



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARDA YENİ PARAMETRELER ve BAZI SONUÇLARI

Ezgi KAYA

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2018
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

GRAFLARDA YENİ PARAMETRELER ve BAZI SONUÇLARI

Ezgi KAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2018, 57 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Kemal AYDIN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

Graf teori, uygulamalı matematiğin oldukça kullanışlı bir alanıdır. Günlük hayatta karşılaşılan bir çok probleme çözüm olması nedeniyle, son yıllarda graf teori ve uygulamalarına olan ilgi hızlı bir şekilde artmıştır.

Graf teorinin önemli uygulamalarından olan topolojik indeksler, organik bileşiklerin yapısal özelliklerini açıklamak ve tahmin etmek için kullanılan sayılardır. Günümüzde bir çok topolojik indeks tanımlanmıştır.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf teori ile ilgili temel tanım ve parametreler, ardından tezde kullanılan kaynaklar ile ilgili bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde iletim düzensizlik sayısı tanımlanmış ve bu sayı için bazı sınır değerleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde Co-PI enerji tanımlanmış ve bu enerji için bazı sınır değerleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde Laplacian öz değerler ve işaretsiz Laplacian öz değerlerin α-ıncı kuvvetlerinin toplamları için bazı sınırlar bulunmuş ve böylece bu sınırlar α nın özel bir değeri için daha önceden elde edilmiş çalışmalardaki bazı sonuçlara indirgenmiştir.

Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar ve öneriler tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Co-PI enerji, Co-PI spektral yarıçap, Etki enerji, İletim düzensizlik sayısı, Laplacian-Tipi enerji,

ABSTRACT

Ph.D THESIS

SOME NEW PARAMETERS in GRAPHS and SOME RESULTS of THESE PARAMETERS

Ezgi KAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

2018, 57 Pages

Jury
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Kemal AYDIN
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Assoc. Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Asst. Prof. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Graph theory is a very useful area of applied mathematics. In resent years, because of the solution to many problems that are encountered in daily life, the interest in graph theory and applications has increased rapidly.

Topological indices which ae important applicstions of graph theory are the numerical values used to explain and predict the structural properties of organic compounds. Nowadays, many topological indices are defined.

The thesis contains five main sections.

In the first section, basic and fundamental definitions and parameters and then, informations about the references in the thesis are given.

In the second section, transmission-non-regularity index is defined and some bounds for this index are obtained.

In the third section, the Co-PI energy is defined and some bounds for this energy are obtained.

In the fourt section, some bounds for the sum of the α -th powers of the Laplacian and signless laplacian eigenvalues are established and so that these bounds are reduced to some of the results obtained previously works for a special case for α .

The final section discusses the results obtained in the thesis with suggestions.

Keywords: Co-PI energy, Co-PI spectral radius, Incidence energy, Laplacian Energy-Like-Invariant, Transmission-Non-Regularity number

ÖNSÖZ

Graflarda Yeni Parametreler ve Bazı Sonuçları isimli bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN danışmanlığında hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tezin başlangıcından bitimine kadar her aşamada, sabrını ve yardımlarını esirgemeyen, her zaman yol gösteren, bana inanan ve potansiyelimi görmemi sağlayan kıymetli hocam Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN'e şükranlarımı sunarım. Ayrıca desteğini esirgemeyen, değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak her zaman yanımda olan, beni hep destekleyen, annem Fatma KARADENİZ KAYA, babam Mehmet Uğur KAYA ve kardeşim Nihat KAYA'ya ve bana destek veren yakın akrabalarım ile arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ezgi KAYA
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **x**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar 3
1.2. Kaynak Araştırması 9

2. İLETİM DÜZENSİZLİK İNDEKSİ **11**

3. CO-PI ENERJİ **17**

4. LAPLACIAN-TİPİ ENERJİ ve ETKİ ENERJİSİ ÜZERİNE BİR GENELLEŞTİRME **29**

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER **42**

5.1 Sonuçlar 42
5.2 Öneriler 42

KAYNAKLAR **43**

ÖZGEÇMİŞ **46**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	:Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	:Tam Sayılar
G	:Herhangi bir graf
$G-e$	: G den bir e kenarının çıkarılmasıyla elde edilen graf
$V(G)$	: G grafının nokta kümesi
$E(G)$	: G grafının kenar kümesi
$\Delta(G)$	: G grafındaki maksimum derece
$\delta(G)$	: G grafındaki minimum derece
$G \cong H$	:Birbirine izomorf iki graf
$W(G)$	: G grafının *Wiener* indeksi
$Co-PI_v(G)$	: G grafının *Co-PI* indeksi
$Sz(G)$	: G grafının *Szeged* indeksi
$A(G)$	: G grafının komşuluk matrisi
$L(G)$	: G grafının Laplacian matrisi
$Q(G)$	: G grafının işaretsiz Laplacian matrisi
M_{CPI}	:*Co-PI* ile ağırlıklandırılan matris
$\lambda_i(G)$	: $A(G)$ matrisinin $i.$ özdeğeri
$\lambda_i^*(G)$	:*Co-PI* matrisinin $i.$ özdeğeri
$\lambda_1^*(G)$	:*Co-PI* matrisinin spektral yarıçapı
$\mu_i(G)$	:Laplacian matrisinin $i.$ özdeğeri
$q_i(G)$	:İşaretsiz Laplacian matrisinin $i.$ özdeğeri
E_G	: G nin Enerjisi
$Co-PIE$	:*Co-PI* Enerji
LEL	:Laplacian-Tipi-Enerji
IE	:Etki Enerji

σ_α	:Laplacian özdeğerlerin α. kuvvetleri toplamı
s_α	:İşaretsiz Laplacian özdeğerlerin α. kuvvetleri toplamı
$çap(G)$	: G grafının çapı
$\mathrm{d}(v_i)$	: v_i noktasının derecesi
$\mathrm{d}(v_i, v_j)$	: v_i ile v_j noktaları arasındaki uzaklık
$v_i \sim v_j$	:Birbirine komşu noktalar
$iz(A)$	: A matrisinin izi
S	:*Co-PI* matrisinin karesinin izi
K_n	: n noktalı tam graf
S_n	: n noktalı yıldız graf
W_n	: n noktalı tekerlek graf
F_k	: n noktalı $k-$ fan graf
$K_{s,t}$	: $s+t$ noktalı iki parçalı tam graf
U	:Tek devirli graf
T	:Ağaç
$M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}$	: G grafının *birinci* $Co-PI$ *derece dizisi*
$T_1, T_2, ..., T_n$	: G grafının *ikinci* $Co-PI$ *derece dizisi*

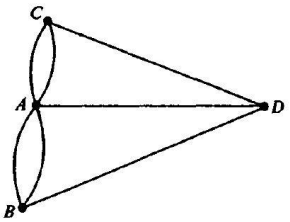
ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Könisberg köprü problemi graf modeli…….....1
Şekil 1.2 Bir G grafı…….……3
Şekil 1.3 Çoklu graf ve Pseudo graf……..3
Şekil 1.4 Basit graflar…...…….....3
Şekil 1.5 Bağlantılı ve bağlantısız graflar……..5
Şekil 1.6 Tam graf……...……..5
Şekil 1.7 Boş graf…….……..5
Şekil 1.8 Yıldız graf…….……..6
Şekil 1.9 k-fan ve tekerlek graflar……..7
Şekil 1.10 Tek devirli graflar……...……..7
Şekil 1.11 Birbirine izomorf G ve H grafları ……...……..8

1. GİRİŞ

Euler, 1736 yılında Könisberg köprü problemi olarak adlandırılan çözümsüz problemi çözdüğü zaman graf teorinin babası oldu. Birbirine ve Pregel nehri kıyısına yedi köprü ile bağlı iki ada vardı. Problem dört arazi alanının herhangi birinden başlamak, her köprüden sadece bir kere geçmek ve başlangıç noktasına geri dönmekti (Harary, 1969).

Problemin çözülemez olduğunu kanıtlamada Euler her bir arazi alanı yerine bir nokta ve bu arazi alanlarını birbirine bağlayan her bir köprü yerine bir çizgi koyarak bir graf oluşturdu. Şekil 1.1 de Könisberg köprü probleminin grafı verilmiştir. Problemi çözmekten ziyade, Euler problemi genelleştirdi ve bir grafın bu şekilde hareket edilebilir olması için bir kriter geliştirdi; yani, graf bağlantılı ve her nokta çift sayıda kenar ile ilişik olmalıdır (Harary, 1969).



Şekil 1.1 Könisberg köprü problemi graf modeli

Kirchhoff 1847 yılında, her dalında ve bir elektrik ağının her devresinde akım veren eşzamanlı lineer denklem sistemlerini çözmek için ağaçlar teorisini geliştirmiştir. 1857 de Cayley diferansiyel hesabındaki değişkenlerin değişimini göz önünde bulundurarak ağaç olarak adlandırılan grafların önemli bir sınıfını keşfetti. Jordan 1869 da bağımsız olarak sadece matematiksel bir disiplin olarak ağaçları keşfetti. 1859 yılında Sir William Hamilton tarafından icat edilen bir oyun 20 noktası ünlü şehirlerin isimleriyle etiketlenen düzgün onikiyüzlü bir prizma kullanır. Oyuncu her bir noktadan tam olarak bir kez geçen kenarlar boyunca kapalı bir devre bularak tüm dünyayı gezmelidir (Harary, 1969).

Dört Renk Problemi, bir düzlemdeki veya bir küre yüzeyindeki herhangi bir harita, sadece dört renk ile renklendirilebilir böylece birbirine komşu iki şehir aynı renge sahip olmaz. Bu hipotez ilginç bir tarihe sahiptir ancak başlangıcı biraz belirsiz kalır. Mobius'un 1840 da bu konuya aşina olduğu bildirilmiştir ancak, bu konuda

Guthrie'nin De Morgan ile 1850 yılı civarında iletişime geçtiği kesin olarak biliniyor (Harary, 1969).

Teorik kimyada, topolojik indeksler de denilen moleküler yapı tanımlayıcıları fizikokimyasal, farmakolojik, toksikolojik, biyolojik ve kimyasal bileşiklerin diğer özelliklerinin modellemesinde kullanılır (Gutman ve Polansky, 1986). Özellikle nokta ve kenar uzaklığına dayalı olan bu indekslerin çeşitli türleri vardır. Bu indekslerden en iyi bilineni uzaklık tabanlı olan *Wiener indekstir*. Diğer bazı topolojik indeksler *vertex-PI indeks*, *Szeged indeks*, *Revised-Szeged indeks* ve *Co-PI indekstir*. *Co-PI indeks*, F. Hassani ve arkadaşları (2010) tarafından tanımlanmıştır.

Spektral graf teori uzun bir tarihe sahiptir. Başlarda matris teorisi ve lineer cebir grafların komşuluk matrislerini analiz etmek için kullanılmıştır. Bir grafın en küçük ikinci Laplacian öz değeri "cebirsel bağlantılılığı" olarak adlandırılmıştır (Chung, 1997).

Gökbilimcilerin uzak yıldızların yapısını belirlemek için yıldız spektrumları üzerine yaptıkları çalışmalar gibi, graf teorideki temel amaçlardan biri de graf spektrumundan bir grafın temel özelliklerini ve yapısını incelemektir (Chung, 1997).

Spektral graf teorinin kimyada da uygulaması vardır. Literatürden, öz değerlerin moleküllerin kararlılığı ile ilişkili olduğu da görülmektedir. Ayrıca, graf spektrası teorik fiziğin ve kuantum mekaniğinin çeşitli problemlerinde, örneğin Hamilton sistemlerinin enerjilerini en aza indirmede ortaya çıkmaktadır (Chung, 1997).

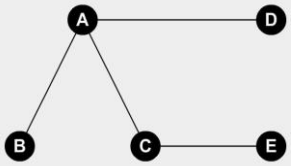
Aşağıdaki temel tanımlar ile genel kavramlar (Euler, 1736; Hardy ve ark., 1934; Harary, 1969; Manvel, 1969; Bondy ve Murty, 1976; Cvetkovi´c ve ark., 1980; Buckley ve Harary, 1990; Skiena, 1990; Biggs, 1994; Gallian, 2007) çalışmalarından alınmıştır.

1.1. Temel Tanımlar

Bir G grafı; $V(G)$ nokta kümesi ve $E(G)$ kenar kümesi olmak üzere, $V = V(G)$ ve $E = E(G)$ kümelerinden oluşur ve $G = (V, E)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1 Eğer $u, v \in V(G)$ noktaları kenar ise; yani $uv \in E(G)$ ise; u ve v noktaları **komşudur** denir. $u \sim v$ biçiminde gösterilir. $e = uv$ için u ve v noktalarına, e kenarının **uç noktaları** denir (Harary, 1969) .

Örneğin; Bir G grafı, $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$ ve $E(G) = \{AB, AC, AD, CE\}$ ile verilsin. Bu kümelerden oluşan G grafı Şekil 1.2 deki gibi gösterilebilir.



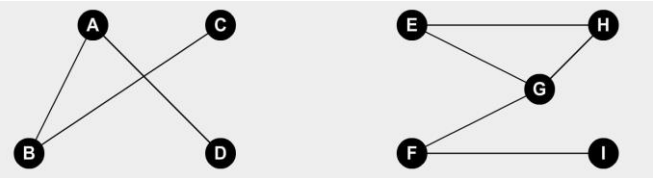
Şekil 1.2 Bir G grafı

Tanım 1.2 Bir grafta aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara **çoklu kenar (multi edge)**, bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara **ilmek (loop)**, çoklu kenara sahip ancak ilmeği olmayan grafa **çoklu graf** (**multi graph**), çoklu kenar ve ilmek içeren graflara ise **pseudo graf** (**sahte graf**) denir (Harary, 1969).



