



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MATEMATİKSEL MODELLERİN NÜMERİK İNCELENMESİ

Gamze KIRATLI

YÜKSEK LİSANS

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019

KONYA

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

BAZI MATEMATİKSEL MODELLERİN NÜMERİK İNCELENMESİ

Gamze KIRATLI

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kemal AYDIN

2019, vii+44 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Kemal AYDIN
Dr. Öğr. Üyesi H. Alparslan PEKER
Dr. Öğr. Üyesi Oğuzer SİNAN

Bu çalışmada bazı matematiksel modellerin nümerik çözümünü elde etmek için değişken adım genişliği stratejisi kullanılmıştır. Literatürde farklı nümerik metotlarla çözülmüş olan SIR model, İnfluenza model, Av-avcı model ve ENSO modeli tanıtılmış ve aynı parametreler kullanılarak değişken adım genişliği stratejisi uygulanmıştır. Bu modellerin nümerik integrasyonunda her adımda oluşan lokal hatanın kullanıcının belirlediği hata seviyesinden küçük kaldığı gösterilmiştir. Elde edilen nümerik çözümlerin grafikleri literatürdekiler ile karşılaştırılıp yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cauchy problemi, Sistemler İçin Adım Genişliği Stratejileri, Lokal Hata, SIR Model, Influenza Model, Av-Avcı Model, ENSO Model

ABSTRACT

MS THESIS

NUMERICAL INVESTIGATION OF SOME MATHEMATİCAL MODELS

Gamze KIRATLI

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Kemal AYDIN

2019, vii+44 Pages

Jury

Prof. Dr. Kemal AYDIN (Advisor)
Dr. Öğr. Üyesi H. Alparslan PEKER
Dr. Öğr. Üyesi Oğuzer SİNAN

In this study, variable step size strategy is used to obtain numerical solution of some mathematical models. In the literature, SIR model, Influenza model, Prey-Predator model and ENSO model, which are solved by different numerical methods, are introduced and variable step size strategy is applied by using the same parameters. In numerical integration of these models, it has been shown that the local error occurring in each step is less than the user-specified error level. Graphs of numerical solutions obtained were compared and interpreted in the literature.

Keywords: Cauchy Problems, Strategies of Step Size for Systems, Local Error, SIR Model, Influenza Model, Prey-Predator model, ENSO Model

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Bölüm Başkanı Prof. Dr. Kemal AYDIN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur. Tez çalışması seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı değerli hocam sayın Prof. Dr. Kemal AYDIN'a,,büyük sabır göstererek yardımını hiç esirgemeyen çok kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülnur ÇELİK KIZILKAN'a ve her zaman yanımda olan sevgili eşim Ömer Faruk KIRATLI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Gamze KIRATLI

KONYA-2019

İçindekiler

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ ..... **iii**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **v**

TABLO LİSTESİ ..... **vi**

KULLANILAN SEMBOLLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN DEĞİŞKEN ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİSİ **5**

2.1. K-Kontrol Algoritması 6
2.2. Lineer Sistemler İçin Adım Genişliği Stratejisi ve Algoritması 7
2.3. Lineer Olmayan Sistemler İçin Adım Genişliği Stratejisi ve Algoritması 10

3. BAZI MATEMATİKSEL MODELLER **15**

3.1. Bulaşıcı Hastalıkların Yayılımının (SIR) Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi . 15
3.2. İnfluenza Virüs Yayılımın Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi 20
3.3. Av-Avcı Probleminin Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi 26
3.4. El Nino Güney Salınımlarının (ENSO) Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi 30
3.5. Modeller İçin Yazılan Maple Prosedürleri 35

4. SONUÇ VE ÖNERİLER **40**

5. KAYNAKLAR **41**

ÖZGEÇMİŞ **44**

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.a. Örnek 2.1. için Algoritma 1 ile elde edilen adım genişlikleri
Şekil 2.1.b. Örnek 2.1. için lokal hata grafiği
Şekil 2.1.c. Lineer bir sistem için Algoritma 1 ile çözümlerinin grafiği
Şekil 2.2.a. Örnek 2.2. için Algoritma2 ile elde edilen adım genişlikleri
Şekil 2.2.b. Örnek 2.2. için lokal hata grafiği
Şekil 2.2.c. Lineer olmayan bir sistem için Algoritma 2 ile çözümlerinin grafiği
Şekil 3.1.a. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri
Şekil 3.1.b. Örnek 3.1. için lokal hata grafiği
Şekil 3.1.c1. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği
Şekil 3.1.c2. (Osthus ve ark., 2017) deki *S(t)* grafiği
Şekil 3.1.d1. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği
Şekil 3.1.d2. (Osthus ve ark., 2017) deki *I(t)* grafiği
Şekil 3.1.e1. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen z_i değer grafiği
Şekil 3.1.e2. (Osthus ve ark., 2017) deki *R(t)* grafiği
Şekil 3.1.f. SIR modelinde için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri
Şekil 3.2.a. Örnek 3.2. için Algortima 2 ile elde edilen adım genişlikleri
Şekil 3.2.b. Örnek 3.1. için lokal hata grafiği
Şekil 3.2.c. Örnek 3.2. için Algortima 2 ile elde edilen x_i değer grafiği
Şekil 3.2.d. Örnek 3.2. için Algortima 2 ile elde edilen y_i değer grafiği
Şekil 3.2.e. Örnek 3.2. için Algortima 2 ile elde edilen z_i değer grafiği
Şekil 3.2.f. Örnek 3.2. için Algortima 2 ile elde edilen w_i değer grafiği
Şekil 3.2.g1. İnfluenza modeli için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri
Şekil 3.2.g2. (Khanh, 2015) deki çözüm grafiği
Şekil 3.3.a. Örnek 3.3. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri
Şekil 3.3.b. Örnek 3.3. için lokal hata grafiği
Şekil 3.2.c. Örnek 3.3. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği
Şekil 3.3.d. Örnek 3.3. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği
Şekil 3.3.e1. Av-avcı modeli için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri
Şekil 3.3.e2. (Srini, 2014) deki çözüm grafiği
Şekil 3.4.a. Örnek 3.4. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri
Şekil 3.4.b. Örnek 3.1. için lokal hata grafiği
Şekil 3.4.c. Örnek 3.4. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği
Şekil 3.4.d. Örnek 3.4. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği
Şekil 3.4.e1. ENSO modeli için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri
Şekil 3.4.e2. (Zeng, 2013) deki çözüm grafiği
Şekil 3.4.1. Walker Sirkülasyonu

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1. Örnek 2.1. in Algoritma 1 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

Tablo 2.2. Örnek 2.2. in Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

Tablo 3.1.1. SIR modeli çözümünün Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

Tablo 3.1.2. Örnek 3.3. için lokal hata değerleri

Tablo 3.2.1. İnfluenza modeli çözümünün Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

Tablo 3.2.2. Örnek 3.3. için lokal hata değerleri

Tablo 3.3.1. Av-Avcı modeli çözümünün Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

Tablo 3.3.2. Örnek 3.3. için lokal hata değerleri

Tablo 3.4.1. ENSO modeli çözümünün Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

Tablo 3.4.2. Örnek 3.3. için lokal hata değerleri

KULLANILAN SEMBOLLER

Simgeler

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^N$: N boyutlu öklit uzayı

t_i : Grid Noktaları

h_i : i inci adındaki adım genişliği

Y_i : Cauchy probleminin t_i noktasındaki nümerik metot kullanarak elde edilen yaklaşık çözümünün değeri

LE_i : i inci adımda oluşan lokal hata vektörü

$||LE_i||$: i inci adımda oluşan lokal hata

$X(t_i)$: $X'(t) = F(t,X),\ X(t_0) = X_0$ Cauchy probleminin tam çözümünün t_i noktasındaki değeri

$Z(t)$: $Z'(t) = F(t,Z),\ Z(t_{i-1}) = Y_{i-1}$ Cauchy probleminin $[t_{i-1}, t_i)$ aralığındaki çözümü

a : $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ olmak üzere $a = \max_{1\le i,j\le N}|\ a_{ij}|$ sayısı

β_{i-1} : $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}|z_j(\tau_i)|\ \right) \le\ \beta_{i-1}$ olacak şekilde reel sayı

γ_i : $X'(t) = AX(t) + \varphi(t,X),\ X(t_0) = X_0$ Cauchy problemi için $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}|\varphi_j(\tau_i, z(\tau_i)|\right) \le \gamma_{i-1}$ şartını sağlayan reel sayı

ζ_i : $X'(t) = AX(t) + \varphi(t,X),\ X(t_0) = X_0$ Cauchy problemi için $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}\left|\frac{d\varphi_j}{dt}(\tau_i, z(\tau_i)\right|\right) \le \zeta_{i-1}$ şartını sağlayan reel sayı

δ_L : İstenilen hata seviyesi

h^* : Pratik adım parametresi

1. GİRİŞ

Farklı disiplinlerdeki problemleri matematiksel olarak modellemek, problemi matematiksel kavramlar ile ifade etmek anlamına gelir. Matematiksel modellemeyi fizikçiler, mühendisler, istatikçilerin kullanımı alışıla gelmiş bir durumdur. Ancak son zamanlarda matematiksel modellemeyi diğer bilim dalları da kullanmaya başlamışlardır. Örneğin, biyoloji, ekoloji ve meteoroloji alanında da matematiksel modelleme problemlerin çözümü için etkin bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır.

Matematik ve biyoloji bilim alanlarının arasındaki etkileşimler son yıllarda hızla artmaktadır. Her iki bilim alanının birlikteliği yepyeni bir bilim ortaya çıkarmıştır. Bu alan biyo-matematik olarak isimlendirilir. Çok sayıda kişi ve komiteler, biyo-matematik alanındaki gelişmelerin giderek artacağı kanaatindedir (Allman ve Rhodes, 2004). Genel olarak bu alanın ana konuları, nüfus artışı, bulaşıcı hastalıkların yayılması, tarım alanında zararlı böceklerle mücadelenin ekolojiye negatif ve pozitif etkileri, av-avcı problemleri, gıdalara bağlı bakteri artması vs. konulardır. Belirli bir biyolojik süreçten niceliksel olarak çıkabilmek için bu sürecin matematiksel olarak tanımlanmasına yani modellenmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Farklı bir disiplin olarak meteoroloji biliminde de matematik modellemeden yardım alınır. Meteoroloji bilimi günümüz dünyası için çok önemli bir hale gelmiştir. Tarımsal ve endüstriyel gelişim için öngörülebilir olmak paha biçilemez bir durumdur. Meteorolojik olayları önceden bilip ona göre planlama yapılmakta ve bunun için en doğru sonucu verebilecek matematiksel modellere ihtiyaç duyulmaktadır.

Matematiksel model verildiğinde ise bazı anlamlar çıkarmak için modeli analiz etmek gerekmektedir. Çok sayıda karmaşık diferensiyel-matematik model açık olarak çözülemez, böyle durumlarda genellikle diferensiyel-model yerine onun fark-simulasyonu için sık sık bilgisayarlar kullanılır (Allman ve Rhodes, 2004; Keshet, 2005).

Matematiksel modellerde çoğu zaman kesin sonuca ulaşmak ya mümkün değildir ya da hesaplanması uzun ve zordur. Bu yüzden pratik ve yaklaşık çözüm bulmak çok önemlidir. Bilgisayar hesaplamalarında öncelik kullanıcıya göre değişse de hem hızlı şekilde hem de mümkün mertebe yakın çözüme ulaşmak önemlidir. Bu isteği etkileyen en önemli faktörlerden birisi adım genişliğidir. Adım genişliklerin seçimi önemli bir noktadır. Eğer daha

hızlı bir çözüm elde etmek istenirse büyük adım genişliği seçilir ancak bu analitik çözümden uzaklaştırır. Adım genişliği küçük tutulursa nümerik çözüm analitik çözüme yakınlaşır fakat hesaplama süresi artar (Çelik Kızılkan, 2004).

Bu tezin amacı; disiplinlerarası yaklaşımla çoğu bilim dalında karşılaşılan bazı matematiksel modelleri *adaptif-değişken adım genişlikli* nümerik yöntemlerden biri ile analiz etmek, farklı nümerik yöntemlerle yapılan çözümlerle karşılaştırmaktır.

1.1. Kaynak Araştırması

Diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonunda en önemli kavramlardan biri adım genişliğinin seçimidir. Verilen bir $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, $t_0 \le t \le T$ Cauchy probleminin çözümünün var ve tek olduğu bilinen bir bölge üzerinde araştırmalara Çelik Kızılkan 2004 yılından itibaren yer vermiştir. İlk olarak problemin nümerik integrasyonu için Euler metoduna göre hata analizi tabanlı ve Picard teoremi tabanlı adım genişliği stratejileri Çelik Kızılkan, 2004 de ele alınmış ve aynı çalışmada değişken adım genişliği stratejileri kullanılarak hem değişken adım genişliklerini hem de Cauchy probleminin yaklaşık çözümünü hesap eden algoritmalar verilmiştir. Çelik Kızılkan, 2009 da yaptığı çalışma ile $X' = F(t,X),\ X(t_0) = X_0$ şeklindeki lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklem sistemlerin nümerik integrasyonunda adım genişliği stratejileri verilmiştir. Bu stratejiler adaptif kontrollü stratejilerdir. Bu stratejilere dayalı farklı algoritmalar verilmiştir. Bu çalışmaları geliştirerek Çelik Kızılkan ve Aydın, 2011 de, lineer diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonu için adım genişliği stratejileri elde edilmiştir ve stratejilere uygun adım genişliği ve nümerik çözümleri veren algoritmalar verilmiştir. Stratejiler ve algoritmalar nümerik örneklerle de desteklenmiştir.

Fark denklemlerle dinamik modeller (lineer olmayan modellerin analizi, nüfus modellerinin varyasyonları), av-avcı problemleri, bulaşıcı hastalık modelleri, elementer epidemik model ve biyolojik modeller Allman ve Rhodes, 2004 de yaptıkları çalışmada yer vermişlerdir. Yine benzer şekilde fark denklemlerle ifade edilen lineer ve lineer olmayan biyolojik modelleri Edelstein-Keshet, 2005 de incelenmiştir.

Av-avcı probleminin dinamikleri üzerine çalışan Liu ve Lou 2010 yılında av ile avcının birlikte olmasının avcının büyüme kabiliyetinin ölüm oranından daha büyük olmasına bağlı olduğunu, av ve avcının aynı anda yok olmasının mümkün olmadığını göstermişlerdir. Ayrıca analitik bulguları ispatlamak için parametre değerlerinin varsayımsal kümesi için

nümerik örnekler de vermişlerdir (Liu ve Lou, 2010). Lakshmi aynı yıl yaptığı çalışmada Brownian populasyon modelini ele almış, lojistik modelden etkilenerek bu model modifiye edilmiş, modifiye edilmiş olan modelin gerçekçi çözümler verdiği iddia edilmiştir. Ayrıca Brownian etkili av-avcı problemi tanıtılmış, Brownian etkisinin önemi tartışılmıştır (Lakshmi, 2010).

