FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ (FD) İLERİ KOMPOZİT PLAKLARIN STATİK ANALİZİ

Ahmet Sinan ÖKTEM
Makine Mühendisliği, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, 41400, Gebze-Kocaeli, Türkiye
sinan.oktem@gyte.edu.tr

(Geliş/Received: 08.05.2013; Kabul/Accepted: 30.01.2014)

ÖZET

Süreksiz Fourier serileri yöntemiyle fonksiyonel olarak derecelendirilmiş (FD) kompozit plakların statik analizi analitik bir çözüm tekniğiyle gerçekleştirilmiştir. Kısmi türevli yüksek dereceden lineer diferansiyel denklemlerin oluşturduğu sistem, ankastre ve basit mesnetli sınır şartları için süreksiz Fourier serileri yöntemiyle çözülmüştür. Plakın mekanik özelliklerinin kalınlık boyunca, bileşenlerin hacim oranları ölçüsünde üstel bir şekilde dağıldığı kabulü yapılmıştır. Analitik çözüm, sabit yayılı yük için, ticari bir sonlu elemanlar programı kullanılarak karşılaştırılmıştır. Sonuçların sonlu elemanlar çözümüyle elde edilenlerle yakın olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel kompozit, statik analiz, analitik çözüm, Fourier metodu

STATIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED (FGM) COMPOSITE PLATES

ABSTRACT

Static analysis of functionally graded (FGM) plates based on a higher order shear deformation theory is performed using an analytical solution technique. The boundary-discontinuous double Fourier series approach is used to solve a system of highly coupled linear partial differential equations with the mixed type clamped and simply supported boundary conditions prescribed at the edges. The mechanical properties of the plate are assumed to vary in the thickness direction according to a power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. Analytical results are compared with finite element counterparts using commercially available software under uniformly distributed load. Present results are in good agreement with the finite element counterparts.

Keywords: Functionally graded composite, static analysis, analytical solution, Fourier method

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Günümüzde teknolojik ilerlemelerin içerisinde malzeme teknolojisi çok önemli bir yere sahiptir. İleri malzemeler olarak adlandırılan malzemeler arasında, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler (FDM), yüksek aşınma dayanımları, yüksek sıcaklıklara karşı gösterdikleri ısıl direnç gibi özelliklerinden dolayı, uzay-havacılık, kimya, nükleer enerji, otomotiv, bio-mekanik ve elektronik sektörlerinde artan oranlarda kullanılmaktadırlar. FDM'ler, malzeme özelliklerinin genellikle kalınlık boyunca değiştiği homojen özellik göstermeyen malzemelerdir. Bu özelliklerinden dolayı, malzeme ara yüzleri arasında, malzeme özelliklerinin süreksizliğinin yol açtığı çatlak oluşumu ve ilerlemesi, tabakalar arası oluşan gerilmeler ve yüksek sıcaklık ortamlarında oluşan ısıl gerilme yoğunlaşmalarının yol açtığı problemlerin giderilmesinde kullanılabilirler.

FDM'lerin ilk olarak geliştirilmeleri ve kullanıma girmeleri 1984 yılına uzanmaktadır [1]. Bu tarihten itibaren FDM'ler üzerine araştırmacıların ilgisi giderek artmış ve buna paralel olarak özellikle statik ve dinamik analizlerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar arasında, kapalı formda analitik çözümlerin büyük çoğunluğunu, özel olarak seçilmiş sınır koşullarının öncelikli olarak sağlandığı basit mesnetli sınır şartlarıyla modellenmiş Navier tipi çözümler oluşturmaktadır. Çözümlerde ağırlıklı olarak, efektif malzeme özelliklerinin genel olarak kalınlık boyunca üstel değiştiği kabulü yapılmıştır [2-13]. Analitik çözümlerin yanında, yarı-analitik ve

analitik çözümler Pendhari vd. [14] ve Aghdam vd. [15] tarafından FD malzemeden yapılmış sırasıyla dikdörtgen bir plak ve kabuk için gerçekleştirmiştir. Poisson oranının kalınlık boyunca sabit kabul edildiği çalışmalarda, diğer malzeme özelliklerinin üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Basit mesnetli sınır şartları dışında sınır şartlarını göz önüne alan ankastre mesnetli dikdörtgen bir fonksiyonel dereceli bir plak için Ritz çözümünü kullanan üç boyutlu bir statik elastisite çözümü Elishakoff tarafından [16] verilmiştir. Az sayıdaki üç boyutlu elastisite teorisi tabanlı ve sınır koşullarının öncelikli olarak sağlandığı basit mesnetli bir FD dikdörtgen plak için gerilme ve yer değiştirme dağılımlarının hesaplandığı analitik bir çözüm Xu ve Zhou tarafından verilmiştir [17]. Fourier serilerinin kullanıldığı çözümde yer değiştirme ve gerilme ifadeleri analitik olarak elde edilmiştir. Çözümü klasik Navier ve Levy metotlarıyla mümkün olmayan tam basit mesnet sınır şartları için FD malzemeden oluşan plak ve kabukların statik analizi, modifiye edilmiş Fourier serileri kullanılarak Oktem vd. tarafından yapılmıştır [18]. Malzeme özelliklerinin yapının kalınlığı boyunca üstel değişimi göz önüne alınmış, Poisson oranının ise değişmediği kabulü yapılmıştır. FD malzemelerin tasarımı, üretimi, modellenmesi ve uygulamalarıyla ilgili daha geniş bilgi Birman vd. [19] ve Jha vd. [20] tarafından yapılan çalışmalarda bulunabilir.

