



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Elemanları Fibonacci ve Lucas Sayılarından Oluşan *r*Circulant Matrislerin Determinantları ve Tersleri

Emrullah KIRKLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalını

Temmuz-2013
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elemanları Fibonacci ve Lucas Sayılarından Oluşan *r*Circulant Matrislerin Determinantları ve Tersleri

Emrullah KIRKLAR

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
MATEMATİK Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. DURMUŞ BOZKURT

2013, 27 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Yrd. Doç. Dr. M. Emir KÖKSAL

Bu çalışmada elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan oluşan *r*circulant matrislerin determinantlarını formülüze ettik. Bunu yaparken Fibonacci, Lucas ve *r*circulant matrislerin matrislerin özelliklerinden faydalandık. Daha sonra *r*circulant matrislerin tersinin de *r*circulant matris olduğunu gösterdik. Son olarak elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan oluşan *r*circulant matrislerin terslerini yine Fibonacci, Lucas ve *r*circulant matrislerin özelliklerini kullanarak formülize ettik.

Anahtar Kelimeler: circulant matris, determinant, Fibonacci sayıları, matris tersleri, Lucas sayıları, *r*circulant matrisler.

ABSTRACT

MS THESIS

On the determinants and inverses of *r*Circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers

Emrullah KIRKLAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

Advisor: Prof. Dr. DURMUŞ BOZKURT

2013, 27 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Asst. Prof. Dr. M. Emir KÖKSAL

Let *n* be a positive integer such that $n > 2$ and $E_n = rcirc(F_1, F_2, ..., F_n)$ and $K_n = rcirc(L_1, L_2, ..., L_n)$ be the *r*circulant matrices where F_n and L_n are the *nth* Fibonacci and Lucas numbers, respectively. The determinants of E_n and K_n are obtained in terms of the Fibonacci and Lucas numbers. Afterwards, we also derive the inverses of the matrices E_n and K_n.

Keywords: circulant matrices, determinants, Fibonacci numbers, inverses, Lucas numbers, *r*circulant matrices.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca Arş. Gör. Fatih YILMAZ'a, fikir ve düşüncelerini paylaştığı için teşekkür ederim.

Emrullah KIRKLAR
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler 1
1.1.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları 1
1.1.2. Circulant matrisler……...……...…….3
1.1.3. *r*Circulant matrisler …….5
1.1.4. *r*Circulant matrislerin tersleri……..……5

2. ELEMANLARI FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINDAN OLUŞAN *r*CİRCULANT MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI VE TERSLERİ ……6

2.1. Teorem……6
2.2. Teorem……8
2.3.Teorem…..……..10
2.4. Teorem……..13

3. ÖRNEKLER……..16

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER……..25

4.1 Sonuçlar……25
4.2 Öneriler……..25

KAYNAKLAR……...26

ÖZGEÇMİŞ……...27

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

F_n : Fibonacci sayı dizisinin $n.$ elemanı

$diag(A)$: köşegen matris

L_n : Lucas sayı dizisinin $n.$ elemanı

$rcirc$: $r$circulant matris

$V \oplus Y$: V ve Y matrislerinin direkt toplamı

C_n : circulant matris

C_n^{-1} : C_n circulant matrisinin tersi

1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

p ve q keyfi tamsayılar olmak üzere $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri de α, β olsun.

$$d = \sqrt{p^2 - 4q}$$

için

$$\alpha = \frac{(p+d)}{2} \quad , \quad \beta = \frac{(p-d)}{2}$$

$$\alpha + \beta = p, \ \alpha\beta = q, \ \alpha - \beta = d$$

olur.

$$\{w_n\} = \{w_n(a,b;p,q)\} = \{w_0 = 0, w_1 = a, w_2 = b, w_n = pw_{n-1} - qw_{n-2} \ \ (n \geq 2)\}$$

$\{w_n\}$ genel sayı dizisini tanımlayalım. $d \neq 0$ ve $A = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}, B = \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta}$ için

$$w_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

olur. $\{w_n\}$ dizisinde $a = 1, b = 1, p = 1, q = -1$ alınırsa

$$\{w_n\} = \{w_n(1,1;1,-1)\} = \{w_0 = 0, w_1 = 1, w_2 = 1, w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \ \ (n \geq 2)\} = \{F_n\}$$

Fibonacci sayı dizisi elde edilir [1].

