Document généré le 28 août 2025 09:10

L'Actualité économique

Racines unitaires en macroéconomie : le cas d'une variable

Pierre Perron

Volume 68, numéro 1-2, mars–juin 1992

Macroéconomie : développements récents

URI : https://id.erudit.org/iderudit/602070ar
DOI : https://doi.org/10.7202/602070ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Perron, P. (1992). Racines unitaires en macroéconomie : le cas d'une variable. *L'Actualité économique*, *68*(1-2), 325–356. https://doi.org/10.7202/602070ar

Résumé de l'article

La présente étude fournit une introduction à certaines questions et concepts reliés aux racines unitaires autorégressives dans l'analyse statistique de modèles de séries chronologiques à une variable. On y aborde les sujets suivants : représentation des processus stochastiques, procédures de tests, questions reliées à leur puissance, interprétation des résultats et utilité pratique de prendre en compte des problèmes causés par la présence de racines unitaires. L'étude fait ressortir d'une part l'importance de la spécification de la partie déterministe de la série, et d'autre part l'utilité des tests de racines unitaires non pas en tant que moyens de découvrir le « vrai » processus sous-jacent mais en tant que moyens pratiques pour (i) imposer certaines restrictions utiles et (ii) permettre un guide quant à la classe appropriée de distributions asymptotiques à utiliser.

Tous droits réservés © HEC Montréal, 1992

Ce document est protégé par la loi sur le droit d'auteur. L'utilisation des services d'Érudit (y compris la reproduction) est assujettie à sa politique d'utilisation que vous pouvez consulter en ligne.

https://apropos.erudit.org/fr/usagers/politique-dutilisation/

Cet article est diffusé et préservé par Érudit.

Érudit est un consortium interuniversitaire sans but lucratif composé de l'Université de Montréal, l'Université Laval et l'Université du Québec à Montréal. Il a pour mission la promotion et la valorisation de la recherche.

https://www.erudit.org/fr/

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 68, nos 1 et 2, mars et juin 1992

RACINES UNITAIRES EN MACROÉCONOMIE: LE CAS D'UNE VARIABLE*

Pierre PERRON
Département de Sciences Économiques
Centre de recherche et développement en économique (C.R.D.E.)
Université de Montréal

RÉSUMÉ — La présente étude fournit une introduction à certaines questions et concepts reliés aux racines unitaires autorégressives dans l'analyse statistique de modèles de séries chronologiques à une variable. On y aborde les sujets suivants: représentation des processus stochastiques, procédures de tests, questions reliées à leur puissance, interprétation des résultats et utilité pratique de prendre en compte des problèmes causés par la présence de racines unitaires. L'étude fait ressortir d'une part l'importance de la spécification de la partie déterministe de la série, et d'autre part l'utilité des tests de racines unitaires non pas en tant que moyens de découvrir le «vrai» processus sous-jacent mais en tant que moyens pratiques pour (i) imposer certaines restrictions utiles et (ii) permettre un guide quant à la classe appropriée de distributions asymptotiques à utiliser.

ABSTRACT — This study presents an introduction to various concepts and issues related to autoregressive unit roots in the analysis of univariate time series models. The following topics are discussed: representation of the stochastic processes, testing procedures, issues related to the power of the tests, interpretation of the results and the practical usefulness of taking into account the problems caused by these unit roots. The study highlights the following points. First, unit root tests are highly dependent upon the specification of the deterministic component of the series. Secondly, tests for unit roots do not have much usefulness as a means of uncovering some kind of underlying «true process» but should be viewed rather as a device to 1) impose some useful restrictions, and ii) provide a guide to the appropriate asymptotic distribution to be used in subsequent steps.

INTRODUCTION

Au cours de la dernière décennie, un nombre important de travaux, tant théoriques qu'empiriques, ont été publiés sur les problèmes de racines unitaires dans

* Ce texte est une version plus complète de la section 2 du texte de Campbell et Perron (1991). Je tiens à remercier John Campbell pour ses commentaires, René Garcia pour son aide exceptionnelle à la révision de ce texte et les organismes suivants pour leur soutien financier: le Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche du Québec (FCAR), le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (C.R.S.H.) et le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (C.R.S.N.G.).

la représentation des séries chronologiques macroéconomiques. L'élement catalyseur de cette série de recherches a certes été l'étude de Nelson et Plosser (1982), qui a démontré, en utilisant les tests de Dickey et Fuller (1979), que la plupart des séries macroéconomiques étaient probablement caractérisées par une telle racine unitaire dans leur représentation autorégressive. L'importance du problème vient du fait que la présence d'une racine unitaire autorégressive influe considérablement sur l'interprétation de certaines théories, et plus encore sur les méthodes statistiques et distributions asymptotiques à utiliser. Citons comme exemple la théorie de la consommation et du revenu permanent avancée par Hall (1978) où certains problèmes causés par la présence d'une racine unitaire sont analysés par Mankiw et Shapiro (1985).

Les études qui ont suivi les travaux de Nelson et Plosser ont analysé ces problèmes dans des modèles à une ou plusieurs variables. Une partie de cette littérature, se concentrant sur les propriétés des séries à une variable, a analysé la question de persistance des fluctuations macroéconomiques [voir, entre autres, Campbell et Mankiw, 1987; Christiano et Eichenbaum, 1990; Cochrane, 1988; et Perron, 1989a]. Pour les modèles à plusieurs variables, les développements théoriques se sont axés sur la question de cointégration qui permet à certaines combinaisons linéaires d'un ensemble de séries, possédant chacune une racine unitaire, d'être à leurs tour stationnaires [voir, en particulier, Granger, 1981, 1983; Granger et Weiss, 1983; Engle et Granger, 1987].

La présente étude a pour but de faire un survol de certaines questions reliées aux racines unitaires dans les modèles à une variable. Quoique les modèles à plusieurs variables soient plus pertinents pour l'analyse de la plupart des problèmes empiriques macroéconomiques, nous pensons que les modèles à une variable sont indispensables pour comprendre les problèmes de base et les procédures de tests. De plus, pour certaines questions, la généralisation aux modèles à plusieurs variables se réalise facilement.

Notre intention n'est pas de fournir un recueil exhaustif des diverses procédures disponibles. Nous voulons simplement discuter intuitivement des problèmes qui se présentent et des méthodes à utiliser pour les résoudre. Pour des survols plus spécifiques, nous renvoyons le lecteur aux études de Dickey, Bell et Miller (1986), Perron (1988a), Diebold et Nerlove (1990), Dolado, Jenkinson et Sosvilla-Rivero (1990), Phillips (1988) et Phillips et Loretan (1991).

Le plan de l'étude s'établit comme suit. La section 1 discute de façon détaillée des diverses représentations d'une série chronologique macroéconomique et de la question de persistance des chocs. La section 2 présente une analyse des méthodes utilisées pour tester la présence d'une racine unitaire et des problèmes qui se posent souvent dans leur application. Nous insistons en particulier sur les problèmes qui se rattachent à la spécification de la composante déterministe de la série. Nous décrivons plusieurs procédures et comparons leurs forces et leurs faiblesses respectives. La section 3 aborde les problèmes méthodologiques posés par la quasi-équivalence des processus dits à «tendance stationnaire» et «stationnaires en premières différences». La section 4 conclut avec quelques commentaires. L'étude

s'organise autour de l'énoncé de quelques «règles». Plus que des propositions formelles, il faut y voir un procédé pour mettre en exergue les idées importantes.

1. REPRÉSENTATION D'UNE SÉRIE CHRONOLOGIQUE

Il est utile de débuter en décomposant une certaine série macroéconomique y_t en une somme de deux composantes aux propriétés différentes, soit:

$$y_t = TD_t + Z_t. \tag{1.1}$$

où TD_t désigne la partie déterministe de la série (en général, une fonction non stationnaire) et Z_t la partie stochastique de moyenne nulle par hypothèse. Comme nous allons le voir, l'hypothèse de la racine unitaire concerne le comportement de la série Z_t. Cependant, la spécification de la composante déterministe TD_t a des conséquences importantes sur les tests d'hypothèses visant à établir la présence d'une racine unitaire. En principe, de multiples spécifications sont possibles pour cette fonction TD_t. En pratique, la spécification qui se retrouve le plus couramment fait de TD_t un polynôme de premier degrée en t:

$$TD_t = \kappa + \delta t. \tag{1.2}$$

L'essentiel de notre discussion portera sur la spécification (1.2), mais nous verrons plus loin d'autres spécifications récemment proposées. Pour simplifier l'exposition, nous postulons que la composante stochastique Z_t suit un processus autorégressif et de moyenne mobile (ARMA) de la forme :

$$A(L)Z_t = B(L)e_t, \tag{1.3}$$

où $A(L)$ et $B(L)$ sont des polynômes en L (l'opérateur de retard tel que $Lx_t = x_{t-1}$) de degré p et q respectivement. Le processus stochastique $\{e_t\}$ est une séquence de termes bruit blanc, c.-à-d. dont les composantes sont distribuées de façon identique et indépendante. Puisque la partie déterministe TD_t incorpore la moyenne de y_t, Z_t a une moyenne nulle. Tout au long de cette étude, nous supposons que les racines de $A(z) = 0$ sont soit égales à 1, soit de module supérieur à un et que les racines du polynôme $B(z) = 0$ sont toutes hors du cercle unitaire[1]. Pour bien comprendre les implications de l'hypothèse d'une racine unitaire, il est utile de décomposer Z_t, la partie stochastique, comme suit:

$$Z_t = TS_t + C_t, \tag{1.4}$$

où TS_t est un processus non stationnaire caractérisant la composante stochastique de la fonction de tendance associée à la série $\{y_t\}$, et C_t est la composante cyclique. Nous faisons l'hypothèse que cette composante cyclique est un processus stationnaire de moyenne zéro. La décomposition (1.4) n'est, en général, pas unique et dépend du postulat fait quant à la corrélation entre les chocs perturbant C_t et TS_t. TS_t étant une composante non stationnaire, les chocs aléatoires touchant TS_t ont

1. Il est entendu que des conditions plus générales pourraient être spécifiées telles que des conditions dites de *mixing* qui permettent un certain degré d'hétérogénéité et un ensemble plus riche de corrélations temporelles [voir, par exemple, Phillips, 1987; Phillips et Perron, 1988]. Les questions que nous abordons sont cependant plus faciles à illustrer dans le cadre traditionnel du modèle ARMA.

un effet permanent sur le niveau de la série y_t. Par contre, les chocs touchant C_t peuvent ou non avoir un effet permanent sur le niveau de y_t. Nous désignons à présent par T_t la fonction de tendance ou composante non stationnaire et la définissons comme suit : $T_t = TD_t + TS_t$. En d'autres termes, la fonction de tendance est la somme des composantes non stationnaires, à la fois déterministe et stochastique. Nous nous retrouvons donc avec la décomposition suivante d'une série macroéconomique :

$$y_t = TD_t + TS_t + C_t. \tag{1.5}$$

Très souvent, les analyses empiriques exigent d'isoler la composante cyclique C_t. Pour ce faire, on soustrait de la série une estimation des composantes TD_t et TS_t. Il est toutefois important de noter que le comportement de la partie cyclique ainsi estimée change de façon considérable selon 1) les hypothèses réalisées quant à la composante déterministe TD_t et 2) la présence ou l'absence de la composante stochastique non stationnaire TS_t.

Notons en passant qu'en général, chacune des composantes de y_t peut contenir des éléments saisonniers. Malgré l'importance de ces éléments dans les applications empiriques, nous laisserons de côté le traitement des composantes saisonnières et nous poursuivrons en supposant qu'elles sont absentes. Ceci simplifie l'analyse sans perte en généralité par rapport aux points que nous voulons illustrer. En effet, les principes que nous allons énoncer demeurent valides dans leur grande majorité lorsque les effets saisonniers sont pris en compte.

La décomposition (1.5) permet une caractérisation simple de la question de racine unitaire. En effet, faire l'hypothèse que la série y_t est caractérisée par la présence d'une racine unitaire revient à faire l'hypothèse que la composante stochastique non stationnaire TS_t est non nulle. Si $TS_t = 0$ pour toute valeur de t, y_t est alors à tendance stationnaire dans le sens où y_t est caractérisée par des fluctuations transitoires C_t autour d'une fonction de tendance déterministe TD_t.

Puisque nous avons spécifié $Z_t = TS_t + C_t$ et imposé une structure ARMA (p, q) pour Z_t, l'hypothèse quant à la nullité de TS_t peut se traduire par une hypothèse sur les coefficients du polynôme autorégressif $A(L)$. Dans le cas où $TS_t = 0$ $(\forall t)$, Z_t est égale à C_t et est donc stationnaire, ce qui signifie que les racines du polynôme $A(z) = 0$ sont toutes hors du cercle unitaire. Par contre, si le polynôme $A(z) = 0$ contient une racine sur le cercle unitaire, Z_t est non stationnaire et TS_t est non nulle. Dans ce qui suit, nous supposons la présence d'au plus une racine unitaire réelle du polynôme $A(z) = 0$, toutes les autres racines étant hors du cercle unitaire. Dans ce cas, si Z_t a une racine unitaire $(1 - L)Z_t$ est un processus stationnaire[2].

