T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİNLERİN AŞİKAR İFADELERİ VE İŞARETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLİ MATRİSLER

FUNDA ÖZDEMİR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Konya-2008

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİNLERİN AŞİKAR İFADELERİ VE İŞARETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLİ MATRİSLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Konya-2008

Bu tez 10.03.2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir

Yrd.Doç.Dr. Hasan Köse	**Prof.Dr. Durmuş Bozkurt**	**Yrd. Doç.Dr. Necati Taşkara**
(Danışman)	**(Üye)**	**(Üye)**

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİN AŞİKAR İFADELERİ VE İŞARETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLİ MATRİSLER

Funda ÖZDEMİR
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE

2008, 42 Sayfa

Jüri
Prof.Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd.Doç.Dr. Necati TAŞKARA
Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışmada "İşaretli Genelleştirilmiş Tersli Matrisler" [1], "İşaretli Genelleştirilmiş Tersler Üzerinde Bir Problemin Çözümü"[2], "S^2NS Matrislerin Sıfırdan Farklı Girişlerinin Sayısı" [3], " Devirsiz İkili Graflı Matrislerin Moore- Penrose Tersleri" [4] adlı makaleler dört bölüm olarak derlenmiştir.

Birinci bölümde çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde işaretli genelleştirilmiş tersleri olan matrislerin özelliklerinin üç uygulaması incelenmiştir.

Üçüncü bölümde n.mertebeden S^2NS matrislerin sıfırdan farklı girişlerinin sayısı için kesin sınırlar ve eşitliğin karekterizasyonu incelenmiştir.

Son bölümde Asiklik ikili Graphlı matrislerin, Moore-Penrose tersleri verilmiştir. Bazı sonuçlar ile bir Asiklik ikili graph'taki gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

.

Anahtar Kelimeler: Moore–Penrose Tersi, İşaret Model, İşaretli Genelleştirilmiş Ters, Asiklik İkili Graph

ABSTRACT

Master Thesis

Explicit Expression of Generalized İnverses and Matrices with Signed Generalized İnverses

Funda ÖZDEMİR
Selçuk Universty
The Institute Of Natural And Applied Science
Deparment Of Mathematics

2008, 42 pages

Supervisor: Assist.Prof.Dr. Hasan Köse

Jury:
Prof.Dr.Durmuş BOZKURT
Assist.Doç.Dr. Necati TAŞKARA
Assist.Doç.Dr. Hasan KÖSE

This study consist of four sections and investigated three articles title "Matrices signed generalized inverses" [1],"The solution of a problem on having signed generalized inverses" [2],"Number of nonzero entries of S^2NS matrices" [3],"The Moore-Penrose inverse of matrices with an acyclic bibartite Graph" [4].

In the first section, we gave basic definitions and the theorems.

In the second section, three applications of properties of matrices with signed generalized inverses have been investigated.

In the third section, sharp bounds for number of nonzero entries of S^2NS matrices of order n and characterization of equality have been investigated.

In the last section, Moore- Penrose inverses of acyclic bipartite graphs are given. Some results and necessary and sufficient conditions in an acyclic bipartite graph are given

Key words : Moore–Penrose Inverse, Sign Pattern, Signed Generalized Inverse, Acyclic Bibartite Graph

ÖNSÖZ

Bu çalışma bir derleme olup Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyesi Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.Birinci bölümde genel tanımlar, işaretli genelleştirilmiş terslerle ve graphlarla ilgili tanım ve bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde işaretli genelleştiriliş tersli matrislerin özellikleri ve işaretli alt matrisler incelenmiştir.Üçüncü bölümde tamamen ayrıştırılamayan Formda, n. Mertebeden S^2NS matrislerin sıfırdan farklı elemanlarının sayısı üzerinde kesin sınırlar belirlenmiştir. Dördüncü bölümde asiklik ikili graphların, Moore-Penrose terslerin bir tanımını elde etmek için nasıl kullanılabileceği sunulmuştur ve bir asiklik ikili graph' daki yeterli ve gerekli koşullar işaretli genelleştirilmiş terslerlerle ilişkilendirerek verilmiştir.

Bu çalışma süresince benden yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım Sayın Yrd.Doç.Dr Hasan KÖSE ' ye ve katkılarından dolayı hocalarım Sayın Prof. Dr Durmuş BOZKURT , Sayın Yrd .Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya ve aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunuyorum.

Funda ÖZDEMİR

Konya 2008

SEMBOLLER

$\operatorname{sgn} A$	:	A Matrisinin İşaret Modeli
$Q(A)$	:	A Matrisinin Kalitatif Sınıfı
$\rho(A)$	:	A matrisinin terim rankı
A^{+}	:	A matrisinin Moore-Penrose (genelleştirilmiş) tersi
A^{T}	:	A matrisinin transpozu
$\det A$	:	A matrisinin determinantı
$D(A)$	:	A matrisinin di-Graphı
$K_{m,n}$	:	m ve n köşeli ikili Graph
$A[\gamma,\delta]$	:	A matrisinin alt matrisi
$N_r(A)$	:	A matrisinin satır sayısı
$N_c(A)$	:	A matrisinin sütun sayısı
$M_k(B)$	:	B deki k tane kenar içeren eşleştirmelerin ailesi

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ..... 1

1.1. Genel Tanımlar..…… 1

1.2. Genelleştirilmiş Tersli Matrisler..……. 2

1.3. İşaretli Genelleştirilmiş Tersli Matrisler……... 2

2. İŞARETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİ OLAN MATRİSLER ……. 9

2.1. İşaretli Genelleştirilmiş Tersler ve L Matrisler …… 9

2.2. Matrislerin İşaret Sırası Ve İşaretli Alt Matrisler…….……... 11

2.3. Tam Sütun(Satır) Terim Ranklı Matrisler İçin İşaretli Genelleştirilmiş tersler…. 18

3. S^2NS **MATRİSLERİN SIFIRDAN FARKLI ELEMANLARININ SAYISI** …….. 19

3.1. Tamamen Ayrıştırılamaz S^2NS Matrisler İçin Sınırlar……... 19

3.2. İşaretli Genelleştirilmiş Tersli Matrislerle Hadamard Çarpımı……... 23

4. ACYLİC İKİLİ GRAPHLI MATRİSLERİN MOORE-PENROSE TERSLERİ… 25

4.1. Asiklik İkili Graphlı Matrisler İçin Moore-Penrose TerslerinBirFormülü…… 25

4.2. Bir Asiklik İkili Graphdaki Gerekli ve Yeterli Koşullar……..... 31

KAYNAKLAR ……..……..……... 43

1. GİRİŞ

1.1. Genel Tanımlar

İşaretli genelleştirilmiş tersler Lineer Cebirde oldukça yaygın bir biçimde kullanılmakta ve üzerinde çalışılmaktadır.

Bu çalışmada matrislerin işaretli genelleştirilmiş terse sahip olmaları ile ilgili özellikler incelenmiştir. n. mertebeden (genel) bir S^2NS matrisinin, sıfırdan farklı elemanlarının sayısı üzerinde kesin üst sınırlar belirlenmiştir. Devirsiz ikili grafların, Moore-Penrose terslerin bir tanımını elde etmek için nasıl kullanılabileceği sunulmuştur ve bir devirsiz ikili graftaki yeterli ve gerekli koşullar işaretli genelleştirilmiş terslerlerle ilişkilendirerek verilmiştir.

Tanım 1.1.1. (İşaret model)

A reel matrisinin işaret modeli; her elemanı, o elemanın işaretiyle değiştirilerek A matrisinden elde edilen $(0,1,-1)$ matrisidir.

Tanım 1.1.2. (Kalitatif sınıf)

İşaret modeli A ile aynı olan reel matrisler kümesi A'nın kalitatif sınıfı olarak adlandırılır ve $Q(A)$ ile gösterilir.

$$Q(A) = \{B : \operatorname{sgn}(B) = A\}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 1.1.3.(Terim rank)

$\rho(A)$ ile gösterilen, A matrisinin terim rankı; A'nın ikisi aynı satır veya sütunda bulunmayan sıfırdan farklı en çok elmanı bulunduran kümesinin eleman sayısıdır.

A bir $m \times n$ $(0,1,-1)$ matris olsun. $Q(A)$ kalitatif sınıfında matrislerin ranklarını göz önünde bulunduralım. A'nın terim rankı, onun determinantı sıfıra özdeş olmayan kare alt matrisinin en büyük mertebesine eşittir.

Açıkça $Q(A)$' daki en büyük ranklı matrisin rankı, A'nın terim rankına eşittir.

Tanım 1.1.4.

Eğer A matrisin rankı, A'nın satırlarının veya sütunlarının sayısına eşitse, A matrisinin "tam satır veya tam sütun rankı" vardır denir.

Tanım 1.1.5. (L-Matris)

$Q(A)$ 'daki her matris lineer bağımsız sütunlara sahip ise A matrisine L-matris denir. Örnek olarak;

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini gösterebiliriz.

1.2. Genelleştirilmiş Tersli Matrisler

A, bir $m\times n$ reel matris olsun. bir $n\times m$ reel matris X aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, X ' e A ' nın genelleştirilmiş tersi (veya Moore-Penrose tersi) denir ve GI şeklinde kısaltılır.

$$AXA=A\ ,\quad XAX=X\ ,\quad (AX)^{\mathrm{T}}=AX\ ,\quad (XA)^{\mathrm{T}}=XA$$

İyi bilinir ki, her A matrisi için, A 'nın GI' sı vardır ve tektir. A^{+} ile gösterilir. A, tersi alınabilir kare matris ise, o zaman $A^{+}=A^{-1}$ ' dir.

1.2.1. Moore-Penrose tersin özellikleri

$$1.\left(A^{T}\right)^{+}=\left(A^{+}\right)^{T}$$

$$2.\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{+} & 0 \\ 0 & B^{+} \end{pmatrix}$$

$$3.\left(A,0\right)^{+}=\begin{pmatrix} A^{+} \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. A lineer bağımsız sütunlara sahip ise $A^{+}=\left(A^{T}A\right)^{-1}A^{T}$ olur. [1]

1.3. İşaretli Genelleştirilmiş Tersli Matrisler

A bir reel matris olmak üzere, $Q(A)$ 'daki her B matrisi için $\operatorname{sgn}A^{+}=\operatorname{sgn}B^{+}$ ise A 'nın işaretli genelleştirilmiş tersi vardır. Basitçe A 'nın işaretli GI' sı vardır veya A^{+} işaretlidir denir.

Tanım 1.3.1. SNS (İşaret Tekil Olmayan) Matris

A kare reel matris olmak üzere, Q(A)' daki her matris tekil değil ise, A işaret tekil olmayan matris olarak adlandırılır ve SNS matris diye kısaltılır.

$Q(A)$ 'daki matrislerin terslerinin, hepsinin işaret modeli aynı ise, SNS olan A matrisine "Güçlü SNS Matris" denir ve S^2NS matris diye kısaltılır.

Örnek 1.3.1. n **,** tamsayı ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$H_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Hessenberg matrisi SNS matristir.[5]

Lemma 1.3.1.

$\rho(A) < n \Leftrightarrow A$ 'nın determinantı sıfıra özdeştir Bütün $\tilde{A} \in Q(A)$ için $\det \tilde{A} = 0$ olur. [1]

Lemma 1.3.2.

