



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARDAKİ BAZI PARAMETRELER VE ARALARINDAKİ BAĞINTILAR

Ezgi KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2013
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFLARDAKİ BAZI PARAMETRELER VE ARALARINDAKİ BAĞINTILAR

Ezgi KAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. A. Dilek MADEN

2013, 43 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. A. Dilek MADEN
Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK
Yrd. Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

Bu çalışma basit, bağlantılı bir grafın Co-PI, revised-Szeged, Szeged ve vertex-PI indeksleri ile Co-PI matrisinin en büyük özdeğerine sınırlar bulmak için hazırlanmıştır. İlk olarak, bir grafın revised-Szeged, Szeged ve vertex-PI indeksleri için sınırlar bulunmuş, bu indeksler arasında bağıntılar kurulmuştur. Daha sonra bir grafın Co-PI indeksi için Szeged ve vertex- PI indeksleri de içeren sınırlar bulunmuş, son olarak bir grafın Co-PI matrisinin en büyük özdeğeri için graf ailesi karakterize edilmiştir. Sonuç olarak elde edilen bu sınırlar örnekler üzerinde değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Co-PI indeks, Co-PI matris, Co-PI özdeğerleri, revised- Szeged indeks, Szeged indeks, vertex PI indeks.

ABSTRACT

MS THESIS

SOME PARAMETERS IN GRAPHS AND RELATIONS BETWEEN THIS PARAMETERS

Ezgi KAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. A. Dilek MADEN

2013, 43 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. A. Dilek MADEN
Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK
Assist. Prof. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

This study is prepared to find bounds for the Co-PI, revised-Szeged, Szeged and vertex-PI indices with the largest Co-PI eigenvalue of a simple connected graph. It has been obtained bounds for the revised-Szeged, Szeged ve vertex-PI indices of a graph and it has been established relations between these indices. Later, it has been obtained bounds for the Co-PI index in terms of also Szeged ve vertex-PI indices. Finally, it has given a characterization of the graph family for the largest Co-PI eigenvalue. Consequently, it has been given some examples for these above results that are obtained.

Keywords: Co-PI index, Co-PI matrix, Co-PI eigenvalues, revised- Szeged index, Szeged index, vertex-PI index.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Doç. Dr. A. Dilek MADEN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak konuların öneminden bahsedilmiş ve çalışmamızda yararlanacağımız temel tanım ve teoremlerle birlikte literatür hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde basit, bağlantılı bir grafın *revised-Szeged*, *Szeged* ve *vertex-PI indeksleri* için sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde basit, bağlantılı bir grafın *Co-PI indeksi* için sınırlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde basit bağlantılı bir grafın en büyük *Co-PI özdeğeri* için sınırlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, bulunan sınırlar örnekler üzerinde irdelenmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışma süresince bana yol gösteren ve tüm kolaylığı sağlayan danışman hocam sayın Doç. Dr. A. Dilek MADEN'e ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK'e ve her zaman yanımda olan sevgili aileme ayrıca desteğini esirgemeyen arkadaşım İlkay DOĞAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ezgi KAYA
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Graf Teori ve Uygulama Alanları 1
1.2. Tanımlar ve Parametreler 2
1.2.1. Graf Tanımı 2
1.2.2. Yol ve Bağlantılılık 4
1.2.3. Özel Graflar 5
1.2.4. Graf Parametreleri 7
1.2.5. Graf İşlemleri 8
1.2.6. Perron Frobenius Teoremi 9
1.2.7. Bazı Reel Sayı Eşitsizlikleri 11
1.3. Kaynak Araştırması 12

2. BİR GRAFIN SZEGED, revised-SZEGED ve vertex-PI İNDEKSLERİ İÇİN SINIRLAR **14**

3. BİR GRAFIN Co-PI İNDEKSİ İÇİN SINIRLAR **21**

4. BİR GRAFIN Co-PI EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR **28**

5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA **36**

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **39**

6.1 Sonuçlar 39
6.2 Öneriler 39

KAYNAKLAR **40**

ÖZGEÇMİŞ **43**

SİMGELER

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
G	Herhangi bir graf
$\overline{G}$	G grafının tamamlayıcısı
$G-f$	G den f kenarının çıkarılmasıyla elde edilen graf
$V(G)$	G grafının nokta kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$\Delta(G)$	G grafındaki maksimum derece
$\delta(G)$	G grafındaki minimum derece
$t(G)$	G grafındaki üçgen sayısı
$t(e)$	Bir e kenarının üstünde bulunduğu üçgen sayısı
$W(G)$	G grafının Wiener indeksi
$PI_v(G)$	G grafının $vertex-PI$ indeksi
$Sz(G)$	G grafının *Szeged* indeksi
$Sz^*(G)$	G grafının *revised-Szeged* indeksi
$M_1(G)$	G grafının *birinci Zagreb* indeksi
$M_2(G)$	G grafının *ikinci Zagreb* indeksi
$Co-PI_v(G)$	G grafının $Co-PI$ indeksi
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
M_{CPI}	$Co-PI$ ile ağırlıklandırılan matris
$\lambda_i(G)$	$A(G)$ matrisinin $i.$ özdeğeri
$\sigma_i'(G)$	M_{CPI} matrisinin $i.$ özdeğeri
$çap(G)$	G grafının çapı
$\deg(v_i)$	v_i noktasının derecesi
$v_i \sim v_j$	v_i ve v_j noktaları komşu
$iz(A)$	A matrisinin izi
$N(G)$	$M_{CPI}^{\,2}$ matrisinin izi
K_n	n noktalı tam graf

S_n	n noktalı yıldız graf
T	Ağaç
$M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}$	G grafının $Co-PI$ *derece dizisi*
$T_1, T_2, ..., T_n$	G grafının *ikinci* $Co-PI$ *derece dizisi*

1. GİRİŞ

1.1. Graf Teori ve Uygulama Alanları

Graf teori, çizgi kuramı olarak bilinen 1736 yılında ünlü matematikçi *Leonhard Euler*'in ünlü problem Könisberg köprüsünü çözmesiyle başlayan matematiğin bir dalıdır. Ortaya çıkış tarihi 1736 olmasına rağmen ancak 20. yüzyılda büyük bir gelişme göstermiştir. Bu gelişmenin en önemli nedeni bir çok uygulama alanı olmasıdır. Bu uygulamalar; fizik, kimya, genetik, sosyoloji, ekonomi, yönetim bilimi gibi alanları kapsamaktadır. Bunların yanı sıra grup teori, matris teori, olasılık ve topoloji gibi matematiğin diğer bilim dalları ile ortak alana sahip olması da graf teorinin önemini arttırmaktadır.

Teorik kimyada, topolojik indeksler de denilen moleküler yapı tanımlayıcıları fizikokimyasal, farmakolojik, toksikolojik, biyolojik ve kimyasal bileşiklerin diğer özelliklerini modelleme için kullanılır. Özellikle nokta ve kenar uzaklığına dayalı olan bu indekslerin çeşitli türleri vardır. Tartışmasız, bu indekslerden en iyi bilineni *Wiener indekstir*. Diğer bazı topolojik indeksler *vertex-PI indeks*, *Szeged indeks*, *Revised-Szeged indeks* ve *Co-PI indekstir*. *Co-PI indeks*, F. Hassani ve arkadaşları (2010) tarafından tanımlanmıştır.

Graf teorinin en önemli alt dallarından biri spektral graf teoridir. Spektral graf teori, bilgisayar bilimleri, kimya ve kodlama teorisi gibi birçok alanda uygulanabilir olması açısından discrete matematiğin önemli bir parçasıdır. Bu alanda grafın bazı matrislerinin özdeğerleri ve özvektörleri üzerine çalışılır. Bu çalışmada en önemli amaç, grafın matrislerinden elde edilen spektral bilgiler sayesinde grafın belli başlı özellikleri hakkında bilgi edinmektir.

Kombinatorikler, kombinasyonel optimizasyon ve graf teoride özdeğer metodlarının uygulamaları çok uzun bir geçmişe sahiptir. Özdeğerlerin çok önemli bir kullanımı 1979 da L. Lovász tarafından elde edilen theta fonksiyonunun Lovász notasyonudur. Bu notasyon kullanılarak beş noktalı devir için Shannon kapasite problemi çözülmüştür. Theta fonksiyonu mükemmel grafların kromatik sayısını hesaplamak için bilinen bir yol sağlar. Random (0,1) –matrislerinin özdeğerleri, random graflarının theta fonksiyonunun davranışını 1984 de analiz eden, Juhász tarafından çalışılmıştır. Grafların izoperimetrik özellikleri ve onların özdeğerleri, randomize olmuş

çeşitli algoritmaların şekillendirilmesinde önemli rol oynar. Bu uygulamalar hızlı bir şekilde karışan Markov zincirlerine dayanır. Özdeğerlerin uygulamalarının kombinatöriel optimizasyon problemlerinde de önemi vardır. Onlardan sadece birkaç tanesinden söz edelim. 1987–1992 de Burkard, Finke, Rendll, Wolkowicz kuadratik işaret problemi ve genel graf parçalanış problemlerinde; 1993 de Delorme ve Poljak max-cut probleminde ve 1992–1993 de Juvan ve Mohar etiketleme problemlerinde özdeğerleri kullandılar. Kombinasyonel optimizasyonda özdeğerleri kullanmanın pek çok yolu vardır. Bunlardan biri de, ilgili matrislerin özdeğerlerini içeren belirli sınırların formülleştirilmesidir.

Şimdi bu çalışmada yararlanılacak bazı temel kavram ve teoremleri verelim. Detaylı bilgiler için [1,4,5,6,11,14,18,21] referanslarına bakılabilir.

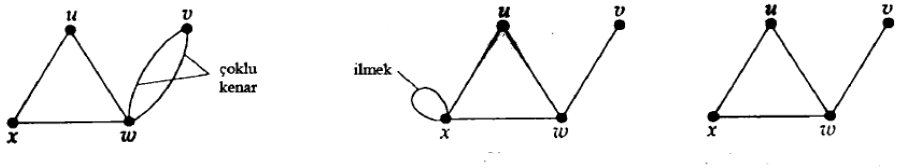
1.2. Tanımlar ve Parametreler

1.2.1. Graf Tanımı

Bir graf; V boş olmayan bir küme ve E, her elemanı V nin farklı elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan çiftlerden oluşan bir küme olmak üzere V ve E kümelerinden oluşur, $G=(V,E)$ biçiminde gösterilir. V nin elemanlarına *noktalar* ve E nin elemanlarına *kenarlar* denir.

Bir grafta aynı nokta çiftini birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu* kenar, bir noktayı kendisiyle birleştiren kenara *ilmek*, çoklu kenar ve ilmeği olmayan grafa ise *basit graf* denir. Çoklu kenar ve ilmeklere sahip basit grafa *çoklu graf* denir. Bu çalışmamızda basit graf kullanacağız.

