k(x,0,t) = u_t^k(x,t),\ \forall i = 1,\cdots,k \end{cases} \tag{4.2.1.2}$$

yaklaşık probleminin çözümleridir ve

$$\begin{cases} \int_\Omega \tau z_t^k(x,\rho,t)\varphi_j dx + \int_\Omega z_\rho^k(x,\rho,t)\varphi_j dx = 0, \\ z^k(0) = z_0^k, \qquad\qquad \forall j = 1,\cdots,k \end{cases} \tag{4.2.1.3}$$

dir, burada, $H_0^1(\Omega)$ uzayında $k \to \infty$ iken, $u_0^k = \sum\limits_{j=1}^{k}(u_0,\upsilon_j)\upsilon_j \to u_0$ dir, $L^2(\Omega)$ uzayında ise $k \to \infty$ iken, $u_1^k = \sum\limits_{j=1}^{k}(u_i,\upsilon_j)\upsilon_j \to u_1$ olur ve $L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,1))$ uzayında, $k \to \infty$ iken, $z_0^k = \sum\limits_{j=1}^{k}\left(f_0,\varphi_j\right)\varphi_j \to f_0$ olur.

Adi diferansiyel denklemlerin klasik varlık teoreminden, $T > 0$, $[0,t_k)$, $0 < t_k < T$ aralığında (4.2.1.2)-(4.2.1.3) probleminin çözümü vardır. Şimdi, $t_k = T$, $\forall k \geq 1$ olduğunu ispatlayalım.

(4.2.1.2) denklemini $d_j'(t)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \left|u_t^k(t)\right|^2 dx + \left(g\circ\nabla u^k\right)(t)\right.\\
&\left.+\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega \left|\nabla u^k(t)\right|^2 dx\right\}\\
&+\mu_1\int_\Omega \left|u_t^k(t)\right|^{m(x)} dx + \mu_2\int_\Omega \left|z^k(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^k(x,1,t)\,u_t^k(t)\,dx\\
=\;& -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|\nabla u^k(t)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla u^k\right)(t) + \int_\Omega g(x,t)\,u_t^k(t)\,dx
\end{aligned}$$

olur. $(0,t)$ aralığında integral alırsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \left|u_t^k(t)\right|^2 dx + \left(g\circ\nabla u^k\right)(t)\right.\\
&\left.+\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega \left|\nabla u^k(t)\right|^2 dx\right]\\
&+\mu_1\int_0^t\int_\Omega \left|u_t^k(s)\right|^{m(x)} dxds\\
&+\mu_2\int_0^t\int_\Omega \left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)-2} z^k(x,1,s)\,u_t^k(s)\,dxds\\
=\;& \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u_1^k\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_0^k\right|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega g(x,s)\,u_t^k(s)\,dxds\\
\leq\;& \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u_1^k\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_0^k\right|^2 dx\\
&+\frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega \left|u_t^k(s)\right|^2 dxds + \int_0^T\int_\Omega |g(x,s)|^2\,dxds\\
\leq\;& C + \frac{1}{4}\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^2 dx,\ \forall t\in[0,t_k) \qquad (4.2.1.4)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2.1.3) ten

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^1\int_\Omega \zeta z_t^k(x,\rho,s)\,z^k(x,\rho,s)^{m(x)-1}\,dxd\rho ds\\
&+\int_0^t\int_0^1\int_\Omega \frac{\zeta}{\tau}z_\rho^k(x,\rho,s)\,z^k(x,\rho,s)^{m(x)-1}\,dxd\rho ds\\
=\;& 0
\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} \left|z^k(x,\rho,t)\right|^{m(x)} dxd\rho \\
&- \int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} \left|z^k(x,\rho,0)\right|^{m(x)} dxd\rho \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)\tau} \left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)} dxds \\
&- \int_0^t \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)\tau} \left|z^k(x,0,s)\right|^{m(x)} dxds \\
= \;& 0
\end{aligned} \tag{4.2.1.5}$$

sağlanır. (4.2.1.4)-(4.2.1.5) ten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int_\Omega \left|u_t^k(t)\right|^2 dx + \left(g \circ \nabla u^k\right)(t)\right. \\
&\left. + \left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right) \int_\Omega \left|\nabla u^k\right|^2 dx\right] \\
&+ \int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} \left|z^k(x,\rho,t)\right|^{m(x)} dxd\rho \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)\tau} \left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)} dxds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \left(\mu_1 - \frac{\zeta}{m(x)\tau}\right) \left|u_t^k(s)\right|^{m(x)} dxds \\
\leq \;& \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u_1^k\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u_0^k\right|^2 dx \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega \left|u_t^k(s)\right|^2 dxds + \int_0^T \int_\Omega \left|g(x,s)\right|^2 dxds \\
&+ \int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} \left|z_0^k\right|^{m(x)} dxd\rho \\
&- \mu_2 \int_0^t \int_\Omega \left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)-2} z^k(x,1,s)\, u_t^k(s)\, dxds
\end{aligned} \tag{4.2.1.6}$$

olur. Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&- \mu_2 \int_0^t \int_\Omega \left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)-2} z^k(x,1,s)\, u_t^k(s)\, dxds \\
\leq \;& \int_0^t \int_\Omega \frac{\left|\mu_2\right|(m(x)-1)}{m(x)} \left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)} dxds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \frac{\left|\mu_2\right|}{m(x)} \left|u_t^k(s)\right|^{m(x)} dxds,
\end{aligned} \tag{4.2.1.7}$$

olur. (4.2.1.6)-(4.2.1.7) den

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega}\left|u_t^k(t)\right|^2 dx+\left(g\circ\nabla u^k\right)(t)\right.\\
&\left.+\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_{\Omega}\left|\nabla u^k(t)\right|^2 dx\right\}\\
&+\frac{\zeta}{m^+}\int_0^1\int_{\Omega}\left|z^k(x,\rho,t)\right|^{m(x)} dxd\rho\\
&+\int_0^t\int_{\Omega}\left(\frac{\zeta}{m^+\tau}-\frac{(m^+-1)\left|\mu_2\right|}{m^+}\right)\left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)} dxds\\
&+\int_0^t\int_{\Omega}\left(\mu_1-\frac{\zeta}{m^-\tau}-\frac{\left|\mu_2\right|}{m^-}\right)\left|u_t^k(s)\right|^{m(x)} dxds\\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|u_1^k\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla u_0^k\right|^2 dx+\frac{1}{4}\int_0^t\int_{\Omega}\left|u_t^k(s)\right|^2 dxds\\
&+\int_0^T\int_{\Omega}\left|g(x,s)\right|^2 dxds+\frac{\zeta}{m^-}\int_0^1\int_{\Omega}\left|z_0^k\right|^{m(x)} dxd\rho\\
\leq\ &C+\frac{1}{4}\sup_{(0,t_k)}\int_{\Omega}\left|u_t^k(t)\right|^2 dx,\ \forall t\in[0,t_k)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.10) dan, c_2, c_3 pozitif sabitleri için

$$\begin{aligned}
&\sup_{(0,t_k)}\int_{\Omega}\left|u_t^k(t)\right|^2 dx+\sup_{(0,t_k)} l\int_{\Omega}\left|\nabla u^k(t)\right|^2 dx\\
&+\sup_{(0,t_k)}\int_0^1\int_{\Omega}\left|z^k(x,\rho,t)\right|^{m(x)} dxd\rho\\
&+c_2\int_0^{t_k}\int_{\Omega}\left|u_t^k(s)\right|^{m(x)} dxds+c_3\int_0^{t_k}\int_{\Omega}\left|z^k(x,1,s)\right|^{m(x)} dxds\\
\leq\ &C
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece, çözüm $[0,T)$ ye genişletilebilir ve her $k\in N$ için,

(u^k) dizisi, $L^{\infty}\left((0,T);H_0^1(\Omega)\right)$ uzayında sınırlı

(u_t^k) dizisi, $L^{\infty}\left((0,T);L^2(\Omega)\right)\cap L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,T))$ uzayında sınırlı

(z^k) dizisi, $L^{\infty}\left((0,T);L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,1))\right)$ uzayında sınırlı

ve

$(z^k(1))$ dizisi, $L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,T))$ uzayında sınırlı

olur. (u^k) nın bir alt dizisi (u^{μ}) olsun, böylece

$u^{\mu}\to u$ dizisi, $L^{\infty}\left((0,T);H_0^1(\Omega)\right)$ uzayında zayıf* yakınsak

$$u_t^\mu \rightarrow u_t \text{ dizisi, } L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega)\right)$$
$$\text{ve } L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,T)) \text{ uzaylarında zayıf}^* \text{ yakınsak}$$

ve (z^k) nın alt dizisi (z^μ) olsun, böylece

$$z^\mu \rightarrow z \text{ dizisi, } L^\infty\left((0,T);L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,1))\right) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak}$$

$$z^\mu(1) \rightarrow z(1) \text{ dizisi, } L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,T)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsak}$$

olur. Lions (1969) lemmasından $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$ olur. $L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,T))$ de, u_t^μ ve $z^\mu(1)$ sınırlı olduğundan,

$$L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega\times(0,T))$$

de

$$|u_t^\mu|^{m(x)-2}u_t^\mu \text{ ve } |z^\mu(1)|^{m(x)-2}z^\mu(1)$$

sınırlı olur.
Bu durumda,

$$|u_t^\mu|^{m(\cdot)-2}u_t^\mu \rightarrow |u_t|^{m(\cdot)-2}u_t \text{ dizisi, } L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega\times(0,T)) \text{ uzayında zayıf yakınsak}$$

$$\begin{aligned}|z^\mu(1)|^{m(\cdot)-2}z^\mu(1) &\rightarrow |z(1)|^{m(\cdot)-2}z(1) \text{ dizisi}\\ &\quad L^{\frac{m(\cdot)}{m(\cdot)-1}}(\Omega\times(0,T)) \text{ uzayında zayıf yakınsak}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, her $\upsilon\in L^{m(\cdot)}((0,T)\times H_0^1(\Omega))$ için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Big(u_{tt}\upsilon+\nabla u\nabla\upsilon-\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\nabla\upsilon ds\\ &+\mu_1|u_t|^{m(x)-2}u_t\upsilon+\mu_2|z(x,1,t)|^{m(x)-2}z(x,1,t)\upsilon\Big)dx\\ =&\int_\Omega g\upsilon dx\end{aligned}$$

elde edilir, bu durumda $D'(\Omega\times(0,T))$ da,

$$\begin{aligned}&u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds+\mu_1|u_t(x,t)|^{m(x)-2}u_t(x,t)\\ &+\mu_2|z(x,1,t)|^{m(x)-2}z(x,1,t)\\ =&\ g\end{aligned}$$

sağlanır.

Teklik: Farz edelim ki (4.2.8) probleminin çözümleri (u^1, z^1), (u^2, z^2) olsun. $\widetilde{u} = u^1 - u^2$ ve $\widetilde{z} = z^1 - z^2$ alalım, bu durumda, $(\widetilde{u}, \widetilde{z})$

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta\widetilde{u} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta\widetilde{u}(s)\,ds + \mu_1 \left|u_t^1\right|^{m(x)-2} u_t^1 \\ -\mu_1 \left|u_t^2\right|^{m(x)-2} u_t^2 + \mu_2 \left|z^1(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^1(x,1,t) \\ -\mu_2 \left|z^2(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^2(x,1,t) = 0, \qquad \Omega \times (0,T), \\ \tau\widetilde{z}_t(x,\rho,t) + \widetilde{z}_\rho(x,\rho,t) = 0, \quad \Omega \times (0,1) \times (0,T), \\ \widetilde{u}(x,t) = 0, \qquad \partial\Omega \times (0,T), \\ \widetilde{z}(x,0,t) = \widetilde{u}_t(x,t), \qquad \Omega \times (0,T), \\ \widetilde{z}(x,\rho,0) = 0, \qquad \Omega \times (0,1), \\ \widetilde{u}(x,0) = 0, \ \widetilde{u}_t(x,0) = 0, \qquad \Omega \end{cases} \tag{4.2.1.8}$$

problemini sağlar. (4.2.1.8) probleminin ilk denklemi $\widetilde{u}_t$ ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde integrallersek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \left|\widetilde{u}_t(t)\right|^2 dx + \left(g \circ \nabla\widetilde{u}\right)(t) \right. \\ & \left. + \left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega \left|\nabla\widetilde{u}(t)\right|^2 dx\right\} \\ & + \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega \left|\nabla\widetilde{u}(t)\right|^2 dx - \frac{1}{2}\left(g' \circ \nabla\widetilde{u}\right)(t) \\ & + \mu_1 \int_\Omega \left(\left|u_t^1(t)\right|^{m(x)-2} u_t^1(t) - \left|u_t^2(t)\right|^{m(x)-2} u_t^2(x,t)\right)\widetilde{u}_t(t)\,dx \\ & + \mu_2 \int_\Omega \left(\left|z^1(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^1(x,1,t) \right. \\ & \left. - \left|z^2(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^2(x,1,t)\right)\widetilde{u}_t(t)\,dx \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{4.2.1.9}$$

elde ederiz. (4.2.1.8) probleminin ikinci denklemini $\widetilde{z}$ ile çarpıp, $\Omega \times (0,1)$ için integral alırsak

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \int_\Omega \left|\widetilde{z}(x,\rho,t)\right|^2 dx d\rho + \frac{1}{2}\left(\left\|\widetilde{z}(x,1,t)\right\|^2 - \left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2\right) = 0 \tag{4.2.1.10}$$

olur. (4.2.1.9)-(4.2.1.10) dan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega}\left|\widetilde{u}_t(t)\right|^2 dx+\left(1-\int_0^t g(s)\,ds\right)\int_{\Omega}\left|\nabla\widetilde{u}(t)\right|^2 dx\right.\\
&\left.+\left(g\circ\nabla\widetilde{u}\right)(t)+\tau\left\|\widetilde{z}(x,\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left\|\widetilde{z}(x,1,t)\right\|^2+\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega}\left|\nabla\widetilde{u}(t)\right|^2 dx\\
&+\mu_1\int_{\Omega}\left(\left|u_t^1(t)\right|^{m(x)-2}u_t^1(t)-\left|u_t^2(t)\right|^{m(x)-2}u_t^2(t)\right)\widetilde{u}_t(t)\,dx\\
&+\mu_2\int_{\Omega}\left(\left|z^1(x,1,t)\right|^{m(x)-2}z^1(x,1,t)\right.\\
&\left.-\left|z^2(x,1,t)\right|^{m(x)-2}z^2(x,1,t)\right)\widetilde{u}_t(t)\,dx\\
=\;&\frac{1}{2}\left(g'\circ\nabla\widetilde{u}\right)(t)+\frac{1}{2}\left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2 \qquad (4.2.1.11)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $y\to|y|^{m(\cdot)-2}y$ artan olduğundan

$$\int_{\Omega}\left(\left|u_t^1(t)\right|^{m(x)-2}u_t^1(t)-\left|u_t^2(t)\right|^{m(x)-2}u_t^2(x,t)\right)\widetilde{u}_t(t)\,dx\geq 0 \qquad (4.2.1.12)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\left|z^1(x,1,t)\right|^{m(x)-2}z^1(x,1,t)\right.\\
&\left.-\left|z^2(x,1,t)\right|^{m(x)-2}z^2(x,1,t)\right)\widetilde{u}_t(t)\,dx\\
\geq\;&0 \qquad (4.2.1.13)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.1.11)-(4.2.1.13) ten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2+l\left\|\widetilde{\nabla}u(t)\right\|^2+\tau\left\|\widetilde{z}(x,\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}\right\}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\widetilde{z}(x,1,t)\right\|^2\\
\leq\;&c_4\left(\left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2+l\left\|\widetilde{\nabla}u(t)\right\|^2\right)
\end{aligned}$$

olur, böylece $\widetilde{u}=0$, $\widetilde{z}=0$ olur.

Lemma 4.2.1.2 Kabul edelim ki $p(\cdot)$, $x\in\Omega$ için

$$2\leq p^-\leq p(x)\leq p^+\leq\infty$$

sağlasın, bu durumda $h(s)=b|s|^{p(x)-2}s$ fonksiyonu diferansiyellenebilen bir fonksiyondur ve $|h'(s)|=b|p(x)-1||s|^{p(x)-2}$ dir (Kang, 2020).

Teorem 4.2.1.3 Farzedelim ki (A1)-(A2) varsayımları ve (4.2.7) koşulu sağlansın ve $m(x)$, (4.2.4)-(4.2.5) ve $p(x)$, (4.2.5) koşulunu sağlasın ve

$$2 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq \frac{2(n-1)}{n-2},\ n \geq 3 \tag{4.2.1.14}$$

olsun. Bu durumda, $T > 0$ ve her

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), f_0 \in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,1))$$

için, (4.2.8) probleminin tek bir lokal çözümü vardır ve

$$\begin{aligned} u &\in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t &\in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,T)), \\ z &\in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,1)) \end{aligned}$$

olur.

İspat.

Varlık: $v \in L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega))$ olsun. $2(p^- - 1) \leq 2(p^+ - 1) \leq \frac{2n}{n-2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \|h(v)\|^2 \\ = & |b|^2 \int_\Omega |v|^{2(p(x)-1)} dx \\ \leq & |b|^2 \left\{ \int_\Omega |v|^{2\left(p^- - 1\right)} dx + \int_\Omega |v|^{2\left(p^+ - 1\right)} dx \right\} < \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$h(v) \in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \subset L^2(\Omega \times (0,T))$$

olur. Teorem 4.2.1.1 den, her $v \in L^\infty((0,T); H_0^1(\Omega))$ için

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left((0,T); H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t &\in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,T)), \\ z &\in L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0,1)) \end{aligned}$$

olacak şekilde, tek bir çözüm vardır, ve

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds & \\ +\mu_1 |u_t(x,t)|^{m(x)-2} u_t(x,t) + \mu_2 |z(x,1,t)|^{m(x)-2} z(x,1,t) & \\ = h(v), & \Omega \times (0,T), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & \Omega \times (0,1) \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega, \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), & \Omega \times (0,T), \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\tau\rho), & \Omega \times (0,1) \end{cases} \tag{4.2.1.15}$$

problemini sağlar. (u^k) dizisi

$$X_T := C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$$

de

$$\|u\|_{X_T}^2 := \max_{0\le t\le T} \left\{ \|u_t\|^2 + l\,\|\nabla u\|^2 \right\}$$

normuna sahip, bir Cauchy dizisidir. Böylece, (4.2.1.15) probleminin zayıf tek bir çözümü vardır.

Şimdi, (4.2.8) probleminin zayıf tek bir çözümü olduğunu gösterelim.
$K(v) = u$ olacak şekilde, lineer olmayan $K : X_T \to X_T$ dönüşümünü tanımlayalım, burada u, (4.2.1.15) probleminin çözümüdür. $T > 0$ için
(i) $K : X_T \to X_T$ ve
(ii) K nın, X_T de daralma dönüşümü olduğunu göstereceğiz.
(i) için, (4.2.1.15) in ilk denklemini u_t ile çarpıp $\Omega \times (0,t)$ üzerinde integrallersek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\,\|\nabla u\|^2\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t (g' \circ \nabla u)(s)\,ds \\ & + \mu_1 \int_0^t \int_\Omega |u_t(s)|^{m(x)}\,dx ds \\ & + \mu_2 \int_0^t \int_\Omega |z(x,1,s)|^{m(x)-2} z(x,1,s)\,u_t(s)\,dx ds \\ = \ & \frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + b\int_0^t \int_\Omega |v|^{p(x)-2} v u_t(s)\,dx ds \end{aligned} \tag{4.2.1.16}$$

elde ederiz. (4.2.1.15) in ikinci denklemini $\frac{\zeta}{\tau} z^{m(x)-1}$ ile çarpıp

$$\Omega \times (0,1) \times (0,t)$$

için integral alırsak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} \left(|z(x,\rho,t)|^{m(x)} - |z(x,\rho,0)|^{m(x)} \right) dx d\rho \\ = & \int_0^t \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)\tau} \left(|z(x,0,s)|^{m(x)} - |z(x,1,s)|^{m(x)} \right) dx ds \end{aligned} \tag{4.2.1.17}$$

elde ederiz. (A1)-(A2) varsayımlarından

$$\frac{1}{2} (g \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} \int_0^t (g' \circ \nabla u)(s)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t g(s) \|\nabla u\|^2 ds \geq 0 \tag{4.2.1.18}$$

olur. (4.2.1.16)-(4.2.1.18) den

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{l}{2} \|\nabla u\|^2 + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} |z(x,\rho,t)|^{m(x)} dx d\rho \\ & + \mu_1 \int_0^t \int_\Omega |u_t(s)|^{m(x)} dx ds \\ & + \mu_2 \int_0^t \int_\Omega |z(x,1,s)|^{m(x)-2} z(x,1,s)\, u_t(s) dx ds \\ & + \int_0^t \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)\tau} \left(|z(x,1,s)|^{m(x)} - |u_t(s)|^{m(x)} \right) dx ds \\ = & \frac{1}{2} \int_\Omega u_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\zeta}{m(x)} |f_0(x, -\tau\rho)|^{m(x)} dx d\rho \\ & + b \int_0^t \int_\Omega |v|^{p(x)-2} v u_t(s) dx ds \end{aligned} \tag{4.2.1.19}$$

olur. Young eşitsizliği ve (4.2.4) ten

$$\begin{aligned} & -\mu_2 \int_\Omega |z(x,1,s)|^{m(x)-2} z(x,1,s)\, u_t(s) dx \\ \leq & \frac{|\mu_2|}{m^-} \int_\Omega |u_t(s)|^{m(x)} dx + \frac{(m^+ - 1)|\mu_2|}{m^+} \int_\Omega |z(x,1,s)|^{m(x)} dx \end{aligned} \tag{4.2.1.20}$$

elde ederiz.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$$

Sobolev gömülmesi ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega |v|^{p(x)-2} v u_t(s) dx \right| \\ \leq & \frac{\epsilon}{4} \int_\Omega |u_t(s)|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega |v|^{2(p(x)-1)} dx \\ \leq & \frac{\epsilon}{4} \int_\Omega |u_t(s)|^2 dx + \frac{c_e}{\epsilon} \left[\|\nabla v\|^{2(p^- - 1)} + \|\nabla v\|^{2(p^+ - 1)} \right] \end{aligned} \tag{4.2.1.21}$$

elde ederiz, burada c_e bir sabittir. (4.2.1.20)-(4.2.1.21) eşitsizliklerini (4.2.1.19) da yerine bırakırsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{l}{2}\|\nabla u\|^2+\int_0^1\int_\Omega\frac{\zeta}{m(x)}|z(x,\rho,t)|^{m(x)}\,dxd\rho\\
&+\left(\mu_1-\frac{|\mu_2|}{m^-}-\frac{\zeta}{m^-\tau}\right)\int_0^t\int_\Omega|u_t(s)|^{m(x)}\,dxds\\
&+\left(\frac{\zeta}{m^+\tau}-\frac{(m^+-1)|\mu_2|}{m^+}\right)\int_0^t\int_\Omega|z(x,1,s)|^{m(x)}\,dxds\\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx+\int_0^1\int_\Omega\frac{\zeta}{m(x)}|f_0(x,-\tau\rho)|^{m(x)}\,dxd\rho\\
&+\frac{\epsilon bT}{4}\sup_{(0,T)}\int_\Omega|u_t|^2\,dx\\
&+\frac{c_eb}{\epsilon}\left[\int_0^T\|\nabla v\|^{2(p^--1)}\,ds+\int_0^T\|\nabla v\|^{2(p^+-1)}\,ds\right]
\end{aligned}$$

olur. (4.2.10) dan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sup_{(0,T)}\|u_t\|^2+\frac{l}{2}\sup_{(0,T)}\|\nabla u\|^2+\frac{\zeta}{m^+}\|z(x,\rho,t)\|^{m(\cdot)}_{L^{m(\cdot)}(\Omega\times(0,1))}\\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_\Omega u_1^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx+\frac{\zeta}{m^-}\int_0^1\int_\Omega|f_0(x,-\tau\rho)|^{m(x)}\,dxd\rho\\
&+\frac{\epsilon bT}{4}\sup_{(0,T)}\|u_t\|^2+\frac{c_ebT}{\epsilon l}\left[\|v\|^{2(p^--1)}_{X_T}+\|v\|^{2(p^+-1)}_{X_T}\right]
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\epsilon bT=1$ şeklinde alırsak

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{X_T}\ \leq\ &\frac{c^*}{2}\int_\Omega u_1^2dx+\frac{c^*}{2}\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx\\
&+\frac{c^*\zeta}{m^-}\int_0^1\int_\Omega|f_0(x,-\tau\rho)|^{m(x)}\,dxd\rho\\
&+c_*T\left\{\|v\|^{2(p^--1)}_{X_T}+\|v\|^{2(p^+-1)}_{X_T}\right\}
\end{aligned}$$

olur, burada

$$\frac{1}{c^*}=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\zeta}{m^+}\right\}$$

ve

$$c_*=\frac{c^*c_eb}{\epsilon l}$$

dir. $M>0$ için, $\|v\|_{X_T}\leq M$ olsun. M yeterince büyük olursa

$$\begin{aligned}
&c^*\int_\Omega u_1^2dx+c^*\int_\Omega|\nabla u_0|^2\,dx+\frac{2c^*\zeta}{m^-}\int_0^1\int_\Omega|f_0(x,-\tau\rho)|^{m(x)}\,dxd\rho\\
\leq\ &M^2
\end{aligned}$$

olur ve T yeterince küçük seçilirse

$$T \leq \frac{1}{2c_* \left(M^{2(p^- -2)} + M^{2(p^+ -2)}\right)}$$

olur, böylece

$$\|u\|^2_{X_T} \leq M^2$$

elde ederiz. Böylece, $K : Z \to Z$ olur, burada

$$Z = \left\{u \in X_T \ , \ \|u\|_{X_T} \leq M\right\}$$

dır. Şimdi, K nın daralma dönüşümü olduğunu ispatlayalım. $K\left(v^1\right) = u^1$ ve $K\left(v^2\right) = u^2$ olsun ve $u = u^1 - u^2$ ve $z = z^1 - z^2$ olacak şekilde alalım, u ve z

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right) \Delta u\left(s\right) ds & \\ \quad +\mu_1 \left|u_t^1\left(x,t\right)\right|^{m(x)-2} u_t^1\left(x,t\right) - \mu_1 \left|u_t^2\left(x,t\right)\right|^{m(x)-2} u_t^2\left(x,t\right) & \\ +\mu_2 \left|z^1\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)-2} z^1\left(x,1,t\right) - \mu_2 \left|z^2\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)-2} z^2\left(x,1,t\right) & \\ = b\left|v^1\right|^{p(x)-2} v^1 - b\left|v^2\right|^{p(x)-2} v^2, & \Omega \times (0,T), \\ u\left(x,t\right) = 0, & \partial\Omega \times (0,T), \\ z\left(x,0,t\right) = u_t\left(x,t\right), & \Omega \times (0,T), \\ z\left(x,\rho,0\right) = 0, & \Omega \times (0,1), \\ u\left(x,0\right) = 0, \ u_t\left(x,0\right) = 0, & \Omega \end{cases} \tag{4.2.1.22}$$

problemini çözümleridir. (4.2.1.22) denklemini u_t ile çarparak, $\Omega \times (0,t)$ için integrallersek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g\left(s\right) ds\right) \|\nabla u\|^2 \\ & + \frac{1}{2}\left(g \circ \nabla u\right)\left(t\right) + \frac{1}{2}\int_0^t g\left(s\right) \|\nabla u\|^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^t \left(g' \circ \nabla u\right)\left(s\right) ds \\ & + \mu_1 \int_0^t \int_\Omega \left(\left|u_t^1\left(s\right)\right|^{m(x)-2} u_t^1\left(s\right) - \left|u_t^2\left(s\right)\right|^{m(x)-2} u_t^2\left(s\right)\right) u_t\left(s\right) dxds \\ & + \mu_2 \int_0^t \int_\Omega \left(\left|z^1\left(x,1,s\right)\right|^{m(x)-2} z^1\left(x,1,s\right) \right. \\ & \left. - \left|z^2\left(x,1,s\right)\right|^{m(x)-2} z^2\left(x,1,s\right)\right) u_t\left(s\right) dxds \\ = & \int_0^t \int_\Omega \left(h\left(v_1\right) - h\left(v_2\right)\right) u_t\left(s\right) dxds \end{aligned}$$

elde ederiz, burada $h(v) = b|v|^{p(x)-2}v$ dir. $u \to |u|^{m(x)-2}u$ fonksiyonu artan olduğundan

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{l}{2}\|\nabla u\|^2 \leq \int_0^t \int_\Omega (h(v_1) - h(v_2))\, u_t(s)\, dxds \tag{4.2.1.23}$$

elde ederiz. (4.2.1.14), Young eşitsizliği ve Sobolev gömülmesinden

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |h(v_1) - h(v_2)|\, |u_t(s)|\, dx \\
= &\int_\Omega |h'(\varrho)|\, \|v\|\, |u_t(s)|\, dx \leq \frac{\delta_0}{2}\int_\Omega |u_t(s)|^2\, dx + \frac{1}{2\delta_0}\int_\Omega |h'(\varrho)|^2 |v|^2\, dx \\
\leq &\frac{\delta_0}{2}\int_\Omega |u_t(s)|^2\, dx \\
&+\frac{b^2(p^+-1)^2}{2\delta_0}\left[\left(\int_\Omega |\varrho|^{n(p^--2)}\, dx\right)^{\frac{2}{n}} + \left(\int_\Omega |\varrho|^{n(p^+-2)}\, dx\right)^{\frac{2}{n}}\right] \\
&\times\left(\int_\Omega |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
\leq &\frac{\delta_0}{2}\|u_t(s)\|^2 + \frac{b^2(p^+-1)^2 c_e}{2\delta_0}\left[\|\nabla\varrho\|^{2(p^--2)} + \|\nabla\varrho\|^{2(p^+-2)}\right]\|\nabla v\|^2 \\
\leq &\frac{\delta_0}{2}\|u_t(s)\|^2 \\
&+\frac{b^2(p^+-1)^2 c_e}{\delta_0 l^{p^+-2}}\left(M^{2(p^--2)} + M^{2(p^+-2)}\right)\|\nabla v\|^2
\end{aligned} \tag{4.2.1.24}$$

elde ederiz, burada $v = v_1 - v_2$ ve $\varrho = \vartheta v_1 + (1-\vartheta)v_2$, $0 \leq \vartheta \leq 1$ dir. (4.2.1.24) ü, (4.2.1.23) te yerine bırakırsak ve δ_0 yeterince küçük seçersek

$$\|u\|_{X_T}^2 \leq d\|v\|_{X_T}^2 \tag{4.2.1.25}$$

elde ederiz, burada $d = \frac{4b^2\left(p^+-1\right)^2 c_e T}{\delta_0 l^{p^+-2}}\left(M^{2(p^--2)} + M^{2(p^+-2)}\right)$ dir.
Yeterince küçük T için, $0 < d < 1$ dir, böylece, (4.2.1.25) K nın daralma dönüşümü olduğunu belirtir. Banach sabit nokta teoreminden, $u \in Z$ tek bir çözümü için, $K(u) = u$ sağlanır. Böylece, u, (4.2.8) probleminin çözümüdür.