A matrisi SNS matris olmak üzere;

$$A^+ \ işaretlenmiştir \Leftrightarrow A, S^2NS \ matristir.$$

Aslında A, n.mertebeden bir kare reel matris ve $\rho(A)$=n ise bu ifade

$$A^+ \ işaretlenmiştir \Leftrightarrow A, S^2NS \ matristir$$

şeklinde söylenebilir. [1]

Örnek1.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi SNS matristir. A ile aynı işaret modeline sahip

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alırsak, A ile B 'nin terslerinin elemanlarının işaretleri farklıdır ve A, S^2NS matris değildir.

Örnek1.3.3

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Gerçekten A bir S^2NS matristir ve $Q(A)$'daki her matrisin tersinin işaret modeli

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Örnek1.3.4.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. A bir S^2NS matristir ve Q(A) 'daki her matrisin tersinin işaret modeli

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

1.4 Graflar

Tanım1.4.1 (Graflar)

Bir G grafı, köşeler kümesini ve kenarlar E kümesini (köşelerin sıralı olmayan çiftlerinin koleksiyonunu) içerir.

Bir graf sembolik olarak $G=(V,E)$ ile gösterilir. Bir grafın mertebesi, onun köşelerinin sayısıdır ve genişliği onun kenarlarının sayıdır.

Tanım 1.4.2. **(** Bir Matrisin Digrafı **)**

Bir "yönlü Graf" veya "Digraf" sonlu bir köşeler kümesi V ve ayrık köşelerin sıralı çiftlerinin bir kümesini (yay) içerir. $\{u,v\}$ yönlü çifti bir a yayı ise , a yayı u dan v ye yönlüdür denir. Bu bağlamda a yayı u köşesinden bitişiktir ve v köşesine bitişiktir. Her yay belli bir yönde iki köşe ile birleşir.

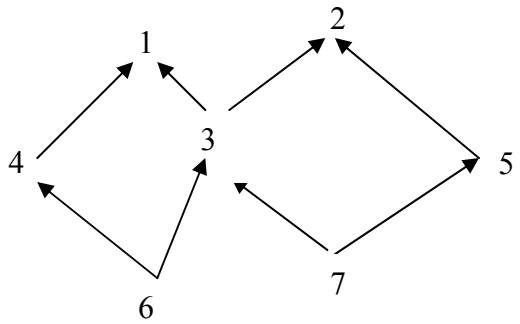
A'nın birleşik digrafı $D(A)$, nokta kümesi $V=\{1,2,...,n\}$ ve yay kümesi $\{(i,j)\,|\,a_{ij}\neq 0, i\neq j\}$ olan (köşeleri $1,2,...,n$) ve i köşesinden j köşesine ancak ve ancak $i\neq j$ ve $a_{ij}\neq 0$ ise (i,j) yayı bulunan n. mertebeden digraf olarak tanımlanır. A'nın birleşik işaretli digrafı $S(A)$, a_{ij}'nin işaretini $D(A)$'daki her yaya devrederek, $D(A)$'dan elde edilir. $D(A)$ digrafı A'nın ana köşegenindeki elemanlardan bağımsızdır.

Örnek 1.4.1.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

A'nın digrafı şekil 1.1 de gösterilmiştir.



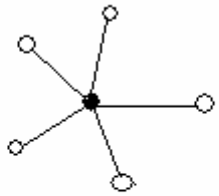
Şekil 1.1 : A'nın digrafı

Tanım1.4.3.(İkili Graflar)

Bir "ikili graf", köşelerinin kümesi X ve Y diye iki kümeye ayrılabilen ve her kenar X de bir köşe ve Y de bir köşe arasında olan bir basit graftır

Tanım1.4.4. (Tam ikili graf)

K_n , n köşeli , her köşe çifti tam olarak bir kenar ile birleşen bir graftır. Bir köşeli ve kenarsız K_1 grafı aşikar graf olarak bilinir. Tam İkili graf $K_{m,n}, X$ de m köşeli ve Y de n köşeli, X de her köşe ve Y de her köşe arasında bir kenar olan (X,Y,E) grafıdır.



K 1,5

Şekil 1.2: İkili graf örneği

Tanım1.4.5.(İşaretli digraf)

D, mertebesi n ve köşeleri $1,2,...,n$ olan bir digraf olsun. D'nin i köşesinden j köşesine $k \geq 0$ uzunluğundaki α yolu , farklı köşelerin $i = i_0, i_1, ..., i_{k-1}, i_k = j$ dizisidir. Öyle ki; $p = 1,2,...,k^2$ için (i_{p-1}, i_p), D'nin bir yayıdır ve α yolunu $i_0 \to i_1 \to ... \to i_{k-1} \to i_k$ ile gösteririz.

$k \geq 1$ uzunluğundaki D'nin bir yönlü deviri γ, köşelerin $j_1, j_2, ..., j_k = j_1$ dizisidir. Öyle ki $j_1, j_2, ..., j_k$ farklıdır ve $q = 1,2,...,k$ için (j_q, j_{q+1}) D'nin bir yayıdır.

γ yönlü devri $j_1 \to j_2 \to ... \to j_k \to j_1$ ile gösterilir. $k = 0$ olmasını ve böylece bir köşenin yolunu yaysız kabul ettiğimize dikkat edin . Böyle bir yola boş yol denir.

Her farklı u ve v köşe çifti için D' de u 'dan v'ye ve v'den u'ya bir yol varsa, D digrafı güçlü bağlanmıştır.

$D(A)$ grafının her bir (i, j) yayı için, $\operatorname{sgn} a_{ij}$ sayısını saptayabiliriz, ve sonra A'nın işaretli digrafından söz edebiliriz. (i, j) yayının işareti, $\operatorname{sgn} a_{ij}$ olarak tanımlanır. Hiçbir yayın işaretinin sıfıra eşit olmadığına dikkat ediniz.

α, k uzunluğunda i'den j'ye

$$i = i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_{k-1} \to i_k = j$$

olsun.

α' nın işareti;

$$sign\alpha = signa_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{k-1} i_k}$$

şeklindedir ve yayların işaretlerinin çarpımına eşittir. Sıfır uzunluğundaki bir yolun işareti (boş çarpım olarak) +1 olarak tanımlanır. γ, k uzunluğunda yönlü devir $j_1 \to j_2 \to \ldots \to j_k \to j_1$ olsun. Yönlü devir γ' nın işareti

$$sign\gamma = signa_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \ldots a_{j_{k-1} j_k} a_{j_k j_1}$$

olur ve yayların işaretlerinin çarpımına eşittir.

Tanım 1.4.6.

Bir işaretli digraf S, aşağıdaki 2 koşulu sağlarsa , S ye bir S^2NS işaretli digraf denir.

1. S' nin her devrinin işareti negatiftir
2. S' deki aynı ilk ve son tepe noktalı yol çifti aynı işaretlidir.

Tanım 1.4.7.

$A = a_{ij}$, n. mertebeden bir kare reel matris olsun. A'nın birleşik digrafı $D(A)$, nokta kümesi $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ve yay kümesi $\{(i, j) | a_{ij} \neq 0, i \neq j\}$ olan digraf olarak tanımlanır. A'nın birleşik işaretli digrafı $S(A)$, a_{ij} 'nin işaretini $D(A)$'daki her yay (i, j) ye devrederek , $D(A)$' dan elde edilir.

2.İŞARETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİ OLAN MATRİSLERİN ÖZELLİKLERİ

2.1 İşaretli Genelleştirilmiş Tersler ve L Matrisler

Lemma 2.1.1.

ρ(A)=n olmak üzere , n. mertebeden reel A matrisini alalım. A , SNS matris değilse , $Q(A)$'da tersinir A_1 ve A_2 matrisleri vardır. öyle ki indisler $1 \le p \le n$ ve $1 \le q \le n$ olmak üzere,

$$\left(A_1^{-1}\right)_{qp}\left(A_2^{-1}\right)_{qp} < 0$$

olur.[1]

İspat:

ρ(A)=n olsun. $Q(A)$'da tekil olmayan B matrisi vardır. A, SNS olmadığından $Q(A)$'nın bir elemanı olan tekil C matrisi de var olur . Genel olarak B'yi C'den ((p,q) için $1 \le p \le n$ ve $1 \le q \le n$ olmak üzere)

$$(B)_{pq} = b,\ (C)_{pq} = c \ ve\ b \neq c$$

pozisyonunda farklı kabul edebiliriz. bu nedenle ,

$$\begin{aligned} \det B &= \det B - \det C \\ &= (-1)^{p+q}(b-c)\det B\left[\overline{\{p\}}\middle|\overline{\{q\}}\right] \neq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

olur. Şimdi $0 < \varepsilon < |c|$ ve $A_i = C + (-1)^i \varepsilon\, E_{pq}$ $(i = 1,2)$ alalım.

$Q(A)$'da tersi alınabilen A_1 ve A_2 matrisleri vardır.Öyle ki (p,q) elemanları 1 ve diğer tüm elemanları 0 dır.

$$\det A_i = (-1)^{i+p+q} \in \det A_i\left[\overline{\{p\}}\middle|\overline{\{q\}}\right] \quad (i = 1,2) \tag{2.2}$$

buradan

$$(A_i^{-1})_{qp} = \frac{1}{(-1)^i \varepsilon}$$

elde ederiz ve

$$(A_1^{-1})_{qp}(A_2^{-1})_{qp} = -\frac{1}{\varepsilon^2} < 0 \text{ olur.}$$

Lemma 2.1.2.

A, $m\times n$ matris ve $\rho(A)=n$ olsun. A matrisi işaretli genelleştirilmiş terse sahip ise A, L matristir. [1]

İspat:

B, $\rho(B)=n$ olmak üzere n.mertebeden bir kare matris iken $A=\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ olduğunu varsayalım. B' nin SNS matris olduğunu gösterirsek; A'nın L matris olduğunu göstermiş oluruz. Olmadığını varsayarsak ; lemma2.1.1 e göre $Q(B)$'nin elemanı olan, tersi alınabilen B_1 ve B_2 matrisleri vardır

(indisleri p,q .için $1\le p\le n$ ve $1\le q\le n$) öyle ki;

$$\left(B_1^{-1}\right)_{qp}\left(B_2^{-1}\right)_{qp}<0 \qquad (2.3)$$

olur. Şimdi yeter mertebede küçük $\varepsilon>0$ alalım ve

$$A_i(\varepsilon)=\begin{pmatrix} B_i \\ \varepsilon C \end{pmatrix} \quad \text{(i=1,2)}$$

alalım. Sonra, $A_i(\varepsilon)\in Q(A)$' dır ve (1.2.1.) Moore-Penrose tersin özelliklerinden dolayı

$$A_i(\varepsilon)^+=\left(A_i(\varepsilon)^T A_i(\varepsilon)\right)^{-1}A_i(\varepsilon)^T \quad \text{(i=1,2)}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\det\left(A_i(\varepsilon)^T A_i(\varepsilon)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\det\left(B_i^T B_i+\varepsilon^2 C^T C\right)=\left(\det B_i\right)^2\neq 0$$

Böyle olduğu için $A_i(\varepsilon)\in Q(A)$, kafi derecede küçük ε için ε ' un sürekli bir fonksiyonudur. Bu nedenle,

$$\lim A_i(\varepsilon)^+=A_i(0)^+=\begin{pmatrix} B_i \\ 0 \end{pmatrix}^+=\left(B_i^+,0\right)=\left(B_i^{-1},0\right) \qquad (i=1,2)$$

Şimdi (2.3) den dolayı, ε>0 için $\operatorname{sgn}A_1(\varepsilon)^+\neq\operatorname{sgn}A_2(\varepsilon)^+$ olur. Bundan dolayı A işaretli genelleştirilmiş terse sahip değildir. $A_1(\varepsilon)$ *ve* $A_2(\varepsilon)$, her ikisi de $Q(A)$ 'da olduğu zaman. A 'nın genelleştirilmiş tersi yoktur.

