Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 22, Özel Sayı, 448-459, 2018

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 22, Special Issue, 448-459, 2018

DOI: 10.19113/sdufbed.21415

Reissner-Nordström Uzay-zaman Geometrisinde Burgers Modelleri için Şok ve Seyrelme Dalgalarının Yayılımı

Baver OKUTMUŞTUR[*1]

[1]Ortadoğu Teknik Universitesi (ODTÜ), Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 06800, Ankara

(Alınış / Received: 08.01.2018, Kabul / Accepted: 14.08.2018, Online Yayınlanma / Published Online: 10.09.2018)

Anahtar Kelimeler
Reissner-Nordströme uzay-zamanı,
Burgers modelleri,
Euler denklemleri,
Sonlu hacim yöntemleri,
Şok ve seyrelme dalgaları

Özet: Yakın zamanda Burgers denklemlerinin rölativistik modellerinin bir çok çeşidi elde edilip, bu modellerin farklı uzay-zaman geometrilerindeki versiyonları da geliştirildi. Bu makalede daha önceki çalışmalarda kullanılan teknikler geliştirilerek Reissner-Nordström uzay-zaman geometrisine uygulandı. Bunun sonucunda, enerji-momentum tensörlerinden yararlanılarak Euler ve rölativistik Burgers denklemleri elde edildi. Uzay-zamanı küresel ve elektrik yüklü bir kitle olarak tasvir eden Reissner-Nordström metriğinden elde ettiğimiz modelimizin statik çözümler içerdiğini gözlemlediğimiz bu çalışmada, bu çözümlerin davranışları da ayrıca etüt edildi. Bunun yanında sonlu hacim metodları kullanılarak şok ve seyrelme dalgalarının yayılımı bir çok nümerik hesapla gösterildi.

Propagations of Shock and Rarefaction Waves on the Reissner-Nordström Spacetimes for Burgers Models

Keywords
Reissner-Nordströme spacetime,
Burgers models,
Euler equations,
Finite volume methods,
Shock and rarefaction waves

Abstract: Recently several relativistic versions of Burgers equations are derived and developed on different spacetime geometries. In the current work, we apply the technique used in the recent works to the Reissner-Nordström spacetime geometries. As a result, by using the energy-momentum tensor equations, we obtained the Euler system and then the desired relativistic Burgers models. In this article we observed that the relativistic model, obtained from spherically symmetric, electrically charged Reissner-Nordström metric, contains static solutions. We examined these static solutions and their behaviors in detail. Besides, using the finite volume methods, we analyzed shock and rarefaction wave propagation by several numerical tests.

1. Giriş

Genel görelilik teorisinde önemli bir yeri olan Einstein alan denklemlerinin aşikar olmayan kesin çözümleri Schwarzschild tarafından kendi adıyla adlandıralacak olan küresel simetri özelliğindeki metrik kullanarak elde edildi. Reissner ise hemen sonra bu çözümlerin elektrik yüklü nesneleri de içine katarak genellemesini yaptı. Aynı zamanda, Reissner'dan bağımsız olarak Nordström da bu çözümleri elde etti; bulunan metriğe bu yüzden Reissner-Nordström metriği denildi. Bu metrik Einstein alan denklemlerine çözüm sağladığı için astrofizikte önemli bir yere sahiptir. Reissner-Nordström metriği uzay-zamanı küresel ve elektrik yüklü bir kitle olarak tasvir eder. Bu uzay-zaman, kainatı total olarak nötr olarak tanımlarken, evrendeki nesnelerin elektrik yüklü olduğunu öne sürdüğü için, Reissner-Nordström çözümü gerçek hayattaki durumla tamamen uyumlu değildir. Bunun yanında uzay-zaman kavramını anlamamız bakımından literatüre kattığı derinlik ve Einstein alan denklemlerine çözüm sağlaması bakımlarından önemlidir. Bu çalışmada Reissner-Nordström geometrisini ele alıp, metrığini ve bazı özelliklerini hatırladıktan sonra, bu uzay-zaman geometrisinde elde edeceğimiz Burgers modelimizin davranışlarını inceleyeceğiz.

Çok yönlü bir teknik olan sonlu hacim ve sonlu fark metodları, fizik ve mühendislik bilimleri alanında bir çok uygulama sahası bulmuştur. Bu yöntemler özellikle doğrusal olmayan hiperbolik denklemlerin zayıf çözümlerinin yaklaşık hesaplamasına olanak sağladıklarından, en basit hiperbolik denklemlerden biri olan Burgers denklemi bu metodla ile incelenebilmektedir. Uzay-zaman geometrilerinde hiperbolik korunum yasaları için sonlu hacim şemalarının yakınsadıkları ilk kez LeFloch ve meslektaşları tarafından gösterilmiş [2, 9], bu teori daha sonra diferansiyel formlar için genişletilmiştir [10]. Literatürdeki çalışmalarda, klasik (rölativistik olmayan) Burgers denkleminin doğrusal olmayan hiperbolik korunum yasaları için önemli bir model olduğu ve sıkıştırılabilir akışkanların Euler denklemlerinden elde edilebildikleri de gösterilmiştir [12]. Benzer şekilde sıfır basınçlı Navier Stokes denklemlerinin tek boyutlu sisteminden de vizkozlu Burgers denklemine; vizkoz terimi ihmal edildiğindeyse bu sistemden klasik Burgers denklemine ulaşacağımızı akışkanlar dinamiğinden biliyoruz. Bu bakımdan Burgers denklemi

* baver@metu.edu.tr

sıkıştırılabilir akışkanlar için temel modellerden biridir.

Rölativistik Burgers denklemlerinin elde edilişleri teorisi ise uzay-zaman geometrilerinde LeFloch, Mahklof ve Okutmuştur [8] tarafından başlatılmış ve daha sonra ortak çalışmalarla geliştirilmiştir [3–5]. Düzlemsel geometri ile başlanılan bu çalışmaların ilkinde, sıkıştırılabilir rölativistik Euler denklemleri kullanılarak hiperbolik denge kanununa uyan rölativistik ve rölativistik olmayan Burgers denklemleri olarak adlandırılan modeller elde edilmiş, daha sonra Schwarzschild, Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), de Sitter ve Schwarzschild-de-Sitter uzay-zaman geometrilerini kapsayacak şekilde genişletilmiştir [3–5]. Elde edilen modellerin rölativistik denklemler olarak adlandırılmalarının en önemli nedeni, literatürde var olan rölativistik Euler denklemleriyle bir çok ortak özelliğe sahip olmaları olarak ifade edilmiştir. Bunlardan başlıcaları, Lorentz değişmezlik özelliğini sağlamaları, ışık hızının çok büyük değerleri için modellerin rölativistik olmayan durumlarına dönmeleri ve korunum yasalarını sağlamaları olarak sayılabilir. Yapılan çalışmalarda ayrıca bulunan modellerin sonlu hacim yöntemiyle bir çok nümerik davranışları da incelenmiştir.

Bu makale uzay-zaman geometrilerinde, enerji-momentum tensörlerinden yararlanılarak rölativistik Burgers modellerinin elde edilip, bu modellerin sonlu hacim ve sonlu fark yöntemlerinden yararlanarak ilgili geometrilerde teorik ve numerik incelemelerinin yapıldığı önceki çalışmaların bir devamı olarak değerlendirilebilir. Bu amaçla makalemizde Reissner-Nordström uzay-zaman geometrisi esas alındı. Uzay-zamanı küresel ve elektrik yüklü bir kitle olarak tasvir eden Reissner-Nordström metriğinden elde ettiğimiz Burgers modelimizin statik çözümler içerdiğini gözlemlediğimiz bu çalışmada, bu çözümlerin davranışları da farklı kütle ve elektrik yükü sabitleri için incelendi. Nümerik hesaplar içinse sonlu hacim ve fark metodlarından yararlanıldı. Birinci ve ikinci mertebeden şemaların kullanıldığı bu metodlarla Burgers modelimiz için şok ve seyrelme dalgalarının yayılımı incelendi.

Hiperbolik korunum yasaları için sonlu hacim metodlarının Lorentz uzay-zaman manifoldlarında yakınsaması ve geometrik formüllerinin elde edilişi için LeFloch ve meslektaşlarının makaleleri incelenebilir [8–10]. Ayrıca düzlem geometrisinde korunum yasalarının teorisi için Kruzkov'un makalesine başvurulabilir [7]. Godunov şemaları ile ilgili detaylar için Guinot [6], Leveque [12] ve Van Leer [14] kaynak gösterilebilir. Son olarak genel görelilik teorisi ve uzay-zaman geometrisi ile ilgili olarak da [1, 11, 13, 15] referanslarına bakılabilir.