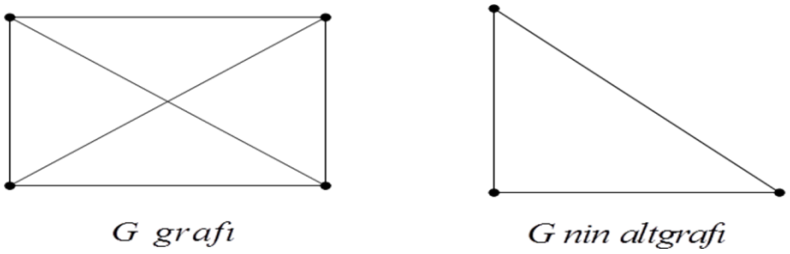
Aşağıda sırasıyla çoklu kenar, ilmek ve basit graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1.1

G herhangi bir graf olmak üzere, nokta kümesi G nin nokta kümesinin alt kümesi ve kenar kümesi de G nin kenar kümesinin alt kümesi olan grafa G nin *alt grafı* denir.

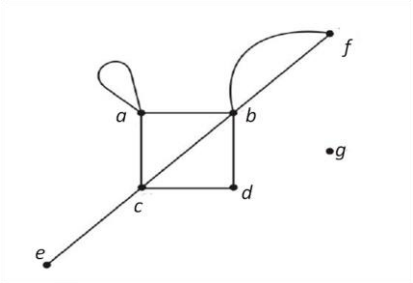
Aşağıda sırasıyla bir G grafı ve bu G grafının alt grafı verilmiştir.



Şekil 1.2

Bir grafta herhangi iki noktanın oluşturduğu bir kenar varsa bu noktalara *komşu noktalar* denir ve $u \square v$ şeklinde gösterilir. Aksi durumda *komşu değildir* denir ve $u \not\square v$ şeklinde gösterilir. Herhangi bir v_i noktasına komşu olan noktaların sayısına v_i noktasının derecesi denir ve $\deg(v_i)$ ile gösterilir. Derecesi 0 (sıfır) olan noktaya *izole nokta*, derecesi 1 (bir) olan noktaya ise *pendant nokta* denir.

Aşağıdaki grafta noktaların dereceleri $\deg(a)=4$, $\deg(b)=5$, $\deg(c)=4$, $\deg(d)=2$, $\deg(e)=1$, $\deg(f)=2$ ve $\deg(g)=0$ dır. Burada e noktası *pendant*, g noktası ise *izole* noktadır. Bu grafta d noktası b ve c noktaları ile komşu, diğer noktalarla komşu değildir.



Şekil 1.3

Ayrıca bir grafın noktalarının dereceleri toplamı kenar sayısının iki katı olup, tek dereceli noktaların sayısı da çifttir.

1.2.2. Yol ve Bağlantılılık

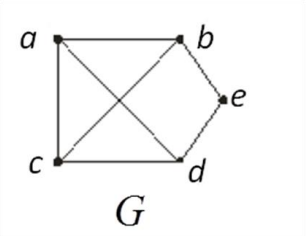
G grafının nokta kümesi $V(G)=\{a,b,c,d,e,f,...,l,m,n\}$ olsun. Ardı ardına k kenarın dizilmesiyle elde edilen

$$\underbrace{ab,bc,cd,de,...,lm,mn}_{k}$$

formuna G de k uzunluğunda bir *yürüme* denir. Bu yürüme *abcde...lmn* şeklinde gösterilir.

Herhangi bir G grafında; aynı noktada başlayan ve biten bir yürümeye *kapalı yürüme*, bütün noktaları ve kenarları birbirinden farklı olan yürümeye *yol* ve bütün kenarları, başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları farklı olan kapalı yürümeye ise *devir* denir.

Aşağıdaki gibi bir G grafı verilsin.

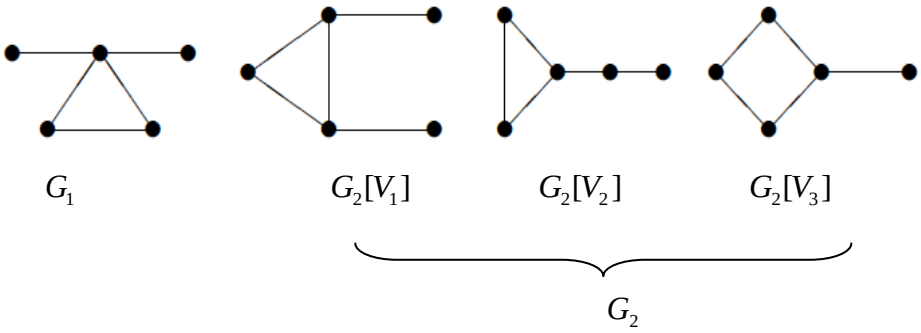


Şekil 1.4

Bu grafta *abedac* 6 uzunluğunda bir yürüme, *adcba* kapalı bir yürüme, *acbed* bir yol ve *abca* bir devirdir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olsun. G grafının v_i ve v_j noktaları arasında bir yol varsa bu noktalara *bağlantılıdır* denir. Eğer G grafındaki bütün nokta çiftleri arasında bir yol var ise G grafına bağlantılı graf denir. Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $V_1,V_2,...,V_r$, V nin denklik sınıfları olmak üzere $G[V_1],G[V_2],...,G[V_r]$ alt graflarına G grafının *bileşenleri* denir. $r=1$ olması durumunda G grafı *bağlantılıdır,* aksi takdirde G grafı r tane bileşene sahip *bağlantısız* bir graftır.

Aşağıdaki G_1 grafı bağlantılı, G_2 grafı ise $G_2[V_1]$, $G_2[V_2]$ ve $G_2[V_3]$ bileşenleri ile bağlantısız bir graftır.

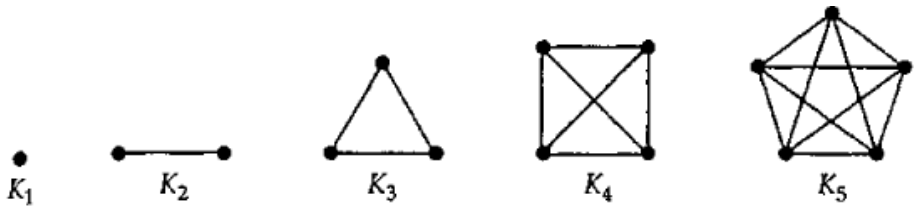


Şekil 1.5

1.2.3. Özel Graflar

Şimdi çalışmamızda kullanacağımız bazı özel grafların tanımlarını verelim.

Her bir nokta çifti birbirine komşu olan grafa *tam graf* denir, n noktalı bir *tam graf* K_n ile gösterilir. Aşağıda bazı *tam graf* örnekleri verilmiştir.



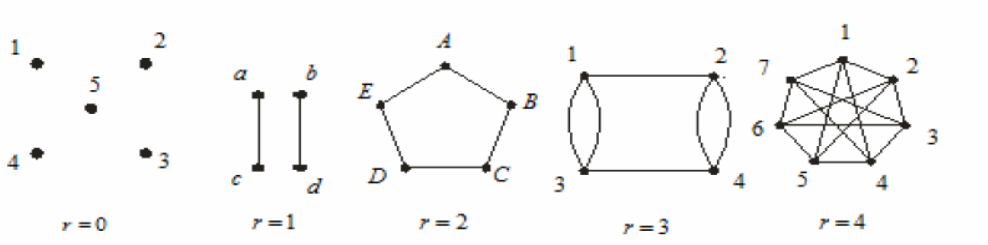
Şekil 1.6

Hiç bir kenarı olmayan grafa *boş graf* denir. Aşağıda 6 noktalı bir *boş graf* örneği verilmiştir.



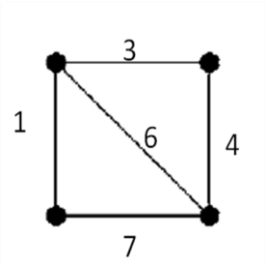
Şekil 1.7

Her bir noktasının derecesi aynı olan grafa *regüler graf* denir. Özel olarak grafın her bir noktasının derecesi r ise, bu grafa $r-$ *regüler graf* denir. Aşağıda bazı regüler graf örnekleri verilmiştir.



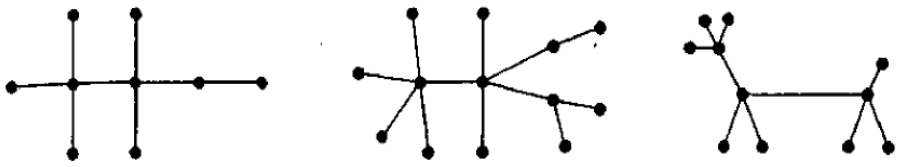
Şekil 1.8

Bir grafın her bir v_iv_j kenarı, negatif olmayan bir reel sayı ile işaretli ise, bu grafa ağırlıklı graf denir. Verilen bu v_iv_j kenarına ait ağırlık özel olarak w_{ij} olarak gösterilir. Aşağıdaki graf, kenarları sayılarla ifade edilen ağırlıklı bir graftır.



Şekil 1.9

Hiç deviri olmayan bağlantılı bir grafa *ağaç* denir. Aşağıda bazı ağaç örnekleri verilmiştir.



T_1 T_2 T_3

Şekil 1.10

Sadece bir noktanın, graftaki diğer bütün noktalara komşu olduğu ağaca *yıldız graf* denir. *n* noktalı bir yıldız graf S_n ile gösterilir. Aşağıda bazı yıldız graf örnekleri verilmiştir.



Şekil 1.11

1.2.4. Graf Parametreleri

Çalışmamızda sıkça kullanacağımız tanımları verelim.

G grafındaki herhangi bir v_i noktasının derecesi, v_i noktasının oluşturduğu kenarların sayısıdır ve $\deg(v_i)$ ile gösterilir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin herhangi v_i ve v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğuna bu iki nokta arasındaki *uzaklık* denir ve $d(v_i,v_j)$ ile gösterilir.

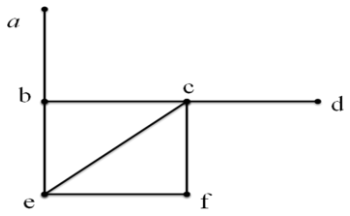
Bir G grafının her nokta çifti arasındaki uzaklıkların maksimumuna G grafının *çapı* denir ve $çap(G)$ ile gösterilir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi

$$A(G)=\left[a_{ij}\right]=\begin{cases}1, & v_i \square v_j \\ 0, & \text{aksi durumda}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $n\times n$ simetrik bir matristir.

Aşağıdaki gibi bir G grafı verilsin.



G

Şekil 1.12

Bu grafın komşuluk matrisi,

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

olur.

G grafı, komşuluk matrisi $A(G)$ olan bir graf olsun. Bu takdirde, $A(G)$ nin özdeğerlerine G grafının özdeğerleri denir. Şekil 1.2.1 deki grafın özdeğerleri aşağıdaki gibidir.

$$0.3063581913, 0.7726747948, 2.753714823, -0.6092797168, -1.329264626, -1.894203466$$

1.2.5. Graf İşlemleri

G basit bir graf olsun. $\bar{G}$ grafı, G grafının *tamamlayıcısını* göstersin. $\bar{G}$ grafının nokta kümesi G grafının nokta kümesi ile aynıdır. $\bar{G}$ de u ile v noktalarının komşu olması için gerek ve yeter şart G de bu noktaların komşu olmamasıdır. G grafı bağlantılı iken $\bar{G}$ grafı bağlantılı olmayabilir. Aşağıda bir G grafı ve bu grafın tamamlayıcısını gösteren bir örnek verilmiştir.