2.2. Matrislerin İşaret Sırası ve İşaretli Alt Matrisler

Lemma 2.2.1.

$A=\left[a_{ij}\right]$ negatif ana köşegeni olan n.mertebeden bir SNS matris olsun ve r ile s $1\le r,s\le n$ koşulunu sağlayan farklı tamsayılar olsun. $Q(A)$' da $\tilde{A}$ matrisi vardır. Öyle ki $\tilde{A}^{-1}$'in (r,s) girişi pozitiftir, sırasıyla negatiftir, ancak ve ancak $D(A)$ işaretli digrafında r'den s'ye bir negatif, sırasıyla pozitif, yol vardır. [5]

Teorem 2.2.1.

A köşegen tüm köşegen elemanları negatif olan bir kare reel matris olsun. A, S^2NS matristir $\Leftrightarrow$ A 'nın birleşik işaretli digrafı bir S^2NS digraftır. [1]

Tanım2.2.1.

(Permütasyon Denk) A ve B $m\times n$ matrisleri olmak üzere , Eğer A, satır ve sütunlarının yerleri değiştirilerek B' e dönüştürülebiliyorsa, A ve B' e permütasyon denk denir.

Tanım 2.2.2

$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$ biçimindeki matrisin permütasyon denk' i ise A_1 ve A_2 kare matrisler olmak üzere, A kare matrisine "kısmi ayrıştırılabilir" denir. Bir matris kısmi ayrıştırılabilir değilse, tamamen ayrıştırılamazdır.

İyi bilinir ki, eğer A en fazla terim ranklı bir kare matris ise, A aşağıdaki tamamen ayrıştırılamaz normal forma permütasyon denktir.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ B_{21} & A_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ B_{k1} & B_{k2} & . & . & . & A_k \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

(burada her köşegen blok A_i tamamen ayrıştırılamazdır) $(i=1,..,k)$

Teorem2.2.2.

$A=\left[a_{ij}\right]$ matrisi negatif ana köşegeni olan, n . mertebeden bir SNS matris olsun ve r ile s , $1\le r,s\le n$ koşulunu sağlayan farklı tamsayılar olsun.

(i) $\left\{\tilde{A}^{-1}:\tilde{A}\in Q(A)\right\}$'da ki matrislerin (s,r) konumundaki elemanları aynı işaretlidir ancak ve ancak $D(A)$ işaretli digrafındaki r'den s'ye tüm yollar aynı işarete sahiptir.

(ii) $D(A)$'da ki s'den r'ye tüm yollar aynı işarete ε'a sahipse , $\left\{\tilde{A}^{-1}:\tilde{A}\in Q(A)\right\}$ da ki matrislerin her birinin (s,r) konumundaki elemanların işareti $-\varepsilon$ dır. (burada ε s'den r'ye yol yoksa sıfır olarak tanımlanmıştır.)

(iii)Eğer A tamamen ayrıştırılamaz ve $a_{rs}\neq 0$ ise, o zaman $\left\{\tilde{A}^{-1}:\tilde{A}\in Q(A)\right\}$ 'da ki matrislerin her birinin (s,r) konumundaki elemanının işareti a_{rs} dir. [5]

Örnek2.2.1

(1.1) deki Hessenberg matrisi $n=5$ için

$$H_5=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$Q(H_5)$ deki her matrisin tersinin işaret modeli

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ * & 1 & -1 & -1 & -1\\ * & * & 1 & -1 & -1\\ * & * & * & 1 & -1\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.3.

Her $i=1,...,m$ ve $j=1,...,n$ için $b_{ij} \le a_{ij}$ ise; B, A'dan işaret majördür. denir ve $B \le A$ ile gösterilir.

Şunu görmek kolaydır ki: $B \le A$ ancak ve ancak B, $\hat{A} \in Q(A)$ ' dan $\hat{A}$' nın bazı sıfırdan farklı girişleri sıfırla değiştirilerek elde edilir.

Lemma 2.2.2.

$S_n(m)$, $[m]$'nin tüm alt kümelerinin bir kümesi ve eleman sayısı n olsun. Eğer T, tamsayıların sonlu bir kümesi ise ve $q \in T$, T' nin içindeki a' ya eşit yada q'dan küçük olan elemanlarının sayısını $N(q,T)$ ile gösteririz.

A, bir $m \times n$ matris olsun. A lineer bağımsız sütunlara sahip ve p ile q tamsayı olsun.

$$1 \le p \le n \quad , \quad 1 \le q \le n$$

olduğunda,

$$S_A = \left\{ T \in S_n(m) \;\middle|\; A[T|\ :] \ tersi\ \ alınabilir \right\} \tag{2.5}$$

$$\left(A^{+}\right)_{pq} = \frac{(-1)^p}{\det\left(A^T A\right)} \sum_{T:q \in T \varepsilon S_A} (-1)^{N(q,T)} \times \det A[T|\ :]\ \det A[T \backslash \{g\} \mid \{p\}]$$

(2.6)

şeklindedir.

Eğer A$[Tl\ :]$-nın tersi alınabiliyorsa,

$$A[TI\ :]^{-1}_{p,N(q,T)} = \frac{(-1)^{p+N(q,T)}}{\det A[TI\ :]} \det A\left[T \backslash \{q\} I \overline{\{p\}}\right]$$

olduğu için (3.2) tekrar şu şekilde yazılabilir.

$$\left(A^{+}\right)_{pq} = \frac{1}{\det\left(A^T A\right)} \sum_{T:q \in T \in S_A} \det A[TI\ :]^2 \; A[TI\ :]^{-1}_{p,N(q,T)} \tag{2.7}$$

($A^T A$ pozitif tanımlı matris , $\det(A^T A) > 0$)

olur. [1]

Örnek 2.2.2.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

olsun . A bir L matristir ve $\tilde{A}\in Q(A)$ için, a,b,c,d pozitif sayıları vardır. Öyle ki;

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & 0\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Öyleyse (2.6) dan

$$\tilde{A}^{+}=\frac{1}{\det \tilde{A}^{T}\tilde{A}}\begin{bmatrix} ad^2-cbd & cb^2-dab & e(b^2+d^2)\\ -acd+bc^2+be^2 & -cab+da^2+de^2 & -c(ab+cd)\end{bmatrix}$$

olur.

Böylece, A^{+}'nın (1,3) ve (2,3) elemanlarının işaretli olduğu görülür ve A^{+}'nın başka hiçbir elemanı işaretli değildir.

Teorem 2.2.3.

$A=\left(a_{ij}\right)$, $m\times n$ matris ve $\rho(A)=n$ olsun. A^{+} işaretlenmiştir $\Leftrightarrow$ A matrisi

1) A'nın mertebesi n olan her alt matrisinin determinantı sıfıra özdeştir (B , A'nın alt matrisi olmak üzere $Q(B)$'deki her matrisin determinantı sıfırdır) yada S^{2} NS matristir.

2) Her p,q ve her T_1 , T_2 ikilisi için $q\in T_i\in S_A$ $(i=1,2)$ olmak üzere $(1\le p\le n$, $1\le q\le m)$

$$\prod_{i=1}^{2} A\left[T_i|:\right]^{-1}_{p,N(q,T_i)}\ge 0 \qquad (2.8)$$

koşullarını sağlar. [1]

Lemma 2.2.3. A, n.mertebeden S^2NS matris olsun. B $\leq$A ve $\rho(B)=n$ ise B, S^2NS matristir ve $B^{-1}\leq A^{-1}$ dir. [1]

İspat:

B **'**nin köşegenindeki elemanların negatif olduğunu varsayalım.

A, S^2NS matris ve onun birleşik işaretli digrafı $S(A)$ da S^2NS işaretli digraftır.(teorem 2.2.1'den) Fakat $S(B)$, $S(A)$ 'nın işaretli alt digrafıdır.

B $\leq$A olduğu için $S(B)$ de S^2NS işaretli digraftır ve bu nedenle B, S^2NS matristir.

Daha sonra , $B^{-1}\leq A^{-1}$ olduğu gösterilir. Açıkça, $\left(B^{-1}\right)_{ii}\leq\left(A^{-1}\right)_{ii}$ $(i=1,..,n)$ olur.Çünkü $\left(B^{-1}\right)_{ii}$ $ve\left(A^{-1}\right)_{ii}$' in elemanlarının hepsi negatiftir.Şimdi varsayalım ki , bazı $i\neq j$ için $\left(B^{-1}\right)_{ii}\neq 0$ olsun.Öyleyse, teorem 2.2.2 den

$-\operatorname{sgn}\left(B^{-1}\right)_{ii}= S(B)$

ifadesinde ki i'den j'ye bütün yolların ortak işareti $S(A)$' daki i'den j ' ye bütün yolların ortak işareti $-\operatorname{sgn}\left(A^{-1}\right)_{ij}$ olur. Buradan $\left(B^{-1}\right)_{ij}\leq\left(A^{-1}\right)_{ij}$ elde edilir.(Her i,j için $i\neq j$) $B^{-1}\leq A^{-1}$ elde edilir.

Teorem2.2.4.

A, $m\times n$ matris öyle ki , A^+ işaretlenmiş olsun. $B\leq A$ ve $\rho(B)=n$ olduğunu varsayalım . Öyleyse B^+ işaretlenmiştir ve $B^+\leq A^+$ dır.[1]

İspat:

B^+'nın işaretli olduğunu göstermek için öncelikle teorem2.2.3'ü kullanırız. B_1, B'nin boyutu n olan ve $\rho(B_1)=n$ koşuluna uyan bir alt matrisi olsun. A_1 de A'nın aynı şartları taşıyan alt matrisi olsun . $B_1\leq A_1$ ve $\rho(A_1)=n$ olduğundan A_1, S^2NS dir. Çünkü A^+ işaretlidir . Buradan A , teorem 2.2.3'ün (1). koşulunu sağlar.

Lemma 2.2.3' den , şu söylenebilir ki B_1 , S^2NS matris ve bu nedenle B de teorem2.2.3' ün (1) . koşulunu sağlar.

Şimdi B 'nin teorem 2.2.3'deki (2). Koşulu sağladığını kanıtlayalım. A, teorem 2.2.3' ün (2). Koşulunu sağladığında , $S_B \subseteq S_A$ olur ve

Diğer taraftan , $B\left[T_i|:\right] \le A\left[T_i|:\right]$ (i=1,2) olduğundan lemma 2.2.3.'den ,

$$B\left[T_i|:\right]^{-1} \le A\left[T_i|:\right]^{-1} \quad \text{(i=1,2)} \qquad (2.9)$$

(2.8),(2.9) ve "$b_1 \le a_1$ ve $b_2 \le a_2$ ise $b_1 b_2 \le a_1 a_2$" ifadesinden,

$$\prod_{i=1}^{2} B\left[T_i|:\right]^{-1}_{p,N(q,T_i)} \ge 0$$

olur.

Bu nedenle , B teorem 2.2.3' ün (2). koşulunu sağlar. Ve B^+ işaretlidir. Şimdi her p,q tamsayı çifti için , $1 \le p \le n$, $1 \le q \le m$ ve $q \in T \in S_B \subset S_A$ olmak üzere lemma 2.2.3 ile $B\left[T|:\right] \le A\left[T|:\right]$ olur, ve böylece

$$B\left[T|\ :\right]^{-1} \le A\left[T|\ :\right]^{-1}$$

eşitsizliği yazılır.Bu yüzden (2.7) yi A ve B için kullanarak, şu sonuca varılır.

$$(B)^+_{pq} \le (A)^+_{pq}$$

$(1 \le p \le n \ , \ 1 \le q \le m$ olan $\forall \ p,q$ için)

Buradan $B^+ \le A^+$ olur.