Dünya nüfusuna büyük etkisi olan bulaşıcı hastalıkların yayılması Daniel Bernoulli tarafından 1766 yılında ilk kez çalışılmıştır. Bernoulli çiçek hastalığı için geliştirilen aşılama yöntemini matematiksel modelle değerlendirmiştir. Hafif düzeyde hastalık taşıyan bireyden alınan parçanın sağlıklı bireylere verilerek aşılanması tekniği matematiksel modelle gösterilmiş fakat bu teknik %30 olan ölüm riskini %1 e düşürse de hasta olma ihtimali olmayan kişilerin de ölümüne yol açtığı için tartışılmıştır (Bernoulli ve Blower, 2004; Akpınar, 2012).

Kızamık salgınlarında da ortaya çıkan yeni vaka sayısının, hastalık taşıyan ya da hastalığa duyarlı birey adedine bağlı olduğunu gösteren model ilk olarak Hamer tarafından kesikli bir zaman modeli olarak tasarlanarak analiz edilmiştir. McKendrick ve W.O.Kermack ilk defa 1927 yılında matematik modellerinin bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahminine farklı bir bakış açısı getirmiş ve çalışmalarını 1932 ve 1933 yıllarında yayınladıkları makaleler ile geliştirmişlerdir. Kermack-McKendrick modeli kapalı bir toplulukta zaman içerisinde bulaşıcı bir hastalığın yayılımını açıklamaya çalışmıştır (Hamer, 1906; McKendrick ve Kermack, 1927). Khanh ise 2015 yılında bulaşıcı hastalıklarından biri olan İnfluenza virüs modelinin kararlılık analizini ele almış ve Lyapunov fonksiyon metodu ile modeli çözümlemiştir.

Son yıllarda ENSO yarı periyodik iklim olayı hakkında çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Oluşturulan matematiksel modellemelerin yaklaşık çözümleri önem kazanmıştır. Adomian decomposition methodu ENSO modelinin nümerik çözümünü hesaplamak için kullanılan yöntemlerden biridir (Adomian, 1994). Daha sonra Yi Zeng 2013 yılında ENSO modelini Laplace-Adomian-Pade tekniği ile yaklaşık çözümü üzerinde çalışmıştır.

1.2. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş, literatür özeti ve tezin yapısı ile ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bu tezde kullanılacak olan sistemler için değişken adım genişliği strateji ve algoritmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bu stratejiyi kullanacağımız matematiksel modeller tanıtılıp literatürdeki parametreler ile ikinci bölümde verilen değişken adım genişliği stratejisi uygulanmış ve literatürde bulunan farklı metotlarla elde edilen nümerik çözümlerin grafikleri ile karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN DEĞİŞKEN ADIM GENİŞLİĞİ STRATEJİSİ

$D = \{(t,x): t \in [t_0,T], |x - x_0| \leq b\}$ bölgesi üzerinde

$$x'(t) = f(t,x),\ x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

Cauchy problemini ele alalım. Bu bölümde, verilen Cauchy problemi için Çelik Kızılkan ve Aydın, 2005 de verilen değişken adım genişlikli nümerik hesap algoritmaları kısaca tanıtılacak ve bu algoritmalar uygulanarak nümerik örnekler verilecektir.

Diferensiyel denklem sistemlerinin nümerik integrasyonunda en önemli kavramlardan biri adım genişliği seçimidir. Literatürde çoğu hesaplamada sabit adım genişliği seçilmiştir. Fakat adım genişliğini sabit almak bölgeye göre bizi analitik çözümden uzaklaştırabilir. Analitik çözüme yaklaşık değer bulmak için adım genişliği küçük seçilir ve bu noktada işlem pratik olmaktan çıkar. Daha büyük adım genişliği seçmek ise kesin çözümden uzaklaştırır hata yapma oranını artırır (Çelik Kızılkan, 2009; Çelik Kızılkan, Aydın ve Duman, 2016).

$X(t) = (x_j(t)),\qquad X_0 = (x_{j0});\ x_{j0} = x_j(t_0),\ F(t,X) = (f_j);\ f_j = f_j(t,x_1,x_2,\dots,x_N)$

ve $F \in C^m([t_0,T] \times \mathbb{R}^N)$, $X(t)$, X_0, $b = (b_j) \in \mathbb{R}^N$ olmak üzere

$$D = \{(t,X): t \in [t_0,T], |x_j - x_{j0}| \leq b_j\}$$

bölgesi üzerinde

$$X'(t) = F(t,X),\ X(t_0) = X_0 \tag{2.2}$$

Cauchy problemini ele alalım.

$Z(t) = (z_1(t)\ \ z_2(t)\ \dots\ z_N(t))^T$ vektör fonksiyonu, Cauchy probleminin $[t_{i-1}, t_i)$ aralığındaki çözümü ve $Y_i = (y_{i1}\ \ y_{i2}\ \dots\ y_{iN})^T$, $i.$ adımda nümerik metotla elde edilen çözüm vektörü olsun.

$$Z'(t) = F(t,Z),\qquad Z(t_{i-1}) = Y_{i-1}$$

Cauchy probleminin $[t_{i-1}, t_i)$ aralığındaki lokal hata vektörü,

$$\mathrm{LE_i} = \mathrm{Y_i} - \mathrm{Z(t_i)} = \begin{pmatrix} \mathrm{y_{i1}} - \mathrm{z_1(t_i)} \\ \mathrm{y_{i2}} - \mathrm{z_2(t_i)} \\ \vdots \\ \mathrm{y_{iN}} - \mathrm{z_N(t_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{LE_{i1}} \\ \mathrm{LE_{i2}} \\ \vdots \\ \mathrm{LE_{iN}} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. $\|LE_i\|$ değerine de $[t_{i-1}, t_i)$ aralığındaki lokal hata denir.

Hata analizinde kullanılan Euler metodu;

$$Y_i = (y_{i1}\ \ y_{i2}\ \ \dots\ y_{iN})^T\ , \qquad F_i = (f_1\ f_2\ \dots\ f_N)^T,$$

$$f_i = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \qquad (j = 1,2, \dots, N)$$

ve $h_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ olmak üzere $Y_{i+1} = Y_i + h_{i+1}F_i$ şeklinde tanımlanır (Çelik Kızılkan, 2009; Loan, 2000).

Adım genişliği kayan nokta aritmetiğinin etkileri gözlenebilecek şekilde küçük seçilirse de nümerik çözüm analitik çözüme yakın olmayabilir. Bu sebeple adım genişliği seçiminde kayan noktalı sayılarla çalışılmasına dikkat edilmelidir. Kayan noktalı sayıların ve kayan nokta aritmetiğinin etkisi Çelik Kızılkan, 2009 da detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

2.1. *K*-Kontrol Algoritması

Adım genişliği tespiti yapan ve nümerik çözüm hesaplayan algoritmaların çalışmasını kontrol eden adım genişliği kontrol algoritmasını tanıtalım.

k; adım sayısı, h_k; hesaplanan adım genişliği, h^*; kullanıcının belirlediği istenildiği kadar küçük adım genişliği parametresi olarak verilir (Çelik Kızılkan, 2004).

K-Kontrol Algoritması

K: 1. $t_0 + \sum_{k=1}^{i-1} h_k + \widehat{h_\iota} \leq T$ ise;

1.1. $\widehat{h_\iota} > h^*$ ise $h_i = \widehat{h_\iota}$ olarak alınır.

1.2. $\widehat{h_\iota} < h^*$ ise $h_i = 0$ alınır ve işlem sonlandırılır.

2. $t_0 + \sum_{k=1}^{i-1} h_k + \widehat{h_\iota} > T$ ise $\widehat{\widehat{h_\iota}} = T - t_0 - \sum_{k=1}^{i-1} h_k$ hesapla,

2.1. $\widehat{\widehat{h_\iota}} > h^*$ ise $h_i = \widehat{\widehat{h_\iota}}$ olarak alınır.

2.2. $\widehat{\widehat{h_\iota}} < h^*$ ise $h_i = 0$ alınır ve işlem sonlandırılır (Çelik Kızılkan, 2004).

2.2. Lineer Sistemler için Adım Genişliği Stratejisi ve Algoritması

$$X'=AX,\ X(t_0)=X_0 \tag{2.4}$$

ile verilen lineer Cauchy problemi için lokal hata ve adım genişliği,

D=$\{(t, x) : |t - t_0| \le a, \left|x_j - x_{j0}\right| \le b_j\}$ bölgesi üzerinde, (2.4) Cauchy probleminin,

i. adımdaki lokal hatası

$$\|LE_i\| \le \left(\frac{1}{2}\alpha^2\beta_{i-1}\right)\sqrt{N^5}h_i^2 \in [t_{i-1}, t_i)$$

şeklinde sınırlandırılmıştır. *i*. adımdaki adım genişliği ise,

$$h_i \le \frac{1}{a\sqrt[4]{N^5}}\left(\frac{2\delta_L}{\beta_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

ile ifade edilmiştir. Burada,

- δ_L: istenilen hata seviyesi,
- N: $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matrisini boyutu, $\varphi \in C^1([t_0-a,t_0+a] \times \mathbb{R}^N)$,
- y_i: *i*. adımdaki nümerik çözüm,
- $Z(t)$: $Z'(t)=AZ(t)$, $Z(t_{i-1}) = Y_{i-1}$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i)$,
- $\alpha=max_{1\le i,j\le N}\left|a_{ij}\right|$,
- $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}\left|z_j(\tau_i)\right|\right) \le \beta_{i-1}$,

şeklinde tanımlanmıştır (Çelik Kızılkan, 2009; Çelik Kızılkan ve Aydın, 2012).

<u>Algoritma 1:</u> Adım genişliği algoritması (2.5) denklemi tarafından verilen adım genişlikleri ile Cauchy probleminin nümerik çözümünü hesaplayan algoritma şu şekildedir.

0. **Adım (Giriş elemanları):** $t_0, T, b, h^*, \delta_L, X_0, N, A$ elemanları girilir.
1. **Adım:** $\alpha=max_{1\le i,j\le N}\left|a_{ij}\right|$ sayısı hesaplanır.
2. **Adım:** $\beta_{i-1} = max_{1\le j\le N}\{b_j + \left|y_{(i-1)j}\right|\}$ ve $\hat{h}_i \le \frac{1}{a\sqrt[4]{N^5}}\left(\frac{2\delta_L}{\beta_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$

   olacak şekilde $\hat{h}_i$ sayıları hesaplanır.

3. **Adım:** K -Adım genişliği kontrolü yapılır.

4. **Adım:** $t_i = t_{i-1} + h_i$ ve $Y_i = (I + h_i A)Y_{i-1}$ hesaplanır ve 2.adıma gidilir (Çelik Kızılkan, 2009).

Örnek 2.1. Lineer bir denklem sisteminin çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için (2.4) formunda yazalım:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Burada, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dir.

Nümerik integrasyonun her bir adımdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha = max_{1 \le i,j \le N} |a_{ij}|$, $|x_j - x_{j0}| \le 4$
- $\beta_{i-1} = max_{1 \le j \le N} \{b_j + |y_{(i-1)j}|\}$

Buna göre *i*. adımdaki adım genişliği,

$$h_i \le \frac{1}{a\sqrt[4]{N^5}} \left(\frac{2\delta_L}{\beta_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

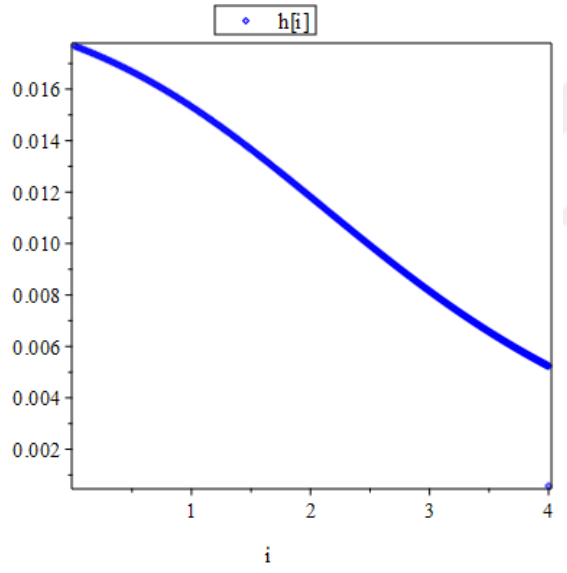
Lineer denklem sisteminin $t \in [0, 4]$ aralığında, $\delta_L = 0.05$ ve $h^* = 10^{-12}$ için değişken adım genişliği stratejisi

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 1$$

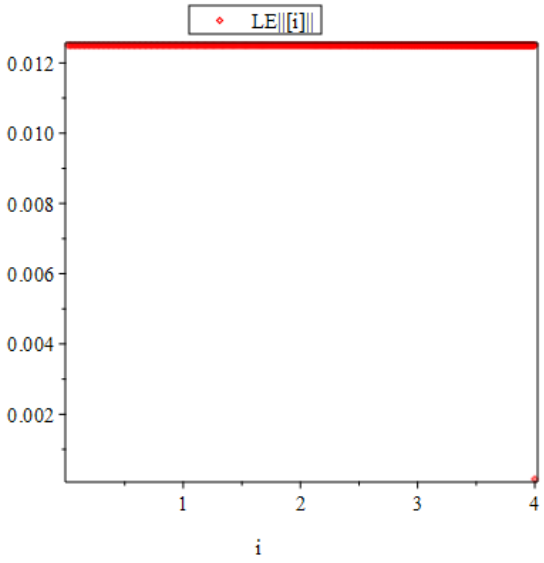
başlangıç değerleri ile uygulanıp her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümlerine Tablo 2.1. ve Şekil 2.1. de yer verilmiştir.