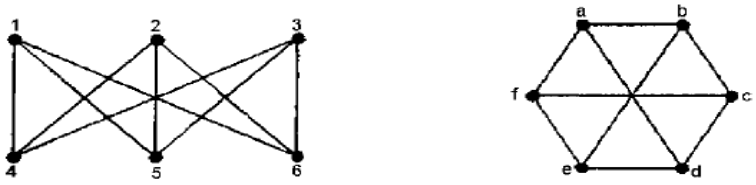
G $\qquad\qquad$ $\bar{G}$

Şekil 1.13

G ve H, nokta kümeleri $V(G)$ ve $V(H)$ olan iki graf olsun. Her $u,v \in V(G)$ için,

$$u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v)$$

şeklinde 1-1 örten bir $f : V(G) \to V(H)$ dönüşümü varsa, G ve H graflarına *izomorfik graflar* denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir. Aşağıdaki iki graf birbirine izomorftur.



G H

Şekil 1.14

1.2.6. Perron Frobenius Teoremi

Bu alt bölümde, önemli olan ve daha sonra bazı sonuçlarımızı vermek için kullanacağımız birkaç Lineer Cebir konusundan bahsedelim.

$A = [a_{ij}]$ matrisi, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ için

$$a_{ij} \geq 0$$

oluyorsa, A matrisine *negatif olmayan bir matris* denir. Aşağıdaki A matrisi negatif olmayan bir matrise örnektir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Her bir satırı ve her bir sütunundaki bir elemanı 1(bir) ve diğerleri 0 (sıfır) olan matrislere *permütasyon matris* denir. Ayrıca permütasyon matrisler n tane elemanın özel bir permütasyonunu temsil eder.

Aşağıdaki matris, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ permütasyonuna karşılık gelen bir permütasyon matrisidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_{m,n}$ kümesi, $m \times n$ tipindeki matrislerin ve M_n ise $n \times n$ tipindeki kare matrislerin kümesi olmak üzere aşağıdaki tanımları verelim.

$A \in M_n$ olsun.

(a) $n = 1$ ve $A = 0$ ise, ya da

(b) $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ olacak şekilde r tamsayıları için $B \in M_r$, $D \in M_{n-r}$, $C \in M_{r,n-r}$ ve $0 \in M_{n-r,r}$ olmak üzere

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $P \in M_n$ permütasyon matrisi varsa, A matrisine *indirgenebilir matris* denir.

$A \in M_n$ olsun. Eğer A matrisi indirgenebilir matris değilse bu takdirde A matrisine *indirgenemez matris* denir.

Şimdi indirgenemez negatif olmayan matrisler için Perron Frobenius Teoremini verelim.

Teorem 1.2.6.1. $A \in M_n$ olsun. Eğer A indirgenemez, negatif olmayan bir matris ise

(a) $\lambda > 0$ dır.

(b) λ, A matrisinin bir özdeğeridir.

(c) $Ax = \lambda x$ ifadesinde $x > 0$ dır.

(d) λ, A matrisinin katlı olmayan bir özdeğeridir.

(e) A matrisinin her μ özdeğeri için $|\mu| \leq \lambda$ dır.

Burada λ özdeğerine A matrisinin *Perron özdeğeri* ve bu özdeğere karşılık gelen özvektöre de A matrisinin *Perron özvektörü* denir.

1.2.7. Bazı Reel Sayı Eşitsizlikleri

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı eşitsizlikleri vereceğiz.

Teorem 1.2.7.1. (Cauchy- Schwarz Eşitsizliği) $a_1, a_2, ..., a_n$ ve $b_1, b_2, ..., b_n$ reel sayı dizileri olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{1.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart her bir $1 \leq i \leq n$ için $a_i = rb_i$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Teorem 1.2.7.2. (Aritmetik- Geometrik Ortalama Eşitsizliği) Negatif olmayan *n* tane $a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayıları için

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 . a_2 ... a_n} \tag{1.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = ... = a_n$ olmasıdır.

Teorem 1.2.7.3. (Pólya-Szegö Eşitsizliği) $1 \leq i \leq n$ için $a \leq a_i \leq A$ ve $b \leq b_i \leq B$ ile $a < A$ ve $b < B$ olacak şekilde $a_1, a_2, ..., a_n$ ve $b_1, b_2, ..., b_n$ reel sayı dizileri olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \tag{1.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart

$$p = \frac{\frac{A}{a}}{\frac{A}{a} + \frac{B}{b}} n \quad \text{ve} \quad q = \frac{\frac{B}{b}}{\frac{A}{a} + \frac{B}{b}} n$$

sayılarının tamsayı olması, $a_1 = a_2 = ... = a_p = a$, $a_{p+1} = a_{p+2} = ... = a_n = A$, $b_1 = b_2 = ... = b_q = B$ ve $b_{q+1} = b_{q+2} = ... = b_n = b$ olmasıdır.

Teorem 1.2.7.4. (Ozeki Eşitsizliği) $1 \le i \le n$ için $0 \le r_1 \le a_i \le R_1$ ve $0 \le r_2 \le b_i \le R_2$ olacak şekilde $a_1, a_2, ..., a_n$ ve $b_1, b_2, ..., b_n$ reel sayı dizileri olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \frac{1}{4} n^2 \left(R_1 R_2 + r_1 r_2\right)^2 \qquad (1.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

1.3. Kaynak Araştırması

Bu bölümde kaynaklar kısmında kullandığımız çalışmaların kısa bir özetini vereceğiz.

S. Klavzar ve arkadaşları (1996) çalışmalarında, grafların kartezyen çarpımı için bir formül vermiş ve *Szeged indeks* ile *Wiener indeks* arasında ilişki kurmuşlardır.

K. C. Das ve R. B. Bapat (2008) çalışmalarında, ağırlıklı grafın en büyük özdeğeri için üst sınır elde etmiş ve bu sınırın sağlandığı grafları karakterize etmişlerdir.

M. H. Khalifeh ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, grafların çarpımları için *PI indeksi* hesaplamışlardır.

G. Indulal (2009) çalışmasında, uzaklık derece dizisi $D_1, D_2, ..., D_n$ ve ikinci uzaklık derece dizisi $T_1, T_2, ..., T_n$ olan n noktalı bir G grafının uzaklık enerjisi için bu değerlerin kareleri toplamını içeren bir üst sınır elde etmiştir.

K. C. Das ve I. Gutman (2009) çalışmalarında, *Szeged indeksi* incelemiş, bu indeks için sınırlar ve *Nordhauss-Gaddum* tip sınır elde etmişlerdir.

K. C. Das (2009) çalışmasında, *Zagreb indeksleri* arasındaki eşitsizliğin her zaman sağlanmadığını göstermiştir.

M. H. Khalifeh ve arkadaşları (2009) çalışmalarında, uzaklık bazlı indekslerden olan *Szeged* ve *Wiener indekslerini* incelemiş ve bunlar arasında ilişki kurmuşlardır.

M. Mogharrab ve arkadaşları (2009) çalışmalarında, *Zagreb indeksten* yararlanarak *vertex-PI indeks* için sınır elde etmişlerdir.

A. Ilić (2010) çalışmasında, *vertex-PI* ve *Szeged indeksleri* için sınırlar bulmuş ve bunlar arasında bağıntı elde etmiştir.

G. H. Fath-Tabar ve arkadaşları (2010) çalışmalarında, *PI* ve *Szeged indeksleri* arasında eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Fath-Tabar ve arkadaşları (2010) çalışmalarında, bir grafın *Szeged* ve *Laplacian Szeged* matrisini incelemiş, bu matrislerin özdeğerleri için sınırlar elde etmişlerdir.

F. Hassani ve arkadaşları (2010) çalışmalarında, yeni bir indeks olan *Co-PI* indeksi tanımlamış ve bu indeks ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

A. D. Maden ve arkadaşları (2011) çalışmalarında, bir grafın uzaklık matrisinin en büyük özdeğeri için sınırlar bulmuş ve bu sınırı sağlayan grafları karakterize etmişlerdir.

A. Ilić ve arkadaşları (2011) çalışmalarında, *birinci Zagreb indeks* için üst sınır alde etmişlerdir.

A. Ilic ve N. Milosavljevic (2011) çalışmalarında, *vertex-PI indeks* ile ağırlıklandırılmış grafları incelemiş ve bu indeks için sınırlar elde etmişlerdir.

R. Xing ve B. Zhou (2011) çalışmalarında, unicyclic grafların *revised-Szeged* indeksi için sınırlar bulmuşlardır.

B. Horoldagva ve K. C. Das (2012) çalışmalarında, *Zagreb indekslerini* karşılaştırmış ve buldukları ilişki altında özel grafları göstermişlerdir.

G. Su ve arkadaşları (2012) çalışmalarında, grafların k- ayrışımlarında *Zagreb indeks* için *Nordhaus–Gaddum* tip eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Z. Yarahmadi ve A. R. Ashrafi (2012) çalışmalarında, *Szeged, vertex-PI,* birinci *ve ikinci Zagreb indeksleri* grafların corona çarpımı için hesaplamışlardır.

A. D. Maden ve arkadaşları (2013) çalışmalarında, direnç- mesafe matrisinin en büyük özdeğeri için sınırlar ve bu özdeğer için *Nordhauss-Gaddum* tip sınır elde etmişlerdir.

G. Su ve arkadaşları (2013) çalışmalarında, bağlantılı bir *G* grafının *Co-PI indeksi* için eş değer bir tanım vermiş, bu indeks için eşitlikler ile bir grafın *Co-PI* matrisi ve özdeğerleri için eşitlikler elde etmişlerdir.

2. BİR GRAFIN SZEGED, revised-SZEGED ve vertex-PI İNDEKSLERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde *çapı* 2 olan bir graf için, *çapı* değiştirmeyecek bir şekilde *üçgen* üzerindeki kenarları çıkarıp, bu yeni bağlantılı grafın *vertex PI* ve *Szeged indeksleri* için sınırlar bulacağız. Daha sonra *Ozeki eşitsizliğini* kullanarak *vertex PI* ve *Szeged indeksleri* arasında bir ilişki kuracağız. Ardından *revised − Szeged indeksi* için *ikinci Zagreb indeksini* içeren bir eşitlik, *vertex PI* ve *Szeged indekslerini* içeren bir sınır bulacağız.

Şimdi bu bölüm için bilinmesi gereken tanımları verelim. Detaylı bilgi için [12] referansına bakılabilir.