Şekil 1.3 Çoklu graf ve Pseudo graf

Tanım 1.3 Paralel kenar ve ilmek içermeyen graflara **basit graf** (**simple graph**) denir (Harary, 1969).



Şekil 1.4 Basit graflar

Tanım 1.4 Bir graf sonlu sayıda nokta ve kenara sahip ise, bu grafa **sonlu graf** (**finite graph**), aksi takdirde **sonsuz graf** (**infinite graph**) denir (Bondy ve Murty, 1976) .

Biz çalışmamızda basit ve sonlu graf kullanacağız.

Tanım 1.5 G, herhangi bir graf olmak üzere, nokta kümesi G nin nokta kümesinin alt kümesi ve kenar kümesi de G nin kenar kümesinin alt kümesi olan grafa G nin **alt grafı** (**subgraph**) denir. G nin tüm noktalarını içeren alt grafına **geren alt graf** (**spanning subgraph**) denir (Harary, 1969).

Tanım 1.6 Herhangi bir v_i noktasına komşu olan noktaların sayısına v_i noktasının **derecesi** (**degree**) denir ve $\deg(v_i)$ ile gösterilir. Derecesi 0 (sıfır) olan noktaya **izole nokta (isolated vertex)**, derecesi 1 (bir) olan noktaya ise **pendant nokta (pendant vertex)** denir (Bondy ve Murty, 1976).

Ayrıca bir grafın noktalarının dereceleri toplamı kenar sayısının iki katı olup, tek dereceli noktaların sayısı da çifttir (Euler, 1736).

Tanım 1.7 G grafının nokta kümesi $V(G)=\{a,b,c,d,e,f,...,k,l,m\}$ olsun. Ardı ardına t kenarın dizilmesiyle elde edilen

$$\underbrace{ab,bc,cd,de,...,lm}_{t}$$

formuna G de t uzunluğunda bir **yürüme (walk)** denir. Bu yürüme $abcde...klm$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir G grafında; aynı noktada başlayan ve biten bir yürümeye **kapalı yürüme (closed walk)**, bütün noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye **yol** (**path**) ve bütün kenarları, başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları farklı olan kapalı yürümeye ise **devir** (**cycle**) denir (Harary, 1969).

Tanım 1.8 G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olsun. G grafının v_i ve v_j noktaları arasında bir yol varsa bu noktalara **bağlantılıdır** (**connected**) denir. Eğer G grafındaki bütün nokta çiftleri arasında bir yol var ise G grafına **bağlantılı graf** (**connected graph**) denir. Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1,V_2,...,V_r$, V nin denklik sınıfları olmak üzere $G[V_1],G[V_2],...,G[V_r]$ alt graflarına G grafının **bileşenleri (component)** denir. $r=1$ olması durumunda G grafı bağlantılıdır, aksi takdirde G grafı r tane bileşene sahip **bağlantısız** (**disconnected**) bir graftır (Harary, 1969) .

Aşağıdaki G_1 grafı bağlantılı, G_2 grafı ise $G_2[V_1]$ ve $G_2[V_2]$ bileşenleri ile bağlantısız bir graftır.



Şekil 1.5 Bağlantılı ve bağlantısız graflar

Tanım 1.9 Her bir nokta çifti birbirine komşu olan grafa **tam graf** (**complete graph**) denir, n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir (Harary, 1969).



Şekil 1.6 K_3,K_5,K_7 tam grafları

Tanım 1.10 Kenarı olmayan grafa **boş graf** (**null graph**) denir (Skiena, 1990).

Aşağıda 7 noktalı bir *boş graf* örneği verilmiştir.



Şekil 1.7 Boş graf

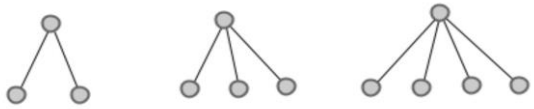
Tanım 1.11 Bir G grafının **tamamlayıcısı** (**complement**) $\bar{G}$ ile gösterilir. $\bar{G}$ grafının nokta kümesi de $V(G)$ dir ve iki noktanın $\bar{G}$ de komşu olması ancak ve ancak G de komşu değilse sağlanır (Harary, 1969).

Tanım 1.12 Graftaki her noktanın derecesi aynı ise grafa **regüler graf** (**regular graph**) denir. Özel olarak grafın her bir noktasının derecesi r ise, bu grafa $r-$regüler graf denir (Harary, 1969).

Tanım 1.13 Bir grafın her bir $v_i v_j$ kenarı, negatif olmayan bir reel sayı ile ağırlıklandırılmış ise, bu grafa **ağırlıklı graf** (**weighted graph**) denir. Bu $v_i v_j$ kenarına ait ağırlık, w_{ij} ile gösterilir (Harary, 1969).

Tanım 1.14 Hiç deviri olmayan bağlantılı bir grafa **ağaç** (**tree**) denir. Bir ağaçta derecesi 1 olan noktaya **yaprak** (**leaf**) denir (Harary, 1969).

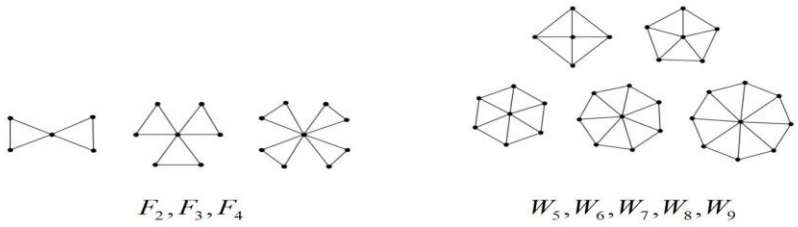
Tanım 1.15 Sadece bir noktanın, graftaki diğer bütün noktalara komşu olduğu ağaca **yıldız graf** (**star graph**) denir. n noktalı bir yıldız graf S_n ile gösterilir (Harary, 1969).



Şekil 1.8 S_3, S_4, S_5 yıldız grafları

Tanım 1.16 Ortak bir noktaya k tane C_3 devir grafı kopyası eklenerek oluşturulan grafa $k-$fan graf denir ve F_k ile gösterilir. $k-$fan grafının nokta sayısı $2k+1$ ve kenar sayısı $3k$ dır (Gallian, 2007).

Tanım 1.17 Tek bir noktanın, $n-1$-devirin tüm noktalarına komşu olduğu grafa n noktalı **tekerlek graf** (**whell graph**) denir ve W_n ile gösterilir (Harary, 1969).



Şekil 1.9 *k*-fan ve tekerlek graflar

Tanım 1.18 Tek devir içeren bağlantılı graflara **tek devirli graf** (**unicyclic graph**) denir (Manvel, 1969).



Şekil 1.10 Tek devirli graflar

Tanım 1.19 G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin herhangi v_i ve v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğuna bu iki nokta arasındaki **uzaklık** (**distance**) denir ve $d(v_i,v_j)$ ile gösterilir (Buckley ve Harary, 1990).

Tanım 1.20 Bir G grafının her nokta çifti arasındaki uzaklıkların maksimumuna G grafının **çapı** (**diameter**) denir ve $çap(G)$ ile gösterilir (Harary, 1969).

Tanım 1.21 G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi $A(G)$,

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{aksi durumda}\end{cases}$$

elemanlarından oluşan $n\times n$ simetrik bir matristir (Biggs, 1994).

Şekil 1.2 deki G grafının komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir,

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

Tanım 1.22 G grafı, komşuluk matrisi $A(G)$ olan bir graf olsun. Bu takdirde, $A(G)$ nin öz değerlerine G grafının **öz değerleri** (**eigenvalues**) denir (Cvetkovi´c ve ark., 1980).

Tanım 1.23 G ve H, nokta kümeleri $V(G)$ ve $V(H)$, kenar kümeleri $E(G)$ ve $E(H)$ olan iki graf olsun. Her $u,v \in V(G)$ için,

$$\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

olacak şekilde 1-1 ve örten bir $f : V(G) \to V(H)$ dönüşümü varsa, G ve H graflarına **izomorf graflar** (**isomorphic graphs**) denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir (Bondy ve Murty, 1976).



G H

Şekil 1.11 Birbirine izomorf G ve H grafları

Şimdi temel sonuçlarımızda kullanacağımız Cauchy-Schwarz eşitsizliğini verelim:

Lemma 1.24 $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $(b_1, b_2, ..., b_n)$ iki reel sayı dizisi olsun. Bu durumda

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dizileri orantılı ise sağlanır (Hardy ve ark., 1934).

1.2. Kaynak Araştırması

Uzaklık, graf teoride sıklıkla çalışılmıştır, iki nokta arasındaki uzaklık, Buckley ve Harary (Buckley ve Harary, 1990) tarafından tanımlanmıştır; temel ve çok kullanılan bir kavramdır. Çap, yarı çap ve ortalama uzaklığın da dahil olduğu birçok graf parametresi tanımına yol açmıştır. Topolojik indeks, bir molekülün grafının bazı özelliklerini karakterize etmek için kullanılan bir sayıdır. Uygulamalar, operatörlerdeki ağ tasarım araştırmalarından, kimyasal bileşenlerin özelliklerini tahmin etmeye, sosyolojide bireylerin grup yakınlıklarını ölçmeye kadar uzanır.

Wiener'in (Wiener, 1947) bazı alkanların kaynama noktaları ile moleküler yapılarını temsil eden graflardaki noktalar arasındaki uzaklıklar toplamı arasındaki yakın ilişkiyi keşfiyle, graf parametreleri veya topolojik indekslerin, kimyasal bileşenlerin özelliklerini tahmin etmede potansiyel olarak kullanılabileceği anlaşılmıştır.

Wiener indeks, teorik kimyada organik moleküller için yapısal tanımlayıcı olarak kullanılan bir topolojik indekstir; graftaki tüm nokta çiftleri arasındaki uzaklıkların toplamı ile ifade edilir. Ayrıca, Wiener indeks graftaki noktaların *iletimi* ile de hesaplanabilir. Bir noktanın *iletimi*, graftaki o noktanın diğer tüm noktalar ile uzaklıkları toplamıdır. Bundan dolayı, graftaki tüm noktaların iletimleri toplamının yarısı, grafın Wiener indeksini verir.

Uzaklık tabanlı diğer bazı topolojik indeksler, Szeged indeks (Gutman, 1994), Revised Szeged indeks (Pisanski ve Randic, 2010), PI_v indeks (Khalifeh ve ark., 2008) ve Co-PI indekstir (Hasani ve ark., 2010). Su ve arkadaşları Co-PI indeksi iletimi kullanarak yeniden tanımlamıştır (Su ve ark., 2013).

Graflarda enerji kavramı Gutman tarafından, bir grafın komşuluk matrisinin öz değerlerinin mutlak değerlerinin toplamı olarak tanımlanmıştır (Gutman, 1978). Graf enerjisi üzerine çok çalışılması, bu alanda birçok sonuç elde edilmesi, diğer graf matrislerinin öz değerleri kullanılarak, yeni graf enerji tanımları ortaya çıkmasına sebep olmuştur (Li ve ark., 2012). Gutman'ın graf enerji tanımından yola çıkılarak, bir grafın Laplacian öz değerleri kullanılarak Laplacian graf enerjisi benzer şekilde tanımlanmış ancak Laplacian öz değerlerin tümünün pozitif olması sebebiyle bu sonucun graftaki kenar sayısının iki katına eşit olduğu bulunmuştur. Buradan yola çıkarak, Gutman ve Zhou grafların Laplacian enerjisini tanımlamışlardır (Gutman ve Zhou, 2006).

Laplacian-tipi enerji Liu ve Liu tarafından tanımlanmıştır (Liu ve Liu, 2008). Daha detaylı bilgi için [(Gutman ve ark., 2010; Liu ve ark., 2011; Das ve ark., 2014a)] çalışmalarına da bakılabilir.

Jooyandeh ve arkadaşları bir *G* grafının etki enerjisini, *G* nin etki matrisinin singüler değerlerinin toplamı olarak tanımlamışlar (Jooyandeh ve ark., 2009), Gutman ve arkadaşları ise işaretsiz Laplacian özdeğerleri kullanarak etki enerjiyi ifade etmişlerdir (Gutman ve ark., 2009a). Bu konuda yapılan bazı çalışmalar [(Gutman ve ark., 2009b; Jooyandeh ve ark., 2009; Bozkurt ve Gutman, 2013; Bozkurt ve Bozkurt, 2014; Das ve Gutman, 2014)] dır.

Nokta sayısı *n* olan bir *G* grafı ve bir α reel sayısı için, sıfırdan farklı Laplacian özdeğerlerin $\alpha-$ıncı kuvvetlerinin toplamı (σ_α) Zhou tarafından tanımlanmıştır (Zhou, 2008). Das ve arkadaşları, σ_α için nokta sayısı, kenar sayısı ve bazı graf parametreleri cinsiden, alt ve üst sınır değerleri elde etmişlerdir (Das ve ark., 2013; Das ve ark., 2014b).

Akbari ve arkadaşları da işaretsiz Laplacian özdeğerlerin $\alpha-$ıncı kuvvetlerinin toplamını (s_α) tanımlamış ve σ_α ile s_α arasında bazı ilişkiler vermişlerdir (Akbari ve ark., 2010).