---

2. Pour simplifier l'exposition, nous considérons seulement les cas où la composante stochastique est soit stationnaire soit contient une seule racine unitaire. C'est donc dire que nous ne considérons pas les cas où une série peut contenir plus d'une racine unitaire. La plupart des questions abordées dans cette étude s'appliquent aussi au cas de racines unitaires multiples. Pour une procédure générale qui permet de tester un nombre arbitraire de racines unitaires, voir Pantula (1991) et Dickey et Pantula (1987).

Nous discutons maintenant quelques modèles qui ont été proposés et analysons leurs implications quant à la décomposition (1.5).

Exemple 1 (Modèle *TS*): Un des modèles les plus communs est le modèle *TS* pour «tendance stationnaire». La partie déterministe de la fonction de tendance est donnée par (1.2), TS_t est zéro pour toutes les périodes et $Z_t = C_t$ est un processus ARMA stationnaire.

Exemple 2 (Modèle *DS*): L'alternative la plus populaire au modèle *TS* est le modèle *DS* pour «stationnaire en différence». La composante déterministe de la fonction de tendance est encore spécifiée par (1.2) mais la composante stochastique Z_t est décrite par un processus ARMA avec une racine unitaire dans le polynôme autorégressif. Pour décrire la décomposition de Z_t en sa partie non stationnaire TS_t et sa partie stationnaire C_t, nous poursuivons comme suit. En isolant la racine unitaire, nous pouvons écrire $A(L) = (1 - L)\,A^*(L)$ où le polynôme $A^*(L)$ est tel que les racines de $A^*(z) = 0$ sont toutes hors du cercle unitaire. Définissons par $\psi(L) = A^*(L)^{-1}B(L)$ la représentation de moyenne mobile de la première différence de Z_t et désignons par $\psi^*(L)$ l'expression $(1 - L)^{-1}\,[\psi(L) - \psi(1)]$. Nous avons alors $(1 - L)Z_t = [\psi(1) + (1 - L)\,\psi^*(L)]e_t$ et

$$y_t = \kappa + \delta t + \psi(1)S_t + \psi^*(L)e_t \tag{1.6}$$

où $S_t = \Sigma_{j=1}^{t} e_j$ est une promenade aléatoire de moyenne 0. La relation (1.6) est souvent appelée la décomposition de Beveridge et Nelson (1981). Nous avons donc la décomposition suivante: $TD_t = \kappa + \delta t$, $TS_t = \psi(1)S_t$ et $C_t = \psi^*(L)e_t$. La fonction de tendance T_t contient donc une composante stochastique $\psi(1)S_t$ qui affecte le niveau (mais non la pente) à toutes les périodes. Notons finalement que le modèle *DS* contient le modèle *TS* comme cas spécial lorsque $\psi(1) = 0$, c'est-à-dire lorsque la somme des coefficients de la représentation moyenne mobile de $(1 - L)Z_t$ est nulle.

Exemple 3 («Modèle à composantes inobservables»): Les modèles *TS* et *DS* peuvent être perçus comme étant des modèles de formes réduites. Un modèle structurel populaire est le modèle à composantes latentes [voir Harvey, 1984; Clark, 1987, 1988; et Watson, 1986 entre autres]. Considérons le cas spécial suivant :

$$y_t = W_t + C_t \tag{1.7}$$

$$W_t = W_{t-1} + \beta + \eta_t$$

où C_t est un processus ARMA stationnaire de la forme $A(L)C_t = B(L)e_t$ et η_t est une séquence de variables i.i.d. entre elles et indépendantes de la séquence C_t. Le modèle à variables latentes spécifie deux sources indépendantes de chocs pour la composante stochastique de la tendance et pour la composante cyclique. Si la variance de η_t tend vers zéro, (1.7) se réduit à un modèle *TS*. Dans le cas général, il peut être démontré que la forme réduite du modèle (1.7) est un modèle *DS* avec contraintes [voir Clark, 1987; Watson, 1986]. En particulier, le modèle à variables latentes (1.7) contraint $\psi(1)$ en (1.6) à être plus petit que 1, c'est-à-dire que le modèle contraint l'effet à long terme des chocs sur la variable y_t à ne pas être plus grand que l'effet immédiat.

Exemple 4 (Modèle non linéaire avec accroissement): Récemment, certains auteurs ont proposé une classe de modèles structurels non linéaires. Ces modèles tentent d'introduire l'idée que deux types de chocs aléatoires fondamentalement différents sont présents. Certains, qu'on peut appeler «chocs majeurs», ont des réalisations occasionnelles et affectent la fonction de tendance de la série de façon permanente. Les autres, appelés «chocs réguliers», se produisent période après période et peuvent ou non affecter le niveau de la série de façon permanente. Dans ce cadre d'analyse, la question de racine unitaire se pose, pour savoir si les «chocs réguliers» ont des effets permanents ou non sur le niveau de la série. Une classe de modèles suivant cette approche a été proposée par Hamilton (1989). Le modèle structurel est spécifié par:

$$y_t = N_t + Z_t, \tag{1.8}$$

où Z_t est le processus ARMA spécifié par (1.3) dans lequel le polynôme $A(L)$ contient une racine sur le cercle unitaire. La fonction de tendance N_t est décrite par:

$$\begin{aligned} N_t &= \alpha_0 + \alpha_1 s_t + N_{t-1} \\ &= N_0 + (\alpha_0 + \alpha_1 \Sigma_{j=1}^{t} s_j)t \end{aligned} \tag{1.9}$$

où s_t sont les realisations 0 ou 1 de la variable aléatoire S_t qui décrit les deux états possibles (non observés) du système. Les transitions entre ces états sont modélisées par un processus de Markov d'ordre un où $\Pr[S_t = 1 \mid S_{t-1} = 1] = p$, $\Pr[S_t = 0 \mid S_{t-1} = 1] = 1 - p$, $\Pr[S_t = 0 \mid S_{t-1} = 0] = q$ et $\Pr[S_t = 1 \mid S_{t-1} = 0] = 1 - q$. Le modèle spécifie donc une fonction de tendance avec changements de pente occasionnels. La fréquence de ces changements dépend des paramètres de transition p et q. Notons aussi que le modèle (1.8) et (1.9) spécifie une composante stochastique Z_t où les «chocs réguliers» ont un effet permanent dû à la présence d'une racine unitaire dans le polynôme autorégressif $A(L)$. Lam (1990) a construit un algorithme d'estimation qui permet de ne pas imposer *a priori* une racine unitaire dans Z_t. En principe, le modèle de Hamilton est imbriqué dans le modèle de Lam. Cependant, les difficultés techniques sont telles qu'il n'est pas possible, à l'heure actuelle, de dériver des procédures asymptotiques valides pour tester l'hypothèse nulle d'une racine unitaire dans le processus Z_t dans ce cadre général.

Récemment, Perron (1989a) a avancé l'idée qu'un modèle avec changements de pente très rares peut constituer une approximation utile pour plusieurs séries macroéconomiques. En fait, l'argument de Perron (1989a) est qu'un modèle avec un simple changement de pente unique peut être suffisant pour caractériser plusieurs séries macroéconomiques importantes. Un exemple intéressant est le comportement des séries du PNB d'après-guerre pour divers pays qui montrent une baisse marquée du taux de croissance autour de 1973. En contraignant *a priori* le nombre de changements de pente, il devient possible de construire des procédures asymptotiquement valides pour tester l'hypothèse nulle d'une racine unitaire dans Z_t. Dans ce cadre restrictif mais empiriquement utile, la forme réduite de la série est décrite par (1.1) où la composante déterministe est donnée par:

$$TD_t = \mu + \beta_0 t + \beta_1 (t - T_B)\ 1(t - T_B), \tag{1.10}$$

où $1(\cdot)$ est la fonction indicatrice. La variable T_B représente la date du changement de pente. Notons que T_B peut être considérée comme une variable connue *a priori* ou comme une variable aléatoire inconnue (les procédures de tests d'hypothèses étant différentes dans chacun des cas). Si Z_t contient une racine unitaire, la fonction de tendance contient aussi une composante stochastique de forme similaire à celle du processus *DS*.

Étant donné la discussion qui précède, il est clair que la composante décrite par (1.10) n'est pas strictement «déterministe». En effet, le changement de pente est dû à un «choc majeur» aléatoire. La procédure est cependant justifiée par le désir de séparer l'effet des «chocs majeurs» de celui des «chocs réguliers». Cette stratégie est semblable à l'analyse d'interventions de Box et Tiao (1975) où l'effet des interventions est éliminé de la partie stochastique et introduit dans la partie déterministe.

Un modèle semblable peut être construit pour analyser des séries avec changements occasionnels du niveau de la fonction de tendance. Le modèle est semblable au système (1.8) et (1.9), sauf que N_t est maintenant décrit par $N_t = \alpha_0 + \alpha_1 s_t + \beta t$. Perron (1989a) a suggéré qu'un tel modèle, avec un seul changement de niveau, est utile pour plusieurs séries macroéconomiques, surtout celles couvrant la période du Krach de 1929. Il devient alors possible de tester l'hypothèse nulle d'une racine unitaire dans le processus caractérisant les «chocs réguliers» en spécifiant une composante déterministe de la forme $TD_t = \alpha_0 + \alpha_1 1(t > T_B) + \beta t$. Suivant les arguments décrits ci-dessus, les modèles de formes réduites proposés par Perron (1989a) peuvent être considérés comme des approximations non linéaires de modèles structurels avec changements occasionnels de pente et/ou de niveau similaires à ceux de Hamilton (1989). Le postulat implicite, pour une série particulière, est qu'un seul «choc majeur» s'est réalisé dans l'échantillon disponible. Bien sûr, avec d'autres séries ou un ensemble de données échelonnées sur une plus longue période, il peut être nécessaire de permettre plus d'un changement.

Exemple 5 (Modèle non linéaire sans accroissement): Chen et Tiao (1990) ont proposé un modèle ARMA avec changement de niveau aléatoire. Le processus est décrit par

$$y_t = \mu_t + Z_t \tag{1.11}$$

où Z_t est un processus ARMA stationnaire tel que décrit par (1.3), toutes les racines du polynome $A(z)$ étant hors du cercle unitaire. Le niveau de la série μ_t est stochastique et décrit par la structure suivante:

$$\mu_t = j_t \eta_t + \mu_{t-1} \qquad (t = 2, \ldots, T) \tag{1.12}$$

où $\{\eta_t\}$ est i.i.d. $N(0, \tau\sigma^2)$, $\{j_t\}$ est i.i.d. suivant une loi de probabilité telle que $\Pr[j_t = 1] = \lambda$ et $\Pr[j_t = 0] = 1 - \lambda$. Les variables aléatoires $\{e_t\}$, $\{\eta_t\}$ et $\{j_t\}$ sont mutuellement indépendantes et μ_1 est le niveau initial du processus considéré comme une variable aléatoire inconnue. La variable j_t est un indicateur de

la présence ou de l'absence d'un changement de niveau, la fréquence de ces changements étant fonction du paramètre λ. Il est à noter que Chen et Tiao (1990) imposent *a priori* que la composante Z_t est stationnaire et non caractérisée par la présence d'une racine unitaire. Dans bien des cas, il est intéressant de tester l'hypothèse qu'une certaine série, démontrant des changements apparents de niveau, est caractérisée par une composante Z_t contenant une racine unitaire. Dans le cadre général du modèle (1.11) et (1.12), de telles procédures ne sont pas disponibles. Cependant, en contraignant *a priori* le nombre de changements de niveau, il devient possible de faire des tests d'hypothèses à cet effet. Perron (1990a) considère le cas extrême où un seul changement de niveau se produit à l'intérieur de l'échantillon. L'attrait d'un tel cas simplifié est qu'il permet une approximation utile de plusieurs séries macroéconomiques. Suivant l'approche de l'exemple 4, un tel modèle peut être décrit en spécifiant une composante déterministe de la forme:

$$TD_t = \mu_1 + \mu_2 \, 1(t > T_B). \tag{1.13}$$

Les procédures d'hypothèse varient selon la nature des conditions imposées à la variable T_B, notamment si elle peut être considérée comme connue *a priori* ou comme une variable aléatoire inconnue.

Mesures de la persistance à long terme

La décomposition de Beveridge et Nelson (1981) énoncée en (1.6) peut servir à développer des mesures de l'importance de la composante stochastique, TS_t, de la fonction de tendance quant au comportement de la variable y_t. Selon Campbell et Mankiw (1987), la quantité $\psi(1)$ est une mesure naturelle de persistance puisqu'elle représente le rapport de l'effet de long terme sur l'effet immediat d'un choc e_t. Si $\psi(1) > 1$, l'effet à long terme d'un choc sur y_t est plus grand que son effet immédiat; par contre si $\psi(1) < 1$, l'effet des chocs tend à s'amenuiser. Le cas où y_t est une marche aléatoire implique $\psi(1) = 1$, tandis que le modèle à tendance stationnaire implique $\psi(1) = 0$. Cochrane (1988) a proposé une mesure analogue qui est le rapport de la variance des innovations de la composante TS_t par rapport à la variance des innovations de la séries y_t. Ce ratio de variances peut s'écrire $\psi(1)^2 \sigma_e^2 / \sigma_{\Delta y}^2$. La quantité $\psi(1)$ est aussi étroitement reliée à la fonction de densité spectrale de Δy_t evaluée à la fréquence zéro. Si $h_{\Delta_y}(0)$ désigne cette densité spectrale à la fréquence zéro, nous avons $h_{\Delta_y}(0) = (1/2\,\pi)\,\psi(1)^2\,\sigma_e^2$. En particulier $\psi(1) = 0$ si et seulement si $h_{\Delta_y}(0) = 0$, auquel cas il n'y a pas d'effets de long terme. Il est important de réaliser que ces mesures de persistance sont valides uniquement si le processus générateur de y_t n'est pas affecté par un changement structurel de la pente de la fonction de tendance déterministe. S'il y a un changement de pente à l'intérieur de l'échantillon, ces mesures sont biaisées vers le haut même asymptotiquement (pour une démonstration, voir Perron (1988b)). On peut trouver là l'explication des résultats différents obtenus par Campbell et Mankiw (1987) et Cochrane (1988), les premiers ayant utilisé des données trimestrielles d'après-guerre, alors que le second a utilisé des données annuelles couvrant une plus longue période. Dans ce dernier cas, l'effet de la baisse du taux de croissance du PNB après 1973 sur la mesure est en effet moins important que dans le premier cas.