Teklik: Varsayalım ki (u^1, z^1), (u^2, z^2) (4.2.1.15) probleminin çözümü olsun.

$\widetilde{u} = u^1 - u^2$ ve $\widetilde{z} = z^1 - z^2$ alalım, bu durumda, $(\widetilde{u}, \widetilde{z})$

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta\widetilde{u} + \int_0^t g(t-s)\,\Delta\widetilde{u}(s)\,ds + \mu_1 \left|u_t^1\right|^{m(x)-2} u_t^1 \\ -\mu_1 \left|u_t^2\right|^{m(x)-2} u_t^2 + \mu_2 \left|z^1(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^1(x,1,t) \\ -\mu_2 \left|z^2(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^2(x,1,t) = 0 \qquad \Omega \times (0,T) \\ \tau\widetilde{z}_t(x,\rho,t) + \widetilde{z}_\rho(x,\rho,t) \;\; = 0 \quad \Omega \times (0,1) \times (0,T), \\ \widetilde{u}(x,t) = 0 \qquad\qquad \partial\Omega \times (0,T), \\ \widetilde{z}(x,0,t) = \widetilde{u}_t(x,t) \qquad \Omega \times (0,T), \\ \widetilde{z}(x,\rho,0) = 0 \qquad\qquad \Omega \times (0,1), \\ \widetilde{u}(x,0) = 0,\ \widetilde{u}_t(x,0) = 0 \qquad \Omega \end{cases} \tag{4.2.1.26}$$

problemini sağlar. (4.2.1.26) probleminin birinci denklemini $\widetilde{u}_t$ ile çarpıp $\Omega \times (0,t)$ için integrallenirse

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\widetilde{u}_t(t)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\int_\Omega \left|\nabla\widetilde{u}(t)\right|^2 dx \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t g(s)\int_\Omega \left|\nabla\widetilde{u}(s)\right|^2 dx ds \\ & - \frac{1}{2}\int_0^t \left(g' \circ \nabla\widetilde{u}\right)(s)\,ds + \frac{1}{2}\left(g \circ \nabla\widetilde{u}\right)(t) \\ & + \mu_1 \int_0^t \int_\Omega \left(\left|u_t^1(s)\right|^{m(x)-2} u_t^1(s) - \left|u_t^2(s)\right|^{m(x)-2} u_t^2(s)\right)\widetilde{u}_t(s)\,dx ds \\ & + \mu_2 \int_0^t \int_\Omega \left(\left|z^1(x,1,t)\right|^{m(x)-2} z^1(x,1,s) \right. \\ & \left. - \left|z^2(x,1,s)\right|^{m(x)-2} z^2(x,1,s)\right) \times \widetilde{u}_t(s)\,dx ds \\ = \;& 0 \end{aligned} \tag{4.2.1.27}$$

elde ederiz. (4.2.1.26) probleminin ikinci denklemi $\widetilde{z}$ ile çarpıp $\Omega \times (0,1) \times (0,t)$ için integrallenirse

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t \int_0^1 \int_\Omega \left|\widetilde{z}(x,\rho,t)\right|^2 dx d\rho ds \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left\|\widetilde{z}(x,1,t)\right\|^2 - \left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2\right) ds \\ = \;& 0 \end{aligned} \tag{4.2.1.28}$$

olur. (4.2.1.27)-(4.2.1.28) den

$$\begin{aligned} & \left\{\left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2 + l\left\|\widetilde{\nabla}u(t)\right\|^2 + \tau\left\|\widetilde{z}(x,\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}\right\} + \left\|\widetilde{z}(x,1,t)\right\|^2 \\ \leq \;& c_4 \int_0^t \left(\left\|\widetilde{u}_t(t)\right\|^2 + l\left\|\widetilde{\nabla}u(t)\right\|^2\right) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Gronwall eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\| \widetilde{u}_t(t) \right\|^2 + l \left\| \widetilde{\nabla} u(t) \right\|^2 + \tau \left\| \widetilde{z}(x,\rho,t) \right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))} \right\} \\ & + \left\| \widetilde{z}(x,1,t) \right\|^2 \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\widetilde{u} = 0$, $\widetilde{z} = 0$ olur ve ispat tamamlanır.

4.2.2 Çözümlerin patlaması

Burada, $b > 0$ ve $E(0) < 0$ için, (4.2.8) probleminin çözümlerinin patlamasını ispatlayacağız.

Lemma 4.2.2.1 Varsayalım ki (u, z), (4.2.8) probleminin bir çözümü olsun ve $\mu_1 > |\mu_2|$ sağlansın, $C_0 > 0$ için

$$E'(t) \leq -C_0 \int_\Omega \left(|u_t|^{m(x)} + |z(x,1,t)|^{m(x)} \right) dx \leq 0 \tag{4.2.2.1}$$

sağlanır.

İspat. (4.2.8) probleminin birinci denklemini u_t ile çarpıp Ω için integrallenirse, ve ikinci denklemi $\frac{1}{\tau}\xi(x)|z|^{m(x)-2}z$ ile çarpıp $\Omega \times (0,1)$ için integrallenirse

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) \right. \\ & \left. + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho - b\int_\Omega \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right] \\ = \; & -\mu_1 \int_\Omega |u_t|^{m(x)}\,dx - \frac{1}{2} g(s)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) \\ & -\frac{1}{\tau}\int_\Omega \int_0^1 \xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)-2} z z_\rho(x,\rho,t)\,d\rho dx \\ & -\mu_2 \int_\Omega u_t z(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}\,dx \end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

elde edilir, burada

$$(g \circ \nabla u)(t) = \int_0^t g(t-s) \int_\Omega [\nabla u(s) - \nabla u(t)]^2\,dx ds$$

dır. Şimdi, (4.2.2.2) eşitliğinin sağ tarafındaki son iki terim için:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\xi(x)\left|z(x,\rho,t)\right|^{m(x)-2}zz_{\rho}(x,\rho,t)\,d\rho dx \\ = & -\frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\xi(x)\left|z(x,\rho,t)\right|^{m(x)}}{m(x)}\right)d\rho dx \\ = & \frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\frac{\xi(x)}{m(x)}\left(\left|z(x,0,t)\right|^{m(x)}-\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}\right)dx \\ = & \int_{\Omega}\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}\left|u_t\right|^{m(x)}dx-\int_{\Omega}\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx \end{aligned}$$

olur ve son terim için, Young eşitsizliği, $q=\frac{m(x)}{m(x)-1}$ ve $q'=m(x)$ den

$$\left|u_t\right|\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-1}\leq\frac{1}{m(x)}\left|u_t\right|^{m(x)}+\frac{m(x)-1}{m(x)}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}$$

kestirimlerini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} & -\mu_2\int_{\Omega}u_t z\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)-2}dx \\ \leq & \left|\mu_2\right|\left(\int_{\Omega}\frac{1}{m(x)}\left|u_t(t)\right|^{m(x)}dx+\int_{\Omega}\frac{m(x)-1}{m(x)}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} \leq & -\int_{\Omega}\left[\mu_1-\left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}+\frac{\left|\mu_2\right|}{m(x)}\right)\right]\left|u_t(t)\right|^{m(x)}dx \\ & -\int_{\Omega}\left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}-\frac{\left|\mu_2\right|(m(x)-1)}{m(x)}\right)\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx \\ & -\frac{1}{2}g(s)\left\|\nabla u\right\|^2+\frac{1}{2}(g'\circ\nabla u)(t) \end{aligned}$$

olur. Her $x\in\overline{\Omega}$ için, (4.2.10) bağıntısından

$$f_1(x)=\mu_1-\left(\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}+\frac{\left|\mu_2\right|}{m(x)}\right)>0,$$

$$f_2(x)=\frac{\xi(x)}{\tau m(x)}-\frac{\left|\mu_2\right|(m(x)-1)}{m(x)}>0$$

olur. $m(x)$ ve $\xi(x)$ sınırlı olduğundan, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ de sınırlı olur. Böylece, herhangi bir $x\in\overline{\Omega}$ için

$$C_0(x)=\min\{f_1(x),\ f_2(x)\}>0$$

olsun ve $C_0(x)=\inf_{\overline{\Omega}}C_0(x)$ alalım, böylece $C_0(x)\geq C_0>0$ olur. Ayrıca, (A1)-(A2) varsayımlarından

$$E'(t)\leq-C_0\left[\int_{\Omega}\left|u_t(t)\right|^{m(x)}dx+\int_{\Omega}\left|z(x,1,t)\right|^{m(x)}dx\right]\leq 0$$

olur.

$$H(t) = -E(t) \tag{4.2.2.3}$$

alalım, böylece

$$H'(t) = -E'(t) \geq 0$$

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq b \int_{\Omega} \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \leq \frac{b}{p^-} \varrho(u) \tag{4.2.2.4}$$

olur, burada

$$\varrho(u) = \varrho_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx$$

dır.

Lemma 4.2.2.2 $n \geq 3$ olmak üzere

$$2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$$

sağlansın. Bu durumda, pozitif $C > 1$ sayısı için

$$\varrho^{s/p^-}(u) \leq C\left(\|\nabla u\|^2 + \varrho(u)\right) \tag{4.2.2.5}$$

olur. Bu durumda, $u \in H_0^1(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq p^-$ için, aşağıda verilen eşitsizlikler sağlanır:

i)

$$\|u\|_{p^-}^s \leq C\left(\|\nabla u\|^2 + \|u(t)\|_{p^-}^{p^-}\right) \tag{4.2.2.6}$$

ii)

$$\begin{aligned} \varrho^{s/p^-}(u) \quad &\leq \quad C\left(|H(t)| + \|u_t\|^2 + \varrho(u)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho\right) \end{aligned} \tag{4.2.2.7}$$

iii)

$$\begin{aligned} \|u\|_{p^-}^s \quad &\leq \quad C\left(|H(t)| + \|u_t\|^2 + \|u\|_{p^-}^{p^-}\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x)\,|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho\right) \end{aligned} \tag{4.2.2.8}$$

olur, ayrıca

iv)

$$\varrho(u) \geq C \|u\|_{p^-}^{p^-} \tag{4.2.2.9}$$

v)

$$\int_\Omega |u|^{m(x)} dx \leq C \left(\varrho^{m^-/p^-}(u) + \varrho^{m^+/p^-}(u) \right) \tag{4.2.2.10}$$

olur (Kafini ve Messaoudi, 2019).

Teorem 4.2.2.3 $n \geq 3$ için

$$2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$$

olsun ve, (4.2.5) şartı sağlansın ve $E(0) < 0$ olsun. Böylece, (4.2.8) probleminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Psi \alpha [L(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

olur, burada $L(t)$ ve α sırasıyla, (4.2.2.11) ve (4.2.2.12) de verilmiştir.

İspat.

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx \tag{4.2.2.11}$$

tanımlayalım, burada, ε yeterince küçük seçilirse

$$0 \leq \alpha \leq \min \left\{ \frac{p^- - 2}{2p^-}, \ \frac{p^- - m^-}{p^-(m^+ - 1)}, \ \frac{p^- - m^+}{p^-(m^+ - 1)} \right\} \tag{4.2.2.12}$$

olur. $L(t)$ nin türevi alınırsa, ve (4.2.8) probleminin birinci denkleminden

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \left\| u_t^2 \right\| - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u(t) \nabla u(s) \, dx ds \\ &\quad + \varepsilon b \int_\Omega |u|^{p(x)} \, dx - \varepsilon \mu_1 \int_\Omega u u_t(x,t) \left| u_t(x,t) \right|^{m(x)-2} dx \\ &\quad - \varepsilon \mu_2 \int_\Omega u z(x,1,t) \left| z(x,1,t) \right|^{m(x)-2} dx. \\ &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \left\| u_t^2 \right\| \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \int_0^t g(s) \, ds \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u(t) \left[\nabla u(s) - \nabla u(t) \right] dx ds \\ &\quad + \varepsilon b \int_\Omega |u|^{p(x)} \, dx - \varepsilon \mu_1 \int_\Omega u u_t(x,t) \left| u_t(x,t) \right|^{m(x)-2} dx \\ &\quad - \varepsilon \mu_2 \int_\Omega u z(x,1,t) \left| z(x,1,t) \right|^{m(x)-2} dx \end{aligned} \tag{4.2.2.13}$$

elde edilir. Young ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u(t) \left[\nabla u(s) - \nabla u(t) \right] dx ds \\ \leq & \int_0^t g(t-s) \|\nabla u(t)\| \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\| \, ds \\ \leq & \lambda (g \circ \nabla u)(t) + \frac{1}{4\lambda} \int_0^t g(s) \, ds \|\nabla u\|^2, \ \lambda > 0 \end{aligned} \tag{4.2.2.14}$$

olur. (4.2.2.14), (4.2.2.13) te yerine bırakılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \left\| u_t^2 \right\| - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t g(s) \, ds \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \lambda (g \circ \nabla u)(t) - \frac{\varepsilon}{4\lambda} \int_0^t g(s) \, ds \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \varepsilon b \int_\Omega |u|^{p(x)} \, dx - \varepsilon \mu_1 \int_\Omega u u_t(x,t) \left| u_t(x,t) \right|^{m(x)-2} dx \\ &\quad - \varepsilon \mu_2 \int_\Omega u z(x,1,t) \left| z(x,1,t) \right|^{m(x)-2} dx \end{aligned} \tag{4.2.2.15}$$

olur. $0<a<1$ için, $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq C_0(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\left[\int_\Omega |u_t|^{m(x)}dx+\int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)}dx\right] \\ &+\varepsilon(1-a)p^-H(t)+\varepsilon\frac{(1-a)p^-}{2}\|u_t\|^2 \\ &+\varepsilon\frac{(1-a)p^-}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|^2 \\ &+\varepsilon\frac{(1-a)p^-}{2}(g\circ\nabla u)(t)+\varepsilon\left\|u_t^2\right\|-\varepsilon\|\nabla u\|^2 \\ &+\varepsilon(1-a)p^-\int_0^1\int_\Omega\frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho \\ &+\varepsilon ab\int_\Omega |u|^{p(x)}dx+\varepsilon\int_0^t g(s)ds\|\nabla u\|^2-\varepsilon\lambda(g\circ\nabla u)(t) \\ &-\frac{\varepsilon}{4\lambda}\int_0^t g(s)ds\|\nabla u\|^2-\varepsilon\mu_1\int_\Omega uu_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m(x)-2}dx \\ &-\varepsilon\mu_2\int_\Omega uz(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}dx \end{aligned} \tag{4.2.2.16}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq C_0(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\left[\int_\Omega |u_t|^{m(x)}dx+\int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)}dx\right] \\ &+\varepsilon(1-a)p^-H(t)+\varepsilon\frac{(1-a)p^-+2}{2}\|u_t\|^2 \\ &+\varepsilon\left(\frac{(1-a)p^-}{2}-\lambda\right)(g\circ\nabla u)(t) \\ &+\varepsilon\left[\frac{(1-a)p^-}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)-1\right. \\ &\left.+\left(1-\frac{1}{4\lambda}\right)\int_0^t g(s)ds\right]\|\nabla u\|^2 \\ &+\varepsilon(1-a)p^-\int_0^1\int_\Omega\frac{\xi(x)|z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)}dxd\rho \\ &+\varepsilon ab\varrho(u)-\varepsilon\mu_1\int_\Omega uu_t(x,t)|u_t(x,t)|^{m(x)-2}dx \\ &-\varepsilon\mu_2\int_\Omega uz(x,1,t)|z(x,1,t)|^{m(x)-2}dx \end{aligned} \tag{4.2.2.17}$$

olur. Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_t|^{m(x)-1}|u|dx &\leq \frac{1}{m^-}\int_\Omega \delta^{m(x)}|u|^{m(x)}dx \\ &+\frac{m^+-1}{m^+}\int_\Omega \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}}|u_t|^{m(x)}dx \end{aligned} \tag{4.2.2.18}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)-1} \left|u\right| dx \\
\leq\ & \frac{1}{m^{-}} \int_{\Omega} \delta^{m(x)} \left|u\right|^{m(x)} dx \\
&+\frac{m^{+}-1}{m^{+}} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} \left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)} dx
\end{aligned} \tag{4.2.2.19}$$

olur.

$$\delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = kH^{-\alpha}\left(t\right)$$

olsun, $k \geq 1$ için

$$\int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} \left|u_t\right|^{m(x)} dx = kH^{-\alpha}\left(t\right) \int_{\Omega} \left|u_t\right|^{m(x)} dx \tag{4.2.2.20}$$

$$\int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} \left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)} dx = kH^{-\alpha}\left(t\right) \left|z\left(x,1,t\right)\right|^{m(x)} dx \tag{4.2.2.21}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \delta^{m(x)} \left|u\right|^{m(x)} dx &= \int_{\Omega} k^{1-m(x)} H^{\alpha(m(x)-1)}\left(t\right) \left|u\right|^{m(x)} dx \\
&\leq \int_{\Omega} k^{1-m^{-}} H^{\alpha\left(m^{+}-1\right)}\left(t\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{m(x)} dx
\end{aligned} \tag{4.2.2.22}$$

elde edilir. (4.2.2.9)-(4.2.2.10) dan

$$\begin{aligned}
&H^{\alpha\left(m^{+}-1\right)}\left(t\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{m(x)} dx \\
\leq\ & C\left[\left(\varrho\left(u\right)\right)^{m^{-}/p^{-}+\alpha\left(m^{+}-1\right)} + \left(\varrho\left(u\right)\right)^{m^{+}/p^{-}+\alpha\left(m^{+}-1\right)}\right]
\end{aligned} \tag{4.2.2.23}$$

olur. (4.2.2.12) den

$$s = m^{-} + \alpha p^{-}\left(m^{+}-1\right) \leq p^{-} \text{ ve } s = m^{+} + \alpha p^{-}\left(m^{+}-1\right) \leq p^{-}$$

olur. Bu durumda, Lemma 4.2.2.2 den

$$H^{\alpha\left(m^{+}-1\right)}\left(t\right) \int_{\Omega} \left|u\right|^{m(x)} dx \leq C\left(\left\|\nabla u\right\|^{2} + \varrho\left(u\right)\right) \tag{4.2.2.24}$$

sağlanır. (4.2.2.18)-(4.2.2.24) ten

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) \left[C_0 - \varepsilon \left(\frac{m^+ - 1}{m^+}\right) ck\right] \int_\Omega |u_t|^{m(x)} dx \\ & + (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) \left[C_0 - \varepsilon \left(\frac{m^+ - 1}{m^+}\right) ck\right] \int_\Omega |z(x,1,t)|^{m(x)} dx \\ & + \varepsilon \left[\frac{(1-a) p^-}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) - 1 \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{1}{4\lambda}\right) \int_0^t g(s) ds - \frac{C}{m^- k^{(1-m^-)}}\right] \|\nabla u\|^2 \\ & + \varepsilon \left(\frac{(1-a) p^-}{2} - \lambda\right) (g \circ \nabla u)(t) + \varepsilon (1-a) p^- H(t) \\ & + \varepsilon \frac{(1-a) p^- + 2}{2} \|u_t\|^2 + \varepsilon \left(ab - \frac{C}{m^- k^{(1-m^-)}}\right) \varrho(u) \\ & + \varepsilon (1-a) p^- \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho \end{aligned} \tag{4.2.2.25}$$

elde edilir. Yeterince küçük a için

$$\frac{(1-a) p^- + 2}{2} > 0$$

olur ve yeterince büyük k için

$$ab - \frac{C}{m^- k^{1-m^-}} > 0$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{(1-a) p^-}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) - 1 \\ & + \left(1 - \frac{1}{4\lambda}\right) \int_0^t g(s) ds - \frac{C}{m^- k^{(1-m^-)}} \\ > \ & 0 \end{aligned}$$

olur. k ve a sabit olduğundan, ε yeterince küçük seçilirse

$$C_0 - \varepsilon \left(\frac{m^+ - 1}{m^+}\right) ck > 0$$

ve

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_\Omega u_0 u_1 dx > 0$$

olur. Sonuç olarak, $\eta > 0$ için, (4.2.2.25) ten

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \varepsilon \eta \left[H(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right. \\ & \left. + \varrho(u) + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho \right] \end{aligned} \tag{4.2.2.26}$$

sağlanır. Böylece $\forall t \geq 0$ olmak üzere

$$L(t) \geq L(0) > 0$$

elde edilir. Şimdi, $\sigma, \Gamma > 0$ için

$$L'(t) \geq \Gamma L^{\sigma}(t)$$

olduğunu gösterelim. Hölder eşitsizliğinden

$$\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \|u\|_{p^-}^{1/(1-\alpha)} \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)}$$

elde ederiz, ve Young eşitsizliğinden

$$\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{p^-}^{mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\Theta/(1-\alpha)} \right]$$

olur, burada $1/\mu + 1/\Theta = 1$ dir. (4.2.2.12) den, $\Theta = 2(1-\alpha)$ seçilirse

$$\mu/(1-\alpha) = 2/(1-2\alpha) \leq p^-$$

olur. Böylece

$$\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{p^-}^{s} + \|u_t\|^2 \right]$$

olur, burada $s = \mu/(1-\alpha)$ olur. (4.2.2.8) den

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} &\leq C \left[H(t) + \|u_t\|^2 + \varrho(u) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho \right] \end{aligned} \tag{4.2.2.27}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} L^{1/(1-\alpha)}(t) &= \left[H^{(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx \right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{\alpha/(1-\alpha)} \left[H(t) + \varepsilon^{1/(1-\alpha)} \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \right] \\ &\leq C \left[H(t) + \|u_t\|^2 + \varrho(u) \right] \\ &\leq C \left[H(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + (g \circ \nabla u)(t) \right. \\ &\quad \left. + \varrho(u) + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\xi(x) |z(x,\rho,t)|^{m(x)}}{m(x)} dx d\rho \right] \end{aligned} \tag{4.2.2.28}$$

elde edilir. $\Psi > 0$ için, (4.2.2.26) dan

$$L'(t) \geq \Psi L^{1/(1-\alpha)}(t) \tag{4.2.2.29}$$

sağlanır, $(0,t)$ için, (4.2.2.29) integrallenirse

$$L^{\alpha/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Psi\alpha t/(1-\alpha)}$$

sağlanır, burada $\Psi(t)$, sonlu bir

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Psi\alpha\left[L(0)\right]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

zamanında patlar. Sonuç olarak, ispat tamamlanır.

5. GECİKMELİ TERİM İÇEREN LOGARİTMİK KAYNAK TERİME SAHİP DENKLEMLER

Burada, birinci kısımda, Pişkin ve Yüksekkaya (2022a) tarafından çalışılmış olan "Gecikmeli terim içeren logaritmik Kirchhoff denkleminin çözümlerinin global varlığı, üstel azalması ve patlaması " ele alınmıştır. İkinci kısımda ise, Yüksekkaya ve Pişkin (2022a, 2022b) tarafından çalışılmış olan "Dağılımlı gecikmeli terim ve gecikmeli terim içeren logaritmik bir dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve azalması" ele alınmıştır.

Logaritmik nonlineerlik, genel olarak fiziğin bazı branşlarında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, enflasyon kozmolojisi, nükleer fizik, optik ve jeofizik gibi alanlarda görülür (Bartkowski ve Gŏrka, 2008; Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975, 1976; Cazenave ve Haraux, 1980; Gŏrka, 2009).