Bu çalışmada, yüksek dereceli bir deformasyon teorisi kullanılarak, FD malzemeden oluşan plakların statik analizi analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan literatür araştırmasında, sıklıkla kullanılan basit mesnetli ve Navier çözümünü mümkün kılan sınır şartları dışında analitik çözümlerin sınırlı olduğu görülmüştür. Bu nedenle literatürde bulunmayan ve dikdörtgen plakanın iki kenarında tam basit mesnetli, geri kalan diğer iki kenarda tam ankastre mesnetler için karma sınır şartları göz önüne alınmıştır. Mekanik özelliklerin plakanın kalınlığı boyunca, bileşenlerin hacim oranları ölçüsünde üstel bir şekilde dağıldığı kabulü yapılmıştır. Analitik çözüm, sabit yayılı yük için, ticari bir sonlu elemanlar programı kullanılarak karşılaştırılmıştır. Sonuçların sonlu elemanlar çözümüyle elde edilenlerle yakın olduğu görülmüştür. Çözüm metodu olarak süreksiz Fourier serileri olarak adlandırılan ve daha önce tabakalı klasik kompozit yapıların çözümünde de [21-23] başarılı bir şekilde kullanılan analitik bir yöntem kullanılmıştır.

2. TEMEL DENKLEMLER (GOVERNING EQUATIONS)

Şekil 1 de *h* kalınlığında FD malzemeden yapılmış bir plak görünmektedir. Statik analiz için Reddy tarafından geliştirilen düzlem yer-değiştirmelerin ($\bar{u}_i, i = 1,2$) plağın kalınlığı boyunca ($x_3 = z$) kübik olarak değiştiği yüksek dereceli bir deformasyon teorisi kullanılmıştır [24].

$$\bar{u}_1 = u_1 + z\phi_1 + c_1 z^3(-\phi_1 - u_{3,1}), \quad (1a)$$

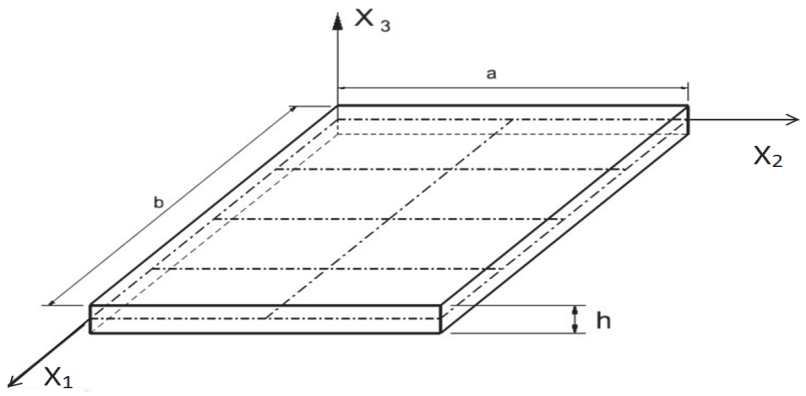
$$\bar{u}_2 = u_2 + z\phi_2 + c_1 z^3(-\phi_2 - u_{3,2}), \quad (1b)$$

$$\bar{u}_3 = u_3 \quad (1c)$$

(1) eşitliklerinde $\bar{u}_i$, *i = 1,2,3*, orta düzlemdeki bir noktanın yer değiştirmelerini ($z = 0$), ϕ_1 ve ϕ_2 sırasıyla x_2 ve $x_1$eksenleri çevresindeki dönmeleri göstermektedir ve c1 = 4/(3h^2) olarak tanımlanmıştır. Teorinin detayları Reddy [24] tarafından verilmiştir ve burada tekrarlanmayacaktır. Bu çalışmada *h* kalınlığında, uzunluğu *a*, genişliği *b* boyutlarında ve metal-seramik malzeme [2] karışımından üretilmiş bir FD plak göz önüne alınmıştır. Plak kalınlığı boyunca değişen malzeme özelliklerinin (2) eşitliklerinde verildiği şekilde üstel olarak değiştiği kabulü yapılmıştır.

$$P(z) = (P_{\ddot{u}} - P_a)V + P_a, \quad V = (z/h + 1/2)^k \quad (2)$$

Burada *P* efektif malzeme özelliğini, $P_{\ddot{u}}$ ve P_a ise plağın sırasıyla üst ve alt yüzeylerindeki malzeme özelliğini, *k* ise kalınlık boyunca malzeme dağılımını göstermektedir. Plağın efektif malzeme özelliklerinden elastisite modülü *E* ve kayma modülü *G,* (2) eşitliğine göre değişirken, Poisson oranının, υ değişmediği kabulü yapılmıştır.



Şekil 1. FD plağın geometrisi (Geometry of FG plate)

Sistemin gerilme-birim uzama bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad (3)$$

Burada

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},\quad Q_{12}=\nu Q_{11}$$

$$Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

Elastisite modülü, kayma gerilmesi ve elastik katsayılar, (Q_{ij}) plak kalınlığı boyunca (2) denklemlerine göre değişmektedirler.

Enerjinin minimize prensibi kullanılarak elde edilen plaka ait denge denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [24]:

$$\{x_j\}^T=\{u_1\ \ u_2\ \ u_3\ \ \phi_1\ \ \phi_2\}$$

$$N_{1,1}+N_{6,2}=0, \quad (5a)$$

$$N_{6,1}+N_{2,2}=0, \quad (5b)$$

$$\mathrm{Q_{1,1}+Q_{2,2}-3c_1(K_{1,1}+K_{2,2})+c_1(P_{1,11}+P_{2,22}+2P_{6,12})}+q=0, \quad (5c)$$

$$\mathrm{M_{1,1}+M_{6,2}-Q_1+3c_1K_1-c_1(P_{1,1}+P_{6,2})=0}, \quad (5d)$$

$$\mathrm{M_{6,1}+M_{2,2}-Q_2+3c_1K_2-c_1(P_{6,1}+P_{2,2})=0}. \quad (5e)$$

Burada q yükü, Ni, Mi, Pi, i = 1, 2, 6, gerilme, moment ve ikincil gerilme bileşenlerini, Q_i ve K_i, i=1,2, kayma gerilmesi bileşenlerini temsil etmektedir [18,24]. N_i, M_i, P_i, Q_i ve $\mathrm{K_i}$, (5) eşitliklerinde yerine yazılıp düzenlendiğinde, (6a) da görülen lineer beş adet dördüncü dereceden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$K_{ij}x_j=f_i \quad (i,j=1,.....,5)\ \ ve\ \ (K_{ij}=K_{ji}) \quad (6a)$$