2. TESTER L'HYPOTHÈSE D'UNE RACINE UNITAIRE

Nous commençons notre discussion des procédures de test de l'hypothèse nulle d'une racine unitaire en considérant le cas simple où la composante stochastique Z_t est un processus autorégressif d'ordre un sans terme de moyenne mobile, à savoir $(1 - \alpha L) Z_t = e_t$ avec e_t un bruit blanc. Dans ce cas simplifié, une racine unitaire est présente si $\alpha = 1$, tandis que le processus est stationnaire par rapport à la fonction de tendance déterministe si $\alpha < 1$. Quoique ce cas simplifié ne soit pas réaliste pour la plupart des séries macroéconomiques, il permet une discussion plus aisée des questions se rapportant aux procédures d'hypothèses. Nous indiquerons par la suite les modifications à incorporer pour tenir compte de la présence de corrélations temporelles additionnelles.

2.1 *Spécification des variables indépendantes déterministes*

Désignons par DR_t l'ensemble des variables déterministes incluses dans la procédure de test d'hypothèse. Dans la plupart des applications $DR_t = \{1\}$, une constante, ou $DR_t = \{1, t\}$, ce qui permet un polynôme de degré un en t. Puisque nous sommes intéressés aux propriétés de la composante stochastique, une stratégie naturelle est, dans un premier temps, d'estimer la partie déterministe et de la soustraire de la série originale pour ensuite, dans un deuxième temps, analyser le comportement des résidus d'une projection de y_t sur DR_t. L'hypothèse de la racine unitaire peut être testée en estimant les deux régressions suivantes :

$$y_t = \hat{\theta}' DR_t + \tilde{y}_t, \tag{2.1}$$

$$\tilde{y}_t = \hat{\alpha} \tilde{y}_{t-1} + \hat{u}_t,$$

et en utilisant le test t pour l'hypothèse $\alpha = 1$ que nous dénotons par $t_{\hat{\alpha}}$.

Dans la plupart des cas, cette procédure en deux étapes est asymptotiquement équivalente à la procédure usuelle en une étape où les variables déterministes DR_t^* sont incluses dans la régression suivante :

$$y_t = \theta' DR_t^* + \alpha y_{t-1} + u_t. \tag{2.2}$$

Lorsque la composante déterministe est linéaire, l'ensemble des variables déterministes à inclure dans les procédures en une ou deux étapes sont les mêmes, c.-à-d. $DR_t^* = DR_t$. Quand la fonction déterministe est non linéaire, l'ensemble des variables à inclure dans la procédure en une étape est habituellement plus grand[3].

Il est utile de donner quelques exemples pour illustrer la différence entre la spécification d'un processus générateur de données (D.G.P.) et un modèle de régression. Pour ce faire, nous utilisons la notation DV_t pour définir l'ensemble des variables déterministes sous le modèle générateur de données admis par hypo-

3. Notons cependant que l'équivalence asymptotique des procédures en une et deux étapes peut ne pas tenir lorsque des fonctions déterministes non linéaires sont considérées, par exemple en postulant la possibilité d'un changement de moyenne. À ce propos, voir Perron et Vogelsang (1992).

thèse. Considérons d'abord le cas où $DV_t = \{1, t\}$ et, en conséquence, où y_t est généré par le modèle:

$$y_t = \mu + \beta t + Z_t, \tag{2.3}$$

$$Z_t = \alpha Z_{t-1} + e_t.$$

Une représentation alternative du mécanisme générateur de données est:

$$y_t = (1 - \alpha)\mu + \beta\alpha + (1 - \alpha)\beta t + \alpha y_{t-1} + e_t. \tag{2.4}$$

Si le modèle de régression (2.2) est spécifié par:

$$y_t = a + bt + \alpha y_{t-1} + u_t, \tag{2.5}$$

nous avons les relations $a = (1 - \alpha)\mu + \beta\alpha$ et $b = (1 - \alpha)\beta$. L'hypothèse d'une racine unitaire implique donc les relations suivantes quant aux paramètres de (2.5): $\alpha = 1$, $b = 0$ et $a = \beta$. L'argument suivant est fréquemment avancé: puisque $b = 0$ si $\alpha = 1$, la variable de temps est superflue dans l'équation (2.5). L'argument ne tient pas compte toutefois du fait que, sous l'hypothèse alternative, $b \neq 0$ et que la variable de temps doit donc être introduite pour permettre un modèle de régression qui admette comme cas spéciaux à la fois le modèle sous l'hypothèse nulle et celui sous l'hypothèse alternative.

Considérons maintenant un exemple où la composante déterministe de la tendance est non linéaire et, pour être concret, supposons qu'il y ait un changement de niveau à une date T_B. Dans ce cas, $TD_t = \mu_1 + \mu_2 1(t > T_B) + \beta t$. La représentation du processus générateur de données, en termes du modèle de régression (2.2), est:

$$y_t = a + bt + c\, 1(t > T_B) + d\, D(TB)_t + \alpha y_{t-1} + u_t \tag{2.6}$$

où $D(TB)_t = 1$ si $t = T_B + 1$ et $D(TB)_t = 0$ sinon. Les coefficients du modèle (2.6) peuvent être examinés en fonction des coefficients de base par les relations: $a = (1 - \alpha)\mu_1 + \beta\alpha$, $b = (1 - \alpha)\beta$, $c = (1 - \alpha)\mu_2$ et $d = \mu_2$ si $\alpha = 1$ et $d = 0$ si $\alpha \neq 1$. La variable $D(TB)_t$ est ainsi introduite pour permettre au modèle de régression de contenir les modèles sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative. Ceci implique donc un ensemble de variables indépendantes DR_t^* différent de l'ensemble DR_t introduit pour la procédure à deux étapes.

La discussion qui suit est axée sur le comportement de la statistique $t_{\hat{\alpha}}$ pour tester l'hypothèse $\alpha = 1$ dans les modèles de régression (2.1) ou (2.2). D'autres statistiques peuvent toutefois être considérées. Ainsi, il est remarquable de noter que, dans le contexte simple du modèle $AR(1)$, la statistique $T(\hat{\alpha} - 1)$ permet aussi d'effectuer des tests d'hypothèses, puisque sa distribution asymptotique est indépendante des paramètres de nuisance. Cette indépendence disparaît dans le cas où le modèle contient une corrélation temporelle additionnelle. Mais Phillips et Perron (1988) proposent une statistique $T(\hat{\alpha} - 1)$ modifiée dont la distribution asymptotique est indépendante des paramètres de nuisance. Nous discutons de cette classe de statistiques dans une section ultérieure. Les valeurs critiques asymptotiques de la statistique $T(\hat{\alpha} - 1)$ se trouvent dans les mêmes études mentionnées ci-dessous.

D'autres statistiques à considérer sont les tests de rapport de vraisemblance proposés par Dickey et Fuller (1981). Par exemple, ils utilisent une statistique notée $\Phi(3)$ pour tester l'hypothèse jointe $\alpha = 1$ et $b = 0$ dans le modèle de regression (2.5). Ils considèrent aussi des statistiques t sur les coefficients individuels des composantes déterministes. Ces dernières sont cependant de peu d'interêt pratique puisque leur distribution sous l'hypothèse nulle n'est pas invariante par rapport à certains paramètres de nuisance. Par exemple, la statistique t pour l'hypothèse $a = 0$ dans le modèle (2.5) dépend de la condition initiale tandis que la statistique t pour tester $b = 0$ dépend de la vraie valeur de β. Les tests conjoints de ratio de vraisemblance n'ont toutefois pas ce problème de dépendance par rapport à des paramètres de nuisance, mais des études de simulations ont démontré que leur puissance est plus faible que celle de $t_{\hat{\alpha}}$. En pratique, il est donc préférable d'utiliser cette dernière.

La première question importante à discuter est la dépendance de la distribution asymptotique de $t_{\hat{\alpha}}$, sous l'hypothèse nulle d'une racine unitaire, par rapport aux variables déterministes incluses dans les modèles de régression (2.1) ou (2.2), à savoir DR_t ou DR_t^*. Pour le moment, nous supposons que DR_t (ou DR_t^*) contient au moins tous les éléments de DV_t, c'est-à-dire les composantes de la fonction de tendance déterministe du modèle sous-jacent à la spécification de y_t.

Règle 1 : Supposons que l'ensemble de composantes déterministes DR_t utilisé pour construire $\tilde{y}_t$ en (2.1) contient au moins toutes les composantes de DV_t incluses dans le mécanisme générateur de données. Alors, sous l'hypothèse nulle d'une racine unitaire, la distribution asymptotique de $t_{\hat{\alpha}}$ est non normale et varie selon l'ensemble DR_t. Dans le cas où DV_t spécifie une composante déterministe linéaire, le même résultat est obtenu lorsque le modèle de régression (2.2) est utilisé et DR_t^* contient au moins tous les éléments de DV_t.

Selon l'ensemble de composantes déterministes incluses dans la régression, les valeurs critiques asymptotiques (ou d'échantillon fini) de la distribution de $t_{\hat{\alpha}}$ sont disponibles dans les références suivantes. Pour $DR_t = \{0\}$, $\{1\}$, ou $\{1, t\}$, voir Fuller (1976); pour $DR_t = \{1, t, t^2, \ldots t^p; p = 2, \ldots, 5\}$, voir Ouliaris, Park et Phillips (1989); pour $DR_t = \{1, 1(t > T_B)\}$, voir Perron (1990a) pour T_B fixé *a priori* et Perron et Vogelsang (1992) pour T_B traité comme une variable aléatoire inconnue; pour $DR_t = \{1, t \cdot 1(t > T_B)\}$, $\{1, t, 1(t > T_B), t \cdot 1(t > T_B)\}$, voir Perron (1989a) dans le cas où T_B est fixé et Zivot et Andrews (1992), Banerjee, Lumsdaine et Stock (1992) et Perron (1990b) dans le cas où T_B est traité comme une variable aléatoire inconnue.

Cette dépendance de la distribution asymptotique par rapport aux composantes déterministes incluses dans la régression naît principalement du fait que la fonction de tendance ainsi spécifiée doit être estimée. Si les vraies valeurs des cœfficients de la partie déterministe de la série étaient connues, un seul ensemble de valeurs critiques serait nécessaire, soit $DR_t = \{\emptyset\}$, l'ensemble vide.

Les références susmentionnées démontrent aussi le fait ci-après, qui a d'importantes implications quant à la puissance des tests de racine unitaire.

Règle 2: Sous l'hypothèse nulle d'une racine unitaire, les valeurs critiques de la queue de gauche de la distribution asymptotique de $t_{\hat{\alpha}}$ augmentent en valeur absolue avec le nombre de composantes déterministes incluses comme régresseurs.

Les résultats sont qualitativement différents lorsque l'ensemble de composantes déterministes incluses dans le modèle de régressions, DR_t ou DR_t^*, ne contient pas tous les éléments de DV_t, l'ensemble de composantes déterministes présent dans le processus générateur de données. En particulier, nous avons:

Règle 3: Supposons que l'ensemble DR_t (ou DR_t^*) omette une composante de DV_t qui tend vers l'infini, à une vitesse supérieure ou égale à n'importe quel élément de DR_t (ou de DR_t^*). Alors, sous l'hypothèse nulle d'une racine unitaire, la limite de $t_{\hat{\alpha}}$ dans le modèle (2.1) ou (2.2) est soit une normale standard soit une constante.

L'énoncé de la règle 3 est discuté dans Perron et Phillips (1987) dans le cas suivant, un polynôme en t est présent dans le mécanisme générateur de données, mais le modèle de régression ne contient aucune composante déterministe ou incorpore seulement une constante [voir aussi West, 1988 pour une analyse plus générale]. Dans le cas linéaire général, les conclusions de la règle 3 peuvent être obtenues à partir des résultats de Sims, Stock et Watson (1990).

À première vue, l'énoncé de la règle 3 semble suggérer la possibilité d'avoir des tests de racine unitaire plus puissants. Considérons, par exemple, l'utilisation du test t pour tester l'hypothèse $\alpha = 1$ dans un modèle de régression sans un terme de tendance dans le cas où le mécanisme générateur de données spécifie un processus avec racine unitaire et une tendance non nulle (c.-à-d. $y_t = \mu + \beta t + Z_t$, où Z_t est un processus stochastique avec racine unitaire). Dans ce cas, la distribution asymptotique du test t est N(0, 1) et les valeurs critiques sont plus petites (en valeur absolue) que les valeurs critiques qu'on obtient de la distribution asymptotique non normale lorsque un terme de tendance est inclus comme régresseur. Cette approche comporte cependant deux problèmes. Premièrement, la distribution de $t_{\hat{\alpha}}$ en échantillon fini n'est pas invariante aux valeurs des cœfficients de la composante déterministe et, pour des petites valeurs de ces coefficients, la distribution asymptotique normale peut donner une approximation inadéquate. Plus sérieusement, cependant, une telle procédure mène à des tests non convergents. Le cas général est discuté dans la règle suivante.