Teorem2.2.5.

$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, $\rho(B) = N_c(B)$ *ve* $\rho(D) = N_r(D)$ koşuluna uyan bir matris olsun.

A^+'nın işaretlenmiş olduğunu varsayalım. Öyleyse $A_1 \le A$ ve $\rho(A_1) = \rho(A)$ şartını sağlayan herhangi bir A_1 matrisi için, A_1^+ de işaretlenmiştir ve $A_1^+ \le A^+$ olur. [1]

Teorem 2.2.6.

A ve A_1 , $A_1 \le A$ ve $\rho(A_1) = \rho(A)$ koşulunu sağlayan iki $m \times n$ matris olsun. ($n \le m$) A^+ işaretlenmiş ise A_1^+ işaretlenmiştir ve $A_1^+ \le A^+$ dır. [1]

Teorem2.2.7.

B, A'nın $\rho(A) = \rho(B)$ koşulunu sağlayan bir alt matrisi olsun A^+ işaretlenmiş ise , B^+ da işaretlenmiştir. [2]

İspat:

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alırsak $A_1 \le A$ ve $\rho(A_1) = \rho(B) = \rho(A)$ olur. Böylece teorem 2.2.6 ile A_1^+ işaretlenmiştir ve bu yüzden B^+ işaretlenmiştir.

Şunu fark ediyoruz ki , teorem 2.2.7 $\rho(A) = \rho(B)$ varsayımını almazsak doğru olmaz. Örneğin;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A, S^2NS matris olduğu halde B, S^2NS matris değil bu yüzden A^+ işaretlidir fakat B^+ işaretli değildir.

2.3 Tam Sütun(Satır) Terim Ranklı Matrisler için İşaretli Genelleştirilmiş Tersler

Teorem2.3.1.

Hem B hem D tam sütun terim ranklı olmak üzere ,

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

olsun . A^+ işaretli ise, hem B^+, hem D^+ işaretlidir. [2]

İspat:

A^+ işaretli olsun .

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \leq A$$

alalım. Teorem 2.2.6 ile 2.2.7 dan hem B^+ , hem D^+ işaretlidir

Lemma 2.3.1.

B tam sütun ranklı ve D tam satır ranklı olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

bir reel matris olsun.

O zaman,

$$A^+ = \begin{pmatrix} B^+ & 0 \\ -D^+CB^+ & D^+ \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. [2]

Teorem 2.3.2.

B tam sütun terim ranklı ve D tam satır terim ranklı olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

bir reel matris olsun.Öyleyse A^+ işaretlidir $\Leftrightarrow$ hem B^+ , hem D^+ işaretli ve

$\mathrm{I}_{n_1}, \mathrm{I}_{n_2}, \mathrm{I}_{n_3} ve\ \mathrm{I}_{n_4}$

uygun boyutlarda birim matrisler olmak üzere

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_{n_1} & D^+ & 0 & 0 \\ o & -\mathrm{I}_{n_2} & C & 0 \\ o & o & -\mathrm{I}_{n_3} & B^+ \\ o & o & o & -\mathrm{I}_{n_4} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

matrisi bir S^2NS matristir. [2]

3. S^2NS MATRİSLERİN SIFIRDAN FARKLI ELEMANLARININ SAYISI

3.1 Tamamen Ayrıştırılamaz S^2NS Matrisler için Sınırlar

$N(A)$, A matrisinin sıfırdan farklı girişlerinin sayısı olsun

Lemma3.1.1.

A , her köşegen bloğu A_i, " tamamen ayrıştırılamaz normal form" içeren bir S^2NS matris olsun. O halde, her kapalı-köşegen bloğu $B_{ij}\left(1 \le j \prec i \le k\right)$ en fazla bir tane sıfırdan farklı köşegen bulundurur. [3]

Tanım 3.1.1.

Eğer A bir S^2NS matris ise, fakat A'dan, bir sıfır girişi , sıfırdan farklı bir girişle yer değiştirerek elde edilen her matris S^2NS matris değilse , A matrisine "En Büyük S^2NS matris" denir.

Teorem 3.1.1

A , n. Mertebeden tamamen ayrıştırılamaz en büyük S^2NS matris olsun. Öyleyse $N\left(A\right) = 3n-2$ dir. [3]

Sonuç 3.1.1.

A, n. mertebeden tamamen ayrıştırılamaz S^2NS matris olsun . Öyleyse $N\left(A\right) \le 3n-2$ dir. Ve eşitlik ancak ve ancak A n.mertebeden tamamen ayrıştırılamaz, en büyük S^2NS matris ise sağlanır. [3]

Lemma 3.1.2.

$1 \le k \le n$ şartını sağlayan n ve k tamsayıları için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\frac{1}{2}k(k-5) \le \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-5) & n=1 \text{ veya } n \ge 4 \\ -2 & n=2 \text{ veya } 3 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Eşitlik ancak ve ancak n ve k .

(a) $n=k=1$ *veya* $n=k\ge 4$

$(b) n=2,3,4$ *ve* $k=1$

durumlarından birinde ise sağlanır . [3]

Örnek 3.1.1.

Aşağıdaki $n \geq 4$, n. mertebeden matris, kısmen ayrıştırılabilir, en büyük S^2 NS matris olan ve kaynaklar $[5]$ 'de verilen bir örnektir.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & -1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & -1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Burada, A 'nın işaretli digrafı $S(A)$ devirsiz olduğundan ve $S(A)$ 'nın her yayı pozitif olduğundan, A bir S^2NS matristir. (3.2) matrisinin en büyük S^2NS olması, teorem 3.1.2 'de ki (3.3.) eşitsizliğinin bir sonucu olarak sayılabilir.

Teorem3.1.2.

A, n. mertebeden bir (0,1,-1) S^2 NS matris olsun .Öyleyse

$$N(A) \leq \begin{cases} \frac{1}{2}n(n+1) & n=1 \quad veya \quad n \geq 4 \\ 3n-2 & n=2 \quad veya \quad 3 \end{cases} \tag{3.3}$$

eşitlik ancak ve ancak aşağıdakilerden biri varsa sağlanır.

1. $n \neq 2,3$ ve A, uygun bir şekilde satır ve sütunlarının yerleri değiştirilerek ve işaretlenerek (2.4) formunda bir matrise dönüştürülebilir.

2. A, 2,3 veya 4. mertebeden tamamen ayrıştırılamaz , en büyük S^2 NS matristir. $[3]$

İspat:

Önce farz edebiliriz ki A 'nın (2.4) formu vardır öyle ki her köşegen blok A_i, $n_i (i=1,...,k)$ mertebeden bir tamamen ayrıştırılamaz matristir. A bir S^2 NS matris olduğu için her A_i bir tamamen ayrıştırılamaz S^2 NS matristir ve her B_{ij} en fazla bir sıfırdan farklı giriş içerir (lemma 3.1.1' e göre).

Böylece sonuç 3.1.1 e göre,

$$N(A_i) \leq 3n_i - 2 \ (i=1,...,k)$$

$$N\left(B_{ij}\right)\le 1 \qquad (1\le j\prec i\le k)$$

olur bu yüzden (3.1)'e göre

$$\begin{aligned} N(A) &= \sum_{i=1}^{k} N(A_i) + \sum_{1\le j\prec i\le k} N\left(B_{ij}\right) \\ &\le \sum_{i=1}^{k}(3n_i-2)+\frac{1}{2}k(k-1) \\ &= 3n+\frac{1}{2}k(k-5) \\ &\le \begin{cases} \frac{1}{2}n(n+1) & n=1 \quad veya \quad n\ge 4 \\ 3n-2 & n=2 \quad veya \quad 3 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Eşitlik durumu için, yeterlilik kısmı açıktır. Şimdi gereklilik kısmını ispatlayalım,

(3.4) eşitliğin sağlandığını farz edelim. Öyleyse son eşitlik, (3.1)' in eşitlik durumuna göre ya (a) ya da (b) nin doğruluğu anlamına gelir.

$(a)\, n=k=1$ veya $n=k\ge 4$, veya

$(b)\, n=2,3,4$ ve $k=1$

eğer (b) doğruysa , o zaman $k=1$, A'nın tamamen ayrıştırılamaz olduğu anlamına gelir.

Böylece eşitlik durumu , A'nın 2,3 veya 4. mertebeden tamamen ayrıştırılamaz en büyük S^2 NS matris olduğunu gösterir.

Eğer (a) doğruysa , o zaman $n=k$, her köşegen blok A_i 'nin 1. mertebeden sıfırdan farklı bir matris olduğunu gösterir, ve (3.4)' ün eşitlik $1\le j\prec i\le k$ yi sağlayan her blok B_{ij}'nin , aynı zamanda 1. mertebeden sıfırdan farklı bir matris olduğunu da gösterir. Yani bu durumda A , (2.4) 'deki matrisle aynı sıfır modeline sahiptir.

Uygun satır ve sütun işaretlemesi ile , farz edebiliriz ki A'nın her köşegen elmanı -1 dir ve A'nın ilk sütunundaki tüm kapalı - köşegen girişleri 1 dir. Şimdi S^2 NS işaretli digraf S(A) ' da $2\le j<i\le n$ şartını sağlayan herhangi bir yay (i,j) alalım .

$(i,j)+(j,1)$ ve $(i,1)$ yolları , aynı ilk köşeyi i' ye ve aynı son köşe 1 ' e sahiptir. , böylece S^2NS işaretli digrafın tanımından dolayı aynı işarete sahiptirler.

Bu, yay (i,j)' nin işaretinin 1 olduğu anlamına gelir ve böylece $1 \le j \prec i \le k$ şartını sağlayan tüm kapalı köşegen elemanları B_{ij} , 1 dir. Yani A, (3.2) formunda bir matristir. (uygun satır ve sütun yer değişimleri ve işaretlemeleri yapıldıktan sonra)

Teorem 3.1.3.

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}n(n+1) & n=1 \text{ veya } n\ge 4\\ 3n-2 & n=2 \text{ veya } 3\end{cases}$$

fonksiyonu (3.3) eşitsizliğinin sağ taraftaki kısmı olsun. Öyleyse $n \le k \le f(n)$ şartını sağlayan her k tamsayısı için, $N(A)=k$ olan n. mertebeden bir S^2NS, A matrisi bulunur. [3]

İspat:

A_0 , $N(A_0)=f(n)$ eşitliğini sağlayan n. mertebeden bir S^2NS matris olsun. Genelliği kaybetmeden , A_0'ın tüm köşegen girişlerinin negatif olduğunu varsayabiliriz.

Şimdi $n \le k \le f(n)$ eşitsizliği $0 \le f(n)-k \le f(n)-n$ anlamına gelir. A matrisini , A_0 matrisinden , A_0 ın $f(n)-k$ kapalı - köşegen sıfırdan farklı girişlerini (tüm $f(n)-n$ kapalı - köşegen sıfırdan farklı girişler arasında) sıfırla yer değiştirerek elde edilen bir matris kabul edelim. Öyleyse açıktır ki $N(A)=k$ ve A' nın tüm köşegen girişleri negatiftir. Şimdi işaretli digraf $S(A)$ bir S^2NS işaretli digraftır. Çünkü o, S^2NS işaretli digraf $S(A_0)$'ın bir işaretli alt digrafıdır. Bu nedenle teorem 2.2.1' den ,

A aynı zamanda n. mertebeden bir S^2NS matristir.