$G=(V,E)$ basit bağlantılı bir graf ve $e=uv$, G grafında herhangi bir kenar olsun. u noktasına olan uzaklığı v noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaların sayısı $n_u(e)$, v noktasına olan uzaklığı u noktasına olan uzaklığından küçük olan noktaların sayısı $n_v(e)$ ve u noktasına olan uzaklığı v noktasına olan uzaklığına eşit olan noktaların sayısı $n_0(e)$ ile gösterilir. Bu sayıların kümesini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$n_u(e)=|N_u(e)|=\left|\{z\in V(G): d(z,u)<d(z,v)\}\right|$$

$$n_v(e)=|N_v(e)|=\left|\{z\in V(G): d(z,v)<d(z,u)\}\right|$$

$$n_0(e)=|N_0(e)|=\left|\{z\in V(G): d(z,u)=d(z,v)\}\right|$$

Buradan yola çıkarak *vertex PI* (PI_v), *Szeged* (Sz) ve *revised-Szeged* (Sz^*) *indeksleri* sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)+n_v(e) \tag{2.1}$$

$$Sz(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)n_v(e) \tag{2.2}$$

$$Sz^*(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)+\frac{n_o(e)}{2}\right)\left(n_v(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right) \tag{2.3}$$

G grafındaki bir v noktasının derecesi $\deg(v)$ olmak üzere, *birinci Zagreb indeksi* ($M_1(G)$) ve *ikinci Zagreb indeksinin* ($M_2(G)$) tanımları sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg^2(v) \tag{2.4}$$

$$M_2(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} \deg(u)\deg(v) \tag{2.5}$$

Çalışmamızın bu bölümünde kullanacağımız G ve $G-f$ grafları, bağlantılı graflar olacaktır.

Şimdi ana sonuçlarımızı verelim.

İlk olarak sınırımızın ispatında kullanacağımız lemmayı verelim.

Lemma 2.1. [17] G grafı, *çapı* 2 olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$PI_v(G) = M_1(G) - 6t(G) \tag{2.6}$$

eşitliği sağlanır.

Bu bölümde bir K_3 tam grafını, *üçgen* olarak adlandıracağız. Graftaki üçgen sayısını $t(G)$ ile ve bir e kenarının üzerinde bulunduğu üçgen sayısını $t(e)$ ile gösterelim.

Teorem 2.1. Bağlantılı, *çapı* 2 olan G grafı ve $G-f$ grafı için

$$PI_v(G-f) - PI_v(G) < 6t(G) \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada f, üçgen üzerinde olan bir kenardır.

İspat: $e = uv \in E(G)$, tam olarak $t(e)$ *üçgene* ait olan herhangi bir kenar olsun. v noktasına komşu olup u noktasına komşu olmayan noktalar v ye u dan daha yakındır. Benzer şekilde u noktasına komşu olup v noktasına komşu olmayan noktalar u ya v den daha yakındır. $çap(G) = 2$ olduğundan, u ya da v ye komşu olmayan bir w noktası için $d(u,w) = d(v,w) = 2$ eşitliği sağlanır. $n_u(e) + n_v(e) = \deg(u) + \deg(v) - 2t(e)$ eşitliğini düşünelim. Grafın bağlantılılığını ve çapını değiştirmeyecek şekilde üçgen üzerindeki kenarları çıkarınca, $n_u(e) + n_v(e) = \deg(u) + \deg(v)$ eşitliğine ulaşırız. Buradan,

$$\begin{aligned} PI_v(G-f) &= \sum_{e=uv\in E(G-f)} n_u(e)+n_v(e) \\ &= \sum_{e=uv\in E(G-f)} \deg(u)+\deg(v) \\ &< \sum_{v\in V(G)} \deg^2(v) \\ &= M_1(G) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1. den yararlanarak sonuca ulaşırız. ■

Şimdi Teorem 2.1.4. ün ispatında kullanacağımız lemmayı verelim.

Lemma 2.2. [17] *G* grafı, her kenarı tam olarak *t* sayıda *üçgene* ait, bağlantılı ve *çapı* 2 olan bir graf olsun. Bu durumda

$$Sz(G) = M_2(G) - tM_1(G) + mt^2 \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2. G , her kenarı tam olarak t tane *üçgene* ait, bağlantılı ve *çapı* 2 olan bir graf olsun. Bu durumda

$$Sz(G-f) - Sz(G) < t(M_1(G) - mt) \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada f , üçgen üzerinde olan bir kenardır.

İspat: $e = uv \in E(G)$, tam olarak $t(e)$ sayıda *üçgene* ait olan herhangi bir kenar olsun. v noktasına komşu olup u noktasına komşu olmayan noktalar v ye u dan daha yakındır. Benzer şekilde u noktasına komşu olup v noktasına komşu olmayan noktalar u ya v den daha yakındır. $çap(G) = 2$ olduğundan, u ya da v ye komşu olmayan bir w noktası için $d(u,w) = d(v,w) = 2$ eşitliği sağlanır. $n_u(e) = \deg(u) - t(e)$ ve $n_v(e) = \deg(v) - t(e)$ eşitliklerini düşünelim. Grafın bağlantılılığını ve çapını değiştirmeyecek şekilde üçgen üzerindeki kenarları çıkarınca, $n_u(e) = \deg(u)$ ve $n_v(e) = \deg(v)$ eşitliklerine ulaşırız. Buradan,

$$\begin{aligned} Sz(G-f) &= \sum_{e=uv\in E(G-f)} n_u(e)n_v(e) \\ &= \sum_{e=uv\in E(G-f)} \deg(u)\deg(v) < M_2(G) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.2. den sonuca ulaşırız. ■

Şimdi *Ozeki eşitsizliğinden* yararlanarak, *vertex PI* ve *Szeged* indeksleri arasında bir ilişki kuracağız.

Teorem 2.3. *G* grafı, *n* noktalı ve *m* kenarlı, bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda,

$$4mSz(G) \le \frac{1}{4}m^2(n-2)^2 + PI_v^{\,2}(G) \qquad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu $m=0$ ya da $n=2$ olduğu zaman sağlanır.

İspat: $e=uv \in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. *Aritmetik- Geometrik Ortalama eşitsizliğinden*

$$4\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)n_v(e) \le \sum_{e=uv\in E(G)} (n_u(e)+n_v(e))^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. *Ozeki eşitsizliğindeki* değerleri $i=1,2,...,m$ için $a_i=1$ ve $b_i = n_u(e_i)+n_v(e_i)$ şeklinde verirsek,

$$\left(\sum_{e=uv\in E(G)} 1^2\right)\left(\sum_{e=uv\in E(G)} \left(n_u(e)+n_v(e)\right)^2\right) - \left(\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)+n_v(e)\right)^2 \le \frac{1}{4}m^2(R_1R_2-r_1r_2)^2$$

elde ederiz. $a_i=1$ aldığımız için $R_1=r_1=1$ olur. b_i nin maksimum ve minimum sınırını değerlendirdiğimizde, $r_2 = \min_{e=uv\in E(G)} n_u(e)+n_v(e) \ge 2$ ve $R_2 = \max_{e=uv\in E(G)} n_u(e)+n_v(e) \le n$ diyebiliriz. Buradan,

$$4m\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)n_v(e) \le \frac{1}{4}m^2(n-2)^2 + \left(\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)+n_v(e)\right)^2$$

elde ederiz. Eşitsizliği düzenlediğimizde,

$$4mSz(G) \le \frac{m^2}{4}(n-2)^2 + PI_v^{\,2}(G)$$

sonucuna ulaşırız. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $m=0$ (ki bu durumda $PI_v(G)=Sz(G)=0$ olur) ya da $n=2$ (ki bu durumda $n_u(e)=n_v(e)=1$ olur) olmasıdır.

■

Aşağıdaki sonucu *revised-Szeged* indeksin tanımını kullanarak verebiliriz.

Teorem 2.4. G , her kenarı tam olarak $t(e)$ tane *üçgene* ait, bağlantılı ve *çapı* 2 olan bir graf olsun. Bu durumda,

$$Sz^*(G) = \frac{1}{4}n^2m + \frac{1}{2}M_2(G) - \frac{1}{4}\sum_{v\in V(G)} \deg^3(v) \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $e = uv \in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. $çap(G) = 2$ olduğu için $n_u(e) = \deg(u) - t(e)$ ve $n_v(e) = \deg(v) - t(e)$ eşitliklerini yazabiliriz. $n_0(e) = n - n_u(e) - n_v(e)$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\left(n_u(e) + \frac{n_0(e)}{2}\right)\left(n_v(e) + \frac{n_0(e)}{2}\right) &= \left(\deg(u) - t(e) + \frac{n-[\deg(u)-t(e)]-[\deg(v)-t(e)]}{2}\right)\\ &\quad \left(\deg(v) - t(e) + \frac{n-[\deg(u)-t(e)]-[\deg(v)-t(e)]}{2}\right)\\ &= \left(\frac{n+\deg(u)-\deg(v)}{2}\right)\left(\frac{n+\deg(v)-\deg(u)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[n^2 + 2\deg(u)\deg(u) - \left(\deg^2(u) + \deg^2(v)\right)\right]\end{aligned}$$

yazabiliriz. Kenarlar üzerinden toplam aldıktan sonra istenilen sonuca ulaşırız. ■

Şimdi *revised-Szeged* indeks için aşağıdaki sınırı verelim.

Teorem 2.5. G bir graf olmak üzere,

$$\frac{1}{4}(n^2m + Sz(G) - PI_v{}^2(G)) \le Sz^*(G) \le \frac{1}{4}n^2m + Sz(G) - m \tag{2.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli şart G grafının boş graf olmasıdır.

İspat: Öncelikle alt sınırı bulalım. $e = uv \in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. $n_0(e) = n - n_u(e) - n_v(e)$ eşitliğini kullanalım. Buradan,

$$\begin{aligned}\left(n_u(e) + \frac{n_0(e)}{2}\right)\left(n_v(e) + \frac{n_0(e)}{2}\right) &= \left(n_u(e) + \frac{n - n_u(e) - n_v(e)}{2}\right)\left(n_v(e) + \frac{n - n_u(e) - n_v(e)}{2}\right)\\ &= \left(\frac{n + n_u(e) - n_v(e)}{2}\right)\left(\frac{n - n_u(e) + n_v(e)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(n^2 - \left(n_u{}^2(e) + n_v{}^2(e)\right) + 2n_u(e)n_v(e)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(n^2 + 4n_u(e)n_v(e) - \left(n_u(e) + n_v(e)\right)^2\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bütün kenarlar üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)\left(n_v(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{e=uv\in E(G)}n^2+4\sum_{e=uv\in E(G)}n_u(e)n_v(e)-\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)+n_v(e)\right)^2\right)$$

$$\geq\frac{1}{4}\left[\sum_{e=uv\in E(G)}n^2+4\sum_{e=uv\in E(G)}n_u(e)n_v(e)-\left(\sum_{e=uv\in E(G)}n_u(e)+n_v(e)\right)^2\right]$$

sonuca ulaşırız. Şimdi üst sınırı bulalım. Alt sınırdan,

$$\left(n_u(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)\left(n_v(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(n^2-\left(n_u(e)+n_v(e)\right)^2+4n_u(e)n_v(e)\right)$$

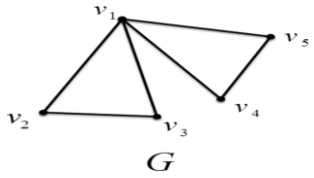
eşitliğini elde etmiştik. $n_u(e)\geq 1$ ve $n_v(e)\geq 1$ olduğunu kullanırsak, $\min_{e=uv\in E(G)}(n_u(e)+n_v(e))\geq 2$ yi elde ederiz ve buradan,

$$\left(n_u(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)\left(n_v(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)\leq\frac{1}{4}\left(n^2+4n_u(e)n_v(e)-4\right)$$

elde ederiz. Bütün kenarlar üzerinden toplam alırsak sonuca ulaşırız. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $m=0$ yani G nin boş graf olmasıdır. ■

Şimdi bu sonuçları bir örnek üzerinde karşılaştıralım.