Règle 4: a) Soit un mécanisme générateur de données qui spécifie une composante stochastique Z_t stationnaire, c.-à-d. selon l'hypothèse alternative. Si les composantes déterministes incluses comme régresseurs sont d'ordre inférieur à l'ordre maximal des composantes déterministes du mécanisme générateur de données, la statistique $t_{\hat{\alpha}}$ est un test non convergent de l'hypothèse d'une racine unitaire contre des alternatives stationnaires.

b) Supposons que l'ensemble des régresseurs déterministes (DR_t ou DR_t^*) omette une composante sans accroissement (par exemple une constante ou une variable dichotomique pour tenir compte d'un changement de moyenne), $t_{\hat{\alpha}}$ est un test convergent, mais sa puissance en échantillon fini décroît avec une augmentation en valeur absolue du coefficient de la composante omise.

Il est bon d'illustrer ces résultats avec quelques exemples. Pour la partie (a), considérons d'abord le cas où le mécanisme générateur de données spécifie une fonction déterministe de la forme $TD_t = \mu + \beta t$ et que seulement une constante est incluse comme régresseur déterministe. Dans ce cas, la puissance du test tend vers zéro lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini [voir Perron, 1988a pour une preuve]. Ce résultat est intuitif. Supposons qu'on applique le modèle de régression $y_t = a + \alpha y_{t-1} + e_t$. Si le vrai modèle est $y_t = \mu + \beta t + u_t$ où u_t est stationnaire, la seule façon de capturer la tendance est d'avoir $\alpha = 1$ puisque, dans ce cas, le paramètre a devient le coefficient de cette tendance. De même, supposons que le mécanisme générateur de données spécifie une fonction de tendance avec un changement de pente. Un test de racine unitaire, constuit à partir d'un modèle de régression où seuls une constante et un terme de tendance sont inclus, est non convergent [voir Perron, 1989a]. Considérons maintenant des exemples de la partie (b). Supposons qu'aucune composante déterministe ne soit incluse comme régresseur mais que le mécanisme générateur de données spécifie une moyenne non nulle pour y_t. La puissance du test (pour tout échantillon fini) tend vers zéro si la moyenne du processus s'accroît (en valeur absolue). De même, si le mécanisme générateur de données spécifie un changement de moyenne à une certaine date et qu'aucun régresseur n'est inclus pour en tenir compte, la puissance du test tend vers zéro avec un accroissement (en valeur absolue) du changement de moyenne.

La règle 4 souligne donc l'importance d'inclure comme régresseurs au moins autant de composantes déterministes que dans la fonction de tendance du mécanisme générateur de données. Sinon, le test peut être non convergent ou perdre énormément en puissance et ne pas être invariant aux coefficients de la fonction de tendance. La règle suivante considère maintenant le comportement général des tests lorsque des régresseurs déterministes superflus sont inclus.

Règle 5: Supposons que $t_{\hat{\alpha}}$ soit construit à partir d'un modèle de régression qui incorpore l'ensemble de régresseurs déterministes DR_t et que DR_t contienne au moins les éléments de DV_t (les composantes déterministes du mécanisme générateur de données). La puissance des tests de racine unitaire contre des alternatives stationnaires décroît lorsque des composantes déterministes additionnelles sont ajoutées en tant que régresseurs.

L'énoncé de la règle 5 est partiellement justifié par l'énoncé de la règle 2 qui dit que les valeurs critiques s'accroissent (en valeur absolue) avec le nombre de composantes déterministes incluses comme régresseurs. Il faut toutefois tenir compte du fait que l'estimateur de α est biaisé vers le bas et que ce biais augmente avec le nombre de régresseurs déterministes inclus. La justification de l'énoncé de la règle 5 provient de plusieurs études de simulations publiées et non publiées [voir, en particulier, Schwert, 1989; DeJong, Nankervis, Savin et Whiteman, 1992 pour le cas où un terme supplémentaire de tendance est inclus].

Les règles 4 et 5 suggèrent qu'un certain degré de prudence doit être exercé dans le choix des composantes déterministes à inclure dans le modèle de régression pour assurer aux tests des propriétés de puissance raisonnables. Lorsque ce choix

n'est pas évident, une procédure séquentielle peut être utile. Une telle procédure est décrite dans l'étude de Perron (1988a) pour une classe de fonctions déterministes de tendance à inclure soit aucune composante, soit une constante, soit une constante et un terme de tendance. L'argument de cette étude est qu'une stratégie appropriée doit commencer par le modèle le plus général (dans ce cas, en incluant une constante et un terme de tendance comme régresseurs). Si la racine unitaire est rejetée, il n'est pas nécessaire de poursuivre. Sinon, il est possible que le non-rejet soit dû à la baisse de puissance occasionnée par la présence du terme de tendance en tant que régresseur superflu. On doit donc, à ce point, tester si le coefficient de ce terme de tendance est non significatif. Étant donné la non-invariance des tests t associés aux coefficients individuels de la composante déterministe, il est nécessaire d'utiliser un test conjoint (du type rapport de vraisemblance) pour tester l'hypothèse nulle d'un processus avec racine unitaire sans dérive. Si cette hypothèse nulle est rejetée, un modèle de régression sans terme de tendance peut être utilisé pour tester l'hypothèse de la racine unitaire. Cette dernière étape permet en effet des tests plus puissants.

Dans le cas général, où on ne limite pas la composante déterministe à un simple polynôme de premier degré en t, une telle stratégie de tests séquentiels n'est pas applicable car on ignore pour le moment la distribution appropriée des statistiques correspondantes. Une expérimentation avec diverses spécifications de la fonction déterministe de tendance devrait être guidée par la règle suivante qui résume notre discussion des composantes déterministes et de leurs effets.

Règle 6: Un non-rejet de l'hypothèse de la racine unitaire peut être dû à une mauvaise spécification des composantes déterministes incluses en tant que régresseurs.

2.2. *Quelques commentaires à propos de la puissance des tests*

Souvent, le macréconomiste a le choix entre différents échantillons de données pour certaines séries chronologiques. En particulier, il peut avoir recours à des séries dont la fréquence d'échantillonnage varie selon la période retenue. Ainsi, avec des données macroéconomiques, on dispose souvent d'observations trimestrielles pour la période commençant à la fin de la seconde guerre mondiale, tandis que la série mensuelle ne commence qu'au début des années soixante. Par contre, avec des données annuelles, les échantillons couvrent en général des horizons plus longs. En règle générale, un échantillon de données annuelles contient donc environ 100 obervations, un échantillon de données trimestrielles plus de 160 observations et un échantillon de données mensuelles, plus de 300. Il est intéressant de savoir lequel de ces échantillons donne les tests les plus puissants. Est-ce qu'un nombre plus élevé d'observations donne nécessairement des tests plus puissants?

Pour les tests d'hypothèse d'une racine unitaire contre des alternatives stationnaires, il s'avère que la puissance des tests dépend beaucoup plus de l'horizon temporel retenu que du nombre d'observations. Pour un nombre donné d'observations, la puissance s'accroît avec un accroissement de l'horizon temporel des données. Pour un horizon donné, l'ajout d'observations supplémentaires obtenues

en échantillonnant à une plus grande fréquence ne permet qu'un accroissement marginal de la puissance, cet accroissement devenant négligeable lorsque l'intervalle entre les observations décroît [voir Shiller et Perron, 1985; et Perron, 1991][4]. Pour la majorité des applications empiriques, un échantillon contenant moins de données annuelles sur une longue période donnera des tests plus puissants qu'un échantillon contenant plus d'observations à fréquence supérieure sur une période plus courte. Ces résultats démontrent que les tests de racine unitaire devraient être construits en utilisant des données annuelles couvrant une longue période historique. Cette conclusion est de plus renforcée par le fait que les procédures usuelles d'ajustement pour les effets saisonniers créent souvent un biais en faveur du non-rejet de l'hypothèse de la racine unitaire [voir Ghysels et Perron, 1990; Jaeger et Kunst, 1990].

Par contre, l'utilisation de données dans un passé plus lointain peut créer des problèmes d'un autre ordre. Premièrement, il se peut que la qualité des données historiques soit douteuse et que les méthodes antérieures de construction d'indices introduisent un biais contre l'une ou l'autre des hypothèses. Par exemple, Jaeger (1990) avance l'argument que, pour les données d'avant-guerre, la méthode d'interpolation linéaire était courante et que cette dernière induisait un biais en faveur du rejet de l'hypothèse de la racine unitaire. Deuxièmement, l'utilisation d'un échantillon couvrant une longue période rend plus probable la présence dans la série étudiée d'un changement structurel majeur du processus caractérisant soit la fonction de tendance soit la composante stochastique. Un tel changement structurel crée un biais en faveur de l'hypothèse de la racine unitaire. Donc, même si l'utilisation d'un échantillon couvrant une longue période est souhaitable du point de vue de la puissance des tests, il faut interpréter les résultats avec prudence à cause de ces effets secondaires possibles.

2.3 *Modifications pour des processus avec corrélation additionnelle*

Nous considérons maintenant certaines modifications à apporter aux procédures discutées ci-dessus afin de tenir compte d'une corrélation additionnelle possible dans la composante stochastique du processus générateur de données. Nous analysons donc le cas général où Z_t est un processus ARMA d'ordre fini, soit $A(L)Z_t = B(L)e_t$. La discussion des dernières sections s'applique aussi à ce cadre plus général, mais certains problèmes supplémentaires se présentent et nous les abordons dans la présente section.

---

4. Perron (1989b, 1991) considère aussi la méthode pour tester une promenade aléatoire qui utilise un test d'absence de corrélation par rapport aux données en différences premières. Une telle procédure est souvent utilisée en finance. Il démontre, premièrement, que de tels tests ont une fonction de puissance dominée par celle des tests de marche aléatoire (racine unitaire) basés sur le niveau de la série, tels que ceux mentionnés ci-haut. Deuxièmement, il démontre que, pour de telles procédures, la puissance des tests décroît vers le niveau si on augmente le nombre d'observations en gardant fixe l'horizon temporel des données. Dans ce cas, l'ajout excessif d'observations détruit la puissance des tests.

Il est tout d'abord important de souligner que la distribution asymptotique de la statistique $t_{\hat{\alpha}}$, estimée à partir d'autorégressions d'ordre un telles que (2.1) et (2.2) n'est pas invariante par rapport à la structure de corrélation temporelle des données. Il y a donc lieu d'effectuer certaines modifications pour éliminer cette dépendance à l'égard des paramètres de nuisance. Deux approches semblent naturelles à première vue, soit une correction paramétrique et une correction non paramétrique.

2.3.a *La correction paramétrique de Dickey-Fuller*

La classe de procédures introduite par Dickey et Fuller (1979) et généralisée par Said et Dickey (1984) considère une correction paramétrique motivée par le cas du modèle $AR(p)$, soit $A(L)Z_t = e_t$ avec $A(L) = 1 - a_1L - \ldots - a_pL^p$. Dans ce cas, nous pouvons écrire $A(L)Z_t = \alpha Z_{t-1} + \Sigma_{j=1}^{p-1} \delta_j \Delta Z_{t-j}$ où $\alpha = \Sigma_{i=1}^{p} a_i$ est la somme des coefficients autorégressifs et $\delta_j = -\Sigma_{i=j+1}^{p} a_i$ $(j = 1, \ldots, p-1)$. Dans le cadre de cette représentation, la composante stochastique Z_t a une racine unitaire si $\alpha = 1$. Les modèles de régression (estimés par moindres carrés ordinaires) prennent la forme suivante (avec $k = p - 1$):

$$y_t = \theta' DR_t + \tilde{y}_t \tag{2.7}$$

$$\tilde{y}_t = \alpha \tilde{y}_{t-1} + \Sigma_{j=1}^{k} \delta_j \Delta \tilde{y}_{t-j} + u_t,$$

ou

$$y_t = \theta' DR_t^* + \alpha y_{t-1} + \Sigma_{j=1}^{k} \delta_j \Delta y_{t-j} + u_t. \tag{2.8}$$

Rappelons que DR_t et DR_t^* sont des vecteurs de composantes déterministes. Dans le cas d'un processus $AR(p)$, la distribution asymptotique de la statistique $t_{\hat{\alpha}}$ obtenue à partir de (2.7) ou (2.8) est la même que la distribution asymptotique de $t_{\hat{\alpha}}$ obtenue en utilisant les autorégressions de degré un (2.1) et (2.2) lorsque $Z_t = \alpha Z_{t-1} + e_t$. Dans le cas plus général où la composante stochastique est un modèle ARMA(p, q), Said et Dickey (1984) suggèrent d'approximer un tel processus par une longue autorégression. Selon cette optique, les modèles de régression (2.7) et (2.8) demeurent valides pour ce cas général. La principale condition technique pour conserver à cette procédure sa validité asymptotique est que l'ordre k de l'autorégression estimée s'accroisse à l'infini à un certain rythme lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

En pratique, le choix du paramètre k pose plusieurs problèmes. Même dans le cadre du modèle AR(p), le degré du polynôme est en général une variable inconnue. Dans le cas du modèle ARMA(p, q), les conditions théoriques assurant la validité asymptotique de la procédure ne donnent aucune information pratique qui puisse guider le choix du degré de l'autorégression en échantillon fini. Ce problème est important puisque le résultat du test dépend souvent du choix de ce paramètre. Plusieurs facteurs peuvent expliquer une telle sensibilité. Premièrement, l'inclusion d'un nombre insuffisant de valeurs retardées peut affecter le niveau du test. Deuxièmement, l'introduction de trop de retards peut réduire la puissance du test (puisque un plus grand nombre de paramètres est estimé et que le nombre

effectif d'observations diminue étant donné le besoin de conditions initiales). Finalement, un changement du paramètre k implique aussi un changement des conditions initiales. Ce dernier point peut être d'importance étant donné la non-invariance de la fonction de puissance du test par rapport aux conditions initiales [voir, par example, DeJong, Nankervis, Savin et Whiteman, 1990]. Ces facteurs suggèrent l'importance de choisir le paramètre k judicieusement. En particulier, une règle de sélection fixe, sans égard à la nature des données, peut mener à une procédure inadéquate. Une méthode de sélection, fondée sur la nature des données a plus de chance de donner lieu à des tests avec un bon niveau et une puissance supérieure. Nous suggérons la procédure suivante qui est facile à mettre en pratique.