5.1 Gecikmeli Terim İçeren Logaritmik Kirchhoff Denkleminin Çözümlerinin Global Varlığı, Üstel Azalması ve Patlaması

Bu kısımda $t>0$ için

$$\begin{cases} u_{tt}-M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\mu_1 u_t\left(x,t\right)+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2\left(s\right)u_t\left(x,t-s\right)ds & \\ =u\left|u\right|^{p-2}\ln\left|u\right|^k, & x\in\Omega, \\ u\left(x,t\right)=0, & x\in\partial\Omega, \\ u_t\left(x,-t\right)=f_0\left(x,t\right), & \left(0,\tau_2\right), \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), & x\in\Omega \end{cases} \tag{5.1.1}$$

denklemini ele alacağız. R^n $(n\geq 1)$ de, Ω, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. k, μ_1 pozitif sabitlerdir, $0\leq\tau_1<\tau_2$ olmak üzere, integral terimi gecikmeli terimi gösterir, ve $\mu_2:[\tau_1,\tau_2]\to[0,\infty)$ sınırlı bir fonksiyondur. u_0, u_1, f_0 başlangıç fonksiyonlarıdır. $s\geq 0$ için $M\left(s\right)$, C^1 in artmayan fonksiyonudur, $M\left(s\right)=m_0+\alpha s^\gamma$, $m_0>0$, $\alpha\geq 0$ ve $\gamma\geq 0$ dır, özel olarak, $M\left(s\right)=1+s^\gamma$ seçeceğiz, burada $m_0=1$, $\alpha=1$ dir. $B_p>0$ bir sabit olmak üzere,

$$\left\|v\right\|_p\leq B_p\left\|\nabla v\right\|_p,\ v\in H_0^1\left(\Omega\right) \tag{5.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Nicaise ve Pignotti (2006), çalışmasına benzer olarak

$$z(x,\rho,s,t) = u_t(x,t-\rho s),\ \Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\times(0,\infty)$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. Buradan

$$sz_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0,\ \Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\times(0,\infty)$$

elde ederiz. Böylece, (5.1.1) problemimiz:

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \mu_1 u_t(x,t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,z(x,1,s,t)\,ds \\ = u|u|^{p-2}\ln|u|^k, & \Omega\times(\tau_1,\tau_2)\times(0,\infty) \\ sz_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0, & \Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\times(0,\infty) \\ z(x,\rho,s,0) = f_0(x,-\rho s), & \Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2) \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \end{cases} \tag{5.1.3}$$

formunu alır.

(5.1.3) probleminin $\forall t \geq 0$ için, enerji fonksiyoneli:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi+\mu_2(s)\right)|z(x,\rho,s,t)|^2\,dsd\rho dx \\ &\quad - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\ln|u|^k\,dx \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

şeklindedir, burda ξ

$$\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,ds + \frac{\xi}{2}(\tau_2-\tau_1) \tag{5.1.5}$$

şartını sağlayan bir sabittir ve

$$\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(s)\,ds$$

şartı sağlanır.

Lemma 5.1.1 (5.1.5) koşulunun sağlandığını varsayalım. $C_0 \geq 0$ için

$$E'(t) \leq -C_0\int_\Omega\left(|u_t|^2 + |z(x,1,s,t)|^2\right)dx \leq 0 \tag{5.1.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

İspat. (5.1.3) probleminin birinci denklemini u_t ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde ve ikinci denklemini, $(\xi + \mu_2(s))\, z$ ile çarpıp, $(\tau_1, \tau_2) \times (0,1) \times \Omega$ için integral alıp toplarsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k \, dx \\ + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,(\xi + \mu_2(s))\,|z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx \end{array} \right) \\ = & -\mu_1 \int_\Omega |u_t|^2 \, dx - \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi + \mu_2(s))\, z z_\rho(x,\rho,s,t)\, ds d\rho dx \\ & - \int_\Omega u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,s,t)\, ds dx \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

elde ederiz. Şimdi, (5.1.7) nin sağ tarafındaki son iki terim için kestirimler elde edelim:

$$\begin{aligned} & -\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi + \mu_2(s))\, z z_\rho(x,\rho,s,t)\, ds d\rho dx \\ = & -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho}\left[(\xi + \mu_2(s))\,|z(x,\rho,s,t)|^2\right] d\rho ds dx \\ = & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, ds + \xi(\tau_2 - \tau_1)\right)\int_\Omega |u_t|^2 \, dx \\ & -\frac{1}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\xi + \mu_2(s))\,|z(x,1,s,t)|^2 \, ds dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & -\int_\Omega u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, z(x,1,s,t)\, ds dx \\ \leq & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, ds \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, ds \int_\Omega |z(x,1,s,t)|^2 \, dx\right) \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} \leq & -\left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, ds - \frac{\xi}{2}(\tau_2 - \tau_1)\right)\int_\Omega |u_t|^2 \, dx \\ & -\frac{\xi}{2}\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |z(x,1,s,t)|^2 \, ds dx \end{aligned}$$

elde ederiz. (5.1.5) ten, $C_0 > 0$ için

$$E'(t) \leq -C_0 \int_\Omega \left(|u_t|^2 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |z(x,1,s,t)|^2 \, ds\right) dx \leq 0$$

elde ederiz.

5.1.1 Global varlık

Burada, (5.1.3) probleminin çözümlerinin global ve düzgün sınırlı olduğunu ispatlayacağız. Bu amaçla

$$I(t) = \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k \, dx$$

ve

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) z^2 ds d\rho dx \end{aligned} \tag{5.1.1.1}$$

olsun. Böylece

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t\|^2$$

sağlanır.

Lemma 5.1.1.1 u_0, $u_1 \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ olsun ve

$$I(0) > 0 \text{ ve } \beta = kC_{p+l}\left(\frac{2pE(0)}{p-2}\right)^{\frac{p-2+l}{2}} < 1 \tag{5.1.1.2}$$

sağlansın. Böylece, $t \in [0,T]$ için $I(t) > 0$ olur.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, süreklilikten $T^* \leq T$ vardır, öyle ki her $t \in [0,T^*]$ için, $I(t) \geq 0$ sağlanır. Bu, her $t \in [0,T^*]$ için

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi + \mu_2(s)) z^2 ds d\rho dx + \frac{1}{p} I(t) \end{aligned}$$

olur ve

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u\|^2$$

sağlanır. Buradan

$$\|\nabla u\|^2 \leq \frac{2p}{p-2} J(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(0) \tag{5.1.1.3}$$

olur. Diğer yandan, $\ln|u| < |u|^l$ kullanarak

$$\int_\Omega |u|^p \ln|u|\, dx \leq \int_\Omega |u|^{p+l}\, dx \tag{5.1.1.4}$$

elde edilir, burada $0 < l < \frac{2}{n-2}$ sağlanır ve

$$p + l < \frac{2n-2}{n-2} + l < \frac{2n}{n-2}$$

olur. Böylece, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+l}(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^p \ln|u|\, dx &\leq C_{p+l} \|\nabla u\|^{p+l} \\ &= C_{p+l} \|\nabla u\|^2 \|\nabla u\|^{p-2+l} \\ &= C_{p+l} \|\nabla u\|^2 \left(\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p-2+l}{2}} \\ &\leq C_{p+l} \left(\frac{2pE(0)}{p-2}\right)^{\frac{p-2+l}{2}} \|\nabla u\|^2 \end{aligned} \tag{5.1.1.5}$$

sağlanır, burada C_{p+l} gömülme sabitidir.

Sonuç olarak, (5.1.1.1)-(5.1.1.2) den

$$I(t) > \|\nabla u\|^2 - \beta \|\nabla u\|^2 > 0,\ \forall t \in [0, T^*] \tag{5.1.1.6}$$

olur. Böylece, T^*, T ye genişletilir.

Teorem 5.1.1.2 u_0, u_1 başlangıç fonksiyonları Lemma 5.1.1.1 şartlarını sağlasın, bu durumda (5.1.3) probleminin çözümleri global ve düzgün sınırlıdır.

İspat. $\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2$ nın, t den bağımsız olarak sınırlı olması yeterlidir.

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z^2 ds d\rho dx + \frac{1}{p} I(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{p}(1-\beta)\|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

olduğunu görülür. Böylece

$$\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \leq CE(0)$$

olur, burada C pozitif bir sabittir.

5.1.2 Üstel azalma

Lemma 5.1.2.1

$$F_1(t) = \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-\rho s} \left(\xi + \mu_2(s)\right) |z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx$$

fonksiyoneli sağlansın, bu durumda c_1, $c_2 > 0$ için

$$F_1'(t) \leq c_1 \|u_t\|^2 - c_2 \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \left(\xi + \mu_2(s)\right) |z(x,\rho,s,t)|^2 \, ds d\rho dx \quad (5.1.2.1)$$

sağlanır (Kafini, 2021).

Lemma 5.1.2.2

$$F_2(t) = NE(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx + \frac{\varepsilon \mu_1}{2} \int_\Omega |u|^2 dx$$

fonksiyoneli sağlansın, böylece

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -(NC_0 - \varepsilon) \|u_t\|^2 - \varepsilon (1 - \beta - \delta) \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ & - \left(NC_0 - \varepsilon \frac{c_*}{4\delta}\right) \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t) \, ds dx \end{aligned} \quad (5.1.2.2)$$

olur, burada N, α ve ε pozitif sabitlerdir.

İspat. $F_2(t)$ nin türevi ve (5.1.3) probleminden

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -NC_0 \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |z(x,1,s,t)|^2\right) dx \\ & + \varepsilon \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right) \\ & - \varepsilon \int_\Omega \|\nabla u\|^{2\gamma} |\nabla u|^2 dx \\ & - \varepsilon \int_\Omega u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x,1,s,t) \, ds dx \end{aligned} \quad (5.1.2.3)$$

sağlanır. Young eşitsizliği ve $\mu_2(s)$ nin sınırlılık özelliğinden, $\delta > 0$ ve $c_* > 0$ için

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x,1,s,t) \, ds dx \\ \leq & \ \delta \|\nabla u\|^2 + \frac{c_*}{4\delta} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t) \, ds dx \end{aligned} \quad (5.1.2.4)$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2.3 (5.1.1.2) sağlandığını varsayalım. Bu durumda, c_3 ve c_4 pozitif sabitleri için

$$E(t) \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

dir.

İspat.

$$F_3(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

şeklinde yazalım. Yeterince küçük ε için

$$F_3(t) \sim E(t) \tag{5.1.2.5}$$

olur. (5.1.2.1)-(5.1.2.2) den

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -(NC_0 - \varepsilon - c_1)\|u_t\|^2 - \varepsilon(1-\beta-\delta)\|\nabla u\|^2 \\ & -\varepsilon\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \left(NC_0 - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta}\right)\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\,dsdx \\ & -c_2\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi+\mu_2(s))|z(x,\rho,s,t)|^2\,dsd\rho dx \end{aligned} \tag{5.1.2.6}$$

elde ederiz. $\beta < 1$ olduğundan, δ u yeterince küçük seçersek

$$\alpha = 1 - \beta - \delta > 0$$

olur.

Bazı $\omega > 0$ için, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq C\|\nabla u\|_2^p \\ &\leq C\left(\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\|\nabla u\|^2 \\ &\leq C\left(E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}}\|\nabla u\|^2 \\ &\leq \omega\|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$-\frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2}\|u\|_p^p \geq -\frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u\|_2^2$$

sağlanır. Böylece, (5.1.2.6) dan

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -(NC_0 - \varepsilon - c_1)\|u_t\|^2 - \frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2}\|u\|_p^p \\ & -\varepsilon\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \left(NC_0 - \varepsilon\frac{c_p}{4\delta}\right)\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x,1,s,t)\,dsdx \\ & -c_2\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\xi+\mu_2(s))|z(x,\rho,s,t)|^2\,dsd\rho dx \end{aligned} \tag{5.1.2.7}$$

sağlanır. δ sabit olduğundan, N yeterince büyük seçülirse

$$NC_0 - \varepsilon - c_1 > 0 \text{ ve } NC_0 - \varepsilon\frac{c_p}{4\delta} > 0$$

olur. Böylece, $C > 0$ için (5.1.2.7) den

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -C\left(\begin{array}{c} \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|u\|_p^p \\ + \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left(\xi + \mu_2(s)\right) z^2 ds d\rho dx \end{array}\right) \\ &\leq -CE(t) \end{aligned}$$

sağlanır. (5.1.2.5) denklik bağıntısı kullanılırsa, ve $(0,t)$ üzerinde basit bir integral alınırsa, istenen sonuç elde edilir.

5.1.3 Çözümlerin patlaması

Burada, negatif başlangıç enerjisi için çözümlerin patlamasını ispatlayacağız.

$$\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \to R$$

olmak üzere

$$\left(\frac{2\delta - 1}{2}\right)\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds \leq \mu_1,\ \delta > \frac{1}{2} \tag{5.1.3.1}$$

sağlanır.

Lemma 5.1.3.1 Farz edelim ki (5.1.3.1) şartı sağlansın ve

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k\, dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)|\left|z^2(x,\rho,s,t)\right| ds d\rho dx \end{aligned} \tag{5.1.3.2}$$

olsun, böylece

$$\mathcal{K}'(t) \leq -c_1\left(\|u_t\|^2 + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\left|z^2(x,1,s,t)\right| ds dx\right) \tag{5.1.3.3}$$

sağlanır.

İspat. (5.1.3) probleminin ilk denklemi u_t ile çarpılıp, Ω bölgesinde integrallenirse

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k\, dx \end{array}\right) \\ = &-\mu_1\|u_t\|^2 - \int_\Omega u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\,|z(x,1,s,t)|\, ds dx \end{aligned} \tag{5.1.3.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|\mu_2(s)\right|\left|z^2(x,\rho,s,t)\right| dsd\rho dx\\
=\;& -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} 2\left|\mu_2(s)\right| zz_\rho dsd\rho dx\\
=\;& \frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right|\left|z^2(x,0,s,t)\right| dsdx\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right|\left|z^2(x,1,s,t)\right| dsdx\\
=\;& \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right| ds\right)\|u_t\|^2\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right|\left|z^2(x,1,s,t)\right| dsdx
\end{aligned} \tag{5.1.3.5}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) =\;& -\mu_1\|u_t\|^2-\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right|\left|u_t z(x,1,s,t)\right| dsdx\\
&+\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right| ds\right)\|u_t\|^2\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2(s)\right|\left|z^2(x,1,s,t)\right| dsdx
\end{aligned} \tag{5.1.3.6}$$

elde edilir. (5.1.3.4)-(5.1.3.5) den, (5.1.3.2) elde edilir. Young eşitsizliğiden, (5.1.3.1) den ve (5.1.3.6) dan, (5.1.3.3) elde edilir. Sonuç olarak, ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}
H(t) =\;& -\mathcal{K}(t)=-\frac{1}{2}\|u_t\|^2-\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\\
&-\frac{k}{p^2}\|u\|_p^p+\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k dx\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|\mu_2(s)\right|\left|z^2(x,\rho,s,t)\right| dsd\rho dx
\end{aligned} \tag{5.1.3.7}$$

olsun.

Lemma 5.1.3.2 Herhangi bir $u\in L^{p+1}(\Omega)$, $2\le s\le p$ ve $C>0$ için

$$\left(\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k dx\right)^{s/p}\le C\left[\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k dx+\|\nabla u\|_2^2\right]$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\int_\Omega|u|^p\ln|u|^k dx\ge 0$ dır (Kafini ve Messaoudi, 2020b).

Lemma 5.1.3.3 $C>0$ sabiti olsun, böylece

$$\|u\|_2^2 \leq C\left[\left(\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k \, dx\right)^{2/p} + \|\nabla u\|_2^{4/p}\right] \tag{5.1.3.8}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k \, dx \geq 0$ dır (Kafini ve Messaoudi, 2020b).

Lemma 5.1.3.4 $C>0$ sabiti olsun, herhangi bir $u \in L^p(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq p$ için

$$\|u\|_p^s \leq C\left[\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_2^2\right] \tag{5.1.3.9}$$

eşitsizliği sağlanır (Kafini ve Messaoudi, 2020b).

Teorem 5.1.3.5 (5.1.3.1) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca

$$\begin{cases} p \geq 2, & n = 1,2, \\ 2 < p < \frac{2(n-1)}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

ve

$$\mathcal{K}(0) < 0 \tag{5.1.3.10}$$

sağlansın. Böylece, (5.1.3) probleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar.

İspat. (5.1.3.3) ten

$$\mathcal{K}(t) \leq \mathcal{K}(0) < 0$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\mathcal{K}'(t) \\ &\geq c_1\left(\|u_t\|^2 + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left|z^2(x,1,s,t)\right| ds dx\right) \\ &\geq c_1 \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left|z^2(x,1,s,t)\right| ds dx \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1.3.11}$$

ve

$$0 \leq H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k \, dx \tag{5.1.3.12}$$

olur.

$$L(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx + \frac{\mu_1 \varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx, \ t \geq 0 \tag{5.1.3.13}$$

tanımlayalım, burada $\varepsilon > 0$ sonradan tanımlanacaktır ve

$$\frac{2(p-2)}{p^2} < \alpha < \frac{p-2}{2p} < 1 \tag{5.1.3.14}$$

dir. (5.1.3) probleminin ilk denklemini u ile çarpıp ve (5.1.3.13) ün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_\Omega u u_{tt} dx + \varepsilon \mu_1 \int_\Omega u u_t dx \\ &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &\quad - \varepsilon \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, uz(x,1,s,t) \, ds dx \\ &\quad + \varepsilon \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \end{aligned} \tag{5.1.3.15}$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, uz(x,1,s,t) \, ds dx \\ \leq\ & \varepsilon \left\{ \delta_1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, ds \right) \|u\|^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\delta_1} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left| z^2(x,1,s,t) \right| ds dx \right\} \end{aligned} \tag{5.1.3.16}$$

olur. Böylece, (5.1.3.15) ten

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \varepsilon \delta_1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, ds \right) \|u\|^2 \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{4\delta_1} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \left| z^2(x,1,s,t) \right| ds dx \\ &\quad + \varepsilon \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \end{aligned} \tag{5.1.3.17}$$

elde edilir. (5.1.3.11) den ve $\frac{1}{4\delta_1 c_1} = \kappa H^{-\alpha}(t)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq [(1-\alpha) - \varepsilon\kappa] H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 \\ &\quad - \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \\ &\quad - \varepsilon \frac{H^\alpha(t)}{4c_1\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, ds \right) \|u\|^2 \end{aligned} \tag{5.1.3.18}$$

olur. $0<a<1$ için

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & [(1-\alpha)-\varepsilon\kappa] H^{-\alpha}(t) H'(t)+\varepsilon a \int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx \\ & +\varepsilon \frac{p(1-a)+2}{2}\|u_{t}\|^{2}+\varepsilon p(1-a) H(t) \\ & +\varepsilon\left(\frac{p(1-a)}{2}-1\right)\|\nabla u\|^{2}+\varepsilon\left(\frac{p(1-a)}{2(\gamma+1)}-1\right)\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ & +\frac{\varepsilon(1-a) k}{p}\|u\|_{p}^{p}-\varepsilon \frac{H^{\alpha}(t)}{4 c_{1} \kappa}\left(\int_{\tau_{1}}^{\tau_{2}}\left|\mu_{2}(s)\right| ds\right)\|u\|^{2} \\ & +\frac{\varepsilon p(1-a)}{2} \int_{\Omega} \int_{0}^{1} \int_{\tau_{1}}^{\tau_{2}} s\left|\mu_{2}(s)\right||z(x, \rho, s, t)|^{2} ds d \rho d x \quad (5.1.3.19) \end{aligned}$$

sağlanır. (5.1.3.8) ve (5.1.3.12) den

$$\begin{aligned} & H^{\alpha}(t)\|u\|_{2}^{2} \\ \leq\ & \left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha}\|u\|_{2}^{2} \\ \leq\ & \left[\left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha+2 / p}+\left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha}\|\nabla u\|_{2}^{4 / p}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} H^{\alpha}(t)\|u\|_{2}^{2} &\leq \left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha}\|u\|_{2}^{2} \\ &\leq \left[\begin{array}{c} \left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{(p \alpha+2) / p}+\frac{2}{p}\|\nabla u\|^{2} \\ +\frac{p-2}{p}\left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha p /(p-2)} \end{array}\right] \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} H^{\alpha}(t)\|u\|_{2}^{2} &\leq \left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha}\|u\|_{2}^{2} \\ &\leq C\left[\begin{array}{c} \left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{(p \alpha+2) / p}+\|\nabla u\|^{2} \\ +\left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx\right)^{\alpha p /(p-2)} \end{array}\right] \end{aligned}$$

elde ederiz, burada $C=\max\left\{\frac{2}{p}, \frac{p-2}{p}\right\}$ dir.

(5.1.3.14) ten

$$2<\alpha p+2 \leq p \text{ ve } 2<\frac{\alpha p^{2}}{p-2} \leq p$$

elde edilir. Böylece, Lemma 5.1.3.2 den

$$H^{\alpha}(t)\|u\|_{2}^{2} \leq C\left(\int_{\Omega}|u|^{p} \ln |u|^{k} dx+\|\nabla u\|_{2}^{2}\right) \quad (5.1.3.20)$$

sağlanır. (5.1.3.19)-(5.1.3.20) den

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & [(1-\alpha)-\varepsilon\kappa] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ & +\varepsilon\left(a-\frac{c}{4c_1\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(s)|\,ds\right)\right)\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k\,dx \\ & +\varepsilon\left(\frac{p(1-a)-2}{2}-\frac{c}{4c_1\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(s)|\,ds\right)\right)\|\nabla u\|^2 \\ & +\varepsilon\left(\frac{p(1-a)}{2(\gamma+1)}-1\right)\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ & +\frac{\varepsilon(1-a)k}{p}\|u\|_p^p+\varepsilon\frac{p(1-a)+2}{2}\|u_t\|^2+\varepsilon p(1-a)H(t) \\ & +\frac{\varepsilon p(1-a)}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu_2(s)|\,|z(x,\rho,s,t)|^2\,dsd\rho dx \end{aligned} \quad (5.1.3.21)$$

elde edilir. $a>0$ yeterince küçük seçilirse, öyle ki

$$\frac{p(1-a)-2}{2}>0 \text{ ve } \left(\frac{p(1-a)}{2(\gamma+1)}-1\right)>0$$

olur ve κ yeterince büyük seçilirse

$$\begin{cases} \frac{p(1-a)-2}{2}-\frac{c}{4c_1\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(s)|\,ds\right)>0\ , \\ a-\frac{c}{4c_1\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(s)|\,ds\right)>0 \end{cases}$$

elde edilir. κ ve a sabit olduğundan, ε yeterince küçük seçilirse

$$(1-\alpha)-\varepsilon\kappa>0,$$

$$H(0)+\varepsilon\int_\Omega u_0u_1dx>0$$

olur. Böylece, $\lambda>0$ için, (5.1.3.21) den

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \lambda\Big[H(t)+\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ & +\|u\|_p^p+\int_\Omega |u|^p\ln|u|^k\,dx \\ & +\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu_2(s)|\,|z(x,\rho,s,t)|^2\,dsd\rho dx\Big] \end{aligned} \quad (5.1.3.22)$$

formu haline gelir ve

$$L(t)\geq L(0)>0,\ t\geq 0 \quad (5.1.3.23)$$

olur. Hölder eşitsizliği ve $\|u\|_2\leq C\|u\|_p$ gömülmesinden

$$\int_\Omega uu_tdx\leq\|u\|_2\|u_t\|_2\leq C\|u\|_p\|u_t\|_2$$

elde edilir. Böylece, Young eşitsizliği kullanılarak, $1/\mu + 1/\theta = 1$ için

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left(\|u\|_p^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta/(1-\alpha)} \right) \tag{5.1.3.24}$$

elde edilir. Lemma 5.1.3.4 ten, $\theta = 2(1-\alpha)$ seçilirse

$$\mu/(1-\alpha) = 2/(1-2\alpha) \leq p$$

olur. Bundan dolayı, $s = 2/(1-2\alpha)$ için, (5.1.3.24) ten

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left(\|u\|_p^s + \|u_t\|_2^2 \right)$$

sağlanır. Bu yüzden, Lemma 5.1.3.4 ten

$$\left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u\|_p^p \right] \tag{5.1.3.25}$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} L^{1/(1-\alpha)}(t) &= \left(H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx + \frac{\mu_1 \varepsilon}{2} \int_\Omega u^2 dx \right)^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq C \left[H(t) + \left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} + \|u\|_2^{2/(1-\alpha)} \right] \\ &\leq C \left[H(t) + \left| \int_\Omega u u_t dx \right|^{1/(1-\alpha)} + \|u\|_p^{2/(1-\alpha)} \right] \\ &\leq C \left[H(t) + \|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u\|_p^p \right], \ t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1.3.26}$$

olur. (5.1.3.22) den ve (5.1.3.26) dan

$$L'(t) \geq \Lambda L^{1/(1-\alpha)}(t), \ t \geq 0 \tag{5.1.3.27}$$

elde edilir, burada Λ, sadece λ ve C bağlı pozitif bir sabittir. (5.1.3.27), $(0,t)$ için integrallenirse

$$L^{\alpha/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Lambda \alpha t/(1-\alpha)}$$

sağlanır. Böylece, $L(t)$ sonlu bir T^* zamanında

$$T \leq T^* = \frac{1-\alpha}{\Lambda \alpha L^{\alpha/(1-\alpha)}(0)}$$

patlar. Sonuç olarak, ispat tamamlanır.

5.2 Dağılımlı Gecikmeli Terim ve Gecikmeli Terim İçeren Logaritmik Bir Dalga Denkleminin Çözümlerinin Lokal Varlığı, Global Varlığı ve Azalması

Bu kısımda, dağılımlı gecikmeli terim içeren

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \mu_1 \Delta u_t(x,t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, \Delta u_t(x,t-s)\, ds \\ = u|u|^{p-2} \ln|u|^k, & \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u_t(x,-t) = f_0(x,-t), & 0 < t \leq \tau_2, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

denklemini ele alacağız, burada, Ω, R^n de sınırlı bir bölgedir. k, μ_1 pozitif sabitlerdir, $\tau_1 < \tau_2$ dir ve $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \to R$ sınırlı bir fonksiyondur ve u_0, u_1, f_0 başlangıç fonksiyonlarıdır, ve gecikmeli terim içeren

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \mu_1 \Delta u_t(x,t) - \mu_2 \Delta u_t(x,t-\tau) \\ = u|u|^{p-2} \ln|u|^k, & \Omega \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & t \in (0,\tau), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \end{cases} \tag{5.2.2}$$

dalga denklemini ele alacağız, burada Ω, R^n de sınırlı bir bölgedir, $\tau > 0$ gecikme zamanını gösterir, μ_1, μ_2 reel sayılardır.

5.2.1 Dağılımlı gecikmeli terim içeren bir dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve azalması

Bir

$$z(x,\rho,s,t) = u_t(x,t-\rho s),\ \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \times (0,\infty)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece

$$s z_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0,\ \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \times (0,\infty)$$

elde ederiz. Bu dönüşümü kullanarak, (5.2.1) problemi

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \mu_1 \Delta u_t(x,t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, \Delta z(x,1,s,t)\, ds \\ = u|u|^{p-2} \ln|u|^k, & \Omega \times (0,+\infty) \\ sz_t(x,\rho,s,t) + z_\rho(x,\rho,s,t) = 0, & \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & \Omega \\ z(x,\rho,s,0) = f_0(x,-\rho s), & \Omega \times (0,1) \times (\tau_1,\tau_2) \end{cases} \tag{5.2.1.1}$$

formunu alır.