Örnek 2.1. Aşağıdaki gibi *çapı* 2 olan bir G grafı verilsin. Elde ettiğimiz sınırları, G grafı için tablo üzerinde gösterelim.



G

Şekil 2.1

G grafının sırasıyla *vertex-PI*, *Szeged*, *revised-Szeged*, *birinci* ve *ikinci Zagreb* indekslerini,

$$PI_v(G)=20,\ Sz(G)=14,\ Sz^*(G)=33.5,\ M_1(G)=32,\ M_2(G)=40$$

şeklinde hesaplarız. *Çapı* değiştirmeyecek şekilde graftan üçgen üzerindeki kenarları çıkarıp, indeksleri yeniden hesaplayalım:

$$PI_v(G-f)=20,\ Sz(G-f)=16=Sz^*(G-f),\ M_1(G-f)=20,\ M_2(G-f)=16$$

Şimdi bu bölümdeki sonuçları tablo üzerinde görelim.

	(2.7) Üst Sınır	(2.9) Üst Sınır	(2.10) Üst Sınır	(2.12) Alt Sınır	(2.12) Üst Sınır
$PI_v(G-f)-PI_v(G)=0$	12	-	-	-	-
$Sz(G-f)-Sz(G)=2$	-	26	-	-	-
$Sz(G)=14$	-	-	20.04	-	-
$Sz^*(G)=33.5$	-	-	-	-59	45.5

Tablo 2.1

3. BİR GRAFIN Co-PI İNDEKSİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde basit, bağlantılı bir grafın *Co-PI* indeksi için elde ettiğimiz sınırları vereceğiz.

Tanım 3.1.[13] G grafı bağlantılı bir graf olsun. G grafının $Co-PI$ *indeksi* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left|n_u(e)-n_v(e)\right| \tag{3.1}$$

Ozeki eşitsizliğinden yararlanarak $Co-PI$ *indeksi* için aşağıdaki üst sınırı verelim.

Teorem 3.1. G grafı $n\geq 2$ olacak şekilde bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$Co-PI_v(G)\leq\sqrt{\frac{m^2}{4}(n-2)^2+PI_v{}^2(G)-4mSz(G)} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G\cong K_2$ olmasıdır.

İspat: *Ozeki eşitsizliğindeki* değerleri $i=1,2,...,m$ için $a_i=1$ ve $b_i=n_u(e_i)+n_v(e_i)$ şeklinde gösterelim. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{m}1^2\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)+n_v(e)\right)^2\leq\frac{1}{4}m^2(R_1R_2-r_1r_2)^2+\left(\sum_{e=uv\in E(G)}n_u(e)+n_v(e)\right)^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. $R_1=r_1=1$ olduğundan b_i için tahmini alt ve üst sınır olarak

$$R_2=\max_{e=uv\in E(G)}n_u(e)+n_v(e)\leq n \text{ ve } r_2=\min_{e=uv\in E(G)}n_u(e)+n_v(e)\geq 2$$

verelim.Buradan,

$$m\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)+n_v(e)\right)^2\leq\frac{1}{4}m^2(n-2)^2+\left(\sum_{e=uv\in E(G)}n_u(e)+n_v(e)\right)^2 \tag{i}$$

elde ederiz. $Co-PI$ indeksinin tanımı ve $Cauchy-Schwarz$ eşitsizliğini kullanarak,

$$\sum_{e=uv\in E(G)} |n_u(e)-n_v(e)| \le \sqrt{m\sum_{e=uv\in E(G)} \left(n_u(e)-n_v(e)\right)^2}$$
$$= \sqrt{m\sum_{e=uv\in E(G)} \left(n_u(e)-n_v(e)\right)^2 - 2m\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)n_v(e)} \qquad \textbf{(ii)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (i) ve (ii) eşitsizliklerinden sonuca ulaşırız. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli şart $n=2$ olmasıdır.Bu durum G grafının K_2 tam grafına izomorf olmasına eşdeğerdir. ■

Teorem 3.2. *G* grafı, *çapı* 2 olan bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$Co-PI_v(G) \le \sqrt{mM_1(\Delta-2)} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: G grafı bağlantılı ve $çap(G)=2$ olan bir graf olsun. $e=v_iv_j\in E(G)$ şeklinde herhangi bir kenar alalım. Bu durumda,

$$n_{v_i}(e)=\deg(v_i)-t(e)$$
$$n_{v_j}(e)=\deg(v_j)-t(e)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan,

$$\left|n_{v_i}(e)-n_{v_j}(e)\right| = \left|\deg(v_i)-\deg(v_j)\right|$$

eşitliğini elde ederiz. $Co-PI$ indeksinin tanımını ve *Cauchy- Schwarz eşitsizliğini* kullanarak,

$$\sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \left|n_{v_i}(e)-n_{v_j}(e)\right| = \sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \left|\deg(v_i)-\deg(v_j)\right|$$
$$\le \sqrt{m\sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \left(\deg(v_i)-\deg(v_j)\right)^2}$$
$$= \sqrt{m\sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \left(\deg(v_i)^2+\deg(v_j)^2\right) - 2m\sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \deg(v_i)\deg(v_j)}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \deg^2(v_i)+\deg^2(v_j) = \sum_{v_i\in V(G)} \deg(v_i)\deg^2(v_i) \le \Delta M_1$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\sum_{e=v_iv_j\in E(G)} \left|\deg(v_i)-\deg(v_j)\right| \le \sqrt{m\Delta M_1 - 2mM_1}$$
$$Co-PI_v(G) \le \sqrt{mM_1(\Delta-2)}$$

sonuca ulaşırız. ■

Pólya-Szegö eşitsizliğinden yararlanarak $Co-PI$ *indeksi* için aşağıdaki üst sınırı verelim.

Teorem 3.3. G grafı, $n \geq 2$ olacak şekilde bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$Co-PI(G) \leq \sqrt{\frac{(n+2)^2}{8n} PI_v^{\,2}(G) - 4mSz(G)} \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_2$ olmasıdır.

İspat: Pólya-Szegö eşitsizliğindeki değerleri $i = 1,2,...,m$ için $a_i = 1$ ve $b_i = n_u(e_i) + n_v(e_i)$ şeklinde gösterelim. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{m} 1^2 \sum_{e=uv \in E(G)} \left(n_u(e) + n_v(e)\right)^2 \leq \frac{(AB+ab)^2}{4ABab} \left(\sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) + n_v(e) \right)^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. $A = a = 1$ olduğundan b_i için tahmini alt ve üst sınır olarak,

$$B = \max_{e=uv \in E(G)} n_u(e) + n_v(e) \leq n \text{ ve } b = \min_{e=uv \in E(G)} n_u(e) + n_v(e) \geq 2$$

verelim.Buradan,

$$m \sum_{e=uv \in E(G)} \left(n_u(e) + n_v(e)\right)^2 \leq \frac{(n+2)^2}{8n} \left(\sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) + n_v(e) \right)^2 \tag{iii}$$

elde ederiz. $Co-PI$ indeksinin tanımı ve $Cauchy-Schwarz$ eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{e=uv \in E(G)} \left|n_u(e) - n_v(e)\right| &\leq \sqrt{m \sum_{e=uv \in E(G)} \left(n_u(e) - n_v(e)\right)^2} \\ &= \sqrt{m \sum_{e=uv \in E(G)} \left(n_u(e) - n_v(e)\right)^2 - 2m \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) n_v(e)} \end{aligned} \tag{iv}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (**iii**) ve (**iv**) eşitsizliklerinden sonuca ulaşırız. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli şart $n = 2$ olmasıdır. Bu durum G grafının K_2 tam grafına izomorf olmasına eşdeğerdir. ■

Teorem 3.4. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$Co-PI_v(G) \leq m(n-2) \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının S_n yıldız grafına izomorf olmasıdır.

İspat: $e=uv\in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. G grafındaki bu e kenarı için $|n_u(e)-n_v(e)|\le n-2$ eşitsizliği sağlanır. $Co-PI$ indeksinin tanımından,

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}|n_u(e)-n_v(e)|\le\sum_{e=uv\in E(G)}(n-2)$$
$$=m(n-2)$$

elde edilir. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $n_u(e)=n-1$ ve $n_v(e)=1$ olmasıdır. Yani, G grafının S_n yıldız grafına izomorf olmasıdır. ■

Şimdi birkaç ana sonucumuzda kullanacağımız bir eşitsizlik verelim. Bunun için öncelikle n_v yi tanımlayalım:

n_v sayısı, v ye komşu olan noktadan v ye daha yakın noktaların sayısı olmak üzere

$$\sum_{e=uv\in E(G)}n_u(e)+n_v(e)=\sum_{\substack{u\sim v\\ u\in V(G)}}n_v$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan,

$$\sum_{e=uv\in E(G)}{n_u}^2(e)+{n_v}^2(e)=\sum_{\substack{u\sim v\\ u\in V(G)}}{n_v}^2\le 2m(n-1)^2 \qquad (3.6)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının K_2 tam grafına izomorf olmasıdır.

Teorem 3.5. G grafı, $n\ge 2$ olacak şekilde bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda,

$$Co-PI_v(G)\le\sqrt{m}\sqrt{2m(n-1)^2-2Sz(G)} \qquad (3.7)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının K_2 tam grafına izomorf olmasıdır.

İspat: $uv=e\in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. $Co-PI$ indeksinin tanımını ve *Cauchy-Schwarz eşitsizliğini* kullanarak,

$$Co-PI_v(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}|n_u(e)-n_v(e)|=\sum_{e=uv\in E(G)}1|n_u(e)-n_v(e)|$$
$$\le\sqrt{\sum_{e=uv\in E(G)}1^2}\sqrt{\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)-n_v(e)\right)^2}$$

elde ederiz. Buradan (3.6) eşitsizliğini kullanarak

$$Co-PI_v(G)\le\sqrt{m}\sqrt{2m(n-1)^2-2Sz(G)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $n_u(e) = n_v(e) = n-1$ olmasıdır. Bunun için gerek ve yeter şart G grafının, K_2 tam grafına izomorf olmasıdır. ■

Teorem 3.6. G grafı, $n \geq 2$ olacak şekilde bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda,

$$Co-PI_v(G) \leq \sqrt{2m(n-1)^2 - 2Sz(G) + m(m-1)(n-2)^2} \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının K_2 tam grafına izomorf olmasıdır.

İspat: $e = uv \in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. $Co-PI$ indeksinin tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\left(Co-PI_v(G)\right)^2 &= \sum_{e=uv\in E(G)} {n_u}^2(e) + {n_v}^2(e) - 2n_u(e)n_v(e) + 2\sum_{\substack{e=uv\\ e'=xy\\ e\neq e'}} \left|n_u(e)-n_v(e)\right|\left|n_x(e)-n_y(e)\right| \\ &\leq 2m(n-1)^2 - 2Sz(G) + m(m-1)(n-2)^2\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylelikle,

$$Co-PI_v(G) \leq \sqrt{2m(n-1)^2 - 2Sz(G) + m(m-1)(n-2)^2}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının K_2 tam grafına izomorf olmasıdır. ■

Teorem 3.7. G bir graf olsun. Bu durumda,

$$Co-PI_v(G) \geq \sqrt{\left|2PI_v(G) - 2Sz(G)\right|} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının boş graf olmasıdır.