Procédure suggérée pour la sélection de k: La méthode suggérée s'appuie sur les données, notamment sur un test d'hypothèse concernant le cœfficient du dernier retard inclus dans l'autorégression estimée. Il s'agit de choisir un ordre maximal *a priori*, soit $k$max. On estime une autorégression de degré $k$max. Si le coefficient associé au dernier retard est significatif, $k = k\text{max}$. Sinon, on réduit le degré de l'autorégression estimée de un jusqu'à ce que le coefficient associé au dernier retard inclus soit significatif. Si aucun n'est significatif, on choisit $k = 0$.

Cette méthode de sélection du paramètre k n'est certes pas unique. En effet, n'importe quelle méthode statistique qui permet de déterminer le degré asymptotiquement approprié est valide. Ainsi, on peut avoir recours à un test conjoint sur les retards additionnels, au critère de Akaike et à bien d'autres tests. Nous recommendons la procédure décrite ci-haut surtout pour sa simplicité d'application.

Hall (1990) a étudié certaines propriétés de cette procédure. La motivation d'une telle procédure est le cas du modèle AR(p). Dans un tel modèle, la procédure recommandée sélectionnera le degré p approprié avec probabilité un asymptotiquement pour autant que l'ordre maximal $k$max soit supérieur à p. De plus, la distribution asymptotique de la statistique $t_{\hat{\alpha}}$ demeure identique au cas où le degré de l'autorégression estimée est fixe et égal au degré du processus sous-jacent. Dans le cas général où des composantes de moyenne mobile sont présentes, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de résultats théoriques concernant la convergence des tests. Cependant, par analogie avec la méthode de Said-Dickey (1984), nous avançons l'hypothèse que la distribution asymptotique demeure identique si l'ordre maximal $k$max s'accroît vers l'infini à un certain rythme quand la taille de l'échantillon s'accroît vers l'infini. Hall (1990) présente des résultats de simulations qui suggèrent qu'une telle méthode basée sur les données induit peu de distorsions en échantillon fini quant au niveau du test. Il est important de noter, par contre, que cette méthode séquentielle doit s'effectuer en partant d'un modèle général vers un modèle plus spécifique. Une procédure qui sélectionne le degré de l'autorégression en commençant par une spécification parcimonieuse et qui inclut des retards additionnels jusqu'à ce que le dernier ait un coefficient significatif n'est pas valide asymptotiquement et entraîne même des distorsions sévères quant au niveau du test en échantillon fini.

2.3.b *La modification non paramétrique de Phillips et Perron*

Comme nous l'avons noté auparavant, la distribution asymptotique de la statistique $t_{\hat{\alpha}}$ issue de l'estimation d'une autorégression de degré un dépend de paramètres de nuisance. L'approche suggérée par Phillips et Perron (1988) est d'ajouter à la statistique initiale un facteur de correction fondé sur des estimateurs convergents des paramètres de nuisance, qui élimine cette dépendance asymptotique. En particulier, cette correction est telle que la distribution asymptotique de la statistique transformée est la même, sous des conditions permettant des processus ARMA, que celle de la statistique non transformée dans le cas où aucune corrélation additionnelle n'est présente.

La forme de ces statistiques peut être décrite de la manière suivante dans le cas d'un ensemble DR_t de régresseurs déterministes inclus. Soit $\hat{\alpha}$ l'estimateur des moindres carrés ordinaires dans l'autorégression de degré un (2.1) ou (2.2). Désignons aussi par $t_{\hat{\alpha}}$ la statistique t pour tester l'hypothèse $\alpha = 1$ dans l'une ou l'autre de ces régressions. Définissons S^2 comme la somme des carrés des résidus obtenue à partir d'une régression de y_{t-1} sur les éléments de l'ensemble DR_t. Nous considérons une transformation des statistiques $T(\hat{\alpha} - 1)$ et $t_{\hat{\alpha}}$. La distribution asymptotique de ces statistiques dépend des paramètres de nuisance $\sigma^2_{\Delta Z} \equiv E[\Delta Z_t]^2$ et $h_{\Delta Z}(0)$ défini comme étant 2π fois la fonction de densité spectrale du processus ΔZ_t évaluée à la fréquence zéro[5]. Les estimateurs suivants sont convergents pour $\sigma^2_{\Delta Z}$ et $h_{\Delta Z}(0)$ respectivement[6]:

$$\hat{\sigma}^2_{\Delta Z} = T^{-1} \Sigma_1^T \hat{u}_t^2, \tag{2.9}$$

et

$$\hat{h}_{\Delta Z}(0) = T^{-1} \Sigma_1^T \hat{u}_t^2 + 2T^{-1} \Sigma_{j=1}^k w(j, k) \Sigma_{t=j+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-j}, \tag{2.10}$$

où $w(j, k)$ est une fonction qui attribue des poids aux estimateurs des autocovariances. En général, le choix de la fonction doit assurer que l'estimateur $\hat{h}_{\Delta Z}(0)$ est non négatif par construction. Un choix fréquent est la fonction de pondération de Bartlett, soit $w(j, k) = 1 - j/(k + 1)$. Plusieurs autres choix sont toutefois possibles, et certains pourraient même conduire à des estimateurs ayant de meilleures propriétés en échantillon fini [voir, par exemple, Priestley. 1981][7]. Notons aussi que les statistiques décrites par (2.9) et (2.10) sont construites à partir des résidus estimés $\hat{u}_t$ des modèles de régression (2.1) ou (2.2). Les statistiques transformées sont définies par:

$$Z(\hat{\alpha}) = T(\hat{\alpha} - 1) - T^2(\hat{h}_{\Delta Z}(0) - \hat{\sigma}^2_{\Delta Z}) / 2\hat{S}^2, \tag{2.11}$$

---

5. Ces définitions sont valides pour le cas où le processus ΔZ_t est stationnaire. Dans le cas plus général, les définitions doivent être modifiées quelque peu.

6. Notons que ces estimateurs sont construits à partir des résidus estimés $\hat{u}_t$ et non à partir des premières différences des variables $\tilde{y}_t$. L'utilisation des uns ou des autres donne la même distribution asymptotique sous l'hypothèse nulle. Il est cependant nécessaire d'utiliser les résidus estimés pour assurer la convergence des tests [voir Phillips et Ouliaris, 1990].

7. En pratique, le choix de la fonction $\omega(j, k)$ importe beaucoup moins que le choix du paramètre k.

$$Z(t_{\hat{\alpha}}) = (\hat{\sigma}^2_{\Delta Z} / \hat{h}_{\Delta Z}(0))^{1/2} t_{\hat{\alpha}} - T(\hat{h}_{\Delta Z}(0) - \hat{\sigma}^2_{\Delta Z}) \quad / 2\hat{S}\hat{h}_{\Delta Z}(0)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Le paramètre k dans la définition de l'estimateur de la densité spectrale de ΔZ_t à la fréquence zéro restreint le nombre d'autocovariances à inclure dans l'estimateur. Ce paramètre joue donc un rôle semblable au paramètre de troncation des autorégressions dans l'approche de Dickey-Fuller. L'estimateur $\hat{h}_{\Delta Z}(0)$ sera convergent si k tend vers l'infini à un certain rythme lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Notons entre autres que k doit croître avec l'échantillon même si l'on sait *a priori* que le processus est un processus de moyenne mobile d'ordre fini. Ceci est dû au fait que la fonction de pondération $w(j, k)$ impose des poids inférieurs à un et qui décroissent avec le retard des autocovariances. Les tests sont quelquefois sensibles au choix du paramètre k (quoique la pratique suggère une moindre sensibilité que dans l'approche de Dickey et Fuller). Il peut être désirable de sélectionner k selon une méthode basée sur la nature des données (telle que celle suggérée par Andrews, 1991), mais aucune étude traitant des propriétés de ces statistiques dans un tel contexte n'est disponible à l'heure actuelle.

Les statistiques décrites par (2.11) et (2.12) sont faciles à construire. Elles sont asymptotiquement valides sous des conditions très générales et ont la même distribution asymptotique que les statistiques issues de l'approche de Dickey et Fuller. Cependant, plusieurs études de simulations ont documenté le fait que le niveau exact de ces tests subit une sérieuse distorsion en échantillon fini pour certains processus d'intérêt courant [voir Schwert, 1989; Phillips et Perron, 1988; DeJong, Nankervis, Savin et Whiteman, 1990]. Par exemple, dans le cas d'un processus de moyenne mobile de degré un où $\Delta Z_t = e_t + \theta e_{t-1}$, les statistiques $Z(\hat{\alpha})$ et $Z(t_{\hat{\alpha}})$ ont des niveaux exacts beaucoup trop libéraux lorsque le paramètre θ est négatif (par exemple, plus petit que $-0{,}5$ pour des tailles d'échantillons usuelles). Dans le cas du processus autorégressif $\Delta Z_t = \rho \Delta Z_{t-1} + e_t$, les tests sont libéraux pour des valeurs négatives de ρ et conservateurs pour les grandes valeurs positives. Ce dernier cas a peut-être un intérêt pratique immédiat et suggère que les tests souffrent alors d'un manque de puissance[8].

Ce problème de niveau exact en échantillons finis semble suggérer que ces tests sont moins fiables que ceux issus de l'approche de Dickey et Fuller où une correction paramétrique est appliquée. En partie pour tenter de résoudre ce problème de niveau, d'autres procédures imposant une correction non paramétrique ont été suggérées[9], mais aucune ne semble résoudre le problème de façon satisfaisante (voir cependant la discussion à la sous-section suivante). Un fait important offre toutefois une lueur d'espoir pour cette classe de statistiques : les fonctions de puissance des tests $Z(\hat{\alpha})$ et $Z(t_{\hat{\alpha}})$, ajustées pour obtenir le niveau exact désiré, sont beaucoup plus élevées que celles des tests issus de l'approche de Dickey et Fuller [voir Stock, 1990]. En conséquence, il semble important d'inscrire au programme

8. Pour une explication théorique de ce genre de comportement en échantillon fini, voir Pantula (1991) et Perron (1990c).

9. Parmis les contributions récentes il y a Hall (1989), Pantula et Hall (1990), Kahn et Ogaki (1990), Choi et Phillips (1990), Choi (1991) et Schmidt et Phillips (1990).

futur de recherche l'étude de certaines modifications des procédures de Phillips et Perron qui corrigeraient, dans une certaine mesure, le problème de niveau tout en conservant leurs bonnes propriétés de puissance. Des recherches préliminaires dans cette direction, réalisées par Stock (1990), semblent indiquer que de telles améliorations sont possibles. Nous discutons quelques problèmes reliés à cette question dans la prochaine sous-section.

2.3.c *Approches alternatives pour tester l'hypothèse de racine unitaire*

L'analyse du comportement asymptotique de la série $\{y_t\}$ permet de comprendre plusieurs différences entre le modèle avec racine unitaire et le modèle stationnaire. Supposons que le mécanisme générateur de données ne contienne aucune composante déterministe et donc que $y_t = Z_t$, un processus ARMA de moyenne zéro. Si y_t a une racine unitaire, nous avons, sous des conditions assez générales, $T^{-1/2} Y_{[Tr]} \Rightarrow h_{\Delta Z}(0)^{1/2} W(r)$ où r $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ peut être interprété comme une fraction de l'échantillon total, $[\cdot]$ désigne la partie entière et $W(r)$ le processus de Wiener. Sous l'hypothèse que y_t ne contient pas de racine unitaire et est donc stationnaire, $T^{-1/2} Y_{[Tr]} \Rightarrow 0$. Stock (1990) a utilisé cette idée pour développer une classe de statistiques permettant de tester l'hypothèse nulle de racine unitaire. Définissons $v_{[Tr]} \equiv T^{-1/2} y_{[Tr]} / \hat{h}_{\Delta Z}(0)^{1/2}$ où $\hat{h}_{\Delta Z}(0)$ est un estimateur convergent de $h_{\Delta Z}(0)$ (voir, par example, (2.10)). Notons que $v_{[Tr]} \Rightarrow W(r)$ sous l'hypothèse nulle. Stock (1990) considère toute fonction de $v_{[Tr]}$ décrite par $g(v_{[Tr]})$, de telle sorte que $g(\cdot)$ est continue en zéro. Sous l'hypothèse nulle, $g(v_{[Tr]}) \Rightarrow g(W(r))$ et sous l'hypothèse alternative $g(v_{[Tr]}) \Rightarrow 0$. Sous la condition que $g(\cdot)$ n'impose aucune masse de probabilité à zéro, le test sera convergent. Stock analyse plusieurs statistiques définies par des fonctions $g(\cdot)$ différentes.

