力学学报
Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics
EI、Scopus 收录
中文核心期刊

泊松白噪声激励下强非线性系统的半解析瞬态解

叶文伟，陈林聪，孙建桥

SEMI-ANALYTICAL TRANSIENT SOLUTIONS FOR STRONG NONLINEAR SYSTEMS EXCITED BY POISSON WHITE NOISE

Ye Wenwei, Chen Lincong, and Sun Jian-Qiao

在线阅读 View online: https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-381

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

随机激励下滞迟系统的稳态响应闭合解

THE CLOSED-FORM SOLUTION OF STEADY STATE RESPONSE OF HYSTERETIC SYSTEM UNDER STOCHASTIC EXCITATION

力学学报. 2017, 49(3): 685-692

结构优化半解析灵敏度及误差修正改进算法

MODIFIED SEMI-ANALYTICAL SENSITIVITY ANALYSIS AND ITS ERROR CORRECTION TECHNIQUES

力学学报. 2018, 50(4): 949-960

一类阻尼控制半主动隔振系统的解析研究

DYNAMICAL ANALYSIS ON A KIND OF SEMI-ACTIVE VIBRATION ISOLATION SYSTEMS WITH DAMPING CONTROL

力学学报. 2020, 52(6): 1743-1754

三维压裂缝网不稳定压力半解析求解方法

SEMI-ANALYTICAL METHOD FOR UNSTABLE PRESSURE OF 3D FRACTURE NETWORK

力学学报. 2021, 53(8): 2246-2256

考虑应变率的广义压电热弹理论及其应用

A GENERALIZED PIEZOELECTRIC-THERMOELASTIC THEORY WITH STRAIN RATE AND ITS APPLICATION

力学学报. 2020, 52(5): 1267-1276

时滞耦合系统非线性动力学的研究进展

REVIEW ON NONLINEAR DYNAMICS IN SYSTEMS WITH COULPLING DELAYS

力学学报. 2017, 49(3): 565-587

关注微信公众号，获得更多资讯信息

动力学与控制

泊松白噪声激励下强非线性系统的半解析瞬态解[1)]

叶文伟 *,†　陈林聪 *,†,2)　孙建桥 **

* (华侨大学土木工程学院, 福建厦门 361021)

† (福建省智慧基础设施与监测重点实验室, 福建厦门 361021)

** (加州大学 Merced 分校工程学院, 美国默塞德 95343)

摘要　自然界与工程中都普遍存在着随机扰动, 且大多数呈现出固有的非高斯性质, 若采用高斯激励建模可能会导致巨大的误差. 泊松白噪声作为一种典型且重要的非高斯激励模型, 已引起了广泛的关注. 目前, 泊松白噪声激励下系统的动态特性分析主要集中于稳态响应的研究, 而针对瞬态响应的求解难度仍较大, 需进一步发展. 本文引入径向基神经网络, 提出了一种泊松白噪声激励下单自由度强非线性系统瞬态响应预测的高效半解析方法. 首先将广义 Fokker-Plank-Kolmogorov (FPK) 方程的瞬态解表示为一组含时变待定权值系数的高斯径向基神经网络; 然后采用有限差分法离散时间导数项, 并结合随机取样技术构造含时间递推式的损失函数; 最后通过拉格朗日乘子法使得损失函数最小化获得时变最优权值系数. 作为算例, 探究了两个经典强非线性系统, 并采用蒙特卡罗模拟方法对解析结果加以验证. 结果表明: 本文方法所获得的瞬时概率密度函数与蒙特卡罗模拟数据吻合地较好, 并且算法具备较高的计算效率. 在系统响应的整个演化过程中, 本文所提方法能够非常有效地捕捉到系统响应在各个时刻下的复杂非线性特征. 此外, 本文方法所获得的高精度半解析瞬态解, 不仅可作为基准解检验其他非线性随机振动分析方法的精度, 对于结构的优化设计也存在巨大的潜在应用价值.

关键词　泊松白噪声, 强非线性系统, 径向基神经网络, 瞬态响应, 半解析解

中图分类号: O324　　**文献标识码**: A　　doi: 10.6052/0459-1879-22-381

SEMI-ANALYTICAL TRANSIENT SOLUTIONS FOR STRONG NONLINEAR SYSTEMS EXCITED BY POISSON WHITE NOISE[1)]

Ye Wenwei *,†　Chen Lincong *,†,2)　Sun Jian-Qiao **

* (*College of Civil Engineering*, *Huaqiao University*, *Xiamen* 361021, *Fujian*, *China*)

† (*Key Laboratory for Intelligent Infrastructure and Monitoring of Fujian Province*, *Xiamen* 361021, *Fujian*, *China*)

** (*School of Engineering*, *University of California*, *Merced*, *Merced*, *CA* 95343, *USA*)

Abstract　Random perturbations are common in nature and engineering, and most of them exhibit inherent non-Gaussian properties. Thus, it may lead to huge errors if Gaussian excitation is used for modeling. As a typical and important non-Gaussian excitation model, Poisson white noise has attracted extensive attention. At present, the dynamic characteristic analysis of the system subjected to Poisson white noise is mainly focused on the study of the stationary response, while the solution of the transient response is still difficult and needs further development. In this paper, an

2022–08–18 收稿, 2022–10–08 录用, 2022–10–09 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (12072118)、福建省杰出青年科学基金 (2021J06024) 和厦门青年创新基金 (3502Z20206005) 资助项目.