Makalemizin taslağı şu şekildedir. Öncelikle uzay-zaman ve metrik kavramlarını kısaca ele aldık. Reissner-Nordström uzay-zaman ve metriğinin bazı temel özelliklerini verdikten sonra, Christoffel sembolleri ve tensörler yardımıyla Euler denklemimizi elde ettik. Buradan sıfır basınçlı Euler sistemine ulaşıp, bu sistemin çözümünden de modelimizi bulduk. Modelimizin temel özelliklerini inceledikten sonra statik çözümler ve bunların grafiklerini ele aldık. Son olarak sonlu fark yöntemlerini kullanarak, modelimiz için birinci ve ikinci dereceden şemalar dizayn edip, bunların nümerik çözümlerinden şok ve seyrelme dalgalarının davranışlarını grafiklerle gösterdik.

2. Materyal ve Metot

Bu çalışmada Reissner-Nordström uzay-zaman geometrisi esas alındı. Benzer uzay-zaman geometrileri için kullanılan teknikler, geometriye bağlı değişkenlerin durumuna ve dış faktörlerin de etkisi dikkate alınarak bu geometri için de geliştirilerek uygulandı. Burgers modelimizin bulunması amacıyla öncelikle sıkıştırılabilir akışkanların Euler denklemlerini bulmamız gerekiyordu. Bu denklem sistemine, Christoffel semboller ve sıkıştırılabilir akışkanların tensörlerinin hesaplanlanması ve bunların enerji-momentum denkleminde kullanılmasıyla ulaşıldı. Bunu takiben, kaynağını Navier Stoke denklemlerinin sıfır basınçlı formlarından Burgers denklemine ulaşmaktan alan bu teknik, bu kez önce sıfır basınçlı Euler sistemi elde etmek, sonra da bu denklemlerin ortak çözümünden rölativistik Burgers denklemine ulaşmak için uygulandı.
Modelimizi bulduktan sonra, kütle ve elektrik yükü terimlerine bağlı olarak bazı sonuçlara da ulaştık. Öncelikle Reissner-Nordström uzay-zaman metriği tekillik noktaları içerdiğinden, aynı tekillik durumunu model denklemimizde de gözlemledik. Ayrıca elektrik yükü sıfıra yakınsadığında (yani uzay-zaman nötr olduğunda) Schwarzshild Burgers modeline, hem elektrik yükü hem de kütle sıfırlandığında Minkowski Burgers modeline ulaştık. Bunların yanında modele özgün bir özellik kattığını gözlemlediğimiz zamandan bağımsız statik çözümler elde ettik. Burgers modelimiz bu yönüyle FLRW uzay-zamanında elde edilen modelden ayrılıyorken, Schwarzshild uzay-zamanında elde edilen Burgers modeliyle benzer özellik gösterdi. Bu durum Reissner-Nordström uzay-zaman metriğinin içerdiği elektrik yükü teriminin nötralize olduğu zaman Schwarzshild metriğine yakınsaması özelliği ile açıklanabilir. Statik çözümler bu çalışmanın önemli bir parçası olduğundan, ilgili altbaşlıkta detaylıca analiz edildi.
Nümerik kısımda ise modelimizin davranışlarını incelemek için sonlu hacim ve fark yöntemlerinden yararlandık. Bunun için her bir uzay aralığı için Riemann problemini çözen önceden oluşturulan şemaları geliştirildik. Bu şemaların, rölativistik Burgers modelimizin şok ve seyrelme dalgaları barındıran, sürekli olmayan çözümler içerdiğini bu kısımda gösterdik. Bunun yanında nümerik hesaplamalar neticesinde, sonlu hacim şemalarının yakınsadığını ve şok ile seyrelme dalgalarının iterasyon sayısı arttıkça yayılım özelliği gösterdiklerini gözlemledik.

3. Uzay-zaman ve Metrik

Genel görelilik teorisinde küresel simetri özelliğindeki $n+1$ boyutlu bir Lorentz uzay-zaman geometrisi için metrik $(-,+,\cdots,+)$ ile ifade edilir. Burada n uzay boyutunu, 1 ise zaman boyutunu temsil eder. Yapılan çalışmalar ve teori kısımları $n+1$ boyut için olsa da, ilgili uzay-zaman geometrisindeki modelimizin tam formülünün tespiti ve bunun nümerik olarak analiz edebilmesi için makalemizde $3+1$ boyutlu metrikleri inceledikten sonra modelimizi $1+1$ boyutunda formule edeceğiz. Bunun için önce genel metrik ve buna bağlı Christoffel sembolleri vereceğiz.

Daha sonra Reissner-Nordström metriğini ve özelliklerini detaylıca inceleyeceğiz.

3.1. $3+1$ boyutlu uzay-zamanda metrik

Bu bölümde $3+1$ boyutlu uzay-zaman metriklerinin genel formaları ile Christoffel sembollerin bu metrik formlarıyla ifadesine kısaca değineceğiz. Bunun için küresel koordinatları (r,θ,ϕ) kullanacağız. Buna göre

$$x = r\cos\theta\sin\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\phi$$

için herhangi bir uzay-zaman metriği

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

şeklindedir. Eğer koordinatları $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$ biçiminde yazarsak, ilgili metriğimiz matris formatında yazılabilir :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}.$$

Einstein alan denklemleri statik çözümler içerdiklerinden, metriğimizin bileşenleri zamandan bağımsız olmalıdır. Ayrıca uzay-zamanımız hareketsiz olduğundan, uzaysal koordinatlar zamansal olan tanjant vektörlerinin yönünde değişmezler. Bu yüzden zamansal tanjant vektörleri (e_t), uzaysal tanjant vektörlerine (e_α) ortogonal olurlar. Yani

$$e_t.e_\alpha = e_\alpha.e_t = g_{\alpha t} = g_{t\alpha} = 0,\ \text{eğer } t \neq \alpha.$$

Buradan

$$g_{rt} = g_{tr} = g_{t\theta} = g_{\theta t} = g_{t\phi} = g_{\phi t} = 0$$

elde edilir. Uzay-zamanımız küresel simetrik özelliğini sağladından, rotasyon durumunda değişmezlik gösterir. Metriğimiz $(t,r,\theta,\phi) \to (t,r,-\theta,\phi)$ ve $(t,r,\theta,\phi) \to (t,r,\theta,-\phi)$ dönüşümü karşısında değişmezlik özelliği gösterdiğinden,

$$g_{\theta r} = g_{r\theta} = g_{\phi r} = g_{r\phi} = g_{\phi\theta} = g_{\theta\phi} = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu verileri biraraya getirirsek, ilgili matris formuna ulaşırız:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Sonuç olarak küresel simetri özelliğini sağlayan $3+1$ boyutlu uzay-zaman metriği şu şekilde yazılır:

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + g_{11}\,dr^2 + g_{22}\,d\theta^2 + g_{33}\,d\phi^2.$$

Metrik bileşenleri

r ve t parametrelerinin sabit olduğu hiperyüzeylerde, 2-kürenin metriği

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

şeklinde olur. Burda dS küre üzerindeki yüzey uzaklığının açısal koordinatlara ($d\theta$ ve $d\phi$) bağlı değerini ifade eder. Dolayısıyla metriğin bileşenleri $g_{22} = r^2$ ve $g_{33} = r^2\sin^2\theta$ olur. g_{00} ile g_{11} ise t ve r parametlerine bağlı bilinmeyen iki değere karşılık gelir. Bu değerlere sırasıyla $A(t,r)$ ve $B(t,r)$ diyelim. Metriğin işaretinin $(-,+,+,+)$ olduğunu bildiğimiz için en genel halini şu şekilde yazabiliriz.

$$ds^2 = -A(t,r)\,dt^2 + B(t,r)\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2). \tag{1}$$

Genel metrik için Christoffel sembolleri

(1) metriğini sırasıyla kovaryant elemanları ve kontravaryant elemanları cinsinden matris formunda yazarsak,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -A(t,r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(t,r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A(t,r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{B(t,r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2(\sin^2\theta)} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu verileri kullanarak herhangi bir metrik için Christoffel sembolleri aşağıdaki formül ile kolayca hesaplanabilir.

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu}). \tag{2}$$

Burada $\alpha,\beta,\mu,\nu \in \{0,1,2,3\}$ değerlerini alırlar. Bunları (2) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}A^{-1}(t,r)\partial_0(A(t,r)) \\
\Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2}A^{-1}(t,r)\partial_1(A(t,r)), \\
\Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10}\frac{1}{2}B^{-1}(t,r)\partial_0(B(t,r)), \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}B^{-1}(t,r)\partial_1(B(t,r)), \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}B^{-1}(t,r)\partial_1(A(t,r)), \\
\Gamma^1_{22} &= -r\,B^{-1}(t,r), \qquad \Gamma^1_{33} = -r\,B^{-1}(t,r)\,\sin^2\theta, \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta
\end{aligned}$$

elde ederiz.