3.2.İşaretli Genelleştirilmiş Tersli Matrislerle Hadamard Çarpımı

Tanım3.2.1. Hadamard çarpımı

$A=\left(a_{ij}\right)$ ve $B=\left(b_{ij}\right)$ $m\times n$ matrisler olsun. $AoB=\left[a_{ij}b_{ij}\right]_{m\times n}$ çarpımına A ve B matrisinin Hadamard çarpımı denir $\left(i=1,...,m;\ j=1,...,n\right)$

Teorem3.2.1.

$A=\left(a_{ij}\right)$ matrisi işaretli GI'sı bulunan $m\times n$ matris olsun öyleyse $A^{+}oA^{T}\geq 0$ dır. [3]

İspat:

$n\leq m$ kabul edelim (aksi taktirde A yerine A^{T} yi hesaba katabiliriz)

İlk olarak A'nın $S^{2}\text{NS}$ matris olduğu durumun sonucunun aslında lemma 2.2.1 ve teorem 2.2.2' nin sonucunda bulunduğunu göz önünde bulunduralım. Daha sonra $\rho\left(A\right)=n$ ve $\rho\left(A\right)\prec n$ durumlarını göz önüne alalım.

İlk olarak $\rho\left(A\right)=n$ olduğunu varsayalım. $1\leq q\leq m$ ve $1\leq p\leq n$ yi sağlayan herhangi p,q alıp, $\left(A^{+}\right)_{pq}.a_{qp}\geq 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer $\left(A^{+}\right)_{pq}=0$ ise , o zaman sonuç besbelli doğrudur. Bu yüzden $\left(A^{+}\right)_{pq}\neq 0$ olduğunu varsayalım.

A'nın satırlarını uygun bir şekilde yer değiştirerek , $q=1$ olduğunu varsayabiliriz. , $1\in T\subseteq\left\{1,...,m\right\}$ yi sağlayan bir T indeks kümesi bulunur, öyle ki $A\left[T|:\right]$ bir $S^{2}\text{NS}$ matristir ve $\left(A\left[T|:\right]^{-1}\right)_{p1}\neq 0$ olur. . Böylece

$$\operatorname{sgn}\left(A^{+}\right)_{p1}=\operatorname{sgn}\left(A\left[T|:\right]^{-1}\right)_{p1} \tag{3.5}$$

Yazılabilir. Diğer taraftan, sonuç $S^{2}\text{NS}$ matris $A\left[T|:\right]$ için doğrudur.

Ayrıca;

$$\left(A\left[T|:\right]^{-1}\right)_{p1}.\left(A\left[T|:\right]\right)_{1p}\geq 0 \tag{3.6}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Fakat

$$\left(A\left[T\middle|:\right]\right)_{1p} = a_{1p}$$

vardır. Bu yüzden istendiği gibi (3.5) ve (3.6) ifadelerine göre

$$\left(A^{+}\right)_{p1}.a_{1p} \geq 0 \text{ dır.}$$

Daha sonra $\rho(A) \prec n$ olduğunu varsayalım.

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

yazabiliriz.Burada hem B, hem D^T en fazla sütun terim rankına ve işaretli GI 'ya sahiptirler. ve

$$A^{+} = \begin{pmatrix} B^{+} & 0 \\ * & D^{+} \end{pmatrix}$$

olur. İlk durum nedeniyle , $B^{+}oB^{T} \geq 0$ ve $D^{+}oD^{T} \geq 0$ dır. Böylece;

$$A^{+}oA^{T} = \begin{pmatrix} B^{+} & 0 \\ * & D^{+} \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} B^{T} & C^{T} \\ 0 & D^{T} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B^{+}oB^{T} & 0oC^{T} \\ * \; o \; 0 & D^{+}oD^{T} \end{pmatrix} \geq 0$$

olur.

4.ACYLİC İKİLİ GRAFLI MATRİSLERİN MOORE-PENROSE TERSLERİ

4.1 Devirsiz ikili graflı matrisler için Moore-Penrose terslerin bir formülü

Tanım4.1.1.

$m,n \geq 1$ verilmiş olsun . $U = \{u_1,...,u_m\}$ ve $V = \{v_1,...,v_m\}$ ayrık kümeler olsun . Her $m \times n$ türünde $A = [a_{ij}]$ matrisi için, $B(A)$ köşeleri $U \cup V$ olan ve kenarları $\{\{u_i, v_j\} | u_i \in U, v_j \in V, a_{ij} \neq 0\}$ olan ikili graf olsun . β sonlu devirsiz ikili grafların ailesini belirtsin.

Tanım 4.1.2. (Eşleştirme)

Bir ikili graftaki eşleştirme iki tanesi komşu olmayan kenarların alt kümesidir.

Eğer bir eşleştirme E, tüm köşeleri örtüyorsa, o zaman E' ye "mükemmel eşleştirme" denir.

Lemma 4.1.1.

Bir B ikili grafı devirsizdir $\Leftrightarrow$ B nin her alt grafı en fazla bir tane mükemmel eşleştirme içerir.[4]

Lemma 4.1.1' den , eğer A bir mxn matris ise,

$B(A) \in \beta \Leftrightarrow A$ 'nın her kare alt matrisinin en fazla bir köşegeni vardır.

Bu tür mxn matrislerin tümünün ailesini A ile gösteririz.

Lemma 4.1.2

$A \in$ A ' nın her alt matrisinin rankı , onun terim rankına eşittir.

$1 \leq k \leq l$ şartını sağlayan her k ve l tamsayısı için ; $Q_{k,l}$, $1,...,l$ tamsayılarından k 'nın artan dizilerinin ailesini göstersin.

Eğer $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_k) \in Q_{k,l}$ ve $i \notin \gamma$ ise; $(i,\gamma),(i,\gamma_1,...,\gamma_k)$ sıralı kümesini göstersin.

$A = [a_{ij}]$, satır ve sütunları sırasıyla $1,...,m$ ve $1,...,n$ tamsayıları ile sınıflanan bir $m \times n$ matris ise ve γ, δ sırasıyla $1,...,m$ ve $1,...,n$ ' in sıralı alt kümeleri ise , o zaman $A[\gamma|\delta]$, (i,j) . girişi $a_{\gamma_i \delta_j}$ ' ye eşit olan $|\gamma| \times |\delta|$ matrisi göstersin.

$A\left[i:\gamma\middle|j:\delta\right]$ sırasıyla $(i:\gamma)ve(j:\delta)$ düzenli satır ve sütunlara sahip iken, $A\left[\gamma\middle|\delta\right]$' nin , A'nın γ satırlı ve δ sütunlu alt matrisi olduğuna dikkat edin

Teorem 4.1.1

A, $r\geq 2$ ranklı bir mxn matris olsun . $A^{+}=\left[\alpha_{ij}\right]$, A' nın Moore – penrose tersini göstermek üzere,

$$\alpha_{ji}=\frac{\sum_{\gamma\in Q_{r-1,m},i\notin\gamma}\ \sum_{\delta\in Q_{r-1,n},j\notin\delta}\ \det A\left[\gamma\middle|\delta\right]\det A\left[i:\gamma\middle|j:\delta\right]}{\sum_{\rho\in Q_{r,m}}\ \sum_{\tau\in Q_{r,n}}\left(\det A\left[\rho\middle|\tau\right]\right)^{2}}$$

yazılabilir. [4]

Lemma 4.1.3' de $A=\left[a_{ij}\right]\in$ A , $r\geq 2$ ranklı bir matris , $1\leq i\leq m$ ve $1\leq j\leq n$ ve $i\notin\gamma$ ve $j\notin\delta$ olmak üzere $\gamma\in Q_{r-1,m}$ ve $\delta\in Q_{r-1,n}$ olduğunu farzedelim.

Örnek4.1.1.

$A=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\1&2&2&3\end{bmatrix}$ matrisinin rankı $r=2$ dir ve Teorem4.1.1' de $m=2$, $n=4$ $j=1$ ve $i=2$ alırsak ,

$$\alpha_{12}=\frac{\sum_{\gamma\in Q_{1,2},2\notin\gamma}\ \sum_{\delta\in Q_{1,4},1\notin\delta}\ \det A\left[\gamma\middle|\delta\right]\det A\left[2:\gamma\middle|1:\delta\right]}{\sum_{\rho\in Q_{2,2}}\ \sum_{\tau\in Q_{2,4}}\left(\det A\left[\rho\middle|\tau\right]\right)^{2}}$$

olur . Buradan $\alpha_{12}=5/26$ olarak bulunur. Ve diğer elemanlarda aynı şekilde bulunarak

$$A^{+}=\begin{bmatrix}-8/26&5/26\\-16/26&10/26\\2/26&2/26\\12/26&-1/26\end{bmatrix}$$

olur.

Lemma 4.1.3.

Eğer $\det A\left[\gamma|\delta\right]\det A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\neq 0$ ise; $B\left(A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\right)$, u_i'den v_j'ye bir yol ve eşleştirme içerir ki, bu yol ve eşleştirme $B\left(A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\right)$ ' nin bütün köşelerini kaplar ve nokta - ayrıktır. [4]

İspat:

Eğer $\det A\left[\gamma|\delta\right]\det A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\neq 0$ ise, o zama $A\left[\gamma|\delta\right]$ ve $A\left[i:\gamma|j:\delta\right]$'nin her biri bir köşegen içerir .Böylece , $B\left(A\left[\gamma|\delta\right]\right)$ ve $B\left(A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\right)$'nin her biri bir eşleştirme içerir. Bu eşleştirmelere sırasıyla $E_1 ve E_2$ diyelim .

G, $V\left(B\left(A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\right)\right)$ nokta kümeli ve $E_1\cup E_2$ kenar kümeli ikili grafı göstersin. Ve $\hat{G}$, G' nin u_i veya v_j içermeyen her kenarını silerek elde edilen , G' nin diğer hiçbir kenarına komşu olmayan bir alt grafını göstersin.

$\hat{G}$ 'de , u_i ve v_j köşeleri 1. mertebedendir. Ve diğer tüm köşeler 2. mertebedendir. $B\left(A\right)\in\beta$ olduğu için , $\hat{G}$ hiçbir devir içeremez. Böylece $\hat{G}$, u_i'den v_j'ye bir yoldan oluşur. Bu nedenle, bu yolda olmayan tüm köşeleri kaplayan bir (muhtemelen boş) eşleştirme gibi, $B\left(A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\right)$ u_i'den v_j'ye olan bu yolu içerir.

Lemma 4.1.4 .

Eğer $B\left(A\left[i:\gamma|j:\delta\right]\right)$ u_i' den v_j' ye bir yol içerirse ,

$$u_i\to v_{j_1}\to u_{i_1}\to v_{j_2}\to u_{i_2}\to\ldots\to v_{j_s}\to u_{i_s}\to v_j\ ,$$

ve

$$B\left(A\left[\gamma-\{i_1,\ldots,i_s\}\middle|\delta-\{j_1,\ldots,j_s\}\right]\right)$$

matrisinin bir mükemmel eşleştirmesi E'yi içerirse,

$$\det A\left[\gamma|\delta\right]\det A\left[i:\gamma|j:\delta\right]=(-1)^s\,a_{ij_1}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\ldots a_{i_sj_s}a_{i_sj}\prod_{\{u_k,v_l\}\in E}(a_{kl})^2$$

olur. [4]

İspat:

$(i_1,...,i_s)$ sayılarını artan bir dizi oluşturmak için yeniden sıralansın , bu $\dot{I}$ ile gösterilsin. Ve Π , $(1,...,s)$ kümesinde bu yeniden sıralamayı (etkileyen , gerçekleyen) bir Permütasyon olsun .