2) 陈林聪, 教授, 主要研究方向: 非线性随机振动与控制. E-mail: lincongchen@hqu.edu.cn

引用格式: 叶文伟, 陈林聪, 孙建桥. 泊松白噪声激励下强非线性系统的半解析瞬态解. 力学学报, 2022, 54(12): 3468-3476

Ye Wenwei, Chen Lincong, Sun Jian-Qiao. Semi-analytical transient solutions for strong nonlinear systems excited by Poisson white noise. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(12): 3468-3476

efficient semi-analytical method based on radial basis function neural networks (RBF-NN) are proposed for transient response prediction of single-degree-of-freedom strong nonlinear systems under Poisson white noise excitation. Firstly, the transient solution of the generalized Fokker-Plank-Kolmogorov (FPK) equation is expressed as a set of Gaussian RBF-NN with unknown time-varying weight coefficients. Then, the finite difference method is applied to discretize and approximate the time derivative term, and the loss function with time recurrence is constructed by the random sampling technique. Finally, the time-varying optimal weight coefficients can be determined by minimizing the loss function through the Lagrange multiplier method. As examples, two classical strong nonlinear systems are investigated, and the solutions are validated by the Monte Carlo simulation (MCS) method. The results show that the transient probability density functions (PDFs) obtained by the proposed scheme agree well with the MCS data, and the algorithm has high computational efficiency. In the whole evolution process of the system response, the proposed scheme can effectively capture the complex nonlinear characteristics of the system response at each moment. Furthermore, the high precision semi-analytical transient solution obtained by the proposed scheme can not only be used as a benchmark to test the accuracy of other nonlinear random vibration analysis methods, but also has great potential application value for the structural optimum design.

Key words　Poisson white noise, strong nonlinear systems, radial basis function neural networks, transient responses, semi-analytical solution

引 言

自然界和工程中普遍存在的随机激励, 根据其概率密度分布规律, 可以划分为高斯激励与非高斯激励两大类. 截至目前, 针对高斯激励的相关研究已经较为深入[1-5]. 然而, 现实中大多数随机激励都呈现出固有的非高斯性质, 如公路桥梁上的车辆荷载、地震和火山震导致的地面运动等, 仅用高斯激励进行建模往往是不够的. 例如, 在对系统进行可靠性评估时, 若将原本的非高斯激励直接替换为高斯激励, 往往可能导致巨大的误差, 甚至与客观事实相悖. 因此, 分析非高斯激励下的非线性随机振动具有重要的意义.

泊松白噪声是一种脉冲幅值与到达时刻均为随机的离散随机脉冲序列. 作为一种典型且重要的非高斯激励模型, 泊松白噪声常被用于描述在科学和工程中样本函数不连续的随机现象, 其动态特性已引起了广泛的关注. 当前, 针对泊松白噪声激励下系统的动力学分析主要集中于稳态响应的研究[6-10], 而对于瞬态响应研究仍较为有限. 然而, 瞬态响应预测是非线性随机振动研究的重要内容之一, 对于结构的可靠性评估也具有重要价值.

当前, 预测泊松白噪声激励下非线性系统的瞬态响应的方法主要是蒙特卡罗模拟法[11-12]、路径积分法[13-15] 与广义胞映射法[16-17]. 这些方法均存在一些不足, 例如, 蒙特卡罗模拟法计算代价较为高昂, 尤其模拟尾部概率密度需要大量的样本使其平滑. 路径积分法通过对全局转移概率密度的积分式离散化, 以路径和替代, 这种近似使得计算量较大. 广义胞映射法以离散胞之间的映射关系来表征系统中的状态转移, 但算法较为复杂, 且易因胞流扩张降低方法的准确性. 此外, 上述方法所获得的解均为数值解, 在结构优化设计的应用方面也存在着一些局限性. 因此, 还需发展新的瞬态响应理论分析方法, 以满足工程实际的需要.

作为一种基于函数插值的非迭代算法, 径向基神经网络不仅可避免不必要的、冗长的计算, 而且具有唯一最佳逼近, 收敛速度快等优点. 近几十年来, 径向基神经网络由于其优越的拟合能力备受学者关注[18-19], 并在诸多领域内被广泛应用[20-23]. 值得注意的是, 径向基神经网络在求解各类偏微分方程或复杂非线性方程问题[24-26] 上亦展现出极大的优势. 最近, 有学者创新性地将径向基神经网络运用于求解高斯白噪声激励下非线性系统的半解析瞬态解[27] 与首次穿越问题[28], 这对推动径向基神经网络应用于非线性随机振动的研究具有重要价值.

本文将径向基神经网络方法进一步用于求解泊松白噪声激励下单自由度强非线性系统的非平稳广义 Fokker-Plank-Kolmogorov (FPK) 方程. 首先, 采用

含时变待定参数的径向基神经网络构造广义FPK方程的瞬态解; 然后, 应用有限差分法离散近似时间导数项, 再结合随机取样技术构造一个具有时间递推形式的损失函数. 最后, 时变最优权值系数可通过拉格朗日乘子法使损失函数最小化获得. 通过两个经典强非线性系统的瞬态响应分析证实了该方法的可靠性与准确性, 并分别给出了相应系统响应随时间演化的规律.

1 理论概述

1.1 广义 FPK 方程

考虑一个在泊松白噪声激励下的单自由度强非线性系统, 其运动方程可表述为

$$\ddot{X}+f(X,\dot{X})=\sum_{i=1}^{m}g_i(X,\dot{X})\xi_i(t) \tag{1}$$

其中, $f(X,\dot{X})$ 表示阻尼和恢复力项, $g_i(X,\dot{X})$ 表示随机激励特性, $\xi_i(t)$ 表示一系列相互独立的泊松白噪声, 其形式导数可由复合泊松过程 $C_i(t)$ 定义为

$$C_i(t)=\sum_{k=1}^{N_i(t)}Y_{ik}U_i(t-t_{ik}) \tag{2}$$

式中, $N_i(t)$ 为泊松计数过程, 其平均到达率为 λ_i; Y_{ik} 表示第 k 个脉冲到达时刻 t_{ik} 的随机振幅, 且每个随机振幅 Y_{ik} 与到达时刻 t_{ik} 相互独立; U_i 为单位阶跃函数. 假设 Y_{ik} 具有相同的对称分布, 且均值为零, 复合泊松过程增量的 j 阶矩函数存在下列关系

$$E[(\mathrm{d}C_i)^j]=\lambda_iE[Y_i^j]\mathrm{d}t \tag{3}$$

特别地, 当 λ_i 为常数且 Y_i 独立同分布时, $\{C(t),t\geqslant 0\}$ 为齐次复合泊松过程. 此外, 当 λ_i 趋于无穷时, 泊松白噪声近似为高斯白噪声.