$\dot{I}$	t_i	h_i	$\|LE_i\|$	x_i	y_i
1	0.01767766952	0.01767766952	0.01249999999	1.017677670	0.9823223305
2	0.03532417167	0.01764650215	0.01250000000	1.035636121	0.9643638793
3	0.05293917959	0.01761500792	0.01249999999	1.053878859	0.9461211408
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
389	3.994193009	0.005246608252	0.01250000000	53.03948646	-51.03948646
390	3.999426870	0.005233861300	0.01249999999	53.31708778	-51.31708778
391	4.000000000	0.000573130	0.0001506192174	53.34764540	-51.34764540

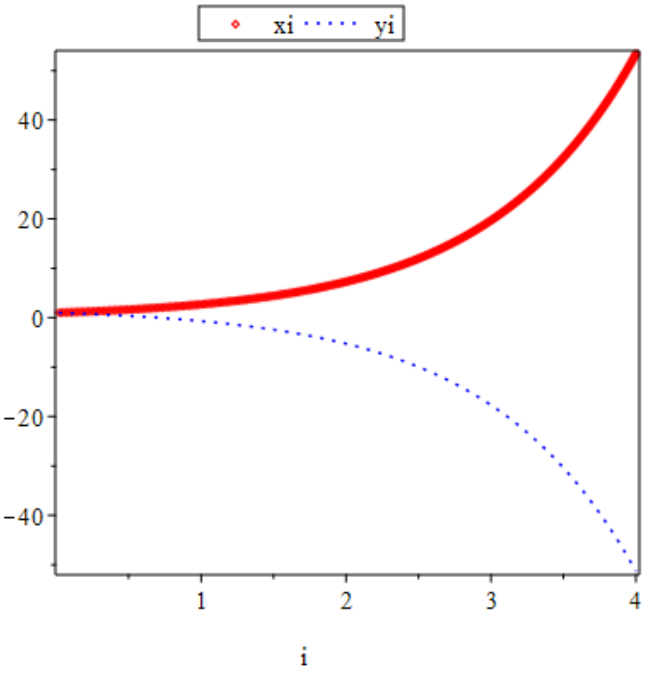
Tablo 2.1 Örnek 2.1.'in Algoritma 1 ile elde edilen adım genişliği, lokal hata ve çözümleri



Şekil 2.1.a. Örnek 2.1. için Algoritma 1 ile elde edilen adım genişlikleri



Şekil 2.1.b. Örnek 2.1. için Algoritma 1 ile elde lokal hata grafiği



Şekil 2.1.c. Örnek 2.1.nin Algoritma 1 ile elde edilen çözümleri

2.3. Lineer Olmayan Sistemler için Adım Genişliği Stratejisi ve Algoritması

$$X'=AX + \varphi(t,X)\ ,\ X(t_0)=X_0 \tag{2.7}$$

ile verilen lineer olmayan Cauchy problemi için i. adımdaki lokal hatası

D=$\{(t, x) : |t - t_0| \le a, |x_j - x_{j0}| \le b_j\}$ bölgesi üzerinde,

$$\|LE_i\| \le \frac{1}{2}\sqrt{N}h_i^2\{N^2\alpha^2\beta_{i-1}+N\alpha\gamma_{i-1}+\varsigma_{i-1}\}$$

şeklinde sınırlandırılmış, i. adımdaki adım genişliği ise,

$$h_i \le N^{-1/4}\left(\frac{2\delta_L}{N^2\beta_{i-1} + N\alpha\gamma_{i-1} + \varsigma_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

ile ifade edilmiştir. Burada,

- δ_L: istenilen hata seviyesi,
- N: $A=(a_{ij}) \in R^{N\times N}$ matrisini boyutu, $\varphi \in C^1([t_0\text{-}a,t_0+a]\times R^N)$,
- y_i: i. adımdaki nümerik çözüm,
- $Z(t)$: $Z'(t)=AZ(t)+\varphi\left(t, Z(t)\right),\ Z(t_{i-1}) = Y_{i-1}\ ,\ \tau_i \in [t_{i-1}, t_i)$,
- $\alpha=max_{1\le i,j\le N}|a_{ij}|$,
- $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}|z_j(\tau_i)|\right) \le \beta_{i-1}$,

- $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}\left|\varphi_j(\tau_i,z(\tau_i)\right|\right)\le\gamma_{i-1}$,
- $max_{1\le j\le N}\left(sup_{t_{i-1}\le\tau_i<t_i}\left|\frac{d\varphi_j}{dt}(\tau_i,z(\tau_i)\right|\right)\le\zeta_{i-1}$

şeklinde tanımlanmıştır (Çelik Kızılkan, 2009; Çelik Kızılkan ve Aydın, 2012).

Algoritma 2: Adım genişliği algoritması (2.8) denklemi tarafından verilen adım genişlikleri ile Cauchy probleminin nümerik çözümünü hesaplar.

0. Adım (Giriş elemanları): $t_0, T, b, h^*, \delta_L, X_0, \varphi(t,X), N, A$

1. Adım $\alpha=max_{1\le i,j\le N}\left|a_{ij}\right|$ hesaplanır.

2. Adım:

$$\max_{1\le j\le N}\left(\sup_{t_{i-1}\le\tau_i\le t_i}|z(\tau_i)|\right)\le\beta_{i-1}\ ,$$

$$\max_{1\le j\le N}\left(\sup_{t_{i-1}\le\tau_i\le t_i}\left|\varphi_j(\tau_i,z(\tau_i)\right|\right)\le\gamma_{i-1},$$

$$\max_{1\le j\le N}\left(\sup_{t_{i-1}\le\tau_i\le t_i}\left|\frac{d\varphi_j}{dt}(\tau_i,z(\tau_i)\ )\right|\right)\le\zeta_{i-1},$$

sayıları hesaplanır.

3. Adım:

$$h_i\ \le N^{-1/4}\left(\frac{2\delta_L}{N^2\beta_{i-1}+N\alpha\gamma_{i-1}+\zeta_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

adım genişliği hesaplanır.

4. Adım: K -Adım genişliği kontrolü yapılır.

5. Adım: $t_i=t_{i-1}+h_i$ ve $Y_i=(I+h_iA)Y_{i-1}+h_i\varphi(t_{i-1},Y_{i-1})$ hesaplanır (Çelik Kızılkan, 2009).

Örnek 2.2. Lineer olmayan bir denklem sisteminin çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için (2.7) formunda yazalım:

$$X'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}x\sqrt{y}\\ y\sqrt{x}\end{pmatrix}$$

Burada, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\varphi(t,X)=\begin{pmatrix}x\sqrt{y}\\ y\sqrt{x}\end{pmatrix}$ dir.

Nümerik integrasyonun her bir adımdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha=max_{1\le i,j\le N}|a_{ij}|\ ,\ |x_j-x_{j0}|\le 4,$
- $\beta_{i-1}=max(|x_{i-1}|,|y_{i-1}|),$
- $\gamma_{i-1}=max(|(x_{i-1})(y_{i-1})^{1/2}|,|(y_{i-1})(x_{i-1})^{1/2}|),$
- $\varsigma_{i-1}=max\left(\left|(y_{i-1})^{\frac{1}{2}}((x_{i-1})^2)/2(y_{i-1})+((5(x_{i-1}))/2)-(y_{i-1})\right|,\left|(x_{i-1})^{1/2}((y_{i-1})-(((y_{i-1})^2)/2(x_{i-1}))+(x_{i-1})\right|\right)$

Buna göre *i*. adımdaki adım genişliği,

$$h_i\ \le N^{-1/4}\left(\frac{2\delta_L}{N^2\beta_{i-1}+N\alpha\gamma_{i-1}+\varsigma_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

Lineer olmayan denklem sisteminin $t\in[0,\ 1]$ aralığında, δ_L= 0.1 ve h^* = 10^{-12} için değişken adım genişliği stratejisi

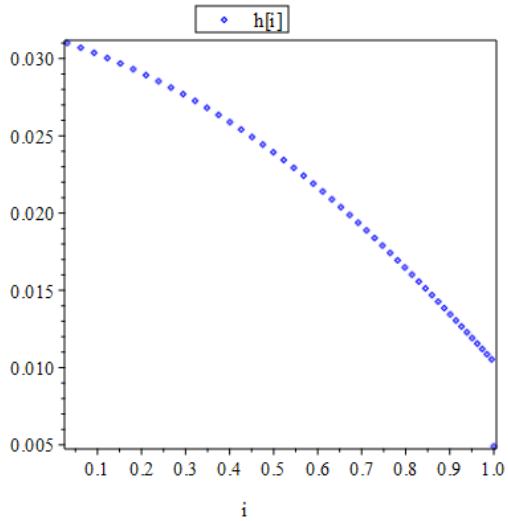
$$x(0)=1,\qquad y(0)=1$$

başlangıç değerleri ile uygulanıp her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümlerine Tablo 2.2. ve Şekil 2.2. de yer verilmiştir.

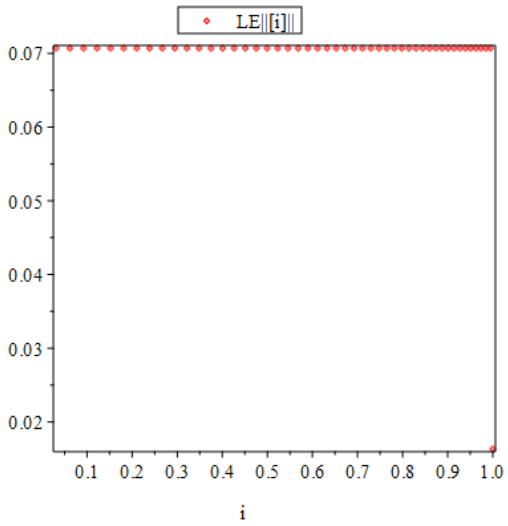
i	t_i	h_i	$\|LE_i\|$	x_i	y_i
1	0.03100828005	0.03100828005	0.07071067815	1.062016560	1.093024840
2	0.06170668976	0.03069840971	0.07071067808	1.127751787	1.193760114

3	0.09208042294	0.03037373318	0.07071067812	1.197426625	1.302778529
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
47	0.9845580769	0.01086642917	0.07071067812	15.79398666	30.04294739
48	0.9950931968	0.01053511985	0.07071067820	16.72227982	31.78369222
49	1.000000000	0.0049068032	0.01632219099	17.19301943	32.65945186

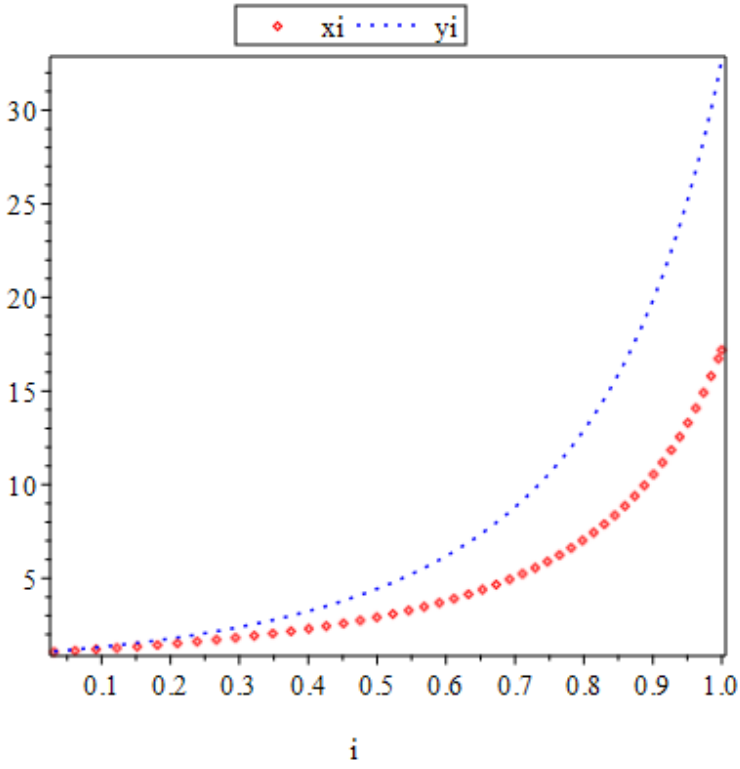
Tablo 2.2 Örnek 2.2.nin Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği, lokal hata ve çözümleri



Şekil 2.2.a. Örnek 2.2. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri



Şekil 2.2.b. Örnek 2.2. için Algoritma 2 ile elde lokal hata grafiği



Şekil 2.2.c. Örnek 2.2.nin Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri

3. BAZI MATEMATİKSEL MODELLER

Bu bölümde farklı disiplinlere ait matematiksel modeller kısaca tanıtılacaktır. İkinci bölümde tanıtılan değişken adım genişliği stratejisi, literatürde farklı metotlarla çözülmüş olan bu modellere uygulanacak ve nümerik çözümleri grafiklerle karşılaştırılacaktır. Modellerin her bir adımda oluşan adım genişliği ve lokal hataları tablo ve grafiklerle gösterilecektir. Bu işlemler yapılırken Maple programından faydalanılacaktır.

3.1. Bulaşıcı Hastalıkların Yayılımının (SIR) Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi

Dış etkenlere kapalı bir ortamda enfeksiyonun kuluçka süresinin anlık, bireylerin yaş, coğrafi ve sosyal konumunun homojen, nüfusun sabit olduğu ve hastalığın sadece insandan insana geçtiği popülasyonda bulaşıcı bir hastalığın evreleri basit diferensiyel denklemlerle modellenmiştir (McKendrick ve W.O.Kermack, 1927; Osthus ve ark., 2017).

SIR modeli için



Şekil 3.1.1. *SIR Model*

t zaman diliminde;

- $S(t)$: Popülasyondaki hastalığa duyarlı birey sayısı
- $I(t)$: Popülasyondaki hastalıkdan etkilenen birey sayısı
- $R(t)$: Popülasyondaki hastalığa bağışıklık kazanan birey sayısı
- $N(t)$: Toplam popülasyon sayısı
- β: Enfeksiyonu bulaştırma oranı
- γ:Enfektiflerin bağışıklığı kazanma oranı
- $N=S+I+R$

olarak tanımlanır.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I + \beta SI \qquad (3.1)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

denklemleri ile gösterilir (McKendrick ve W.O.Kermack, 1927; Osthus ve ark., 2017).

Modeldeki grup isimlerinin ilk harfleri ile modele SIR model denir. Modelde kullandığımız popülasyon kavramı belli bölgede yaşayan insan nüfusunu kastetmektedir. Popülasyonun tamamının belirli bir bulaşıcı hastalığa duyarlı olmadığı, yani popülasyon ve hastalığa duyarlı birey sayısı farklı iki kavram ile ele alınmıştır. Hastalığın yayılabilmesi için hasta olanlar ile sağlıklı olanların temas halinde olması ve temas durumunda bulaşmanın meydana gelebileceği varsayılır (Akpınar, 2012).