3.2. Reissner-Nordström uzay-zaman metriği

Reissner-Nordström uzay-zaman metriği Einstein alan denklemlerine küresel simetrik çözüm sağlayan metriklerden biridir. Bu uzay-zamanda, kara delik ve elektrik yükü mevcuttur. Reissner-Nordström uzay-zamanını Schwarzchild

karadeliklerinden ayıran fark elektrik yüklü olmalarıdır. Işık hızını ve yerçekimi sabitlerini uygun biçimde normalize ettikten ($c = G = 1$) sonra Reissner-Nordström metriği şu şekilde tanımlanır

$$g = -\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{3}$$

Bu metrik asimtotik olarak düzlemseldir. Yani eğer polar koordinatlarda yarıçap çok büyük alınırsa, metrik Minkowski metriğine dönüşür. Yani (3) denkleminde $r \to \infty$ olursa Minkowski metriği

$$ds^2 \to -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

elde edilir. Eğer $\mathbf{D}$ diyagonal matris olacak şekilde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

yazılırsa, Reissner-Nordström metriğini matris formunda

$$g = g_{ij}dx^i dx^j = (dt\, dr\, d\theta\, d\varphi)\, \mathbf{D} \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

çarpımları halinde yazabiliriz. Bu durumda kovaryant ve kontravaryant bileşenler sırasıyla

$$g_{00} = -\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big), \quad g_{11} = \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)^{-1},$$
$$g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = r^2\sin^2\theta,$$

ve

$$g^{00} = -\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)^{-1}, \quad g^{11} = \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big),$$
$$g^{22} = \frac{1}{r^2}, \qquad g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta},$$

olur.

Reissner-Nordström uzay-zamanın bazı özellikleri

Reissner-Nordström metriği pürüzsüzdür ve zamana bağlı olması bakımından Lorentz manifoldu sınıfından olup küresel simetriği özelliğindedir. Metrik elemanları olan kütle M, yarıçap r ve elektrik yükü Q arasında

$$\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} < 1 \tag{4}$$

ilişkisi vardır. Dikkat edilirse Reissner-Nordström metriği (3), elektrik yükü $Q = 0$ olduğu durumda Schwarzchild metriğine, elektrik yükü ile kütlenin $Q = M = 0$ olduğu durumda da Minkowski metriğine dönüşür.

Olay ufku

Karadelikteki olay ufkuna ait bir noktada çekim kuvveti o kadar kuvvetlidir ki, ışık bile bundan kaçamaz; çünkü tekillik noktasının yakınında olmak, kaçış için sonsuz hıza sahip olmayı gerektirir. Tekillik noktasının bu mesafedeki yakınlık bölgesine karadeliğin olay ufku denir.

Reissner-Nordström metriği için olay ufku $0 = g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}$ durumuyla tasvir edilir. Yani

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \Rightarrow r^2 - 2Mr + Q^2 = 0$$

ilişkisinin sağlandığı durum bize olay ufkunu verir. Elde edilen r'ye bağlı ikinci dereceden denklemin kökleri

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

olacağından, M^2 and Q^2 arasındaki ilişkiyi incelersek, olay ufku hakkında daha fazla bilgi edinebiliriz.

- **Birinci durum** ($M^2 < Q^2$): $M^2 - Q^2 < 0$ olacağından kökler $r_\pm$ reel olmaz ve $r = 0$ noktası zamansal doğrudur. Bu durum için olay ufku yoktur. Bu çözüm genelde fiziksel olmayan çözüm olarak adlandırılır.
- **İkinci durum** ($M^2 > Q^2$): Bu seçenekte $M^2 - Q^2 > 0$ olacağından, iki reel kök

  $$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} > r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$$

  bulunur. Ayrıca (3) metriğinim ilk iki terimi olan

  $$-\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)^{-1}$$

  ifadesi eğer $r_\pm$ değerleri ile tekrar yazılırsa

  $$-\frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2}dt^2 + \Big(\frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2}\Big)^{-1} dr^2$$

  elde edilir. Dikkat edilirse $r = r_+, r = r_-$ ve $r = 0$ metrik için tekillik noktalarıdır. Bu seçenek için

  $$r_- < M < r_+, \quad M > Q$$

  sağlanır. Burada ayrıca r ile $r_\pm$ değerlerine bağlı olarak da üç bölge söz konusudur. Bunlar $i) r_+ < r < \infty$, $ii) r_- < r < r_+$, $iii) 0 < r < r_-$ bölgeleridir. Konuyla ilgili detaylar için [1, 11, 15] kaynaklarını referans verebiliriz.
- **Üçüncü durum** ($M^2 = Q^2$): Bu durum ekstrem Reissner-Nordström çözümü olarak bilinir. $M^2 = Q^2$ olduğu için, olay ufku $r_+ = r_- = M$ eşitliği ile ifade edilir. Yukarıdaki metrik eşitliğinden $r = r_\pm$ olduğu durumda, $g_{00} = 0$ olur.

4. Reissner-Nordström Uzay-zamanında Euler ve Burgers Denklemleri

Bu bölümde Reissner-Nordström geometrisinde öncelikle Euler sistemini, ardından da Burgers modelimizi elde edeceğiz. Burada yapılan hesaplar, verilen uzay-zaman metriği farkları dışında, [3–5] makalelerinde verilen

teknikle benzer olduğundan, teknik detaylar için bu kaynakları referans gösterebiliriz. Genel görelilik teorisinden bildiğimiz enerji-momentum tensörünü kullanacağımız bu hesaplamalar için Christoffel sembollerine ihtiyacımız olacak. İlk bölümde herhangi bir metrik için Christoffel sembollerin hesaplanması ile ilgili genel formülü vermiştik. Bu formülleri Reissner-Nordström metriği için uygularsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{00}+\partial_0 g_{00}+\partial_0 g_{00}) = 0,\\
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{00}(-\partial_0 g_{01}+\partial_1 g_{00}+\partial_0 g_{10}) = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{00})\\
&= \frac{\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}\\
\Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \frac{\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)},\\
\Gamma^1_{11} &= \frac{\left(\frac{-M}{r^2}+\frac{Q^2}{r^3}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)},\\
\Gamma^1_{00} &= \left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}\right)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right),\\
\Gamma^1_{22} &= -r\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right),\\
\Gamma^1_{33} &= -r\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\sin^2\theta,\\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta.
\end{aligned}$$

Elde ettiğimiz bu Christoffel sembollerini kullanırken Euler sistemimizin sadece t ve r parametlerine bağlı olmasını istediğimiz için açısal bileşenleri (θ,φ) ihmal edeceğiz. Metriğimiz $1+1$ boyuta dönüşeceği için, aşağıdaki

$$(u^\alpha) = (u^0,u^1), \quad u^\alpha u_\alpha = -1, \quad u^\alpha(t,r) = u^\alpha \tag{5}$$

eşitlikleri elde ederiz. Ayrıca $(u^0)^2$ ve $(u^1)^2$ terimlerinin birim olduğunu bildiğimiz için, buradan

$$-1 = u^\alpha u_\alpha = u^0u_0 + u^1u_1 = g_{00}(u^0)^2 + g_{11}(u^1)^2$$

ifadesine ulaşırız. Daha önceden hesapladığımız g_{00} ve g_{11} terimlerini bu denklemde yerine yazarsak

$$-1 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)(u^0)^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}(u^1)^2 \tag{6}$$

denklemini elde ederiz. Buradaki u^0 ve u^1 terimlerini bulmak bir v parametresi tanımlayacağız:

$$v := \frac{c}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}\frac{u^1}{u^0}. \tag{7}$$

Bu eşitlik (6) ile beraber göz önüne alınırsa, u^0 ve u^1 terimlerini v cinsinden elde ederiz:

$$\begin{aligned}
(u^0)^2 &= \frac{c^2}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)(c^2-v^2)},\\
(u^1)^2 &= \frac{v^2\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}{(c^2-v^2)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Bulduğumuz bu iki terimi

$$T^{\alpha\beta} = (\rho c^2+p)\,u^\alpha u^\beta + p\,g^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

eşitliği ile verilen enerji-momentum tensör denkleminde yerine yazacağız. Buradan bütün tensör terimlerini buluruz:

$$\begin{aligned}
T^{00} &= (\rho c^2+p)u^0u^0 + pg^{00}\\
&= \frac{\rho c^4+pv^2}{(c^2-v^2)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}\\
T^{01} &= T^{10} = \frac{cv(\rho c^2+p)}{(c^2-v^2)},\\
T^{11} &= \frac{c^2\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)(v^2\rho+p)}{(c^2-v^2)},\\
T^{22} &= \frac{p}{r^2}, \quad T^{33} = \frac{p}{r^2\sin^2\theta},\\
T^{02} &= T^{03} = T^{12} = T^{13} = T^{20} = T^{21}\\
&= T^{23} = T^{30} = T^{31} = T^{32} = 0.
\end{aligned}$$