5.2.1.1 Lokal varlık

Komornik (1994) ve Pazy (1983) çalışmalarından faydalanarak, lokal varlığı elde edeceğiz:

$v = u_t$ olsun ve

$$\begin{aligned} \Phi &= (u, v, z)^T, \\ \Phi(0) &= \Phi_0 = (u_0, u_1, f_0(\cdot, \rho s))^T, \\ J(\Phi) &= \left(0, u|u|^{p-2} \ln|u|^k, 0\right)^T \end{aligned}$$

ile gösterelim. Böylece, (5.2.1.1) problemi aşağıdaki gibi başlangıç-değer problemi olarak yazılabilir:

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \mathcal{A}\Phi = J(\Phi), \\ \Phi(0) = \Phi_0 \end{cases} \tag{5.2.1.1.1}$$

burada, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ lineer operatörü

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u - \mu_1 \Delta v - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)\, \Delta z(x,1,s,t)\, ds \\ \frac{1}{s} z_\rho \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2\left((0,1) \times (\tau_1,\tau_2); H_0^1(\Omega)\right)$$

dir, $\Phi = (u, v, z)^T$ ve $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{z})^T$ dir, iç çarpım:

$$\left\langle \Phi, \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla \widetilde{u} + v\widetilde{v} \right) dx + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} s \left| \mu_2 (s) \right| \int_0^1 \nabla z \nabla \widetilde{z} d\rho ds dx$$

şeklindedir, $\mathcal{A}$ nın tanım kümesi

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi \in \mathcal{H} : \left(u + \mu_1 v + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2 (s) z \right) \right) \in H^2 (\Omega), \\ z,\, z_\rho \in L^2 \left((0,1) \times (\tau_1, \tau_2) ; H_0^1 (\Omega) \right),\, z(\cdot, 0, \cdot) = v \end{array} \right\}$$

olur.

Teorem 5.2.1.1.1 Farzedelim ki $\mu_1 > \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2 (s)\, ds$ olsun ve

$$\left\{ \begin{array}{ll} p > 2, & n = 1, 2, \\ 2 < p < \frac{2(n-1)}{n-2}, & n \geq 3 \end{array} \right. \tag{5.2.1.1.2}$$

sağlansın. Bu durumda, $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ için, (5.2.1.1.1) probleminin zayıf tek bir çözümü vardır:

$$\Phi \in C \left([0, T) ; \mathcal{H} \right).$$

Ayrıca, $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$ ise,

$$\Phi \in C^1 \left([0, T), \mathcal{H} \right) \cap C \left([0, T), D(\mathcal{A}) \right)$$

olur.

İspat. Hille-Yosida (Brezis 2011, Komornik 1994) teoreminden yararlanacağız. Önce, $\mathcal{A}$ operatörünün monoton olduğunu gösterelim. Böylece, $\forall \Phi \in D(\mathcal{A})$ için

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= -\int_\Omega \nabla v \nabla u dx + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \mu_2 (s) \right| \int_0^1 \nabla z \nabla z_\rho d\rho ds dx \\ &\quad - \int_\Omega v \left[\Delta u + \mu_1 \Delta v + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2 (s) \Delta z (x, 1, s, t)\, ds \right] dx \\ &= \mu_1 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \nabla v \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2 (s) \nabla z (x, 1, s, t)\, ds \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \mu_2 (s) \right| |\nabla z (x, 1, s, t)|^2 ds dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \mu_2 (s) \right| |\nabla v|^2 ds dx \end{aligned} \tag{5.2.1.1.3}$$

elde ederiz. Young eşitsizliğinden, (5.2.1.1.3)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} &\geq \mu_1 \int_\Omega |\nabla \upsilon|^2 \, dx - \frac{|\mu_2|}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla \upsilon|^2 \, ds dx \\ &\quad - \frac{|\mu_2|}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla \upsilon|^2 \, ds dx \\ &= \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2|(s) \, ds \right) \int_\Omega |\nabla \upsilon|^2 \, dx \geq 0\end{aligned}$$

halini gelir. Böylece, $\mathcal{A}$ monoton operatördür.

$\mathcal{A}$ operatörünün maximal olduğunu göstermek için

$$F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$$

olsun, $V = (u, \upsilon, z)^T \in D(\mathcal{A})$ dir ve $(I + \mathcal{A}) V = F$ olsun. Böylece

$$\begin{cases} u - \upsilon = f, \\ \upsilon - \Delta u - \mu_1 \Delta \upsilon - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, \Delta z(x, 1, s, t) \, ds = g, \\ sz + z_\rho = sh \end{cases} \tag{5.2.1.1.4}$$

olur. $z(., 0, .) = u - f = \upsilon$ iken, (5.2.1.1.4) in üçüncü denkleminden

$$z(., \rho, .) = (u - f) e^{-\rho s} + s e^{-\rho s} \int_0^\rho h(., \gamma, s) \, e^{\gamma s} d\gamma \tag{5.2.1.1.5}$$

olur. (5.2.1.1.5) eşitliğini (5.2.1.1.4) nin ikinci denkleminde yerine bırakırsak

$$u - k\Delta u = G$$

elde ederiz, burada

$$\begin{aligned} k &= 1 + \mu_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s} |\mu_2(s)| \, ds > 0, \\ G &= g + f - \left(\mu_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, e^{-s} ds \right) \Delta f \\ &\quad + s \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \, e^{-s} \int_0^1 \Delta h(\gamma, x) \, e^{\gamma s} d\gamma ds \end{aligned} \tag{5.2.1.1.6}$$

burada $G \in H^{-1}(\Omega)$ dir. $H_0^1(\Omega)$ de, bilineer ve lineer formlar:

$$\begin{aligned} B(u, w) &= \int_\Omega uw dx + k \int_\Omega \nabla u \nabla w dx, \\ L(w) &= \langle G, w \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \end{aligned}$$

şeklinde alırız. B nin koersiv ve sürekli, L, $H_0^1(\Omega)$ de sürekli olur.

Lax-Milgram teoreminden $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ için

$$B(u,w) = L(w) \tag{5.2.1.1.7}$$

tek bir $u \in H_0^1(\Omega)$ çözümü vardır. Böylece, $\upsilon = u - f \in H_0^1(\Omega)$ olur. (5.2.1.1.5) ten

$$z, z_\rho \in L^2(\Omega \times (0,1) \times (\tau_1, \tau_2)) \text{ ve } z(.,0,.) = \upsilon$$

elde ederiz. (5.2.1.1.7) de Δf yerine $\Delta(u - \upsilon)$ ve

$$se^{-s} \int_0^1 \Delta h(\gamma, x) e^{\gamma s} d\gamma$$

yerine

$$\Delta z(x,1,s) - e^{-s} \Delta \upsilon$$

yazarsak ve Green formülünü uygularsak $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u\upsilon + \int_\Omega \nabla \left(u + \mu_1 \upsilon + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) e^{-s} z(x,1,s)\, ds \right) \nabla w \\ = & \int_\Omega (f+g) w \end{aligned}$$

elde ederiz. Eliptik denklemler teorisinden (Brezis, 2011)

$$u + \mu_1 \upsilon + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) e^{-s} z(.,1,s)\, ds \in H^2(\Omega)$$

olur. Böylece

$$\Delta \left(u + \mu_1 \upsilon + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) e^{-s} z(.,1,s)\, ds \right) = g + f - u \in L^2(\Omega)$$

olur. Böylece

$$V = (u, \upsilon, z)^T \in D(\mathcal{A})$$

olur. Sonuç olarak, $I + \mathcal{A}$ sürjektiftir ve bu durumda, $\mathcal{A}$ maximal olur. Şimdi, $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ nin lokal Lipschitz olduğunu gösterelim.

$$f(s) = |s|^{p-2} s \ln |s|^k, \ |s| \neq 0 \text{ ve } f(s) = 0, \ |s| = 0$$

olsun. Bu durumda

$$f'(s) = k[1 + (p-1)\ln|s|]\,|s|^{p-2}, \ |s| \neq 0 \text{ ve } f'(s) = 0, \ |s| = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\left\|J(\Phi)-J\left(\widetilde{\Phi}\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2} &= \left\|\left(0,|u|^{p-2}u\ln|u|^{k}-|\widetilde{u}|^{p-2}\widetilde{u}\ln|\widetilde{u}|^{k},0\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2}\\ &= \|f(u)-f(\widetilde{u})\|_{L^{2}}^{2}\end{aligned}$$

sağlanır. $\theta\in[0,1]$ için, ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned}&|f(u)-f(\widetilde{u})|\\ =\;&|f'(\theta u+(1-\theta)\widetilde{u})(u-\widetilde{u})|\\ =\;&k\left|[1+(p-1)\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|]\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}(u-\widetilde{u})\right|\\ \leq\;&k\,[1+(p-1)\,|\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}||]\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}|u-\widetilde{u}|\\ =\;&k(p-1)\,|\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}||\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}|u-\widetilde{u}|\\ &+k\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}|u-\widetilde{u}|\end{aligned}$$

olur. $\varepsilon>0$ için

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}$$

logaritmik terim için,

$$\lim_{|s|\to+\infty}\frac{\ln|s|}{|s|^{\varepsilon}}=0$$

sağlanır. Bu durumda, $B>0$ ve $\forall\,|s|>B$ için

$$\frac{\ln|s|}{|s|^{\varepsilon}}<1$$

olur. Böylece, $|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|>B$ iken

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\leq|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{\varepsilon}$$

eşitsizliği sağlanır, ve

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}\leq|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}$$

dir. $p>2$ ve $|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\leq B$ olduğundan, $A>0$ için

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}\leq A$$

elde ederiz. Böylece

$$\ln|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}\leq A+|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|f(u)-f(\widetilde{u})| &\leq k(p-1)\left|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}\right|^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}| \\
&\quad +k\left|\theta u+(1-\theta)\widetilde{u}\right|^{p-2}|u-\widetilde{u}|+kA(p-1)|u-\widetilde{u}| \\
&\leq k(p-1)\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}| \\
&\quad +k\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{p-2}|u-\widetilde{u}|+kA(p-1)|u-\widetilde{u}| \quad (5.2.1.1.8)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $u,\ \widetilde{u}\in H_0^1(\Omega)$ olduğundan, Hölder eşitsizliği, (5.2.1.1.2) ve Sobolev gömülmesinden

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^r(\Omega),\ 1\leq r\leq\frac{2n}{n-2}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{p-2}|u-\widetilde{u}|\right]^2dx \\
=&\int_\Omega\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-2)}|u-\widetilde{u}|^2dx \\
\leq& C\left[\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)}+\|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

sağlanır. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}|\right]^2dx \\
=&\int_\Omega\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\widetilde{u}|^2dx \\
\leq&\left(\int_\Omega\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{\frac{2(p-2+\varepsilon)(p-1)}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\left(\int_\Omega|u-\widetilde{u}|^{2(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
\leq&\left(\int_\Omega\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-1)+\frac{2\varepsilon(p-1)}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. $p<\frac{2(n-1)}{n-2}$ olduğundan, yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$p^*=2(p-1)+\frac{2\varepsilon(p-1)}{p-2}\leq\frac{2n}{n-2}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\widetilde{u}|^2dx \\
\leq& C\left[\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}+\|\widetilde{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^2 \\
\leq& C\left[\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*}+\|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda, son üç eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
&\left\| J(\Phi) - J\left(\widetilde{\Phi}\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
\leq\ & \left[k^2(p-1)^2 A^2\right] \|u-\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&+C\left[\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)} + \|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)}\right)^{\frac{p-2}{p-1}} + \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*} + \|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{p^*}\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\right] \\
&\times \|u-\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
\leq\ & C\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \|u-\widetilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylelikle, J Lokal Lipschitz dir ve ispat tamamlanır.

5.2.1.2 Global varlık

Burada, (5.2.1.1) probleminin çözümlerinin global varlığını ispatlayacağız. (5.2.1.1) probleminin enerji fonksiyoneli:

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k\, dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, ds d\rho dx
\end{aligned} \tag{5.2.1.2.1}$$

dir.

Lemma 5.2.1.2.1 $E(t)$ enerji fonksiyoneli,

$$E'(t) \leq -\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right)\right] \int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx < 0 \tag{5.2.1.2.2}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (5.2.1.1) probleminin birinci denklemini u_t ile çarpıp ve Ω üzerinde integrallersek ve ikinci denklemini $-|\mu_2|\Delta z$ ile çarpıp ve $\Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)$ üzerinde integralleyip toplarsak

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k\, dx \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, ds d\rho dx \end{array}\right] \\
=\ & -\mu_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx - \int_\Omega \nabla u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\,\nabla z(x,1,s,t)\, ds dx \\
&- |\mu_2(s)| \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nabla z \nabla z_\rho(x,\rho,s,t)\, ds d\rho dx
\end{aligned} \tag{5.2.1.2.3}$$

elde ederiz. Şimdi, (5.2.1.2.3) nin sağ tarafındaki iki terim için kestirim elde edelim:

$$\begin{aligned} & -\left|\mu_2(s)\right| \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \nabla z \nabla z_\rho(x,\rho,s,t)\, ds d\rho dx \\ = & -\frac{\left|\mu_2(s)\right|}{2} \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\right] ds d\rho dx \\ = & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2(s)\right| ds\right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ & -\frac{\left|\mu_2(s)\right|}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2 ds dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & -\int_\Omega \nabla u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2(s)\right| \nabla z(x,1,s,t)\, ds dx \\ \leq & \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2(s)\right| ds \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right) \\ & +\frac{1}{2}\left(\left|\mu_2(s)\right| \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2 ds dx\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{dE(t)}{dt} \leq -\mu_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2(s)\right| ds\right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ & -\frac{\left|\mu_2(s)\right|}{2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2 ds dx \\ & +\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2(s)\right| ds \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx\right) \\ & +\frac{1}{2}\left(\left|\mu_2(s)\right| \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2 ds dx\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$E'(t) \leq -\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2(s)\right| ds\right)\right] \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \leq 0$$

elde edilir.

$$I(t) = \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx$$

$$\begin{aligned} J(t) = & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \\ & +\frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|\mu_2(s)\right| |\nabla z(x,\rho,s,t)|^2 ds d\rho dx \end{aligned} \qquad (5.2.1.2.4)$$

olsun. Böylece

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t\|^2$$

olur.

Lemma 5.2.1.2.2 $u_0,\ u_1 \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ olsun ve

$$I(0) > 0 \text{ ve } \beta = kC_{p+l}\left(\frac{2pE(0)}{p-2}\right)^{\frac{p-2+l}{2}} < 1 \tag{5.2.1.2.5}$$

sağlansın. Böylece, $t \in [0,T]$ için, $I(t) > 0$ olur.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, $T^* \leq T$ dir ve $\forall t \in [0,T^*]$ için, $I(t) \geq 0$ dir. Böylece, $\forall t \in [0,T^*]$ için

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{1}{p}I(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, ds d\rho dx \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u\|^2$$

elde edilir.

$$\|\nabla u\|^2 \leq \frac{2p}{p-2}J(t) \leq \frac{2p}{p-2}E(t) \leq \frac{2p}{p-2}E(0) \tag{5.2.1.2.6}$$

dir. $\ln|u| < |u|^l$ olduğundan

$$\int_\Omega |u|^p \ln|u|\, dx \leq \int_\Omega |u|^{p+l}\, dx \tag{5.2.1.2.7}$$

sağlanır, burada $0 < l < \frac{2}{n-2}$ sağlanır ve

$$p + l < \frac{2n-2}{n-2} + l < \frac{2n}{n-2}$$

dır. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+l}(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p \ln|u|\, dx &\leq C_{p+l}\|\nabla u\|^{p+l} \\ &= C_{p+l}\|\nabla u\|^2 \|\nabla u\|^{p-2+l} \\ &= C_{p+l}\|\nabla u\|^2 \left(\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p-2+l}{2}} \\ &\leq C_{p+l}\left(\frac{2pE(0)}{p-2}\right)^{\frac{p-2+l}{2}} \|\nabla u\|^2 \end{aligned} \tag{5.2.1.2.8}$$

sağlanır, burada C_{p+l} gömülme sabitidir.

(5.2.1.2.4)-(5.2.1.2.5) ten $\forall t \in [0, T^*]$ için

$$I(t) > \|\nabla u\|^2 - \beta \|\nabla u\|^2 > 0 \tag{5.2.1.2.9}$$

olur. Böylece, T^*, T ye genişletilebilir.

Teorem 5.2.1.2.3 Kabul edelim ki Lemma 5.2.1.2.2 sağlasın, bu durumda, (5.2.1.1) probleminin çözümleri düzgün sınırlı ve globaldir.

İspat. $\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2$ nın t den bağımsız olarak sınırlı olması yeterlidir.

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{1}{p}I(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, ds d\rho dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{p}(1-\beta)\|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \leq CE(0)$$

sağlanır, burada C pozitif bir katsayıdır.

5.2.1.3 Üstel azalma

Burada çözümlerin üstel azalmasını ispatlayacağız.

Lemma 5.2.1.3.1 $F_1(t)$,

$$F_1(t) = \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho}\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, ds d\rho dx$$

olsun, böylece

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2\, dx \\ &\quad - \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s}\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,1,s,t)|^2\, ds dx \\ &\quad - \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)| \int_0^1 e^{-s\rho}\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, d\rho ds dx \end{aligned} \tag{5.2.1.3.1}$$

sağlanır (Messaoudi vd., 2016).

Lemma 5.2.1.3.2 $F_2(t)$

$$F_2(t) = NE(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx + \frac{\varepsilon \mu_1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

olsun, böylece

$$\begin{aligned} & F_2'(t) \\ \leq & -\left\{ N\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \right] - \varepsilon \right\} \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ & -\varepsilon (1 - \beta - \delta) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \frac{c_*}{4\delta} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2 ds dx \end{aligned} \quad (5.2.1.3.2)$$

sağlanır, burada N, α ve ε pozitif katsayılardır.

İspat. $F_2'(t)$ ve (5.2.1.1) den

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -N\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \right] \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ & +\varepsilon \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right) \\ & -\varepsilon \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \nabla u \nabla z(x,1,s,t) ds dx \end{aligned} \quad (5.2.1.3.3)$$

olur. Young eşitsizliği ve $\mu_2(s)$ nin sınırlı olmasından, herhangi bir $\delta > 0$ ve $c_* > 0$ için,

$$\begin{aligned} & -\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \nabla u \nabla z(x,1,s,t) ds dx \\ \leq & \delta \|\nabla u\|^2 + \frac{c_*}{4\delta} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2 ds dx \end{aligned} \quad (5.2.1.3.4)$$

olur.

Teorem 5.2.1.3.3 Varsayalım ki (5.2.1.2.5) sağlansın. Bu durumda,

$$E(t) \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

olur, burada c_3 ve c_4 pozitif katsayılardır.

İspat.

$$F_3(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

olsun. ε, yeterince küçük seçilirse

$$F_3(t) \sim E(t) \quad (5.2.1.3.5)$$

denkliği sağlanır. (5.2.1.3.1) ve (5.2.1.3.2) den

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -\left\{N\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right)\right] - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right) - \varepsilon\right\} \\ &\quad \times \|\nabla u_t\|^2 - \varepsilon(1-\beta-\delta)\|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \left(e^{-s}|\mu_2(s)| - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta}\right)\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2\, dsdx \\ &\quad - \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu_2(s)| \int_0^1 e^{-s\rho}|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, d\rho dsdx \qquad (5.2.1.3.6) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\beta < 1$ olduğundan, δ yeterince küçük seçilirse

$$\alpha = 1 - \beta - \delta > 0$$

olur.

$\omega > 0$ olsun, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq C\|\nabla u\|_2^p \\ &\leq C\left(\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\|\nabla u\|^2 \\ &\leq C\left(E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}}\|\nabla u\|^2 \\ &\leq \omega\|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$-\frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2}\|u\|_p^p \geq -\frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u\|_2^2$$

olur. Böylece, (5.2.1.3.6) dan

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -\left\{N\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right)\right] - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right) - \varepsilon\right\} \\ &\quad \times \|\nabla u_t\|^2 - \frac{\varepsilon\alpha}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2}\|u\|_p^p \\ &\quad - \left(e^{-s}|\mu_2(s)| - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta}\right)\int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\nabla z(x,1,s,t)|^2\, dsdx \\ &\quad - \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu_2(s)| \int_0^1 e^{-s\rho}|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, d\rho dsdx \qquad (5.2.1.3.7) \end{aligned}$$

olur. δ sabit olduğundan, N yeterince büyük seçilirse

$$\begin{aligned} N\left[\mu_1 - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right)\right] - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\, ds\right) - \varepsilon &> 0, \\ e^{-s}|\mu_2(s)| - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta} &> 0 \end{aligned}$$

olur. $C > 0$ için, (5.2.1.3.7) den

$$\begin{aligned} & F_3'(t) \\ \leq\ & -C\left[\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|_p^p \right. \\ & \left. + \int_\Omega \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu_2(s)|\,|\nabla z(x,\rho,s,t)|^2\, ds d\rho dx \right] \\ \leq\ & -CE(t) \end{aligned}$$

halini alır. Bu ifade, $(0,t)$ için integrallenirse ve (5.2.1.3.5) denkliği kullanılırsa, ispat tamamlanır.

5.2.2 Gecikmeli terim içeren bir dalga denkleminin çözümlerinin lokal varlığı, global varlığı ve azalması

$x \in \Omega$, $\rho \in (0,1)$, $t > 0$ olmak üzere, yeni bir

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t - \tau\rho)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece $x \in \Omega$, $\rho \in (0,1)$, $t > 0$ için

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0$$

olur. Bu dönüşümü, (5.2.2) probleminde yerine bırakırsak

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \mu_1 \Delta u_t(x,t) - \mu_2 \Delta z(x,1,t) = u|u|^{p-2}\ln|u|^k & \Omega \times (0,\infty) \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & \Omega \times (0,1) \times (0,\infty) \\ u(x,t) = z(x,\rho,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & t \in (0,\tau) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{5.2.2.1}$$

formu haline gelir.

Lemma 5.2.2.1 Kabul edelim ki

$$|\mu_2| < \mu_1$$

olsun. (5.2.2.1) probleminin enerji fonksiyoneli $E(t)$

$$E'(t) \leq -(\mu_1 - |\mu_2|)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \leq 0 \tag{5.2.2.2}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. (5.2.2.1) probleminin birinci denklemini u_t ile çarpıp, Ω üzerinde ve ikinci denklemini $-|\mu_2|\Delta z$ ile çarpıp ve $\Omega \times (0,1)$ üzerinde integral alıp toplarsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln|u|^k dx \\ + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{\tau|\mu_2|}{2}\int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 d\rho dx \end{array}\right] \\ = & -\mu_1 \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - |\mu_2| \int_\Omega \nabla z(x,1,t)\nabla u_t dx \\ & - |\mu_2| \int_\Omega \int_0^1 \nabla z(x,\rho,t)\nabla z_\rho(x,\rho,t) d\rho dx \end{aligned} \tag{5.2.2.3}$$

olur. (5.2.2.3) eşitliğinin sağ tarafındaki iki terim içeren kestirim elde edelim

$$\begin{aligned} & -|\mu_2| \int_\Omega \nabla z(x,1,t)\, \nabla u_t dx \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left(|\mu_2| \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + |\mu_2| \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & -|\mu_2| \int_\Omega \int_0^1 \nabla z(x,\rho,t)\, \nabla z_\rho(x,\rho,t)\, d\rho dx \\ =\ & -\frac{|\mu_2|}{2} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[|z(x,\rho,t)|^2 \right] d\rho dx \\ =\ & \frac{|\mu_2|}{2} \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \frac{|\mu_2|}{2} \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} \leq\ & -\left(\mu_1 - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ & -|\mu_2| \int_\Omega \nabla z(x,1,t)\, \nabla u_t dx - \frac{|\mu_2|}{2} \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$E'(t) \leq -(\mu_1 - |\mu_2|) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \leq 0$$

olur. Böylece, enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) =\ & \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \\ & + \frac{\tau|\mu_2|}{2} \int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 d\rho dx \end{aligned} \tag{5.2.2.4}$$

bulunur.

5.2.2.1 Lokal varlık

Komornik (1994) ve Pazy (1983) çalışmalarından faydalanarak, lokal varlığı elde edeceğiz. $\upsilon = u_t$ ve

$$\begin{aligned} \Phi &= (u, \upsilon, z)^T, \\ \Phi(0) &= \Phi_0 = (u_0, u_1, f_0(\cdot, \rho\tau))^T \\ J(\Phi) &= \left(0, u|u|^{p-2} \ln |u|^k, 0\right)^T \end{aligned}$$

olsun. (5.2.2.1) problemi

$$\begin{cases} \partial_t \Phi + \mathcal{A}\Phi = J(\Phi), \\ \Phi(0) = \Phi_0 \end{cases} \tag{5.2.2.1.1}$$

başlangıç-değer problemi olarak yazılabilir, burada $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ lineer operatörü

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -\upsilon \\ -\Delta u - \mu_1 \Delta \upsilon - \mu_2 \Delta z(\cdot, 1) \\ \frac{1}{\tau} z_\rho \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır, $D(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{H}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Her

$$\Phi = (u, \upsilon, z)^T \text{ ve } \widetilde{\Phi} = (\widetilde{u}, \widetilde{\upsilon}, \widetilde{z})^T$$

için, Hilbert uzayı

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2\left((0,1); H_0^1(\Omega)\right)$$

ve iç çarpım

$$\left\langle \Phi, \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla \widetilde{u} + \upsilon \widetilde{\upsilon}\right) dx + \tau |\mu_2| \int_\Omega \int_0^1 \nabla z \nabla \widetilde{z} d\rho dx$$

olur. $\mathcal{A}$ nın tanım kümesi

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} (u, \upsilon, z) \in \mathcal{H} / u + \mu_1 \upsilon + \mu_2 z(\cdot, 1) \in H^2(\Omega) \\ z,\ z_\rho \in L^2\left((0,1), H_0^1(\Omega)\right),\ z(\cdot, 0) = \upsilon \end{array} \right\}$$

olur.

Teorem 5.2.2.1.1 Kabul edelim ki $\mu_1 \geq |\mu_2|$ olsun ve

$$\begin{cases} p > 2 & n = 1, 2, \\ 2 < p < \frac{2(n-1)}{n-2} & n \geq 3 \end{cases} \tag{5.2.2.1.2}$$

sağlansın. Bu durumda, herhangi $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ için, (5.2.2.1) probleminin

$$\Phi \in C([0, T); \mathcal{H})$$

bir tek zayıf çözümü olur. Ayrıca, eğer $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$ ise,

$$\Phi \in C^1([0, T), \mathcal{H}) \cap C([0, T), D(\mathcal{A}))$$

sağlanır.