令 $X_1=X$, $X_2=\dot{X}$, 则运动方程 (1) 可转化为如下形式随机微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}X_1=X_2\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}X_2=-f(X_1,X_2)\mathrm{d}t+\sum_{l=1}^{m}g_l(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}C_l(t)+\\&\qquad\sum_{l=1}^{m}\left\{\sum_{j=2}^{\infty}\{\frac{1}{j!}g_l(\boldsymbol{X},t)[\mathrm{d}C_l(t)]^j\}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

系统 (1) 的响应向量 $\boldsymbol{X}=\{X_1,X_2\}^{\mathrm{T}}$ 的转移概率密度函数 $p(\boldsymbol{x},t\,|\,\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 由下列广义 FPK 方程支配

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial x_1}(m_1p)+\frac{\partial}{\partial x_2}(m_2p)+\\&\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial x_2^j}(b_{jj}p)\equiv\Phi_{\mathrm{GFPK}}(p)\end{aligned} \tag{5}$$

其中, $\Phi_{\mathrm{GFPK}}(\cdot)$ 表示广义 FPK 方程微分算子, 相应的系数 m_1, m_2 与 b_{jj} 为

$$\left.\begin{aligned}&m_1=x_2\\&m_2=f(x_1,x_2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{2}E[Y_i^2]g_i\frac{\partial g_i}{\partial x_2}\\&b_{jj}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_iE[Y_i^j]g_i^j(x_1,x_2)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

广义 FPK 方程 (5) 的初始条件与边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x},t|\boldsymbol{x}_0,t_0)=p(\boldsymbol{x},t_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\&\lim_{\boldsymbol{x}\to\pm\infty}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}p(\boldsymbol{x},t|\boldsymbol{x}_0,t_0)=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

值得注意的是, 广义 FPK 方程 (5) 含有无穷偏微导项, 即使是对于简单的线性系统也无法求解, 通常需要根据精度要求进行适当截断. 在下一节中, 将简要介绍径向基神经网络方法求解广义 FPK 方程 (5) 的过程.

1.2 径向基神经网络方法

假设广义 FPK 方程 (5) 的瞬时解为高斯径向基神经网络形式, 即

$$\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k))=\sum_{j=1}^{N_G}w_j(k)G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\sigma}_j) \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$, N_G 为激活函数的个数, $\boldsymbol{w}(k)=(w_1(k),w_2(k),\cdots,w_{NG}(k))$ 是一组时变的待定权值系数, k 记为时间步数, 时刻 $t=k\Delta\tau$, $k=1,2,\cdots n$, $\Delta\tau$ 为时间步长, $G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\sigma}_j)$ 为二元高斯函数形式的激活函数, 即

$$G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\sigma}_j)=\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{j,i}^2}\exp\left[-\frac{(x_i-\mu_{j,i})^2}{2\sigma_{j,i}^2}\right] \tag{9}$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}_j=(\sigma_{j,1},\sigma_{j,2})$ 与 $\boldsymbol{\mu}_j=(\mu_{j,1},\mu_{j,2})$ 分别表示第 j 个二元高斯基函数的标准差与中心.

注意到概率密度函数 (8) 与二元高斯函数 (9) 均满足归一化条件, 即

$$\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k))\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1 \tag{10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\sigma}_j)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1,\ \text{for all}\ j \tag{11}$$

故由式 (10) 和式 (11) 可推导出 $w_j(k)$ 的约束条件为

$$\sum_{j=1}^{N_G} w_j(k)=1 \tag{12}$$

令时间步长 $\Delta\tau$ 是非常小的量, 广义 FPK 方程 (5) 的时间导数项可采用有限差分法近似, 即

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}=\frac{1}{\Delta\tau}[\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k+1))-\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k))]+\varepsilon_t \tag{13}$$

其中, ε_t 为一阶有限差分近似的截断误差. 将试解 (8) 和时间导数项近似关系 (13) 共同代入到广义 FPK 方程 (5) 中, 可得到如下形式的一个局部误差

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k)) =& -\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k))+\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k-1))+\\ & \Phi_{\mathrm{GFPK}}[\tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k))]\Delta\tau=\\ & \tilde{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(k-1))+\sum_{j=1}^{N_G} w_j(k)s_j(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$s_j(\boldsymbol{x})=-G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\sigma}_j)+\Phi_{\mathrm{FPK}}[G_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}_j,\boldsymbol{\sigma}_j)]\Delta\tau \tag{15}$$

随后, 在有限域 $\Omega_S\in\mathbb{R}^2$ 内采用取样技术, 构造一个损失函数 $Loss(\boldsymbol{w}(k))$

$$Loss(\boldsymbol{w}(k))=\frac{1}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S} e^2(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{w}(k)) \tag{16}$$

其中, N_S 为样本点个数. 结合约束条件 (12), 建立一个拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L_s(\boldsymbol{c}(k)) =& Loss(\boldsymbol{w}(k))+\gamma(k)\left(\sum_{j=1}^{N_G} w_j(k)-1\right)=\\ & \frac{1}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S}\left(\sum_{m=1}^{N_G}\sum_{n=1}^{N_G} w_m(k)s_m(\boldsymbol{x}_i)\,s_n(\boldsymbol{x}_i)\,w_n(k)\right)+\\ & \frac{2}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S}\left(\sum_{j=1}^{N_G} s_j(\boldsymbol{x}_i)\,\tilde{p}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{w}(k-1))\,w_j(k)\right)+\\ & \frac{1}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S}\tilde{p}^2(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{w}(k-1))+\gamma(k)\left(\sum_{j=1}^{N_G} w_j(k)-1\right)=\\ & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}(k)+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(k)\left(\boldsymbol{b}_p(k)-\boldsymbol{b}_\gamma\right)+d(k-1) \end{aligned} \tag{17}$$