Bu tensörleri Christoffel sembolleri ile beraber

$$0 = \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}T^{\gamma\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}T^{\alpha\gamma} = 0 \tag{10}$$

eşitliği ile verilen Euler denkleminde yerine yazacağız. İlk denklemimizi elde etmek için öncelikle (10) eşitliğinde $\beta = 0$ yazarız:

$$\partial_\alpha T^{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}T^{\gamma 0} + \Gamma^0_{\alpha\gamma}T^{\alpha\gamma} = 0.$$

Bu son eşitlikte $\alpha,\gamma\in\{0,1,2,3\}$ verilerini ve ilgili tensörleri kullandıktan sonra, basınç için $p=0$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\partial_0\left(\frac{c}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)(c^2-v^2)}\right)\\
&+\partial_1\left(\frac{v}{c^2-v^2}\right)+\frac{v}{(c^2-v^2)}\left[\frac{\left(\frac{2M}{r^2}-\frac{2Q^2}{r^3}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}+\frac{2}{r}\right]=0
\end{aligned} \tag{11}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde ikinci denklemimizi bulmak için (10) no'lu Euler denkleminde $\beta=1$ yazarız. Buradan elde ettiğimiz

$$\partial_\alpha T^{\alpha 1} + \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}T^{\gamma 1} + \Gamma^1_{\alpha\gamma}T^{\alpha\gamma} = 0$$

eşitliğinde aynı şekilde $\alpha,\gamma\in\{0,1,2,3\}$ verileri ile ilgili tensörler kullandıktan sonra, basınç için $p=0$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\partial_0\left(\frac{cv}{c^2-v^2}\right)+\partial_1\left(\frac{v^2\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)}{c^2-v^2}\right)\\
&+\frac{c^2}{c^2-v^2}\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}\right)+\frac{v^2}{c^2-v^2}\left(\frac{-5M}{r^2}+\frac{3Q^2}{r^3}+\frac{2}{r}\right)=0
\end{aligned} \tag{12}$$

denklemi elde edilir. Elde ettiğimiz (11)–(12) denklem sistemini Reissner-Nordström uzay-zamanında **sıfır basınçlı Euler sistemi** olarak adlandıracağız.

4.1. Modelin elde edilişi

Modelimize ulaşmak için elde ettiğimiz sıfır basınçlı Euler denklemlerini (11)–(12) ortak çözüp tek bir denklem şeklinde yazacağız. Bu işlemlerin sonunda (ışık hızını $c = 1$ olacak şekilde normalize edip, $\partial_0 = \partial_t, \partial_1 = \partial_r$ dönüşümünü yaptıktan sonra)

$$\partial_t v + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})\partial_r(\frac{v^2}{2}) = \frac{Mv^2}{r^2} - \frac{M}{r^2} - \frac{v^2Q^2}{r^3} + \frac{Q^2}{r^3} \tag{13}$$

veya, konservatif formda yazarsak,

$$\partial_t(v) + \partial_r\Big(\frac{v^2}{2}(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})\Big) = (2v^2 - 1)\Big(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\Big) \tag{14}$$

modelini elde ederiz. Bu denklemi **Reissner Nordström geometrisinde rölativistik Burgers denklemi** diye adlandıracağız.

Modelin özellikleri

Elde ettiğimiz Burgers modeli (14) için şu gözlemleri yapabiliriz:

- Elektrik yükü katsayısı olan $Q = 0$ olursa, (14) denklemi Schwarzschild geometrisindeki Burgers modeline dönüşür ([8]).
- Eğer hem $M = 0$ hem de $Q = 0$ olursa, (14) denklemi klasik (viskozitesiz) Burgers denklemini verir;

$$\partial_t v + \partial_r(v^2/2) = 0.$$

Benzer sonuçlar de Sitter, Schwarzschild-de Sitter ve FLRW geometrisinde geometriye bağlı olarak kozmolojik sabit ve diğer parametlerin özel durumlarında klasik (rölativistik olmayan) Burgers denkleminin elde edilişinde de gözlenmşti. Bu bakımdan modelimiz önceki modelleri desteklediği için tutarlıdır.

5. Burgers Modeli için Sonlu Hacim Şemaları

Hiperbolik korunum yasaları için sonlu hacim metodlarının uzay-zaman geometrilerinde yakınsadıklarının ıspatı [2, 10] makalelerinde yapılmıştı. Aynı çalışmalarda bu sonlu hacim şemalarının geometrik formulasyonları ve kartezyen kordinatlardaki özel durumları ile diğer detaylar da verilmişti. Bu bölümde Reissner Nordtsröm geometrisinde elde ettiğimiz modelimiz için oluşturacağımız sonlu hacim şemalarının yakınsama özellikleri için de [2, 10] çalışmalarını referans gösterebiliriz. Klasik Burgers denklemi için Riemann problemi ile başlayacağımız bu bölümde, model denklemimiz için yazacağımız birinci ve ikinci mertebeden sonlu hacim şemaları ile statik çözümlerin davranışlarını inceleyeceğiz.

Riemann problemi

Modelimiz için sonlu hacim şemalarına geçmeden önce, standart (viskozitesiz) Burgers denklemi

$$\partial_t v + \partial_x(v^2/2) = 0 \tag{15}$$

için Riemann problemini ele alalım. Buna göre r_0 ve v_L, v_R sabitleri için başlangıç değeri

$$v_0 = \begin{cases} v_L, & r < r_0, \\ v_R, & r > r_0, \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda Riemann probleminin çözümü

$$v(t,r) = \begin{cases} v_L, & r < s_L t + r_0, \\ \frac{r-r_0}{t}, & s_L t + r_0 < r < s_R t + r_0, \\ v_R, & r > s_R t + r_0, \end{cases} \tag{16}$$

olur. Burada Rankino Hugoniot koşullarından hatırladığımız s_L ve s_R değerleri

$$s_L = \begin{cases} v_L, & v_L < v_R, \\ \frac{v_L+v_R}{2}, & v_L > v_R, \end{cases} \quad s_R = \begin{cases} v_R, & v_L < v_R \\ \frac{v_L+v_R}{2}, & v_L > v_R \end{cases} \tag{17}$$

ilişkisi ile verilir. Klasik Burgers denklemi için Riemann problemi ile ilgili detaylar için [12] ve onun referanslarını adres gösterebiliriz.

Sonlu hacim şemaları

Şemamızı yazabilmemiz için öncelikle notasyonla ilgili detayları verelim. Ağ ızgaramızın zamana ve uzaya bağlı uzunluk aralıklarını sırasıyla Δt ve Δr ile belirtip

$$t_n = n\Delta t, \qquad r_j = 2M + j\Delta r, \quad n \geq 0, j \geq 0$$

olarak seçelim. Sonlu hacim şemamız, model denklemimizin bir bölge üzerinde integralinin alınıp, zaman ve uzay boyutuna bağlı elde edeceğimiz terimlerin gerekli ortalama değerlerinin alınmasından sonra elde edilir. Bunun için model denkleminin (13)

$$I_n \times I_j = [t_n, t_{n+1}] \times [r_{j-\frac{1}{2}}, r_{j+\frac{1}{2}}]$$

bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_{r_{j-\frac{1}{2}}}^{r_{j+\frac{1}{2}}} \Big(v(t_{n+1},r) - v(t_n,r)\Big)dr \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left((1 - \frac{2M}{r_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{Q^2}{r^2_{j+\frac{1}{2}}})\Big(\frac{v^2(t,r_{j+\frac{1}{2}})}{2}\Big) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \frac{2M}{r_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{Q^2}{r^2_{j-\frac{1}{2}}})\Big(\frac{v^2(t,r_{j-\frac{1}{2}})}{2}\Big) \right) dt \\ &\quad - \int_{r_{j-\frac{1}{2}}}^{r_{j+\frac{1}{2}}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (2v^2 - 1)\Big(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\Big)dtdr = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

eşitliği elde edilir. Eğer ortalama değerler

$$V_j^n = \int_{r_{j-\frac{1}{2}}}^{r_{j+\frac{1}{2}}} v(t_n,r)\,dr, \quad V_j^{n+1} = \int_{r_{j-\frac{1}{2}}}^{r_{j+\frac{1}{2}}} v(t_{n+1},r)\,dr,$$

$$G_{j\pm\frac{1}{2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (1 - \frac{2M}{r_{j\pm\frac{1}{2}}} + \frac{Q^2}{r^2_{j\pm\frac{1}{2}}}) \frac{v^2(t,r_{j\pm\frac{1}{2}})}{2}\,dt,$$

alınıp yukardaki integral denklemi tekrar yazılırsa modelimiz için sonlu hacim şeması

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta r}(G_{j+\frac{1}{2}} - G_{j-\frac{1}{2}}) - \Delta t\,(2V_j^{n2} - 1)\Big(\frac{M}{r_j^2} - \frac{Q^2}{r_j^3}\Big) \tag{19}$$

elde edilir. Burada

$$G_{j\pm\frac{1}{2}} = H(r_{j\pm\frac{1}{2}}, V_j^n, V_{j-1}^n)$$

ve $q(u_L, u_R)$ değeri (16) ilişkisinde verilen Riemann probleminin r merkezindeki çözümü olacak şekilde alınırsa, nümerik flaks olan

$$H(r, V_L, V_R) = \big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\big)\frac{q^2(V_L, V_R)}{2} \tag{20}$$

elde edilir.