İspat. Hille-Yosida teoreminden faydalanacağız. $\mathcal{A}$ nın monoton olduğunu gösterelim. Her $\Phi \in D(\mathcal{A})$ için

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} &= -\int_\Omega \nabla\upsilon\nabla u dx + |\mu_2| \int_0^1 \int_\Omega \nabla z \nabla z_\rho dx d\rho \\ &\quad + \int_\Omega \upsilon\left[-\Delta u - \mu_1\Delta\upsilon - \mu_2\Delta z(\cdot,1)\right] dx \\ &= \mu_1 \int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx + \mu_2 \int_\Omega \nabla\upsilon\nabla z(\cdot,1)\, dx \\ &\quad + \frac{|\mu_2|}{2}\int_\Omega |\nabla z(\cdot,1)|^2 dx - \frac{|\mu_2|}{2}\int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx \qquad (5.2.2.1.3)\end{aligned}$$

olur. Young eşitsizliğinden, (5.2.2.1.3)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} &\geq \mu_1 \int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx - \frac{|\mu_2|}{2}\int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx - \frac{|\mu_2|}{2}\int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx \\ &= (\mu_1 - |\mu_2|)\int_\Omega |\nabla\upsilon|^2 dx \geq 0\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\mathcal{A}$ monoton operatördür.

$\mathcal{A}$ nın maximal olduğunu gösterelim,

$$F = (f, g, h)^T \in \mathcal{H}$$

olsun. $V = (u, \upsilon, z)^T \in D(\mathcal{A})$ ve

$$(I + \mathcal{A})V = F \qquad (5.2.2.1.4)$$

dır. Böylece,

$$\begin{cases} u - \upsilon = f, \\ \upsilon - \Delta u - \mu_1\Delta\upsilon - \mu_2\Delta z(.,1) = g, \\ \tau z + z_\rho = \tau h \end{cases} \qquad (5.2.2.1.5)$$

olur. $z(.,0) = u - f = \upsilon$ olduğundan, (5.2.2.1.5) in üçüncü denkleminden

$$z(.,\rho) = (u - f)e^{-\rho\tau} + \tau e^{-\rho\tau}\int_0^\rho h(\gamma,.)\, e^{\gamma\tau} d\gamma \qquad (5.2.2.1.6)$$

olur. (5.2.2.1.6) yı (5.2.2.1.5) in ikinci denkleminde yerine bırakırsak

$$u - k\Delta u = G$$

olur, burada

$$\begin{aligned} k &= 1+\mu_1+\mu_2 e^{-\tau} > 0, \\ G &= g+f-\left(\mu_1+\mu_2 e^{-\tau}\right)\Delta f+\tau\mu_2 e^{-\tau}\int_0^1 \Delta h\left(\gamma,.\right)e^{\gamma\tau}d\gamma \end{aligned} \qquad (5.2.2.1.7)$$

burada $G \in H^{-1}(\Omega)$ olur. $H_0^1(\Omega)$ de, bilineer ve lineer formları tanımlayalım

$$\begin{aligned} B\left(u,w\right) &= \int_\Omega uwdx+k\int_\Omega \nabla u\nabla w dx, \\ L\left(w\right) &= \left\langle G,w\right\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \end{aligned}$$

$H_0^1(\Omega)$ de, B koersiv (coersive) ve sürekli, ve L sürekli olur.
Lax-Milgram teoreminden $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ için

$$B\left(u,w\right)=L\left(w\right) \qquad (5.2.2.1.8)$$

nin tek bir $u \in H_0^1(\Omega)$ çözümü vardır. Sonuç olarak, $\upsilon = u-f \in H_0^1(\Omega)$ ve

$$z\left(.,\rho\right),\ z_\rho\left(.,\rho\right) \in H_0^1\left(\Omega\right)$$

olur. (5.2.2.1.6) dan

$$z \in L^2\left(\left(0,1\right),\ H_0^1\left(\Omega\right)\right)$$

olur. Bundan dolayı, (5.2.2.1.4) probleminin bir tek $V \in D(\mathcal{A})$ çözümü vardır. (5.2.2.1.8) in sağ tarafında, Δf yerine $\Delta\left(u-\upsilon\right)$ ve

$$\tau e^{-\tau}\int_0^1 \Delta h\left(\gamma,x\right)e^{\gamma\tau}d\gamma$$

yerine

$$\Delta z\left(x,1\right)-e^{-\tau}\Delta\upsilon$$

alınırsa, ve Green formülü kullanılırsa $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\int_\Omega uw+\int_\Omega \nabla\left(u+\mu_1\upsilon+\mu_2 z\left(x,1\right)\right)\nabla w=\int_\Omega\left(f+g\right)w$$

olur. Standard elliptik denklemler teorisinden

$$u+\mu_1\upsilon+\mu_2 z\left(.,1\right) \in H^2\left(\Omega\right)$$

olur. Böylece

$$\Delta\left(u+\mu_1\upsilon+\mu_2 z\left(.,1\right)\right)=g+f-u\in L^2\left(\Omega\right)$$

dır. Ayrıca

$$V=\left(u,\upsilon,z\right)^T\in D\left(\mathcal{A}\right)$$

olur. Sonuç olarak, $I+\mathcal{A}$ sürjektiftir ve bu durumda, $\mathcal{A}$ maximal olur.
Şimdi, $J:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ lokal Lipschitz olduğunu gösterelim.

$$f\left(s\right)=\left|s\right|^{p-2}s\ln\left|s\right|^k,\ \left|s\right|\neq 0 \text{ ve } f\left(s\right)=0,\ \left|s\right|=0$$

olsun, bu durumda

$$f'\left(s\right)=k\left[1+\left(p-1\right)\ln\left|s\right|\right]\left|s\right|^{p-2},\ \left|s\right|\neq 0 \text{ ve } f'\left(s\right)=0,\ \left|s\right|=0$$

olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
&\left\|J\left(\Phi\right)-J\left(\widetilde{\Phi}\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2\\
=&\left\|\left(0,\left|u\right|^{p-2}u\ln\left|u\right|^k-\left|\widetilde{u}\right|^{p-2}\widetilde{u}\ln\left|\widetilde{u}\right|^k,0\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2\\
=&\left\|\left|u\right|^{p-2}u\ln\left|u\right|^k-\left|\widetilde{u}\right|^{p-2}\widetilde{u}\ln\left|\widetilde{u}\right|^k\right\|_{L^2}^2\\
=&\left\|f\left(u\right)-f\left(\widetilde{u}\right)\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

olur. $\theta\in[0,1]$ için, ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(u\right)-f\left(\widetilde{u}\right)\right|=\left|f'\left(\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right)\left(u-\widetilde{u}\right)\right|\\
=&\ k\left|\left[1+\left(p-1\right)\ln\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|\right]\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|^{p-2}\left(u-\widetilde{u}\right)\right|\\
\leq&\ k\left[1+\left(p-1\right)\left|\ln\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|\right|\right]\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|^{p-2}\left|u-\widetilde{u}\right|\\
=&\ k\left(p-1\right)\left|\ln\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|\right|\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|^{p-2}\left|u-\widetilde{u}\right|\\
&+k\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|^{p-2}\left|u-\widetilde{u}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\ln\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|\left|\theta u+\left(1-\theta\right)\widetilde{u}\right|^{p-2}$$

logaritmik terimi için, herhangi $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{\left|s\right|\rightarrow+\infty}\frac{\ln\left|s\right|}{\left|s\right|^{\varepsilon}}=0$$

olur. Bu durumda, $B > 0$ için

$$\frac{\ln|s|}{|s|^{\varepsilon}} < 1, \forall |s| > B$$

olur. Böylece, $|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}| > B$ olduğundan

$$\ln|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}| \leq |\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{\varepsilon}$$

olur ve

$$\ln|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2} \leq |\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}$$

dir. $p > 2$ olduğundan, $A > 0$ ve $|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}| \leq B$ için

$$\ln|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2} \leq A$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \ln|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|\,|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2} \\ \leq\ & A + |\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} & |f(u) - f(\widetilde{u})| \leq k(p-1)|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}| \\ & +k|\theta u + (1-\theta)\widetilde{u}|^{p-2}|u-\widetilde{u}| + kA(p-1)|u-\widetilde{u}| \\ \leq\ & k(p-1)(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}| \\ & +k(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2}|u-\widetilde{u}| + kA(p-1)|u-\widetilde{u}| \end{aligned} \tag{5.2.2.1.9}$$

sağlanır. $u,\ \widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ olduğundan, Hölder eşitsizliği, (5.2.2.1.2) ve Sobolev gömülmesinden

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),\ 1 \leq r \leq \frac{2n}{n-2}$$

olur ve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[(|u|+|\widetilde{u}|)^{p-2}|u-\widetilde{u}|\right]^2 dx \\ =\ & \int_{\Omega} (|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-2)}|u-\widetilde{u}|^2 dx \\ \leq\ & C\left(\int_{\Omega}(|u|+|\widetilde{u}|)^{2(p-1)}dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\left(\int_{\Omega}|u-\widetilde{u}|^{2(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ \leq\ & C\left[\|u\|^{2(p-1)}_{L^{2(p-1)}(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{2(p-1)}_{L^{2(p-1)}(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \\ \leq\ & C\left[\|u\|^{2(p-1)}_{H_0^1(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|^{2(p-1)}_{H_0^1(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{p-2+\varepsilon}|u-\widetilde{u}|\right]^2 dx \\
= &\int_\Omega \left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\widetilde{u}|^2 dx \\
\leq &\left(\int_\Omega \left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{\frac{2(p-2+\varepsilon)(p-1)}{p-2}} dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega |u-\widetilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
\leq &\left(\int_\Omega \left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-1)+\frac{2\varepsilon(p-1)}{p-2}} dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \|u-\widetilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(\Omega)}
\end{aligned}$$

olur. $p<\frac{2(n-1)}{n-2}$ olduğundan, $\varepsilon>0$ yeterince küçük seçersek

$$p^*=2(p-1)+\frac{2\varepsilon(p-1)}{p-2}\leq\frac{2n}{n-2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|u|+|\widetilde{u}|\right)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\widetilde{u}|^2 dx \\
\leq &C\left[\|u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}+\|\widetilde{u}\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \\
\leq &C\left[\|u\|^{p^*}_{H^1_0(\Omega)}+\|\widetilde{u}\|^{p^*}_{H^1_0(\Omega)}\right]^{\frac{p-2}{p-1}}\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

olur. Böylece, son üç kestirimden

$$\begin{aligned}
&\left\|J(\Phi)-J\left(\widetilde{\Phi}\right)\right\|^2_{\mathcal{H}} \\
\leq &\left[k^2(p-1)^2A^2\right]\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
&+C\left[\left(\|u\|^{2(p-1)}_{H^1_0(\Omega)}+\|\widetilde{u}\|^{2(p-1)}_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{p-2}{p-1}}+\left(\|u\|^{p^*}_{H^1_0(\Omega)}+\|\widetilde{u}\|^{p^*}_{H^1_0(\Omega)}\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\right] \\
&\times\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
\leq &C\left(\|u\|_{H^1_0(\Omega)},\|\widetilde{u}\|_{H^1_0(\Omega)}\right)\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, J lokal Lipschitz olur. Böylece, ispat tamamlanır.

5.2.2.2 Global varlık

$$I(t)=\|\nabla u\|^2-\int_\Omega |u|^p\ln|u|^k dx$$

ve

$$\begin{aligned}
J(t) = &\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx+\frac{k}{p^2}\|u\|^p_p \\
&-\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\ln|u|^k dx+\frac{\tau|\mu_2|}{2}\int_\Omega\int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 d\rho dx \quad (5.2.2.2.1)
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2}\|u_t\|^2$$

olur.

Lemma 5.2.2.2.1 $u_0,\ u_1 \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ başlangıç fonksiyonları

$$I(0) > 0 \text{ ve } \beta = kC_{p+l}\left(\frac{2pE(0)}{p-2}\right)^{\frac{p-2+l}{2}} < 1 \tag{5.2.2.2.2}$$

sağlar. Böylece, herhangi $t \in [0,T]$ için, $I(t) > 0$ olur.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, $T^* \leq T$ olur öyle ki her $t \in [0,T^*]$ için, $I(t) \geq 0$ olur. Bu durumda, her $t \in [0,T^*]$ için

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{p-2}{2p}\|\nabla u\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{1}{p}I(t) \\ &\quad + \frac{\tau|\mu_2|}{2}\int_\Omega\int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 \, d\rho dx \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$J(t) \geq \frac{p-2}{2p}\|\nabla u\|^2$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 &\leq \frac{2p}{p-2}J(t) \\ &\leq \frac{2p}{p-2}E(t) \\ &\leq \frac{2p}{p-2}E(0) \end{aligned} \tag{5.2.2.2.3}$$

olur. Ayrıca, $\ln|u| < |u|^l$ olduğundan

$$\int_\Omega |u|^p \ln|u| \, dx \leq \int_\Omega |u|^{p+l} \, dx \tag{5.2.2.2.4}$$

olur, burada $0 < l < \frac{2}{n-2}$ dir ve

$$p + l < \frac{2n-2}{n-2} + l < \frac{2n}{n-2}$$

sağlanır. Böylece, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+l}(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^p \ln|u| \, dx &\leq C_{p+l}\|\nabla u\|^{p+l} \\ &= C_{p+l}\|\nabla u\|^2\|\nabla u\|^{p-2+l} \\ &= C_{p+l}\|\nabla u\|^2\left(\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p-2+l}{2}} \\ &\leq C_{p+l}\left(\frac{2pE(0)}{p-2}\right)^{\frac{p-2+l}{2}}\|\nabla u\|^2 \end{aligned} \tag{5.2.2.2.5}$$

sağlanır, burada C_{p+l} gömülme sabitidir.

Sonuç olarak, (5.2.2.2.1) ve (5.2.2.2.2) den, $\forall t \in [0, T^*]$ için

$$I(t) > \|\nabla u\|^2 - \beta \|\nabla u\|^2 > 0 \tag{5.2.2.2.6}$$

olur. Böylece, T^*, T ye genişletilebilir.

Teorem 5.2.2.2.2 Kabul edelim ki, u_0, u_1 başlangıç fonksiyonları, lemma 5.2.2.2.1 nin şartlarını sağlasın, bu durumda, (5.2.2.1) probleminin çözümleri düzgün sınırlı ve globaldir.

İspat. $\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2$ nin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{k}{p^2}\|u\|_p^p + \frac{1}{p}I(t) + \frac{\tau|\mu_2|}{2}\int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 \, d\rho dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{p}(1-\beta)\|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\|\nabla u\|^2 + \|u_t\|^2 \leq CE(0)$$

olur, burada C pozitif bir sabittir.

5.2.2.3 Üstel azalma

Lemma 5.2.2.3.1

$$F_1(t) = \tau \int_\Omega \int_0^1 e^{-\rho\tau} |\nabla z(x,\rho,t)|^2 \, d\rho dx$$

olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} & F_1'(t) \\ \leq & \int_\Omega |\nabla u_t|^2 - e^{-\tau}\int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 \, dx \\ & -\tau e^{-\tau}\int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 \, d\rho dx \end{aligned} \tag{5.2.2.3.1}$$

sağlanır (Messaoudi vd., 2016).

Lemma 5.2.2.3.2

$$F_2(t) = NE(t) + \varepsilon \int_\Omega u u_t dx + \frac{\varepsilon \mu_1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -(N(\mu_1 - |\mu_2|) - \varepsilon) \|\nabla u_t\|^2 \\ & -\varepsilon(1 - \beta - \delta) \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \frac{c_*}{4\delta} \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx \end{aligned} \tag{5.2.2.3.2}$$

olur, burada N, α ve ε pozitif sabitlerdir.

İspat. F_2 nin türevi alınıp, (5.2.2.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & F_2'(t) \\ \leq & \varepsilon \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^p \ln |u|^k dx \right) \\ & -N(\mu_1 - |\mu_2|) \int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - \varepsilon \int_\Omega \mu_2 \nabla u \nabla z(x,1,t) dx \end{aligned} \tag{5.2.2.3.3}$$

sağlanır. Young eşitsizliğinden, herhangi $\delta > 0$ için

$$-\int_\Omega \mu_2 \nabla u \nabla z(x,1,t) dx \leq \delta \|\nabla u\|^2 + \frac{c_*}{4\delta} \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx \tag{5.2.2.3.4}$$

elde ederiz.

Teorem 5.2.2.3.3 Kabul edelim ki (5.2.2.2.2) koşulları sağlansın. Bu durumda

$$E(t) \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

sağlanır, burada c_3 ve c_4 pozitif sabitlerdir.

İspat.

$$F_3(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

olsun. Yeterince küçük ε için

$$F_3(t) \sim E(t) \tag{5.2.2.3.5}$$

denkliği sağlanır. (5.2.2.3.1) ve (5.2.2.3.2) den

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -(N(\mu_1 - |\mu_2|) - \varepsilon - 1) \|\nabla u_t\|^2 \\ & -\left(e^{-\tau} - \varepsilon \frac{c_*}{4\delta} \right) \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 dx \\ & -\varepsilon(1 - \beta - \delta) \|\nabla u\|^2 \\ & -\tau e^{-\tau} \int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 d\rho dx \end{aligned} \tag{5.2.2.3.6}$$

olur. $\beta < 1$ olduğundan, δ yeterince küçük seçilirse $\alpha = 1 - \beta - \delta > 0$ olur.

$\omega > 0$ için, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq C \|\nabla u\|_2^p \\ &\leq C \left(\|\nabla u\|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u\|^2 \\ &\leq C \left(E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u\|^2 \\ &\leq \omega \|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$-\frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2} \|u\|_p^p \geq -\frac{\varepsilon\alpha}{2} \|\nabla u\|_2^2$$

sağlanır. Böylece, (5.2.2.3.6) dan

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -\left(N(\mu_1 - |\mu_2|) - \varepsilon - 1\right) \|\nabla u_t\|^2 \\ & -\frac{\varepsilon\alpha}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{\varepsilon\alpha\omega^{-1}}{2} \|u\|_p^p \\ & -\left(e^{-\tau} - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta}\right) \int_\Omega |\nabla z(x,1,t)|^2 \, dx \\ & -\tau e^{-\tau} \int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 \, d\rho dx \end{aligned} \tag{5.2.2.3.7}$$

sağlanır. δ sabit olduğundan, N yeterince büyük seçilirse

$$N(\mu_1 - |\mu_2|) - \varepsilon - 1 > 0 \text{ ve } e^{-\tau} - \varepsilon\frac{c_*}{4\delta} > 0$$

olur. Böylece, $C > 0$ için, (5.2.2.3.7) den

$$\begin{aligned} & F_3'(t) \\ \leq & -C\left[\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|u\|_p^p + \int_\Omega \int_0^1 |\nabla z(x,\rho,t)|^2 \, d\rho dx\right] \\ \leq & -CE(t) \end{aligned}$$

olur. (5.2.2.3.5) denkliği ve $(0,t)$ için integral alınırsa, sonuç elde edilir.

6. GECİKMELİ TERİM İÇEREN POLİNOMAL KAYNAK TERİME SAHİP DENKLEM

Bu bölümde Yüksekkaya vd., (2021c) tarafından ele alınan "Gecikmeli terim içeren yüksek mertebeden Kirchhoff tipli denklemin çözümlerinin varlığı, azalması ve patlaması" incelenecektir.

Uçları sabitlenmiş elastik sicimin enine küçük titreşimlerinin matematiksel açıklaması eski bir tarihe dayanır. Bu konu ile ilgili ilk araştırmalar d'Alembert (1717-1793) ve Euler (1707-1783) tarafından yapılmıştır. R^2'de ortogonal bir Kartezyen koordinat sistemi (x, u) ele alalım. İpin, x ekseni üzerinde M ve N noktalarında sabit uçları olduğunu varsayalım. $u(x,t)$, t zamanında x koordinatında, cismin bir X noktasının dikey yer değiştirmesidir. Notasyon olarak, D'Alembert tarafından önerilen matematiksel model şöyledir:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

burada $c^2 = \frac{P_0}{m}$ dir, P_0 ilk gerilimdir ve m, MN cisminin kütlesidir. D'Alembert, ipin yer değiştirme konfigürasyonlarının şu şekilde olduğunu gözlemledi.

$$u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

burada Φ ve Ψ keyfi fonksiyonlardır. Kirchhoff modeli, elastik şeritlerin uçları sabit olduğunda, dikey yer değiştirmesiyle ilgili aynı fiziksel problem için önerildi, ancak deformasyonlar sırasında cismin gerilimi değişkendir.

Kirchhoff Denkleminin Modellenmesi: 1883 yılında Gustav Robert Kirchhoff, D'Alembert dalga denkleminin bir genellemesi olan salınımların neden olduğu değişikliği hesaba katarak özellikle, elastik gerilmiş bir ipin salınımlarını tanımlayan kısmi bir diferansiyel denklem tasarlamıştır. Denklemin genel formu:

$$u_{tt} - \left\{ \frac{p_0}{\rho h} + \frac{E}{2L\rho} \int_0^L |u_x|^2 \, dx \right\} u_{xx} = 0$$

şeklindedir, burada $0 \leq x \leq L, \;\; t \geq 0$ dır. Burada

- $u = u\,(x,t)$ dikey yer değiştirme;
- E Young modülü;

- ρ kütle yoğunluğu;
- h kesit alanı;
- L uzunluk;
- p_0 başlangıç eksensel gerilimdir.

Doğrusal damping ve dış kuvvet içeren model ise şu şekilde verilmiştir:

$$\rho h u_{tt} + \delta u_t - \left\{ p_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L |u_x|^2 \, dx \right\} u_{xx} = f$$

burada δ direnç modülü, f ise dış kuvveti göstermektedir.

6.1 Gecikmeli Terim İçeren Yüksek Mertebeden Bir Kirchhoff Tipli Denklemin Çözümlerinin Varlığı, Azalması ve Patlaması

Bu kısımda gecikmeli terim içeren yüksek mertebeden Kirchhoff tipli bir denklemi ele alacağız:

$$\begin{cases} u_{tt} + \left(\int_\Omega \left| A^{\frac{1}{2}} u \right|^2 dx \right)^q Au + \mu_1 |u_t(x,t)|^{r-1} u_t(x,t) \\ +\mu_2 |u_t(x,t-\tau)|^{r-1} u_t(x,t-\tau) = |u|^{p-1} u, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad\qquad x \in \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau) \qquad\qquad x \in \Omega, \quad t \in (0,\tau), \\ \frac{\partial^i u}{\partial \upsilon^i} = 0, \ i = 0,1,\cdots,m-1 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1.1}$$

burada $A = (-\Delta)^m$ dir, $m \geq 1$ bir doğal sayıdır, $q, r \geq 0$ reel sayılardır ve $p > 1$ reel bir sayıdır, Ω, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip, R^n de $(n = 1,2,3)$ sınırlı bir bölgedir; υ dış normaldir. $\tau > 0$ gecikmeli zaman terimidir ve, μ_1 ve μ_2 pozitif reel sayılardır. (u_0, u_1, f_0) fonksiyonları başlangıç fonksiyonlarıdır.

$H^m(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

normlu bir Sobolev uzayıdır.

Lemma 6.1.1 (Sobolev-Poincarė eşitsizliği) $2 \leq p \leq \frac{2n}{[n-2m]^+}$ (eğer $n = 2m$ ise $2 \leq p < \infty$ dir) ise, bu durumda

$$\|u\|_p \leq C_* \left\| (-\Delta)^{\frac{m}{2}} u \right\|, \ u \in H_0^m(\Omega)$$

dir, burada C_* pozitif bir sabittir, burada eğer $[a]^+ = 0$ ise $[a]^+ = \max\{0, a\}$, $\frac{1}{[a]^+} = \infty$ olur (Adams and Fournier, 2003).

r, p ve m için aşağıdaki kabuller sağlanır:

(**A1**)

$$\begin{cases} 1 < p < \infty, & n \leq 2m, \\ 1 < p < \frac{n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases} \tag{6.1.2}$$

ve

(**A2**)

$$\begin{cases} 1 < r < \infty, & n \leq 2m, \\ 1 < r < \frac{n+2m}{n-2m}, & n > 2m \end{cases} \tag{6.1.3}$$

dir.

6.1.1 Global varlık

Bir z fonksiyonu tanımlayalım:

$$z(x, k, t) = u_t(x, t - \tau k), \ x \in \Omega, \ k \in (0, 1).$$

Böylece,

$$\tau z_t(x, k, t) + z_k(x, k, t) = 0, \ \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty)$$

olur. Bu dönüşümden, (6.1.1) problemi

$$\begin{cases} u_{tt} + \left(\int_\Omega \left| A^{\frac{1}{2}} u \right|^2 dx \right)^q Au + \mu_1 |u_t(x,t)|^{r-1} u_t(x,t) \\ +\mu_2 |z(x,1,t)|^{r-1} z(x,1,t) = |u|^{p-1} u \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \tau z_t(x,k,t) + z_k(x,k,t) = 0, \qquad \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ z(x,k,0) = f_0(x, -\tau k), \qquad x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \\ \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = 0, \ i = 0, 1, \cdots, m-1, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1.1.1}$$

formuna dönüşür.

(6.1.1.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2(q+1)} \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(q+1)} \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{\zeta}{r+1} \int_\Omega \int_0^1 \left| z^{r+1}(x,k,s) \right| dk dx \end{aligned} \tag{6.1.1.2}$$

şeklindedir ve

$$\tau r\left|\mu_2\right| < \zeta < \tau\left(\left(r+1\right)\mu_1 - \left|\mu_2\right|\right) \tag{6.1.1.3}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & J\left(t\right) \\ = \; & J\left(u\left(t\right)\right) \\ = \; & \frac{1}{2\left(q+1\right)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \\ & -\frac{1}{p+1}\left\|u\right\|_{p+1}^{p+1} + \frac{\zeta}{r+1}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\left|z^{r+1}\left(x,k,s\right)\right|dkdx \end{aligned} \tag{6.1.1.4}$$

ve

$$I\left(t\right) = I\left(u\left(t\right)\right) = \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} - \left\|u\right\|_{p+1}^{p+1} + \zeta\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\left|z^{r+1}\left(x,k,s\right)\right|dkdx \tag{6.1.1.5}$$

dir.

$$E\left(t\right) = J\left(t\right) + \frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2 \tag{6.1.1.6}$$

olduğu görülür. Şimdi,

$$\mathcal{W} = \left\{u : u \in H_0^m\left(\Omega\right) \cap H^{2m}\left(\Omega\right),\, I\left(u\right) > 0\right\} \cup \left\{0\right\} \tag{6.1.1.7}$$

tanımlayalım.

Lemma 6.1.1.1 Farz edelim ki (u,z), (6.1.1.1) probleminin çözümü olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} E'\left(t\right) \; &= \; -\left(\mu_1 - \frac{\zeta}{\tau\left(r+1\right)} - \frac{\mu_2}{r+1}\right)\left\|u_t\left(t\right)\right\|_{r+1}^{r+1} \\ & \quad -\left(\frac{\zeta}{\tau\left(r+1\right)} - \frac{\mu_2 r}{r+1}\right)\int_{\Omega}\left|z^{r+1}\left(x,1,t\right)\right|dx \\ & \leq \; 0 \end{aligned} \tag{6.1.1.8}$$

olur ve $t \geq 0$ dır.