Benzer şekilde $\{w_n\}$ dizisinde $a = 2, b = 1, p = 1, q = -1$ alınırsa

$$\{w_n\} = \{w_n(2,1;1,-1)\} = \{w_0 = 0, w_1 = 2, w_2 = 1, w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \ \ (n \geq 2)\} = \{L_n\}$$

Lucas sayı dizisi elde edilir [1].

1.1.1.1. Binet formülleri

Fibonacci sayı dizisi için karakteristik denklem $x^2 - x - 1 = 0$ olup, bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. Buradan açıkça görülüyor ki, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha.1 + 0 = \alpha F_1 + F_0 \\
\alpha^2 &= \alpha\alpha = \alpha(1-\beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha + 1 = \alpha F_2 + F_1 \\
\alpha^3 &= \alpha^2\alpha = \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1 = aF_3 + F_2 \\
\alpha^4 &= \alpha^3\alpha = (2\alpha+1)\alpha = 2\alpha^2 + \alpha = 2(\alpha+1) + \alpha = 3\alpha + 2 = \alpha F_4 + F_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta.1 + 0 = \beta F_1 + F_0 \\
\beta^2 &= \beta\beta = \beta(1-\alpha) = \beta - \beta\alpha = \beta + 1 = \beta F_2 + F_1 \\
\beta^3 &= \beta^2\beta = \beta(\beta+1) = \beta^2 + \beta = \beta + 1 + \beta = 2\beta + 1 = \beta F_3 + F_2 \\
\beta^4 &= \beta^3\beta = (2\beta+1)\beta = 2\beta^2 + \beta = 2(\beta+1) + \beta = 3\beta + 2 = \beta F_4 + F_3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir [11]. Dolaysıyla aşağıdaki lemmalar yazılabilir.

Lemma 1.1.1.1[11]**:** $n > 0$ için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ dir.

Lemma 1.1.1.2[11]**:** $n > 0$ için $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ dir.

Teorem 1.1.1.1[11] **(Fibonacci Sayıları için Binet Formülü):** $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü α ve negatif kökü de β olsun. $n \geq 1$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem1.1.1.2[11] **(Lucas Sayıları için Binet Formülü):** $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü α ve negatif kökü β ise $n \geq 1$ için

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

1.1.2. Circulant matrisler

Tanım 1.1.2.1 [5]**:**

$$C_n = Circ(c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & . & . & . & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & . & . & . & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & . & . & . & c_{n-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_1 & c_2 & c_3 & . & . & . & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matrise circulant matris denir. Genel anlamda $n \times n$ mertebeli bir circulant matris n elemanlı bir vektör ile temsil edilir ve bu vektör matrisin ilk satırını oluşturur. Böylece takip eden satırlar önceki satırın sağa doğru bir basamak kaydırılması ile elde edilir. Bu tip circulant matrislere aynı zamanda 1- circulant matris de denir. Bir circulant matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanları eşittir. Aynı şekilde esas köşegene parelel köşegenler üzerindeki elemanlar da birbirine eşittir. Dolayısıyla her circulant matris aynı zamanda Toeplitz matrisidir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

1.1.2.1. Circulant matrislerin özellikleri

i) A ve B aynı mertebeli iki circulant matris ve a ve b iki skaler olmak üzere $aA+bB$ matrisi de bir circulant matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $a = 2$ ve $b = 3$ olsun.

$$aA + bB = \begin{bmatrix} 1.2 & 2.2 \\ 2.2 & 1.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.3 & 4.3 \\ 4.3 & 3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 11 \end{bmatrix}$$

olup elde edilen matris de bir circulant matristir.

ii) Aynı mertebeli iki circulant matrisin çarpımı yine bir circulant matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ circulant matrisleri için

$$AB = \begin{bmatrix} 5.4+6.3 & 5.3+6.4 \\ 6.4+5.3 & 6.3+5.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 39 \\ 39 & 38 \end{bmatrix}$$

olup elde edilen matris de bir circulant matristir.