Cette classe de statistiques peut aisément être généralisée pour permettre la présence de composantes déterministes dans la fonction de tendance. Il s'agit simplement de remplacer $v_{[Tr]}$ par, disons $\tilde{v}_{[Tr]}$, qui sont les résidus normalisés d'une régression de y_t sur les composantes déterministes de la fonction de tendance. Par exemple, dans le cas où une tendance linéaire est présente, $\tilde{v}_{[Tr]} = T^{-1/2} \tilde{y}_{[Tr]} / \hat{h}_{\Delta Z}(0)^{1/2}$ où $\tilde{y}_t = y_t - \tilde{\mu} - \tilde{\beta} t$, avec $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\beta}$ les estimateurs de moindres carrées des coefficients d'une regression de y_t sur une constante et un terme de tendance linéaire (t). Notons, par contre, que la distribution asymptotique des diverses statistiques varie selon l'ensemble de composantes déterministes incluses. D'après une étude de simulation concernant le niveau et la puissance des tests, deux statistiques paraissent avoir des propriétés supérieures aux tests de Dickey et Fuller et Phillips et Perron.

Une de ces statistiques, appelée le test de «Sargan-Bhargava modifié» (suivant les travaux de Sargan et Bhargava, 1983), est définie en utilisant la fonction $g(f) = \int_0^1 f(s)^2 \, ds$. Ceci mène à la statistique $MSB = T^{-1} \Sigma_1^T \tilde{v}_t^2$[10]. Une deuxième

10. Les valeurs critiques asymptotiques de cette statistique sont disponibles dans l'étude de Stock (1990) pour les cas où les composantes déterministes de la fonction de tendance sont soit une constante soit un polynôme de degré un en t.

statistique digne de mention est appelée le «test de Phillips-Perron modifié» et est définie par la fonction $g(f) = 2\int_0^1 f(s)^2\,ds / \{f(1)^2 - 1\}$, ce qui mène à la statistique $MPP = 2T^{-1}\,\Sigma_{t=1}^{T}\,\tilde{v}_t^2 / (\tilde{v}_T^2 - 1)$. La statistique *MPP* est asymptotiquement équivalente à l'inverse de la statistique $Z(\hat{\alpha})$ de Phillips et Perron, et donc les valeurs critiques usuelles sont applicables pour les diverses spécifications des composantes déterministes de la fonction de tendance.

Cette équivalence asymptotique peut être vérifiée en notant que $MPP^{-1} \approx Z(\hat{\alpha}) - T(1-\hat{\alpha})^2/2$. Le test *MPP* élimine donc un terme $T(1-\hat{\alpha})^2$ de la statistique originale $Z(\hat{\alpha})$. Ce terme converge vers zéro au rythme T lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini. On pourrait donc soupçonner qu'une telle modification mineure altérerait peu le comportement en échantillon fini, mais tel n'est pas le cas. En fait, comme le démontre Perron (1990c), le comportement de $T(\hat{\alpha} - 1)$ en échantillon fini est très différent du comportement suggéré par l'approximation asymptotique, lorsque les données démontrent une corrélation additionnelle négative (par example, une composante *MA* négative). En particulier, la convergence de $T(\hat{\alpha} - 1)^2$ vers 0 est très lente dans de tels cas et ce terme peut donc avoir un effet important en échantillon fini. Ce résultat suggère que l'élimination de ce terme de la statistique $Z(\hat{\alpha})$ peut réduire les distorsions du niveau exact [Schwert, 1989]. Une étude de simulations préliminaire [Stock, 1990] semble indiquer que tel est le cas. Non seulement les distorsions de niveau sont réduites mais les propriétés de puissance sont aussi améliorées. Il est à noter cependant que l'étude de Stock (1990) utilise un estimateur de $h_{\Delta Z}(0)$ différent de la classe d'estimateurs décrite par (2.10). Il utilise un estimateur fondé sur l'estimation préliminaire d'un modèle paramétrique autorégressif. Il est donc difficile d'établir si l'amélioration des propriétés de niveau et de puissance provient de la modification de $Z(\hat{\alpha})$ ou des différents estimateurs de $h_{\Delta Z}(0)$. Des études sont en cours pour analyser ces questions. Bien entendu, ces résultats sont préliminaires et d'autres études sont nécessaires pour analyser la robustesse des statistiques *MPP* et *MSB*. Cependant, les analyses préliminaires décrites ci-dessus semblent indiquer que des améliorations sont possibles quant à la construction de tests de racine unitaire.

2.4 *Tester l'hypothèse nulle de stationnarité*

Cette idée d'utiliser les comportements différents des moments d'échantillonnage sous les différentes hypothèses se généralise de façon naturelle afin d'établir des statistiques testant l'hypothèse nulle de stationnarité contre l'hypothèse alternative d'une racine unitaire. Considérons, par exemple, la quantité $T^{-3/2}\,\Sigma_1^T\,ty_t$. Sous l'hypothèse nulle que y_t est un processus stationnaire de moyenne zéro, nous avons $T^{-3/2}\,\Sigma_1^T\,ty_t \Rightarrow N(0, h_y(0)/3)$. Donc $Q(TS) \equiv (3/\hat{h}_y(0))\,T^{-3}\,(\Sigma_1^T\,ty_t)^2 \Rightarrow \chi_1^2$ sous la condition $\hat{h}_y(0) \to h_y(0)$. Sous l'hypothèse d'un processus avec racine unitaire, nous avons $T^{-5/2}\,\Sigma_1^T\,ty_t \Rightarrow N(0,\ 2h_{\Delta Z}(0)/15)$. Donc $Q(DS) \equiv (15/2\hat{h}_{\Delta Z}(0))\,T^{-5}\,(\Sigma_1^T\,ty_t)^2 \Rightarrow \chi_1^2$ sous la condition que $\hat{h}_{\Delta Z}(0) \to h_{\Delta Z}(0)$. Sous l'hypothèse de stationnarité $Q(DS) \to 0$. Notons qu'un estimateur, convergent à la fois pour $\hat{h}_{\Delta Z}(0)$ (si le processus a une racine unitaire) et pour $h_y(0)$ (si le processus est stationnaire), peut être construit en utilisant un estimateur de la forme

(2.10) ou en utilisant un estimateur de la densité spectrale basé sur une autorégression.

La discussion ci-dessus suggère que la même quantité de base, soit dans notre exemple $\Sigma_1^T ty_t$, peut servir à construire des tests de l'hypothèse nulle de racine unitaire ou de stationnarité. Pour tester l'hypothèse nulle de stationnarité, il s'agit de construire la version définie par $Q(TS)$ et de rejeter selon les valeurs critiques de la distribution χ^2_1. Pour tester l'hypothèse nulle d'une racine unitaire, il s'agit d'utiliser la version définie par $Q(DS)$ et de rejeter pour des petites valeurs relativement, encore, à la distribution χ^2_1.

Cette procédure se généralise facilement au cas où le processus générateur de données permet la présence de composantes déterministes dans la fonction de tendance. Au lieu d'utiliser la variable y_t elle-même, il s'agit d'y substituer les résidus d'une projection de y_t sur les composantes déterministes.

Bien sûr, nous avons choisi la quantité $\Sigma_1^T ty_t$ pour des raisons d'illustration seulement. Plusieurs autres quantités peuvent être utilisées pour mener à des tests avec des propriétés similaires. Il n'existe pas d'étude à l'heure actuelle qui vérifie si telle ou telle quantité a des propriétés d'optimalité. Il n'y a pas de doute que des études ultérieures traiteront de ces questions. Néanmoins, l'exemple discuté ci-dessus revêt un certain intérêt puisqu'il est à la base d'une procédure suggérée par Park, Ouliaris et Choi (1988) et Park et Choi (1988).

Leur procédure peut être décrite de la manière suivante. Soit un processus générateur de données ayant une fonction de tendance déterministe représentée par un polynôme de degré p en t, c.-à-d. sous l'hypothèse nulle de stationnarité $y_t = \Sigma_{k=0}^p \beta_k t^k + C_t$, où C_t est un processus stationnaire. La procédure suggérée consiste à estimer le modèle de régression suivant :

$$y_t = \Sigma_{k=0}^q \beta_k t^k + u_t \tag{2.13}$$

où $q > p$, et d'utiliser le test F pour tester l'hypothèse conjointe $\beta_{p+1} = \ldots = \beta_q = 0$, soit $F(\hat{\beta}_{p,q})$. Notons que le comportement asymptotique de $F(\hat{\beta}_{p,q})$ est équivalent à celui du test F pour tester l'hypothèse $\delta_1 = \ldots = \delta_{p-q} = 0$ dans le modèle de régression:

$$\tilde{y}_t = \Sigma_{k=0}^{q-p} \delta_k t^t + u_t, \tag{2.14}$$

où $\tilde{y}_t$ sont les résidus d'une projection de y_t sur les éléments de l'ensemble $\{t^k, k = 0, \ldots, p\}$. Pour tester l'hypothèse nulle de stationnarité, Park et Choi (1988) proposent l'utilisation de la statistique $G(p,q) \equiv (\sigma_c^2 / \hat{h}(0)) F(\hat{\beta}_{p,q})$ [voir Park, 1990 pour les détails]. Bien sûr, le choix du paramètre q est arbitraire et le cas le plus simple se réduit à choisir $q = p + 1$, dans lequel cas la statistique est une transformation du test t sur le coefficient du terme de tendance superflu. La distribution asymptotique de la statistique $G(p,q)$ suit une loi du khi-deux. Pour ce cas spécial, la procédure de Park et Choi est asymptotiquement équivalente à l'utilisation d'une transformation de la quantité $\Sigma_1^T t\tilde{y}_t$ discutée plus haut. Lorsque $q > p$, la statistique est fondée sur une quantité différente: par exemple, $\Sigma_1^T t^d \tilde{y}_t$ pour différentes valeurs de d. Notons finalement qu'une normalisation différente

de la statistique $F(\hat{\beta}_{p,q})$ mène à des tests de l'hypothèse nulle de racine unitaire contre l'hypothèse alternative de stationnarité. Cependant, dans ce cas, la normalisation nécessaire est telle que la distribution asymptotique n'est plus représentée par une loi du khi-deux. Les valeurs critiques asymptotiques pour ce dernier cas sont disponibles dans l'étude de Park, Ouliaris et Choi (1988).

3. LA QUASI-ÉQUIVALENCE DES PROCESSUS *DS* ET *TS*

À la section précédente, notre discussion sur la possibilité de tester l'hypothèse nulle de racine unitaire ainsi que l'hypothèse nulle d'un processus à tendance stationnaire nous amène, de façon naturelle, à nous interroger sur la relation entre ces deux classes de processus, en particulier à savoir si la spécification d'un processus ou de l'autre comme hypothèse nulle est de quelque importance.

Retournons à notre définition de la fonction de tendance implicite dans la spécification (1.5). Nous avons alors affirmé qu'un processus avec racine unitaire implique la présence d'une composante stochastique non stationnaire TS_t. Par contre, sous l'hypothèse de stationnarité de la composante stochastique, $TS_t = 0$. Lorsque la partie stochastique est modélisée par un processus ARMA, comme nous l'avons fait au cours de cette étude, la partie stochastique de la tendance est une fonction de la quantité $\psi(1)$ où $\psi(L)$ est le polynôme associé à la représentation en moyenne mobile des premières différences de la partie stochastique Z_t. Cette mesure $\psi(1)$ est reliée à la fonction de densité spectrale de ΔZ_t évaluée à la fréquence zéro par la relation $h_{\Delta Z}(0) = (\sigma_e^2 / 2\pi)\, \psi\,(1)^2$. En conséquence, dans notre cadre d'analyse, pour un processus avec racine unitaire, nous avons $h_{\Delta Z}(0) \neq 0$, tandis que pour un processus à tendance stationnaire $h_{\Delta Z}(0) = 0$. Il est évident, selon cette caractérisation, que tester l'hypothèse nulle d'une racine unitaire implique l'analyse d'une hypothèse nulle composite. Ce fait a l'implication intéressante suivante.

Règle 7: Pour tout échantillon fini, n'importe quel processus à tendance stationnaire peut être approximé de façon arbitrairement précise par un processus avec racine unitaire (dans le sens où la structure d'autocovariance de chaque processus est arbitrairement voisine).