İspat. (6.1.1.1) probleminin ilk denklemini u_t ile çarpıp Ω bölgesi için integral alırsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\|u_t\left(t\right)\right\|^2 + \frac{1}{2\left(q+1\right)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} - \frac{1}{p+1}\left\|u\right\|_{p+1}^{p+1}\right] \\ & +\mu_1\left\|u_t\left(t\right)\right\|_{r+1}^{r+1} + \int_{\Omega}\mu_2\left|z\left(x,1,t\right)\right|^{r-1}z\left(x,1,t\right)u_t\left(x,t\right)dx \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{6.1.1.9}$$

elde ederiz. Burada, $(0,t)$ için integral alırsak

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\left\|u_t(t)\right\|^2+\frac{1}{2(q+1)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)}-\frac{1}{p+1}\left\|u\right\|_{p+1}^{p+1}\right]\\
&+\int_0^t\mu_1\left\|u_s(s)\right\|_{r+1}^{r+1}ds\\
&+\mu_2\int_0^t\int_\Omega\left|z(x,1,s)\right|^{r-1}z(x,1,s)\,u_s(x,s)\,dxds\\
=\;&\frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2
\end{aligned}\tag{6.1.1.10}$$

elde ederiz. (6.1.1.1) probleminin ikinci denklemini $\zeta\left|z\right|^{r-1}z$ ile çarpıp

$$\Omega\times(0,1)\times(0,t)$$

için integrallersek

$$\begin{aligned}
&\frac{\zeta}{r+1}\frac{d}{dt}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\left|z(x,k,t)\right|^{r-1}z(x,k,t)\,z_t(x,k,t)\,dkdxds\\
=\;&-\frac{\zeta}{\tau(r+1)}\int_0^t\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial}{\partial k}\left|z(x,k,t)\right|^{r+1}dkdxds\\
=\;&-\frac{\zeta}{\tau(r+1)}\int_0^t\int_\Omega\left[\left|z(x,1,t)\right|^{r+1}-\left|z(x,0,t)\right|^{r+1}\right]dxds\\
=\;&-\frac{\zeta}{\tau(r+1)}\int_0^t\int_\Omega\left|z(x,1,t)\right|^{r+1}dxds\\
&+\frac{\zeta}{\tau(r+1)}\int_0^t\left\|u_t(t)\right\|_{r+1}^{r+1}ds
\end{aligned}\tag{6.1.1.11}$$

elde ederiz. (6.1.1.10)-(6.1.1.11) den

$$\begin{aligned}
&E(t)+\left(\mu_1-\frac{\zeta}{\tau(r+1)}\right)\int_0^t\left\|u_s(s)\right\|_{r+1}^{r+1}ds\\
&+\frac{\zeta}{\tau(r+1)}\int_0^t\int_\Omega\left|z(x,1,s)\right|^{r+1}dxds\\
&+\mu_2\int_0^t\int_\Omega\left|z(x,1,s)\right|^{r-1}z(x,1,s)\,u_s(x,s)\,dxds\\
=\;&E(0)
\end{aligned}\tag{6.1.1.12}$$

elde ederiz. (6.1.1.12) denkleminin soldan dördüncü terimine Young eşitsizliği uygularsak

$$\begin{aligned}
&E(t)+\left(\mu_1-\frac{\zeta}{\tau(r+1)}-\frac{\mu_2}{r+1}\right)\int_0^t\left\|u_s(s)\right\|_{r+1}^{r+1}ds\\
&+\left(\frac{\zeta}{\tau(r+1)}-\frac{\mu_2 r}{r+1}\right)\int_0^t\int_\Omega\left|z(x,1,s)\right|^{r+1}dxds\\
=\;&E(0)
\end{aligned}\tag{6.1.1.13}$$

elde ederiz. (6.1.1.13) denkleminin türevini alırsak, istenilen sonucu elde ederiz. Böylece, ispat tamamlanır.

Not. (6.1.1.3) koşulundan

$$c_1 = \left(\mu_1 - \frac{\zeta}{\tau\left(r+1\right)} - \frac{\mu_2}{r+1}\right) > 0,\ c_2 = \left(\frac{\zeta}{\tau\left(r+1\right)} - \frac{\mu_2 r}{r+1}\right) > 0$$

olur.

Lemma 6.1.1.2 Varsayalım ki (6.1.3) koşulu sağlansın ve $p > 2q+1$ olsun. Farz edelim ki $u_0 \in \mathcal{W}$ ve $u_1 \in H_0^m\left(\Omega\right)$, ayrıca

$$\beta = C_*\left(\frac{2\left(q+1\right)\left(p+1\right)}{p-2q-1}E\left(0\right)\right)^{\frac{p-2q-1}{2(q+1)}} < 1 \tag{6.1.1.14}$$

olsun, bu durumda her bir $t \geq 0$ için $u \in \mathcal{W}$ dir.

İspat. $u\left(t\right)$ sürekliliği ve $I\left(0\right) > 0$ olduğundan, $t = 0$ için

$$I\left(t\right) > 0$$

sağlanır. Kabul edelim ki, $[0, T_m]$ aralığında (6.1.1.5) sağlansın, $T_m > 0$ bir maximal zaman olsun.

(6.1.1.4)-(6.1.1.5) ten

$$\begin{aligned} J\left(t\right) &= \frac{1}{p+1}I\left(t\right) + \frac{p-2q-1}{2\left(q+1\right)\left(p+1\right)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \\ &\quad + \frac{\left(p-r\right)}{(r+1)(p+1)}\left(\zeta\int_\Omega\int_0^1 z^{r+1}\left(x,k,t\right)dkdx\right) \\ &\geq \frac{p-2q-1}{2\left(q+1\right)\left(p+1\right)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \end{aligned} \tag{6.1.1.15}$$

elde ederiz. (6.1.1.2), (6.1.1.15) ve Lemma 6.1.1.1 den

$$\begin{aligned} \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} &\leq \frac{2\left(q+1\right)\left(p+1\right)}{p-2q-1}J\left(t\right) \\ &\leq \frac{2\left(q+1\right)\left(p+1\right)}{p-2q-1}E\left(t\right) \\ &\leq \frac{2\left(q+1\right)\left(p+1\right)}{p-2q-1}E\left(0\right) \end{aligned} \tag{6.1.1.16}$$

olur. Lemma 6.1.1 ve (6.1.1.16) dan, $t \in [0, T_m]$ için

$$\begin{aligned} \|u\|_{p+1}^{p+1} &\leq C_* \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{p+1} \\ &= C_* \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{p-2q-1} \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)} \\ &\leq C_* \left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1} E(0)\right)^{\frac{p-2q-1}{2(q+1)}} \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)} \\ &= \beta \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)} \\ &< \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)} \end{aligned} \tag{6.1.1.17}$$

elde ederiz. Böylece, (6.1.1.5) ten, $\forall t \in [0, T_m]$ için, $I(t) > 0$ olur. Böylece, T_m, T ye genişletilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 6.1.1.3 Kabul edelim ki Lemma 6.1.1.2 sağlansın. $\eta_1 = 1 - \beta$ alalım, böylece

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq (1 - \eta_1) \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)}$$

olur.

İspat. (6.1.1.17) den

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \beta \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)}$$

elde ederiz. $\eta_1 = 1 - \beta$ olsun, böylece, istenilen sonuç elde edilir.

Not. Lemma 6.1.1.3 ten

$$\left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)} \leq \frac{1}{\eta_1} I(t) \tag{6.1.1.18}$$

olur.

Teorem 6.1.1.4 Farz edelim ki $(A2)$ varsayımı, $\mu_2 < \mu_1$ ve $p > 2q + 1$ sağlansın. Kabul edelim ki $u_0 \in \mathcal{W}$, (6.1.1.14) şartını sağlasın ve $f_0 \in L^2(\Omega \times (0, 1))$ verilsin. Bu durumda, (6.1.1.1) probleminin çözümü globaldir.

İspat. $\|u_t\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\|^{2(q+1)}$ nin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. (6.1.1.2)

den ve (6.1.1.5) ten, $I(t) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2(q+1)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \\ &\quad -\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{\zeta}{r+1}\int_\Omega\int_0^1 z^{r+1}(x,k,s)\,dkdx \\ &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{p-2q-1}{2(q+1)(p+1)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \\ &\quad +\frac{(p-r)}{(r+1)(p+1)}\left(\zeta\int_\Omega\int_0^1 z^{r+1}(x,k,t)\,dkdx\right) + \frac{1}{p+1}I(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{p-2q-1}{2(q+1)(p+1)}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\|u_t\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|^{2(q+1)} \leq CE(0)$$

sağlanır, burada $C = \max\left\{2, \frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}\right\}$ dir. Böylece, çözümlerin gobal varlığını elde ederiz ve ispat tamamlanır.

6.1.2 Çözümlerin azalması

Bu bölümde, (6.1.1.1) probleminin çözümlerinin azalmasını, Nakao eşitsizliğini kullanarak ispatlayacağız:

Teorem 6.1.2.1 Kabul edelim ki $(A2)$ ve (6.1.1.14) koşulları sağlansın. $u_0 \in \mathcal{W}$, $f_0 \in L^2(\Omega \times (0,1))$ verilsin. Böylece

$$E(t) \leq \begin{cases} E(0)\,e^{-w_1[t-1]^+}, & r = 1, \\ \left(E(0)^{-\alpha} + C_7^{-1}\alpha\,[t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, & r > 1 \end{cases}$$

olur, burada w_1, α ve C_7 pozitif katsayılardır.

İspat. (6.1.1.8) ifadesini $t > 0$ için, $[t, t+1]$ aralığında integrallersek

$$E(t) - E(t+1) = [D(t)]^{r+1} \tag{6.1.2.1}$$

elde ederiz, burada

$$[D(t)]^{r+1} = c_1\int_t^{t+1}\|u_t\|_{r+1}^{r+1}\,ds + c_2\int_t^{t+1}\int_\Omega \left|z^{r+1}(x,1,s)\right|dxds \tag{6.1.2.2}$$

dir. (6.1.2.2) ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega |u_t|^2\,dxdt + \int_t^{t+1}\int_\Omega |z(x,1,s)|^2\,dxds \leq c(\Omega)\,[D(t)]^2 \tag{6.1.2.3}$$

olduğu görülür, burada $c(\Omega) = vol(\Omega)$ dir.
(6.1.2.3) ten, $t_1 \in \left[t, t+\frac{1}{4}\right]$ ve $t_2 \in \left[t+\frac{3}{4}, t+1\right]$ dir, ve

$$\|u_t(t_i)\|^2 + \|z(x,1,t_i)\|^2 \leq c(\Omega)\left[D(t)\right]^2, \; i = 1,2 \tag{6.1.2.4}$$

olur. (6.1.1.1) probleminin ilk denklemini u ile çarpıp ve $\Omega \times [t_1, t_2]$ aralığında integral alınıp, kısmi integrasyon, Hölder eşitsizliği kullanılarak ve

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1} \zeta \left|z^{r+1}(x,k,t)\right| dkdxdt$$

eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt \\
\leq\; & \|u_t(t_1)\|_2 \|u(t_1)\|_2 + \|u_t(t_2)\|_2 \|u(t_2)\|_2 \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{1} \zeta \int_{\Omega} \left|z^{r+1}(x,k,t)\right| dxdkdt \\
& - \mu_1 \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |u_t|^{r-1} |u_t|\, udxdt \\
& - \mu_2 \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |z(x,1,t)|^{r-1} z(x,1,t)\, udxdt
\end{aligned} \tag{6.1.2.5}$$

olur. Şimdi, (6.1.2.5) eşitsizliğinin sağ tarafı için kestirimler elde edelim.
(6.1.1.16), (6.1.2.4) ve Lemma 6.1.1 den

$$\|u_t(t_i)\|_2 \|u(t_i)\|_2 \leq C_1 D(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \tag{6.1.2.6}$$

sağlanır, burada $C_1 = 2C_* \left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1} E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}$ dir.
(6.1.1.11) den

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{1}\int_{\Omega} z^{r+1}(x,k,t)\, dxdkdt &\leq \frac{1}{2\tau}\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|_{r+1}^{r+1} dsd\upsilon \\
&\leq \left(\int_{t_1}^{t_2} d\upsilon\right)\left(\int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|_{r+1}^{r+1} ds\right) \\
&\leq (t_2 - t_1)\left[D(t)\right]^{r+1}
\end{aligned} \tag{6.1.2.7}$$

elde ederiz. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} |u_t|^{r-1} |u_t|\, udxdt \leq \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(t)\|_{r+1}^{r} \|u(t)\|_{r+1} \tag{6.1.2.8}$$

olur. Sobolev-Poincarė eşitsizliğinden ve (6.1.1.16) dan

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{r+1}^{r}\|u(t)\|_{r+1}dt\right| \\
\leq\ & C_*\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{r+1}^{r}\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|dt \\
\leq\ & C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{r+1}^{r}E^{\frac{1}{2}}(s)dt \\
\leq\ & C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(t)\|_{r+1}^{r}dt \\
\leq\ & C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)[D(t)]^{r} \qquad (6.1.2.9)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}|z(x,1,t)|^{r-1}z(x,1,t)udxdt \\
\leq\ & C_*\int_{t_1}^{t_2}\|z(x,1,t)\|_{r+1}^{r}\|u\|_{r+1}dt \\
\leq\ & C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\int_{t_1}^{t_2}\|z(x,1,t)\|_{r+1}^{r}E^{\frac{1}{2}}(s)dt \\
\leq\ & C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)\int_{t_1}^{t_2}\|z(x,1,t)\|_{r+1}^{r}dt \\
\leq\ & C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)[D(t)]^{r} \qquad (6.1.2.10)
\end{aligned}$$

sağlanır. (6.1.2.5)-(6.1.2.10) dan

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}I(t)dt \\
\leq\ & C_2\left[\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)D(t)+[D(t)]^{2}+(t_2-t_1)[D(t)]^{r+1}\right. \\
&\left.+2C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\sup_{t_1\leq s\leq t_2}E^{\frac{1}{2}}(s)[D(t)]^{r}\right] \qquad (6.1.2.11)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, (6.1.1.2), (6.1.1.5) ve (6.1.1.18) den

$$E(t)\leq\frac{1}{2}\|u_t\|^{2}+C_3I(t) \qquad (6.1.2.12)$$

olur, burada $C_3=\frac{1}{\eta_1}\frac{p-2q-1}{2(q+1)(p+1)}+\frac{1}{p+1}$ dir.

(6.1.2.12) ifadesinin $[t_1,t_2]$ için integrali alınırsa

$$\int_{t_1}^{t_2}E(t)dt\leq\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|u_t\|^{2}dt+C_3\int_{t_1}^{t_2}I(t)dt \qquad (6.1.2.13)$$

olur. (6.1.2.11) den ve (6.1.2.13) ten

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt &\leq \frac{1}{2}C\left[D(t)\right]^2 + C_3C_2\left[\sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s)\,D(t)\right.\\ &\quad + \left[D(t)\right]^2 + (t_2-t_1)\left[D(t)\right]^{r+1}\\ &\quad +2C_*\left(\frac{2(q+1)(p+1)}{p-2q-1}E(0)\right)^{\frac{1}{2(q+1)}}\\ &\quad \left.\times \sup_{t_1\leq s\leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s)\left[D(t)\right]^r\right] \qquad (6.1.2.14)\end{aligned}$$

elde ederiz. $\frac{d}{dt}E(t)$ ifadesini $[t,t_2]$ için integrallersek

$$\begin{aligned}E(t) &= E(t_2) + \int_t^{t_2}\left(\mu_1 - \frac{\zeta}{\tau(r+1)} - \frac{\mu_2}{r+1}\right)\|u_s(s)\|_{r+1}^{r+1}\,ds\\ &\quad + \int_t^{t_2}\left(\frac{\zeta}{\tau(r+1)} - \frac{\mu_2 r}{r+1}\right)\int_\Omega |z(x,1,s)|^{r+1}\,dxds \qquad (6.1.2.15)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt \geq (t_2-t_1)\,E(t_2) \geq \frac{1}{2}E(t_2)$$

elde edilir. Böylece,

$$E(t_2) \leq 2\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt \qquad (6.1.2.16)$$

olur. Sonuç olarak, (6.1.2.1), (6.1.2.14), (6.1.2.15), (6.1.2.16) dan, ve

$$t_1, t_2 \in [t, t+1]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}E(t) &\leq 2\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt + \int_t^{t+1}\left(\mu_1 - \frac{\zeta}{\tau(r+1)} - \frac{\mu_2}{r+1}\right)\|u_s(s)\|_{r+1}^{r+1}\,ds\\ &\quad + \int_t^{t+1}\left(\frac{\zeta}{\tau(r+1)} - \frac{\mu_2 r}{r+1}\right)\int_\Omega |z(x,1,s)|^{r+1}\,dxds\\ &= 2\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt + \left[D(t)\right]^{r+1} \qquad (6.1.2.17)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda, (6.1.2.14) ten

$$\begin{aligned}E(t) &\leq \left(\frac{1}{2}C + C_3C_2\right)\left[D(t)\right]^2 + C_3C_2\left[D(t)\right]^{r+1}\\ &\quad + C_4\left[D(t) + \left[D(t)\right]^r\right]E^{\frac{1}{2}}(t)\end{aligned}$$

olur. Young eşitsizliğinden

$$E(t) \leq C_5\left[\left[D(t)\right]^2 + \left[D(t)\right]^{r+1} + \left[D(t)\right]^{2r}\right] \qquad (6.1.2.18)$$

elde ederiz.

Şimdi, r nin durumlarını göz önüne alalım:

Durum 1: Eğer $r = 1$ ise, (6.1.2.18) den

$$E(t) \leq 3C_5 [D(t)]^2 = 3C_5 [E(t) - E(t+1)]$$

elde ederiz. Teorem 3.4.8 den

$$E(t) \leq E(0) e^{-w_1 [t-1]^+}$$

olur, burada $w_1 = \ln \frac{3C_5}{3C_5 - 1}$ dir.

Durum 2: Eğer $r > 1$ ise, (6.1.2.18) den

$$E(t) \leq C_5 [D(t)]^2 \left(1 + [D(t)]^{r-1} + [D(t)]^{2r-2}\right)$$

olur. Bu durumda, (6.1.2.1) den, $\forall t \geq 0$ için, $E(t) \leq E(0)$ olduğundan $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_5 \left(1 + E^{\frac{r-1}{r+1}}(0) + E^{\frac{2(r-1)}{r+1}}(0)\right) [D(t)]^2 \\ &\leq C_6 [D(t)]^2 \end{aligned}$$

sağlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} E(t)^{\frac{r+1}{2}} &\leq C_7 [D(t)]^{r+1} \\ &\leq C_7 (E(t) - E(t+1)) \end{aligned} \tag{6.1.2.19}$$

olur. (6.1.2.19) ve Teorem 3.4.8 den,

$$E(t) \leq \left(E(0)^{-\alpha} + C_7^{-1} \alpha [t-1]^+\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, Teorem 6.1.2.1 in ispatı tamamlanır.

6.1.3 Çözümlerin patlaması

Burada, $r > 1$ durumunda, çözümlerin patlamasını elde edeceğiz.

Teorem 6.1.3.1 $(u_0, u_1) \in (H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \times H_0^m(\Omega)$ ve $f_0 \in L^2(\Omega \times (0,1))$ verilsin. Varsayalım ki $p > \max\{2, r, 2q+1\}$ olsun ve $(A1) - (A2)$ varsayımları

sağlansın. Bu durumda, (6.1.1.1) probleminin çözümleri, başlangıç enerjisi negatif $E(0) < 0$ iken patlar.

İspat.

$$H(t) = -E(t) \tag{6.1.3.1}$$

olsun. Lemma 6.1.1.1 den,

$$\begin{aligned} H'(t) \geq & -\left(\mu_1 - \frac{\zeta}{\tau(r+1)} - \frac{\mu_2}{r+1}\right) \|u_t(t)\|_{r+1}^{r+1} \\ & -\left(\frac{\zeta}{\tau(r+1)} - \frac{\mu_2 r}{r+1}\right) \int_\Omega \left|z^{r+1}(x,1,t)\right| dx \end{aligned} \tag{6.1.3.2}$$

elde ederiz. Böylece $t > 0$ için

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{6.1.3.3}$$

olur.

$$M(t) = \|u\|_2^2 \tag{6.1.3.4}$$

olsun. (6.1.3.4) ifadesinin iki defa türevi alınırsa

$$M'(t) = 2\int_\Omega u_t u dx$$

ve

$$M''(t) = 2\|u_t\|^2 + 2\int_\Omega u_{tt} u dx \tag{6.1.3.5}$$

elde ederiz. (6.1.1.1) probleminin ilk denkleminden

$$\begin{aligned} M''(t) = & 2\|u_t\|^2 - 2\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} - 2\mu_1 \int_\Omega |u_t(x,t)|^{r-1} u u_t(x,t)\, dx \\ & -2\mu_2 \int_\Omega |z(x,1,t)|^{r-1} u z(x,1,t)\, dx + 2\|u\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned} \tag{6.1.3.6}$$

olur. $2(p+1)H(t)$ terimini ekleyip çıkarırsak, bu durumda (6.1.3.6)

$$\begin{aligned} M''(t) \geq & (p+3)\|u_t\|^2 + 2(p+1)H(t) + \left(\frac{p+1}{q+1} - 2\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} \\ & -2\mu_1 \int_\Omega |u_t(x,t)|^{r-1} u u_t(x,t)\, dx \\ & -2\mu_2 \int_\Omega |z(x,1,t)|^{r-1} u z(x,1,t)\, dx \\ & +\frac{2\zeta(p+1)}{r+1} \int_\Omega \int_0^1 z^{r+1}(x,k,s)\, dk dx \end{aligned} \tag{6.1.3.7}$$

olur. Şimdi

$$L(t) = H(t)^{1-\kappa} + 2\epsilon M'(t) \tag{6.1.3.8}$$

olsun. (6.1.3.8) in türevi alınırsa

$$L'(t) = (1-\kappa) H(t)^{-\kappa} H'(t) + 2\varepsilon M''(t) \tag{6.1.3.9}$$

elde ederiz. (6.1.3.7), (6.1.3.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & (1-\kappa) H(t)^{-\kappa} H'(t) + 2\varepsilon (p+3) \|u_t\|^2 \\ & +4\varepsilon (p+1) H(t) + 2\varepsilon \left(\frac{p+1}{q+1} - 2 \right) \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{2(q+1)} \\ & -4\varepsilon\mu_1 \int_\Omega |u_t(x,t)|^{r-1} u u_t(x,t)\, dx \\ & -4\varepsilon\mu_2 \int_\Omega |z(x,1,t)|^{r-1} u z(x,1,t)\, dx \\ & +\frac{4\varepsilon\zeta(p+1)}{r+1} \int_\Omega \int_0^1 z^{r+1}(x,k,s)\, dk dx \end{aligned} \tag{6.1.3.10}$$

olur. Hölder eşitsizliğinden ve (6.1.3.3) ten

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega |u_t(x,t)|^{r-1} u u_t(x,t)\, dx \right| \\ \leq\ & \|u_t\|_{r+1}^r \|u\|_{r+1} \\ \leq\ & c_1 \|u\|_{r+1}^{\frac{r+1}{p+1}} \|u\|_{r+1}^{1-\frac{r+1}{p+1}} \|u_t\|_{r+1}^r \\ \leq\ & c_2 \|u\|_{r+1}^{\frac{r+1}{p+1}} H(t)^{\frac{1}{p+1} - \frac{r+1}{(p+1)^2}} \times \|u_t\|_{r+1}^r \end{aligned} \tag{6.1.3.11}$$

elde ederiz. Young eşitsizliği ve (6.1.3.2) den

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega |u_t(x,t)|^{r-1} u u_t(x,t)\, dx \right| \\ \leq\ & c_3 \left(\rho^{\frac{1}{1+p}} \|u\|_{r+1}^{r+1} H(0)^{-\bar{k}} + \rho^{-r'} H(0)^{k-\bar{k}} H'(t) H(t)^{-k} \right) \end{aligned} \tag{6.1.3.12}$$

elde ederiz, burada

$$\bar{k} = \frac{1}{p+1} - \frac{r+1}{(p+1)^2} > 0$$

, $\rho > 0$, $r' = \frac{r+1}{r}$ dir. $0 < k < \bar{k}$ olsun, benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega u |z(x,1,t)|^{r-1} z(x,1,t)\, dx \right| \\ \leq\ & c_3 \left(\rho^{\frac{1}{1+p}} \|u\|_{r+1}^{r+1} H(0)^{-\bar{k}} + \rho^{-r'} H(0)^{k-\bar{k}} H'(t) H(t)^{-k} \right) \end{aligned} \tag{6.1.3.13}$$

elde ederiz. (6.1.3.10), (6.1.3.12) ve (6.1.3.13) ten

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1-\kappa) - 4\varepsilon(\mu_1+\mu_2) H^{k-\bar{k}}(0) \rho^{-r'}\right] H(t)^{-\kappa} H'(t) \\ & -4\varepsilon(\mu_1+\mu_2) H(0)^{-\bar{k}} \rho^{\frac{1}{1+p}} \|u\|_{r+1}^{r+1} \\ & +2\varepsilon(p+3)\|u_t\|^2 + 4\varepsilon(p+1) H(t) \\ & +2\varepsilon\left(\frac{p+1}{q+1}-2\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} \\ & +\frac{4\varepsilon\zeta(p+1)}{r+1}\int_\Omega\int_0^1 z^{r+1}(x,k,s)\,dkdx \end{aligned} \tag{6.1.3.14}$$

olur, yeterince küçük ε için

$$\left[(1-\kappa) - 4\varepsilon(\mu_1+\mu_2) H^{k-\bar{k}}(0) \rho^{-r'}\right] \geq 0$$

sağlanır. $s = r+1 \leq p+1$ olsun

$$\|u\|_{r+1}^s \leq c_1\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\| + \|u\|_{p+1}^{p+1}\right)$$

dir, burada $c = 4(\mu_1+\mu_2) H(0)^{-\bar{k}} \rho^{\frac{1}{p+1}} c_1$ dir ve $\left(\frac{p+1}{q+1}-2\right) > c$ olacak şekilde alalım. Böylece

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & 2\varepsilon\left(\frac{p+1}{q+1}-2-c\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} - \varepsilon c\|u\|_{p+1}^{p+1} \\ & +4\varepsilon(p+1)H(t) + 2\varepsilon(p+3)\|u_t\|^2 \\ & +4\varepsilon\frac{\zeta(p+1)}{r+1}\int_\Omega\int_0^1 z^{r+1}(x,k,s)\,dkdx \end{aligned} \tag{6.1.3.15}$$

olur. $a_1 = 2\left(\frac{p+1}{q+1}-2-c\right)$, $a_2 = c$, $a_3 = 4(p+1)$, $a_4 = 2(p+3)$ alınarak, (6.1.3.15) ten

$$L'(t) \geq a_1\varepsilon\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} - \varepsilon a_2\|u\|_{p+1}^{p+1} + \varepsilon a_3 H(t) + \varepsilon a_4\|u_t\|^2 \tag{6.1.3.16}$$

olur. $p = 2a_5 + (p-2a_5)$ olsun, burada $a_5 < \min(a_1,a_2,a_3,a_4)$ dir, bu durumda (6.1.3.16) dan