Buna benzer şekilde, $(1,...,s)$ artan bir dizi oluşturmak için yeniden sıralansın, bu J ile gösterilsin . ve σ , $(1,...,s)$ kümesinde bu yeniden sıralamayı etkileyen bir permütasyon olsun.

$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_s j_s}$ girişleri $A\left[i\middle|j\right]$'nin bir köşegenini oluşturursun. $a_{i_1 j_2},...,a_{i_{s-1} j_s},a_{i_s j}$ girişleri $A\left[i:\dot{I}\middle|j:J\right]$' nin bir köşegenini oluşturursun. Ve $\left\{a_{kl}\middle|(k,l)\in E\right\}$ girişleri $A\left[\gamma-\dot{I}\middle|\delta-J\right]$' nin bir köşegenini oluşturursun.

Lemma 4.1.1' den, bunlar bu matrislerin tek köşegenleridir.Ve $A\left[\gamma\middle|\delta\right]$, $A\left[i:\gamma\middle|j:\delta\right]$matrislerinin her birinin tam olarak bir köşegeni vardır. Böylece, determinantların işaretlerini hesaba katarak ,

$$\det A\left[\gamma\middle|\delta\right]0\det A\left[i\middle|j\right]\det A\left[\gamma-\dot{I}\middle|\delta-J\right]$$

$$\det A\left[i:\gamma\middle|j:\delta\right]=\det A\left[i:\dot{I}\middle|j:J\right]\det A\left[\gamma-\dot{I}\middle|\delta-J\right]$$

olur.

$A\left[i_1,...,i_s\middle|j_1,...,j_s\right]$ matrisinde, $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_s j_s}$ girişleri ana köşegende bulunurlar. Böylece,

$$\det A\left[i\middle|j\right]=\operatorname{sgn}(\Pi)\det A\left[i_1,...,i_s\middle|j_1,...,j_s\right]\operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$=\operatorname{sgn}(\Pi)a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_s j_s}\operatorname{sgn}(\sigma)$$

olur ve $A\left[i,i_1,...,i_s\middle|j,j_1,...,j_s\right]$ matrisinde, $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} ... a_{i_s j_s}$, girişlerini içeren köşegene karşılık gelen permütasyon , s+1 uzunluğunda bir devirdir.

Böylece

$$\det A\left[i:\dot{I}\,\middle|\,j:J\right]=\operatorname{sgn}(\Pi)\det A\left[i,i_1,...,i_s\,\middle|\,j,j_1,...,j_s\right]\operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$=\operatorname{sgn}(\Pi)(-1)^{(s+1)-1}\,a_{ij_1}a_{i_1j_2}...a_{i_{s-1}j_s},a_{i_sj}\operatorname{sgn}(\sigma)$$

olur.Bunun sonucu olarak :

$$\det A\left[\gamma\,\middle|\,\delta\right]\det A\left[i:\gamma\,\middle|\,j:\delta\right]$$

$$=\det A\left[\dot{I}\,\middle|\,J\right]\det A\left[i:\dot{I}\,\middle|\,j:J\right]\left(\det A\left[\gamma-i\,\middle|\,\delta-j\right]\right)^2$$

$$=\operatorname{sgn}(\pi)a_{i_1j_1}...a_{i_sj_s}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\Pi)(-1)^s$$

$$\times a_{ij_1}a_{i_1j_2}...a_{i_sj}\operatorname{sgn}(\sigma)\coprod_{\{u_k,v_l\}\in E}(a_{kl})^2$$

$$=(-1)^s\,a_{ij_1}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}...a_{i_sj_s}a_{i_sj}\prod_{\{u_k,v_l\}\in E}(a_{kl})^2$$

olur.

$k\geq 1$ ve herhangi bir ikili graf B için , $M_k(B)$ B deki k tane kenar içeren eşleştirmelerin ailesini göstersin

Teorem 4.1.2.

$A\in \mathrm{A}$ $r\geq 2$ rankı olan bir mxn matris olsun. ve $A^+=\left[\alpha_{ij}\right]$ A 'nın Moore – penrose tersini göstersin . Eğer $B(A)$, uzunluğu $2s+1$ olan ve $s\geq 0$ ı sağlayan u_i'den v_j'ye bir p yolu içeriyorsa ,

$$u_i\to v_{j_1}\to u_{i_1}\to v_{j_2}\to u_{i_2}\to ...v_{j_s}\to u_{i_s}\to v_j$$

o zaman,

$$\alpha_{ji}=(-1)^s\,a_{ij_1}a_{i_1j_1}a_{i_1j_2}...a_{i_sj_s}a_{i_sj}\frac{\sum\limits_{\substack{E\in M_{r-s-1}(B(A))\\ V(E)\cap V(P)=\varnothing}}\ \prod\limits_{\{u_k,v_l\}\in E}(a_{kl})^2}{\sum_{F\in M_r}(B(A))\prod_{\{u_k,v_l\}\in F}(a_{kl})^2}$$

olur .Aksi taktirde, $\alpha_{ji}=0$ dır. [4]

İspat:

İlk olarak teorem 4.1.1 teki α_{ji} ibaresindeki

$$N = \sum_{\gamma \in Q_{r-1,m},\, i \notin \gamma} \; \sum_{\delta \in Q_{r-1,n},\, j \notin \delta} \det A\left[\gamma \middle| \delta\right] \det A\left[i:\gamma \middle| j:\delta\right]$$

numeratörünü ele alalım. Lemma. 4.1.3 ve 4.1.4' den , N 'nin sıfırdan farklı terimleri , $B(A)$ 'nın u_i ' den v_j ' ye $2s+1$ uzunluğunda bir p yolu içerdiği ve $r-s-1$ kenarlı , kenarları p 'ye komşu olmayan bir eşleştirme içerdiği örneklere tam olarak uyar.

Eğer i'den j'ye yol yoksa , o zaman $N=0$ dır. Böylece teorem 4.1.3 ' den , $\alpha_{ji}=0$ dır. u_i 'den v_j ' ye bir p yolu varsa ,

$$u_i \to v_{j_1} \to u_{i_1} \to v_{j_2} \to u_{i_2} \to \ldots \to v_{j_s} \to u_{i_s} \to v_j$$

o zaman bu , bu şekildeki tek yoldur. ($B(A)$ devirsiz olduğu için)

Böylece lemma 4.1.4' den ,

$$N = (-1)^s a_{ij_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \ldots a_{i_s j_s} a_{i_s j} \sum_{\substack{E \in M_{r-s-1}(B(A)) \\ V(E) \cap V(P) = \varnothing}} \; \prod_{\{u_k, v_l\} \in E} (a_{kl})^2$$

olur. Şimdi α_{ji} için olan ifadedeki paydasını dikkate alalım, ve $\rho \in Q_{r,m}$ ve $\tau \in Q_{r,n}$ verilsin. Lemma 4.1.1' den

$$\det A\left[\rho \middle| \tau\right] \neq 0 \;\Leftrightarrow\; B(A\left[\rho \middle| \tau\right])$$

ifadesinin bir F eşleştirmesi varsa , bu doğruysa , $c = \pm 1$ olmak üzere

$$\det A\left[\rho \middle| \tau\right] = c \prod_{\{u_k, v_l\} \in F} a_{kl}$$

olur ve böylece ,

$$\sum_{\rho \in Q_{r,m}} \; \sum_{\tau \in Q_{r,n}} (\det A\left[\rho \middle| \tau\right])^2 = \sum_{F \in M_r(B(A))} \; \prod_{\{u_k, v_l\} \in F} (a_{kl})^2$$

olur ve teorem 4.1.1 ispatı neticelendirir.

4.2 Bir Devirsiz İkili Grafdaki Gerekli ve Yeterli Koşullar

Sonuç 4.2.1

$A \in \mathrm{A}$, $r \geq 2$ ranklı bir mxn matris olsun . ve $A^{+} = \left[\alpha_{ij} \right]$ olsun. Öyleyse her $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için, α_{ji} girişi sıfırdan farklıdır ancak ve ancak $\left\{ u_i, v_j \right\}$ $B(A^{+})$ ' nın bir kenarıdır ancak ve ancak $B(A)$, u_i 'den v_j 'ye $2s+1$ uzunluğunda $s \geq 0$ olan bir p yolu içerir.

$$u_i \to v_{j_1} \to u_{i_1} \to v_{j_2} \to u_{i_2} \to \ldots \to v_{j_s} \to u_{i_s} \to v_j$$

ve en az bir E eşleştirmesi içerir. (Bu eşleştirmenin hiçbiri p 'ye komşu olmayan $r-s-1$ kenarı vardır) Eğer böyle bir yol varsa , o zaman

$$(-1)^{s} a_{ij_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \ldots a_{i_s j_s} a_{i_s j}$$

ile aynı işarete sahiptir.Ve

$A^{+}\left[j_1, \ldots, j_s, j \middle| i, i_1, \ldots, i_s \right]$ matrisinin ana köşegenin üstünde veya altında sıfır girişi yoktur. $[4]$

İspat:

Eşitsizlikler teorem 4.1.2 'den hemen çıkar . İkinci kısmı ispatlamak için , farzedelim ki $B(A)$ sonuçtaki ifadede verildiği gibi , bir p yolu ve E eşleştirmesi içerir.

Teorem 4.1.2'den α_{ji} ile $(-1)^{s} a_{ij_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \ldots a_{i_s j_s} a_{i_s j} \neq 0$ aynı işaretlidir. $s = 0$ ise , $A^{+}\left[j_1, \ldots, j_s, j \middle| i, i_1, \ldots, i_s \right]$ alt matrisi , tek sıfırdan farklı giriş olan α_{ji} 'den oluşur. Böylece $s \geq 1$ eşitsizliğini dikkate alarak , varsayalım ki k , $1 \leq k < l \leq s$ koşuluna uyan bir tamsayıdır.

Öyleyse;

$$u_{i_k} \to v_{j_{k+1}} \to u_{i_{k+1}} \to v_{j_{k+2}} \to u_{i_{k+2}} \to \ldots \to v_{j_{l-1}} \to u_{i_{l-1}} \to v_{j_l} \ ,$$

u_{i_k} , dan v_{j_l} , ye $2s'+1$ uzunluğunda , $s' = 1-k-1$ eşitliğini sağlayan bir p' yoldur.

$$E \cup \left\{ \{u_i, v_{j_1}\}, \{u_{i_1}, v_{j_2}\}, ..., \{u_{i_{k-1}}, v_{j_k}\}, \{u_{i_1}, v_{j_{j+1}}\}, ..., \{u_{i_{s-1}}, v_{j_s}\}, \{u_{i_s}, v_{j_1}\} \right\} \qquad r - s' - 1$$

kenarı olan ve bunların hiçbiri p' ile komşu olmayan bir eşleştirmedir. Çoktan kurulmuş olan eşitlikler , $\alpha_{j_l i_k} \neq 0$ ' ı verir.

Benzer nedenlerden, her $1 \leq l \leq s$ için , $\alpha_{j_1 i} \neq 0$ ve $\alpha_{j i_1} \neq 0$. Bir $\{u_i, v_j\}$ kenarının, $B(A)$ 'daki r kenarlı hiçbir eşleştirmede bulunmadığı , r kenarlı en az bir eşleştirmede bulunduğu veya r kenarlı her eşleştirmede bulunduğu gibi bazı sonuçlar şimdi dikkate alınıyor.