İki parçalı grafların Laplacian öz değerleri ile işaretsiz Laplacian öz değerleri çakışıktır (Merris, 1994; 1995; Cvetkovic ve ark., 2007). Buradan, iki parçalı graflar için σ_α, s_α ya eşittir (Tian ve ark., 2009; Zhou ve Ilic, 2010; Liu ve Liu, 2012; Bozkurt ve Gutman, 2013; You ve Yang, 2014) ve Laplacian-tipi enerji, etki enerjiye eşittir (Gutman ve ark., 2009a).

Ayrıca bazı topolojik indeksler için de enerji kavramı tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları, Kirchoff enerji (Maden ve ark., 2013), PI enerji (Nadjafi-Arani, 2011), Randic enerji (Bozkurt ve ark., 2010) ve Szeged enerji (Fath–Tabar, 2011) dir.

2. İLETİM DÜZENSİZLİK İNDEKSİ

Bu bölümde iletim düzensizlik indeksi tanımlayıp, özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca çapı 2 olan graflar için sınır değerleri elde edeceğiz. Son olarak bu indeks için ağaçlarda sınırlar vereceğiz.

Hasani ve arkadaşları $Co-PI$ indeksi aşağıdaki gibi tanımlamışlardır (Hasani ve ark., 2010).

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left|n_u(e)-n_v(e)\right|.$$

Burada $n_u(e)$, $e=uv$ olmak üzere, u noktasına olan uzaklığı v noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaların sayısını ve $n_v(e)$, v noktasına olan uzaklığı u noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaların sayısını göstermektedir.

Bir u noktasının **iletimi** (**transmission**), bu noktanın G deki diğer bütün noktalara olan uzaklıkları toplamıdır ve $T_G(u)=T(u)$ ile gösterilir, yani,

$$T_G(u)=\sum_{v\in V(G)}d_G(u,v).$$

Eğer G deki bütün noktaların iletimi aynı ise G ye **düzenli iletimli** (**transmission regular**), değil ise G ye **düzensiz iletimli** (**transmission non regular**) graf denir.

Su ve arkadaşları iletim parametresini kullanarak $Co-PI$ indeks için aşağıdaki eşdeğer tanımı elde etmişlerdir (Su ve ark., 2013):

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left|T(u)-T(v)\right|.$$

$Co-PI$ indeks, grafta sadece kenarları taradığı için, grafın iletim düzensizliğini ölçmede yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, bu yetersizliği ortadan kaldırmak amacı ile, grafta bütün nokta çiftlerini tarayan **iletim düzensizlik indeksi** (**transmission non regularity index**) aşağıdaki gibi tanımladık:

$$NT(G)=\frac{1}{2}\sum_{u,v\in V(G)}\left|T(u)-T(v)\right|.$$

$NT(G)$ ve $Co-PI_v(G)$ indeksleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$NT(G)=Co-PI_v(G)+\frac{1}{2}\sum_{v_iv_j\notin E(G)}\left|T(v_i)-T(v_j)\right|.$$

Şunu belirtmeliyiz ki bir grafın **toplam düzensizlik indeksi** (**total irregularity index**) (Abdo ve ark., 2014) ve **yarı merkezil olmama sayısı** (**non self centrality number**) (Xu ve ark., 2016) benzer şekilde tanımlanmıştır ancak sırasıyla derece ve dış merkezlilik tabanlı indekslerdir.

K_n, n noktalı bir tam graf olmak üzere, her bir noktasının iletimi $n-1$ olduğu için, regüler iletimli bir graftır. $K_{s,s}$ tam iki parçalı grafı ile C_n devir grafı da regüler iletimli graflardır.

Sonuç 2.1 G bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $NT(G)\geq 0$ dır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin regüler iletimli graf olmasıdır.

Teorem 2.2 G grafı çapı 2 olan bağlantılı bir graf olsun. O halde G nin regüler iletimli olması için gerek ve yeter şart G nin regüler graf olmasıdır (Su ve ark., 2013).

Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.3 G grafı çapı 2 olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $NT(G)\geq 0$ dır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin regüler graf olmasıdır.

Şimdi $NT(G)$ indeksi kolay hesaplamamızı sağlayacak olan eşdeğer formülü verelim.

Bir G grafının iletim dizisi $\mathrm{T}(G)=\{T_i : v_i\in V(G)\}$ şeklindeki bir kümedir. Eğer $\mathrm{T}(G)$ iletim dizisinde T_i iletimi, $l_i\geq 1$ kez tekrar ediyorsa, kısaca $T_i^{(l_i)}$ yazacağız. G grafının $\mathrm{T}(G)$ iletim dizisi, sırasıyla k tane $l_1,l_2,...,l_k$ katlılıkları ile $T_1>T_2>...>T_k$ elemandan oluşsun. Buradan,

$$NT(G)=\sum_{1\leq i<j\leq k} l_il_j\left(T_i-T_j\right) \tag{1.1}$$

yazabiliriz.

P_n, W_n, F_k, S_n ve $K_{s,t}$, sırasıyla yol, tekerlek, k-fan, yıldız ve iki parçalı tam graf olmak üzere $NT(G)$ indeks için (1.1) de verilen formülü kullanarak, bu özel graflar için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$NT(P_n) = \begin{cases} \frac{2}{3}k^2(k-1)(k+1), \; n = 2k \; ise \\ \frac{k}{3}(2k^3 + 4k^2 + k - 1), \; n = 2k+1 \; ise \end{cases}$$

$$NT(W_n) = (n-1)(n-4), \; NT(F_k) = (n-1)(n-3)$$

$$NT(S_n) = (n-1)(n-2), \; NT(K_{s,t}) = st(s-t)$$

Bir G grafında bir nokta hariç tüm noktaların iletimi aynı ise bu grafı ATR (almost transmission regular), iki nokta hariç tüm noktaların iletimi aynı ise WATR (weak almost transmission regular) graf ailesi olarak tanımlayalım.

Düzensiz iletimli bir G grafı için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 2.4 G, çapı 2 olan bir ATR graf olsun. O halde,

$$NT(G) \le (n-1)(n-2)$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong S_n$ olmasıdır.

İspat: G, ATR graf olduğundan, $i = 2,3,...,n$ için $T(u_1) \neq T(u_i)$ dır. G nin çapı 2 olduğu için, $d(u_1) = T(u_1) = n-1$ dir. O halde $i = 2,3,...,n$ için $T(u_i) = d(u_i) + 2[n-1-d(u_i)]$ dir. Bu durumda $i = 2,3,...,n$ için tüm noktaların dereceleri birbirine eşittir. $d(u_i) = d$ diyelim. O halde, $T(u_i) = d + 2[n-1-d] = 2n-2-d$ olur. G, ATR graf olduğundan iletim dizisi $\{(2n-2-d)^{(n-1)}, (n-1)^{(1)}\}$ şeklinde elde edilir. $NT(G)$ nin (1.1) deki tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} NT(G) &= (n-1)\left[(2n-2-d)-(n-1)\right] \\ &= (n-1)(n-1-d) \\ &\le (n-1)(n-2) \end{aligned}$$

sonuca ulaşılır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart her $i = 2,3,...,n$ için $d(u_i) = d = 1$ olmasıdır. Bu durumda $G \cong S_n$ elde edilir.

$G \cong S_n$ olduğunu kabul edelim. Buradan sonuç açıktır. ■

Teorem 2.5 G, çapı 2 olan bir WATR graf olsun. O halde,

$$NT(G) \ge 2(n-2)$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart, e bir kenar olmak üzere $G \cong K_n - e$ olmasıdır.

İspat: G, WATR graf olduğundan, $T(u_1) = T(u_2) = t_1$, $T(u_3) = T(u_4) = ... = T(u_n) = t_2$ ve $i = 1,2$ ile $j = 3,4,...,n$ için $T(u_i) \ne T(u_j)$ dir. G, ATR graf olduğundan iletim dizisi $\left\{(t_1)^{(n-2)}, (t_2)^{(2)}\right\}$ şeklinde elde edilir. Şimdi, $NT(G)$ nin (1.1) deki tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} NT(G) &= 2(n-2)|t_1 - t_2| \\ &\ge 2(n-2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $|t_1 - t_2| = 1$ olmasıdır. Yani $t_1 = n-1$ ve $t_2 = n$ olmasıdır, bu durum $G \cong K_n - e$ olması demektir.

$G \cong K_n - e$ olduğunu kabul edelim. Buradan sonuç açıktır. ■

Bir topolojik indeksin zincir oluşturma ölçümü kabul edilebilmesi için aşağıdaki eşitsizliklerden birini sağlaması gereklidir (Fischermann ve ark., 2002):

$$TI(S_n) < TI(T) < TI(P_n),\ n = 5,6,... \tag{1.2}$$

ya da

$$TI(P_n) < TI(T) < TI(S_n),\ n = 5,6,... \tag{1.3}$$

dir. Burada T n-noktalı herhangi bir ağaçtır. (1.2) deki ilişki *Wiener* indeks, *Hosoya* indeks, bağlantılılık indeksi için geçerliyken, (1.3) deki ilişki $Co-PI$ indeks, *Estrada* indeks ve grafın spektral yarıçapı için geçerlidir.

Peki iletim düzensizlik indeksi için (1.2) deki ilişki mi ya da (1.3) deki ilişki mi geçerlidir? Bunun için aşağıdaki graf dönüşümlerini verelim.

u_0, T ağacında bir nokta olsun. $P = u_0u_1...u_p$ $(p \geq 1)$, T ağacında, $u_1,...,u_{p-1}$ noktalarının dereceleri 2 ve u_p noktasının yaprak olduğu bir yol olsun. Böyle P ye, uzunluğu p olan, u_0 noktasına iliştirilmiş pendant yol diyeceğiz.

π Dönüşümü (π transformation): $\deg_T(u_0) \geq 3$ ve $P = u_0u_1...u_p$ ile $Q = u_0v_1...v_q$ ayrık pendant yolları u_0 noktasına iliştirilmiş olsun. π dönüşümü, bu iki ayrık pendant yolları, yeni $u_0u_1...u_pv_1...v_q$ yolu ile değiştirir. Bu yeni T' ağacına, T ağacının π dönüşümü denir (Mohar, 2007).

Önerme 2.6 P_n den farklı her ağaç derecesi en az 3 olan bir nokta ve bu noktaya ilişik en az iki pendant yol içerir. Özellikle, her ağaç bir dizi π dönüşümü ile P_n yol grafına dönüştürülebilir (Mohar, 2007).

Önerme 2.6 dan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 2.7 Eğer T ağacı π dönüşümü ile T' ağacına dönüştüyse, $NT(T') > NT(T)$ olur.

σ Dönüşümü (σ transformation): u_0, T ağacında derecesi $p+1$ olan bir nokta olsun. $u_0u_1,...,u_0u_p$ ler u_0 noktasına komşu pendant kenarlar ve v_0, u_0 noktasının $u_1,...,u_p$ lerden farklı bir komşusu olsun. σ dönüşümü $u_0u_1,...,u_0u_p$ kenarlarını kaldırıp onları $v_0u_1,...,v_0u_p$ kenarları ile değiştirir. Bu yeni T' ağacına, T ağacının σ dönüşümü denir (Mohar, 2007).

Önerme 2.8 S_n den farklı her ağaç, u_0 noktasının kalan komşusu yaprak değilken, $p = \deg_T(u_0) - 1$ komşusu yaprak olan bir u_0 noktası içerir. Sonuç olarak her ağaç bir dizi σ dönüşümü ile S_n yıldız grafına dönüştürülebilir (Mohar, 2007).

Önerme 2.8 den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 2.9. Eğer T ağacı σ dönüşümü ile T' ağacına dönüştüyse, $NT(T') < NT(T)$ olur.

Sonuç 2.7 ve Sonuç 2.9 dan aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 2.10 T , nokta sayısı $n \geq 5$ olan düzensiz iletimli bir ağaç olsun. O halde,

$$NT(T) \geq (n-1)(n-2) \text{ dir.}$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak $T \cong S_n$ ise sağlanır.

Sonuç 2.11 T , nokta sayısı $n \geq 5$ olan düzensiz iletimli bir ağaç olsun. O halde,

$$NT(T) \leq \begin{cases} \frac{2}{3}k^2(k-1)(k+1), \, n = 2k \; ise \\ \frac{k}{3}(2k^3 + 4k^2 + k - 1), \, n = 2k+1 \; ise \end{cases} \text{ dir.}$$

Eşitlik durumu ancak ve ancak $T \cong P_n$ grafına izomorf ise sağlanır.

Yıldız-tipi ağaç (starlike tree), $T(n_1, n_2, ..., n_k)$, bir kök v noktası ve bu noktaya ilişik $n_1, n_2, ..., n_k$ uzunluklu $P_1, P_2, ..., P_k$ yollarından oluşan bir ağaçtır. $T(n_1, n_2, ..., n_k)$ ağacının nokta sayısı $n = n_1 + n_2 + ... + n_k + 1$ dir. Eğer tüm $P_1, P_2, ..., P_k$ yollarının nokta sayısı birbirine eşit ise bu aileye dengeli yıldız-tipi ağaç ailesi denir ve $BS_{n,k}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki dönüşümler ve Sonuç 2.6 ile Sonuç 2.8 i kullanarak, dengeli yıldız-tipi ağaçlar için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.12 $NT(P_n) = NT(BS_{n,2}) > NT(BS_{n,3}) > ... > NT(BS_{n,n-1}) = NT(S_n)$.