Örnek 3.1. SIR modeli çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için Osthus ve ark., 2017 deki parametrelerini kullanarak (2.7) formunda yazalım:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2xy \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

Burada, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(t, X) = \begin{pmatrix} -2xy \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix}$

$\beta = 2$, $\gamma = 1.4$ dir. Nümerik integrasyonun her bir adımdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha = max_{1 \le i,j \le N} |a_{ij}|$, $|x_j - x_{j0}| \le 5$,

- $\beta_{i-1} = max(|x_{i-1}|, |y_{i-1}|, |z_{i-1}|)$,
- $\gamma_{i-1} = max(|2(x_{i-1})(y_{i-1})|, |2(x_{i-1})(y_{i-1})|)$,

- $\varsigma_{i-1} = max \begin{pmatrix} |-2(x_{i-1})(y_{i-1})(-2((y_{i-1}) - (x_{i-1})) - 1.4)|, \\ |2(x_{i-1})(y_{i-1})(2((y_{i-1}) - (x_{i-1})) + 1.4| \end{pmatrix}$

Buna göre i. adımdaki adım genişliği,

$$h_i \leq N^{-1/4}\left(\frac{2\delta_L}{N^2\beta_{i-1} + N\alpha\gamma_{i-1} + \zeta_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

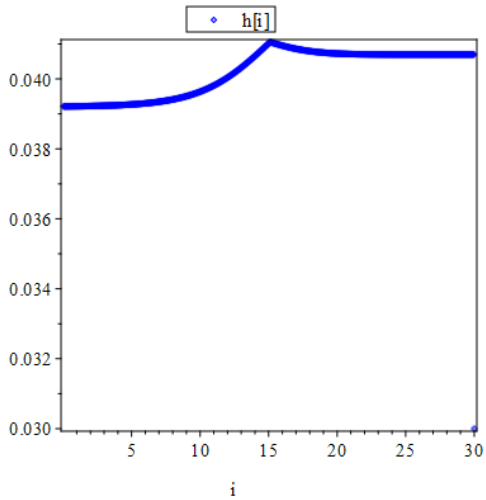
SIR modelinde $t \in [0, 30]$ aralığında, $\delta_L = 0.5$ ve $h^* = 10^{-12}$ için değişken adım genişliği stratejisi Osthus ve arkadaşlarının 2017 deki

$$X(0) = 0.9, \qquad Y(0) = 0.0002, \qquad Z(0) = 0.0998$$

başlangıç değerleri ile uygulanıp her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümlerine Tablo 3.1.1. ve Şekil 3.1. de yer verilmiştir.

i	t_i	h_i	x_i	y_i	z_i
1	0.03921353239	0.3921353239e-1	0.8999858831	0.2031370826e-3	0.09981097979
2	0.07842720912	0.3921367673e-1	0.8999715450	0.2063231585e-3	0.09982213184
3	0.1176410325	0.3921382337e-1	0.8999569822	0.2095589860e-3	0.09983345885
4	0.1568550048	0.3921397227e-1	0.8999421912	0.2128453351e-3	0.09984496355
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
745	29.92930343	0.4069721453e-1	0.5328649416	0.6912496766e-3	0.4664438081
746	29.97000065	0.4069721941e-1	0.5328349606	0.6818460098e-3	0.4664831928
747	30.00000000	0.2999935e-1	0.5328131624	0.6750073091e-3	0.4665118297

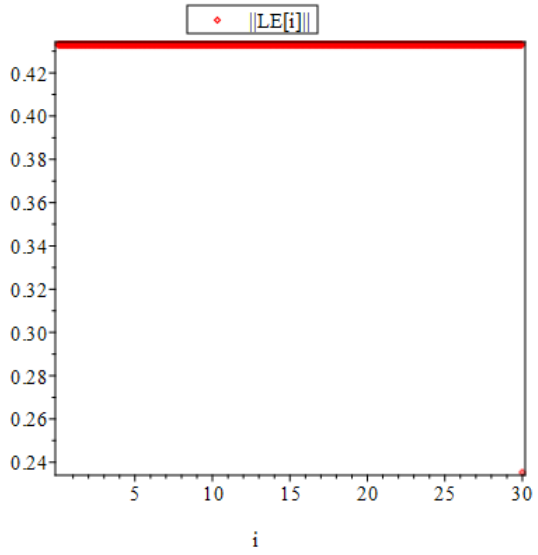
Tablo 3.1.1. SIR modeli çözümünü Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri



Şekil 3.1.a. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri

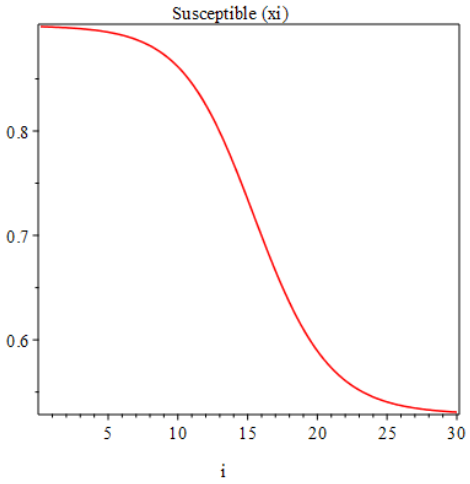
i	$\|\|LE_i\|\|$
1	0.4330127015
2	0.4330127020
⋮	⋮
745	0.4330127020
746	0.4330127022
747	0.2352852740

Tablo 3.1.2. Örnek 3.1. için lokal hata değerleri

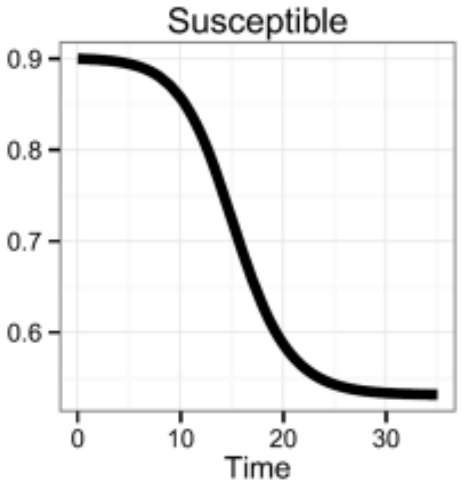


Şekil 3.1.b. Örnek 3.1. için lokal hata grafiği

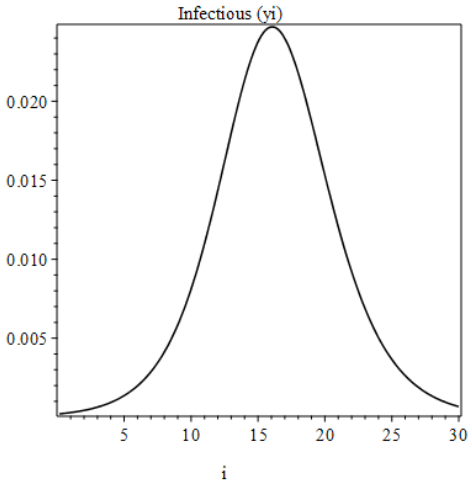
Tablo 3.1.2. ve Şekil 3.1.b. den anlaşılacağı üzere her bir adım için lokal hata değerleri beklenilen hata seviyesinden küçük çıkmıştır.



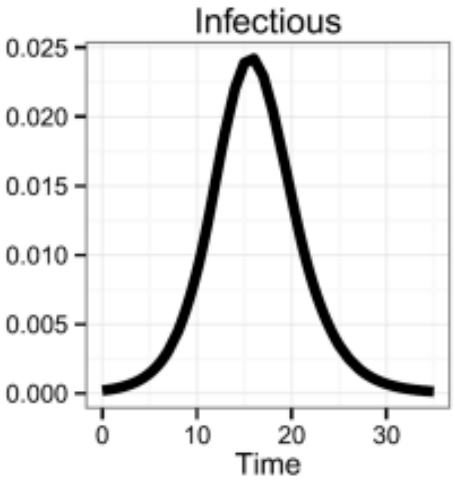
Şekil 3.1.c1. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği



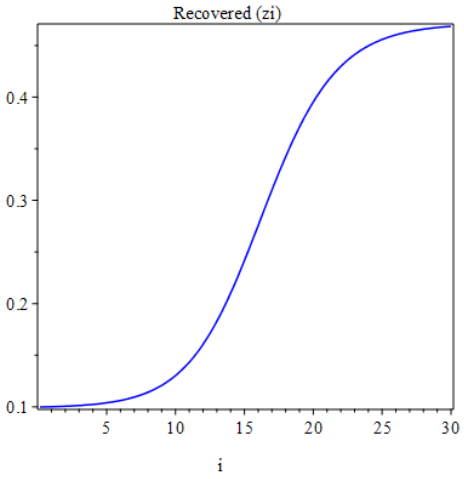
Şekil 3.1.c2. Osthus ve ark., 2017 deki *S(t)* grafiği



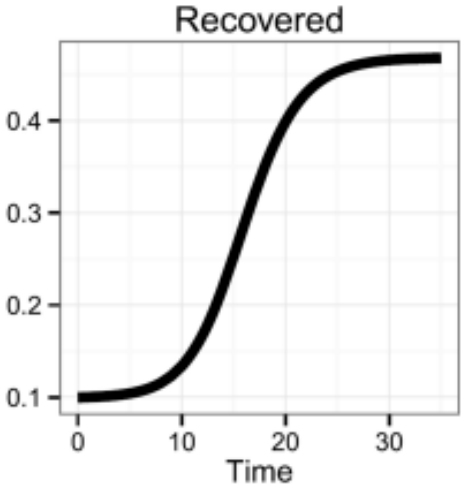
Şekil 3.1.d1. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği



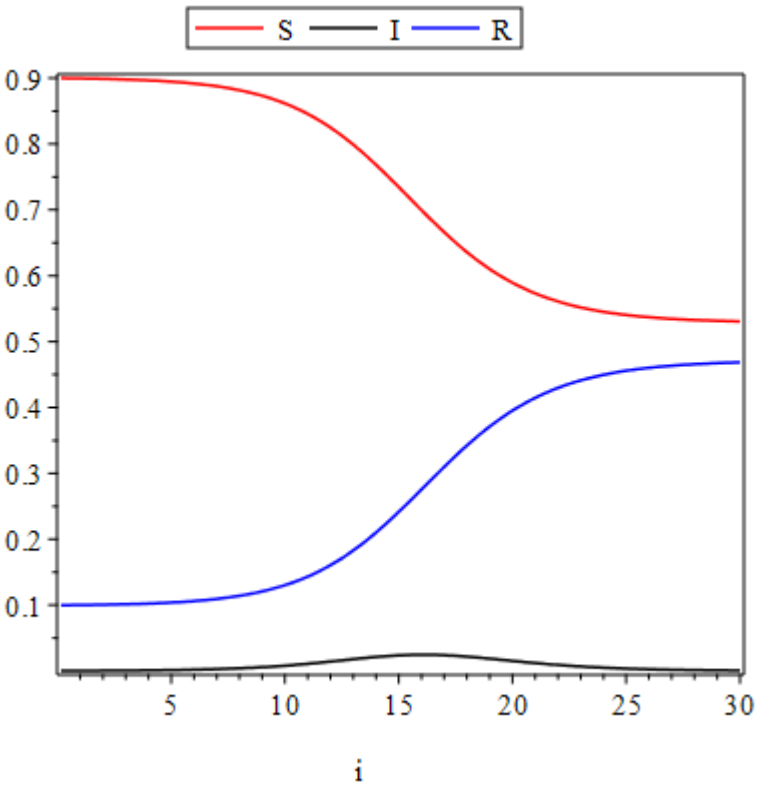
Şekil 3.1.d2. Osthus ve ark., 2017 deki *I(t)* grafiği



Şekil 3.1.e1. Örnek 3.1. için Algoritma 2 ile elde edilen z_i değer grafiği



Şekil 3.1.e2. Osthus ve ark., 2017 deki *R(t)* grafiği



Şekil 3.1.f. SIR modeli için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri

Not: (Osthus ve ark., 2017) de SIR modelinin nümerik çözümlerinin olduğu grafikler ayrı ayrı verilmiştir. Bu çalışmada Algoritma 2 ile çözdüğümüz bu modelin nümerik çözümlerinin karşılaştırma kısmını her bir çözüm için ayrı ayrı grafikler üzerinde gösterdik. Son olarak hepsini tek bir grafik üzerinde gösterdik.

Osthus ve arkadaşları tarafından 2017 yılında SIR modelinin nümerik çözümünü DBSSM (Dirichlet-Beta state-space model) ile ulaşmayı amaçlamıştır. Biz aynı parametreleri kullanarak değişken adım genişliği stratejilerinden Algoritma 2 ile nümerik çözümünü elde ettik. Bulunan iki nümerik çözümü karşılaştırdığımızda adım genişliği stratejisinin SIR modelinin çözümü için uygun olduğu görülmüştür.

3.2. İnfluenza Virüs Yayılımın Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi

Son zamanlarda yeni bir İnfluenza salgını ortaya çıkmıştır. H1N1 gribi ilk kez 2009 yılı Nisan ayında Meksika da görülmüş ve kısa süre içerisinde çok geniş alanlara yayılmıştır. Dünya Sağlık Örgütü Temmuz 2009 da 21. yüzyılın ilk salgın hastalığı olarak ilan etmiştir (Chan, 2009). Bu salgınla daha etkili mücadele edebilmek için matematiksel modellemeden faydalanılmıştır. Matematiksel modeller, üzerinde deney yapılamayacak olan bu salgın

hastalıkların analizi için mükemmel bir yol olmuştur. Matematiksel modeller başarılı analizlere ve bu sayede salgınla oluşabilecek öngörülere yardımcı olmuştur (Khanh, 2015).

İnfluenza virüsü modeli için *t* zaman diliminde;

- *S(t)* :Popülasyondaki hassas birey sayısı(susceptible)
- *E(t)* :Popülasyondaki hastalığa maruz kalmış birey sayısı(exposed)
- *I(t)* : Popülasyondaki enfektif birey sayısı(ınfected)
- *R(t)* : Popülasyondaki bağışıklığa sahip birey sayısı(recovered)
- *N(t)* : Toplam popülasyon sayısı
- β : Enfeksiyon bulaşan kişilerin iyileşme oranı
- α : Bağışıklığa sahip bireylerin bağışıklığı kaybetme oranı
- μ : Doğal ölüm oranı
- b : Enfektif bireyin tedavi olmadan hassas birey olma oranı
- c : Virüse maruz kalan insanın tedavi olmadan hassas birey olma olasılığı
- γ : Virüsle etkileşim oranı
- $N=S+E+I+R$

olarak tanımlanır.

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \gamma S(t)\big(E(t) + I(t)\big) + cE(t) + bI(t) + \alpha R(t) - \mu S(t)$$
$$\frac{dE}{dt} = \gamma S(t)\big(E(t) + I(t)\big) - (c + \varepsilon + \mu)E(t)$$
$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu)I(t)$$
$$\frac{dR}{dt} = \beta I(t) - (a + \mu)R(t) \qquad (3.2)$$

denklemleri ile gösterilir (Khanh, 2015).