Birinci ve ikinci mertebeden şemalar

Bu altbaşlıkta Burgers modelimiz için birinci ve ikinci mertebeden Godunov tipi sonlu hacim şemalarını vereceğiz. Burada kullanacağımız Godunov şemaları ile ilgili geniş izah için [6, 12, 14] kaynaklarını referans gösterebiliriz. Öncelikle Burgers modelimiz (13)

$$\partial_t v + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})\partial_r(\frac{v^2}{2}) = S,$$
$$S = \frac{Mv^2}{r^2} - \frac{M}{r^2} - \frac{v^2Q^2}{r^3} + \frac{Q^2}{r^3},$$

şeklinde yazalım. Eğer (18)–(19) ile elde ettiğimiz şemamız, $G_{j\pm1/2} = h^n_{j\pm1/2}\; g^n_{j\pm1/2}$ terimi şeklinde düzenlenirse, şemamız

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta r}(h^n_{j+1/2}\, g^n_{j+1/2} - h^n_{j-1/2} g^n_{j-1/2}) + \Delta t S_j^n \tag{21}$$

halinde de yazılabilir. Bu şemadaki terimler, (13) modelindeki terimlerin ayrıştırılmış hali olarak

$$S_j^n = \frac{M\,(V_j^n)^2}{(r_j^n)^2} - \frac{M}{(r_j^n)^2} - \frac{(V_j^n)^2\,Q^2}{(r_j^n)^3} + \frac{Q^2}{(r_j^n)^3}$$

$$h^n_{j\pm1/2} = 1 - \frac{2M}{(r^n_{j\pm1/2})} + \frac{Q^2}{(r^n_{j\pm1/2})^2},$$
$$g^n_{j-1/2} = F(V^n_{j-1}, V^n_j), \quad g^n_{j+1/2} = F(V^n_j, V^n_{j+1}),$$

biçiminde yazılır. Buradaki $F(v_L, v_R) = f(v^*)$ değerleri Godunov nümerik flaks fonksiyonları olup şöyle tanımlanır:

$$F(v_L, v_R) = \begin{cases} v_L, & v_L \geq v_r, \quad |f(v_R) - f(v_L)|/|v_R - v_L| > 0, \\ v_R, & v_L \geq v_R, \quad |f(v_R) - g(v_L)|/|v_R - v_L| \leq 0, \\ v_L, & v_L < v_R, \quad v_L > 0, \\ v_R, & v_L < v_R, \quad v_R < 0, \\ 0, & v_L < v_R, \quad v_L \leq 0 \leq v_R. \end{cases} \tag{22}$$

Ayrıca şemanın stabil olması için CFL koşulunun da sağlanması gerekir. Bunu

$$\frac{\Delta t}{\Delta r}\max_j\Big|1 - \frac{2M}{(r^n_{j\pm1/2})} + \frac{Q^2}{(r^n_{j\pm1/2})^2}\Big| \leq 0.5$$

eşitsizliğini sağlamakla elde ederiz.

İkinci mertebeden Godunov şemaları ve detayları için de [6, 12, 14] kaynaklarını referans gösterebiliriz. Buna göre (13) modelimize ikinci mertebeden sonlu hacim metodumuzu uygularsak, şemalarımız

$$\begin{aligned} V^{n+1/2}_{j\pm1/2} &= V^n_{j\pm1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta r}(h^n_{j+1/2} g^n_{j+1/2} - h^n_{j-1/2} g^n_{j-1/2}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} S^n_{j\pm1/2}, \\ V^{n+1}_j &= V^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta r}(h^{n+1/2}_{j+1/2} g^{n+1/2}_{j+1/2} - h^{n+1/2}_{j-1/2} g^{n+1/2}_{j-1/2}) \\ &\quad + \Delta t S^{n+1/2}_j \end{aligned} \tag{23}$$

formunda olur. Bu mertebe için ara stepleri de kullanacağımızdan, her n iterasyonu için t^n parametresi

$$t^{n+1/2} = (t^n + t^{n+1})/2$$

ile ifade edilir. Bunun dışındaki diğer terimler şöyle olur:

$$\begin{aligned} S^{n+1/2}_j &= \frac{M\,(V^{n+1/2}_j)^2}{(r^{n+1/2}_j)^2} - \frac{M}{(r^{n+1/2}_j)^2} \\ &\quad - \frac{(V^{n+1/2}_j)^2\,Q^2}{(r^{n+1/2}_j)^3} + \frac{Q^2}{(r^{n+1/2}_j)^3} \\ h^{n+1/2}_{j\pm1/2} &= 1 - \frac{2M}{(r^{n+1/2}_{j\pm1/2})} - \frac{Q^2}{(r^{n+1/2}_{j\pm1/2})^2}, \\ g^{n+1/2}_{j-1/2} &= F(V^{n+1/2}_{j-1}, V^{n+1/2}_j), \quad g^{n+1/2}_{j+1/2} = F(V^{n+1/2}_j, V^{n+1/2}_{j+1}). \end{aligned}$$

Buradaki $F(v_L, v_R)$ değerleri yukarıda tanımladığımız (22) ilişkisinde verilen nümerik Godunov flaks fonksiyonlarıdır.

6. Burgers Modeli için Statik Çözümler

Bu kısımda model denklemimiz (14) için zamana bağlı olmayan statik çözümleri inceleyeceğiz. Bunun için (14) denklemindeki t parametresine bağlı kısmi türev ile ilgili terim sıfır olur. Modelimizde $\partial_t(v) = 0$ yazdıktan sonra yeni denklemimiz

$$\frac{1}{2}\partial_r\Big(v^2(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})\Big) = (2v^2 - 1)\Big(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\Big) \tag{24}$$

olur. Bu denklemi tekrar yazarsak

$$\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)v\,v' = (v^2 - 1)\Big(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\Big)$$

eşitliğini sağlayan bir adi diferansiyel denklem elde ederiz. Bu denklemin çözümü için uygun bir parametre değişimini uygulayıp gerekli cebirsel hesaplar yapıldıktan sonra bütün statik çözümler

$$v_s(r) = \pm\sqrt{1 - K^2\Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\Big)}, \quad K > 0 \tag{25}$$

eşitliği ile tasvir edilir. Bu denklemi

$$K^2 = \frac{(1-v_s^2)^2}{1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}} > 0 \qquad (26)$$

biçiminde de yazabiliriz.

Diğer taraftan, uzaydan (r parametresinden) bağımsız çözümlerin mevcut olmadığını da gözlemleyebiliriz. Eğer mevcut olsaydı $\partial_r(\cdot)$ terimleri sıfırlanacak ve modelimiz

$$\partial_t v = (2v^2-1)\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}\right) \qquad (27)$$

denklemine dönüşecekti. Ancak bu denklem r parametresine bağlıdır. O yüzden model denklemimiz (14) sadece statik çözümleri kabul eder diyebiliriz. Modelimiz bu bakımdan FLRW modelinden ayrılmaktadır.

Statik çözümlerin özellikleri

Statik çözümleri $v_s(r)$ uzaysal parametre r'ye bağlı olup, bu çözümlerin davranışları sabit bir sayı olan K ile kütle M ve elektrik yükü Q değerlerine bağlı olarak farklılık gösterebilir. Aşağıda bazı özel durumları gözlemleyeceğiz.

- Uzaysal parametre r çok büyük değerler aldığında ($r \to \infty$), statik çözümler K sabitine bağlı olarak sınırlanır; bu durumda $K \in (0,1)$ için,

  $$\lim_{r\to\infty} v_s(r) = \pm\sqrt{1-K^2} < 1$$

  olur.

- $K \to 0$ limit değeri için, $v_s \to 1$ olduğunu görebiliriz.