式中, $\gamma(k)$ 表示拉格朗日乘子, 向量 $\boldsymbol{c}(k)=[\boldsymbol{w}(k),\gamma(k)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{(NG+1)\times 1}$, 向量 $\boldsymbol{b}_\gamma=[0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{(NG+1)\times 1}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 向量 $\boldsymbol{b}_p(k)$ 和参数 $d(k-1)$ 分别定义如下

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{S}=[S_{jl}]=[s_j(\boldsymbol{x}_l)]\in\mathbb{R}^{N_G\times N_S}\\ &\boldsymbol{G}=[G_{jl}]=[G_j(\boldsymbol{x}_l)]\in\mathbb{R}^{N_G\times N_S} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} & \dfrac{1}{N_S}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(N_G+1)\times(N_G+1)} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} & \dfrac{2}{N_S}\boldsymbol{S}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(N_G+1)\times(N_G+1)} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{b}_p(k)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}(k-1)\in\mathbb{R}^{(N_G+1)\times 1} \tag{21}$$

$$d(k-1)=\frac{1}{N_S}\sum_{i=1}^{N_S}\tilde{p}^2(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{w}(k-1)) \tag{22}$$

根据拉格朗日乘子法, 可知式 (17) 最小化的必要性条件为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L_s}{\partial w_n}=0,\ n=1,2,\cdots,N_G\\ &\frac{\partial L_s}{\partial\gamma}=\sum_{j=1}^{N_G} w_j-1=0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式 (23) 可进一步改写为矩阵形式如下

$$\frac{\partial L_s}{\partial\boldsymbol{c}(k)}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{c}(k)+\boldsymbol{b}_p(k)-\boldsymbol{b}_\gamma=\boldsymbol{0} \tag{24}$$

当逆矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 存在, 时变的最优权值向量可通过式 (24) 获得, 即

$$\boldsymbol{c}^*(k)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\left(\boldsymbol{b}_\gamma-\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}(k-1)\right) \tag{25}$$

需要指出的是, 该逆矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 的存在与否在很大程度上取决于数据矩阵 $\boldsymbol{S}$[29]. 实践证明当 $N_S\gg N_G$ 可避免逆矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 的奇异性[28,30].

此外, 当限制所有输出的权值系数 $w_j(k)\geqslant 0$ 时, 概率密度函数 (8) 能够严格保证非负性, 这是一个充分条件. 在大多数情况下, 所获得的 $w_j(k)$ 是非负的, 因而施加约束 $w_j(k)\geqslant 0$ 对概率密度函数解的影响很小. 图 1 中给出了上述算法的简要流程图.

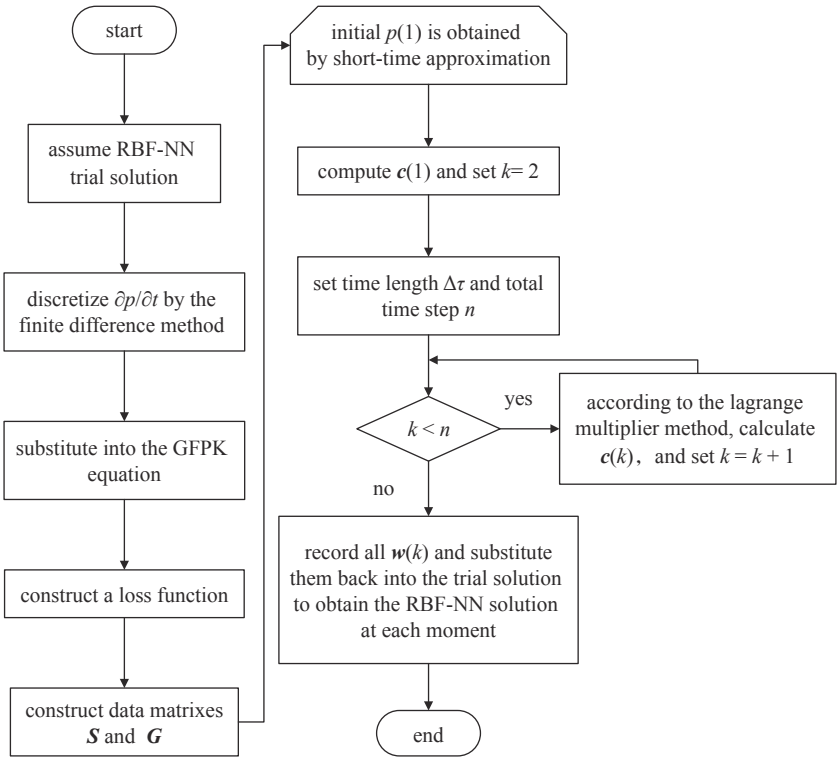


图 1 径向基神经网络算法流程图

Fig. 1 The flowchart of the RBF-NN scheme

2 算例验证

本节将研究两个经典的强非线性系统, 来验证上述方法的有效性, 其中所采用的蒙特卡罗模拟样本数均为 3.0×10^7.