Örnek 3.2. İnfluenza modeli çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için (Khanh, 2015) deki parametreleri kullanarak (2.7) formunda yazalım.

$$X' = \begin{pmatrix} -0.015 & 0.35 & 0.025 & 0.35 \\ 0 & -0.515 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & -0.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.365 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -0.015 - 0.1(xy + xz) \\ 0.1x(y + z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Burada $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -0.015 & 0.35 & 0.025 & 0.35 \\ 0 & -0.515 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & -0.54 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.365 \end{pmatrix}$

$\varphi(t, X) = \begin{pmatrix} -0.015 - 0.1(xy + xz) \\ 0.1x(y + z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = 0.35,\ \beta = 0.5,\ b = 0.025,\ c = 0.35,\ \varepsilon = 0.15,\ \gamma = 0.1,\ \mu = 0.015$ dir (Khanh, 2015). Nümerik integrasyonun her bir adımdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha = max_{1 \le i,j \le N} |a_{ij}|, |x_j - x_{j0}| \le 5,$
- $\beta_{i-1} = max(|x_{i-1}|, |y_{i-1}|, |z_{i-1}|, |w_{i-1}|),$
- $\gamma_{i-1} = max(|0.015 + 0.1(x_{i-1})(y_{i-1}) + (x_{i-1})(z_{i-1})|, |0.1(x_{i-1})((y_{i-1}) + (z_{i-1})|),$
- $\varsigma_{i-1} = max(-0.1(((y_{i-1}) + (z_{i-1})) * (-0.015(x_{i-1}) + 0.35(y_{i-1}) + 0.025(z_{i-1}) + 0.35 * (w_{i-1}) + 0.015 - 0.1(x_{i-1})((y_{i-1}) + (z_{i-1}))) + (x_{i-1})(-0.515(y_{i-1}) + 0.1(x_{i-1})((y_{i-1}) + (z_{i-1}) + 0.15(y_{i-1}) - 0.54(z_{i-1})))), 0.1(((y_{i-1}) + (z_{i-1})) * (-0.015(x_{i-1}) + 0.35(y_{i-1}) + 0.025(z_{i-1}) + 0.35(w_{i-1}) + 0.015 - 0.1(x_{i-1})((y_{i-1}) + (z_{i-1}))) + (x_{i-1})(-0.515(y_{i-1}) + 0.1(x_{i-1})((y_{i-1}) + (z_{i-1})) + 0.15(y_{i-1}) - 0.54(z_{i-1}))))$

Buna göre *i*. adımdaki adım genişliği,

$$h_i \le N^{-1/4} \left(\frac{2\delta_L}{N^2 \beta_{i-1} + N\alpha\gamma_{i-1} + \varsigma_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

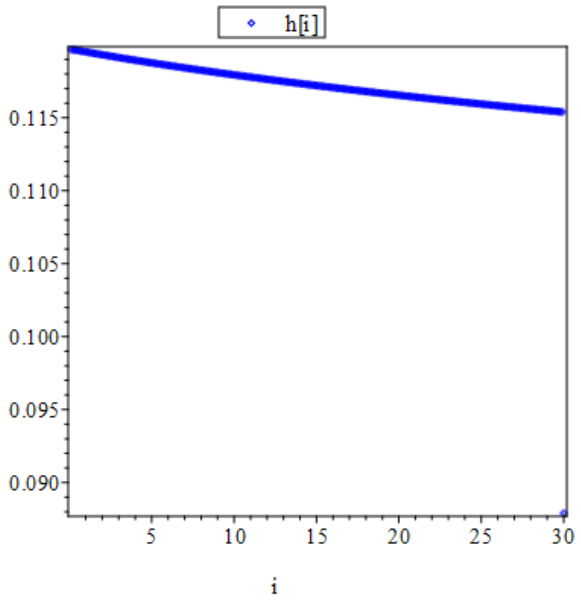
İnfluenza modelinde $t \in [0, 30]$ aralığında, $\delta_L = 0.5$ ve $h^* = 10^{-12}$ için değişken adım genişliği stratejisi Khanh, 2015 deki

$$X(0) = 0.002, \qquad Y(0) = 0.006, \quad Z(0) = 0.003 \quad W(0) = 0.001$$

başlangıç değerleri ile uygulanıp her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümlerine Tablo 3.2.1. ve Şekil 3.2. de yer verilmiştir.

i	t_i	h_i	x_i	y_i	z_i	w_i
1	0.1196663447	0.1196663447	0.004093347301	0.5630446394e-2	0.2913840232e-2	0.1135821301e-2
2	0.2393273768	0.1196610321	0.006172594389	0.5283886216e-2	0.2826618496e-2	0.1260549420e-2
3	0.3589758195	0.1196484427	0.008238159964	0.4958897700e-2	0.2738821539e-2	0.1374599358e-2
⋮						
254	29.79671097	0.1154116693	0.3683477685	0.4139727926e-8	0.6118166747e-8	0.4230594879e-6
255	29.91211046	0.1153994898	0.3694411709	0.3937304224e-8	0.5808567127e-8	0.4055928947e-6
256	30.00000000	0.08788954	0.3702724764	0.3790734436e-8	0.5584797667e-8	0.3928368597e-6

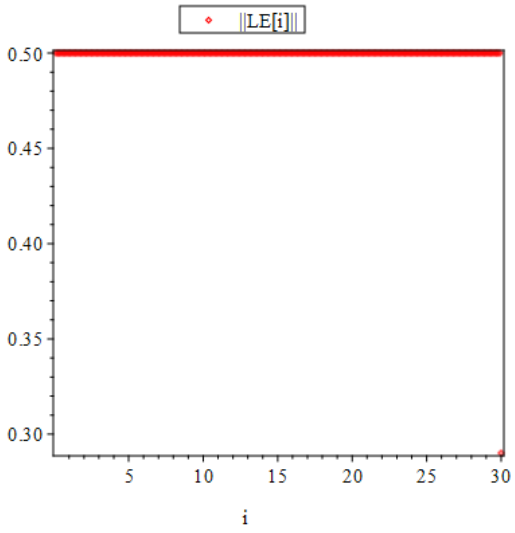
Tablo 3.2.1. İnfluenza modelinin Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri



Şekil 3.2.a. Örnek 3.2. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri

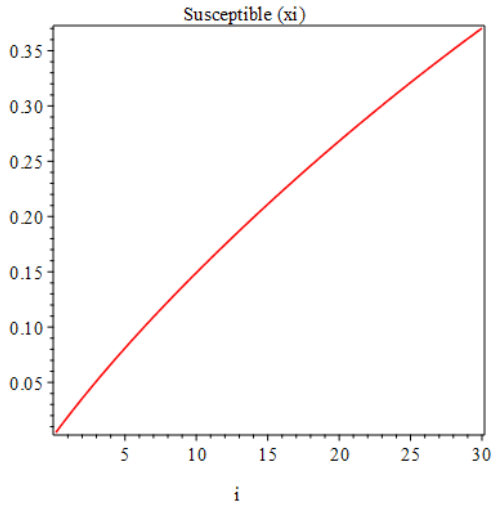
$\dot{I}$	$\|LE_i\|$
1	0.4999999992
2	0.5000000002
⋮	⋮
254	0.4999999998
255	0.5000000000
256	0.2900868805

Tablo 3.2.2. Örnek 3.2. için lokal hata değerleri

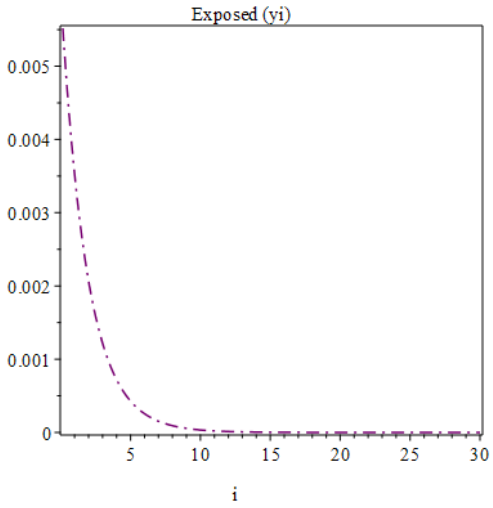


Şekil 3.2.b. Örnek 3.2. için lokal hata grafiği

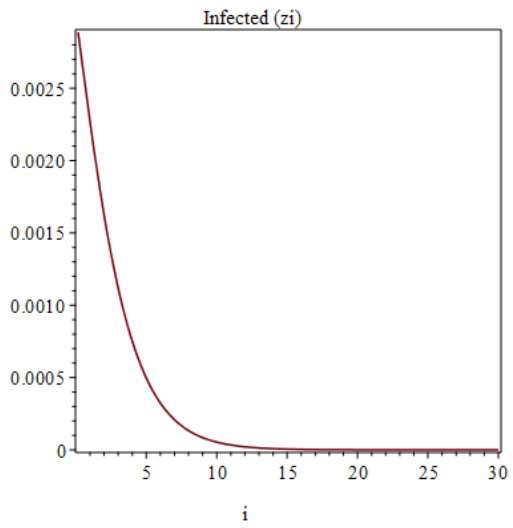
Tablo 3.2.2. ve Şekil 3.2.b. den anlaşılacağı üzere her bir adım için lokal hata değerleri kayan nokta aritmetiğinden kaynaklanan hatalar nedeniyle beklenilen hata seviyesini bazı adımlarda geçebilmektedir.



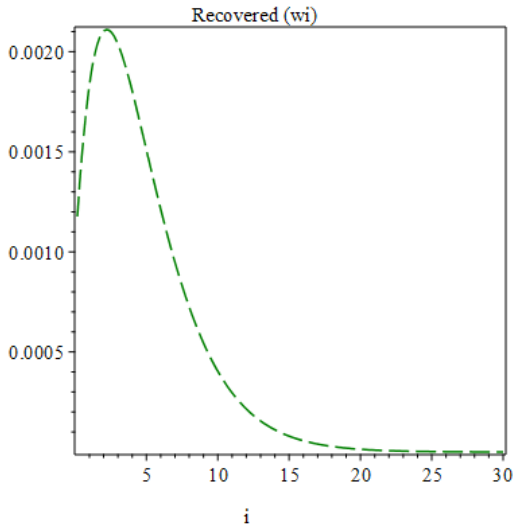
Şekil 3.2.c. Örnek 3.2. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği



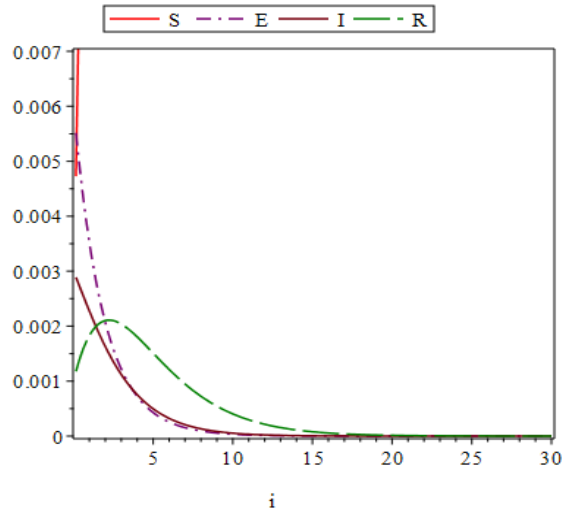
Şekil 3.2.d. Örnek 3.2. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği



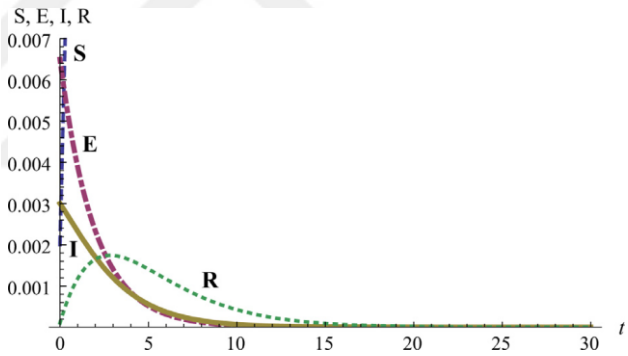
Şekil 3.2.e. Örnek 3.2. için Algoritma 2 ile elde edilen z_i değer grafiği



Şekil 3.2.f. Örnek 3.2. için Algoritma 2 ile elde edilen w_i değer grafiği



Şekil 3.2.g1. İnfluenza modeli için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri



Şekil 3.2.g2. Khanh, 2015 deki çözüm grafiği

Not: Khanh, 2015 de SEIR modelinin nümerik çözümlerinin olduğu grafik bir arada verilmiştir. Bu çalışmada Algoritma 2 ile çözdüğümüz bu modelin nümerik çözümlerini ayrı ayrı verip karşılaştırma kısmını bir arada verdiğimiz şekil üzerinden yaptık.

Khanh tarafından 2015 yılında SEIR modelinin nümerik çözümünü Lyapunov fonksiyon metotu ile ulaşmayı amaçlamıştır. Biz aynı parametreleri kullanarak değişken adım genişliği stratejilerinden biri olan Algoritma 2 ile nümerik çözümünü elde ettik. Bulunan iki

nümerik çözümü karşılaştırdığımızda adım genişliği stratejisinin SEIR modelinin çözümü için uygun olduğu görülmüştür.

3.3. Av-Avcı Probleminin Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi

Amerikalı matematikçi Alfred J. Lotka ile İtalyan matematikçi Vito Voltera'nın literatüre kattıkları av-avcı modeli biyo-matematikte çok önemli bir yere sahiptir. Aynı biyolojik çevrede olup farklı türler arasındaki nüfus ilişkilerini açıklamaya çalışmışlardır. Aynı biyolojik çevreye sahip avcı olarak adlandırdığımız canlı türü ile avcının besin kaynağını oluşturan diğer canlı türü arasındaki popülasyon etkileşimleri matematiksel modelleme ile analiz edilmiştir. Popülasyonlar arasındaki etkileşimin zamana göre değişimini incelemek denklem sistemi ile kolaylaşmıştır. Örneğin; avcının çok olması avın azalmasına sebep olur. Avın azalması besin kaynağı av olan avcının azalmasına sebep olur. Avcı azaldığı zaman av üremek için daha uygun ortam bulacağından av popülasyonu artar. Böylece artan av sayısı, avcı sayısı için uygun beslenme ortamı sağlayacağından avcı popülasyonu artar. Türler arasındaki düzen bu şekilde devam etmektedir (Taşdemir, 2016).