3. CO-PI ENERJİ

Bu bölümde basit, bağlantılı bir grafın $Co-PI$ spektral yarıçapı ($Co-PI$ spectral radius) için bazı sınırlar elde edilecek, $Co-PI$ Enerji kavramı tanımlanacak ve $Co-PI$ spektral yarıçap için elde edilen bu sınırlardan da yararlanılarak $Co-PI$ Enerji için bazı sınırlar verilecektir.

Ayrıca, bu bölümdeki çalışmalar MATCH Commun. Math. Comput. Chem. dergisinde yayınlanmıştır (Kaya ve Maden, 2017a).

$G=(V,E)$ basit, bağlantılı bir graf ve $e=uv$, G grafında herhangi bir kenar olsun. u noktasına olan uzaklığı v noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaların sayısı $n_u(e)$ ve v noktasına olan uzaklığı u noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaların sayısı $n_v(e)$ ile gösterilir. Bu sayıların kümesi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$n_u(e)=\left|N_u(e)\right|=\left|\{z\in V(G):d(z,u)<d(z,v)\}\right|$$

$$n_v(e)=\left|N_v(e)\right|=\left|\{z\in V(G):d(z,v)<d(z,u)\}\right|$$

Tanım 3.1 G grafı bağlantılı bir graf olsun. G grafının *Szeged indeksi* aşağıdaki gibi tanımlanır (Gutman, 1994)

$$Sz(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)n_v(e)$$

Tanım 3.2 G grafı bağlantılı bir graf olsun. G grafının $Co-PI$ *indeksi* aşağıdaki gibi tanımlanır (Hasani ve ark., 2010)

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} \left|n_u(e)-n_v(e)\right|$$

Tanım 3.3 G grafında herhangi bir $e=uv$ kenarı ve bu kenarın ağırlığı negatif olmayan bir tamsayı $\left|n_u(e)-n_v(e)\right|$ olsun. G grafının $Co-PI$ *ağırlığı* denilen, E kenar kümesi üzerinde $w:E\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ ağırlık fonksiyonu tanımlansın. $Co-PI$ ağırlığı ile ağırlıklandırılan G grafının komşuluk matrisine, G grafının $Co-PI$ matrisi denir ve $M_{CPI}=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ ile gösterilir. Yani,

$$c_{ij} = \begin{cases} |n_u(e) - n_v(e)|, & e = uv \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Bu matrisin öz değerlerine G grafının $Co-PI$ *öz değerleri* denir ve $i = 1,2,...,|V|$ için $\lambda_i^*(G)$ ile gösterilir. $Co-PI$ matrisi simetrik olduğu için, tüm öz değerleri reeldir ve $\lambda_1^*(G) \geq \lambda_2^*(G) \geq ... \geq \lambda_n^*(G)$ şeklinde sıralanabilir. En büyük öz değer olan $\lambda_1^*(G)$ ye, G grafının *spektral yarıçapı* denir. G grafının $Co-PI$ indeksi, M_{CPI_i} ler , $Co-PI$ matrisinin $i.$ satır toplamı olmak üzere aşağıdaki şekilde hesaplanabilir (Su ve ark., 2013)

$$Co-PI_v(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_{CPI_i} .$$

Bir grafın enerjisi, Gutman tarafından $i = 1,2,...,n$ için λ_i ler G nin komşuluk matrisinin öz değerleri olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Gutman, 1978).

$$E_G = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| .$$

Tanım 3.4 $i = 1,2,...,n$ için λ_i^* ler bir G grafının $Co-PI$ öz değerleri olmak üzere,

$$Co-PIE(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^*|$$

şeklinde tanımlanan enerjiye, $Co-PI$ *enerji* denir (Kaya ve Maden, 2017a).

$P(G;x) = x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$, G nin karakteristik polinomu olsun. N. Biggs, $P(G;x)$ in tüm katsayılarının $A(G)$ nin esas minörleri (satır ve sütunların bir alt kümesi alınarak elde edilen alt matrisin determinantı) ile ifade edilebileceğini ispat etmiştir (Biggs, 1994). Bu durum aşağıdaki sonuca yol açmıştır.

Teorem 3.5 Bağlantılı bir G grafının $P(G;x)$ karakteristik polinomunun katsayılarından $c_1 = 0$, $-c_2 =$ kenar sayısı ve $-c_3 = G$ nin üçgen sayısının karesini verir (Biggs, 1994).

A, G nin komşuluk matrisi olsun. $k \geq 1$ olmak üzere A^k kuvvet matrisinin (i, j). elemanı $a_{ij}^{(k)}$, u_i noktasından u_j noktasına k uzunluktaki yürümelerin sayısını gösterir.

Teorem 3.6 G, $n \geq 3$ noktalı, m kenar ve t üçgen sayılı, bağlantılı bir graf olsun. O zaman,

$$2m \leq \lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2} + \ldots + \lambda_n^{*2} \leq 2m(n-2)^2$$
$$6t \leq \lambda_1^{*3} + \lambda_2^{*3} + \ldots + \lambda_n^{*3} \leq 6t(n-2)^3$$

dir (Su ve ark., 2013).

$Co-PI$ indeks ve $Co-PI$ matris arasındaki ilişkiyi kullanarak, ikinci $Co-PI$ spektral moment için grafın nokta sayısına, kenar sayısına, $Co-PI$ indekse ve Szeged indekse bağlı olarak sınırlar vereceğiz.

Teorem 3.7 G, nokta sayısı n ve kenar sayısı m olan bir graf olsun. Bu durumda,

$$\frac{2}{m} Co-PI_v^2(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*2} \leq \min \begin{Bmatrix} 2(n-2)Co-PI_v(G), \\ 2m(n^2-2n+2)-4Sz(G) \end{Bmatrix}. \quad (3.1)$$

(3.1) deki sol eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_2$ olması ve sağdaki eşitliklerden birinin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong S_n$ olmasıdır.

İspat: $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*2}$ diyelim. $S \leq 2(n-2)Co-PI_v(G)$ ve $S \leq 2m(n^2-2n+2)-4Sz(G)$ olduğunu ispatlamamız yeterlidir. $S = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \right)^2 - 2\sum_{i<j} \lambda_i^* \lambda_j^*$ ve $c_2 = \sum_{i<j} \lambda_i^* \lambda_j^*$ olduğu açıktır. Buradan, $S = 2\sum_{i<j} \left(n_{v_j} - n_{v_i} \right)^2$ ve $\left| n_{v_j} - n_{v_i} \right| \leq (n-2)$ olduğundan, $S \leq 2(n-2)Co-PI_v(G)$ elde ederiz.

Diğer taraftan,

$$S = 2\sum_{i<j} \left(n_{v_j} - n_{v_i} \right)^2 = 2\sum_{i<j} \left({n_{v_j}}^2 - 2n_{v_j} n_{v_i} + {n_{v_i}}^2 \right) \leq 2m(n^2-2n+2)-4Sz(G).$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\left| n_{v_j} - n_{v_i} \right| = (n-2) \Leftrightarrow$ $n_{v_j} = n-1$ and $n_{v_i} = 1 \Leftrightarrow$ $G \cong S_n$ olmasıdır.

Soldaki eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak göstereceğiz.

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=v_iv_j}\left|n_{v_j}-n_{v_i}\right|\le\sqrt{m\sum_{e=v_iv_j}\left|n_{v_j}-n_{v_i}\right|^2}=\sqrt{\frac{m}{2}}S. \qquad \blacksquare$$

Teorem 3.8 G , nokta sayısı n ve kenar sayısı m olan bir graf olsun. Bu durumda,

$$\lambda_1^*\le\min\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{2(n-1)(n-2)Co-PI_v(G)}{n}},\\ \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\sqrt{2m(n^2-2n+2)-4Sz(G)}\end{array}\right\}. \qquad (3.2)$$

İspat: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^*=0$ olduğundan, $\lambda_1^*=-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^*$ dir. Bundan dolayı,

$$\left|\lambda_1^*\right|\le\sum_{i=2}^{n}\left|\lambda_i^*\right|\le\sqrt{n-1}\sqrt{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^{*2}}.$$

Buradan,

$$\lambda_1^{*2}\le(n-1)\sum_{i=2}^{n}\lambda_i^{*2}=(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{*2}-\lambda_1^{*2}\right].$$

Böylelikle,

$$\lambda_1^{*2}\le\frac{(n-1)}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{*2}$$

elde edilir. Teorem 3.7 ile ispat tamamlanmış olur. $\blacksquare$

Teorem 3.9 G, bağlantılı bir graf olsun. O zaman,

$$Co-PIE(G)\le\sqrt{2n\sum_{e=v_iv_j}\left|n_{v_i}-n_{v_j}\right|^2}\quad . \qquad (3.3)$$

(3.3) deki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin boş graf olmasıdır. Dahası,

$$\alpha=\min\left\{\sqrt{n}\sqrt{2(n-2)Co-PI_v(G)},\sqrt{n}\sqrt{2m(n^2-2n+2)-4Sz(G)}\right\}$$

için

$$Co-PIE(G)\le\sqrt{n\alpha}$$

dir.

İspat: $Co-PI$ enerji tanımı ve Teorem 3.7 den,

$$Co-PIE(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^*\right|\le\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{*2}}=\sqrt{2n\sum_{e=v_iv_j}\left|n_{v_i}-n_{v_j}\right|^2}$$

dir. Ayrıca,

$$Co-PIE(G)\le\sqrt{n}\sqrt{2(n-2)Co-PI_v(G)},$$
$$Co-PIE(G)\le\sqrt{n}\sqrt{2m(n^2-2n+2)-4Sz(G)}$$

ile ispat tamamlanır. ■

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ve $Co-PI$ matrisi $M_{CPI}=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ olan bir graf olsun. Herhangi bir v_i noktasının $Co-PI\ derecesi$ $M_{CPI_i}=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}$ biçiminde tanımlanır. G grafının $Co-PI\ derece$ dizisi $\left\{M_{CPI_1},M_{CPI_2},...,M_{CPI_n}\right\}$ olmak üzere, herhangi bir v_i noktasının *ikinci* $Co-PI\ derecesi$ ise $T_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}M_{CPI_j}$ dir. Eğer her i için $M_{CPI_i}=k$ ise bu takdirde G grafına $k-Co-PI\ regüler\ graf$ denir. G grafının $Co-PI\ derece$ dizisi $\left\{M_{CPI_1},M_{CPI_2},...,M_{CPI_n}\right\}$ ve *ikinci* $Co-PI$ derece dizisi $\left\{MT_{CPI_1},MT_{CPI_2},...,MT_{CPI_n}\right\}$ olan bir graf olmak üzere, her i için $\frac{MT_{CPI_i}}{M_{CPI_i}}=k$ ise bu takdirde G grafına pseudo $k-Co-PI$ regüler graf denir.

Her $i=1,2,...,n$ için $C_i^{(1)},C_i^{(2)},...,C_i^{(t)},...$ leri tanımlayalım: Sabit bir $\alpha\in\mathbb{R}$ için, $C_i^{(1)}=M_{CPI_i}^{\alpha}$ ve her $t\ge2$ için, $C_i^{(t)}=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}C_j^{(t-1)}$ olsun.

Aşağıdaki teorem *Co-PI* enerjiye bulacağımız üst sınır için önemlidir.

Teorem 3.10 G, bağlantılı bir graf, $\alpha\in\mathbb{R}$ ve $t\in\mathbb{Z}$ olsun. O halde,

$$\lambda_1^*\ge\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t)}\right)^2}}\ge\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(MT_{CPI_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{CPI_i}\right)^2}}$$

dir (Kaya ve Maden, 2017b).

Şimdi sıradaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.11 G, bağlantılı bir graf, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde,

$$Co-PIE(G) \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t)}\right)^2}} + \sqrt{(n-1)\left[S - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t)}\right)^2}\right]} \tag{3.4}$$

dir. Burada S, $Co-PI$ matrisin özdeğerlerinin kareleri toplamıdır. (3.4) deki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart üç farklı özdeğer $\left(k, \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}, -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}\right)$ ile

$$\frac{C_1^{(t+1)}}{C_1^{(t)}} = \frac{C_2^{(t+1)}}{C_2^{(t)}} = \ldots = \frac{C_n^{(t+1)}}{C_n^{(t)}} = k \ge \sqrt{\frac{S}{n}}$$

olmasıdır.