K_{ij} matrisi elemanları Oktem tarafından [18] de, $\mathrm{x_j}$ ve $\mathrm{f_i}$ vektörleri ise aşağıda verilmiştir.

$$\{x_j\}^T=\{u_1\ \ u_2\ \ u_3\ \ \phi_1\ \ \phi_2\},$$

$$\{f_j\}^T=\{0\ \ 0\ \ -q\ \ 0\ \ 0\} \quad (6b)$$

Yukarıda tanımlanan problem için sınır şartları (7a, b) eşitliklerinde tanımlandığı üzere, iki tarafında tam ankastre, geri kalan diğer taraflarında basit mesnetli karma sınır şartları olarak göz önüne alınmıştır. Sınır şartlarının detaylı tanımı aşağıda verilmiştir:

$x_1=0,\ a$ kenarları boyunca:

$$u_1=u_2=u_3=\phi_1=\phi_2=u_{3,1}=0, \quad (7a)$$

ve $x_2=0,\ b$ kenarları boyunca:

$$u_1=u_2=u_3=\phi_1=M_2=P_2=0. \quad (7b)$$

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ (SOLUTION PROCEDURE)

Yukarıda (6a) eşitliğiyle tanımlanan sınır değer probleminin (7a,b) eşitliklerinde verilen sınır şartlarıyla çözümü klasik Navier ya da Levy metotlarıyla mümkün olmamaktadır [18, 21-23]. Bu nedenle yalnızca özel olarak tanımlanmış sınır koşulları için çözüme olanak sağlayan Navier ve Levy metotları dışında, herhangi bir sınır şartının çözümüne olanak sağlayan süreksiz Fourier serileri yaklaşımı çözüm olarak kullanılmıştır. Bir önceki bölümde belirlenmiş sınır şartlarına bağlı olarak, deformasyon ve dönmeler için aşağıdaki çözüm fonksiyonları kabul edilmiştir:

$$u_1(x_1,x_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}\cos(\alpha x_1)\sin(\beta x_2),\quad 0\le x_1\le a;\ 0<x_2<b \quad (8a)$$

$$u_2(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}V_{mn}\sin(\alpha x_1)\cos(\beta x_2),\quad 0<x_1<a;\ 0\le x_2\le b \quad (8b)$$

$$u_3(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin(\alpha x_1)\sin(\beta x_2),\quad 0\le x_1\le a;\ 0\le x_2\le b \quad (8c)$$

$$\phi_1(x_1,x_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\cos(\alpha x_1)\sin(\beta x_2),\quad 0\le x_1\le a;0\le x_2\le b \quad (8d)$$

$$\phi_2(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}Y_{mn}\sin(\alpha x_1)\cos(\beta x_2),\quad 0\le x_1\le a;0\le x_2\le b \quad (8e)$$

(8) eşitliklerinde; $\alpha=m\pi/a$, $\beta=n\pi/b$ olarak tanımlanmıştır. (9)

(8) eşitliklerinde verilen çözüm fonksiyonlarının (6a) da verilen denklem sisteminde yerine yazılmasıyla 5mn+2m+2n adet bilinmeyen Fourier katsayısı elde edilir. Bir sonraki aşamayı, kabul edilmiş çözüm

fonksiyonlarının kısmi türevlerinin alınması oluşturmaktadır. Fakat türev alma işlemi sınır koşullarında olan süreksizlikleri modelleyebilmek amacıyla [25, 26], klasik türevlendirmeden farklı olarak Lebesgue entegrasyon teorisi kullanılarak yapılmıştır. Örneğin (8a) eşitliği ile verilen u_1 ve ilk türevi $u_{1,1}$, $x_1 = 0$, a kenarlarında kabul edilen çözüm fonksiyonu tarafından sağlanamamaktadır. Bu nedenle, u_1' in bu kenarlarda istenilen sınır koşulu değerini vermesi için, daha yüksek dereceden türevleri ($u_{1,11}$), [25, 26] da önerilen şekilde elde edilmiştir. Bu türev ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u_{1,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}\bar{a}_n \sin(\beta x_2) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\alpha^2 U_{mn} + \gamma_m \bar{a}_n + \psi_m \bar{b}_n\right]\cos(\alpha x_1)\sin(\beta x_2), \quad (10a)$$

$$u_{1,22} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^2 U_{0n}\sin(\beta x_2) - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^2 U_{mn}\cos(\alpha x_1)\sin(\beta x_2), \quad (10b)$$

Benzer şekilde tarif edilen kenarlarda sağlanmayan u_2, u_3 ve ϕ_1 fonksiyonları da aşağıdaki şekilde türetilmişlerdir [25, 26]:

$$u_{2,22} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{c}_m \sin(\alpha x_1) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\beta^2 V_{mn} + \gamma_n \bar{c}_m + \psi_n \bar{d}_m\right]\sin(\alpha x_1)\cos(\beta x_2) \quad (11)$$

$$\phi_{1,11} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{e}_n \sin(\beta x_2) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\alpha^2 X_{mn} + \gamma_m \bar{e}_n + \psi_m \bar{f}_n\right]\cos(\alpha x_1)\sin(\beta x_2) \quad (12)$$

$$u_{3,111} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{g}_n \sin(\beta x_2) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\alpha^3 W_{mn} + \gamma_m \bar{g}_n + \psi_m \bar{h}_n\right]\cos(\alpha x_1)\sin(\beta x_2) \quad (13)$$