Önerme 4.2.1.

$A \in \mathrm{A}$ $r \geq 2$ ranklı bir matris olsun , ve $A^+ = [\alpha_{ij}]$ olsun. $\{u_i, v_j\}$ $B(A)$ 'nın bir kenarı olsun. Öyleyse , $\{u_j, v_i\}$ $B(A^+)$ ' nın bir kenarıdır ancak ve ancak $\{u_i, v_j\}$, $M_r(B(A))$ da bir takım eşleştirmenin içinde bulunur. Eğer $\{u_i, v_j\}$ $M_r(B(A))$' daki her eşleştirmenin içinde bulunuyor ise , $\alpha_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}$ dır. [4]

Önerme 4.2.2.

$A \in \mathrm{A}$ $r \geq 2$ ranklı bir matris olsun ve $A^+ = [\alpha_{ij}]$ olsun.

$\{u_i, v_j\}$, B(A) ' nın , $M_r(B(A))$ da ki herhangi bir eşleştirmede bulunmayan bir kenarı olsun. $E \in M_r(B(A))$ ise , o zaman E'nin tek köşeleri $\{u_i, v_{i_E}\}$ ve $\{u_{i_E}, v_j\}$ bulunur. Öyle ki $\{u_{i_E}, v_{j_E}\}$ $B(A^+)$ ' nın bir kenarıdır. Ve bu durumda $\{u_{j_E}, v_{i_E}\}$ $B(A)$ 'nın bir kenarı değildir. [4]

Uyarı4.2.1

Bu bölümün A^+ da ki sonuçları, en az 2 ranklı bir $A \in \mathrm{A}$ matrisi ile ilgilidir. Tamamlanması için , sıfır ve bir ranklı durumlar şimdi dikkate alınacak A 'nın rankı 0 ise , $A = 0$ dır ve $A^+ = 0$ dır .

A ' nın rankı 1 ise , lemma4.1.2' den v sıfırdan farklı bir vektör (ve 0 alt matrisi , ya m ya da n 1 ise mantıksız) olmak üzere A matrisi ya $[v \ 0]$ formunda yada $[v \ 0]^{\mathrm{T}}$ formunda bir matrise permütasyon benzerdir.

Bu nedenle $\hat{v} = v/\|v\|^2$ olmak üzere; A^+ , $[\hat{v}\ 0]^T$ formunda yada $[\hat{v}\ 0]$ formundadır. [4]

Örnek 4.2.1

Yukarıdaki sonuçlar bir 5x5 $A \in$ A matrisi ile açıklanır. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 \end{bmatrix}$$

$B(A) \in \beta$ A matrisi , Moore -Penrose tersi A^+ ve birleşik ikili graflar, $B(A)$ ve $B(A^+)$ şekil 4.1 de gösterilmiştir. $B(A)$ eşleştirmesinin en büyük eleman sayısı 4 tür.

Böylece lemma 4.1.2' den A'nın rankı r=4 tür. $M_4(B(A))$'daki eşleştirmeler, $B(A)$' nın alt grafları olan B_1, B_2, B_3, veB_4' ün her birindeki kenarların kümesidir.

Şekil 4.1'de $\{u_4, v_2\}$ kenarı bunların hiçbirinde bulunmazken , $\{u_1, v_2\}$ kenarının dördünde de bulunduğunu dikkate alınız. Öneri 4.2.1. den , A^+' nın α_{21} girişi $\frac{1}{a_{12}}$ ye eşittir. Ve A^+'nın α_{24} girişi sıfır dır. A^+'nın α_{51} girişini hesaplamak için $u_1 \to v_2 \to u_4 \to v_5$ in $s = 1$ olmak şartıyla $2s + 1 = 3$ uzunluğunda u_1'den v_5' e $B(A)$ da bir p yolu olduğuna dikkat edin.

$B(A)$' da ki

$$\{\{u_2, v_3\}, \{u_3, v_4\}\}, \{\{u_2, v_1\}, \{u_3, v_4\}\}, \{\{u_2, v_3\}, \{u_5, v_4\}\} ve$$
$$\{\{u_2, v_1\}, \{u_5, v_4\}\}$$

eşleştirmelerinin her biri $r - s - 1 = 2$ kenar içerir , bunların hiçbiri p' ye komşu değildir. Ve bu tür başka matris yoktur. Böylece teorem 4.1.2 'den

$$\alpha_{51} = (-1)^s a_{12} a_{42} a_{45} \frac{a_{23}^2 a_{34}^2 + a_{21}^2 a_{34}^2 + a_{23}^2 a_{54}^2 + a_{21}^2 a_{54}^2}{s}$$

olur.

Burada

$$S=\left(a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}\right)^2+\left(a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}\right)^2$$
$$+\left(a_{12}a_{23}a_{54}a_{45}\right)^2+\left(a_{12}a_{21}a_{54}a_{45}\right)^2$$

($M_4(B(A))$ da ki 4 eşleştirmeye benzer şekilde)

olur. Ve bu nedenle

$$\alpha_{51}=-\frac{a_{12}a_{42}a_{45}}{\left(a_{12}a_{45}\right)^2}=-\frac{a_{42}}{a_{12}a_{45}}$$

olur.Bu şekilde

$$A^+=\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{21}}{a_{21}^2+a_{22}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{23}}{a_{21}^2+a_{23}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{34}}{a_{24}^2+a_{34}^2} & 0 & \frac{a_{54}}{a_{34}^2+a_{54}^2} \\ -\frac{a_{42}}{a_{12}a_{43}} & 0 & 0 & \frac{1}{a_{45}} & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

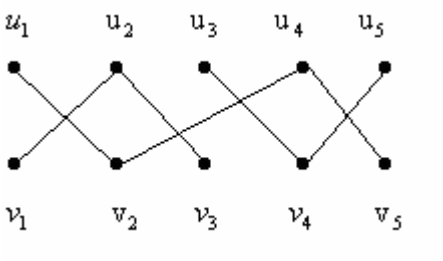
p yolunun $2s+1$ uzunluğu ($s=1$ olmak üzere) olduğu için , ve $B(A)$ $r-s-1=2$ kenarlı, kenarlarının hiçbiri p'ye komşu olmayan en az bir eşleştirme içerdiği için (örneğin $\{\{u_2,v_3\},\{u_3,v_4\}\}$ eşleştirmesi) , sonuç4.2.1; $A^+\left[2.5\middle|1.4\right]$ alt matrisinin , ana köşegenin üzerinde ve altında yalnızca sıfırdan farklı girişleri olduğunu gösterir.

Gerçekten de durum şudur:

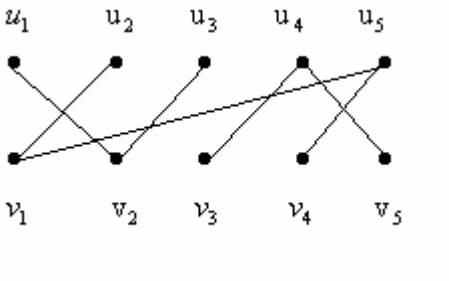
$$A^+\left[2.5\middle|1.4\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{12}} & 0 \\ -\frac{a_{42}}{a_{12}a_{45}} & \frac{1}{a_{45}} \end{bmatrix}$$

olur.

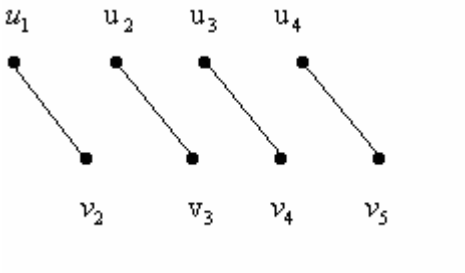
Son olarak $\{u_4, u_2\}$ kenarı $M_4(B(A))$'da ki herhangi bir eşleştirmede bulunmuyorsa, ve $M_4(B(A))$ da $\{u_4, v_5\} ve \{u_1, v_2\}$ kenarlarını içeren bir eşleştirme bulunuyorsa , öneri 4.2.2 ' den $\{u_5, v_1\}$ kenarı $B(A^+)$ da bulunur. [4]



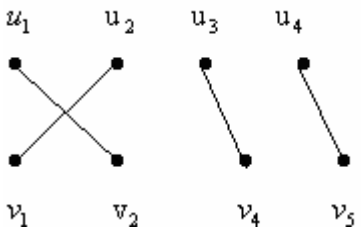
$B(A)$



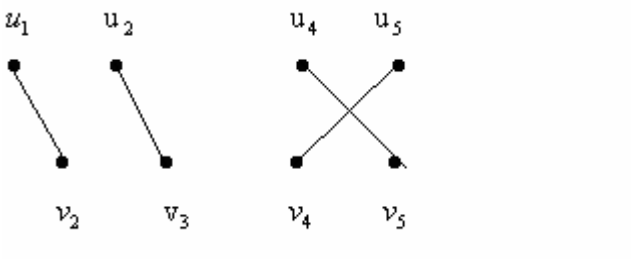
$B(A^+)$



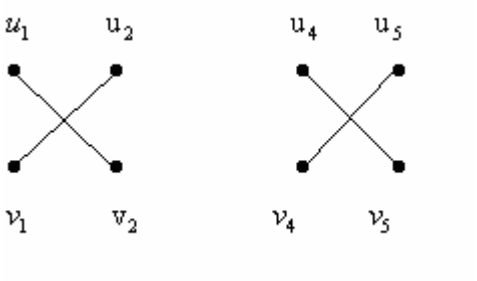
B_1



B_2



B_3



B_4

Şekil4.1: Örnek 4.2.1 için ikili graflar.

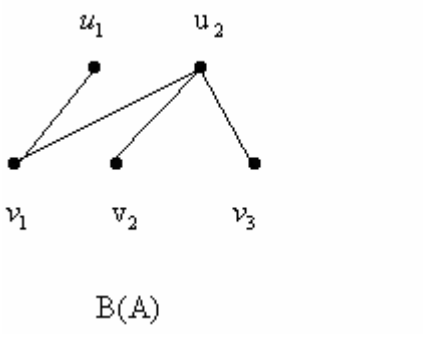
Örnek4.2.2.

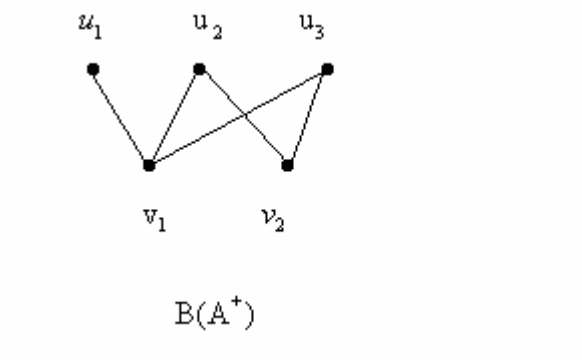
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathrm{A}^{+}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 \\ \dfrac{-a_{21}a_{22}}{a_{11}(a_{22}^2+a_{23}^2)} & a_{22}^2+a_{23}^2 \\ \dfrac{-a_{21}a_{23}}{a_{11}(a_{22}^2+a_{23}^2)} & a_{22}^2+a_{23}^2 \end{bmatrix}$$

olur ki bu matrisler için şekil 4.2 gösterir ki : $A \in \mathrm{A}$ ve A^{+} illa ki aynı sayıda sıfırdan farklı giriş içermez ve A^{+}'nın A 'nın bir üyesi olması gerekmez. [4]





Şekil 4.2: Örnek 4.2.2 için ikili graflar

Teorem. 4.2.1.