İspat: $\lambda_1^* \ge \lambda_2^* \ge \ldots \ge \lambda_n^*$, G grafının *Co-PI* matrisinin öz değerleri olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right| = Co-PIE(G)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*2} = S = \sum_{i,j=1}^{n} \left(c_{ij}\right)^2$$

elde edilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\sum_{i=2}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \le \sqrt{(n-1)\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{*2}} = \sqrt{(n-1)\left(S - \lambda_i^{*2}\right)} \tag{3.5}$$

dir. Buradan,

$$Co-PIE(G) \le \lambda_1^* + \sqrt{(n-1)\left(S - \lambda_1^{*2}\right)}.$$

$\frac{2Co-PI_v}{n} \le x \le \sqrt{S}$ için $f(x) = x + \sqrt{(n-1)\left(S-x^2\right)}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$f(x)$, $x \ge \sqrt{\frac{S}{n}}$ için azalandır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$M_{CPI_i}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\right)^2 \le n\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$$

elde ederiz. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{n} M_{CPI_i}^2 \le \sum_{i=1}^{n} n \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 = nS \ .$$

dir. Aynı zamanda,

$$MT_{CPI_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} M_{CPI_j} \ge \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} MT_{CPI_i}^2 \ge \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 \right)^2 \ge S^2$$

dir. Teorem 3.10 nun sonucu olarak,

$$\lambda_1^* \ge \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i^{(t+1)} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i^{(t)} \right)^2}} \ge \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(MT_{CPI_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(M_{CPI_i} \right)^2}} \ge \sqrt{\frac{S^2}{nS}} = \sqrt{\frac{S}{n}} \qquad (3.6)$$

elde ederiz. Buna bağlı olarak,

$$Co-PIE(G) \le f\left(\lambda_1^*\right) \le f\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i^{(t+1)} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i^{(t)} \right)^2}} \right)$$

dir ve buradan sonuç açıktır. Şimdi, (3.4) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (3.6) eşitsizliğinden,

$$\lambda_1^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i^{(t+1)} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i^{(t)} \right)^2}}$$

dır, ki bunun anlamı

$$\frac{C_1^{(t+1)}}{C_1^{(t)}} = \frac{C_2^{(t+1)}}{C_2^{(t)}} = \ldots = \frac{C_n^{(t+1)}}{C_n^{(t)}}$$

dir. Özellikle, (3.5) den $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\left|\lambda_i^*\right| = \sqrt{\frac{S - \lambda_1^{*2}}{n-1}}$$

buluruz. O halde, iki ihtimal söz konusu olur:

- G bir tane öz değere sahiptir. O halde G bağlantılı ve öz değerlerin toplamı M_{CPI} nin izi olduğu için tüm öz değerler sıfırdır. Bu yüzden, $G \cong K_1$ dir.
- G üç farklı öz değere sahiptir. Bu durumda, $i = 2,3,...,n$ için

$$\lambda_1^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^{(t)}\right)^2}} \qquad \text{ve} \qquad \left|\lambda_i^*\right| = \sqrt{\frac{S-\lambda_1^{*2}}{n-1}}$$

dir. Tüm i ler için $\frac{C_i^{(t+1)}}{C_i^{(t)}} = k$ olduğundan, G nin üç farklı özdeğere sahip $\left(k, \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}, -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}\right)$ bağlantılı bir graf olduğu sonucunu elde ederiz. Buna karşılık (3.4) deki eşitliğin, teoremin ikinci kısmında belirtilen graflar için sağlandığı açıkça görülür. ■

Özel olarak $\alpha = 1$ ve $t = 1$ alırsak, sıradaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.12 G, sırasıyla birinci ve ikinci $Co-PI$ dizisi $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right\}$ ve $\left\{MT_{CPI_1}, MT_{CPI_2}, ..., MT_{CPI_n}\right\}$ olan bir graf olsun. O zaman,

$$Co-PIE(G) \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(MT_{CPI_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{CPI_i}\right)^2}} + \sqrt{(n-1)\left[S - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(MT_{CPI_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{CPI_i}\right)^2}\right]} \tag{3.7}$$

olur. Burada S, $Co-PI$ matrisin özdeğerlerinin kareleri toplamıdır. (3.7) deki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart bir k sabiti için, G nin üç farklı özdeğere sahip $\left(k, \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}, -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}}\right)$, $k-Co-PI$ regüler graf olmasıdır.

Aşağıdaki sonuçlar Mathematical Chemistry Monographs kitaplar serisinin 21.sinde kitap bölümü olarak yayınlanmıştır (Kaya ve Maden, 2017b).

$a_1, a_2, ..., a_r$ pozitif reel sayı olsunlar. $1 \le k \le r$ değerleri arasındaki pozitif bir k sayısı için, her bir P_k yı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$P_1 = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_r}{r},$$
$$P_2 = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_r + a_2a_3 + ... + a_{r-1}a_r}{\frac{1}{2}r(r-1)},$$
$$\vdots$$
$$P_r = a_1a_2...a_r$$

Burada P_1 aritmetik ortalama iken $P_r^{1/r}$ geometrik ortalamadır. Maclaurin'in simetrik ortalama eşitsizliği olarak adlandırılan aşağıdaki lemmada bu sayılar arasındaki ilişki verilmiştir.

Lemma 3.13 : $a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$P_1 \ge P_2^{1/2} \ge P_3^{1/3} \ge ... \ge P_r^{1/r} \tag{3.8}$$

dir. Aralardaki eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = ... = a_r$ olmasıdır (Biler ve Witkowski, 1990).

Şimdi Co-PI enerji için aşağıdaki alt sınırı verelim.

Teorem 3.14 G, n noktalı bağlantılı bir graf ve ∇, $Co-PI$ matrisin determinantının mutlak değeri ve S, $Co-PI$ matrisin öz değerlerinin kareleri toplamı olsun. O halde,

$$Co-PIE(G) \ge \sqrt{S + n(n-1)\nabla^{\frac{2}{n}}}$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak $|\lambda_1^*| = |\lambda_2^*| = ... = |\lambda_n^*|$ durumunda sağlanır.

İspat: $i = 1, 2, ..., n$ için $r = n$, $a_i = |\lambda_i^*|$ alalım. Lemma 3.13 den,

$$P_2^{1/2} \ge P_{n-1}^{1/n-1} \tag{3.9}$$

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \left|\lambda_j^*\right| \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right|^2 \right] \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left[Co - PIE^2(G) - S \right], \quad \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right|^2 = S
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
P_{n-1} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-i+1}}^{n} \left|\lambda_i^*\right|}{n} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right|}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|\lambda_i^*\right|} \geq \prod_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|\lambda_i^*\right|} \right)^{1/n}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

buluruz. (3.9), (3.10), (3.11) denklemleri ve Lemma 3.13 den,

$$\frac{1}{n(n-1)} \left[Co - PIE^2(G) - S \right] \geq \nabla^{2/n}$$

elde ederiz. Yani eşitsizliği düzenlersek,

$$Co - PIE(G) \geq \sqrt{S + n(n-1)\nabla^{\frac{2}{n}}}$$

sonucuna ulaşırız. Lemma 3.13 den, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\left|\lambda_1^*\right| = \left|\lambda_2^*\right| = ... = \left|\lambda_n^*\right|$ olması açıktır.■

Aşağıda Co-PI enerji için başka bir üst sınır yer almaktadır.

Teorem 3.15 G, n noktalı bağlantılı bir graf ve S, $Co - PI$ matrisin özdeğerlerinin kareleri toplamı olsun. Bu durumda,

$$Co - PIE(G) \leq \sqrt{nS}$$

dir. Eşitlik sağlanması için gerek ve yeter şart $\left|\lambda_1^*\right| = \left|\lambda_2^*\right| = ... = \left|\lambda_n^*\right|$ olmasıdır.

İspat: $i = 1, 2, ..., n$ için $r = n$, $a_i = \left|\lambda_i^*\right|$ alalım. Lemma 3.13 den,

$$P_1 \geq P_2^{1/2} \tag{3.12}$$

$$P_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right|}{n} = \frac{Co - PIE(G)}{n} \tag{3.13}$$

ve

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \left|\lambda_j^*\right| \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^*\right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left[Co - PIE^2(G) - S \right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.12), (3.13), (3.14) ve Lemma 3.13 den sonuca ulaşırız. Lemma 3.13 den, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\left|\lambda_1^*\right| = \left|\lambda_2^*\right| = ... = \left|\lambda_n^*\right|$ dir. ■

Not 3.16. Teorem 3.15 de, farklı bir yaklaşım kullanarak ve eşitlik şartı vererek, Teorem 3.9 da bulduğumuz benzer sınırı elde ettik.

Şimdi bu çalışmadaki son sonucumuzu verelim:

Teorem 3.17. G, n noktalı bağlantılı bir graf ve S, $Co - PI$ matrisin özdeğerlerinin kareleri toplamı olsun. O zaman,

$$Co - PIE(G) \leq \frac{S}{n} + \sqrt{(n-1)\left[S - \left(\frac{S}{n} \right)^2 \right]} \tag{3.15}$$

dir.

İspat: İspatı Koolen ve Moulton'un (Koolen ve Moulton, 2001; 2003) yöntemi ile yapacağız. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=2}^{n} \left|\lambda_i^*\right| \right)^2 &\leq (n-1) \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{*2} \right) \\ \left[Co - PIE(G) - \lambda_1^* \right]^2 &\leq (n-1) \left(S - \lambda_1^{*2} \right) \\ Co - PIE(G) &\leq \lambda_1^* + \sqrt{(n-1)\left(S - \lambda_1^{*2} \right)} \end{aligned} \quad .$$

elde ederiz.

$$f(x) = x + \sqrt{(n-1)\left(S - x^2\right)}$$

fonksiyonunu düşünelim. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*2} = S$ eşitliğinden,

$$x^2 = \lambda_1^{*2} \leq S$$

elde ederiz. Buradan,

$$x \leq \sqrt{S}$$

dir. $f'(x) = 0$ olması $x = \sqrt{\frac{S}{n}}$ olacağını gösterir. Buradan, $f(x)$ fonksiyonu $\sqrt{\frac{S}{n}} \leq x \leq 2\sqrt{\frac{S}{2}}$ ve $\sqrt{\frac{S}{n}} \leq \frac{S}{n} \leq \lambda_1^*$ aralığında azalandır. Buradan, $f\left(\lambda_1^*\right) \leq f\left(\frac{S}{n}\right)$ olur ve (3.15) eşitsizliği sağlanır. ■

Örnek 3.18 $K_{p,q}$ iki parçalı tam grafı düşünelim. $M_{CPI}(K_{p,q}) = |p-q| A(K_{p,q})$ ve $K_{p,q}$ sırasıyla $1,1, p+q-2$ katlılıkları ile sahip olduğu özdeğerler $\sqrt{pq}$, $-\sqrt{pq}$, 0 olduğundan,

$$Co - PIE(K_{p,q}) = |p-q| E(K_{p,q}) = 2|p-q|\sqrt{pq}$$

eşitliğini elde ederiz.

4. LAPLACIAN-TİPİ ENERJİ ve ETKİ ENERJİSİ ÜZERİNE BİR GENELLEŞTİRME

Bu bölümde Laplacian öz değerler ve işaretsiz (signless) Laplacian öz değerlerin α -ıncı kuvvetlerinin toplamları için bazı sınırlar bulunmuş ve böylece bu sınırlar α nın özel bir değeri için daha önceden elde edilmiş çalışmalardaki bazı sonuçlara indirgenmiştir.

Ayrıca bu bölümdeki çalışmalar MATCH Commun. Math. Comput. Chem. dergisinde yayınlanmak için kabul edilmiştir.

$A(G)$, G nin (0,1) komşuluk matrisi ve $D(G)$ köşegen derece matrisi olsun. $L(G) = D(G) - A(G)$ matrisine ($Q(G) = D(G) + A(G)$ matrisine) G nin Laplacian matrisi (işaretsiz Laplacian matrisi) denir (Merris, 1994; 1995). $A(G)$, $L(G)$ ve $Q(G)$ matrisleri reel, simetrik matris oldukları için, öz değerleri reel sayılardır. Bu nedenle, bu matrislerin öz değerlerini $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq ... \geq \lambda_n(G)$, $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq ... \geq \mu_n(G)$ ve $q_1(G) \geq q_2(G) \geq ... \geq q_n(G)$ biçiminde sıralayabiliriz.

$I(G)$, G grafının (nokta-kenar) etki (incidence) matrisi olsun. Jooyandeh ve ark. (Jooyandeh ve ark., 2009) G nin etki enerjisini, etki matrisinin singüler değerlerinin toplamı olarak tanımlamışlardır.

Gutman ve arkadaşları (Gutman ve ark., 2009a)

$$IE = IE(G) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{q_i}$$

olduğunu göstermişlerdir.

Liu ve Li, (Liu ve Liu, 2008) Laplacian öz değerlerinden yeni bir enerji tanımlamışlar ve bu enerjiye Laplacian tipi-enerji (Laplacian energy-like invaryant) demişlerdir:

$$LEL = LEL(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\mu_i} \ .$$

Nokta sayısı n olan bir G grafı ve bir α reel sayısı için, sıfırdan farklı Laplacian öz değerlerin $\alpha - ıncı$ kuvvetlerinin toplamı Zhou tarafından (Zhou, 2008) aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^{\ \alpha} \text{ dır.}$$

$\alpha = 0$ için $\sigma_0 = n-1$ ve $\alpha = 1$ için $\sigma_1 = 2m$ dir, burada m, G nin kenar sayısıdır. $\sigma_{1/2}$, LEL e eşittir.

Akbari ve arkadaşları, (Akbari ve ark., 2010) da işaretsiz Laplacian özdeğerlerin α . kuvvetlerinin toplamını aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$s_\alpha = s_\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n} q_i^{\ \alpha} \text{ dır.}$$

$\alpha = 0$ için $s_0 = n$ ve $\alpha = 1$ için $s_1 = 2m$ dir, burada m, G nin kenar sayısıdır. $s_{1/2}$, IE ye eşittir.

Şimdi ana sonuçlarımızda kullanacağımız lemmaları verelim.

Lemma 4.1 G, n noktalı ve en az bir kenarlı bir graf olsun. Bu durumda $\mu_1 \geq \Delta + 1$ dir. Dahası, eğer G bağlantılı ise, o zaman eşitlik $\Delta = n-1$ durumunda sağlanır (Merris, 1994).

Lemma 4.2 G, n noktalı bir graf ve $\bar{G}$ onun tamamlayıcısı olsun. Eğer $Spec(G) = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n-1}, 0\}$ ise, bu durumda $Spec(\bar{G}) = \{n-\mu_1, n-\mu_2, ..., n-\mu_{n-1}, 0\}$ dır. Buradan, $\mu_1(G) \leq n$ dir, eşitlik şartının sağlanması için gerek ve yeter şart $\bar{G}$ nin bağlantılı olmasıdır (Merris, 1994).