İspat: $e = uv \in E(G)$ herhangi bir kenar olsun. $Co-PI$ indeksinin tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\left(Co-PI_v(G)\right)^2 &= \sum_{e=uv\in E(G)} {n_u}^2(e) + {n_v}^2(e) - 2n_u(e)n_v(e) + 2\sum_{\substack{e=uv\\ e'=xy\\ e\neq e'}} \left|n_u(e)-n_v(e)\right|\left|n_x(e)-n_y(e)\right| \\ &\geq 2PI_v(G) - 2Sz(G)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylelikle,

$$Co-PI_v(G) \geq \sqrt{\left|2PI_v(G) - 2Sz(G)\right|}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $n_u(e) = n_v(e) = 0$ olmasıdır. Bunun için gerek ve yeter şart G grafının, boş graf olmasıdır. ■

Eğer G grafı bağlantılı bir graf ve G' grafı, G grafına yeni bir kenar eklenerek elde edilen bir graf ise, bu durumda $Co-PI_v(G) > Co-PI_v(G')$ dir. Bu durum, G grafındaki bir e kenarı için eğer G grafı ve $G-e$ grafı bağlantılı graflar ise, $Co-PI_v(G) < Co-PI_v(G-e)$ olmasına eşdeğerdir. Bu sonuçtan, bütün n noktalı graflar içinde K_n tam grafının $Co-PI$ indeksinin minimum ve S_n yıldız grafının $Co-PI$ indeksinin maksimum olduğunu görürüz.

Yıldız grafının bir tür *ağaç* olduğunu biliyoruz. Bu durumu göz önüne alarak, ağaçlar için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1. G grafı, n noktalı bir *ağaç* olsun. Bu durumda,

$$2(n-2) \le Co-PI_v(G) \le (n-1)(n-2) \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: <u>Alt Sınır</u>

G grafı bir ağaç olduğu için en az iki tane pendant noktası vardır. Bu pendant noktadan biri u noktası olsun ve bu u noktasının komşu olduğu nokta u_1 olsun. u noktası pendant nokta olduğu için, u ya u_1 den daha yakın nokta kendisi olup $n_u(e)=1$ olur. u_1 noktasına u dan daha yakın noktalar graftaki u noktası hariç diğer bütün noktalar olduğu için $n_{u_1}(e)=n-1$ olur. Buradan $\left|n_u(e)-n_{u_1}(e)\right|=n-2$ elde ederiz. Graftaki diğer pendant nokta v olsun. v noktası için de aynı durum geçerlidir ve v nin komşu olduğu noktaya v_1 dersek $\left|n_v(e)-n_{v_1}(e)\right|=n-2$ elde ederiz. $Co-PI$ indeksinin tanımını kullanarak,

$$\sum_{e=uv\in E(G)} \left|n_u(e)-n_v(e)\right| \ge 2(n-2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $n_u(e)=n_v(e)=n-1$ olmasıdır. Bunun için gerek ve yeter şart *ağacın*, K_2 tam grafına izomorf olmasıdır.

<u>Üst Sınır</u>

G grafı, n noktalı bir *ağaç* olduğu için, G grafının kenar sayısı $n-1$ dir. $Co-PI$ indeksinin tanımını kullanarak,

$$\sum_{e=uv\in E(G)} \left|n_u(e)-n_v(e)\right| \le \sum_{e=uv\in E(G)} (n-2) = (n-1)(n-2)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart graftaki bütün kenarlar için $\left|n_u(e)-n_v(e)\right| = n-2$ olması yani $G \cong S_n$ olmasıdır. ■

G bağlantılı bir graf olsun. $Co-PI$ indeksinin tanımını göz önüne aldığımızda, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} Co-PI_v(G) &= \sum_{e=uv\in E(G)} \left|n_u(e)-n_v(e)\right| \\ &= \sum_{0\le i<n} \left|\{uv\in E(G) : n_u(e)\le i \text{ ve } n_v(e) > i \}\right| \end{aligned} \tag{3.11}$$

Bu eşitlikten yola çıkarak $Co-PI$ indeksi için aşağıdaki üst sınırı verebiliriz.

Sonuç 3.2. G bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda,

$$Co-PI_v(G) \le \sum_{0\le i<n} \min\left[\sum_{\substack{v\in V(G)\\ n_v(e)\le i}} n_v(e), \sum_{\substack{v\in V(G)\\ n_v(e)> i}} n_v(e) \right] \tag{3.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

4. BİR GRAFIN Co-PI EN BÜYÜK ÖZDEĞERİ İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde basit bağlantılı bir grafın $Co-PI$ matrisinin en büyük özdeğeri için bazı sınırlar elde edilmiştir. Bir grafın *Co-PI matrisi* ilk olarak, G. Su ve arkadaşları (2013) tarafından incelenmiştir.

Tanım 4.1.[30] $e=uv$ kenarı G grafının herhangi bir kenarı ve bu kenarın ağırlığı negatif olmayan bir tamsayı $|n_u(e)-n_v(e)|$ olsun. G grafının $Co-PI$ *ağırlıklandırılması* diyeceğimiz, E kenar kümesi üzerinde $w: E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım. $Co-PI$ *ağırlıklandırılması* ile ağırlıklandırılan G grafının komşuluk matrisine, G grafının $Co-PI$ matrisi denir ve $M_{CPI}=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ ile gösterilir. Bu matrisin özdeğerlerine G grafının $Co-PI$ özdeğerleri denir ve $i=1,2,...,|V|$ için $\sigma'_1(G)$ ile gösterilir.

Şimdi bu bölümde bilinmesi gereken bazı tanımları verelim. Detaylı bilgi için [18] referansına bakılabilir.

G grafı, nokta kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ve $Co-PI$ matrisi $M_{CPI}=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ olan bir graf olsun.

1) Herhangi bir v_i noktasının $Co-PI$ *derecesi*

$$M_{CPI_i}=\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır.

2) G grafının $Co-PI$ *derece* dizisi $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2},..., M_{CPI_n}\right\}$ olmak üzere, herhangi bir v_i noktasının *ikinci* $Co-PI$ *derecesi* ise

$$T_i=\sum_{j=1}^{n} c_{ij} M_{CPI_j} \tag{4.2}$$

biçiminde tanımlanır.

3) G grafı, $Co-PI$ *derece* dizisi $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right\}$ olan bir graf olmak üzere, eğer her i için $M_{CPI_i} = k$ ise bu takdirde G grafına $k-Co-PI$ *regüler graf* denir.

4) G grafı, $Co-PI$ derece dizisi $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right\}$ ve *ikinci* $Co-PI$ derece dizisi $\left\{T_1, T_2, ..., T_n\right\}$ olan bir graf olmak üzere, her i için $\frac{T_i}{M_{CPI_i}} = k$ ise bu takdirde G grafına *pseudo* $k-Co-PI$ *regüler graf* denir.

Sınırımızın ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1. G grafı, $Co-PI$ derece dizisi $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right\}$ ve *ikinci* $Co-PI$ derece dizisi $\left\{T_1, T_2, ..., T_n\right\}$ olan bir graf olsun. Bu durumda,

$$T_1 + T_2 + ... + T_n = {M_{CPI_1}}^2 + {M_{CPI_2}}^2 + ... + {M_{CPI_n}}^2$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $M_{CPI_i} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ ve $T_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} M_{CPI_j}$ tanımlarını kullanarak,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + ... + T_n &= [1,1,...,1]\left(M_{CPI}\left[M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right]^t\right) \\ &= \left([1,1,...,1]M_{CPI}\right)\left[M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right]^t \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Matris çarpımının birleşme özelliğinden sonuca ulaşırız. ■

Şimdi en büyük *Co-PI* özdeğeri için ilk sınırımızı verelim.

Teorem 4.1. G grafı, $Co-PI$ *derece dizisi* $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right\}$ olan bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\sigma'_1(G) \geq \sqrt{\frac{{M_{CPI_1}}^2 + {M_{CPI_2}}^2 + ... + {M_{CPI_n}}^2}{n}} \qquad (4.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart G grafının $Co-PI$ *regüler* olmasıdır.

İspat: M_{CPI} matrisi, G grafının $Co-PI$ matrisi olsun ve $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektörü M_{CPI} matrisinin en büyük özdeğeri σ'_1 e karşılık gelen pozitif birim Perron özvektör ve $P=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,...,1)$ olsun. P pozitif birim bir vektör olup,

$$\sigma'_1=\sigma'_1(M_{CPI})=\sqrt{\sigma'_1(M_{CPI}{}^2)}=\sqrt{XM_{CPI}{}^2X^t}\geq\sqrt{PM_{CPI}{}^2P^t}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned}PM_{CPI}&=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,...,1)M_{CPI}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[M_{CPI_1},M_{CPI_2},...,M_{CPI_n}\right]\end{aligned}$$

ve

$$PM_{CPI}{}^2P^t=PM_{CPI}M_{CPI}P^t=PM_{CPI}\left(PM_{CPI}\right)^t=\frac{\sum_{i=1}^{n}M_{CPI}{}^2}{n}$$

olduğundan

$$\sigma'_1\geq\sqrt{PM_{CPI}{}^2P^t}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}M_{CPI}{}^2}{n}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi G grafının $Co-PI$ *regüler* olduğunu farzedelim. O zaman tüm i ler için $M_{CPI_i}=k$ olur ve Frobenius Teoreminden dolayı, k basit ve M_{CPI} matrisinin en büyük özdeğeridir. Buradan

$$\sigma'_1=k=\sqrt{\frac{n.k^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}M_{CPI_i}{}^2}{n}}$$

eşitliği sağlanır.

Tersine eğer eşitlik sağlanıyorsa, o zaman P vektörü, σ'_1 e karşılık gelen özvektördür ve bundan dolayı $PM_{CPI} = \sigma'_1 P$ olur. Bu bize tüm i ler için $M_{CPI_i} = \sigma'_1$ eşitliğini verir. M_{CPI_i} bir tamsayı olduğu için G grafı, $Co-PI$ *regüler* olur. ■

Teorem 4.2. G grafı, $Co-PI$ *derece dizisi* $\left\{M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right\}$ ve *ikinci* $Co-PI$ *derece dizisi* $\left\{T_1, T_2, ..., T_n\right\}$ olan bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\sigma'_1 \geq \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 + ... + T_n^2}{M_{CPI_1}^2 + M_{CPI_2}^2 + ... + M_{CPI_n}^2}} \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak G grafı, *pseudo-k* $Co-PI$ *regüler graf* olduğunda sağlanır.