Yukarıdaki türev ifadeleri dışındaki türevlendirmeler klasik türev işlemleri kullanılarak yapılmıştır. (10-13) eşitliklerinde yer alan $\bar{a}_n, \bar{b}_n, \bar{c}_m, \bar{d}_m, \bar{e}_n$, $\bar{f}_n$ $\bar{g}_n$ ve $\bar{h}_n$ bilinmeyen Fourier katsayıları (14) denklemlerinde verilmiştir ve

$$\bar{a}_n, \bar{b}_n = \frac{4}{ab}\int_0^b [u_{1,1}(a, x_2) \pm u_{1,1}(0, x_2)]\sin(\beta x_2)dx_2 , \quad (14a)$$

$$\bar{c}_m, \bar{d}_m = \frac{4}{ab}\int_0^a [u_{2,2}(x_1, b) \pm u_{2,2}(x_1, 0)]\sin(\alpha x_1)dx_1 , \quad (14b)$$

$$\bar{e}_n, \bar{f}_n = \mp\frac{4}{ab}\int_0^b [\phi_{1,1}(a, x_2) \pm \phi_{1,1}(0, x_2)]\sin(\beta x_2)dx_2 , \quad (14c)$$

$$\bar{g}_n, \bar{h}_n = \mp\frac{4}{ab}\int_0^b [u_{3,11}(a, x_2) \pm u_{3,11}(0, x_2)]\sin(\beta x_2)dx_2 \quad (14d)$$

$$(\gamma_n, \psi_n) = \begin{cases} (0,1), & n = tek, \\ (1,0), & n = çift. \end{cases} \quad (14e)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki türevlendirmeler ilave olarak 6n+2m bilinmeyen Fourier katsayıları üretmiştir. (7a, b) eşitliğinde verilen u_1, u_2, ϕ_1 ve $u_{3,1}$ geometrik sınır şartlarının sağlanması ve $\sin(\alpha x_1), \cos(\beta x_2)$ gibi katsayıların eşitlenmesi sonucu, bilinmeyen ilave Fourier katsayılarının çözümü için gereken eşitlikler aşağıdaki denklemlerde verilmiştir.

$n = 1,2,.....$ için:

1. $$\sum_{m=1,3,5,.....}^{\infty}\psi_m U_{mn} = 0$$
$$U_{0n} + \sum_{m=2,4,6,.....}^{\infty}\gamma_m U_{mn} = 0, \quad (15a)$$

2. $$\sum_{m=1,3,5,.....}^{\infty}\psi_m X_{mn} = 0$$
$$X_{0n} + \sum_{m=2,4,6,.....}^{\infty}\gamma_m X_{mn} = 0, \quad (15b)$$

3. $$\alpha\sum_{m=1,3,5,.....}^{\infty}\psi_m W_{mn} = 0$$
$$\alpha\sum_{m=2,4,6,.....}^{\infty}\gamma_m W_{mn} = 0, \quad (15c)$$

$m = 1,2,.....$ için:

4. $$\sum_{n=1,3,5,.....}^{\infty}\psi_n V_{mn} = 0$$
$$V_{m0} + \sum_{n=2,4,6,.....}^{\infty}\gamma_n V_{mn} = 0. \quad (15d)$$

(15) eşitliklerindeki denklemlerle birlikte problemin çözümü için toplam 5mn + 4m + 8n adet lineer denklem ve bilinmeyen katsayı elde edilmiştir. Çözümün kolaylığı ve etkinliği için ilk aşamada, (6a) eşitliğinde U_{mn}, V_{mn} vb. büyüklükler öncelikle

bilinmeyen $\overline{a}_n$, $\overline{b}_n$ vb. Fourier katsayıları cinsinden çözülmüş, ikinci aşamada ise bu katsayılar (15a-d) denklemlerinde yerine yazılarak elde edilen lineer denklem sistemi çözülerek bilinmeyen Fourier katsayıları elde edilmiştir.

4. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA (NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION)

Sayısal sonuçlar basit ve ankastre mesnetli karma sınır koşulları için ve plaka eşit şiddette uygulanmış basınç yükü (q_0) altında elde edilmiştir. Hesaplarda kullanılan seramik (üst tabaka) ve alüminyumdan (alt tabaka) oluşan FDM özellikleri ve boyutsuz parametreler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [2]:
$E_ü = 151$ GPa , $v_ü = 0.3$; $E_a = 70$ GPa, $v_a = 0.3$.

$$w^* = \frac{D(2,2)}{q_0 a^4} u_3(\frac{a}{2},\frac{b}{2}),\ M_1^* = \frac{M_1}{q_0 a^2}(\frac{a}{2},\frac{b}{2}),$$
$$\sigma_x^* = \sigma_x \frac{h}{q_0 a^2}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}),$$
$$\sigma_y^* = \sigma_y \frac{h}{q_0 a^2}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}),$$
$$\sigma_{xy}^* = \sigma_{xy} \frac{h}{q_0 a^2}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}),$$
$$\sigma_{xz}^* = \sigma_{xz} \frac{h}{q_0 a^2}(0,\frac{b}{2},0). \quad (16)$$

(16) eşitliklerinde *a* ve *b* FDM plağın kenar uzunluklarını, *h* toplam plak kalınlığını, *D(2,2)* ise eğilme dayanımını göstermektedir. Çözümün doğruluğunu kontrol için mevcut olan ticari bir sonlu elemanlar programı (ANSYS) kullanılarak FDM bir plağın modeli hazırlanmıştır. Plak merkezindeki boyutsuz yer değiştirme (w*) ve moment değerleri (M_1*) bu çalışmadan elde edilen analitik çözüm ve sonlu elemanlar (SE) programı yardımıyla ve k = 0,5 üstel değere göre değişen bir FDM için hesaplanmış ve karşılaştırmalar değişik a/h değerleri için Tablo 1' de verilmiştir. Sonlu elemanlar modelinde plağın bir kenarı 40 eşit parçaya bölünmüş ve toplamda 1600 adet eleman kullanılarak, sonuçlarda istenilen hassasiyette bir sonlu elemanlar ağı oluşturulmuştur. Katmanlı kompozit yapıların modellenmesinde kullanılan Shell 91 elemanı kullanılarak modelleme yapılmıştır. FD malzemenin modellenmesinde kalınlık boyunca malzeme değişimini modellemek için, kalınlık belirli sayıda eşit kalınlıkta alt katmanlara bölünmüş ve malzeme özellikleri bu katmanların tam ortasında (2) denklemine göre hesaplanarak sonlu elemanlar programına girilmiştir. Kalınlık boyunca katman sayısının belirlenmesinde plağın orta noktasındaki boyutsuz yer değiştirme (w*) ve moment değerlerinin (M_1*) istenilen hassaslığa yakınsaması göz önüne alınmıştır ve buna bağlı olarak kalınlık boyunca 12 adet katman kullanılmıştır. Çalışmadan elde edilen değerlerle sonlu elemanlar çözümü kullanılarak elde edilen değerler arasında yakın sonuçlar elde edilmiştir. İki yöntem arasında, boyutsuz yer değiştirme (w*) ve moment değerleri (M_1*) arasındaki en yüksek bağıl fark sırasıyla %13,74 ve %31,34 olarak hesaplanmıştır. Bu farklılığa nedenleri arasında, çalışmada kullanılan yüksek dereceli deformasyon teorisiyle, sonlu elemanlar programının kullandığı birinci dereceden deformasyon teorisi arasındaki farklar, FDM modellemesinde oluşan hatalar ve yine kullanılan farklı teori ve çözüm yöntemleri nedeniyle sınır koşullarının birebir modellenememesi sayılabilir.