$A \in$ A ' nın her alt matrisinin bir işaretli genelleşmiş tersi vardır. [4]

İspat:

Eğer $A \in$ A 'nın rankı en fazla 1 ise , görüş 4.2.1' den, A ' nın bir işaretli genelleştirilmiş tersi vardır. Eğer $A \in$ A 'nın rankı 2 veya daha fazla ise, sonuç4.2.1' den A 'nın bir işaretli genelleştirilmiş tersi vardır. A ' nın her alt matrisi $\hat{A}$ için, $A \in$ A olduğundan, sonuç gelir.

Örnek 4.2.1 ve 4.2.2 ' nin her biri için , A^+ ' nın her girişinin işaretinin , A 'nın girişlerinin işaretlerince belirlendiğine dikkat ediniz. Böylece teorem 4.2.1 de varsayıldığı gibi , her A matrisinin işaretli genelleştirilmiş tersi vardır

Eğer $\{u_i, v_j\}$, $B(A)$ ' nın bir kenarı ise , O zaman öneri 4.2.2 $\{u_j, v_i\}$ 'nin hangi koşullara $B(A)$ 'nın bir kenarı olduğu açıkça belirtilir. Sıradaki sonuç $B(A^+) = B(A^T)$ durumunun bir tanımlamasını verir.

Teorem 4.2.2.

$B \in \beta$ olsun ve r , B deki bir eşleştirmenin en büyük eleman sayısı olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $B(A) = B$ olan her A matrisi için , $B(A^+) = B(A^T)$;

(ii) $B(A) = B$ olan her negatif olmayan A matrisi için , A^+ negatif değildir;

(iii) B, $s \geq 1$ olmak üzere $2s+1$ uzunluğunda bir p yolu

$$u_i \to v_{j_1} \to u_{i_1} \to v_{j_2} \to u_{i_2} \to \ldots \to v_{j_s} \to u_{i_s} \to v_j$$

ve $r-s-1$ kenarlı , kenarlarının hiçbiri p ' ye komşu olmayan bir eşleştirme içerir. [4]

İspat:

$r \leq 1$ ise , tüm bu ifadeler doğrudur ve böylece denkti $r \geq 2$ kabul edelim. A , $B(A) = B$ olan bir matris olsun.Varsayalım ki (i)deki ifade doğrudur, öneri4.2.1 den , B 'deki her kenar $M_r(B(A))$ ' da ki bazı eşleştirmelerde bulunur. (iii) ifadenin yanlış olduğunu varsayalım .

O zaman $B(A)$, $s \geq 1$ olmak üzere $2s+1$ uzunluğunda bir p yolu

$$u_i \to v_{j_1} \to u_{i_1} \to v_{j_2} \to u_{i_2} \to \ldots \to v_{j_s} \to u_{i_s} \to v_j$$

içerir ve $r-s-1$ kenarlıdır. Kenarlarının hiçbiri

$$u_i, v_{j_1}, u_{i_1}, v_{j_2}, u_{i_2}, \ldots, v_{j_s}, u_{i_s}, v_j$$

içermeyen bir E eşleştirmesi içerir.

Sonuç4.2.1' den , A^+ 'daki α_{ji} girişi sıfırdan farklıdır. $B(A^T) = B(A^+)$ olduğu için , A ' nın a_{ij} girişi sıfırdan farklıdır.

Böylece $B(A)$,

$$u_i \to v_{j_1} \to u_{i_1} \to v_{j_2} \to u_{i_2} \to \ldots \to v_{j_s} \to u_{i_s} \to v_j \to u_i$$

devrini içerir. Bu bir çelişkidir. , çünkü $B(A) \in \beta$ dır . Bu nedenle , (i). İfade , (iii). İfadeyi gerektirir. (iii) . ifadenin (i) . ifadeyi gerektirdiğini ispatlamak için , varsayalım ki (i) . ifade doğru değildir. $B(A^+) \neq B(A^T)$ olsun . Öyleyse $B(A^T)$, $B(A^+)$ 'nın olmayan bir kenar içerir veya $B(A^+)$, $B(A^T)$ ' nın olmayan bir kenar içerir. Birincisi doğru ise , öneri 4.2.1' den bu kenar , r kenarlı B ' deki

herhangi bir eşleştirmede bulunmaz. Öneri 4.2.2' nin ispatından , (iii) . ifade yanlıştır.

Diğer yandan eğer $\{u_j, v_i\}$, $B(A^+)$' nın bir kenarı ise ama $B(A^T)$' nın bir kenarı değilse, $\{u_i, v_j\}$ $B(A)$' nın bir kenarı değildir. Sonuç 4.2.1' den , $s \geq 1$ olmak üzere $2s+1$ uzunluğunda u_i' den v_j' e bir yol vardır ve uygun bir eşleştirme vardır. (iii) ifade ile çelişir. Tersini alırsak, (iii). ifade (i). İfadeyi gerektirir.

(ii) ve (iii) ifadelerin denkliğini ispatlamak için ; A, $B(A) = B$ şartını sağlayan bir negatif olmayan matris olsun . Eğer (iii). ifade doğru ise , o zaman sonuç 4.2.1' den, A^+'nın her sıfırdan farklı girişi, $s = 0$ olan $2s+1$ uzunluğunda B 'de bir yola ve B 'de en az bir uygun eşleştirmeye karşılık gelir. Sonuç 4.2.1'den, A^+' nın sıfırdan farklı girişleri pozitiftir.

Böylece (iii). ifade (ii). ifadeyi gerektirir. Tersini ispatlamak için, (iii). ifadenin doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda, B, $s \geq 1$ olan $2s+1$ uzunluğunda bir yol içerir ve (iii). ifadede tanımlanan özelliklerde bir E eşleştirmesi içerir. $s = 1$ ise, sonuç 4.2.1' den, $\alpha_{ji} < 0$ dır ve (ii). ifade yanlıştır. $s \geq 2$ ise , B , $s' = 1$ olan $2s'+1$ uzunluğundaki $u_i \to v_{j_1} \to u_{i_1} \to v_{j_2}$ yolunu ve

$$E \cup \left\{ \{u_{i_2}, v_{j_3}\}, ..., \{u_{i_{s-1}}, v_{j_s}\}, \{u_{i_s}, v_j\} \right\}$$

eşleştirmesini içerir. (Bu , sonuç 4.2.1'den , A^+'nın $\alpha_{j_2 i}$ girişinin negatif olmasını gerektirir. Böylece, (ii). ifade yanlıştır. Tersini alırsak, (ii) . ifade (iii). ifadeyi gerektirir. Yani üç ifadede denktir.

Teorem 4.2.2'nin koşullarının Örnek 4.2.1 veya örnek 4.2.2 deki $B(A)$ tarafından sağlanmadığına , fakat örnek 4.2.3 için sağlandığına dikkat ediniz.

Örnek 4.2.3.

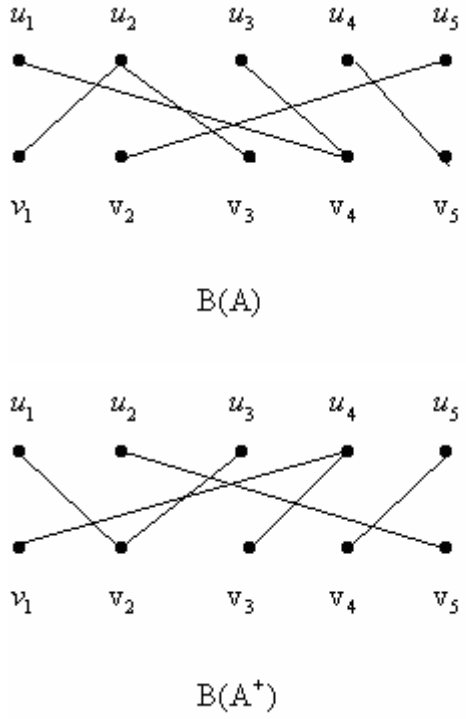
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. 5x5 $A \in$ A matrisi , A^+'nın moore-penrose tersi ve $B(A)$ ve $B(A^+)$'nın birleşmiş ikili grapları , şekil 4.3 de gösterilmiştir. Teorem 4.2.1'de öne sürüldüğü üzere , A' nın işaretli genelleştirilmiş tersi vardır.

A sıfırdan farklı ise , teorem 4.1.2 ile

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{21}}{a_{21}^2+a_{23}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{52}} \\ 0 & \frac{a_{23}}{a_{21}^2+a_{23}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{14}}{a_{14}^2+a_{34}^2} & 0 & \frac{a_{34}}{a_{14}^2+a_{34}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{45}} & 0 \end{bmatrix}$$

olur.



Şekil 4.3: Örnek 4.2.3. için ikili graflar)

$B(A)$, $s \geq 1$ olan $2s+1$ uzunluğunda yol içermediği için , teorem 4.2.2. A^+' nın girişlerinin negatif olmadığını ve $B(A^+) = B(A^T)$ olmasını gerektirir. [4]

KAYNAKLAR

[1] **Jia-Yu Shao, Hai-Ying Shan**, ”Matrices with signed generalized inverses” Linear Algebra and its Appl 322 105-127 (2001)

[2] **Jia-Yu Shao, Hai-Ying Shan**,”The solution of a problem on nonnegative signed generalized inverses” Linear Algebra and its Appl 345) 43-73 (2002)

[3] **Hai-Ying Shan, Jia-You Shao,Jin-Ling He**, ”Number nonzero entries of *SNS* matrices and matrices with signed generalized inverses” Linear Algebra and its App 373 233-239 (2003)

[4] **T.Brits a , D.D Olesky b, P.Van Den Driessche** ,”The moore-penrose inverse of matrices with an acyclic bibartite Graf” Linear Algebra and its Appl 390 47-60 (2004)

[5]**Rıchard A. Brualdı, Bryan L. Shader**, Matrices of sign-solvable linear ststems Cambrıdge Universty Pres 1995

[6] **Bozkurt Durmuş, Türen Bahri**, Linear Algebra, Sel.Ün. Yayınları, Konya, 2003

[7] **Jia-Yu Shao, Jin-Ling He** ,”Marices With Doubly signed generalized ınverses Linear Algebra and its Appl .355 71-84 (2002)

[8] **Adi Ben Israel** ,”the moore of moore-penrose ınverse” The Electronic Journal of Linear Algebra, vol.9, pp ,150-157,(2002)

[9] **Andreas Brieden a, Shawn Cokus b**,” On the hardness of efficiently approximating maximal non –L submatrices “ Linear Algebra and its Appl. 377 195-205 (2004)

[10] **Frank J. Hall a,Zhongshan Li a, Bhaskara Rao** ,”From Boolean to sign pattern matrices” Linear Algebra and its Appl 393 233-251(2004)

[11] **Ji Youmg Choı, Luz Maria Dealba, Leslie Hogben, Mandi s.Maaxwell, Amy Wangsness**,”The po matrix completıon problem” The Electronic Journal of Linear Algebra, Vol.9 ,pp. 1-20 , (2002)

[12] **Ben İsrael Adi ,GrevilleThomas N.E**.”Generalized Inverses Theory and Applications” Canadian Mathematical society ,(2002)

[14] **Arav Marina, Hall Frank J, Koyuncu Selçuk, Li Zhongshan**,”Rational realizations of the minimum rank of a sign pattern matrix”Deparment of Mathematics and Computer “

[15] **Donald W. Robinson** :"Quter inverses of matrices" Linear Algebra and its Appl 348 , 247-258 (2002)

[16]**Marcus Marvin , Minc Henryk,**A Survey of "Matrix Theory and Matrix Inequalities" (1992)