İspat: M_{CPI} matrisi, G grafının $Co-PI$ *matrisi* olsun ve $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ vektörü M_{CPI} matrisinin en büyük özdeğeri σ'_1 e karşılık gelen pozitif birim Perron özvektör ve $P = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_{CPI_i}^2}} \left(M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right)$ olsun. P pozitif birim bir vektör olup,

$$\sigma'_1\left(M_{CPI}\right) = \sqrt{\sigma'_1\left(M_{CPI}^2\right)} = \sqrt{XM_{CPI}^2 X^t} \geq \sqrt{PM_{CPI}^2 P^t}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$PM_{CPI} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_{CPI_i}^2}} \left(M_{CPI_1}, M_{CPI_2}, ..., M_{CPI_n}\right)\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_{CPI_i}^2}} \left(T_1, T_2, ..., T_n\right)$$

ve

$$PM_{CPI}^2 P^t = PM_{CPI}\left(PM_{CPI}\right)^t = \frac{T_1^2 + T_2^2 + ... + T_n^2}{M_{CPI_1}^2 + M_{CPI_2}^2 + ... + M_{CPI_n}^2} \quad \text{olduğundan}$$

$$\sigma'_1 \geq \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2 + ... + T_n^2}{M_{CPI_1}^2 + M_{CPI_2}^2 + ... + M_{CPI_n}^2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi G grafının *pseudo-k*$Co-PI$ *regüler* olduğunu farzedelim. Buradan tüm i ler için $\frac{T_i}{M_{CPI_i}}=k$ ya da $T_i=kM_{CPI_i}$ eşitlikleri sağlanır. Öyleyse $M_{CPI}P=kP$, P nin k ya karşılık gelen özvektör olduğunu gösterir ve buradan $\sigma'_1=k$ olur. Böylece eşitlik sağlanır. Tersine eğer eşitlik sağlanırsa Teorem 2.1 deki gibi P vektörü, σ'_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör olup $M_{CPI}P=kP$ elde ederiz. Bu bize $\frac{T_i}{M_{CPI}}=\sigma'_1$ olduğunu, başka bir deyişle G grafının *pseudo-*$Co-PI$ *regüler graf* olduğunu gösterir. ■

Şimdi diğer ana sonucumuz için kullanacağımız lemmayı verelim:

Lemma 4.2.[34,36] $B=\left(B_{ij}\right)$, $B_1,B_2,...,B_n$ $(n\geq 2)$ satır toplamlarıyla $n\times n$ negatif olmayan, indirgenemez, simetrik bir matris olsun. $\lambda_1(B)$ özdeğeri, B matrisinin en büyük özdeğeri olmak üzere,

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}B_i^2}{n}}\leq\lambda_1(B)\leq\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}B_{ij}\sqrt{\frac{B_j}{B_i}} \tag{4.5}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $B_1=B_2=...=B_n$ olduğunda ya da eğer

$$Q^tBQ=\begin{pmatrix}0 & C\\ C^t & 0\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

şeklinde C matrisinin bütün satır toplamları eşit olan bir Q permütasyon matrisinin olması durumunda sağlanır.

Teorem 4.3. G grafı $n\geq 2$ nokta sayılı, bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {M_{CPI_i}}^2}{n}} \le \sigma'_1(G) \le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} M_{CPI_{ij}} \sqrt{\frac{M_{CPI_j}}{M_{CPI_i}}} \tag{4.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak G grafının $Co-PI$ *regüler* olması durumunda sağlanır.

İspat: M_{CPI} matrisinin $n \ge 2$ için indirgenemez olduğu açıktır, buradan Lemma 2.2 den (1) deki eşitsizliği elde ederiz. Tanımından $i \ne j$ için $M_{CPI_{ij}} \ne 0$ ve diğer durumlarda $M_{CPI_{ij}} = 0$ olduğunu biliyoruz. Dikkat etmeliyiz ki $n \ge 3$ için

$$Q^t B Q = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^t & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde C matrisinin bütün satır toplamları eşit olan bir Q permütasyon matrisi yoktur. Lemma 2.2den (1) deki eşitsizlik, $M_{CPI_1} = M_{CPI_2} = ... = M_{CPI_n}$ olduğunda yani G grafı, $Co-PI$ *regüler* olduğu zaman sağlanır. ■

Teorem 4.4. G grafı, $n \ge 2$ noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sigma'_1(G) \ge \frac{2(Co-PI_v)}{n} \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak ve ancak $M_{CPI_1} = M_{CPI_2} = ... = M_{CPI_n}$ olduğu zaman sağlanır.

İspat: (4.7) deki eşitsizliğin sol tarafından ve *Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden*

$$\sigma'_1(G) \ge \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {M_{CPI_i}}^2}{n}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{CPI_i}}{n} = \frac{2Co-PI}{n}$$

elde ederiz. Eşitlik ancak ve ancak $M_{CPI_1} = M_{CPI_2} = ... = M_{CPI_n}$ olduğu zaman sağlanır. ■

Herhangi bir G grafı için $iz[M_{CPI}] = 0$ olduğuna dikkat edelim. $N = N(G)$ sayısını, ${M_{CPI}}^2$ matrisinin *izi* olarak gösterelim. Buradan $i = 1, 2, ..n.$ için M_{CPI} matrisinin özdeğerleri $\sigma'_i(G)$ ler aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma'_i(G)=0 \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma'^{2}_i(G)=N(G) \tag{4.10}$$

Γ ailesi, $Co-PI$ *matrisi* sadece bir tane pozitif özdeğere sahip olan bağlantılı grafların ailesi olsun. Şimdi, nokta sayısı ve $N(G)$ sayısına bağlı olarak Γ sınıfındaki grafların en büyük özdeğeri $\sigma'_1(G)$ için alt sınır ve üst sınır vereceğiz.

Teorem 4.5. $G\in\Gamma$ ve $n\geq 2$ olsun. Bu takdirde,

$$\sigma'_1(G)\leq\sqrt{\frac{n-1}{n}N(G)} \tag{4.11}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Öncelikle (4.9) dan $\sigma'_1(G)=-\sum_{i=2}^{n}\sigma'_i(G)$ yazılır. Buradan Cauchy- Schwarz eşitsizliği ve (4.10) eşitliğini kullanarak

$$\sigma'^{2}_1(G)=\left[\sum_{i=2}^{n}\sigma'_i(G)\right]^2\leq(n-1)\sum_{i=2}^{n}\sigma'^{2}_i(G)$$
$$=(n-1)\left[N(G)-\sigma'^{2}_1(G)\right]$$

elde ederiz. Bu ise istenen sonuçtur.■

Teorem 4.6. $G\in\Gamma$ ve $n\geq 2$ olsun. Bu takdirde

$$\sigma'_1(G)\geq\sqrt{\frac{N(G)}{2}} \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Öncelikle $\sigma'_1(G)>0$ ve $\sigma'_2(G)<0$ olduğuna dikkat edelim. (4.9) eşitliğinden

$$2\sigma'_1(G)=\sum_{i=1}^{n}|\sigma'_i(G)|$$

dir. Ayrıca (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\left|\sigma'_i(G)\sigma'_j(G)\right| \ge \left|\sum_{1\le i\le j\le n}\sigma'_i(G)\sigma'_j(G)\right| = \frac{N(G)}{2}$$

elde ederiz. Böylece

$$4\sigma'^{\,2}_1(G) = \left[\sum_{i=2}^{n}\left|\sigma'_i(G)\right|\right]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sigma'^{\,2}_1(G) + 2\sum_{i<j}\left|\sigma'_i(G)\sigma'_j(G)\right| \ge 2N(G)$$

eşitsizliğine ulaşırız. ■

Şimdi σ'_1 için *Nordhaus-Gaddum* tipi sınır verelim. Bağlantılı bir G grafı ile bu grafın tamamlayıcısı $\bar{G}$ grafının kenar sayıları için aşağıdaki gibi bir eşitlik vardır.

$$2(m+\bar{m}) = n(n-1) \tag{4.13}$$

Lemma 4.3.[32] G bağlantılı, m kenarlı ve $n \ge 3$ noktalı bir graf olsun. Bu durumda,

$$2m \le \sigma'^{\,2}_1 + \sigma'^{\,2}_2 + \ldots + \sigma'^{\,2}_n \le 2m(n-2)^2 \tag{4.14}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.7., Teorem 4.8., Lemma 4.9 ve (4.13) eşitliğini kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem.4.7. $G \in \Gamma, \bar{G}$ grafı bağlantılı ve $n \ge 2$ olsun. Bu takdirde,

$$\sqrt{m} + \sqrt{\frac{(n(n-1)-2m)}{2}} \le \sigma'_1(G) + \sigma'_1(\bar{G}) \le \sqrt{\frac{n-1}{n}}\left[\sqrt{2m(n-2)^2} + \sqrt{(n(n-1)-2m)(n-2)^2}\right] \tag{4.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: G grafı bağlantılı ve G grafının tamamlayıcısı olan $\bar{G}$ grafı da bağlantılı olsun. Teorem 4.7 ve Teorem 4.8 den,

$$\sqrt{\frac{N(G)}{2}} + \sqrt{\frac{N(\bar{G})}{2}} \le \sigma'_1(G) + \sigma'_1(\bar{G}) \le \sqrt{\frac{n-1}{n}}\left[\sqrt{N(G)} + \sqrt{N(\bar{G})}\right]$$

yazabiliriz. Lemma 4.9 dan,

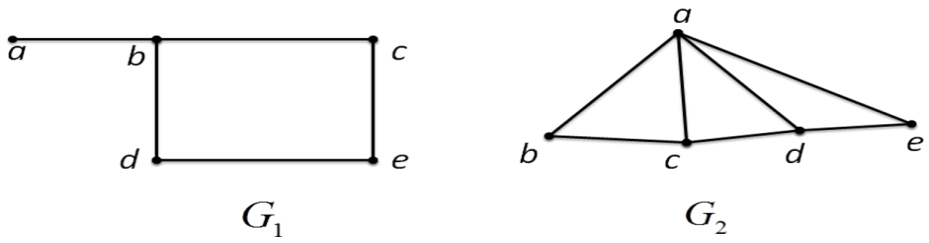
$$n(n-1) - 2m \le N(\bar{G}) \le (n(n-1)-2m)(n-2)^2$$

eşitsizliğini elde ederiz. $N(\bar{G})$ yi eşitsizlikte yerine yazarak sonuca ulaşırız.

5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bulunan sınırlar örneklendirilerek tablo üzerinde karşılaştırılmıştır. İlk olarak üçüncü bölümdeki sonuçları bir örnek üzerinde karşılaştıralım.

Örnek.5.1. Aşağıdaki gibi G_1 ve G_2 grafları verilsin.



G_1 G_2

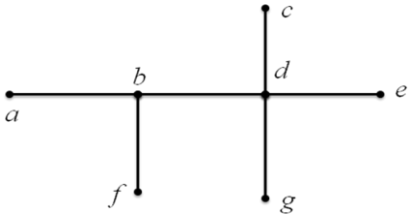
Şekil 5.1

Bu grafların vertex Co-PI indeksleri için 3. bölümde verdiğimiz sınırlar aşağıdaki değerleri verir.