- $K = 1$ olduğu durumda, $v_s = \pm\sqrt{\frac{2M}{r}-\frac{Q^2}{r^2}}$ elde edilir. Bu durumda dikkat edilirse $r \to \infty$ iken statik çözümler sonsuzda sıfıra yakınsar ($v_s \to 0$). Ayrıca $K = 1$ iken $\frac{2M}{r} = \frac{Q^2}{r^2}$ eşitliği sağlanırsa, v_s statik çözümleri yine sıfırlanır; bu noktaları da tekillik (sıfırlama) noktaları diye adlandırabiliriz.

- $K > 1$ değerlerini alırsa, bu durumda $v_s \to 0$ aşağıdaki koşulda sağlanır:

  $$K^2\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow$$

  $$(r-(M+\sqrt{M^2-Q^2}))(r-(M-\sqrt{M^2-Q^2}))K^2 = 0,$$

  denklemini buluruz. Burada $K > 1$ olduğundan K bu denklemin çözümü olamaz. Bu yüzden denklemin çözümleri

  $$r = M \pm \sqrt{M^2-Q^2} < \infty$$

  eşitliğini sağlayan sonlu r değerleri olur. Bu koşul sağlanırsa $v_s = 0$ olur. Dolayısıyla bu noktalara da tekillik (sıfırlama) noktaları diyebiliriz.

  Burada $M^2 = Q^2$, $M^2 > Q^2$ ve $M^2 < Q^2$ özel durumları ayrıca değerlendirilebilir. Bu durumlar Reissner Nordtsröm metriği altbaşlığında ele alınmıştı.

Bu verilere bağlı olarak Burgers modelimiz için $M^2 \geq Q^2$ koşulunu sağlayan statik çözümleri ele alıp grafikleyebiliriz. Bunun için kütle parametresini $M = 1$ olarak seçelim. Aşağıdaki grafiklerde K, Q, M değerlerine bağlı olarak üç ayrı durumu inceledik:

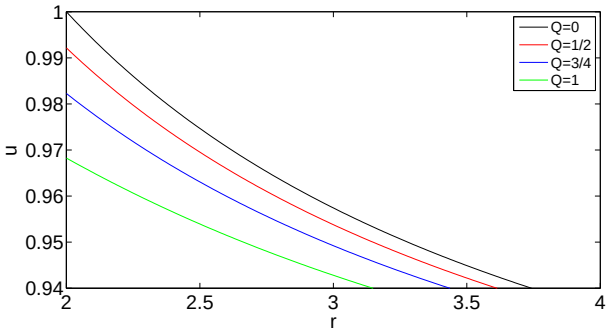
1.Durum : $\mathbf{K = 0.5,\ 0 \leq Q \leq M = 1}$:

İlk olarak K ve M değerlerini sabit tutup, farklı elektrik yükü değerleri için statik çözümlerin davranışlarını inceledik. Bu durum için statik çözümümüz (25)

$$v_s(r) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{2r}-\frac{Q^2}{4r^2}}$$

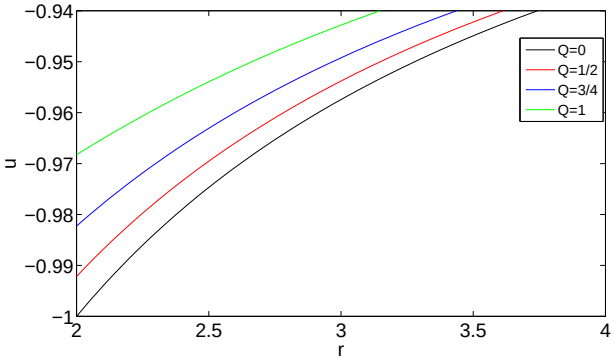
şeklinde olur.

Şekil 1. Statik Çözümler: $v_s > 0$, $K = 0.5$, $0 \leq Q \leq M = 1$



Buna göre $K = 0.5$ ve $M = 1$ durumunda, statik çözümlerin pozitif ve negatif kısımlarını, elektrik yükünün $Q \in [0,1]$ arasındaki değerleri için ayrı ayrı ele alıp, pozitif çözümler için **Şekil 1.** grafiklerini, negatif çözümler içinse **Şekil 2.** grafiklerini elde ettik.

Şekil 2. Statik Çözümler: $v_s < 0$, $K = 0.5$, $0 \leq Q \leq M = 1$



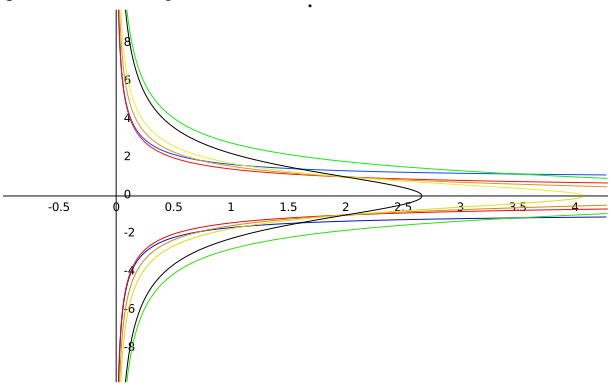
Burada statik çözümlerin **Şekil 1.** ve **Şekil 2.** için sırasıyla $(0,1)$ ve $(-1,0)$ arasında olduğu gözlemlenebilir.

2.Durum : $\mathbf{0.5 < K < 1.5,\ 0 = Q < M = 1}$:

İkinci durumda elektrik yükü için $Q = 0$ ile kütle parametresi için $M = 1$ değerlerini atayıp, farklı K sabitleri için statik çözümleri inceledik. Bu durumda elektrik yükü sıfırlandığı için özel bir durum belirtir. Başka bir ifadeyle, Reisnerr-Nordström metriğinde $Q = 0$ olduğunda Schwarzschild metriğini elde ediyorduk. Dolayısıyla statik çözüm grafiklerinde $Q = 0$ eğrisi aynı

zamanda Schwarzschild modelindeki statik çözümlerin de davranışını gösterecektir. Bu durumu **Şekil 3.**'te inceledik. Burada da $r = 0$ noktasının tekillik noktası olduğunu görebiliriz. Ayrıca K değerleri büyüdükçe eğrilerin

Şekil 3. Statik Çözümler: $0.5 < K < 1.5,\ 0 = Q < M = 1$

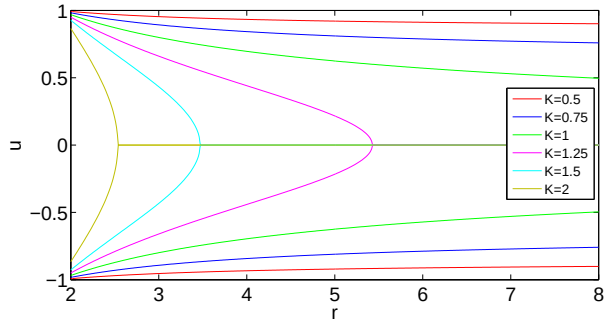


r-eksenini kestiğini gözleyebiliriz.

3.Durum : $0.5 < K < 2,\ 0.5 = Q < M = 1$:

Son olarak elektrik yükü için $Q = 0.5$ ile kütle parametresi için $M = 1$ değerlerini atayıp, farklı K sabitleri için statik çözümleri inceledik. Diğer durumlardan farklı olarak bu durumda elektrik yükü Q sıfırlanmayacak şekilde fakat kütle parametresi olan M'den küçük olacak şekilde seçildi ($0.5 = Q < M = 1$). R-S uzayzamanımızla uyumlu olan bu durum, farklı K değerleri ele alınarak **Şekil 4.**'teki grafiklerde incelendi. Bu grafiklerde K değerinin büyüdükçe eğrilerin asimptotik davranıştan vazgeçtikleri ve r-uzay eksenini kestikleri gözlemlenebilir.

Şekil 4. Statik Çözümler: $0.5 < K < 2,\ 0.5 = Q < M = 1$



Sonuç olarak, **Şekil 1.–Şekil 4.** arasında statik çözümlerin davranışlarını grafikleyerek inceledik. Kütle parametresi $M = 1$ alınarak, K ve Q değerlerine bağlı olarak yazılan statik denklemlerin tümünde $r = 0$ noktasında tekillik durumu görüldü. Bunun nedeni Reisnerr-Nordström metriğindeki tekillik noktalarıdır. Olay ufku altbaşlığında değindiğimiz bu durumu, $M^2 > Q^2$ seçeneğinde izah etmiştik. Bu grafikler bir sonraki bölümde kullanacağımız nümerik metodlarda r-uzay parametresini seçerken

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

durumunu dikkate almamızı; daha özel olarak da uzay koordinatını $r > r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ tekillik noktasından kaçacak şekilde seçmemiz gerektiği sonucunu çıkarabiliriz.