iii) Aynı mertebeli iki circulant matrisin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ circulant matrisleri için

$$AB=\begin{bmatrix}5.4+6.3 & 5.3+6.4\\ 6.4+5.3 & 6.3+5.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38 & 39\\ 39 & 38\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.5+3.6 & 4.6+3.5\\ 3.5+4.6 & 3.6+4.5\end{bmatrix}=BA$$

olup değişme özeliği mevcuttur.

iv) Bir circulant matrisin transpozesi de circulant matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}$ ise

$$A^T=\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}=A$$

olup elde edilen matris de bir circulant matristir.

v) İlk satırı $C_n=(c_0,c_1,...,c_{n-1})$ olan $n\times n$ mertebeli circulant matris ve w_k, $w^n-1=0$ denkleminin farklı çözümlerinden biri olmak üzere circulant matrisin öz değerleri

$$\lambda_k=a_0+a_1w_k+a_2w_k^2+\cdots+a_{n-1}w_k^{n-1}\quad (k=0,1,2,...,n-1)$$

şeklindedir [5]. Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler

$$X_i=(1,w_k,w_k^2,...,w_k^{n-1})^T$$

formülü ile verilir [5]. Bu circulant matrisin determinantı ve tersi

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\ ,\ w=e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\right)}$$

olmak üzere

$$\det C_n=\prod_{r=0}^{n-1}g(w^r)$$

ve

$$b_s=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}g(w^r)^{-1}.w^{-rs}\ \ (s=0,1,...,n-1)$$

olmak üzere

$$C_n^{-1}=Circ(b_0,b_1,...,b_{n-1})$$

formülleri ile verilir [5].

Lemma 1.1.2.1.1[7]**:** $C_n = circ(c_0, c_1, ..., c_{n-1})$ circulant matrisi verilsin. Bu taktirde;

1) C_n matrisinin terslenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1} \text{ ve } w = e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\right)}$$

olmak üzere $f(w^k) \neq 0$ $(k = 0,1,...,n-1)$ olmasıdır.

2) C_n terslenebilir bir matris ve tersi de C_n^{-1} ise, C_n^{-1} de circulant matristir.

1.1.3. *r*Circulant matrisler

$$A = rcirc(c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & . & . & . & c_{n-1} \\ rc_{n-1} & c_0 & c_1 & . & . & . & c_{n-2} \\ rc_{n-2} & rc_{n-1} & c_0 & . & . & . & c_{n-3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 & . & . & . & c_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matrise *r*circulant matris denir [8]. Bir *r*circulant matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanları eşittir. Aynı şekilde esas köşegene parelel köşegenler üzerindeki elemanlar da birbirine eşittir. Dolayısıyla her *r*circulant matris aynı zamanda Toeplitz matrisidir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Eğer biz "*r*" katsayısını $r = 1$ alırsak, *r*circulant matris, circulant matris olur.

1.1.4. *r*Circulant matrislerin tersleri

Tanımdan da görüldüğü gibi, *r*circulant matrisler aynı zamanda bir Toeplitz matristir. [9]'deki teoremden anlaşıldığı üzere, *r*circulant tipindeki Toeplitz matrislerin tersi de Toeplitz matristir. [3]'deki Gohberg ve Semencul'un teoreminden de elde ettiğimiz Toeplitz matrisin *r*circulant matris olduğu görülür.

2. ELEMANLARI FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINDAN OLUŞAN *r*CİRCULANT MATRİSLERİN DETERMİNANTLARI VE TERSLERİ

2.1. Teorem: $E_n = rcirc(F_1, F_2, ..., F_n)$ $r$circulant matris olsun. E_n matrisinin determinantı; $r \neq \dfrac{F_1}{F_{n+1}}$ ve

$$f_n = F_1 - rF_n + \sum_{k=1}^{n-2} r.F_k.\left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}}\right)^{n-(k+1)}$$

olmak üzere

$$\det(E_n) = F_1.f_n.(F_1 - rF_{n+1})^{n-2}$$

dir.