Lemma 4.3 G, $n \geq 3$ noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $\mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_{n\text{-}1}$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{\Delta,\Delta}$ olmasıdır (Das, 2007).

Lemma 4.4 G, n noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{n-1}$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ olmasıdır (Das, 2007).

$t = t(G)$, G grafını geren ağaç sayısı olsun. $G_1 \times G_2$, G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımları olsun. Aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$t_1 = t_1(G) = \frac{2t(G \times K_2)}{t(G)}, \qquad t_2 = t_2(G) = \frac{\Delta + \delta + \sqrt{(\Delta - \delta)^2 + 4\Delta}}{2} \tag{4.1}$$

Lemma 4.5 Eğer G, n noktalı, bağlantılı iki parçalı graf ise, bu durumda $\prod_{i=1}^{n-1} \mu_i = \prod_{i=1}^{n-1} q_i = nt(G)$ dir. Eğer G, n noktalı, bağlantılı iki parçalı olmayan bir graf ise, bu durumda $\prod_{i=1}^{n-1} q_i = t_1$ dir (Cvetkovic ve Simic, 2010).

Lemma 4.6 G, $n \geq 3$ noktalı bağlantılı bir graf ve Δ maksimum derece olsun. Bu durumda $q_1 \geq T \geq \Delta + 1$ dir, eşitliklerin sağlanması için gerek ve yeter şart G nin $K_{1,n-1}$ olmasıdır (Zhang ve ark., 2009; Chen ve Wang, 2010) .

Lemma 4.7 $L(G)$ ve $Q(G)$ nin spektralarının çakışması için gerek ve yeter şart G nin iki parçalı graf olmasıdır (Merris, 1994; 1995; Cvetkovic ve ark., 2007).

Lemma 4.8 G , n noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda $q_1 \leq 2\Delta$ dir, eşitlik için gerek ve yeter şart G nin regüler graf olmasıdır (Yu ve ark., 2011).

Lemma 4.9 $x_1, x_2, ..., x_N$ negatif olmayan sayılar ve $\beta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ ile $\gamma = \left(\prod_{i=1}^{N} x_i\right)^{1/N}$ bu sayıların aritmetik ve geometrik ortalamaları olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i<j} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2 \leq \beta - \gamma \leq \frac{1}{N} \sum_{i<j} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $x_1 = x_2 = ... = x_N$ olmasıdır (Kober, 1958).

Lemma 4.10 $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ olacak şekildeki $p_1, p_2, ..., p_n \geq 0$ sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i - \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \geq n\lambda \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} a_i^{1/n} \right)$$

dir. Burada $\lambda = \min\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = ... = a_n$ olmasıdır (Furuichi, 2011).

Şimdi bu lemmaları kullanarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Teorem 4.11 α, $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde bir reel sayı ve *G*, *n* noktalı, Δ maksimum dereceli ve *t* geren ağaçlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\sigma_\alpha(G) = \begin{cases} \leq n^\alpha + \sqrt{(n-3)\left[\sigma_{2\alpha} - (\Delta+1)^{2\alpha}\right] + (n-2)\left(\frac{tn}{\Delta+1}\right)^{2\alpha/n-2}} \\ \geq (\Delta+1)^\alpha + \sqrt{\sigma_{2\alpha} - n^{2\alpha} + (n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}} \end{cases} \tag{4.2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat: Lemma 4.9 da $N = n-2$ ve $i = 2, 3, ..., n-1$ için $x_i = \mu_i^{2\alpha}$ alarak ve Lemma 4.1 ile Lemma 4.2 yi kulanarak,

$$\frac{\sum_{2\leq i<j\leq n-1} \left(\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha\right)^2}{(n-2)(n-3)} \leq \frac{\sigma_{2\alpha} - \mu_1^{2\alpha}}{n-2} - \left(\frac{nt}{\mu_1}\right)^{2\alpha/n-2} \leq \frac{\sum_{2\leq i<j\leq n-1} \left(\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha\right)^2}{(n-2)}$$

elde ederiz. $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i^{2\alpha} = \sigma_{2\alpha}$ eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{2\leq i<j\leq n-1} \left(\mu_i^\alpha - \mu_j^\alpha\right)^2 &= (n-3)\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i^{2\alpha} - 2\sum_{2\leq i<j\leq n-1} \left(\mu_i \mu_j\right)^\alpha \\ &= (n-3)\left(\sigma_{2\alpha} - \mu_1^{2\alpha}\right) - \left(\sum_{i=2}^{n-1} \mu_i^\alpha\right)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i^{2\alpha} \\ &= (n-2)\left(\sigma_{2\alpha} - \mu_1^{2\alpha}\right) - \left(\sigma_\alpha - \mu_1^\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\frac{(n-2)\left(\sigma_{2\alpha}-\mu_1^{2\alpha}\right)-\left(\sigma_\alpha-\mu_1^{\alpha}\right)^2}{(n-2)(n-3)} \le \frac{\sigma_{2\alpha}-\mu_1^{2\alpha}}{n-2}-\left(\frac{nt}{\mu_1}\right)^{2\alpha/n-2}$$
$$\le \frac{(n-2)\left(\sigma_{2\alpha}-\mu_1^{2\alpha}\right)-\left(\sigma_\alpha-\mu_1^{\alpha}\right)^2}{(n-2)}$$

dir. Bunun sonucunda,

$$\sigma_\alpha \le \mu_1^{\alpha}+\sqrt{(n-3)\left(\sigma_{2\alpha}-\mu_1^{2\alpha}\right)+(n-2)\left(\frac{tn}{\mu_1}\right)^{2\alpha/n-2}} \tag{4.3}$$

ve

$$\sigma_\alpha \ge \mu_1^{\alpha}+\sqrt{\sigma_{2\alpha}-\mu_1^{2\alpha}+(n-2)(n-3)\left(\frac{tn}{\mu_1}\right)^{2\alpha/n-2}} \tag{4.4}$$

elde edilir. Şimdi,

$$f(x)=\sqrt{(n-3)\left(\sigma_{2\alpha}-x^{2\alpha}\right)+(n-2)\left(\frac{tn}{x}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

fonksiyonunu düşünelim. $0<\alpha<1$ iken $x\ge\Delta+1$ için $f(x)$ fonksiyonu azalandır. Böylelikle,

$$f(x)\le f(\Delta+1)=\sqrt{(n-3)\left(\sigma_{2\alpha}-(\Delta+1)^{2\alpha}\right)+(n-2)\left(\frac{tn}{\Delta+1}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

elde ederiz. Bu durum, (4.3) eşitsizliği ve Lemma 4.2. den

$$\sigma_\alpha(G)\le \mu_1^{\alpha}+\sqrt{(n-3)\left(\sigma_{2\alpha}-(\Delta+1)^{2\alpha}\right)+(n-2)\left(\frac{tn}{\Delta+1}\right)^{2\alpha/n-2}}$$
$$\le n^{\alpha}+\sqrt{(n-3)\left(\sigma_{2\alpha}-(\Delta+1)^{2\alpha}\right)+(n-2)\left(\frac{tn}{\Delta+1}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$g(x)=\sqrt{\sigma_{2\alpha}-x^{2\alpha}+(n-2)(n-3)\left(\frac{tn}{x}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

fonksiyonu $0<\alpha<1$ iken $x\le n$ için azalandır. Buradan,

$$g(x)\ge g(n)=\sqrt{\sigma_{2\alpha}-n^{2\alpha}+(n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}}$$

elde ederiz. Bu durum, (4.4) eşisizliği ve Lemma 4.1. den

$$\sigma_\alpha \ge \mu_1^{\alpha}+\sqrt{\sigma_{2\alpha}-n^{2\alpha}+(n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}}$$
$$\ge (\Delta+1)^{\alpha}+\sqrt{\sigma_{2\alpha}-n^{2\alpha}+(n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}}$$

elde edilir. Bununla birlikte ispatın ilk kısmı tamamlanır.

Şimdi (4.2) deki eşitliğin sağlandığını kabul edelim. O zaman, yukarıdaki tüm eşitsizlikler eşitlik olmak zorundadır. Alt ve üst sınırların her ikisi için, Lemma 4.9 dan $\mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_{n-1}$ olmak zorundadır. O zaman, Lemma 4.3 den ya $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ veya $G \cong K_{\Delta,\Delta}$ olmalıdır. Dahası hem alt hem de üst sınırlar için $\mu_1 = \Delta + 1 = n$ dir. Bu durumda, Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 den $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ olduğu sonucuna varırız.

Aksi durumda, eğer $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ ise, (4.2) deki eşitlikler açıktır. ■

Sonuç 4.12 α, $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde bir reel sayı ve *T*, maksimum derecesi Δ olan *n* noktalı bir ağaç olsun. Bu durumda

$$\sigma_\alpha(T) = \begin{cases} \le n^\alpha + \sqrt{(n-3)\left[\sigma_{2\alpha} - (\Delta+1)^{2\alpha}\right] + (n-2)\left(\dfrac{n}{\Delta+1}\right)^{2\alpha/n-2}} \\ \ge (\Delta+1)^\alpha + \sqrt{\sigma_{2\alpha} - n^{2\alpha} + (n-2)(n-3)} \end{cases}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat: Ağaçlar için $t = 1$ olduğundan, Teorem 4.11 den sonuç açıktır. ■

Sonuç 4.13 α, $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde bir reel sayı ve *U*, maksimum derecesi Δ olan *n* noktalı bağlantılı bir tek devirli graf olsun. Bu durumda

$$\sigma_\alpha(U) = \begin{cases} \le n^\alpha + \sqrt{(n-3)\left[\sigma_{2\alpha} - (\Delta+1)^{2\alpha}\right] + (n-2)\left(\dfrac{n^2}{\Delta+1}\right)^{2\alpha/n-2}} \\ \ge (\Delta+1)^\alpha + \sqrt{\sigma_{2\alpha} - n^{2\alpha} + (n-2)(n-3)3^{2\alpha/n-2}} \end{cases}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $U \cong K_3$ olmasıdır.

İspat: Tek devirli graflarda $3 \le t \le n$ olduğundan, Teorem 4.11 den sonuç açıktır. ■

Özel bir durum olarak $\alpha = 1/2$ aldığımız zaman, Das ve ark. (Das ve ark., 2014a) çalışmasındaki Teorem 2.5, Sonuç 2.6 ve Sonuç 2.7 yi elde ederiz:

Teorem 4.14 *G*, *n* noktalı, *m* kenarlı, Δ maksimum dereceli ve *t* geren ağaçlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$LEL(G)=\begin{cases}\le \sqrt{n}+\sqrt{(n-3)\left[2m-\Delta-1\right]+(n-2)\left(\dfrac{tn}{\Delta+1}\right)^{1/n-2}} \\ \ge \sqrt{\Delta+1}+\sqrt{2m-n+(n-2)(n-3)t^{1/n-2}}\end{cases}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır (Das ve ark., 2014a).

Sonuç 4.15 *T*, maksimum derecesi Δ olan *n* noktalı bir ağaç olsun. Bu durumda

$$LEL(T)=\begin{cases}\le \sqrt{n}+\sqrt{(n-3)\left(2n-\Delta-3\right)+(n-2)\left(\dfrac{n}{\Delta+1}\right)^{1/n-2}} \\ \ge n-2+\sqrt{\Delta+1}\end{cases}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır (Das ve ark., 2014a).

Sonuç 4.16 *U*, maksimum derecesi Δ olan *n* noktalı bir tek devirli graf olsun. Bu durumda

$$LEL(U)=\begin{cases}\le \sqrt{n}+\sqrt{(n-3)\left(2n-\Delta-1\right)+(n-2)\left(\dfrac{n^2}{\Delta+1}\right)^{1/n-2}} \\ \ge \sqrt{\Delta+1}+\sqrt{n+\left(n-2\right)\left(n-3\right)3^{1/n-2}}\end{cases}.$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $U \cong K_3$ olmasıdır (Das ve ark., 2014a).

Lemma 4.1 ile Lemma 4.9 arasındaki lemmalardan yararlanarak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.17 α, $0<\alpha<1$ olacak şekilde bir reel sayı ve *G*, $n \ge 3$ noktalı, Δ maksimum dereceli ve *t* geren ağaçlı bağlantılı bir graf ve t_1 ile t_2, (4.2) eşitliğinde verildiği gibi olsun. Bu durumda;

(i) Eğer *G* iki parçalı ise

$$\sigma_\alpha(G)=s_\alpha(G)=\begin{cases}\le n^\alpha+\sqrt{(n-3)\left[s_{2\alpha}-t_2^{2\alpha}\right]+(n-2)\left(\dfrac{tn}{t_2}\right)^{2\alpha/n-2}}\\ \ge t_2^\alpha+\sqrt{s_{2\alpha}-n^{2\alpha}+(n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}}\end{cases} \tag{4.5}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G\cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

(ii) Eğer G iki parçalı değil ise

$$s_\alpha(G)=\begin{cases}<(2\Delta)^\alpha+\sqrt{(n-2)\left[s_{2\alpha}-t_2^{2\alpha}\right]+(n-1)\left(\dfrac{t_1}{t_2}\right)^{2\alpha/n-1}}\\ >t_2^\alpha+\sqrt{s_{2\alpha}-(2\Delta)^{2\alpha}+(n-1)(n-2)\left(\dfrac{t_1}{2\Delta}\right)^{2\alpha/n-1}}\end{cases} \tag{4.6}$$

dir.