7. Nümerik Sonuçlar

Oluşturduğumuz sonlu hacim şemalarının şok ve seyrelme dalgalarından oluşan davranışları **Şekil 5.–Şekil 10.** grafiklerinde etüt edildi. Bu figürlerde n ile ifade ettiğimiz değer, şemanın iterasyon sayısını gösterir. Bütün figürlerin uyumlu olması için iterasyon sayılarını eşit ttutuk. Buna göre her şema için $n = 50, 100, 200$ sayılı iterasyonlara baktık. Birinci ve ikinci mertebeden bulduğumuz grafikler benzer olduğu için, sadece ikinci mertebe şemaları için bulduğumuz sonuçları bu bölümde kullandık. Bütün bu şemalarda stabilite koşulu olan CFL değerini CFL$= 0.2 < 1$ olarak düzenledik. Elektrik yükü olan Q ve kütle parametresi M değerlerine bağlı olarak her bir durum için önce seyrelme dalgalarını, daha sonra da şok dalgalarının yayılımını analiz ettik. Bunları yaparken, tekillik durumlarından kaçınmamız ve şemaların doğru çalışması için kütle ve elektrik yükü terimlerinin

$$r > r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2},\ \text{ve}\ M > Q$$

durumunu sağlamasına dikkat ettik. Buna göre Reissner-Nordström geometrisi için seçtiğimiz $M = 1$ ve $Q = 0.5$ değerlerine uygun olan uzay aralığını $1 + \sqrt{3/4} < r < 5/2$ olarak ayarladık. Schwarzschild geometrisi için ise $r > 2M$ olması gerektiğinden, bu model için ($Q = 0, M = 1$) uzay aralığını $r > 2M = 2$ olarak belirledik.

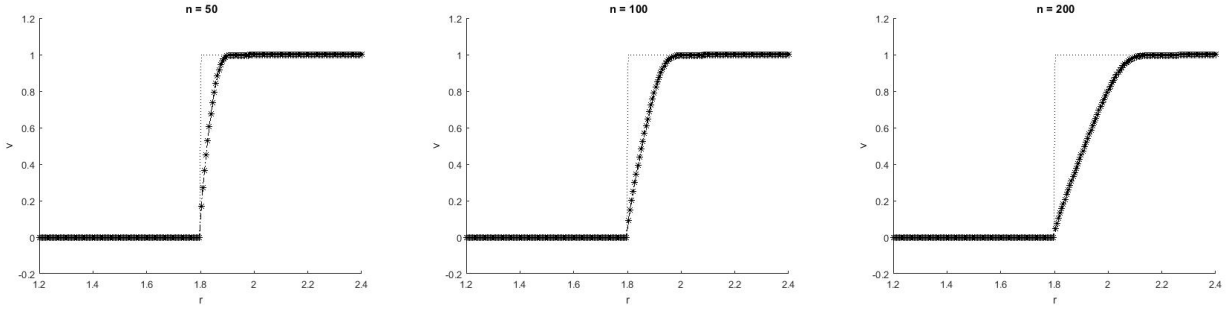
Şekil 5. ve **Şekil 6.** grafikleri, $M = 0$, $Q = 0$ değerleri için ikinci mertebeden Godunov şemalarıyla elde edildi. İlk bölümden hatırlayacağımız üzere, bu koşul bize düzlemsel geometrideki (klasik) Burgers denklemini veriyordu. Kütle ve elektrik şarjından bağımsız olan bu model için şok ve seyrelme dalgalarının yayılımını bu figürlerde açık şekilde görebiliriz.

Şekil 7. ve **Şekil 8.** grafikleri, $M = 1, Q = 0$ değerleri ikinci mertebeden Godunov şemalarıyla elde edildi. Bu koşul bize Schwarzschild geometrisindeki rölativistik Burgers modelini veriyordu. $r = 2M$ için tekillik değeri söz konusu olduğundan, bu koşulu dikkate alarak elde ettiğimiz grafiklerde şok ve seyrelme dalgalarının yayılımını gözlemledik.

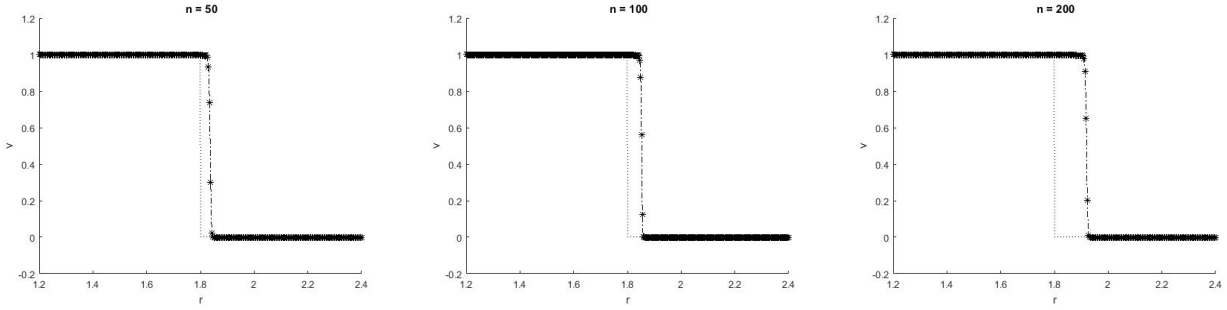
Son olarak **Şekil 9.** ve **Şekil 10.** grafikleri, $M = 1, Q = 0.5$ değerleri ikinci mertebeden Godunov şemalarıyla elde edildi. Reissner-Nordström geometrisindeki rölativistik Burgers modelimiz için elde ettiğimiz bu sonuçlarda $1 + \sqrt{3/4} < r < 5/2$ uzay aralığını dikkate alarak elde ettiğimiz grafiklerde şok ve seyrelme dalgalarının yayılımını gözlemledik.

Bütün bu sonuçları kıyas etme şansı bulduğumuz bu makalede, Reissner-Nordström uzay-zamanında elde ettiğimiz yeni modelimiz ve bu model için sonlu hacim yöntemleriyle elde ettiğimiz bulguların, diğer uzay-zaman geometrilerindeki model ve şemalarla tutarlılık içinde olduğunu göstermiş olduk.

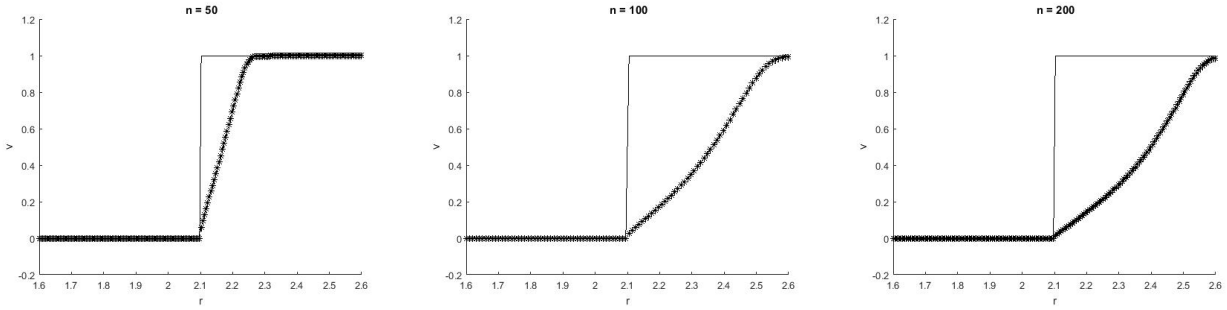
Şekil 5. Model Denklem için İkinci Mertebe Godunov Şemaları-Seyrelme Dalgalarının Yayılımı; ($M = 0$, $Q = 0$)



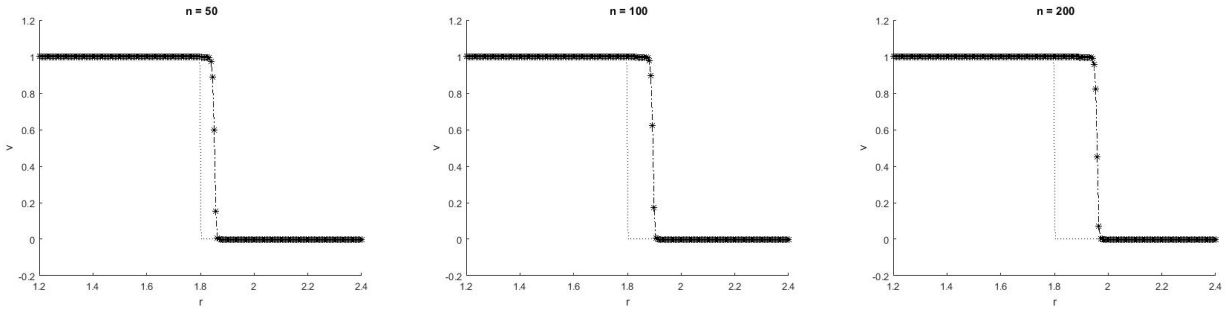
Şekil 6. Model Denklem için İkinci Mertebe Godunov Şemaları-Şok Dalgalarının Yayılımı; ($M = 0$, $Q = 0$)