Ce point a été souligné par Blough (1988) et Cochrane (1991). L'idée est très simple. Pour tout processus à tendance stationnaire, nous avons $h_{\Delta Z}(0) = 0$. Un processus avec racine unitaire $h_{\Delta Z}(0) = \varepsilon >$ disons, où $\varepsilon > 0$, peut approximer de façon arbitrairement précise un processus à tendance stationnaire pourvu que ε soit choisi assez petit par rapport à la taille de l'échantillon. L'exemple suivant illustre ce phénomène. Considérons les deux processus suivants :

$$TS: y_t = e_t \tag{3.1}$$

$$DS: y_t = y_{t-1} + e_t + \theta e_{t-1}$$

où e_t est bruit blanc. Le processus *TS* spécifie que y_t est un bruit blanc et le processus *DS* spécifie y_t comme un modèle IMA(1,1). Pour toute taille d'échantillon, le processus *TS* peut être approximé de façon arbitrairement précise par le processus

DS (dans le sens où les structures des autocovariances sont arbitrairement voisines) pourvu que θ soit près de la valeur -1 sans y être égal. Ce fait implique la règle suivante quant à la puissance des tests de racines unitaires en échantillon fini.

Règle 8: En échantillon fini, n'importe quel test de l'hypothèse nulle d'une racine unitaire doit, par définition, avoir une puissance non supérieure au niveau du test.

La règle 8 est simplement une conséquence du fait que les distributions des statistiques d'intérêt sont des fonctions continues des paramètres du processus $\{y_t\}$. En conséquence, étant donné l'énoncé de la règle 7, la distribution en échantillons finis de n'importe quelle statistique sous l'hypothèse *TS* se doit d'être arbitrairement proche de la distribution de la statistique sous l'hypothèse d'un certain processus *DS*. Nous pouvons justifier la règle 8 plus précisément de la façon suivante. Dénotons, par $X(y(\delta))$, la statistique d'intérêt (qui est une fonction du processus stochastique $\{y_t(\delta); t = 1, \ldots, T\}$ que nous indiquons par un vecteur de paramètres δ). Soit Ω_0, l'espace des paramètres sous l'hypothèse nulle d'une racine unitaire et S_1, l'espace où l'on rejette cette hypothèse nulle. Un test de niveau α est défini en choisissant l'espace de rejet S_1 de telle sorte que la probabilité maximale (couvrant toutes les valeurs possibles de δ sous l'hypothèse nulle) que la statistique $X(y(\delta))$ soit à l'intérieur de la région de rejet est égal à α (c'est-à-dire tel que $\sup_{\Omega_0} P_\delta[X(y(\delta)) \in S_1] = \alpha$ pour tout $\delta \in \Omega_0$). La puissance du test contre une hypothèse telle que $\delta \in \Omega_1$, l'espace des paramètres sous l'hypothèse alternative, est donnée par la probabilité que la statistique $X(y(\delta))$ soit à l'intérieur de la région de rejet; c-à-d. $P_\delta[X(y(\delta)) \in S_1]$ pour tout $\delta \in \Omega_1$. Ici Ω_0 est l'espace des paramètres sous l'hypothèse nulle d'une racine unitaire et Ω_1 est l'espace des paramètres sous l'hypothèse alternative d'un processus à tendance stationnaire. Étant donné la règle 7, pour tout $\delta_1 \in \Omega_1$, il doit exister un vecteur $\delta_0 \in \Omega_0$ tel que $X(y(\delta_1))$ ait une distribution de probabilité arbitrairement proche de la distribution de $X(y(\delta_0))$. Il s'ensuit que la région de rejet est telle que le test a une fonction de puissance non supérieure au niveau. En termes de l'exemple (3.1), les valeurs critiques du test de racine unitaire devraient être choisies de telle sorte que la probabilité de rejet soit égale au niveau du test pour toutes valeurs du paramètres θ dans l'intervalle $(-1 < \theta < 1)$. Puisque, pour θ près de -1, les processus sont quasi identiques, le test doit avoir une puissance égale au niveau du test contre le processus *TS* spécifié.

L'utilisation d'une région de rejet basée sur le comportement asymptotique implique donc, par définition, que tout test aura un niveau exact supérieur au niveau asymptotique nominal pour une certaine sous-région de l'espace des paramètres sous l'hypothèse nulle. Ce point a été démontré de façon convaincante par l'étude de simulations de Schwert (1989) dans le cas du modèle ARMA (1,1).

Certains ont avancé l'argument que le problème décrit ci-dessus se pose parce qu'un test d'hypothèse nulle d'une racine unitaire contre des alternatives stationnaires implique un test d'une hypothèse nulle composite ($h_{\Delta Z}(0) \neq 0$) contre une hypothèse alternative simple ($h_{\Delta Z}(0) = 0$). Ils proposent donc de tester l'hypothèse nulle de stationnarité contre des hypothèses alternatives de processus avec racine unitaire (c.-à-d. à poser le problème en termes d'une hypothèse nulle simple contre

une classe d'hypothèses alternatives composites). L'argument est cependant erroné, car il est possible d'adopter un cadre d'analyse différent où la racine unitaire peut être exprimée en termes d'une hypothèse simple et l'hypothèse de stationnarité en termes d'une classe d'hypothèses composites. Considérons, par exemple, la mesure suivante. Désignons par $hl(\delta)$ la demi-vie d'effet d'un choc e_t sur le niveau de la série. Considérons maintenant la mesure $\omega(\delta) \equiv hl(\delta)^{-1}$. Pour tout processus *DS*, $\omega(\delta) = 0$ et pour tout processus *TS*, $\omega(\delta) > 0$. Nous obtenons alors la règle 9, dont l'énoncé est similaire à celui de la règle 7.

Règle 9: En échantillon fini, tout processus avec racine unitaire peut être approximé de façon arbitrairement précise par un processus à tendance stationnaire (dans le sens où les structures d'autocovariances sont arbitrairement voisines).

Ce résultat provient du fait que, pour un processus avec racine unitaire, il existe un processus stationnaire pour lequel les chocs ont un effet sur le niveau de $\{y_t\}$ qui dure presque indéfiniment. Par exemple, pour le modèle autorégressif de degré un, $y_t = \alpha y_{t-1} + e_t$, le processus avec racine unitaire ($\alpha = 1$) peut être approximé de façon arbitrairement précise par un processus stationnaire avec α inférieur à un, mais très voisin de 1. Suivant la même logique que dans le cas d'un test de l'hypothèse nulle d'une racine unitaire, nous avons l'énoncé suivant.

Règle 10: Pour tout échantillon fini, un test de l'hypothèse d'un processus stationnaire contre des alternatives avec racines unitaires doit, par définition, avoir une fonction de puissance non supérieure au niveau du test.

Dans ce cadre général d'hypothèses *TS* et *DS*, le fait important est que, pour tout processus *TS*, il y a un processus *DS* qui produit une approximation arbitrairement précise en échantillon de taille finie et vice versa. C'est cette relation duale énoncée dans les règles 7 et 9 qui crée le problème et rend le cadre d'analyse différent du cas standard. Étant donné les énoncés des règles 8 et 10, doit-on complètement abandonner l'idée d'essayer de différencier un processus avec racine unitaire d'un processus à tendance stationnaire? Certains auteurs répondent par l'affirmative [par example, Christiano et Eichenbaum, 1990)]. Nous préférons adopter une approche plus pragmatique à cette question. Notre point de vue est qu'il est encore utile d'essayer de distinguer ces deux classes de modèles en reconnaissant, cependant, que, strictement parlant, la conclusion peut être erronée si le mécanisme générateur de données correspond à un point dans un sous-ensemble particulier de l'espace des paramètres.

Pour l'argument qui suit, considérons le cadre usuel où nous posons comme hypothèse nulle un processus avec racine unitaire. En appliquant un test de racine unitaire qui utilise les valeurs critiques asymptotiques, le test doit avoir un niveau exact supérieur au niveau asymptotique pour tout processus *DS* membre d'une sous-région particulière de l'espace des paramètres sous l'hypothèse nulle. La spécification exacte de cette sous-région reste encore à préciser. Il est important de noter que cette sous-région se réduit avec un accroissement de la taille de l'échantillon (si l'horizon des données s'accroît proportionnellement). Une procédure de test peut être considérée comme ayant de meilleures propriétés en échantillon fini qu'un

autre test si cette sous-région où le niveau exact devient supérieur au niveau asymptotique est plus petite pour une taille d'échantillon comparable. De toutes façons, tout test de racine unitaire doit être perçu dans un contexte où l'espace des paramètres sous l'hypothèse nulle est contraint (de plus en plus pour des petites tailles d'échantillon). Les même commentaires s'appliquent aux tests de l'hypothèse nulle de stationnarité.

Pourquoi devrait-on accepter d'avoir des procédures qui impliquent une inférence inexacte pour un sous-ensemble de l'espace des paramètres? La réponse est essentiellement de nature pragmatique. À toutes fins pratiques, il n'est pas vraiment important de caractériser un processus *DS* avec $h_{\Delta Z}(0)$ près de 0 comme un processus à tendance stationnaire ou de caractériser un processus *TS* avec des chocs ayant un effet très durable comme un processus *DS*. En fait, pour plusieurs considérations pratiques concernant la qualité des procédures d'inférences ultérieures, il peut être avantageux de faire cette «erreur».

Pour illustrer cette idée, Campbell et Perron (1991) ont considéré l'expérience de Monte Carlo suivante. Soit un processus IMA(1) tel que $y_t = y_{t-1} + e_t + \theta e_{t-1}$. Pour des valeurs de θ voisines de -1, y_t a une racine unitaire mais est très proche d'un bruit blanc. Campbell et Perron considère le comportement des prévisions faites à partir d'un modèle autorégressif estimé (i) en premières différences, (ii) en niveaux, ou (iii) en sélectionnant l'une ou l'autre des spécifications selon le résultat d'un test de racine unitaire (Dickey-Fuller ou Phillips-Perron). Il s'avère entre autres que pour des valeurs de θ voisines de -1, l'erreur quadratique moyenne des prévisions commise en utilisant le modèle en niveaux est inférieure à l'erreur commise avec le modèle en premières différences, et ce même si une racine unitaire est présente dans le processus. Il est intéressant de souligner que c'est justement dans ce cas que les tests de racines unitaires rejettent «incorrectement». Campbell et Perron considèrent aussi le modèle autorégressif $y_t = \alpha y_{t-1} + e_t$. Lorsque α est voisin de 1, le modèle est à «tendance stationnaire», mais aussi presque intégré d'ordre un. Les simulations semblent montrer que pour ces valeurs l'erreur quadratique moyenne des prévisions est inférieure si un modèle en premières différences est utilisé. Il s'agit précisément de ces cas où les tests ne rejettent pas la racine unitaire, et ce «incorrectement». Les simulations montrent finalement que l'erreur quadratique moyenne des prévisions obtenue avec le modèle suggéré par les tests de racine unitaire est comparable (dans presque tous les cas) au minimum de l'erreur quadratique moyenne entre les deux modèles utilisés.

Cette expérience de Monte Carlo, quoique très simple, illustre un principe qui devrait se généraliser à des situations plus complexes: à toutes fins pratiques, il est inutile d'essayer de découvrir le «vrai modèle» sous-jacent. Il est suffisant d'avoir une idée de la région (forte ou faible persistance par rapport à la taille de l'échantillon) dans laquelle se trouve probablement la série en question. Bien entendu, d'autres travaux sont nécessaires pour pouvoir étendre ce principe à des contextes pratiques plus complexes et réalistes.

Un autre argument en faveur de l'utilisation des tests de racines unitaires est qu'ils fournissent un guide quant à la distribution asymptotique (stationnaire ou

nonstationnaire) susceptible de mener à de meilleures approximations. Par exemple, pour un modele AR(1) avec un coefficient autoregressif voisin de un, la distribution asymptotique normale est une très mauvaise approximation de la distribution exacte de l'estimateur du paramètre autoregréssif. En fait, la distribution asymptotique obtenue en supposant un coefficient autorégressif égal à un est meilleure. Bien entendu, en principe, il serait souhaitable d'utiliser la distribution exacte. Dans bien des cas, cependant, la dérivation d'une telle distribution exacte est très difficile, voire pratiquement impossible (à moins d'avoir recours à des méthodes de simulation).

CONCLUSION

Notre étude a fourni, nous l'espérons, un bon aperçu des problèmes suscités par les racines unitaires en macroéconomie. Nous voulons en conclusion réitérer certains points importants. Premièrement, nous avons insisté sur la distinction entre les composantes de tendance et les composantes stochastiques. Si le processus ne contient pas de racine unitaire, le fonction de tendance est totalement «déterministe» et la composante stochastique est stationnaire. Si le processus contient une racine unitaire, la fonction de tendance est en partie «déterministe» et en partie stochastique alors que la composante dite stochastique est non stationnaire.

Nous avons souligné le fait que les résultats des tests de racines unitaires dépendent de façon cruciale de la spécification de la composante déterministe de la fonction de tendance. En général, une certaine expérimentation est nécessaire pour évaluer la robustesse des résultats, s'agirait-il simplement d'examiner un graphe de la série pour voir si certains changements structurels majeurs se sont produits. Pour ce qui a trait aux tests eux-mêmes, la procédure de Dickey-Fuller apparaît à l'heure actuelle comme la plus robuste, mais plusieurs études prometteuses en cours pourraient conduire à des statistiques ou à des modifications des procédures existantes ayant de meilleures propriétés. En ce qui concerne les tests de l'hypothèse nulle de stationnarité contre l'hypothèse alternative de racine unitaire, il ne fait aucun doute qu'on doit s'attendre à des développements intéressants dans un proche avenir. Ces développements pourraient mener à des tests supérieurs à ceux de Park, Ouliaris et Choi (1988) qui sont, après tout, de nature *ad hoc*.