İspat: (i) Lemma 4.9 da $N=n-2$ ve $i=2,3,...,n-1$ için $x_i=q_i^{2\alpha}$ alarak ve Lemma 4.1 ile Lemma 4.2 yi kullanarak,

$$\frac{\sum_{2\le i<j\le n-1}\left(q_i^\alpha-q_j^\alpha\right)^2}{(n-2)(n-3)}\le\frac{s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}}{n-2}-\left(\frac{tn}{q_1}\right)^{2\alpha/n-2}\le\frac{\sum_{2\le i<j\le n-1}\left(q_i^\alpha-q_j^\alpha\right)^2}{(n-2)}$$

elde ederiz. $\sum_{i=1}^{n-1}q_i^{2\alpha}=s_{2\alpha}$ olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}\sum_{2\le i<j\le n-1}\left(q_i^\alpha-q_j^\alpha\right)^2&=(n-3)\sum_{i=2}^{n-1}q_i^{2\alpha}-2\sum_{2\le i<j\le n-1}\left(q_iq_j\right)^\alpha\\&=(n-3)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right)-\left(\sum_{i=2}^{n-1}q_i^\alpha\right)^2+\sum_{i=2}^{n-1}q_i^{2\alpha}\\&=(n-2)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right)-\left(s_\alpha-q_1^\alpha\right)^2\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{(n-2)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right)-\left(s_\alpha-q_1^\alpha\right)^2}{(n-2)(n-3)}&\le\frac{s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}}{n-2}-\left(\frac{nt}{q_1}\right)^{2\alpha/n-2}\\&\le\frac{(n-2)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right)-\left(s_\alpha-q_1^\alpha\right)^2}{(n-2)}\end{aligned}$$

dir. Bunun sonucunda,

$$s_\alpha \le q_1^\alpha + \sqrt{(n-3)\left(s_{2\alpha} - q_1^{2\alpha}\right) + (n-2)\left(\frac{tn}{q_1}\right)^{2\alpha/n-2}} \tag{4.7}$$

ve

$$s_\alpha \ge q_1^\alpha + \sqrt{s_{2\alpha} - q_1^{2\alpha} + (n-2)(n-3)\left(\frac{tn}{q_1}\right)^{2\alpha/n-2}} \tag{4.8}$$

elde edilir.

$$f(x) = \sqrt{(n-3)\left(s_{2\alpha} - x^{2\alpha}\right) + (n-2)\left(\frac{tn}{x}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

fonksiyonunu düşünelim. $0 < \alpha < 1$ iken $x \ge \Delta + 1$ için $f(x)$ fonksiyonu azalandır. Lemma 4.6 dan $q_1 \ge t_2 \ge \Delta + 1$ dir. Böylelikle,

$$f(x) \le f(t_2) = \sqrt{(n-3)\left(s_{2\alpha} - t_2^{2\alpha}\right) + (n-2)\left(\frac{tn}{t_2}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

elde ederiz. Bu durum, (4.7) ve Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned} s_\alpha(G) &\le q_1^\alpha + \sqrt{(n-3)\left(s_{2\alpha} - t_2^{2\alpha}\right) + (n-2)\left(\frac{tn}{t_2}\right)^{2\alpha/n-2}} \\ &\le n^\alpha + \sqrt{(n-3)\left(s_{2\alpha} - t_2^{2\alpha}\right) + (n-2)\left(\frac{tn}{t_2}\right)^{2\alpha/n-2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$g(x) = \sqrt{s_{2\alpha} - x^{2\alpha} + (n-2)(n-3)\left(\frac{tn}{x}\right)^{2\alpha/n-2}}$$

fonksiyonu $0 < \alpha < 1$ iken $x \le n$ için azalandır. Buradan,

$$g(x) \ge g(n) = \sqrt{s_{2\alpha} - n^{2\alpha} + (n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}}$$

elde ederiz. Bu durum, (4.8) ve Lemma 4.6 dan

$$\begin{aligned} s_\alpha &\ge q_1^\alpha + \sqrt{s_{2\alpha} - n^{2\alpha} + (n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}} \\ &\ge t_2^{\ \alpha} + \sqrt{s_{2\alpha} - n^{2\alpha} + (n-2)(n-3)t^{2\alpha/n-2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte ispatın ilk kısmı tamamlanır.

Şimdi (4.5) deki eşitliğin sağlandığını kabul edelim. O zaman, yukarıdaki tüm eşitsizlikler eşitliğe olmak zorundadır. Alt ve üst sınırların her ikisi için, Lemma 4.9 dan

$q_2 = q_3 = ... = q_{n-1}$ olmak zorundadır. O zaman, Lemma 4.3 ve Lemma 4.7 den ya $G \cong K_n$ ya da $G \cong K_{1,n-1}$ veya $G \cong K_{\Delta,\Delta}$. Dahası hem alt hem de üst sınırlar için $q_1 = t_2 = n$ dir. Bu durumda Lemma 4.1, Lemma 4.2 ve Lemma 4.6 dan $G \cong K_{1,n-1}$ olduğu sonucuna varırız.

Aksi durumda, eğer $G \cong K_{1,n-1}$ ise, (4.5) deki eşitlikler açıktır.

(ii) Lemma 4.9 da $N = n-1$ ve $i = 2,3,...,n$ için $x_i = q_i^{2\alpha}$ alarak ve Lemma 4.5 i kullanarak,

$$\frac{\sum_{2\le i<j\le n}\left(q_i^{\alpha}-q_j^{\alpha}\right)^2}{(n-1)(n-2)} \le \frac{s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}}{n-1} - \left(\frac{t_1}{q_1}\right)^{2\alpha/n-2} \le \frac{\sum_{2\le i<j\le n}\left(q_i^{\alpha}-q_j^{\alpha}\right)^2}{(n-1)}$$

elde ederiz. $\sum_{i=1}^{n} q_i^{2\alpha} = s_{2\alpha}$ olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}\sum_{2\le i<j\le n}\left(q_i^{\alpha}-q_j^{\alpha}\right)^2 &= (n-2)\sum_{i=2}^{n} q_i^{2\alpha} - 2\sum_{2\le i<j\le n}\left(q_i q_j\right)^{\alpha} \\ &= (n-2)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right) - \left(\sum_{i=2}^{n} q_i^{\alpha}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} q_i^{2\alpha} \\ &= (n-1)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right) - \left(s_{\alpha}-q_1^{\alpha}\right)^2\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right)-\left(s_{\alpha}-q_1^{\alpha}\right)^2}{(n-1)(n-2)} &\le \frac{s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}}{n-1} - \left(\frac{t_1}{q_1}\right)^{2\alpha/n-2} \\ &\le \frac{(n-1)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right)-\left(s_{\alpha}-q_1^{\alpha}\right)^2}{(n-1)}\end{aligned}$$

dir. Bunun sonucunda,

$$s_{\alpha} \le q_1^{\alpha} + \sqrt{(n-2)\left(s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha}\right) + (n-1)\left(\frac{t_1}{q_1}\right)^{2\alpha/n-1}} \tag{4.9}$$

ve

$$s_{\alpha} \ge q_1^{\alpha} + \sqrt{s_{2\alpha}-q_1^{2\alpha} + (n-1)(n-2)\left(\frac{t_1}{q_1}\right)^{2\alpha/n-1}} \tag{4.10}$$

elde edilir.

$$f(x)=\sqrt{(n-2)\left(s_{2\alpha}-x^{2\alpha}\right)+(n-1)\left(\frac{t_1}{x}\right)^{2\alpha/n-1}}$$

fonksiyonunu düşünelim. $0<\alpha<1$ iken $x\geq\Delta+1$ için $f(x)$ fonksiyonu azalandır. Lemma 4.6 dan $q_1\geq t_2\geq\Delta+1$ dir. Böylelikle,

$$f(x)\leq f(t_2)=\sqrt{(n-2)\left(s_{2\alpha}-t_2^{2\alpha}\right)+(n-1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{2\alpha/n-1}}$$

elde ederiz. Bu durum, (4.9) ve Lemma 4.8 den

$$\begin{aligned}s_\alpha(G)&\leq q_1^\alpha+\sqrt{(n-2)\left(s_{2\alpha}-t_2^{2\alpha}\right)+(n-1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{2\alpha/n-1}}\\&\leq(2\Delta)^\alpha+\sqrt{(n-2)\left(s_{2\alpha}-t_2^{2\alpha}\right)+(n-1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{2\alpha/n-1}}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$g(x)=\sqrt{s_{2\alpha}-x^{2\alpha}+(n-1)(n-2)\left(\frac{t_1}{x}\right)^{2\alpha/n-1}}$$

fonksiyonu $0<\alpha<1$ iken $x\leq 2\Delta$ için azalandır. Buradan,

$$g(x)\geq g(2\Delta)=\sqrt{s_{2\alpha}-(2\Delta)^{2\alpha}+(n-1)(n-2)\left(\frac{t_1}{2\Delta}\right)^{2\alpha/n-1}}$$

elde ederiz. Bu durum, (4.10) ve Lemma 4.6 dan

$$\begin{aligned}s_\alpha&\geq q_1^\alpha+\sqrt{s_{2\alpha}-(2\Delta)^{2\alpha}+(n-1)(n-2)\left(\frac{t_1}{2\Delta}\right)^{2\alpha/n-1}}\\&\geq t_2{}^\alpha+\sqrt{s_{2\alpha}-(2\Delta)^{2\alpha}+(n-1)(n-2)\left(\frac{t_1}{2\Delta}\right)^{2\alpha/n-1}}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (4.9) ve (4.10) daki eşitsizlikler sağlanır. (4.9) ve (4.10) daki her bir eşitlik ancak ve ancak $q_1=t_2=2\Delta$ ve $q_2=q_3=\ldots=q_n$ olması halinde sağlanır. $q_1=2\Delta$ ve $q_2=q_3=\ldots=q_n$ olmasından, $G\cong K_n$ sonucuna varırız. Bununla birlikte,

$$q_1(K_n)=2(n-1)\neq n-1+\sqrt{n-1}=t_2(K_n)$$

olduğundan, (4.9) ve (4.10) eşitlik haline gelemezler. ■

Sonuç 4.18. α, $0<\alpha<1$ olacak şekilde bir reel sayı ve T, $n\geq 3$ noktalı, Δ maksimum dereceli bir ağaç ve t_2, (4.2) eşitliğinde verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$\sigma_\alpha(T)=s_\alpha(T)=\begin{cases}\le n^\alpha+\sqrt{(n-3)\left[s_{2\alpha}-t_2{}^{2\alpha}\right]+(n-2)\left(\dfrac{n}{t_2}\right)^{2\alpha/n-2}}\\ \ge t_2{}^\alpha+\sqrt{s_{2\alpha}-n^{2\alpha}+(n-2)(n-3)}\end{cases}$$

dır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G\cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

İspat: Her ağaç iki parçalı bir graftır. Ağaçlar için $t=1$ olduğundan, Teorem 4.17 den sonuç açıktır. ■

Eğer Teorem 4.17 de özel olarak $\alpha=1/2$ alırsak, Bozkurt ve ark. (Bozkurt ve Bozkurt, 2014) çalışmasındaki Teorem 3.1 de verilen sonucu elde ederiz:

Teorem 4.19 *G*, $n\ge 3$ noktalı, *m* kenarlı, Δ maksimum dereceli ve *t* geren ağaçlı bağlantılı bir graf ve t_1 ile t_2, (4.2) eşitliğinde verildiği gibi olsun. Bu durumda

(i) Eğer *G* iki parçalı ise

$$LEL(G)=IE(G)=\begin{cases}\le \sqrt{n}+\sqrt{(n-3)\left[2m-t_2\right]+(n-2)\left(\dfrac{tn}{t_2}\right)^{1/n-2}}\\ \ge \sqrt{t_2}+\sqrt{2m-n+(n-2)(n-3)t^{1/n-2}}\end{cases}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G\cong K_{1,n-1}$ olmasıdır.

(ii) Eğer *G* iki parçalı ise

$$IE(G)=\begin{cases}< \sqrt{2\Delta}+\sqrt{(n-2)\left[2m-t_2\right]+(n-1)\left(\dfrac{t_1}{t_2}\right)^{1/n-1}}\\ > \sqrt{t_2}+\sqrt{2m-2\Delta+(n-1)(n-2)\left(\dfrac{t_1}{2\Delta}\right)^{1/n-1}}\end{cases}$$

dir (Bozkurt ve Bozkurt, 2014).

Çalışmamızdaki Sonuç 4.18 de özel olarak $\alpha=\dfrac{1}{2}$ alırsak, ağaçların Laplacian-tipi enerji ve etki enerjileri için aşağıdaki sınırları elde ederiz.

Sonuç 4.20 T, $n \geq 3$ noktalı, Δ maksimum dereceli bir ağaç ve t_2, (4.2) eşitliğinde verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$LEL(T) = IE(T) = \begin{cases} \leq \sqrt{n} + \sqrt{(n-3)(2n-2-t_2) + (n-2)\left(\frac{n}{t_2}\right)^{1/n-2}} \\ \geq \sqrt{t_2} + (n-2) \end{cases}$$

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $T \cong K_{1,n-1}$ olmasıdır

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde öncelikle graf teorideki temel bilgi ve kavramlar verilmiştir. Sonra, uzaklık tabanlı bir indeks olan iletim düzensizlik indeksi tanımlanmış, Co-PI indeks ile aralarındaki ilişki verilmiş, çapı 2 olan graflar için sınır değerleri bulunmuştur. Ardından Co-PI enerji tanımlanmış, graflar için sınır değeri bulunmuş ve bazı sınırlar birkaç topolojik indekse bağlı verilmiştir. Son olarak Laplacian-tipi enerji ve etki enerji için bir genelleme yapılmış, bazı özel değerler için daha önce bulunan sınırlar elde edilmiştir.