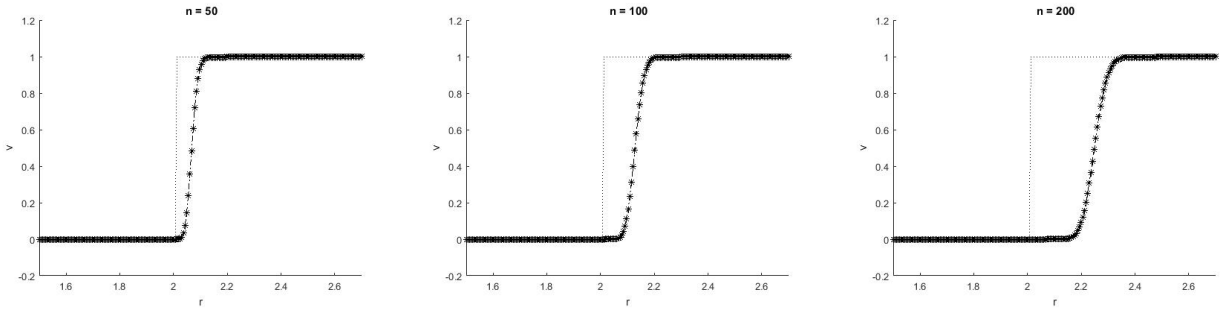
Şekil 7. Model Denklem için İkinci Mertebe Godunov Şemaları-Seyrelme Dalgalarının Yayılımı; ($M = 1$, $Q = 0$)



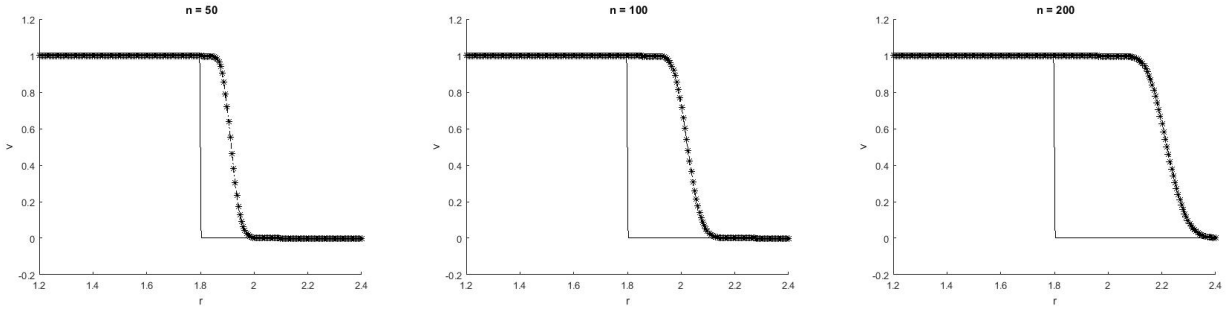
Şekil 8. Model Denklem için İkinci Mertebe Godunov Şemaları-Şok Dalgalarının Yayılımı; ($M = 1$, $Q = 0$)



Şekil 9. Model Denklem için İkinci Mertebe Godunov Şemaları-Seyrelme Dalgalarının Yayılımı; ($M = 1$, $Q = 0.5$)



Şekil 10. Model Denklem için İkinci Mertebe Godunov Şemaları-Şok Dalgalarının Yayılımı; ($M = 1$, $Q = 0.5$)



8. Tartışma ve Sonuç

Makalede varmış olduğumuz sonuçları şöyle özetleyebiliriz:

- Bu çalışmada Reissner-Nordström uzay-zaman geometrisinde şok ve seyrelme dalgaları üreten doğrusal olmayan bir hiperbolik model üzerinde çalıştık.
- Model denklemimizi, enerji-tensör denklemleri ile Christoffel sembollerinin Reissner-Nordström metriğine uygulanmasıyla bulunan sıfır basınçlı Euler denklemlerinin çözümünden elde ettik.
- Bu makalede yakın zamanda yapılmış çalışmaların, geometri (uzay-zaman ve metrik) değiştirilerek benzer bulgular elde edilmesi, uygulanan tekniklerin genellenebilir olmasının sorgulanması ve ayrıca bulunacak modelin özgün özeliklerinin incelenip ortaya çıkarılması fikirleri amaçlanmış, bulunan sonuçların onceki çalışmaları destekler nitelikte olduğu gözlemlenmiştir.
- Nümerik sonuçlar oluşturduğumuz şemaların yakınsak olduklarını gösterdi. Dizayn ettiğimiz sonlu hacim şemalarının rölativistik Burgers denkleminin şok ve seyrelme dalgaları barındıran, sürekli olmayan çözümler içerdikleri de numerik olarak gösterdik.
- Bu çalışma sonlu hacim metodunun elde ettiğimiz konservatif model denklemiyle tutarlı olduğunu; bunun neticesinde şok ve seyrelme dalgalarının meydana geldiğini gösterdi. Bu bakımdan Reissner-Nordström uzay-zaman geometrisindeki sonuçlar diğer uzay-zaman geometrilerinde de ettiğimiz bulgularla uyum içindedir.
- Elde ettiğimiz Burgers modelimizde, kütle ve elektrik yükü terimleri sıfır olduğunda klasik Burgers denklemini elde ettik. Ayrıca sadece elektrik yükü sıfır iken, metriğimiz Schwarzschild metriğine, modelimiz de Schwarzschild geometrisindeki Burgers modeline dönüştü.
- Reissner-Nordström uzay-zaman geometrisinde bulduğumuz modelimizin, FLRW geometrisindeki modelin aksine, Schwarzschild geometrisindeki model gibi statik çözümler içerdiğini gözlemledik.
- Statik çözümlerin K, Q, M değerlerine bağlı davranışlarını grafiklerle inceledik.
- Nümerik hesaplar sonucunda elde ettiğimiz şok ve seyrelme dalgalarının tekillik noktasından uzaklaşacak şekilde yayımının gözlemledik.

Teşekkür

Bu çalışma Ortadoğu Teknik Universitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje numarası: GAP-101 – 2018 – 2767.

Kaynakça

[1] Arene M., 2014. Instability of extreme Reissner-Nordström black holes. Imperial College London, Master Thesis, London.

[2] Amorim P., LeFloch P. G., and Okutmustur B. 2008. Finite Volume Schemes on Lorentzian Manifolds. Communications in Mathematical Sciences, Volume 6, Number 4 (2008), 1059-1086.

[3] Ceylan T., and Okutmustur B. 2017. Finite volume approximation of the relativistic Burgers equation on a Schwarzschild-(Anti-)de Sitter spacetime. Turk J Math 41(2017), 1027-1041.

[4] Ceylan T., and Okutmustur B. 2016. Finite Volume Method for the Relativistic Burgers Model on a (1+1)-Dimensional de Sitter Spacetime. Math. Comput. Appl. 21(2), (2016), 16.

[5] Ceylan T., LeFloch P. G., and Okutmustur B. 2018. A Finite Volume Method for the Relativistic Burgers Equation on a FLRW Background Spacetime. Commun. Comput. Phys., 23(2018), 500-519.

[6] Guinot V. 2003. Godunov–type schemes: an introduction for engineers. 1st edition. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 508s.

[7] Kruzkov S.N. 1970. First-order quasilinear equations in several independent variables, Mat. Sbornik 81 (1970), 285-355; English trans. in Math. USSR Sb. 10 (1970), 217-243.

[8] LeFloch P. G., Makhlof H. and Okutmustur B. 2012. Relativistic Burgers equations on a curved spacetime. Derivation and finite volume approximation. SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 50, Number 4, (2012), 2136-2158.

[9] LeFloch P. G., Naves V., and Okutmustur B. 2009. Hyperbolic conservation laws on manifolds. Error estimate for finite volume schemes. Acta Math. Sinica 25 (2009), 1041-1066.

[10] LeFloch P. G.,and Okutmustur B. 2008. Hyperbolic conservation laws on spacetimes. A finite volume scheme based on differential forms. Far East J Math Sci 31 (2008), 49-83.

[11] Nordebo, J. 2016. The Reissner-Nordström metric. Umea University, Department of Physics. Yüksek Lisans Tezi, 46s, Isviçre.

[12] LeVeque R.J. 2002. Finite volume methods for hyperbolic problems. 1st edition. Cambridge, England: Cambridge University Press, 558s.

[13] Nashed G.G.L. 2007. Stability of Reissner–Nordström Black Hole. Acta Physica Polonica, 112 (2007) 13-19.

[14] Van Leer B. 1984. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. SIAM J Sci Stat Comput, 5(2012), 1-20.

[15] Wald R.M. 1984. General Relativity, 1st edition. The University of Chicago Press, 506s.