Pulley 2011 yılında yaptığı çalışmada Lotka-Voltera modeli ile ilgili çıkarımlarda bulunmuştur. Buna göre, modelde avcı bulunmasa bile av popülasyonu belirli bir orana kadar artacağını, modelde avın bulunmamasında ise temel besin kaynağı olmayan avcının soyunun tükenebileceği, her iki popülasyonun karşılaşması durumunda ise av popülasyonunda azalma avcı popülasyonunda ise artış olacağını dile getirmiştir.

Av-avcı modeli için t zaman diliminde;

- α; av büyüme oranı,
- β; av- avcı karşılaşması sonucu ölen av oranı
- z; av- avcı karşılaşmasının avcı popülasyonuna pozitif etkisi
- c; avcının doğal yollardan ölümü

olarak tanımlanır.

Av-avcı arasındaki etkileşimi anlatan klasik bir Lotka-Volterra modeli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + zxy \qquad (3.3)$$

denklemleri ile gösterilir (Lotka, 1925; Volterra, 1926; Pulley, 2011).

Örnek 3.3. Av-avcı modeli çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için (Srini, 2014) deki parametreleri kullanarak (2.7) formunda yazalım:

$$X'=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-2xy\\ yx\end{pmatrix}$$

Burada, $X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $\varphi(t, X) = \begin{pmatrix}-2xy\\ yx\end{pmatrix}$

$\alpha = 4, \beta = 2, c = 3, z = 1$ dir (Srini, 2014). Nümerik integrasyonun her bir adımdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha = max_{1\le i,j\le N}|a_{ij}|, \ |x_j - x_{j0}| \le 5$
- $\beta_{i-1} = max(|x_{i-1}|,|y_{i-1}|)$,
- $\gamma_{i-1} = max(|2(x_{i-1})(y_{i-1})|, |(y_{i-1})(x_{i-1})|)$,
- $\varsigma_{i-1} = max(|-2(x_{i-1})(y_{i-1})(1 - 2(y_{i-1}) + (x_{i-1}))|, |(x_{i-1})(y_{i-1})(1 - 2(y_{i-1}) + (x_{i-1}))|)$.

Buna göre *i*. adımdaki adım genişliği,

$$h_i \le N^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{2\delta_L}{N^2\beta_{i-1} + N\alpha\gamma_{i-1} + \varsigma_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

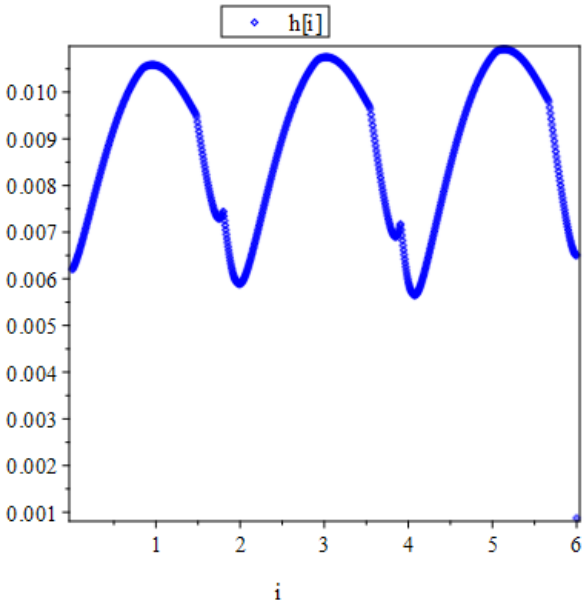
Av-avcı modelinin $t \in [0, 6]$ aralığında, $\delta_L = 10^{-1}$ ve $h^* = 10^{-12}$ için değişken adım genişliği stratejisi Srini, 2014 deki

$$x(0) = 3, \qquad y(0) = 5$$

başlangıç değerleri ile uygulanıp her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümlerine Tablo 3.3.1. ve Şekil 3.3. de yer verilmiştir.

i	t_i	h_i	x_i	y_i
1	0.006199170621	0.006199170621	2.780616452	5
2	0.01241933400	0.006220163382	2.780616452	4.996529613
3	0.01866239999	0.006243065993	2.676579509	4.989686236
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
613	5.992624579	0.006507759132	10.64429409	1.888357034
614	5.999128233	0.006503653506	10.65975146	1.982238290
615	6.000000000	0.000871767	10.66008157	1.995474723

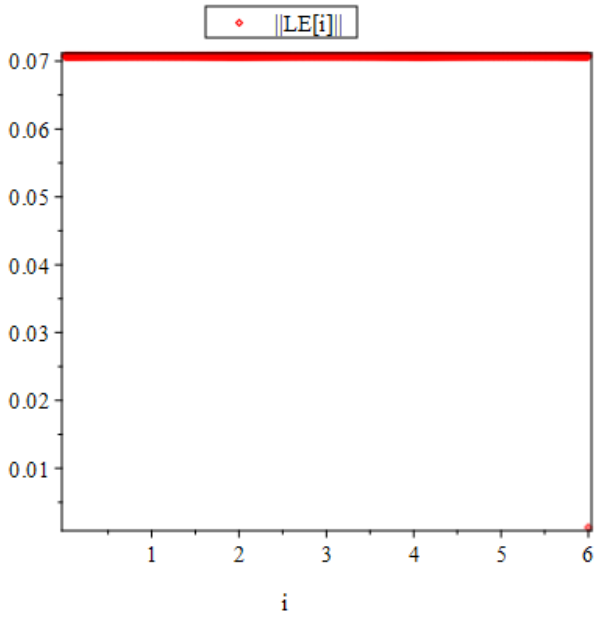
Tablo 3.3.1. Av-avcı modeli için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri



Şekil 3.3.a. Örnek 3.3. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri

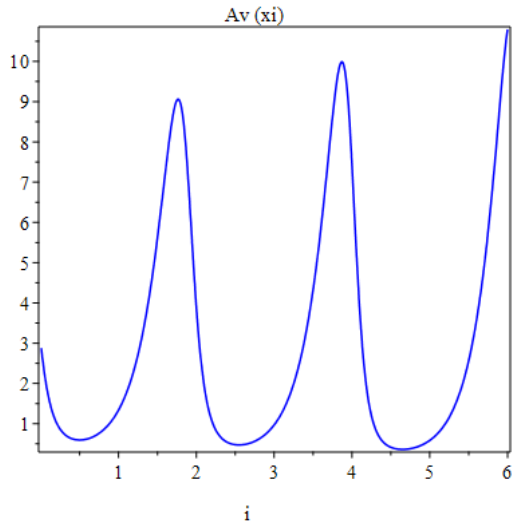
i	$\|\|LE_i\|\|$
1	0.07071067815
2	0.07071067815
⋮	⋮
699	0.07071067818
700	0.07071067818
701	0.001269569082

Tablo 3.3.2. Örnek 3.3. için lokal hata değerleri

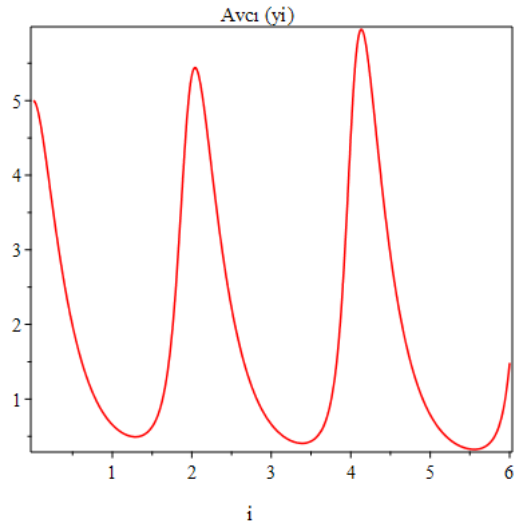


Şekil 3.3.b. Örnek 3.3. için lokal hata grafiği

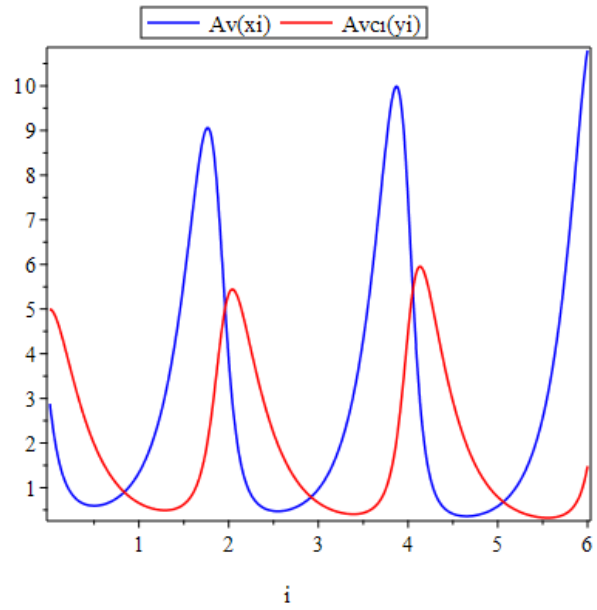
Tablo 3.3.2. ve Şekil 3.3.b. den de anlaşılacağı üzere her bir adım için lokal hata değerleri beklenilen hata seviyesinden küçük çıkmıştır.



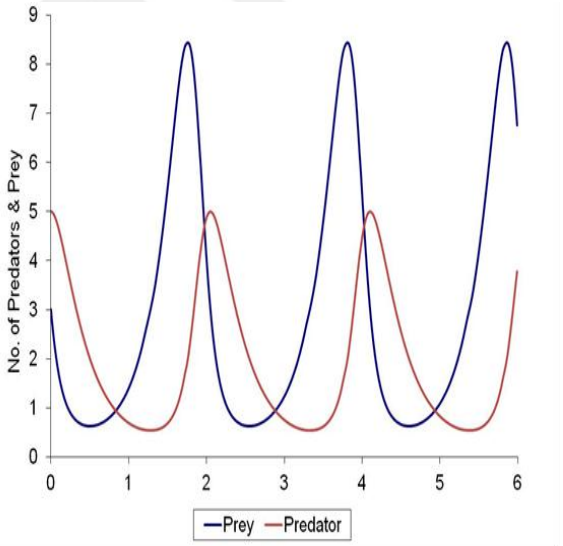
Şekil 3.3.c. Örnek 3.3. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği



Şekil 3.3.d. Örnek 3.3. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği



Şekil 3.3.e1. Av-avcı modelinin Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri



Şekil 3.3.e2. Srini, 2014 deki çözüm grafiği

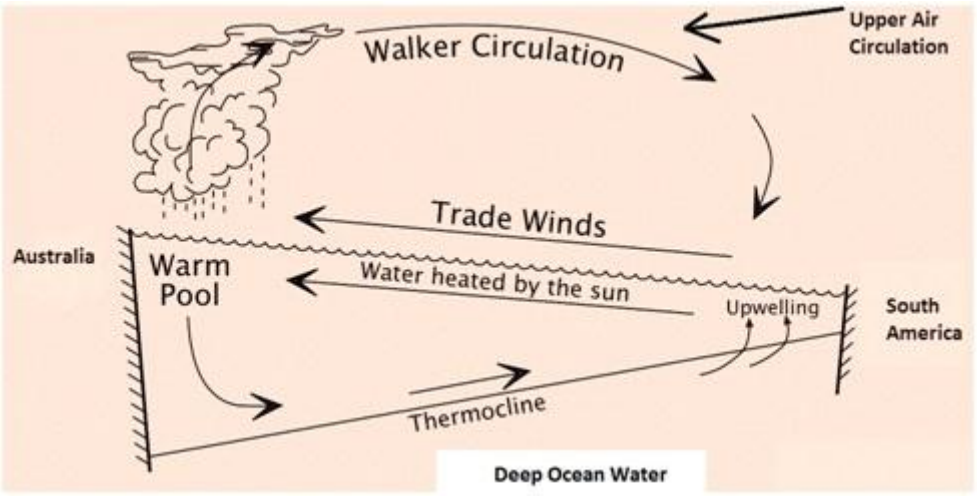
Not: Srini, 2014 de av-avcı modelinin nümerik çözümlerinin olduğu grafik bir arada verilmiştir. Bu çalışmada Algoritma 2 ile çözdüğümüz bu modelin nümerik çözümlerini ayrı ayrı verip karşılaştırma kısmını bir arada verdiğimiz şekil üzerinden yaptık.

Srini tarafından 2014 yılında yapılan çalışmada av-avcı modelinin nümerik çözümünü Runge-Kutta metotu ile ulaşmayı amaçlamıştır. Biz aynı parametreleri kullanarak değişken

adım genişliği stratejilerinden biri olan Algoritma 2 ile nümerik çözümünü elde ettik. Bulunan iki nümerik çözümü karşılaştırdığımızda adım genişliği stratejisi av-avcı modelinin çözümü için uygun olduğu görülmüştür.

3.4. El Nino Güney Salınımlarının (ENSO) Matematiksel Modelinin Nümerik Analizi

El Nino güney salınımları, Ekvator Pasifikte gerçekleşen küresel bir okyanus-atmosfer olayıdır. Pasifik okyanusunun doğusundaki termik yüksek basınçtan kaynaklanan hava alize rüzgarları ile pasifiğin batısına taşınır. Bu esnada nem kazanan hava batı pasifikte yükselir. Yükselen havanın bir kısmı tekrar doğuya doğru hareket eder ve doğu pasifikte alçalmaya başlar. Oluşan bu döngüye Walker sirkülasyonu denir.



Şekil 3.4.1. Walker Sirkülasyonu (Singh, 2015)

Bu döngünün oluşmasını sağlayan alizeler aynı zamanda doğu pasifikte bulunan sıcak okyanus sularını da batıya doğru sürükler. Sıcak okyanus sularının toplandığı pasifiğin batısında nemli havanın ısınarak yükselmesi sonucu dev yağmur bulutları meydana gelir. Alizeler termoklin seviyesinin doğu pasifikte yükselmesini batıda ise derinleşmesini sağlar. Batıya doğru sürüklenen sıcak suyun yerine de okyanusun derinliklerinden gelen soğuk sular yer alır. El Nino yıllarında alize rüzgarları zayıflar ve bunun sonucunda okyanusun yüzeyindeki sıcak suların batıya doğru taşınması durur. Taşınamadığı için biriken sıcak yüzey suları okyanusun ortasına ve doğusuna doğru yayılır. Tersine dönen bu döngü hem okyanus hem de atmosfer üzerinde önemli etkilere yol açmaktadır.

ENSO pasifik okyanusu sıcaklıkları, rüzgarları ve bulutları ile doğal bir döngüdür. Bu dünyanın dört bir yanındaki iklimi etkiler. ENSO modeli ile bu olayların öngörülebilirlikleri artırılıp gerekli önlemler alınması sağlanabilmektedir.