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & (a_1-a_5)\varepsilon\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} + \varepsilon(a_5-a_2)\|u\|_{p+1}^{p+1} \\ & +\varepsilon(a_3-a_5)H(t) + \varepsilon(a_4-a_5)\|u_t\|^2 \end{aligned} \tag{6.1.3.17}$$

sağlanır, bu durumda

$$L'(t) \geq \delta\varepsilon\left[\left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(q+1)} + \|u\|_{p+1}^{p+1} + H(t) + \|u_t\|^2\right] \tag{6.1.3.18}$$

olur, buradan

$$L'(t) \geq \delta\varepsilon \left[\|u\|_{p+1}^{p+1} + H(t) + \|u_t\|^2 \right] \tag{6.1.3.19}$$

elde edilir, burada $\delta > 0$, $\|u\|_{p+1}^{p+1}$, $H(t)$, $\|u_t\|^2$ katsayılarının minimumudur. Uygun ε seçiminden

$$L(0) = H^{1-\kappa}(0) + 2\varepsilon \int_\Omega u_1 u_0 dx > 0 \tag{6.1.3.20}$$

sağlanır. Böylece $\forall t \geq 0$ için

$$L(t) \geq L(0) > 0 \tag{6.1.3.21}$$

elde ederiz. $\varpi = \frac{1}{1-k}$ olsun, ve $k < \bar{k} < 1$ olduğundan, $1 < \varpi < \frac{1}{1-\bar{k}}$ olur.

$$L(t) = H(t)^{1-\kappa} + 2\varepsilon \int_\Omega u u_t dx \tag{6.1.3.22}$$

olsun, bu durumda

$$L(t) = H(t)^{\frac{1}{\varpi}} + 2\varepsilon \int_\Omega u u_t dx \leq H(t)^{\frac{1}{\varpi}} + 2\varepsilon \int_\Omega u u_t dx + 2E_1 \left(\|u\|_{p+1} \right)^{\frac{p+1}{\varpi}} \tag{6.1.3.23}$$

sağlanır. Young, Hölder eşitsizlikleri ve (6.1.3.23) ten

$$\begin{aligned}
& L(t)^{\varpi} \\
\leq\ & \left[H(t)^{\frac{1}{\varpi}} + 2\varepsilon \int_\Omega u u_t dx + 2E_1 \left(\|u\|_{p+1} \right)^{\frac{p+1}{\varpi}} \right]^{\varpi} \\
\leq\ & 2^{\varpi-1} \left[H(t) + \left(2\varepsilon \int_\Omega u u_t dx + 2E_1 \left(\|u\|_{p+1} \right)^{\frac{p+1}{\varpi}} \right)^{\varpi} \right] \\
\leq\ & 2^{\varpi-1} \left[H(t) + 2^{\varpi-1} \left(\left(2\varepsilon \int_\Omega u u_t dx \right)^{\varpi} + 2E_1 \|u\|_{p+1}^{p+1} \right) \right] \\
\leq\ & 2^{\varpi-1} \left[H(t) + 2^{\varpi-1} \left(\beta^{\varpi} \|u_t\|_2^{\varpi} \|u\|_2^{\varpi} + 2E_1 \|u\|_{p+1}^{p+1} \right) \right] \\
\leq\ & 2^{\varpi-1} \left[H(t) + 2^{\varpi-1} \left(\beta^{\varpi} \|u_t\|_2^{\varpi} \|u\|_2^{\varpi} \right) + 2^{\varpi-1} \left(2E_1 \|u\|_{p+1}^{p+1} \right) \right] \\
\leq\ & c_2 \left[H(t) + \|u_t\|_2^{\varpi} \|u\|_2^{\varpi} + \|u\|_{p+1}^{p+1} \right]
\end{aligned} \tag{6.1.3.24}$$

sağlanır, burada $c_2 = \max\{2^{\varpi-1}, \beta^{\varpi}\}$ dir. Ayrıca, $p > 1$ için, Hölder ve Young eşitsizliklerinden

$$\|u_t\|_2^{\varpi} \|u\|_2^{\varpi} \leq c_3 \|u_t\|_2^{\varpi} \|u\|_{p+1}^{\varpi} \leq c_4 \left(\|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p+1}^{\frac{2(1-k)}{1-2k}} \right) \tag{6.1.3.25}$$

elde ederiz ve

$$\|u\|_{p+1}^{\frac{2(1-k)}{1-2k}} = \|u\|_{p+1}^{p+1} \|u\|_{p+1}^{\frac{2(1-k)}{1-2k}-(p+1)} \leq c_5 H(0)^{\frac{2(1-k)}{(1-2k)(p+1)}-1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \qquad (6.1.3.26)$$

sağlanır. Bu durumda, (6.1.3.24) ten

$$L(t)^{\varpi} \leq c_6 \left(H(t) + \|u_t\|^2 + \|u\|_{p+1}^{p+1} \right) \qquad (6.1.3.27)$$

olur. (6.1.3.19) ve (6.1.3.27) den, $c_7 > 0$, $\varpi > 1$ olmak üzere

$$L'(t) \geq c_7 L(t)^{\varpi} \qquad (6.1.3.28)$$

sağlanır. Burada, $(0,t)$ için integrallersek, istenen sonuç elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

7. GECİKMELİ TERİM İÇEREN DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde Pişkin vd., (2021) tarafından ele alınan "Dağılımlı gecikmeli terim içeren viskoelastik Kirchhoff sisteminin çözümlerinin üstel büyümesi" çalışması incelenecektir.

7.1 Dağılımlı Gecikmeli Terim İçeren Viskoelastik Kirchhoff Sisteminin Çözümlerinin Üstel Büyümesi

Burada, dağılımlı gecikmeli terim içeren viskoelastik Kirchhoff sistemini ele alacağız:

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \int_0^t g\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds + \mu_1 u_t\left(x,t\right) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2\left(\varrho\right)\right| u_t\left(x,t-\varrho\right)d\varrho = f_1\left(u,v\right), & (x,t)\in\Omega\times R_+, \\ v_{tt} - M\left(\|\nabla v\|^2\right)\Delta v + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta v\left(s\right)ds + \mu_3 v_t\left(x,t\right) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_4\left(\varrho\right)\right| v_t\left(x,t-\varrho\right)d\varrho = f_2\left(u,v\right), & (x,t)\in\Omega\times R_+, \\ u\left(x,t\right)=0,\ v\left(x,t\right)=0, & x\in\partial\Omega, \\ u_t\left(x,-t\right)=f_0\left(x,t\right),\ v_t\left(x,-t\right)=k_0\left(x,t\right), & (x,t)\in\Omega\times\left(0,\tau_2\right), \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), & x\in\Omega, \\ v\left(x,0\right)=v_0\left(x\right),\ v_t\left(x,0\right)=v_1\left(x\right), & x\in\Omega \end{cases} \tag{7.1.1}$$

burada Ω, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip, R^n de sınırlı bir bölgedir. μ_1, $\mu_3 > 0$ dır, τ_1, τ_2 zaman gecikmeleridir ve $0 \le \tau_1 < \tau_2$ sağlanır, μ_2, μ_4, L^∞ uzayının fonksiyonlarıdır, ve g, h diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. $M\left(s\right)$, R^+ de tanımlı, negatif olmayan C^1 uzayı fonksiyonudur, $M\left(s\right)=m_0+\alpha s^\gamma$ şeklindedir ve $m_0>0$, $\alpha\ge 0$, $\gamma\ge 0$ dır, özel olarak, $M\left(s\right)=1+s^\gamma$ olarak alacağız.

(A1) $g, h : R_+ \to R_+$ differansiyellenebilen, artmayan fonksiyoneller olmak üzere:

$$\begin{cases} g\left(t\right)\ge 0, \quad 1-\int_0^\infty g\left(s\right)ds = l_1 > 0, \\ h\left(t\right)\ge 0, \quad 1-\int_0^\infty g\left(s\right)ds = l_2 > 0 \end{cases} \tag{7.1.2}$$

sağlanır.

(A2) ξ_1, ξ_2 iki sabit olsun, böylece

$$\begin{cases} g'\left(t\right)\le -\xi_1 g\left(t\right), \quad t\ge 0, \\ h'\left(t\right)\le -\xi_2 h\left(t\right), \quad t\ge 0 \end{cases} \tag{7.1.3}$$

sağlanır.

(A3) μ_2, $\mu_4 : [\tau_1, \tau_2] \to R$, L^∞ uzay fonksiyonları olmak üzere, $\forall \delta > \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\delta - 1}{2}\right) \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)| \, d\varrho &< \mu_1, \\ \left(\frac{2\delta - 1}{2}\right) \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)| \, d\varrho &< \mu_3 \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

dir. $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ kaynak terimleri

$$\begin{cases} f_1(u, v) = a_1 |u + v|^{2(p+1)} (u + v) + b_1 |u|^p \, u \, |v|^{p+2} \\ f_2(u, v) = a_1 |u + v|^{2(p+1)} (u + v) + b_1 |v|^p \, v \, |u|^{p+2} \end{cases} \tag{7.1.5}$$

şeklindedir, burada $a_1, b_1 > 0$ dır.

Lemma 7.1.1 $F(u, v)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{2(p+2)} \left[u f_1(u, v) + v f_2(u, v) \right] \\ &= \frac{1}{2(p+2)} \left[a_1 |u + v|^{2(p+2)} + 2 b_1 |uv|^{p+2} \right] \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

şeklindedir, burada

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_1(u, v), \ \frac{\partial F}{\partial v} = f_2(u, v)$$

dır, kolaylık olsun diye $a_1 = b_1 = 1$ alınır (Rahmoune vd., 2020).

Lemma 7.1.2 c_0, c_1 iki pozitif sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{c_0}{2(p+2)} \left(|u|^{2(p+2)} + |v|^{2(p+2)} \right) \\ \leq \ & F(u, v) \\ \leq \ & \frac{c_1}{2(p+2)} \left(|u|^{2(p+2)} + |v|^{2(p+2)} \right) \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

ifadesi sağlanır (Messaoudi ve Said-Houari, 2010).

Lemma 7.1.3 $\phi, \psi \in C^1(R_+, R)$ için

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi * \psi \psi_t \, dx &= -\frac{1}{2} \phi(t) \|\psi(t)\|^2 + \frac{1}{2} (\phi' \circ \psi)(t) \\ &\quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\phi \circ \psi)(t) - \int_0^t \phi(s) \, ds \|\psi\|^2 \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

sağlanır, burada

$$(\phi \circ \psi)(t) = \int_0^t \phi(t-s)\|\psi(t) - \psi(s)\|^2 \, ds$$

dir (Ouchenane vd., 2013).

7.1.1 Üstel büyüme

(7.1.1) probleminin çözümlerinin üstel büyümesini incelemek için

$$y(x, \rho, \varrho, t) = u_t(x, t - \varrho\rho)$$

$$z(x, \rho, \varrho, t) = v_t(x, t - \varrho\rho)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım, böylece

$$\begin{cases} \varrho y_t(x, \rho, \varrho, t) + y_\rho(x, \rho, \varrho, t) = 0, \\ y(x, 0, \varrho, t) = u_t(x, t) \end{cases} \tag{7.1.1.1}$$

ve

$$\begin{cases} \varrho z_t(x, \rho, \varrho, t) + z_\rho(x, \rho, \varrho, t) = 0, \\ z(x, 0, \varrho, t) = v_t(x, t) \end{cases} \tag{7.1.1.2}$$

olur. Böylece, (7.1.1) problemini $t \geq 0$ için

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)\,ds + \mu_1 u_t(x,t) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)|\, y(x, 1, \varrho, t)\, d\varrho = f_1(u, v), & x \in \Omega, \\ v_{tt} - M\left(\|\nabla v\|^2\right)\Delta v + \int_0^t h(t-s)\Delta v(s)\,ds + \mu_3 v_t(x,t) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)|\, z(x, 1, \varrho, t)\, d\varrho = f_2(u, v), & x \in \Omega, \\ \varrho y_t(x, \rho, \varrho, t) + y_\rho(x, \rho, \varrho, t) = 0, \\ \varrho z_t(x, \rho, \varrho, t) + z_\rho(x, \rho, \varrho, t) = 0 \end{cases} \tag{7.1.1.3}$$

formunda yazabiliriz, başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{cases} u(x,t) = 0,\ v(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega, \\ y(x, \rho, \varrho, 0) = f_0(x, \varrho\rho),\ z(x, \rho, \varrho, 0) = k_0(x, \varrho\rho), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \\ v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x) \end{cases} \tag{7.1.1.4}$$

şeklindedir, burada

$$(x, \rho, \varrho, t) \in \Omega \times (0,1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty)$$

dir. $\hat{H}$ uzayını

$$\begin{aligned}\hat{H} &= H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))\\ &\quad\times L^2(\Omega\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 7.1.1.1 Kabul edelim ki (A1)-(A3) koşulları sağlansın ve

$$\begin{cases} -1<p<\frac{4-n}{n-2}, & n\geq 3,\\ p\geq -1, & n=1,2\end{cases} \tag{7.1.1.5}$$

olsun. Böylece, $(u_0,u_1,v_0,v_1,f_0,k_0)\in\hat{H}$, $T>0$ için, $C\left([0,T];\hat{H}\right)$ da, (7.1.1.3) probleminin tek bir çözümü vardır (Rahmoune vd., 2020).

Lemma 7.1.1.2 Farz edelim ki (A1)-(A3) koşulları ve (7.1.1.5) sağlansın, kabul edelim ki (u,v,y,z) (7.1.1.3) probleminin bir çözümü olsun, bu durumda, $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur ve

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|v_t\|^2+\frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\\ &\quad+\frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}+\frac{1}{2}l_1\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}l_2\|\nabla v\|^2\\ &\quad+\frac{1}{2}(go\nabla u)+\frac{1}{2}(ho\nabla v)+\frac{1}{2}M(y,z)\\ &\quad-\int_\Omega F(u,v)\,dx\end{aligned} \tag{7.1.1.6}$$

şeklindedir, ayrıca

$$\begin{aligned}E'(t) &\leq -c_3\left\{\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,y^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx\right.\\ &\quad\left.+\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,z^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx\right\}\\ &\leq 0\end{aligned} \tag{7.1.1.7}$$

sağlanır, burada

$$M(y,z)=\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\varrho\left\{\begin{array}{c}|\mu_2(\varrho)|\,y^2(x,\rho,\varrho,t)\\ +|\mu_4(\varrho)|\,z^2(x,\rho,\varrho,t)\end{array}\right\}d\varrho d\rho dx \tag{7.1.1.8}$$

dır.

İspat. (7.1.1.3) denkleminin birinci ve ikinci denklemini sırasıyla, u_t, v_t ile çarpıp ve Ω üzerinde integrallersek

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|v_t\right\|^2+\frac{1}{2\left(\gamma+1\right)}\left\|\nabla u\right\|^{2(\gamma+1)}\right.\\
&+\frac{1}{2\left(\gamma+1\right)}\left\|\nabla v\right\|^{2(\gamma+1)}+\frac{1}{2}l_1\left\|\nabla u\right\|^2+\frac{1}{2}l_2\left\|\nabla v\right\|^2\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(go\nabla u\right)+\frac{1}{2}\left(ho\nabla v\right)-\int_\Omega F\left(u,v\right)dx\right\}\\
=\;&-\mu_1\left\|u_t\right\|^2-\int_\Omega u_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|y\left(x,1,\varrho,t\right)d\varrho dx\\
&-\mu_3\left\|v_t\right\|^2-\int_\Omega v_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right|z\left(x,1,\varrho,t\right)d\varrho dx\\
&+\frac{1}{2}\left(g'o\nabla u\right)-\frac{1}{2}g\left(t\right)\left\|\nabla u\right\|^2+\frac{1}{2}\left(h'o\nabla v\right)-\frac{1}{2}h\left(t\right)\left\|\nabla v\right\|^2 \qquad (7.1.1.9)
\end{aligned}$$

elde ederiz ve başlangıç-sınır koşullarını kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\varrho\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|y^2\left(x,\rho,\varrho,t\right)d\varrho d\rho dx\\
=\;&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}2\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|yy_\rho d\varrho d\rho dx\\
=\;&\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|y^2\left(x,0,\varrho,t\right)d\varrho dx\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|y^2\left(x,1,\varrho,t\right)d\varrho dx\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2\left(\varrho\right)d\varrho\right)\left\|u_t\right\|^2\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|y^2\left(x,1,\varrho,t\right)d\varrho dx \qquad (7.1.1.10)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\varrho\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right|z^2\left(x,\rho,\varrho,t\right)d\varrho d\rho dx\\
=\;&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}2\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right|zz_\rho d\varrho d\rho dx\\
=\;&\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right|z^2\left(x,0,\varrho,t\right)d\varrho dx\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right|z^2\left(x,1,\varrho,t\right)d\varrho dx\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_4\left(\varrho\right)d\varrho\right)\left\|v_t\right\|^2\\
&-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu_4\left(\varrho\right)\right|z^2\left(x,1,\varrho,t\right)d\varrho dx \qquad (7.1.1.11)
\end{aligned}$$

olur, bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= -\mu_1\|u_t\|^2 - \int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,u_t y(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ &+\frac{1}{2}(g'o\nabla u)+\frac{1}{2}(h'o\nabla v) \\ &-\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_2(\varrho)\,d\varrho\right)\|u_t\|^2 \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,y^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ &-\mu_3\|v_t\|^2-\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,v_t z(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ &-\frac{1}{2}h(t)\|\nabla v\|^2+\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu_4(\varrho)\,d\varrho\right)\|v_t\|^2 \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,z^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \qquad (7.1.1.12)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabiliriz. (7.1.1.9)-(7.1.1.11) den, (7.1.1.6) yı elde ederiz. Ayrıca, Young eşitsizliğini kullanıp ve (A1)-(A3) koşullarını (7.1.1.12) de yerine bırakırsak, (7.1.1.7) yi elde ederiz.

Şimdi

$$\begin{aligned}H(t) &= -E(t)=-\frac{1}{2}\|u_t\|^2-\frac{1}{2}\|v_t\|^2-\frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} \\ &-\frac{1}{2(\gamma+1)}\|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}-\frac{1}{2}l_1\|\nabla u\|^2-\frac{1}{2}l_2\|\nabla v\|^2 \\ &-\frac{1}{2}(go\nabla u)-\frac{1}{2}(ho\nabla v)-\frac{1}{2}M(y,z) \\ &+\frac{1}{2(p+2)}\left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}+2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right] \qquad (7.1.1.13)\end{aligned}$$

fonksiyonelini tanımlayalım.

Teorem 7.1.1.3 Farz edelim ki (A1)-(A3) sağlansın. Ayrıca, $E(0)<0$ olsun, böylece, (7.1.1.3) probleminin çözümleri üstel olarak büyür.

İspat. (7.1.1.6) dan

$$E(t)\leq E(0)<0 \qquad (7.1.1.14)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} & H'(t) \\ = \; & -E'(t) \\ \geq \; & c_3 \left(\|u_t\|^2 + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)| \, y^2(x,1,\varrho,t) \, d\varrho dx \right. \\ & \left. + \|v_t\|^2 + \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)| \, z^2(x,1,\varrho,t) \, d\varrho dx \right) \end{aligned} \tag{7.1.1.15}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} H'(t) \; \geq \; & c_3 \max \left\{ \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)| \, y^2(x,1,\varrho,t) \, d\varrho dx, \right. \\ & \left. \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)| \, z^2(x,1,\varrho,t) \, d\varrho dx \right\} \\ \geq \; & 0 \end{aligned} \tag{7.1.1.16}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \; \leq \; & H(0) \\ \leq \; & H(t) \\ \leq \; & \frac{1}{2(p+2)} \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2 \|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \\ \leq \; & \frac{c_1}{2(p+2)} \left[\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \end{aligned} \tag{7.1.1.17}$$

olur.

$$K(t) = H(t) + \varepsilon \int_\Omega (u u_t + v v_t) \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega \left(\mu_1 u^2 + \mu_3 v^2 \right) dx \tag{7.1.1.18}$$

olsun, burada $\varepsilon > 0$ dır.

(7.1.1.3) probleminin birinci ve ikinci denklemleri, sırasıyla, u, v ile çarpılıp ve

(7.1.1.18) in türevi alınırsa

$$\begin{aligned} K'(t) &= H'(t)+\varepsilon\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2\right)-\varepsilon\left(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2\right) \\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega \|\nabla u\|^{2\gamma}|\nabla u|^2\,dx-\varepsilon\int_\Omega \|\nabla v\|^{2\gamma}|\nabla v|^2\,dx \\ &\quad +\varepsilon\int_\Omega \nabla u\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)\,dsdx \\ &\quad +\varepsilon\int_\Omega \nabla v\int_0^t h(t-s)\nabla v(s)\,dsdx \\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,uy(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ &\quad -\varepsilon\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,vz(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ &\quad +\varepsilon\left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}+2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right] \end{aligned} \tag{7.1.1.19}$$

elde edilir. Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,uy(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ \leq\ &\varepsilon\left\{\delta_1\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,d\varrho\right)\|u\|^2\right. \\ &\left.+\frac{1}{4\delta_1}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,y^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx\right\} \end{aligned} \tag{7.1.1.20}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,vz(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\ \leq\ &\varepsilon\left\{\delta_2\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,d\varrho\right)\|v\|^2\right. \\ &\left.+\frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_4(\varrho)|\,z^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx\right\} \end{aligned} \tag{7.1.1.21}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_0^t g(t-s)\,ds\int_\Omega \nabla u\,\nabla u(s)\,dxds \\ =\ &\varepsilon\int_0^t g(t-s)\,ds\int_\Omega \nabla u\,\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)dxds \\ &+\varepsilon\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2 \\ \geq\ &\frac{\varepsilon}{2}\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\nabla u\|^2-\frac{\varepsilon}{2}(go\nabla u) \end{aligned} \tag{7.1.1.22}$$

olur, böylece

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_0^t h(t-s)\,ds \int_\Omega \nabla v\, \nabla v(s)\,dxds \\
= \;& \varepsilon \int_0^t h(t-s)\,ds \int_\Omega \nabla v\, \left(\nabla v(s) - \nabla v(t)\right) dxds \\
& + \varepsilon \left(\int_0^t h(s)\,ds \right) \|\nabla v\|^2 \\
\geq \;& \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^t h(s)\,ds \right) \|\nabla v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} (ho\nabla v) \qquad (7.1.1.23)
\end{aligned}$$

sağlanır. (7.1.1.19) dan

$$\begin{aligned}
K'(t) \;\geq\; & H'(t) + \varepsilon \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) - \varepsilon \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
& - \varepsilon \left(\left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t g(s)\,ds \right) \|\nabla u\|^2 \right) \\
& - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)\,ds \right) \|\nabla v\|^2 \\
& - \varepsilon\delta_1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)|\,d\varrho \right) \|u\|^2 - \varepsilon\delta_2 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)|\,d\varrho \right) \|v\|^2 \\
& - \frac{\varepsilon}{2} (go\nabla u) - \frac{\varepsilon}{4\delta_1} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)|\, y^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\
& - \frac{\varepsilon}{2} (ho\nabla v) - \frac{\varepsilon}{4\delta_2} \int_\Omega \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)|\, z^2(x,1,\varrho,t)\,d\varrho dx \\
& + \varepsilon \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \qquad (7.1.1.24)
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\frac{1}{4\delta_1 c_3} = \frac{1}{4\delta_2 c_3} = \frac{\kappa}{2}$ eşitliği kullanılırsa, ayrıca (7.1.1.16), (7.1.1.24) te yerine bırakılırsa

$$\begin{aligned}
K'(t) \;\geq\; & [1 - \varepsilon\kappa] H'(t) + \varepsilon \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
& - \varepsilon \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
& - \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t g(s)\,ds \right) \right] \|\nabla u\|^2 \\
& - \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)\,ds \right) \right] \|\nabla v\|^2 \\
& - \varepsilon \frac{1}{2c_3\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)|\,d\varrho \right) \|u\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} (go\nabla u) \\
& - \varepsilon \frac{1}{2c_3\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)|\,d\varrho \right) \|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} (ho\nabla v) \\
& + \varepsilon \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \qquad (7.1.1.25)
\end{aligned}$$

elde edilir. (7.1.1.13) ten ve $0 < a < 1$ için

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \\
= \; & \varepsilon a \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \\
& + \varepsilon 2(p+2)(1-a) H(t) + \varepsilon (p+2)(1-a) \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
& + \varepsilon \frac{(p+2)(1-a)}{(\gamma+1)} \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
& + \varepsilon (p+2)(1-a) \left(1 - \int_0^t g(s)\, ds \right) \|\nabla u\|^2 \\
& + \varepsilon (p+2)(1-a) \left(1 - \int_0^t h(s)\, ds \right) \|\nabla v\|^2 \\
& + \varepsilon (p+2)(1-a) \left[(go\nabla u) + (ho\nabla v) + M(y,z) \right] \qquad (7.1.1.26)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifade, (7.1.1.25) te yerine bırakılırsa

$$\begin{aligned}
& K'(t) \\
\geq \; & [1 - \varepsilon\kappa] H'(t) + \varepsilon \left[(p+2)(1-a) + 1 \right] \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
& + \varepsilon \left[\frac{(p+2)(1-a)}{(\gamma+1)} - 1 \right] \left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} \right) \\
& + \varepsilon \left[(p+2)(1-a) \left(1 - \int_0^t g(s)\, ds \right) \right] \|\nabla u\|^2 \\
& - \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t g(s)\, ds \right) \right] \|\nabla u\|^2 \\
& + \varepsilon \left[(p+2)(1-a) \left(1 - \int_0^t h(s)\, ds \right) \right] \|\nabla v\|^2 \\
& - \varepsilon \left[\left(1 - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)\, ds \right) \right] \|\nabla v\|^2 \\
& - \varepsilon \frac{1}{2c_3\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(\varrho)|\, d\varrho \right) \|u\|^2 - \varepsilon \frac{1}{2c_3\kappa} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(\varrho)|\, d\varrho \right) \|v\|^2 \\
& + \varepsilon (p+2)(1-a) M(y,z) \\
& + \varepsilon \left[(p+2)(1-a) - \frac{1}{2} \right] ((go\nabla u) + (ho\nabla v)) \\
& + \varepsilon a \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] + \varepsilon 2(p+2)(1-a) H(t)
\end{aligned}$$

sağlanır. Poincáre eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& K'(t) \\
\geq\ & [1-\varepsilon\kappa] H'(t) + \varepsilon\left[(p+2)(1-a)+1\right]\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
& +\varepsilon\left[\frac{(p+2)(1-a)}{(\gamma+1)} - 1\right]\left(\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)}\right) \\
& +\varepsilon\left\{\left[(p+2)(1-a)-1\right] - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left[(p+2)(1-a) - \frac{1}{2}\right]\right. \\
& \left. -\frac{c}{2\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\,ds\right)\right\}\|\nabla u\|^2 \\
& +\varepsilon\left\{\left[(p+2)(1-a)-1\right] - \left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\left[(p+2)(1-a) - \frac{1}{2}\right]\right. \\
& \left. -\frac{c}{2\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(s)|\,ds\right)\right\}\|\nabla v\|^2 \\
& +\varepsilon(p+2)(1-a) M(y,z) \\
& +\varepsilon\left[(p+2)(1-a) - \frac{1}{2}\right]((go\nabla u) + (ho\nabla u)) \\
& +\varepsilon c_0 a\left[\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)}\right] \\
& +\varepsilon 2(p+2)(1-a) H(t) \qquad (7.1.1.27)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $a > 0$ yeterince küçük seçilirse

$$\alpha_1 = (p+2)(1-a) - 1 > 0 \text{ ve } \left(\frac{(p+2)(1-a)}{(\gamma+1)} - 1\right) > 0$$

ve

$$\max\left\{\int_0^\infty g(s)\,ds, \int_0^\infty h(s)\,ds\right\} < \frac{(p+2)(1-a)-1}{(p+2)(1-a)-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{1}{2}} \quad (7.1.1.28)$$

olur. κ yeterince büyük seçilirse

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \left\{((p+2)(1-a)-1) - \int_0^t g(s)\,ds\left((p+2)(1-a) - \frac{1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{c}{2\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)|\,ds\right)\right\} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \left\{((p+2)(1-a)-1) - \int_0^t h(s)\,ds\left((p+2)(1-a) - \frac{1}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{c}{2\kappa}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_4(s)|\,ds\right)\right\} \\
&> 0
\end{aligned}$$

olur. κ ve a sabitler olmak üzere, ve ε yeterince küçük seçilirse

$$\alpha_4 = 1 - \varepsilon\kappa > 0$$

ve

$$K(t) \leq \frac{c_1}{2(p+2)} \left[\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \tag{7.1.1.29}$$

olur. Böylece, $\beta > 0$ için, (7.1.1.27) den

$$\begin{aligned} K'(t) \geq\ & \beta \{ H(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\ & + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + (go\nabla u) \\ & + (ho\nabla v) + M(y,z) + \left[\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \} \end{aligned} \tag{7.1.1.30}$$

sağlanır. $\beta_1 > 0$ olmak üzere, (7.1.7) den

$$\begin{aligned} K'(t) \geq\ & \beta_1 \{ H(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\ & + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + (go\nabla u) + (ho\nabla v) \\ & + M(y,z) + \left[\|u+v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + 2\|uv\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \} \end{aligned} \tag{7.1.1.31}$$

ve $t > 0$ için

$$K(t) \geq K(0) > 0 \tag{7.1.1.32}$$

olur. $c > 0$ olmak üzere, Young ve Poincáre eşitsizlikleri ve (7.1.1.18) den

$$\begin{aligned} K(t) &= \left(H(t) + \varepsilon \int_\Omega (uu_t + vv_t)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega \left(\mu_1 u^2 + \mu_3 v^2 \right) dx \right) \\ &\leq c \left[H(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \right. \\ &\quad + \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} + \|\nabla v\|^{2(\gamma+1)} + (go\nabla u) + (ho\nabla v) \\ &\quad \left. + \|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \right] \end{aligned} \tag{7.1.1.33}$$

elde edilir. (7.1.1.30) dan ve (7.1.1.33) ten

$$K'(t) \geq \lambda K(t) \tag{7.1.1.34}$$

sağlanır, burada $\lambda > 0$ dir ve sadece β, c ye bağlıdır.