Tablo 2-4' de izotropik (seramik, metal, k = 0) ve değişik FDM (k = 0,5; 1,0 ve 10) için sırasıyla plak

Tablo 1. Boyutsuz merkezi yer değiştirme ve momentlerin FDM bir plak için sonlu elemanlar metoduyla değişik a/h oranları için karşılaştırılması (Comparison of non-dimensional central deflections and moments for an FG plate between present and finite element method for different a/h ratios)

Üstel indeks ***k = 0,5***	**a / h**					
	5	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
w*(SE)	0,002691	0,001951	0,001756	0,001718	0,001705	0,001699
w* (Analitik)	0,002979	0,002233	0,002029	0,001990	0,001976	0,001970
M_1*(SE)	0,023692	0,023140	0,022974	0,022927	0,022910	0,022903
M_1* (Analitik)	0,033209	0,033382	0,033374	0,033367	0,033364	0,033362

Tablo 2. Farklı FDM için boyutsuz merkezi yer değiştirmenin a/h oranlarıyla değişimi (Variation of non-dimensional central deflections with power-law index, k for different a/h ratios)

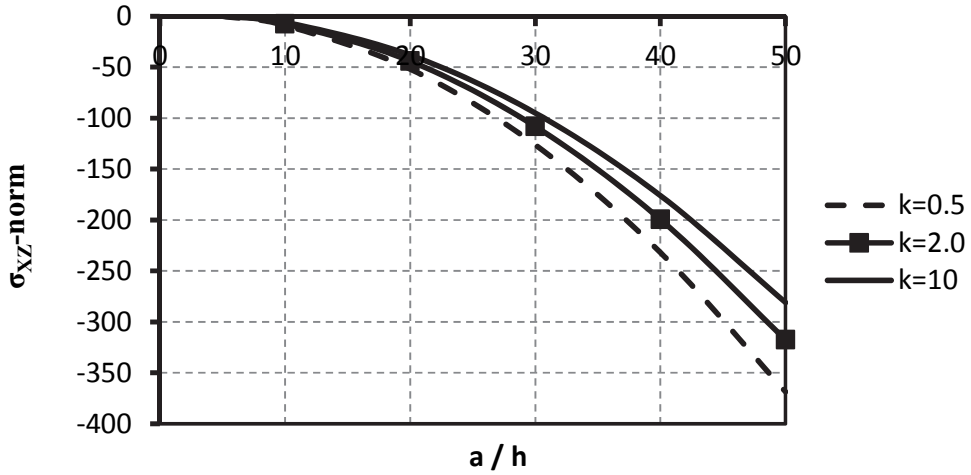
Üstel indeks ***(k)***	**a / h**					
	5	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
Seramik	0,002966	0,002196	0,001986	0,001945	0,001931	0,001924
0,5	0,002979	0,002233	0,002029	0,001990	0,001976	0,001970
1,0	0,003058	0,002286	0,002076	0,002035	0,002021	0,002014
10	0,003159	0,002274	0,002031	0,001984	0,001967	0,001959
Metal	0,002966	0,002196	0,001986	0,001945	0,001931	0,001924

Tablo 3. Farklı FDM için boyutsuz düzlemsel gerilme σ_x*' in a/h oranlarıyla değişimi (Variation of non-dimensional axial stress σ_x* with power-law index, k for different a/h ratios)

Üstel indeks *(k)*	a / h					
	5	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
Seramik	1,043962	2,026818	4,014066	6,008080	8,004065	10,000867
0,5	1,231827	2,384016	4,717552	7,059908	9,404782	11,750692
1,0	1,332408	2,574270	5,091358	7,618491	10,148490	12,679670
10	1,739456	3,364780	6,654809	9,957549	13,264070	16,572176
Metal	1,043962	2,026818	4,014066	6,008080	8,004065	10,000867

Tablo 4. Farklı FDM için boyutsuz düzlemsel gerilme σ_y*' in a/h oranlarıyla değişimi (Variation of non-dimensional axial stress σ_y* with power-law index, k for different a/h ratios)

Üstel indeks *(k)*	a / h					
	5	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
Seramik	0,891917	1,556553	2,974513	4,420256	5,873765	7,330490
0,5	1,085243	1,897278	3,629024	5,394018	7,168275	8,946364
1,0	1,194909	2,084637	3,983790	5,920122	7,866839	9,817855
10	1,565815	2,693958	5,115103	7,590268	10,080778	12,577674
Metal	0,891917	1,556553	2,974513	4,420256	5,873765	7,330490



Şekil 2. Boyutsuz gerilme σ_{xz}*' nin a/h oranlarıyla farklı FDM (k) için değişimi (Variation of non-dimensional stress σ_{xz} with a/h ratio for different values of power-law index, *k*)

merkezindeki boyutsuz yer değiştirme (w*) ve gerilme değerleri (σ_x*, σ_y*) değişik a/h değerleri için verilmiştir.