2.1 双稳态 Duffing 系统

考察一个在随机激励下的双稳态 Duffing 振动系统[31], 其运动方程在状态空间中可表示为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t}&=X_2\\ \frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t}&=-\beta_0X_2-\alpha_0X_1-\alpha_1X_1^3+\xi(t)\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

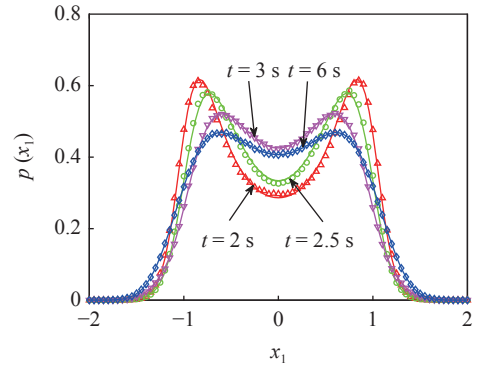
其中, 系统参数 $\beta_0=0.2$, $\alpha_0=-1.5$, $\alpha_1=4.0$, $\xi(t)$ 表示均值为零、脉冲幅值为高斯分布的泊松白噪声, 且脉冲平均达到率 $\lambda=5$, 方差 $E[Y^2]=0.1$.

首先, 在状态空间中选择一个中心域 $\Omega_G=[-2,2]\times[-4,4]$, 将其均匀划分为 50×50 的网格, 取网格节点作为二元高斯基函数的中心 (均值), 则激活函数个数 $\boldsymbol{N}_G=n_c\times n_c=50\times50$, 并选取中心域网格尺寸作为二元高斯基函数的标准差, 即 $\boldsymbol{\sigma}_j=(0.08,0.16)$. 相应地, 选取比中心域稍大的样本域为 $\Omega_S=[-3,3]\times[-6,6]$, 样本点个数 $N_S=n_s\times n_s=100\times100$, 具体参数选取可参见文献 [27-28, 30], 时间步长为 $\Delta\tau=0.01$ s. 考虑到高阶偏导数项对广义 FPK 方程的贡献很小, 此处仅保留前 6 阶偏导数项.

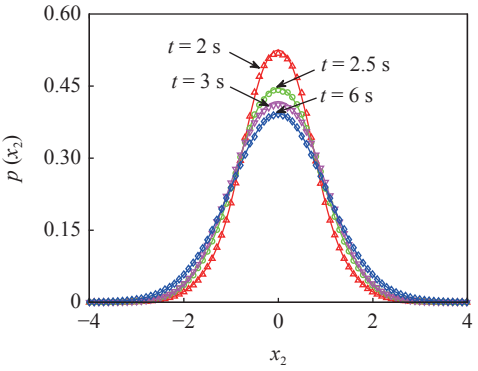
系统 (26) 的初始条件为当 $t=0$ 时, 在 $(x_1,x_2)=(0,0)$ 处的概率为 1 的 Delta 函数. 可通过对动力学方程 (1) 短时近似, 获得转移概率密度函数, 结合路径积分法, 得到时刻 $t=\Delta\tau$ 的概率密度函数 $p(1)$, 再由径向基神经网络拟合 $p(1)$, 相应的权值系数向量设为 $\boldsymbol{c}(1)$. 在此基础上, 可利用递推公式 (25) 得到后续任意时刻的概率密度函数.

图 2 给出了 $t=2$, 2.5, 3, 6 s 时刻分别由径向基神经网络方法和蒙特卡罗模拟得到的边缘概率密度函数结果. 从图 2 可以看出, 系统 (26) 响应在 2~6 s 这一过程中, 位移概率密度函数呈双峰, 而速度概率密度函数为单峰. 并且, 位移概率密度函数的双峰现象逐渐有所抑制, 但仍维持双峰状态, 意味着在泊松白噪声激励下系统 (26) 易发生小偏移. 径向基神经网络解的均方根误差分别为 3.895×10^{-3}, 2.714×10^{-3}, 1.815×10^{-3} 与 1.246×10^{-3}. 由图 2 也可知径向基神经网络结果与蒙特卡罗模拟结果高度吻合. 此外, 径向基神经网络算法所运行的总时间仅为 54.65 s, 远远小于蒙特卡罗模拟所需时间 2.5 h.

图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了本文算法所获得



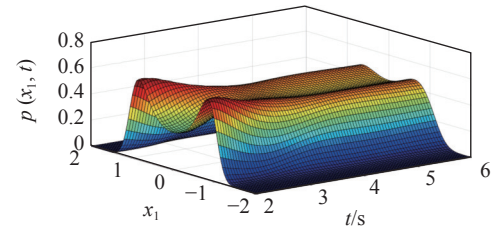
(a) 位移-边缘概率密度函数
(a) Marginal PDFs of the displacement



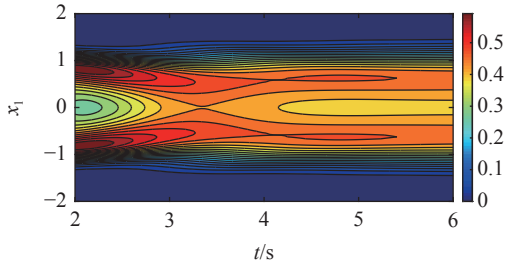
(b) 速度-边缘概率密度函数
(b) Marginal PDFs of the velocity

图 2　不同时刻系统 (26) 的边缘概率密度函数 (实线: 径向基神经网络解, 符号: 蒙特卡罗模拟结果)

Fig. 2　Marginal PDFs of system (26) at different time (lines: RBF-NN solutions, symbols: MCS results)