	(3.2) Üst Sınır	(3.3) Üst Sınır	(3.4) Üst Sınır	(3.6) Üst Sınır	(3.7) Üst Sınır	(3.8) Üst Sınır	(3.9) Alt Sınır	(3.1) Üst Sınır
$Co-PI_v(G_1)=7$	11.011358	-	14.3396	15	22.803	16.8523	2.4494	11
$Co-PI_v(G_2)=10$	15.041609	24.2487	16.3737	21	35.8887	23.7065	3.4641	18

Tablo 5.1

Örnek.5.2. Aşağıdaki gibi bir *T* ağacı verilsin. Bu *T* ağacı için elde ettiğimiz sınırı tablo üzerinde verelim.



T

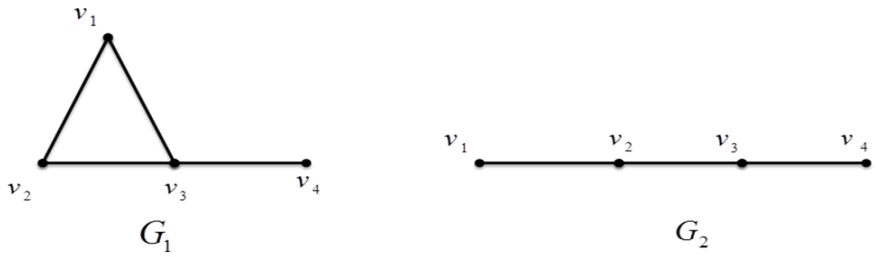
Şekil 5.2

(3.10) Alt Sınır	$Co-PI_v(T)$	(3.10) Üst Sınır
10	26	30

Tablo 5.2

Son olarak üçüncü bölümdeki sonuçları bir örnek üzerinde karşılaştıralım:

Örnek 5.3. Aşağıdaki gibi G_1 ve G_2 grafları verilsin.



Şekil 5.3

G_1 grafının *Co-PI* matrisi,

$$M_{CPI}(G_1)=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&1&0&2\\0&0&2&0\end{bmatrix}$$

olur. Buradan G_1 grafının *Co-PI derece dizisi* $M_{CPI_1}=1$, $M_{CPI_2}=1$, $M_{CPI_3}=4$, $M_{CPI_4}=2$ ve *ikinci Co-PI derece dizisi* $T_1=4$, $T_2=4$, $T_3=6$ ve $T_4=8$ dir. Bu grafın *Co-PI özdeğerleri* $0,0,\sqrt{6},-\sqrt{6}$ dir.

G_2 grafının *Co-PI* matrisi,

$$M_{CPI}(G_2)=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

olur. Buradan G_2 grafının $Co-PI\ derece\ dizisi$ $M_{CPI_1}=2$, $M_{CPI_2}=2$, $M_{CPI_3}=2$, $M_{CPI_4}=2$ ve $ikinci\ Co-PI\ derece\ dizisi$ $T_1=4$, $T_2=4$, $T_3=4$ ve $T_4=4$ dür. Bu grafın *Co-PI özdeğerleri* $2,\ -2,\ 2,\ -2$ dir.

Bu grafların en büyük *Co-PI* özdeğerleri için bulduğumuz sınırlar aşağıdaki değerleri verir.

	(4.3) Alt Sınır	(4.4) Alt Sınır	(4.8) Alt Sınır	(4.11) Üst Sınır	(4.12) Alt Sınır
$\sigma_1'(G_1)=\sqrt{6}$	2.3452	2.3251	2	3	$\sqrt{6}$
$\sigma_1'(G_2)=2$	2	2	2	-	-

Tablo 5.3

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmanın ikinci bölümünde basit, bağlantılı ve *çapı* 2 olan bir graftan üçgen üzerindeki kenarlar çıkarılarak elde edilen yeni bağlantılı ve *çapı* 2 olan graf için *vertex PI* ve *Szeged* indeksler için Teorem 2.1 de (2.7) ve Teorem 2.2 de (2.9) eşitsizlikleri ile verilen sınırlar elde edilmiş, Teorem 2.3 de *vertex-PI* ve *Szeged* indeksleri arasında bir ilişki elde edilmiş, Teorem 2.4 de *revised-Szeged* indeks için bir eşitlik ve Teorem 2.5 de *revised-Szeged* indeks için sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde basit, bağlantılı bir grafın *Co-PI* indeksi için Teorem 3.1, Teorem 3.3, Teorem 3.4, Teorem 3.5, Teorem 3.6, Teorem 3.7 ve Sonuç 3.2 de *Co-PI* indeksi için sınırlar elde edilmiş, Teorem 3.2 de çapı 2 olan grafların ve Sonuç 3.1 de ağaçların *Co-PI* indeksi için sınırlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise basit, bağlantılı bir grafın en büyük *Co-PI* özdeğeri için Teorem 4.1, Teorem 4.2, Teorem 4.3, Teorem 4.4 de sınırlar elde edilmiş, Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 ve Teorem 4.7 de özdeğerlerine göre karakterize edilen grafların en büyük *Co-PI* özdeğeri için sınırlar elde edilmiştir.

6.2 Öneriler

Bir grafın *Co-PI, revised-Szeged, Szeged* ve *vertex-PI indeksleri* ve *Co-PI* matrisin en büyük özdeğeri için farklı metotlar kullanılarak daha iyi sınırlar bulunabilir. Bir grafın *Laplacian Co-PI* matrisinin özdeğerleri incelenebilir. Bununla birlikte bu indekslerin *Estrada indeksi* incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1]Aldous, J. M., Wilson R. J., 2000, Graphs and Applications, *The Open University Printed in Great Britain.*

[2]Bonchev, D., Rouvray, D. H., 1991, Chemical Graph Theory Introduction and Fundamentals, *Abacus Press/ Gordon& Breach Science Publishers*.

[3]Bondy , J. A., Murty, U. S. R., 1981, Graph Theory with Applications, *Elsevier,* North Holland.

[4]Buckley, F., Harary, F., 1990, Distance in Graphs, *Addison Wesley*, Redwood.

[5]Cvetkovic, M. D., Doob, M., Sachs, H., 1980, Spectra of Graphs Theory and Applications, *Academic Press*.

[6]Chung, F.R.K., 1994, Spectral Graph Theory, *Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics*.

[7]Das, K. C., Bapat, R.B., 2008, A sharp upper bound on the spectral radius of weighted graphs, *Discrete Mathematics,* 308,3180 – 3186.

[8]Das, K. C., Gutman, I., 2009, Estimating the Szeged index, *Applied Mathematics Letters*, 22, 1680-1684.

[9]Das, K. C., 2010, On Comparing Zagreb indices of Graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*., 63, 433-440.

[10]Dobrynin, A., Entringer, R., Gutman, I., 2001, Wiener index of trees: theory and applications, *Acta Appl. Math*., 66, 211-249.

[11]Gross, J. L., Yellen, J., 2004, Handbook of Graph Theory, *CRC Press*.

[12]Gutman, I., Polansky, O.E., 1986, Mathematical Concepts in Organic Chemistry, *Springer-Verlag*, Berlin.

[13]Hassani, F., Khormali, O., Iranmanesh, A., 2010, Computation of the first vertex of Co-PI index of TUC4CS(S) nanotubes, Iranian *Journal of Mathematical Chemistry*, 1 (1), 119-123.

[14]Horn, R. A., Johnson, C. R., 1985, Matrix Analysis, *Cambridge University Press,* New York.

[15]Horoldagva, B., Das, K. C., 2012, On Comparing Zagreb indices of Graphs, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 41 (2), 223-230.

[16]Ilić, A., Stevanović, D., 2009, On comparing Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*., 62, 681-687.

[17]Ilić, A., 2010, Note on PI and Szeged indices, *Mathematical and Computer Modelling*, 52, 1570-1576.

[18]Ilić, A., Ilić, M., Liu, B., 2011, On the upper bounds for the first Zagreb index, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 35 (1), 173-182.

[19]Ilic, A., Milosavljević, N., 2013, The weighted vertex PI index, *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 623-631.

[20]Indulal, G., 2009, Sharp Bounds on the distance spectral radius and the distance energy of graphs, *Linear Algebra Appl*., 430,106-113.

[21]Izumino, S., Mori, H., Seo, Y., 1998, On Ozeki's Inequality, *J. of lnequal. & Appl*., Vol. 2, 235-253.

[22]Khalifeh, M. H., Yousefi-Azari, H., Ashrafi, A. R., Wagner, S. G., 2009, Some new results on distance-based graph invariants, *European Journal of Combinatorics*, 30, 1149-1163.

[23]Klavzar, S., Rajapakse, A., Gutman, I., 1996, The Szeged and the Wiener index of Graphs, *Appl. Math. Lett*., 9 (5), 45-49.

[24]Li, S., Li, X., 2009, On tricyclic graphs of a given diameter with minimal energy, *Linear Algebra and its Applications*, 430, 370–385.

[25]Maden (Güngör), A. D., Bozkurt, Ş. B., 2011, On the Distance Spectral Radius and the Distance Energy of Graphs, *Linear and Multilinear Algebra*, 29 (4), 365-370.

[26]Maden (Güngör), A. D., Gutman, I., Çevik, A. S., 2013, Bounds for Resistance-Distance Spectral Radius, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 (1), 43-50.

[27]Mitrinovic, D. S., 1970, Analytic Inequalities, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg New York.

[28]Mogharrab, M., Maimani, H. R., Ashrafi, A. R., 2009, A note on the vertex PI index of graphs, *J. Adv. Math. Studies*, 2, 53-56.

[29]Nadjafi-Arani, M.J., Fath-Tabar, G.H., Mırzargar, M., 2010, Sharp Bounds on the PI Spectral Radius, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 1, No. 1, 111 – 117.

[30]Rouvray, D.H., 2002, The rich legacy of half a century of the Wiener index, in: D.H. Rouvray, R.B. King (Eds.), *Topology in Chemistry Discrete Mathematics of Molecules*, Horwood, Chichester, 16-37.

[31]Su, G., Xiong, L., Xu, L., 2012, The Nordhaus-Gaddum type inequalities fort he Zagreb index and co-index of graphs , *Applied Mathematics Letters*, 25, 1701-1707.

[32]Su, G., Xiong, L., Xu, L., 2013, On the Co-PI and Laplacian Co-PI eigenvalues of a graph, *Discrete Applied Mathematics*, 161, 277-283.

[33]Xing, R., Zhou, B., 2011, On the revised Szeged index, *Discrete Applied Mathematics*, 159, 69-78.

[34]Zhou, B., Liu, B., 1998, On almost regular matrices, *Util. Math*., 54, 151-155.

[35]Zhou, B., On the spectral radius of nonnegative matrices, 2000, *Australas. J. Comb.*, 22, 301-306.

[36]Zhou, B., Trinajstić, N., 2007, On the largest eigenvalue of the distance matrix of a connected graph, *Chem. Phys. Lett*., 447, 384-387.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Ezgi KAYA
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Seben, 08.12.1986
Telefon	**:**	0 507 934 12 68
Faks	**:**	
e-mail	**:**	kaya_ezgi@windowslive.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Iğdır Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı), Iğdır**	**2004**
Üniversite	:	**Balıkesir Üniversitesi**	**2010**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi**	**-**
Doktora	:		

UZMANLIK ALANI

Matematik, Graf Teori

YABANCI DİLLER

İngilizce