Üstel, *k* değerinin artmasıyla, diğer bir ifadeyle, malzemedeki homojenlik azaldıkça boyutsuz yer değiştirme (w*) değeri artmaktadır. Fakat a/h oranının yüksek değerleri (ince malzeme) için de boyutsuz yer değiştirme (w*) değerleri beklenildiği gibi düşmektedir.

Boyutsuz gerilme değerleri (σ_x*, σ_y*) Tablo 3 ve 4' te verilmiştir. Benzer durum gerilme değerleri için de geçerlidir. Malzemedeki homojenliğin azalması gerilme değerlerini artırmaktadır. Bununla beraber a/h değerlerinin artmasıyla boyutsuz gerilme değerleri (σ_x*, σ_y*) düşmektedir. Plağın kenarlarında uygulanan

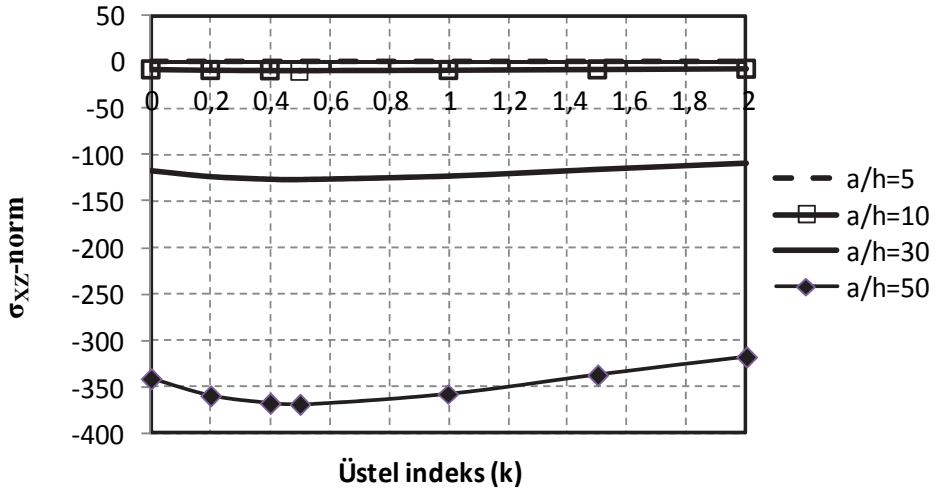
sınır şartlarının (ankastre-basit mesnet) farklı olması sebebiyle σ_x* değerinin, σ_y* gerilme değerlerinden bir miktar fazla olduğu görülmektedir.

Plağın $x_1 = 0$, $x_2 = b/2$ ve $x_3(z) = 0$ koordinatlarında hesaplanan boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}' nin a/h ile değişimi, farklı FDM (k = 0,5; 2,0; 10) için Şekil 2'de verilmiştir. Homojenliğin azalması ve a/h oranının artmasıyla boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}' nin değeri negatif olarak hızla artmaktadır. Bu artış ince kalınlıktaki FDM için daha fazla olmaktadır (ayrıca bakınız Şekil 3).

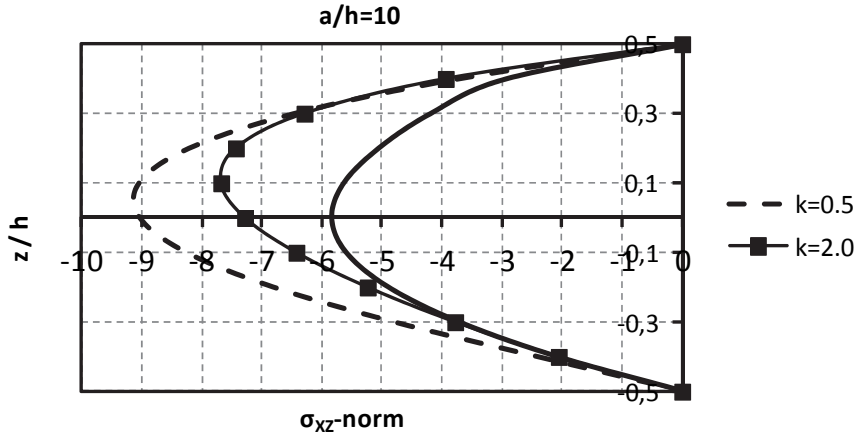
Şekil 4'te boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}*' nin üstel değer, k ile değişimi farklı a/h oranları için verilmiştir. Malzemenin heterojen olması özellikle ince (a/h = 30, 50) FD plaklarda önem kazanmaktadır. Plağın kalınlaşmasıyla kayma gerilmesi σ_{xz}*' nin değerinin sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Şekil 4' te boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}*' nin x1 = 0, x_2 = b/2 de plak kalınlığı boyunca değişimi gösterilmiştir. Boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}*' nin plağın kalınlığı boyunca FDM tipine (malzeme dağılımı) göre değişiklikler gösterdiği ve homojenlik azaldıkça özellikle plağın orta noktasında daha fazla değiştiği görülmektedir.

Boyutsuz eksenel gerilme σ_x*' in x_1 = a/2, x_2 = b/2 de plak kalınlığı boyunca değişimi Şekil 5' te gösterilmiştir. Boyutsuz eksenel gerilme σ_x* plak kalınlığı boyunca yaklaşık olarak doğrusal bir değişim göstermektedir. Yalnızca k = 0,5 FG malzeme için plağın altında ani bir değişim ve k = 10 FG malzeme için plağın üstüne yakın bölgede değişim görülmektedir.