Buradan, (7.1.1.34) integrallenirse $t > 0$ için

$$K(t) \geq K(0)\, e^{\lambda t} \tag{7.1.1.35}$$

olur. $t > 0$ için, (7.1.1.29) dan ve (7.1.1.35) ten

$$\|u\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} + \|v\|_{2(p+2)}^{2(p+2)} \geq Ce^{\lambda t}$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Genellikle gecikme etkileri, birçok uygulamada ve fiziksel, kimyasal, biyoloji, termal ve ekonomi gibi pratik problemlerde ortaya çıkar. Değişken üs içeren problemler elastisite teorisi, elektroreolojik akışkanlar ve görüntü işleme gibi bilimdeki birçok dalda ortaya çıkar. Logaritmik nonlineerlik ise genel olarak enflasyon kozmolojisi, nükleer fizik, optik ve jeofizik gibi fiziğin bazı branşlarında ortaya çıkar. Literatüre bakıldığı zaman, gecikmeli terim içeren denklemlerle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Tezde; gecikmeli terim içeren değişken üslü denklemlerin, logaritmik kaynak terime sahip denklemlerin, polinomal kaynak terime sahip denklemin ve sistem şeklinde denklemin çözümlerinin farklı matematiksel özellikleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde gecikmeli terim içeren değişken üslü denklemler ele alınmıştır. İlk kısımda yer alan (2.1) denkleminde gecikmeli terim içeren değişken üslü $p(x)$-Laplacian denklemi ele alınmıştır. Bu denklemin, Georgiev-Todorova metodu ile çözümlerinin patlaması ve Komornik lemması yardımıyla çözümlerinin üstel ve polinomal azalması çalışıldı. İkinci kısımda yer alan (2.2) denkleminde ise gecikmeli terim içeren viskoelastik dalga denklemi ele alınmıştır. Bu denklemin çözümlerinin Banach daralma dönüşümü prensibi ve Fadeo-galerkin metodu ile varlığı ve tekliği, ve Georgiev-Todorova metodu ile çözümlerinin patlaması çalışıldı.

Beşinci bölümde gecikmeli terim içeren logaritmik kaynak terime sahip denklemler ele alınmıştır. İlk kısımda yer alan (2.3) denkleminde dağılımlı gecikmeli terim içeren Kirchhoff tipli dalga denklemi ele alınmıştır. Denklemin çözümlerinin global varlığı, Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla azalması ve Georgiev-Todorova metodu ile patlaması ispatlandı. İkinci kısımda yer alan (2.4) denkleminde ise dağılımlı gecikmeli terim içeren logaritmik dalga denklemi ele alınmıştır. Bu denklemin çözümlerinin global varlığı, Yarıgrup metodu ile lokal varlığı ve Lyapunov fonksiyoneli yardımıyla azalması çalışıldı.

Altıncı bölümde gecikmeli terim içeren polinomal kaynak terime sahip denklem ele alınmıştır. (2.5) denkleminde yüksek mertebeden Kirchhoff tipli denklem ele alınmıştır. Denklemin çözümlerinin varlığı, Nakao eşitsizliğinden faydalanılarak üstel ve polinomal azalması, ve patlaması çalışıldı.

Yedinci bölümde gecikmeli terim içeren denklem sistemi ele alınmıştır. (2.6) den-

kleminde viskoelastik Kirchhoff sistemi ele alınmıştır. Denklemin çözümlerinin üstel büyümesi çalışıldı.

Yukarıda ifade edilen denklemler ile ilgili elde edilen teoremler farklı koşullar altında veya farklı metotlarla ispatlanabilir. Ayrıca bu denklemlerin farklı matematiksel özellikleri incelenebilir. Bazı özel durumlarının nümerik simülasyonu yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abdallah, C. T., Sipahi, R., Niculescu, S. J., Michiels, W., Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay: limitations and opportunities. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 31(1), 38.

Adams, R. A., and Fournier, J. J. F. (2003). Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

Antontsev, S. (2011a). Wave equation with $p(x,t)$-Laplacian and damping term: blow-up of solutions. *Comptes Rendus Mecanique*, 339(12), 751-755. doi: 10.1016/j.crme.2011.09.001.

Antontsev, S. (2011b). Wave equation with $p(x,t)$-Laplacian and damping term: existence and blow-up. *Differential Equations & Applications*, 3(4), 503-525.

Antontsev, S., Ferreira, J., Pişkin, E., Yüksekkaya, H., Shahrouzi, M. (2021). Blow up and asymptotic behavior of solutions for a $p(x,t)$-Laplacian equation with delay term and variable exponents. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2021, 1-20.

Aubin, J. P. (1963). Un théoreme de compacite. Comptes Rendus Acad. *Sc. Paris, Juin*, 256:5042-5044.

Ball, J. (1977). Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 28(2), 473-486.

Bandle, C., and Brunner, H. (1998). Blow up in diffusion equations: A survey. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 97, 3-22. doi: 10.1016/S0377-0427(98)00100-9.

Bartkowski, K., and Górka, P. (2008). One-dimensional Klein-Gordon equation with logarithmic nonlinearities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical,* 41(35), 355201. doi: 10.1088/1751-8113/41/35/355201.

Białynicki-Birula, I., and Mycielski, J. (1975). Wave equations with logarithmic nonlinearities. *The Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 3(23), 461-466.

Bialynicki-Birula, I., and Mycielski, J. (1976). Nonlinear wave mechanics. *Annals of Physics*, 100(1-2), 62-93. doi: 10.1016/0003-4916(76)90057-9.

Brezis, H., and Brézis, H. (2011). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations (Vol. 2, No. 3, p. 5). New York: Springer.

Cazenave, T., and Haraux, A. (1980). Équations d'évolution avec non linéarité logarithmique. *In Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques* (Vol. 2, No. 1, pp. 21-51).

Chen, G. (1979). Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* 58, 249-274.

Choucha, A., Ouchenane, D., Zennir, K. (2020). Exponential growth of solution with

L^p-norm for class of non-linear viscoelastic wave equation with distributed delay term for large initial data. *Open journal of mathematical analysis,* 3(1), 76-83. doi:10.30538/psrp-oma2020.0054.

Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Neugebauer, C. J. (2003), (2004). The maximal function on variable L^p -spaces. *In Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica*, 28:223-238; 29(1), 247-249.

Dai, Q., and Yang, Z. (2014). Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik,* 65(5), 885-903. Doi: 10.1007/s00033-013-0365-6.

Datko, R. (1978). Representation of solutions and stability of linear differential-difference equations in a Banach space. *Journal of Differential Equations*, 29(1), 105-166. doi: 10.1016/0022-0396(78)90043-8.

Datko, R., Lagnese, J., Polis, M. (1986). An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM journal on control and optimization,* 24(1), 152-156. doi: 10.1137/0324007.

Datko, R. (1988). Not all feedback stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 26(3), 697-713. doi: 10.1137/0326040.

Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Ruzicka, M. (2011). Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer.

Evans, L.C. (1998). Partial differantial equations, Graduate Studies in Mathematics: vol. 19.

Fan, X., Shen, J., Zhao, D. (2001). Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262(2), 749-760. doi:10.1006/jmaa.2001.7618.

Fridman, E. (2014). Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Springer.

Gao, Q., Li, F., Wang, Y. (2011). Blow-up of the solution for higher-order Kirchhoff-type equations with nonlinear dissipation. *Central European Journal of Mathematics,* 9(3), 686-698. doi: 10.2478/s11533-010-0096-2.

Georgiev, V., and Todorova, G. (1994). Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of differential equations,* 109(2), 295-308. doi: 10.1006/jdeq.1994.1051.

Ghegal, S., Hamchi, I., Messaoudi, S. A. (2020). Global existence and stability of a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Applicable Analysis*, 99(8), 1333-1343. doi: 10.1080/00036811.2018.1530760.

Górka, P. (2009). Logarithmic Klein-Gordon equation. *Acta Physica Polonica B,* 40(1).

Guo, L., Yuan, Z., Lin, G. (2015). Blow up and global existence for a nonlinear

viscoelastic wave equation with strong damping and nonlinear damping and source terms. *Applied Mathematics*, *6*(05), 806. doi: 10.4236/am.2015.65076.

Kafini, M., and Messaoudi, S. A. (2016). A blow-up result in a nonlinear wave equation with delay. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(1), 237-247. doi: 10.1007/s00009-014-0500-4.

Kafini, M., and Messaoudi, S. (2019). On the decay and global nonexistence of solutions to a damped wave equation with variable-exponent nonlinearity and delay. *In Annales Polonici Mathematici*, 122, 49-70. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.

Kafini, M., and Messaoudi, S. (2020a). Local existence and blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear wave equation with delay. *Nonlinear Studies*, 27(3).

Kafini, M., and Messaoudi, S. (2020b). Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay. *Applicable Analysis*, 99(3), 530-547. doi: 10.1080/00036811.2018.1504029.

Kafini, M. (2021). On the decay of a nonlinear wave equation with delay. *Annali Dell'Universita'Di Ferrara*, 67(2), 309-325. doi: 10.1007/s11565-021-00366-6.

Kafini, M., and Mustafa, M. I. (2018a). A blow-up result in a Cauchy viscoelastic problem with a delayed strong damping. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms* 25, 357-367.

Kafini, M., and Mustafa, M. I. (2018b). A blow-up result to a delayed Cauchy viscoelastic problem. *Journal of Integral Equations and Applications*, 30(1), 81-94. doi: 10.1216/JIE-2018-30-1-81.

Kang, J. R. (2018). Global nonexistence of solutions for viscoelastic wave equation with delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(16), 6834-6841. doi: 10.1002/mma.5194.

Kang, J. R. (2020). Existence and blow-up of solutions for von Karman equations with time delay and variable exponents. *Applied Mathematics and Computation*, 371, 124917. doi: 10.1016/j.amc.2019.124917.

Kesavan, S. (1989). Topics in functional analysis and applications, John Wiley Sons, India.

Kirane, M., and Said-Houari, B. (2011). Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 62(6), 1065-1082. doi:10.1007/s00033-011-0145-0.

Kováčik, O., and Rákosník, J. (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. *Czechoslovak mathematical journal*, 41(4), 592-618.

Kolmanovskii, V., and Myshkis, A. (2012). *Applied theory of functional differential equations*, 85. Springer Science & Business Media.

Komornik, V. (1994), Exact Controllability and Stabilization: The Multiplier

Method. *RAM: Research in Applied Mathematics,* Masson-John Wiley, Paris.

Kuang, Y. (Ed.). (1993). Delay differential equations: with applications in population dynamics. Academic press.

Levine, H. A., Todorova, G. (2000). Blow up solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear and damping and source terms and positive initial energy. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(3), 793-895.

Li, F. (2004). Global existence and blow-up of solutionsfor a higher-order kirchhoff-type equation with nonlinear dissipation. Applied mathematics letters, 17(12), 1409-1414. doi: 10.1016/j.am1.2003.07.014.

Lions, J. L. (1969). Quelques méthodes de résolution de problemes aux limites non linéaires. Dunod, Paris.

Liu, K. (1997). Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM journal on control and optimization*, 35(5), 1574-1590. doi: 10.1137/S0363012995284928.

Matsuyama, T., and Ikehata, R. (1996). On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204(3), 729-753.

Mahdi, F. Z., Ferhat, M.F., Hakem, A. (2018). Blow up and asymptotic behavior for a system of viscoelastic wave equations of Kirchhoff type with a delay term. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, 2(3), 146-167. doi: 10.31197/atnaa.389865.

Messaoudi, S. A. (2020). On the decay of solutions of a damped quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(8), 5114-5126. doi: 10.1002/mma.6254.

Messaoudi, S. A., Al-Smail, J. H., Talahmeh, A. A. (2018). Decay for solutions of a nonlinear damped wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Computers & Mathematics with Applications*, 76(8), 1863-1875. doi: 10.1016/j.camwa.2018.07.035.

Messaoudi, S. A., Fareh, A., Doudi, N. (2016). Well posedness and exponential stability in a wave equation with a strong damping and a strong delay. *Journal of Mathematical Physics*, 57(11), 111501. doi: 10.1063/1.4966551.

Messaoudi, S. A., and Houari, B. S. (2007). A blow-up result for a higher-order nonlinear Kirchhoff-type hyperbolic equation. *Applied Mathematics Letters*, 20(8), 866-871. doi: 10.1016/j.aml.2006.08.018.

Messaoudi, S. A., Talahmeh, A. A., Al-Smail, J. H. (2017). Nonlinear damped wave equation: Existence and blow-up. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(12), 3024-3041. doi: 10.1016/j.camwa.2017.07.048.

Messaoudi, S. A., and Talahmeh, A. A. (2017). Blow up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 6976-6986. doi: 10.1002/mma.4505.

Messaoudi, S. A., and Said-Houari, B. (2010). Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 365(1), 277-287. doi: 10.1016/j.jmaa.2009.10.050.

Mezouar, N., Boulaaras, S. M., Allahem, A. (2020). Global existence of solutions for the viscoelastic Kirchhoff equation with logarithmic source terms. *Complexity*. doi: 10.1155/2020/7105387.

Musielak, J., and Orlicz, W. (1959). On modular spaces. Studia Mathematica, 18(1), 49-65.

Mustafa, M. I., and Kafini, M. (2016). Energy decay for viscoelastic plates with distributed delay and source term. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 67(3), 1-18. doi: 10.1007/s00033-016-0641-3.

Mustafa, M. I., and Kafini, M. (2017). Decay rates for memory-type plate system with delay and source term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 40(4), 883-895. doi: 10.1002/mma.4015.

Nakano, H. (1950). Modular Semi-Ordered Spaces, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, Japan.

Nakano, H. (1951). Topology of linear topological spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

Nakao, M. (1977). Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58(2), 336-343.

Nakao, M. (1978). A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 30(4), 747-762. doi: 10.2969/jmsj/03040747.

Nicaise, S., and Pignotti, C. (2006). Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5), 1561-1585. doi: 10.1137/060648891.

Nicaise, S., and Pignotti, C. (2008). Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Differential and Integral Equations*, 21(9-10), 935-958.

Nicaise, S., Valein, J., Fridman, E. (2009). Stability of the heat and of the wave equations with boundary time-varying delays. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S*, 2(3), 559-581. doi: 10.3934/dcdss.2009.2.559.

Orlicz, W. (1931). Über konjugierte exponentenfolgen. *Studia Mathematica*, 3(1), 200-211.

Ono, K. (1997). On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 216(1), 321-342.

Ouchenane, D., Zennir, K., Bayoud, M. (2013). Global nonexistence of solutions for a system of nonlinear viscoelastic wave equations with degenerate damping and

source terms. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(5), 723-739. doi: 10.1007/s11253-013-0809-3.

Park, S. H. (2020). Global existence, energy decay and blow-up of solutions for wave equations with time delay and logarithmic source. *Advances in Difference Equations*, (1), 1-17. doi: 10.1186/s13662-020-03037-6.

Park, S. H. (2021). Blow up for nonlinearly damped viscoelastic equations with logarithmic source and delay terms. *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 1-14. doi: 10.1186/s13662-021-03469-8.

Park, S. H., and Kang, J. R. (2019). Blow-up of solutions for a viscoelastic wave equation with variable exponents. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(6), 2083-2097. doi: 10.1002/mma.5501.

Payne, L. E., and Sattinger, D. H. (1975). Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, 22(3), 273-303. doi: 10.1007/BF02761595.

Pazy, A. (1983). Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, New York.

Pişkin, E., Ferreira, J., Yüksekkaya, H., Shahrouzi, M. (2022). Existence and asymptotic behavior for a logarithmic viscoelastic plate equation with distributed delay. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13 (2), 763-788. doi: 10.22075/IJNAA.2022.24639.2797.

Pişkin, E. (2013). Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Pişkin, E. (2017). Sobolev Uzayları, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2021), Evolüsyon denklemlerin çözümlerinin patlaması, Pegem Akademi.

Pişkin, E., and Polat, N. (2013). On the decay of solutions for a nonlinear higher-order Kirchhoff-type hyperbolic equation. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, 5(2), 107-116.

Pişkin E., and Yüksekkaya, H. (2020a), Blow-up of solutions for a viscoelastic wave equation with m-Laplacian and delay terms, *Tbilisi Mathematical Journal*, pp. 21-32.

Pişkin, E., and Yüksekkaya, H. (2020b), Local existence of solutions for a p-Laplacian type equation with delay term and logarithmic nonlinearity, *Tbilisi Mathematical Journal*, pp. 1-17.

Pişkin, E., and Yüksekkaya, H. (2021a). Nonexistence of Solutions for a Higher-Order Wave Equation with Delay and Variable-Exponents, Proceedings of AACMME-2021, Springer. (Baskıda)

Pişkin, E., and Yüksekkaya, H. (2021b). Local existence and blow up of solutions for a logarithmic nonlinear viscoelastic wave equation with delay. *Computational Methods for Differential Equations*, 9(2), 623-636.

Pişkin, E., and Yüksekkaya, H. (2022a), Qualitative analysis of solutions for a class of logarithmic Kirchhoff equation with distributed delay. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal Special Issue* (10), 17-34.

Pişkin, E., and Yüksekkaya, H. (2022b), Mathematical behavior of solutions for a logarithmic p-Laplacian equation with distributed delay. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal Special Issue* (10), 35-51.

Pişkin, E., Yüksekkaya, H., Mezouar, N. (2021). Growth of Solutions for a Coupled Viscoelastic Kirchhoff System with Distributed Delay Terms. *Menemui Matematik (Discovering Mathematics)*, 43(1), 26-39.

Polat, N. (2005). Doğrusal olmayan parobolik veya hiperbolik diferansiyel denklemlerde global çözümlerin yokluğu , Doktora Tezi, Dicle Ünivesitesi.

Portnov, V. R. (1966). Certain properties of the Orlicz spaces generated by the functions M(x,w). *In Doklady Akademii Nauk, Russian Academy of Science*, 170(6), 1269-1272.

Portnov, V. R. (1967). On the theory of Orlicz spaces which are generated by variable N-functions. *In Doklady Akademii Nauk, Russian Academy of Sciences,* 175(2), 296-299.

Radulescu, V. D., and Repovs, D. D. (2015). Partial differential equations with variable exponents: *variational methods and qualitative analysis* (Vol. 9). CRC press.

Rahmoune, A., Ouchenane, D., Boulaaras, S., Agarwal, P. (2020). Growth of solutions for a coupled nonlinear Klein-Gordon system with strong damping, source, and distributed delay terms. *Advances in Difference Equations*, (1), 1-15. doi: 10.1186/s13662-020-02801-y.

Richard, J. P. (2003). Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *automatica*, 39(10), 1667-1694. doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00167-5.

Sattinger, D. H. (1968). On global solution of nonlinear hyperbolic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30(2), 148-172.

Sharapudinov, I. I. (1979). Topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 26(4), 796-806.

Sharapudinov, I. I. (1983). Approximation of functions in the metric of the space $L^{p(t)}([a,b])$ and quadrature formulas. *Constructive function theory*, 81, 189-193.

Sharapudinov, I. I. (1986). On the basis property of the Haar system in the space $L^{p(t)}(0,1)$ and the principle of localization in the mean. *Matematicheskii*

Straughan, B. (1998). Explosive Instabilities in Mechanics, Springer.

Taouaf, N., Amroun, N., Benaissa, A., Beniani, A. (2018). Well-posedness and asymptotic stability for the Lamé system with internal distributed delay.

Mathematica Moravica, 22(1), 31-41. doi: 10.5937/MatMor1801031T.

Tsenov, I. (1961). Generalization of the problem of best approximation of a function in the space Ls, Uch., Zap. Dagestan Gos. Univ, 7, 25-37.

Wu, S. T. (2019). Blow-up of solution for a viscoelastic wave equation with delay. *Acta Mathematica Scientia*, 39(1), 329-338. doi: 10.1007/s10473-019-0124-7.

Ye, Y. (2013). Global existence and energy decay estimate of solutions for a higher-order Kirchhoff type equation with damping and source term. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(6), 2059-2067. doi: 10.1016/j.nonrwa.2013.03.001.

Yüksekkaya, H., Pişkin, E., Boulaaras, S. M., Cherif, B. B., Zubair, S. A. (2021a). Existence, nonexistence, and stability of solutions for a delayed plate equation with the logarithmic source. *Advances in Mathematical Physics*, 2021. doi: 10.1155/2021/8561626.

Yüksekkaya, H., Pişkin, E., Boulaaras, S. M., Cherif, B. B. (2021c). Existence, Decay, and Blow-Up of Solutions for a Higher-Order Kirchhoff-Type Equation with Delay Term. *Journal of Function Spaces*, 2021. doi: 10.1155/2021/4414545.

Yüksekkaya, H., and Pişkin, E. (2021a). Local existence and nonexistence of global solutions for a plate equation with time delay, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 39(5 (SI)), 23-32.

Yüksekkaya, H., and Pişkin, E. (2021b). Blow up and decay of solutions for a Klein-Gordon equation with delay and variable-exponents, Mathematics and Computer Science: Concepts and Applications, *Scrivener Wiley Book Chapter*, (Baskıda).

Yüksekkaya, H., Pişkin, E., Ferreira, J., Shahrouzi, M. (2022a). A viscoelastic wave equation with delay and variable exponents: existence and nonexistence. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 73(4), 1-28. doi: 10.1007/s00033-022-01776-y.

Yüksekkaya, H., Pişkin, E., Mezouar N., (2021b) Nonexistence solutions of a logarithmic nonlinear Kirchhoff equation with delay, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*. (Baskıda)

Yüksekkaya, H., Pişkin, E., Mezouar, N. (2022b), Blow up of solutions for a coupled viscoelastic Kirchhoff system with distributed delay terms, *Journal of Mathematical Control Science & Applications, (JMCSA)*, 8(1).

Yüksekkaya, H., and Pişkin, E., (2022a). Existence and exponential decay of a logarithmic wave equation with distributed delay, *Miskolc Mathematical Notes*, (Baskıda).

Yüksekkaya, H., and Pişkin, E., (2022b). Local existence, global existence and decay results of a logarithmic wave equation with delay term, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1-12. doi: 10.1002/mma.8912.

Yüksekkaya, H., and Pişkin, E., (2022c). Blow-up and decay of solutions for a delayed Timoshenko equation with variable-exponents, *Miskolc Mathematical Notes*, 23 (2), 1001–1022. doi: 10.18514/MMN.2022.3890.

Zheng, S. (2004). Nonlinear evolution equations. *Chapman and Hall/CRC*.

Zuazua, E. (1990). Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. *Communications in Partial Differential Equations*, 15(2), 205-235. doi: 10.1080/03605309908820684.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Hazal YÜKSEKKAYA

İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2014 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE Bölümü Matematik Anabilim Dalında lisans öğrenimimi dereceyle tamamladım.

- **Doktora:** Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, (2018-…).
- The Polytechnic University, Hauts-de-France, (Haziran, 2022-Eylül, 2022). (Araştırmacı)

- **Yüksek Lisans:** Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, (2016-2018).

- **Lisans:** Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, Matematik, (2009-2012, 2013-2014).

- Academia Pomorska, Pomeranian University, Slupsk, Poland, Matematik, (2012-2013).

- **Lise:** Selahaddin Eyyübi Anadolu Lisesi, Yenişehir, Diyarbakır, 2009.

İş Deneyimi

- Mayfield School, Manchester, England, 20.06.2012-25.09.2012. (Asistan Öğretmen)

- Heiligenwegschule, Osnabrück, Germany, 10.08.2017-05.11.2017. (Asistan Öğretmen)

- Milli Eğitim Bakanlığı, Siverek, Şanlıurfa, 2018-. (Matematik Öğretmeni)

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Hazal YÜKSEKKAYA		
Öğrenci No	18804503		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Gecikmeli Terim İçeren Hiperbolik Tipten Denklemlerin Çözümlerinin Matematiksel Davranışı		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	180		
Raporlama Tarihi	29.12.2022		
Benzerlik Oranı (%)	% 23		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 180 sayfalık kısmına ilişkin, 29/12/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *Turnitin* isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 23 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç

☐Kaynaklar hariç

☒Alıntılar ~~hariç~~/dâhil

☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir,
gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Hazal YÜKSEKKAYA
Tarih: 29.12.2022
İmza:

Danışman Adı, Soyadı: İmza:

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Tarih: 29.12.2022

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: İmza:

Prof. Dr. H. ÖZLEM GÜNEY

Tarih: 29.12.2022