ENSO modeli için t zaman diliminde;

- C, D, E, F fiziksel sabitlerdir.
- $H;$ doğu ekvatoral pasifik deniz yüzey sıcaklığı
- $h;$ derinliklerdeki termoklin anomaliği

olarak tanımlanır.

ENSO matematiksel modeli;

$$\frac{dH}{dt} = CH + Dh - \varepsilon H^3$$

$$\frac{dh}{dt} = -EH - Fh \tag{3.4}$$

denklemleri ile gösterilir (Zeng, 2013).

Örnek 3.4. ENSO modelinin çözümünü değişken adım genişliği stratejisi ile incelemek için (Zeng, 2013) deki parametrelerle (2.7) formunda yazalım.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -0.00001x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Burada, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi(t, X) = \begin{pmatrix} -0.00001x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C = D = E = F = 1$, $\varepsilon = 0.00001$ dir. Nümerik integrasyonun her bir adımdaki adım genişliğini hesaplamak için parametreler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

- $\alpha = max_{1 \le i,j \le N} |a_{ij}|$, $|x_j - x_{j0}| \le 5$,
- $\beta_{i-1} = max(|x_{i-1}|, |y_{i-1}|)$,
- $\gamma_{i-1} = max(|0.00001(x_{i-1})^3|)$,
- $\varsigma_{i-1} = max\left((-0.00003)(x_{i-1})^2)((x_{i-1}) + (y_{i-1}) - (0.00001)(x_{i-1})^3\right)$

Buna göre i. adımdaki adım genişliği,

$$h_i \leq N^{-1/4}\left(\frac{2\delta_L}{N^2\beta_{i-1} + N\alpha\gamma_{i-1} + \varsigma_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir.

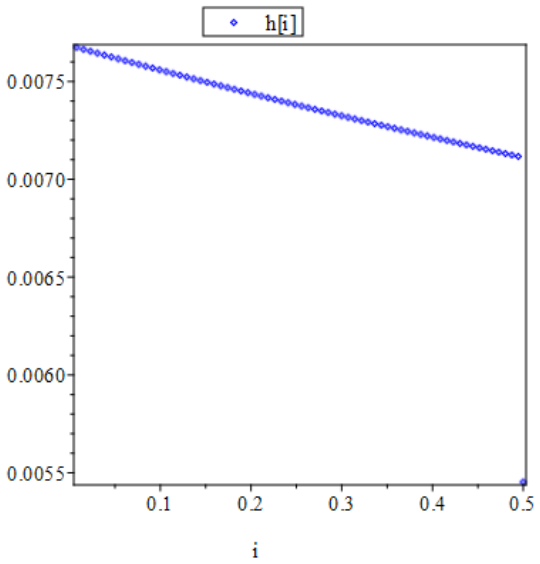
ENSO modelinin $t \in [0,\ 0.5]$ aralığında, $\delta_L = 10^{-3}$ ve $h^* = 10^{-12}$ için değişken adım genişliği stratejisi Zeng, 2013 deki

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 1$$

başlangıç değerleri ile uygulanıp her adımda elde edilen adım genişlikleri ve nümerik çözümlerine Tablo 3.4. ve Şekil 3.4. de verilmiştir.

i	t_i	h_i	x_i	y_i
1	0.007673537317	0.007673537317	1.015346998	0.9846529254
2	0.01533727079	0.007663733477	1.030674384	0.9693254590
3	0.02299125031	0.007653979516	1.045982258	0.9540175012
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
66	0.4874307549	0.007123867538	1.974841084	0.02514139963
67	0.4945473349	0.007116579995	1.989073571	0.01090836429
68	0.5000000000	0.0054526651	1.999978374	0.00000313259

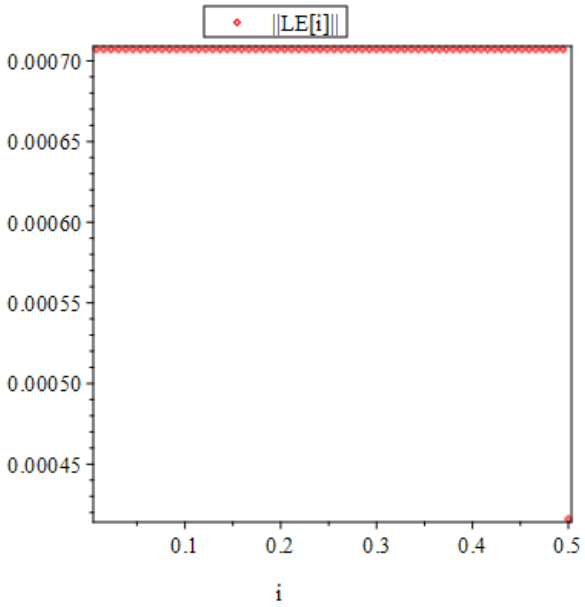
Tablo 3.4.1. ENSO modeli çözümünü Algoritma 2 ile elde edilen adım genişliği ve çözümleri



Şekil 3.4.a Örnek 3.4. için Algoritma 2 ile elde edilen adım genişlikleri

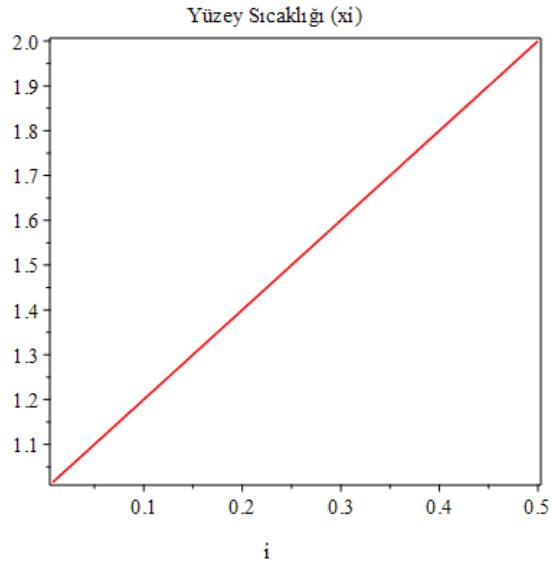
i	$\|\|LE_i\|\|$
1	0.0007071067815
2	0.0007071067815
⋮	⋮
66	0.0007071067815
67	0.0007071067820
68	0.0004159549160

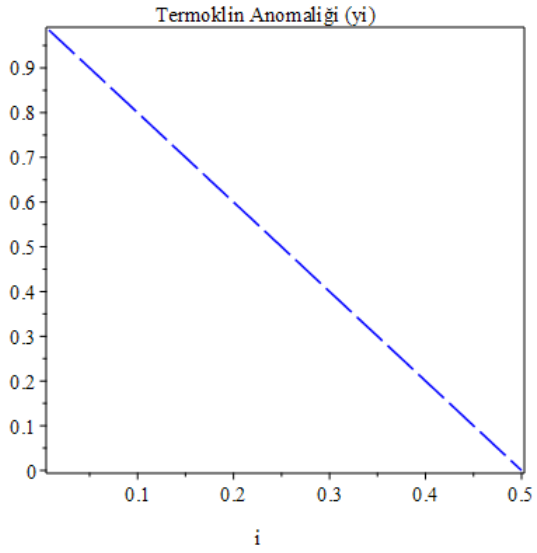
Tablo 3.4.2. Örnek 3.3. için lokal hata değerleri



Şekil 3.4.b. Örnek 3.3. için lokal hata grafiği

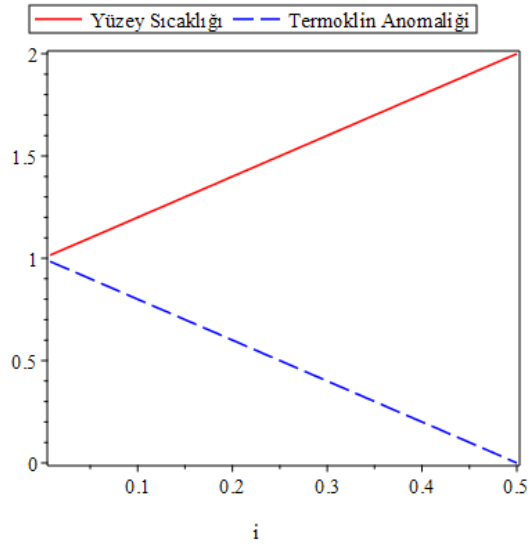
Tablo 3.4.2. ve Şekil 3.4.b'den de anlaşılacağı üzere her bir adım için lokal hata değerleri beklenilen hata seviyesinden küçük çıkmıştır.



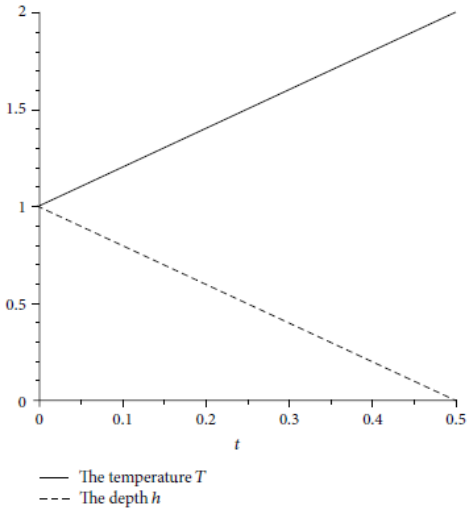


Şekil 3.4.b. Örnek 3.4. için Algoritma 2 ile elde edilen x_i değer grafiği

Şekil 3.4.c. Örnek 3.4. için Algoritma 2 ile elde edilen y_i değer grafiği



Şekil 3.4.d1. ENSO modeli için Algoritma 2 ile elde edilen çözümleri



Şekil 3.4.d2. Zeng, 2013 deki çözüm grafiği

Not: (Zeng, 2013) de ENSO modelinin nümerik çözümlerinin olduğu grafik bir arada verilmiştir. Bu çalışmada Algoritma 2 ile çözdüğümüz bu modelin nümerik çözümlerini ayrı ayrı verip karşılaştırma kısmını bir arada verdiğimiz şekil üzerinden yaptık.

Zeng 2013 yılında ENSO modelinin nümerik çözümünü LAPM (Laplace-Adomian-Pade modeli) ile ulaşmayı amaçlamıştır. Biz aynı parametreleri kullanarak değişken adım genişliği stratejilerinden biri olan Algoritma 2 ile nümerik çözümünü elde ettik. Bulunan iki nümerik çözümü karşılaştırdığımızda adım genişliği stratejisinin ENSO modelinin çözümü için uygun olduğu görülmüştür.

3.5. Modeller İçin Yazılan Maple Prosedürleri

```
deneme:=proc(A::Matrix,X0::Vector,b,dl,N,t0,T,hstar)
global a, c,c1,c2,c3,LE,gmm, zeta, ph, h, F1,F2,F3, F, k, hSum, Y1,Y2,Y3,Y, t;
local sub1, sub2, v1, v2,v3;
sub1:=proc()
c1[k-1]:=abs(b+Y1[k-1]); c2[k-1]:=abs(b+Y2[k-1]);c3[k-1]:=abs(b+Y3[k-1]);
c[k-1]:=max(c1[k-1],c2[k-1],c3[k-1]);

gmm[k-1]:=abs(2*c1[k-1]*c2[k-1]);

zeta[k-1]:=abs(2*c1[k-1]*c2[k-1]*(2*(c2[k-1]-c1[k-1])+1.4));

ph[k]:= evalf(N^(-1/4)*sqrt((2*dl)/((N^2)*(a^2)*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1])));

hSum:=evalf(t[k-1]+ph[k]);
if (hSum<=T) then if (ph[k]>hstar) then h[k]:=ph[k]; else h[k]:=0; end if:
elif (T-t[k-1]>hstar) then h[k]:=T-t[k-1]; else h[k]:=0; end if:
t[k]:=t[k-1]+h[k];

LE[k]:=(1/2)*((N^1/2)*h[k]^2)*((N^2)*a^2*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1]);

F1[k-1]:=-2*Y1[k-1]*Y2[k-1]; F2[k-1]:=-1.4*Y2[k-1]+2*Y1[k-1]*Y2[k-1];
F3[k-1]:=1.4*Y2[k-1]; F[k-1]:=Vector([F1[k-1],F2[k-1],F3[k-1]]);

Y1[k]:=Y1[k-1]+h[k]*F1[k-1];Y2[k]:=Y2[k-1]+h[k]*F2[k-1];Y3[k]:=Y3[k-1]+h[k]*F3[k-1];
Y[k]:=Vector([Y1[k],Y2[k],Y3[k-1]]);

v1:={seq([t[n],Y1[n]],n=1..k)};
v2:={seq([t[n],Y2[n]],n=1..k)};v3:={seq([t[n],Y3[n]],n=1..k)};  print(k,h[k],LE[k]);
if t[k]=T or h[k]=0 then sub2(); else k:=k+1; sub1(); end if:
end proc:

sub2:=proc()  multiple(plot,[v1]); end proc:
Y[0]:=X0; Y1[0]:=0.9; Y2[0]:=0.0002;Y3[0]:=0.0998 ; t[0]:=t0; a:=max(abs(A)); k:=1;
sub1();
end proc:
```