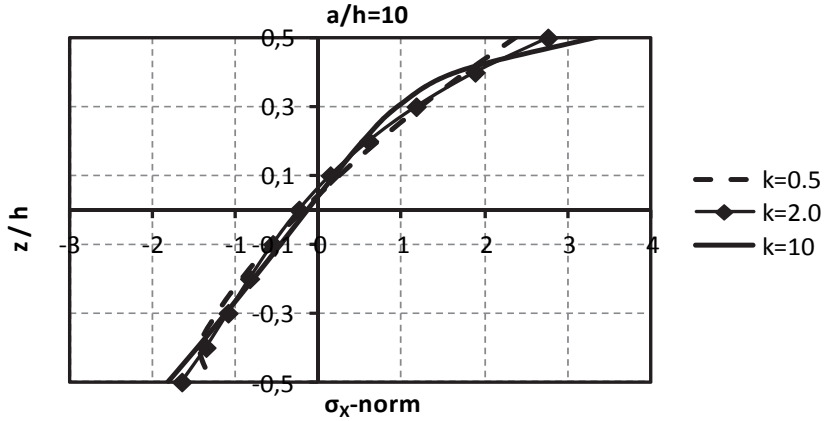
Bu çalışmada göz önüne alınan tüm FDM için boyutsuz eksenel gerilme en yüksek değerine plağın üstünde ulaşmaktadır ve gerilme değerleri çekme bölgesinden basma bölgesine hemen hemen aynı bölgede (z/h ~ 0,05) geçmektedirler. Benzer bir analiz Şekil 6' da gösterildiği üzere düzlem içi boyutsuz gerilme σ_y* için de yapılabilir. Şekil 7' de düzlem içi boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xy}* nin x_1 = 0, x_2 = 0 da plak kalınlığı boyunca değişimi gösterilmiştir.



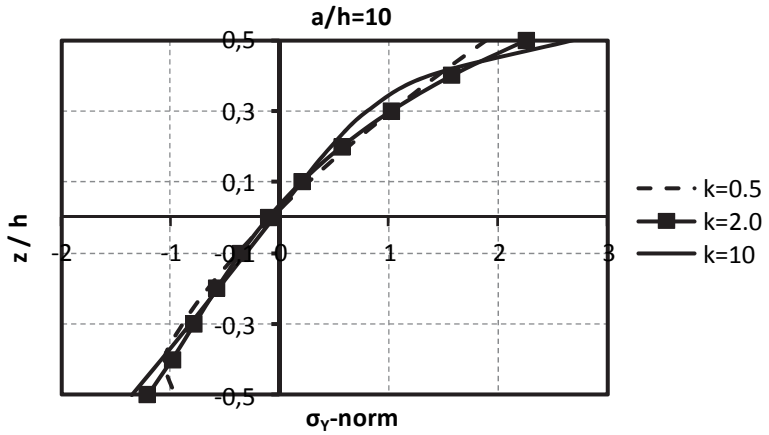
Şekil 3. Boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}*' nin farklı a/h oranları için üstel değerler (k) ile değişimi (Variation of non-dimensional stress σ_{xz}* with power-law index, k for different values of a/h ratio)



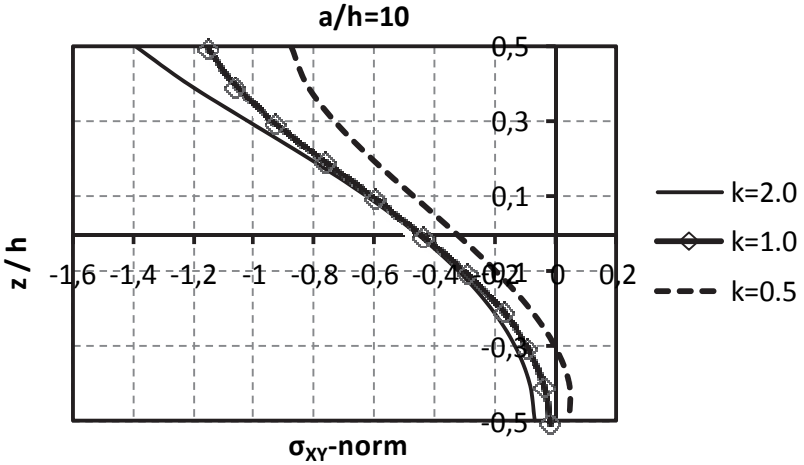
Şekil 4. Boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xz}*' nin plak kalınlığı boyunca farklı FDM (k) için değişimi (Variation of non-dimensional stress σ_{xz}* through thickness for different values of power-law index, k)



Şekil 5. Boyutsuz gerilme σ_x*' in plak kalınlığı boyunca farklı FDM (k) için değişimi (Variation of non-dimensional stress σ_x* through the thickness for different values of power-law index, *k)*



Şekil 6. Boyutsuz gerilme σ_y*' nin plak kalınlığı boyunca farklı FDM (k) için değişimi (Variation of non-dimensional stress σ_y* through the thickness for different values of power-law index, *k)*



Şekil 7. Boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xy}*' nin plak kalınlığı boyunca farklı FDM (k) için değişimi (Variation of non-dimensional stress σ_{xy}* through thickness for different values of power-law index, *k)*

Boyutsuz kayma gerilmesi plak kalınlığı boyunca göz önüne alınan tüm FDM için kalınlık boyunca negatif bölgede kalmaktadır. Yalnız k = 0,5 için plağın alta yakın bir bölgesinde değer pozitif olmaktadır. Ayrıca boyutsuz kayma gerilmesi en yüksek değerine plağın üstünde ulaşmakta ve plağın altına yaklaştıkça düşerek sıfıra yakın bir değere ulaşmaktadır. Homojenliğin değişimi yine boyutsuz kayma gerilmesi σ_{xy}* yi de etkilemektedir.