(a) 概率密度演化曲面
(a) The surface of PDF evolution

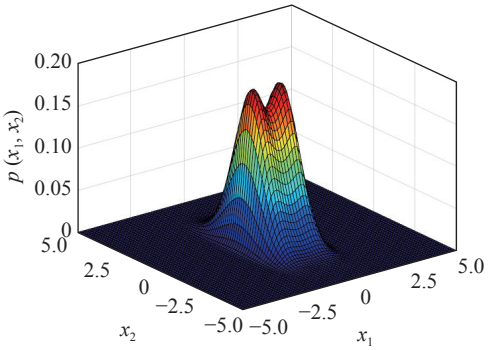


(b) 概率密度等值曲线
(b) The contour of the PDF surface

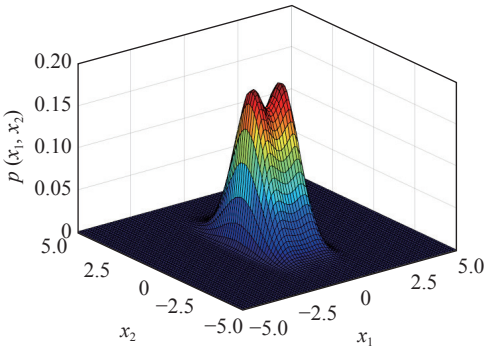
图 3　系统 (26) 的位移概率密度函数演化

Fig. 3　The displacement PDF evolution of system (26)

的位移概率密度函数演化曲面与等值曲线图, 从中可以看出该系统响应的演化规律. 另外, 从图 3 也可以看出, 当 $t = 6$ s 时, 系统 (26) 的响应接近于稳态, 此时系统的联合概率密度函数如图 4(a) 和图 4(b) 所示, 概率密度函数呈现较为陡峭的双峰现象, 但即便如此, 径向基神经网络仍能近乎完美地捕捉其响应的强非线性特征.



(a) 径向基神经网络解
(a) RBF-NN solution



(b) 蒙特卡罗模拟结果
(b) MCS result

图 4　当 $t = 6$ s 时系统 (26) 的联合概率密度函数

Fig. 4　The joint PDF of system (26) at $t = 6$ s

为了进一步了解所提出的算法, 在此探究不同中心域网格数的划分对计算结果的影响. 保持兴趣域大小不变, 选取中心域网格尺寸作为二元高斯函数的标准差, 且 $N_G = n_c \times n_c$. 根据算法, 所获得的各时刻概率密度函数相对于蒙特卡罗模拟结果的均方根误差及计算时间如图 5 所示, 在一定的范围内提高网格点数, 精度会有一定的提高, 但是增加到一定程度后, 精度提高并不明显. 然而, 过多的网格点数会导致计算量大大增加.

2.2　三稳态 Van der Pol-Duffing 系统

考察一个在泊松白噪声激励下的三稳态 Van der Pol-Duffing 系统[32], 其在状态空间中的运动方程形式如下

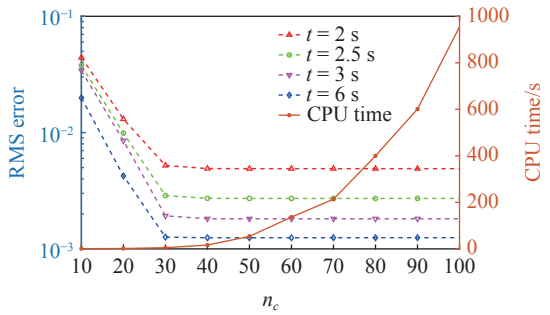


图 5 不同中心域网格数对算法的均方根误差与计算时间的影响

Fig. 5 The effect of different number of meshes in the central domain on the root mean square (RMS) error and CPU time of the algorithm

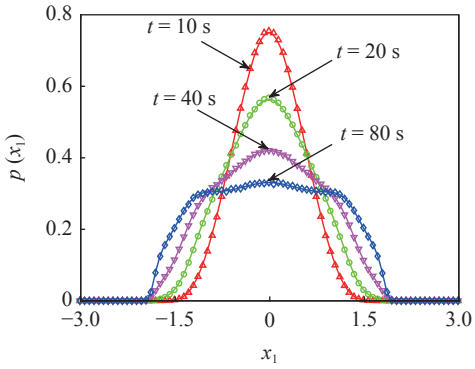
$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t}&=X_2\\ \frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t}&=(-c+a_1X_1^2-a_2X_1^4+a_3X_1^6-a_4X_1^8)X_2-\\ &\quad X_1-bX_1^3+\xi(t)\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

其中, 系统参数设置为: $c=0.116$, $a_1=1.51$, $a_2=2.85$, $a_3=1.693$, $a_4=0.312$, $b=2.0$. $\xi(t)$ 为零均值泊松白噪声, 其脉冲幅值呈高斯分布, 且脉冲平均达到率 $\lambda=5$, 方差 $E[Y^2]=0.02$.

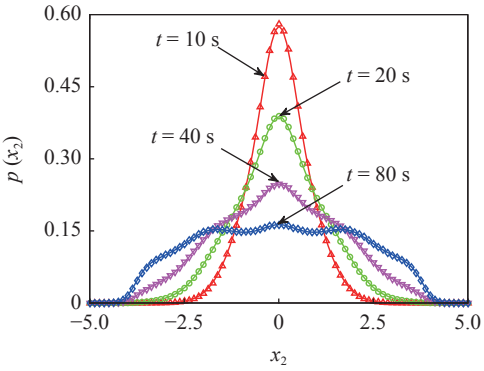
类似地, 在状态空间中选择中心域 $\Omega_G=[-2.5, 2.5]\times[-5, 5]$, 将其均匀划分为 80 × 80 的网格, 取网格节点作为二元高斯函数的中心 (均值), 即 $N_G=80\times80$, 并采取中心域网格尺寸作为二元高斯基函数的标准差, 即 $\boldsymbol{\sigma}_j=(0.062\,5, 0.125)$. 相应地, 样本域 $\Omega_S=[-3.75, 3.75]\times[-7.5, 7.5]$, 样本点个数 $N_S=160\times160$. 时间步长为 $\Delta\tau=0.01$ s. 同样, 广义 FPK 方程也截断至第 6 阶偏导数项.