Prosedür 3.1. Örnek 3.1. için yazılan prosedür

```
deneme:=proc(A::Matrix,X0::Vector,b,dl,N,t0,T,hstar)
global a, c,c1,c2,c3,c4,LE,gmm, zeta, ph, h, F1,F2,F3,F4, F, k, hSum, Y1,Y2,Y3,Y4,Y, t;
local sub1, sub2, v1, v2,v3,v4,v5;
sub1:=proc()

c1[k-1]:=abs(b+Y1[k-1]); c2[k-1]:=abs(b+Y2[k-1]);c3[k-1]:=abs(b+Y3[k-1]);c4[k-
1]:=abs(b+Y4[k-1]);c[k-1]:=max(c1[k-1],c2[k-1],c3[k-1],c4[k-1]);

gmm[k-1]:=abs(-0.015-0.1*(c1[k-1]*c2[k-1]+c1[k-1]*c3[k-1]));

zeta[k-1]:=abs(-0.1*((c2[k-1]+c3[k-1])*(-0.015*c1[k-1]+0.35*c2[k-1]+0.025*c3[k-
1]+0.35*c4[k-1]+0.015-0.1*c1[k-1]*(c2[k-1]+c3[k-1]))+c1[k-1]*(-0.515*c2[k-1]+0.1*c1[k-
1]*(c2[k-1]+c3[k-1]+0.15*c2[k-1]-0.54*c3[k-1]))));

ph[k]:= evalf(N^(-1/4)*sqrt((2*dl)/((N^2)*(a^2)*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1])));

hSum:=evalf(t[k-1]+ph[k]);
if (hSum<=T) then if (ph[k]>hstar) then h[k]:=ph[k]; else h[k]:=0; end if:
elif (T-t[k-1]>hstar) then h[k]:=T-t[k-1]; else h[k]:=0; end if:
t[k]:=t[k-1]+h[k];

LE[k]:=(1/2)*((N^1/2)*h[k]^2)*((N^2)*a^2*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1]);

F1[k-1]:=-0.015*Y1[k-1]+0.35*Y2[k-1]+0.025*Y3[k-1]+0.35*Y4[k-1]+0.015-0.1*Y1[k-
1]*(Y2[k-1]+Y3[k-1]); F2[k-1]:=-0.515*Y2[k-1]+0.1*Y1[k-1]*(Y2[k-1]+Y3[k-1]);
F3[k-1]:=0.15*Y2[k-1]-0.54*Y3[k-1]; F4[k-1]:=0.5*Y3[k-1]-0.365*Y4[k-1];
F[k-1]:=Vector([F1[k-1],F2[k-1],F3[k-1],F4[k-1]]);

Y1[k]:=Y1[k-1]+h[k]*F1[k-1];Y2[k]:=Y2[k-1]+h[k]*F2[k-1];Y3[k]:=Y3[k-1]+h[k]*F3[k-
1];Y4[k]:=Y4[k-1]+h[k]*F4[k-1];  Y[k]:=Vector([Y1[k],Y2[k],Y3[k],Y4[k]]);

v1:={seq([t[n],h[n]],n=1..k)};
v2:={seq([t[n],Y2[n]],n=1..k)};v3:={seq([t[n],Y3[n]],n=1..k)};v4:={seq([t[n],Y4[n]],n=1..k)}
; v5:={seq([Y1[n],Y2[n],Y3[n],Y4[n]],n=1..k)}; print(k,t[k],h[k],Y1[k],Y2[k],Y3[k],Y4[k]);
if t[k]=T or h[k]=0 then sub2(); else (k:=k+1); sub1(); end if:
end proc:

sub2:=proc()  multiple(plot,[v2],[v3],[v4]); end proc:
Y[0]:=X0; Y1[0]:=0.002; Y2[0]:=0.006; Y3[0]:=0.003;Y4[0]:=0.001; t[0]:=t0;
a:=max(abs(A)); k:=1; sub1();
end proc:
```

Prosedür 3.2. Örnek 3.2. için yazılan prosedür

```
deneme:=proc(A::Matrix,X0::Vector,b,dl,N,t0,T,hstar)
global a, c,c1,c2,LE, t,gmm, zeta, ph, h, F1,F2, F, k, hSum, Y1,Y2,Y;
local sub1, sub2, v1, v2,v3;
sub1:=proc()

c1[k-1]:=abs(b+Y1[k-1]); c2[k-1]:=abs(b+Y2[k-1]);c[k-1]:=max(c1[k-1],c2[k-1]);

gmm[k-1]:=abs(2*c2[k-1]*c1[k-1]);

zeta[k-1]:=abs(2*c1[k-1]*c2[k-1]*(1-2*c2[k-1]+c1[k-1]));

ph[k]:= evalf(N^(-1/4)*sqrt((2*dl)/((N^2)*(a^2)*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1])));

hSum:=evalf(t[k-1]+ph[k]);
if (hSum<=T) then if (ph[k]>hstar) then h[k]:=ph[k]; else h[k]:=0; end if:
elif (T-t[k-1]>hstar) then h[k]:=T-t[k-1]; else h[k]:=0; end if:
t[k]:=t[k-1]+h[k];

LE[k]:=(1/2)*((N^1/2)*h[k]^2)*((N^2)*a^2*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1]);

F1[k-1]:=4*Y1[k-1]-2*Y1[k-1]*Y2[k-1]; F2[k-1]:=-3*Y2[k-1]+Y1[k-1]*Y2[k-1];
F[k-1]:=Vector([F1[k-1],F2[k-1]]);

Y1[k]:=Y1[k-1]+h[k]*F1[k-1];Y2[k]:=Y2[k-1]+h[k]*F2[k-1];
Y[k]:=Vector([Y1[k],Y2[k]]);

v1:={seq([t[n],Y1[n]],n=1..k)}; v2:={seq([t[n],Y2[n]],n=1..k)};
v3:={seq([t[n],LE[n]],n=1..k)}; print(k,h[k],LE[k]);
if t[k]=T or h[k]=0 then sub2(); else (k:=k+1); sub1(); end if:
end proc:

sub2:=proc()  multiple(plot,[v1]); end proc:
Y[0]:=X0; Y1[0]:=3; Y2[0]:=5 ; t[0]:=t0; a:=max(abs(A)); k:=1; sub1();
end proc:
```

Prosedür 3.3. Örnek 3.3. için yazılan prosedür

```
deneme:=proc(A::Matrix,X0::Vector,b,dl,N,t0,T,hstar)
global a, c,c1,c2,gmm, zeta, ph, h, F1,F2, F, k, hSum, Y1,Y2,Y,LE, t,Z,sbt;
local sub1, sub2, v1, v2,v3,sbt1,sbt2;
sub1:=proc()
c1[k-1]:=abs(b+Y1[k-1]); c2[k-1]:=abs(b+Y2[k-1]);c[k-1]:=max(c1[k-1],c2[k-1]);

gmm[k-1]:=abs((-0.00001)*c1[k-1]^3);

zeta[k-1]:=abs((-0.00003)*c1[k-1]^2)*(c1[k-1]+c2[k-1]-(0.00001)*c1[k-1]^3);

ph[k]:= evalf(N^(-1/4)*sqrt((2*dl)/((N^2)*(a^2)*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1])));

hSum:=evalf(t[k-1]+ph[k]);
if (hSum<=T) then if (ph[k]>hstar) then h[k]:=ph[k]; else h[k]:=0; end if:
elif (T-t[k-1]>hstar) then h[k]:=T-t[k-1]; else h[k]:=0; end if:
t[k]:=t[k-1]+h[k];

LE[k]:=(1/2)*((N^1/2)*h[k]^2)*((N^2)*a^2*c[k-1]+N*a*gmm[k-1]+zeta[k-1]);

F1[k-1]:=Y1[k-1]+Y2[k-1]-(0.00001)*(Y1[k-1]^3); F2[k-1]:=-Y1[k-1]-Y2[k-1];
F[k-1]:=Vector([F1[k-1],F2[k-1]]);

Y1[k]:=Y1[k-1]+h[k]*F1[k-1];Y2[k]:=Y2[k-1]+h[k]*F2[k-1];
Y[k]:=Vector([Y1[k],Y2[k]]);

v1:={seq([t[n],h[n]],n=1..k)}; v2:={seq([t[n],Y2[n]],n=1..k)};  print(k,h[k],LE[k],Y1[k]);
if t[k]=T or h[k]=0 then sub2(); else k:=k+1; sub1(); end if:
end proc:

sub2:=proc()  multiple(plot,[v1]); end proc:
Y[0]:=X0; Y1[0]:=1; Y2[0]:=1; t[0]:=t0; a:=max(abs(A)); k:=1; sub1();
end proc:
```

Prosedür 3.4. Örnek 3.4. için yazılan prosedür

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında Çelik Kızılkan, 2009 ve Çelik Kızılkan ve Aydın, 2012 de verilen değişken adım genişliği stratejisi ile bazı matematiksel modellerin nümerik çözümleri incelenmiştir. Ele alınan matematiksel modeller lineer olmayan modellerdir. Bu lineer olmayan modellerde analitik çözüme ulaşmak çok zordur. Nümerik çözümleri için ise farklı metotlar ortaya çıkmıştır. Bu tezde ele alınan örneklerin

- SIR model için DBSSM (Dirichlet-Beta state-space model) ile,
- İnfluenza model için Lyapunov fonksiyon metodu ile,
- Av-avcı model için RK (Runge-Kutta metodu) ile,
- ENSO model için LAPM (Laplace-Adomian-Pade modeli) ile,

çözümleri aynı parametreler alınıp değişken adım genişliği stratejisi uygulanarak karşılaştırılmıştır. Her bir adımda oluşan lokal hatalar tablo ve grafiklerle gösterilmiştir. SIR model, av-avcı model ve ENSO modelleri için lokal hatanın belirlediğimiz hata seviyesinden küçük olduğu görülmüştür. Influenza modelinde ise lokal hata, kayan nokta aritmetiğinden kaynaklanan hatalarla bazı adımlarda istenilen hata seviyesini çok azda olsa geçtiği gözlemlenmiştir. Ayrıca literatürdeki nümerik çözümler ile değişken adım genişliği stratejisi ile elde ettiğimiz çözümler grafikler eşliğinde karşılaştırılmıştır. Bu sonuçları ve grafikleri elde etmek için Maple programı kullanılmıştır. Maple'da yazılan prosedür ile nümerik çözümlere son derece hızlı ve güvenli bir şekilde ulaşılmıştır.

Sonuç olarak adım genişliği stratejisi ile elde edilen sonuçlar literatüre benzer şekilde olmuştur. Farklı disiplinlerdeki ve farklı metotlarla çözümlenmiş modellere ait sonuçlara daha pratik yolla daha az adım sayısıyla ve daha az hatayla ulaşılmıştır. Bu elde ettiğimiz veriler ışığında adım genişliği stratejisinin daha birçok disipline uyarlanabileceğini ve bu şekilde alınan verilerin daha etkili olacağı düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

Adomian G., 1994, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, vol. 60 of Fundamental Theories of Physics, *Kluwer Academic, Dodrecht, The Netherlands*, 1994.

Akpınar H., 2012, Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması, *Marmara Üniversitesi Açık Arşiv Sistemi*, Temmuz 2012,97-103.

Allman E. S. and Rhodes J. A., 2004, Mathematical Models in Biology: An Introduction, *Cambridge University Press*, Cambridge.

Bernoulli D. & Blower S., 2004, An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpocx and of the advantages of inoculation to prevent it. *Reviews in Medical Virology,*14, 5 (2004), 275-288.

Chan M., 2009, Statement to the press by WHO Director-General Dr Margaret Chan 11 June 2009 *Basın bildirisi* (Erişim: 03.07.2019).

Çelik Kızılkan G., 2004, Başlangıç Değer Problemlerinin Nümerik İntegrasyonunda Adım Genişliği Tespiti, *Yüksek Lisans Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Çelik Kızılkan G., Aydın K., 2005, Hata analizi tabanlı adım genişliği stratejisi , *S. Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 25, 79-86.

Çelik Kızılkan G., Aydın K., 2006, A new variable step size algorithm for Cauchy problem, *Applied Mathematics and Computation*, 183, 878-884.

Çelik Kızılkan G., 2009, Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Nümerik İntegrasyonunda Adım Genişliği Stratejileri, *Doktora Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Çelik Kızılkan G., Aydın K., 2011, Step size strategies based on error analysis for the linear systems, *SDÜ Fen Dergisi*, 6 (2), 149-159.

Çelik Kızılkan G., Aydın K., 2011, Step size strategies for the numerical integration of systems of differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, doi:10.1016/j.cam.2011.06.032.

Ç. Kızılkan , Duman ve Aydın, 2016, The analysis of the effect of the norm in the step size selection for the numerical integration, *Konuralp Journal of Mathematics,* v.4 no2, 116-123(2016).

Edelstein-Keshet L., 2005, Mathematical Models in Biology, *SIAM's Classics in Applied Mathematics series,* SIAM, Philadelphia.

Hamer WH. (1906), Epidemic disease in England, *Lancet* 1, (1906), 733-739.

Kermack W. & McKendrick A., 1927, Contributions to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of Royal Society of London*, Series A,115 (1927),700-721.

Kermack W. & McKendrick A., 1932, A Contribution to the mathematical theory of epidemics part II, The problem of endemicity. *Proc. R. Soc.* (1932), 55-83.

Kermack W. & McKendrick A., 1933, A Contribution to the mathematical theory of epidemics part III, Further Studies of The problem of endemicity. *Proc. R. Soc*. (1933), 94-122.

Khanh N. H., 2015, Stability analysis of an influenza virüs model with disease resistance, *Journal of Egyptian Mathematical Society* (2016) 24,193-199.

Lakshmi B. S., 2010, A Brownian population model, *J. Nonlinear Sci. Appl*., 3 (4), 261-264.

Liu X. and Lou Y., 2010, Global dynamics of a predator–prey model, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371 (1), 323-340.

Loan C. F. V., 2000, Introduction to scientific computing, *Prentice-Hall*, London.

Lotka A. J., (1925) Elements of physical biology, *Williams and Wilkins*, Baltimore, 1925.

Osthus, Dave et al., (2017) "Forecasting seasonal influenza with a state-space SIR model." *The annals of applied statistics* vol. 11,1 (2017): 202-224. doi:10.1214/16-AOAS1000.

Pulley L.C., (2011), Analyzing predator-prey models using systems of ordinary linear differential equations, *Honor Theses*, Paper 344.

Rao M. Rama Mohana, Ordinary differential equations theory and applications, *Indian Institue of Tecnology*, Kanpur, 1979.

Singh A., 2015, HTTPS://WWW.JAGRANJOSH.COM/ARTİCLES/UPSC-İAS-PRELİMS-GEOGRAPHY-EL-NİNO-AND-WALKER-CELL-1435822544-1 (Erişim: 23.06.2019 17:35).

Srini A., 2014, https://rotordynamics.wordpress.com/2014/06/01/the-lotka-volterra-predator-prey-problem/ [Erişim: 10.07.2019 19:30].

Taşdemir F., (2016), Av-avcı biyoekonomik modellerine genel bir bakış, *TÜBİTAK araştırma projesi, proje no 114K957,* Ankara.

Ucakan Y., 2014, SIRS matematik modelinin incelenmesi ve kararlılık analizi, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi*.

Volterra V., (1926) Fluctuations in the abundance of species considered mathematically, *Nature 118* (1926) 558-560h.

Zeng Y., "The Laplace-Adomian-Pade Technique for the ENSO Model", *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 954857 (2013), 4 pages.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gamze KIRATLI
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Ünye 21/02/1988
Telefon : 0506 367 7269
Faks :
e-mail : gamzegndzz@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	**Ünye Anadolu Lisesi , Ünye/Ordu**	**2006**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu/Konya**	**2010**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu/Konya**	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2011-	**MEB**	**Öğretmen**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

İstanbul İl Milli Eğitim Müdürlüğünde Ortak sınavlar için soru hazırlama komisyonlarında görev almaktayım.

Milli Eğitim Bakanlığı tarafından düzenlenen Akademik Becerilerin İzlenmesi ve Değerlendirilmesi (ABİDE) projesinin soru değerlendirme ekibinde görev almaktayım.