5. SONUÇLAR (CONCLUSION)

Bu çalışmada, yüksek dereceli bir deformasyon teorisi kullanılarak, FD malzemeden oluşan plakların statik analizi süreksiz Fourier serileri kullanılarak analitik olarak gerçekleştirilmiştir. Çözümde basit mesnetli ve tam ankastre mesnetler için karma sınır şartları göz önüne alınmıştır. Malzeme özelliklerinin plak kalınlığı boyunca üstel bir şekilde değiştiği kabulü yapılmıştır. Sayısal sonuçlar malzeme heterojenliğinin ve kalınlığının yapının gerek yer değiştirme, gerekse gerilme davranışlarında büyük bir etkisi olduğunu göstermiştir. Yapılan çalışma, sonlu elemanlar metodu kullanılarak doğrulanmış ve bir FDM için karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların bu tip malzemelerin analizinde ve sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar gibi sayısal yöntemlerle elde edilecek sonuçların kontrolünde bir karşılaştırma imkânı sağlayacağı ve özellikle ön tasarım sürecinde yararlı olacağı ön görülmektedir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Koizumi M., "The Concept of FGM", **Ceram Trans Func Grad Mater**, Cilt 34, No 3–10, 1993.
2. Reddy, J.N., "Analysis of Functionally Graded Plates", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Cilt 47, No 1-3, 663-684, 2000.
3. Zenkour, A.M., "Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates", **Applied Mathematical Modelling**, Cilt 30, No 1, 67-84, 2006.
4. Nguyen T-K., Sab, K. ve Bonnet, G., "First-Order Shear Deformation Plate Models for Functionally Graded Materials", **Composite Structures,** Cilt 83, No 1, 25-36, 2008.
5. Matsunaga, H., "Stress Analysis of Functionally Graded Plates Subjected to Thermal and Mechanical Loadings", **Composite Structures**, Cilt 87, No 4, 344-357, 2009.
6. Fares, M.E., Elmarghany, M.Kh. ve Atta, D., "An Efficient and Simple Refined Theory for Bending and Vibration of Functionally Graded Plates", **Composite Structures**, Cilt 91, No 3, 296-305, 2009.
7. Brischetto, S. ve Carrera, E., "Advanced Mixed Theories for Bending Analysis of Functionally Graded Plates", **Computers and Structures**, Cilt 88, No 23-24, 1474–1483, 2010.
8. Zenkour, A.M. ve Alghamdi, N.A., "Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Under the Effect of Mechanical and Thermal Loads", **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Cilt 17, No 6, 419–432, 2010.
9. Mechab, I., Atmane, H.A., Tounsi, A., Belhadj, H.A. ve Bedia E.A., "A Two Variable Refined Plate Theory for the Bending Analysis of Functionally Graded Plates", **Acta Mechanica Sinica**, Cilt 26, No 6, 941–949, 2010.
10. Merdaci, S., Tounsi, A.,Houari, M.S.A., Mechab, I., Hebali, H. ve Benyoucef, S., "Two New Refined Shear Displacement Models for Functionally Graded Sandwich Plates", **Archive of Applied Mechanics**, Cilt 81, No 11, 1507–1522, 2011.
11. Mantari, J.L., Oktem, A.S. ve Soares, C.G., "Bending Response of Functionally Graded Plates by Using a New Higher Order Shear Deformation Theory", **Composite Structures**, Cilt 94, No 2, 714–723, 2012.
12. Mantari, J.L. ve Guedes Soares, C., "A Novel Higher-Order Shear Deformation Theory with Stretching Effect for Functionally Graded Plates", **Composite Structures**, Cilt 45, No 1, 268–281, 2013.
13. Mechab, I., Mechab, B. ve Benaissa, S., "Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates Using Four-Variable Refined Plate Theory by the New Function", **Composite Structures**, Cilt 45, No 1, 748–757, 2013.
14. Pendhari, S.S., Kant, T., Desai, Y.M. ve Subbaiah, C.V., "Static Solutions for Functionally Graded Simply Supported Plates", **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, Cilt 8, No 1, 51–69, 2012.
15. Aghdam, M.M., Bigdeli, K. ve Shahmansouri, N., "A Semi-Analytical Solution for Bending of Moderately Thick Doubly Curved Functionally Graded Panels", **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Cilt 17, No 5, 320–327, 2010.
16. Elishakoff, I., "Three-Dimensioanl Analysis of an All-Round Clamped Plate Made of Functionally Graded Materials", **Acta Mechanica**, Cilt 180, No 1-4, 21-36, 2005.
17. Xu, Y. ve Zhou, D., "Three-Dimensional Elasticity Solution of Functionally Graded Rectangular Plates with Variable Thickness", **Composite Structures**, Cilt 91, No 1, 56–65, 2009.
18. Oktem, A.S., Mantari, J.L. ve Guedes Soares, C., "Static Response of Functionally Graded Plates and Doubly-Curved Shells Based on a Higher Order Shear Deformation Theory", **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Cilt 36, 163-172, 2012.
19. Birman, V. ve Byrd, L.W., "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures", **Applied Mechanics Reviews**, Cilt 60, No 1-6, 195-216, 2007.
20. Jha, D.K., Kant, T. ve Singh, R.K., "A Critical Review of Recent Research on Functionally Graded Plates", **Composite Structures**, Cilt 96, 833–849, 2013.
21. Oktem, A.S. ve Chaudhuri, R.A., "Boundary Discontinuous Fourier Analysis of Thick Cross-Ply Clamped Plates", **Composite Structures**, Cilt 82, No 4, 539-548, 2008.
22. Oktem, A.S. ve Chaudhuri, R.A., "Effect of Inplane Boundary Constraints on the Response of Thick General (Unsymmetric) Cross-Ply Plates", **Composite Structures**, Cilt 83, No 1, 1-12, 2008.
23. Oktem, A.S. ve Chaudhuri, R.A., "Fourier Solution to a Thick Cross-Ply Levy Type

Clamped Plate Problem", **Composite Structures**, Cilt 79, No 4, 481-492, 2007.

24. Reddy JN., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME**, Cilt 51, No 4, 745-752, 1984.

25. Chaudhuri, R.A., "On the Roles of Complementary and Admissible Boundary Constraints in Fourier Solutions to Boundary-Value Problems of Completely Coupled rth Order PDES", **Journal of Sound and Vibration**, 251, No 2, 261–313, 2002.

26. Chaudhuri, R.A., "On Boundary-Discontinuous Double Fourier Series Solution to a System of Completely Coupled PDES.", **International Journal of Engineering Science**, Cilt 27, No 9, 1005-1022, 1989.