利用本文算法, 分别计算了系统 (27) 在 $t=0.01\sim80$ s 时刻的瞬时概率密度函数. 部分时刻下的瞬时概率密度函数如图 6 所示. 当 t = 10, 20, 40 和 80 s 时, 相应的径向基神经网络解的均方根误差分别为 8.730×10^{-4}, 3.157×10^{-4}, 6.752×10^{-4} 和 6.816×10^{-4}. 由图 6 可知, 径向基神经网络解与蒙特卡罗模拟数据同样非常吻合, 展现了其较强的拟合能力; 系统响应概率密度函数随着时间演化, 由最先的单峰向逐渐演化为三峰. 此外, 本算例的蒙特卡罗模拟所需时间远超过 6.0 h, 而径向基神经网络算法计算总时间仅需 1900.65 s, 具有非常高的计算效率.

图 7(a) 和图 7(b) 给出了本文方法所获得的位移概率密度函数演化曲面与等值曲线. 从图 7 可以看出该系统响应的演化规律, 位移的概率密度函数由单峰向多峰演化, 并呈向两边扩散的趋势, 且当 $t=$



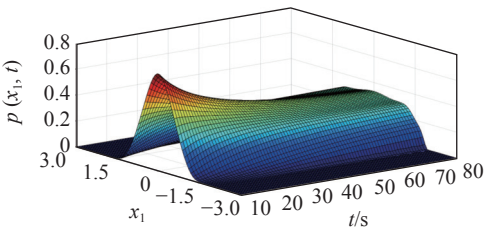
(a) 位移-边缘概率密度函数
(a) Marginal PDFs of the displacement



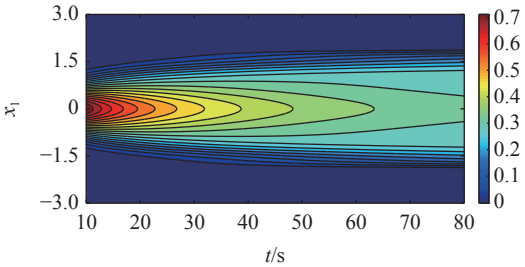
(b) 速度-边缘概率密度函数
(b) Marginal PDFs of the velocity

图 6 不同时刻系统 (27) 的边缘概率密度函数 (实线: 径向基神经网络解, 符号: 蒙特卡罗模拟结果)

Fig. 6 Marginal PDFs of system (27) at different time (lines: RBF-NN solutions, symbols: MCS results)



(a) 概率密度演化曲面
(a) The surface of PDF evolution

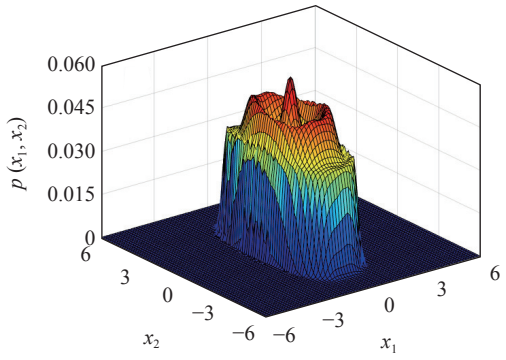


(b) 等概率密度线
(b) The contour of the PDF surface

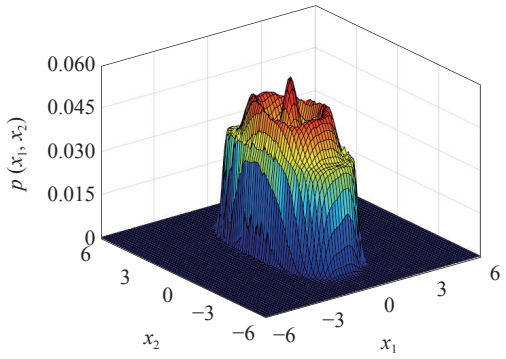
图 7 系统 (27) 的位移概率密度函数演化

Fig. 7 The displacement PDF evolution of system (27)

80 s 时, 系统 (27) 的响应接近于稳态, 此时系统响应的联合概率密度函数如图 8 所示, 呈复杂的“外筒内锥”形, 响应的非线性特征明显且较为复杂. 对比可知, 径向基神经网络解与蒙特卡罗模拟结果相当一致, 所提方法在处理此类复杂非线性问题时也能达到较好的拟合效果.



(a) 径向基神经网络解
(a) RBF-NN solution



(b) 蒙特卡罗模拟结果
(b) MCS result

图 8　当 $t = 80$ s 时系统 (27) 的联合概率密度函数
Fig. 8　The joint PDF of system (27) at $t = 80$ s

3　结 论

综上所述, 本文所提出的径向基神经网络半解析方法应用于单自由度强非线性系统在泊松白噪声激励下的瞬态响应分析是切之有效且具有广阔前景的. 两个不同的强非线性系统实例证明了该方法的适用性. 该方法获得的半解析瞬态解与相应的蒙特卡罗模拟数据相比展现了相当高的精度, 兼具较高的计算效率. 系统瞬态响应的复杂非线性特征能够被很好地捕捉, 从而准确预测泊松白噪声激励下非线性系统响应的时间演化规律, 为结构动力反应分析与可靠度设计提供重要依据. 更重要的是, 不同以往分析方法所获得的数值解, 本文方法所获得的高精度瞬态解为半解析形式, 不仅可作为基准解检验其他非线性随机振动理论方法的精度, 而且对结构的优化设计同样存在重要的应用价值. 当然, 所提方法仍存在一定的局限性, 在推广高维解法时难免受“维数灾”的影响, 使得数据矩阵高度密集. 为此, 进一步结合降维方法, 或相关数据点的优化算法诸如稀疏矩阵、遗传算法等是十分必要的.