En ce qui concerne la puissance des tests, il est important de réitérer le fait qu'elle dépend en grande partie de l'horizon temporel des données et non du nombre d'observations proprement dit.

Nous avons aussi abordé le problème de la quasi-équivalence entre les processus à «tendance stationnaire» et les processus «stationnaires en différences». Cette quasi-équivalence est problématique si le but de l'exercice est de découvrir le «vrai» processus sous-jacent. À toutes fins pratiques, il apparaît inutile d'essayer de différencier certaines classes de modèles se distinguant uniquement par la présence ou l'absence d'une racine unitaire. La quasi-équivalence entre ces modèles ne pose toutefois aucun problème dans la plupart des questions d'intérêt pratique.

De surcroit, «l'erreur» induite par l'utilisation d'un test de racine unitaire peut s'avérer utile en fonction du but final de l'exercice.

En ce sens, l'utilité des tests de racines unitaires est intimement liée à la raison de leur utilisation. Ils sont en effet utiles pour permettre d'imposer certaines restrictions (quoique potentiellement approximatives) dans un modèle ultérieur à plusieurs variables (par exemple un modèle d'autorégression à plusieurs variables avec cointégration). Les tests servent aussi de guide dans le choix du cadre asymptotique approprié pour réaliser l'inférence, à savoir choisir la distribution asymptotique susceptible de fournir la meilleure approximation de la distribution en échantillon fini (à défaut de disposer de cette dernière bien entendu).

En fin de compte, les tests de racines unitaires sont avant tout une étape préliminaire dans une analyse à plusieurs variables visant à traiter certaines questions économiques particulières. Les problèmes qui se posent lorsque l'on passe à des modèles à plusieurs variables sur le plan des procédures de tests et leurs relations avec le cas à une variable sortent du cadre du présent survol.

BIBLIOGRAPHIE

ANDREWS, D. W. K. (1991), «Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation». *Econometrica* 59, pp. 817-858.

BANERJEE, A., R.L. LUMSDAINE, et J.H. STOCK (1992), «Recursive and Sequential Tests of the Unit Root and Trend Break Hypothesis». *Journal of Business and Economic Statistics* 10, pp. 271-287.

BEVERIDGE, S. et C. R. NELSON (1981), «A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle», *Journal of Monetary Economics* 7, pp. 151-174.

BLOUGH, S. R. (1988), «On the Impossibility of Testing for Unit Roots and Cointegration in Finite Samples», Cahier de Recherche No. 211, John Hopkins University.

BOX, G. E. P. et G. C. TIAO (1975), «Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems», *Journal of the American Statistical Association* 70, pp. 70-79.

CAMPBELL, J. Y. et N. G. MANKIW (1987), «Are Output Fluctuations Transitory?», *Quarterly Journal of Economics* 102, pp. 857-880.

CAMPBELL, J. Y. et P. PERRON (1991), «Pitfalls and Opportunities: What Macroeconomists Should Know about Unit Roots», *NBER Macroeconomics Annual*, Vol. 6, pp. 141-201.

CHEN, C. et G. C. TIAO (1990), «Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations, and Level-Shift Detection», *Journal of Business and Economic Statistics* 8(1), pp. 83-98.

CHOI, I. (1991), «The Hausman Tests for a Unit Root with Serially Correlated Errors of Unknown Structure», Mimeo, The Ohio State University.

CHOI, I. et P. C. B. PHILLIPS (1990), «Testing for a Unit Root by Generalized Least Squares Methods in the Time and Frequency Domain», Mimeo, The Ohio State University.

CHRISTIANO, L. J. et M. EICHENBAUM (1990), «Unit Roots in Real GNP: Do We Know, and Do We Care?», *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 32, pp. 7-61.

CLARK, P. K. (1987), «The Cyclical Component of U.S. Economic Activity», *Quarterly Journal of Economics* 102, pp. 798-814.

CLARK, P. K. (1989), «Trend Reversion in Real Output and Unemployment», *Journal of Econometrics* 40, pp. 15-32.

COCHRANE, J. H. (1988), «How Big is the Random Walk in GNP?», *Journal of Political Economy* 96, pp. 893-920.

COCHRANE, J. H. (1991). «A Critique of the Application of Unit Root Tests», *Journal of Economic Dynamics and Control* 15, pp. 275-284.

DEJONG, D. N., J. C. NANKERVIS, N. E. SAVIN et C. H. WHITEMAN (1990), «The Power Problems of Unit Root Tests in Time Series with Autoregressive Errors», Mimeo, University of Iowa.

DEJONG, D. N., J. C. NANKERVIS, N. E. SAVIN et C. H. WHITEMAN (1992), «Integration Versus Trend-Stationarity in Time Series», *Econometrica* 60, pp. 423-433.

DICKEY, D. A., W. R. BELL, et R. B. MILLER (1986), «Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications», *American Statistician* 40, pp. 12-26.

DICKEY, D. A. et W. A. FULLER (1979), «Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root», *Journal of the American Statistical Association* 74, pp. 427-431.

DICKEY, D. A., et W. A. FULLER (1981), «Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root», *Econometrica* 49, pp. 1057-1072.

DICKEY, D. A. et S. G. PANTULA (1987), «Determining the Order of Differencing in Autoregressive Processes», *Journal of Business and Economic Statistics* 5, pp. 455-462.

DIEBOLD, F. X., et M. NERLOVE (1990), «Unit Roots in Economic Time Series: A Selective Survey», ***in*** *Advances in Econometrics: Cointegration, Spurious Regressions, and Unit Roots*, édité par T.B. FOMBY et G.F. RHODES. Greenwich, CT, JAI Press, pp. 3-70.

DOLADO, J. J., T. JENKINSON, et S. SOSVILLA-RIVERO (1990), «Cointegration and Unit Roots», *Journal of Economic Surveys* 4(3), pp. 249-273.

ENGLE, R. F., et C. W. J. GRANGER (1987), «Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing», *Econometrica* 55, pp. 251-276.

FULLER, W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley: New York.

GHYSELS, E. et P. PERRON (1990), «The Effect of Seasonal Adjustment Filters on Tests for a Unit Root». À paraître dans *Journal of Econometrics*.

GRANGER, C. W. J. (1981), «Some Properties of Time Series Data and Their Use in Econometric Model Specification», *Journal of Econometrics* 16, pp. 121-130.

GRANGER, C. W. J. (1983), «Co-integrated Variables and Error Correcting Models», Cahier de Recherche No. 83-13, University of California at San Diego.

GRANGER, C. W. J., et A. A. WEISS (1983), «Time Series Analysis of Error-Correcting Models», ***in*** *Studies in Econometrics, Time Series, and Multivariate Statistics*, pp. 255-278. New York: Academic Press.

HALL, A. (1989), «Testing for a Unit Root in the Presence of Moving-Average Errors», *Biometrika* 76, pp. 49-56.

HALL, A. (1990), «Testing for a Unit Root in Time Series with Pretest Data Based Model Selection», Mimeo, North Carolina State University.

HALL, R. E. (1978), «Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence», *Journal of Political Economy* 86, pp. 971-987.

HAMILTON, J. D. (1989), «A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and The Business Cycle», *Econometrica* 57, pp. 357-384.

HARVEY, A. C. (1985), «Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series», *Journal of Business and Economic Statistics* 3(3), pp. 216-227.

JAEGER, A. (1990), «Shock Persistence and the Measurement of Prewar Output Series», *Economics Letters* 34, pp. 333-337.

JAEGER, A. et R. M. KUNST (1990), «Seasonal Adjustment and Measuring Persistence in Output», *Journal of Applied Econometrics* 5, pp. 47-58.

KAHN, J. A. et M. OGAKI (1990), «A Chi-Square Test for a Unit Root», *Economics Letters* 34, pp. 37-42.

LAM, P. S. (1990), «The Hamilton Model with a General Autoregressive Component: Estimation and Comparison with Other Models of Economic Time Series», *Journal of Monetary Economics*, 26, pp. 409-432.

MANKIW, N. G. et M. D. SHAPIRO (1985), «Trends, Random Walks, and Tests of the Permanent Income Hypothesis», *Journal of Monetary Economics* 16, pp. 165-174.

NELSON, C. R. et C. I. PLOSSER (1982), «Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series», *Journal of Monetary Economics* 10, pp. 139-162.

OULIARIS, S. J. Y. PARK, et P. C. B. PHILLIPS (1989), «Testing for a Unit Root in the Presence of a Maintained Trend», ***in*** *Advances in Econometrics and Modelling*, édité par B. RAJ. DORDRECHT: Kluwer Academic Publishers.

PANTULA, S. G. (1991), «Asymptotic Distributions of the Unit Root Tests when the Process is Nearly Stationary», *Journal of Business and Economic Statistics* 9, pp. 63-71.

PANTULA, S. G. (1989), «Testing for Unit Roots in Time Series Data», *Econometric Theory* 5, pp. 256-271.

PANTULA, S. G., et A. HALL (1990), «Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models: An Instrumental Variable Approach», À paraître dans *Journal of Econometrics*.

PARK, J. Y. (1990), «Testing for Unit Roots and Cointegration by Variable Addition», ***In*** *Advances* Dans *Econometrics: Co-integration, Spurious Regressions, and Unit Roots*, T. B. FOMBY and G. F. RHODES (eds), Greenwich: JAI Press.

PARK, J. Y., et B. CHOI (1988), «A New Approach to Testing for a Unit Root», Mimeo, Cornell University.

PARK, J. Y., S. OULIARIS, et B. CHOI (1988), «Spurious Regressions and Tests for Cointegration», Mimeo, Cornell University.

PERRON, P. (1988a), «Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Further Evidence from a New Approach», *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, pp. 297-332.

PERRON, P. (1988b), «The Humped Shape Behavior of Macroeconomic Fluctuations», Mimeo, Princeton University.

PERRON, P. (1989a), «The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis», *Econometrica* 57, pp. 1361-1401.

PERRON, P. (1989b), «Testing for a Random Walk a Simulation Experiment of Power when the Sampling Interval is Varied», ***in*** *Advances in Econometrics and Modeling* (B. RAJ, ed.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 47-68.

PERRON, P. (1990a), «Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean», *Journal of Business and Economic Statistics* 8, pp. 153-162.

PERRON, P. (1990b), «Further Evidence on Breaking Trend Functions in Macroeconomic Variables», Econometric Research Program Memorandum No. 350, Princeton University.

PERRON, P. (1990c), «The Adequacy of Limiting Distributions in the AR(1) Model with Dependent Errors», Econometrics Research Program Memorandum No. 349, Princeton University.

PERRON, P. (1991), «Test Consistency with Varying Sampling Frequency», *Econometric Theory* 7, pp. 341-368.

PERRON, P. et P. C. B. PHILLIPS (1987), «Does GNP Have a Unit Root? A Reevaluation», *Economics Letters* 23, pp. 139-145.

PERRON, P. et T. J. VOGELSANG (1992), «Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity», *Journal of Business and Economic Statistics* 10, pp. 301-320.

PHILLIPS, P. C. B. (1987), «Time Series Regression with Unit Roots», *Econometrica* 55, pp. 277-302.

PHILLIPS, P. C. B. (1988), «Multiple Regression with Integrated Processes», *in* N. U. PRABHU (ed), *Statistical Inference from Stochastic Processes, Contemporary Mathematics* 80, pp. 79-106.

PHILLIPS, P. C. B., et M. LORETAN (1991), «Estimating Long Run Economic Equilibria», *Review of Economic Studies* 58, pp. 407-436.

PHILLIPS, P. C. B., and P. PERRON (1988), «Testing for a Unit Root in Time Series Regression», *Biometrika* 75, pp. 335-346.

PRIESTLEY, M. B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press: New York.

SAID, S. E., et D. A. DICKEY (1984), «Testing for Unit Roots in Autoregressive — Moving Average Models of Unknown Order», *Biometrika* 71, pp. 599-608.

SARGAN, J. D., et A. BHARGAVA (1983), «Testing the Residuals from Least-Squares Regression for Being Generated by the Gaussian Random Walk», *Econometrica* 51, pp. 153-174.

SCHMIDT, P., et P. C. B. PHILLIPS (1990), «Testing for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends», Mimeo, Michigan State University.

SCHWERT, G. W. (1989), «Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation», *Journal of Business and Economic Statistics* 7, pp. 147-160.

SHILLER, R. J., et P. PERRON (1985), «Testing the Random Walk Hypothesis: Power Versus Frequency of Observation», *Economics Letters* 18, pp. 381-386.

SIMS, C. A., J. H. STOCK, et M. W. WATSON (1990), «Inference in Linear Time Series Models with Some Unit Roots», *Econometrica* 58, pp. 113-144.

STOCK, J. H. (1990), «A Class of Tests for Integration and Cointegration», Mimeo, Harvard University.

WATSON, M. W. (1986), «Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends», *Journal of Monetary Economics* 18, pp. 1-27.

WEST, K. D. (1988), «Asymptotic Normality when Regressors Have a Unit Root», *Econometrica* 56, pp. 1397-1418.

ZIVOT, E. et D. W. K. ANDREWS (1992), «Further Evidence on the Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis», *Journal of Business and Economic Statistics* 10, pp. 251-270.