5.2 Öneriler

Uzaklık kavramı graf teoride kullanılan önemli konulardan biridir. İletim düzensizlik indeksi ile diğer indeksler arasında bağıntı kurulabilir. Ayrıca, genel grafların bu indeksi için sınır değerleri elde edilebilir.

Co-PI enerji için daha iyi sınır değerleri bulunabilir.

Laplacian-tipi enerji ve etki enerji için farklı genelleştirmeler yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abdo, H., Brandt, S. ve Dimitrov, D., 2014, The total irregularity of a graph, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 16 (1), 201-206.

Akbari, S., Ghorbani, E., Koolen, J. H. ve Oboudi, M. R., 2010, On sum of powers of the Laplacian and signless Laplacian eigenvalues of graphs, *Electronic Journal of Combinatorics*, 17 (1).

Biggs, N., 1994, Algebraic Graph Theory, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, p.

Biler, P. ve Witkowski, A., 1990, Problems in Mathematical Analysis, *Marcel Dekker*, New York, p.

Bondy, J. A. ve Murty, U. S. R., 1976, Graph Theory with Applications, *North-Holland*, New York • Amsterdam • Oxford, p.

Bozkurt, S. B., Gungor, A. D., Gutman, I. ve Cevik, A. S., 2010, Randic Matrix and Randic Energy, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64 (1), 239-250.

Bozkurt, S. B. ve Gutman, I., 2013, Estimating the Incidence Energy, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 70 (1), 143-156.

Bozkurt, S. B. ve Bozkurt, D., 2014, On Incidence Energy, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 72 (1), 215-225.

Buckley, F. ve Harary, F., 1990, Distance in Graphs, *Addison–Wesley*, Redwood, p.

Chen, Y. Q. ve Wang, L. G., 2010, Sharp bounds for the largest eigenvalue of the signless Laplacian of a graph, *Linear Algebra and Its Applications*, 433 (5), 908-913.

Chung, F. R. K., 1997, Spectral Graph Theocy, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, American Mathematical Society, p.

Cvetkovi´c, D., Doob, M. ve Sachs, H., 1980, Spectra of Graphs – Theory and Application, *Academic Press*, New York, p.

Cvetkovic, D., Rowlinson, P. ve Simic, S. K., 2007, Signless Laplacians of finite graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 423 (1), 155-171.

Cvetkovic, D. ve Simic, S. K., 2010, Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II, *Linear Algebra and Its Applications*, 432 (9), 2257-2272.

Das, K. C., Xu, K. X. ve Liu, M. H., 2013, On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 439 (11), 3561-3575.

Das, K. C. ve Gutman, I., 2014, On incidence energy of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 446, 329-344.

Das, K. C., Gutman, I. ve Cevik, A. S., 2014a, On the Laplacian-energy-like invariant, *Linear Algebra and Its Applications*, 442, 58-68.

Das, K. C., Liu, M. H. ve Shan, H. Y., 2014b, Upper bounds on the (signless) Laplacian eigenvalues of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 459, 334-341.

Das, K. C., 2007, A sharp upper bound for the number of spanning trees of a graph, *Graphs and Combinatorics*, 23 (6), 625-632.

Euler, L., 1736, Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis, *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*, 8, 128-140.

Fath–Tabar, G. H., 2011, The Szeged energy of fullerene graph, *7th Slovenian International Conference on Graph Theory*, Bled, Slovenia.

Fischermann, M., Gutman, I., Hoffmann, A., Rautenbach, D., Vidovic, D. ve Volkmann, L., 2002, Extremal chemical trees, *Zeitschrift Fur Naturforschung Section a-a Journal of Physical Sciences*, 57 (1-2), 49-52.

Furuichi, S., 2011, On Refined Young Inequalities and Reverse Inequalities, *Journal of Mathematical Inequalities*, 5 (1), 21-31.

Gallian, J. A., 2007, Dynamic Survey DS6: Graph Labeling, *Electronic J. Combinatorics*, DS6, 1-58,.

Gutman, I., 1978, The energy of a graph, *Ber. Math. -Statist. Sekt. Forsch. Graz*, 103, 1–22.

Gutman, I. ve Polansky, O. E., 1986, Mathematical Concepts in Organic Chemistry, *Springer*, Berlin, p.

Gutman, I., 1994, A formula for the Wiener number of trees and its extension to graphs containing cycles, *Graph Theory Notes NY*, 27, 9-15.

Gutman, I. ve Zhou, B., 2006, Laplacian energy of a graph, *Linear Algebra and Its Applications*, 414 (1), 29-37.

Gutman, I., Kiani, D. ve Mirzakhah, M., 2009a, On Incidence Energy of Graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 62 (3), 573-580.

Gutman, I., Kiani, D., Mirzakhah, M. ve Zhou, B., 2009b, On incidence energy of a graph, *Linear Algebra and Its Applications*, 431 (8), 1223-1233.

Gutman, I., Zhou, B. ve Furtula, B., 2010, The Laplacian-energy Like Invariant is an Energy Like Invariant, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64 (1), 85-96.

Harary, F., 1969, Graph Theory, *Addison-Wesley*, Reading, Mass, p.

Hardy, G. H., Littelwood, J. E. ve Polya, G., 1934, Inequalities, *Cambridge University Press*, London, p.

Hasani, F., Khormali, O. ve Iranmanesh, A., 2010, Computation of the first vertex of CO-PI index of TUC4C8(S) nanotubes, *Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications*, 4 (4), 544-547.

Jooyandeh, M., Kiani, D. ve Mirzakhah, M., 2009, Incidence Energy of a Graph, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 62 (3), 561-572.

Kaya, E. ve Maden, A. D., 2017a, On the Co-PI Spectral Radius and the Co-PI Energy of Graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 77 (3), 691-700.

Kaya, E. ve Maden, A. D., 2017b, On the Co-PI Energy, In: Bounds in Chemical Graph Theory – Advances,, Eds: Gutman, I., Furtula, B., Das, K. C., Milovanovi´c, E. ve Milovanovi´c, I., *Univ. Kragujevac*: Kragujevac, p. 173–185.

Khalifeh, M. H., Yousefi-Azari, H. ve Ashrafi, A. R., 2008, Vertex and edge PI indices of Cartesian product graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 156 (10), 1780-1789.

Kober, H., 1958, On the arithmetic and geometric means and the Hölder inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 59, 452-459.

Koolen, J. H. ve Moulton, V., 2001, Maximal energy graphs, *Advances in Applied Mathematics*, 26 (1), 47-52.

Koolen, J. H. ve Moulton, V., 2003, Maximal energy bipartite graphs, *Graphs and Combinatorics*, 19 (1), 131-135.

Li, X., Shi, Y. ve Gutman, I., 2012, Graph Energy, *Springer*, New York, p.

Liu, B. L., Huang, Y. F. ve You, Z. F., 2011, A Survey on the Laplacian-Energy-Like Invariant, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 66 (3), 713-730.

Liu, J. ve Liu, B., 2008, A Laplacian-energy-like invariant of a graph, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 59 (2), 355-372.

Liu, M. H. ve Liu, B. L., 2012, On Sum of Powers of the Signless Laplacian Eigenvalues of Graphs, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41 (4), 527-536.

Maden, A. D., Cevik, A. S., Cangul, I. N. ve Das, K. C., 2013, On the Kirchhoff matrix, a new Kirchhoff index and the Kirchhoff energy, *Journal of Inequalities and Applications*.

Manvel, B., 1969, Reconstruction of unicyclic graphs, In: Proof Techniques in Graph Theory, Eds: Harary, F., *Academic Press*: New York, p. 103-107.

Merris, R., 1994, Laplacian Matrices of Graphs - a Survey, *Linear Algebra and Its Applications*, 198, 143-176.

Merris, R., 1995, A survey of graph laplacians, *Linear and Multilinear Algebra*, 68, 19-31.

Mohar, B., 2007, On the Laplacian coefficients of acyclic graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 422 (2-3), 736-741.

Nadjafi-Arani, M. J., 2011, Sharp Bounds on the PI and Vertex PI Energy of Graphs, *Match-Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 65 (1), 123-130.

Pisanski, T. ve Randic, M., 2010, Use of the Szeged index and the revised Szeged index for measuring network bipartivity, *Discrete Applied Mathematics*, 158 (17), 1936-1944.

Skiena, S., 1990, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, *Reading*, MA: Addison-Wesley, p.

Su, G. F., Xiong, L. M. ve Xu, L., 2013, On the Co-PI and Laplacian Co-PI eigenvalues of a graph, *Discrete Applied Mathematics*, 161 (1-2), 277-283.

Tian, G. X., Huang, T. Z. ve Zhou, B., 2009, A note on sum of powers of the Laplacian eigenvalues of bipartite graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 430 (8-9), 2503-2510.

Wiener, H., 1947, Structural determination of paraffin boiling points, *J. Am. Chem. Soc.*, 69, 17–20.

Xu, K. X., Das, K. C. ve Maden, A. D., 2016, On a Novel Eccentricity-based Invariant of a Graph, *Acta Mathematica Sinica-English Series*, 32 (12), 1477-1493.

You, L. H. ve Yang, J. S., 2014, Notes on the sum of powers of the signless Laplacian eigenvalues of graphs, *Ars Combinatoria*, 117, 85-94.

Yu, G. L., Wu, Y. R. ve Shu, J. L., 2011, Sharp bounds on the signless Laplacian spectral radii of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 434 (3), 683-687.

Zhang, Y. P., Liu, X. G., Zhang, B. Y. ve Yong, X. R., 2009, The lollipop graph is determined by its Q-spectrum, *Discrete Mathematics*, 309 (10), 3364-3369.

Zhou, B., 2008, On sum of powers of the Laplacian eigenvalues of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, 429 (8-9), 2239-2246.

Zhou, B. ve Ilic, A., 2010, On the sum of powers of Laplacian eigenvalues of bipartite graphs, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 60 (4), 1161-1169.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Ezgi Kaya
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Seben- 1986
Telefon	**:**	0 507 934 1268
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	ezgi.kaya@igdir.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Iğdır Lisesi (Y.D.A.), Merkez, Iğdır	2004
Üniversite	:	Balıkesir Üniversitesi, Merkez, Balıkesir	2010
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2013
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-…	Iğdır Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Kaya, E. ve Maden, A. D., 2018, A Generalization of the Incidence Energy and the Laplacian-Energy-Like Invariant, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* ,kabul edilmiştir. **(Doktora Tezinden yapılmıştır)**

Kaya, E. and Maden, A. D., 2017, On the Co-PI Energy, Chapter in the book Bounds in Chemical Graph Theory-Advances (I. Gutman, B. Furtula, K. C. Das, E. Milovanovic, I. Milovanovic, eds.) in Mathematical Chemistry Monographs pp 173-185, No. 21, IV+254 pp. Softcover, ISBN: 978-6009-046-3, Publisher: University of Kragujevac and Faculty of Science Kragujevac, Kragujevac. **(Doktora Tezinden yapılmıştır)**

Kaya, E. ve Maden, A. D., 2017, On the Co-PI Spectral Radius and the Co-PI Energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **77** 691–700. **(Doktora Tezinden yapılmıştır)**

Kaya, E. ve Maden, A. D., 2015, Bounds for the Co-PI index of a graph, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 6, No. 1, 1 – 13. **(Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır)**

Sözlü Sunulan ve Özeti Basılan Uluslararası Tebliğler

Kaya, E. and Maden, A. D., " Laplacian vertex PI energy of graphs", 8th International Conference on Applied Physics and Mathematics , ICAPM 2018, January 27-29, Phuket-Thailand.

Kaya, E. and Maden, A. D., " Bounds on the Szeged and the Laplacian Szeged Energy of graphs", The African Days on Applied Mathematics, ADAM 2017, November 2-4, Errachidia-Morocco.

Kaya, E. and Maden, A. D., " The vertex PI Estrada index of a graph", II. International Iğdır Symposium, IGDIRSEMP 2017, October 9-11, Iğdır-Turkey.

Kaya, E. and Maden, A. D., " The Laplacian Szeged energy of graphs", Caucasian Mathematics Conference, CMC-II, August 22-24 2017, Van-Turkey.

Kaya, E. and Maden, A. D., "On the transmission non-regularity of graphs", The Second Malta Conference in Graph Theory and Combinatorics, 2MCGTC 2017, June 26-30, Qawra-Malta.

Kaya, E. and Maden, A. D., "The Szeged Estrada index of a graph", 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress IRSYSC 2017, May 24-26, Konya-Turkey

Kaya, E. and Maden, A. D., "A generalization on the Incidence Energy and Laplacian Energy-Like Invariant", 4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, ICRAPAM 2017, May 11-15, Aydın-Turkey.

Kaya, E. and Maden, A. D., "On the Co-PI spectral radius and the Co-PI energy of graphs", Spectra of graphs and applications, SGA 2016, May 18-20, Belgrade-Serbia.

Kaya, E. and Maden, A. D., "On the Co-PI spectral radius of graphs", 4th International Conference on Mathematics & Information Science, ICMIS 2015, Cairo-Egypt.