参　考　文　献

1 朱位秋, 蔡国强. 随机动力学引论. 北京: 科学出版社, 2017 (Zhu Weiqiu, Cai Guoqiang. Introduction to Stochastic Dynamics. Beijing: Science Press, 2017 (in Chinese))

2 徐伟. 非线性随机动力学的若干数值方法及应用. 北京: 科学出版社, 2013 (Xu Wei. Numerical Analysis Methods for Stochastic Dynamical System. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))

3 Li J, Chen JB. Stochastic Dynamics of Structures. John Wiley & Sons, 2009

4 Sun JQ. Stochastic Dynamics and Control. Elsevier, 2006

5 Zhu WQ, Cai GQ. Nonlinear stochastic dynamics: A survey of recent developments. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 18(6): 551-566

6 Dubkov AA, Kharcheva AA. Steady-state probability characteristics of Verhulst and Hongler models with multiplicative white Poisson noise. *The European Physical Journal B*, 2019, 92(10): 222-227

7 Jia WT, Zhu WQ, Xu Y. Stochastic averaging of quasi partially integrable and resonant Hamiltonian systems under combined Gaussian and Poisson white noise excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, 93(1): 82-95

8 Pan SS, Zhu WQ. Dynamics of a prey-predator system under Poisson white noise excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(5): 739-745

9 Zhu HT. Probabilistic solution of some multi-degree-of-freedom nonlinear systems under external independent Poisson white noises. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2012, 131(6): 4550-4557

10 Wu Y, Zhu WQ. Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems to Poisson white noises. *Physics Letters A*, 2008, 372(5): 623-630

11 Muscolino G, Ricciardi G, Cacciola P. Monte Carlo simulation in the stochastic analysis of non-linear systems under external stationary Poisson white noise input. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38(8): 1269-1283

12 Grigoriu M. Stochastic Calculus: Applications in Science and Engineering. Springer, 2002

13 Ren ZC, Xu W. An improved path integration method for nonlinear systems under Poisson white noise excitation. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 373(5): 125036-125049

14 Lyu MZ, Chen JB, Pirrotta A. A novel method based on augmented Markov vector process for the time-variant extreme value distribution of stochastic dynamical systems enforced by Poisson white noise. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, 80(1): 104974-104989

15 Di Matteo A, Di Paola M, Pirrotta A. Path integral solution for nonlinear systems under parametric Poissonian white noise input. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2016, 44(4): 89-98

16 Yue XL, Xu W, Xu Y, et al. Non-stationary response of MDOF dy-

namical systems under combined Gaussian and Poisson white noises by the generalized cell mapping method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2019, 55(1): 102-108

17 岳晓乐, 徐伟, 张莹等. 加性和乘性泊松白噪声联合激励下光滑非连续振子的随机响应. 物理学报, 2014, 63(6): 82-87 (Yue Xiaole, Xu Wei, Zhang Ying, et al. Stochastic responses of smooth discontinuous oscillator under additive and multiplicative Poisson white noise excitation. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(6): 82-87 (in Chinese))

18 Han HG, Ma ML, Qiao JF. Accelerated gradient algorithm for RBF neural network. *Neurocomputing*, 2021, 441(6): 237-247

19 Krzyżak A, Niemann H. Convergence properties of radial basis functions networks in function learning. *Procedia Computer Science*, 2021, 192: 3761-3767

20 Hao GC, Guo J, Zhang W, et al. High-precision chaotic radial basis function neural network model: Data forecasting for the earth electromagnetic signal before a strong earthquake. *Geoscience Frontiers*, 2022, 13(1): 101315-101324

21 李韶华, 王桂洋, 杨泽坤等. 基于 DRBF-EKF 算法的车辆质心侧偏角与路面附着系数动态联合估计. 力学学报. 2022, 54(7): 1853-1865 (Li Shaohua, Wang Guiyang, Yang Zekun, et al. Dynamic joint estimation of vehicle sideslip angle and road adhesion coefficient based on DRBF-EKF algorithm. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(7): 1853-1865. (in Chinese))

22 Jiang QH, Zhu LL, Shu C, et al. Multilayer perceptron neural network activated by adaptive Gaussian radial basis function and its application to predict lid-driven cavity flow. *Acta Mechanica Sinica*, 2021, 37(12): 1757-1772

23 Pesce V, Silvestrini S, Lavagna M. Radial basis function neural network aided adaptive extended Kalman filter for spacecraft relative navigation. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 96(1): 105527-105536

24 Chen H, Kong L, Leng WJ. Numerical solution of PDEs via integrated radial basis function networks with adaptive training algorithm. *Applied Soft Computing*, 2011, 11(1): 855-860

25 Mai-Duy N, Tanner RI. Solving high-order partial differential equations with indirect radial basis function networks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(11): 1636-1654

26 Li JY, Luo SW, Qi YJ, et al. Numerical solution of elliptic partial differential equation using radial basis function neural networks. *Neural Networks*, 2003, 16(5): 729-734

27 Wang X, Jiang J, Hong L, et al. Random vibration analysis with radial basis function neural networks. *International Journal of Dynamics and Control*, 2021, doi: 10.1007/s40435-021-00893-2

28 Wang X, Jiang J, Hong L, et al. First-passage problem in random vibrations with radial basis function neural networks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2022, 144(5): 051014-051026

29 Nelles O. Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks, Fuzzy Models, and Gaussian Processes. Spring, 2020

30 Ye WW, Chen LC, Qian JM, et al. RBFNN for calculating the stationary response of SDOF nonlinear systems excited by Poisson white noise. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2022, doi: 10.1142/S0219455423500190

31 王迎光, 谭家华. 一强非线性随机振荡系统的路径积分解. 振动与冲击, 2007, 26(11): 153-155, 162 (Wang Yingguang, Tan Jiahua. Path integral solution of a strongly nonlinear stochastic oscillation system. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(11): 153-155, 162 (in Chinese))

32 郝颖, 吴志强. 三稳态 Van der Pol-Duffing 振子的随机 P 分岔. 力学学报, 2013, 45(2): 257-264 (Hao Ying, Wu Zhiqiang. Stochastic P-bifurcation of tri-stable Van der Pol-Duffing oscillator. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(2): 257-264 (in Chinese))