İspat: $n=1$ için $\det(E_1)=1$ olduğu açıktır. $n>1$ için

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ -r & & & & & & & 1 \\ -r & & & & & & 1 & -1 \\ 0 & & & & & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & & & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ 0 & & & 1 & \iddots & \iddots & & \\ 0 & & 1 & -1 & \iddots & & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & -1 & & & & \end{bmatrix},\quad N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\dfrac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(\dfrac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}}\right) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde M ve N_1 gibi iki tane $n \times n$ matris alalım. Bu takdirde

$$f_n = F_1 - rF_n + \sum_{k=1}^{n-2} rF_k\left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}}\right)^{n-(k+1)}$$

ve

$$f_n' = \sum_{k=1}^{n-1} F_{k+1}\left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}}\right)^{n-(k+1)}$$

olmak üzere

$$ME_nN_1 = \begin{bmatrix} F_1 & f_n' & F_{n-1} & F_{n-2} & \cdots & F_3 & F_2 \\ 0 & f_n & rF_{n-2} & rF_{n-3} & \cdots & rF_2 & rF_1 \\ 0 & 0 & F_1 - rF_{n+1} & & & & \\ 0 & 0 & -rF_n & F_1 - rF_{n+1} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & -rF_n & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \ddots & F_1 - rF_{n+1} & \\ 0 & 0 & & 0 & & -rF_n & F_1 - rF_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$\det M \det E_n \det N_1 = F_1.f_n.(F_1 - rF_{n+1})^{n-2}$$

olur.

$$\det M = \det N_1 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

olduğundan

$$\det E_n = F_1 . f_n . (F_1 - rF_{n+1})^{n-2}$$

olur ki, ispat tamamlanır.

Lemma 2.1: $r \neq \frac{F_1}{F_{n+1}}$ için $P = \left[p_{i,j} \right]_{i,j=1}^{n-2}$ matrisi

$$p_{i,j} = \begin{cases} F_1 - rF_{n+1}, & i = j \\ -rF_n, & i = j+1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde $(n-2)\times(n-2)$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde P matrisinin tersi olan $P^{-1} = \left[p'_{i,j} \right]_{i,j=1}^{n-2}$ matrisi

$$p'_{ij} = \begin{cases} \frac{(rF)_n^{i-j}}{(F_1 - rF_{n+1})^{i-j+1}}, & i \geq j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

formülüyle verilir.

İspat: Kabul edelim ki, P nin tersi P^{-1} olsun. olsun. $i < j$ için $c_{ij} = 0$ olduğu açıkça görülüyor. $i = j$ ve $r \neq \frac{F_1}{F_{n+1}}$ için

$$c_{ii} = p_{ii} . p'_{ii} = (F_1 - rF_{n+1}) . \frac{1}{(F_1 - rF_{n+1})} = 1$$

ve $i \geq j+1$ ve $F_1 - rF_{n+1} \neq 0$ için

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n-2} p_{ik} . p'_{kj} = p_{ii-1} . p'_{i-1,j} + p_{ii} . p'_{ij}$$

$$= (-rF_n) . \frac{(rF_n)^{i-j-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^{i-j}} + (F_1 - rF_{n+1}) . \frac{(rF)_n^{i-j}}{(F_1 - rF_{n+1})^{i-j+1}} = 0$$

olur. O halde $PP^{-1} = I_{n-2}$ olur ki, istenen ters matris elde edilmiş olur. Benzer şekilde $P^{-1}P = I_{n-2}$ olduğu da kolayca gösterilir.

2.2. Teorem: $n>2$ için $E_n = rcirc(F_1, F_2, ..., F_n)$ $r$circulant matrisinin tersi;

$$r \neq \frac{F_1}{F_{n+1}} \text{ ve } f_n = F_1 - rF_n + \sum_{k=1}^{n-2} r.F_k \left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

olmak üzere

$$E_n^{-1} = \frac{1}{f_n} \left\{ rcirc \left(1 + r\sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} \, , \, -1 + r.\sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} \, , \, -\frac{1}{F_1 - rF_{n+1}} \, , \right. \right.$$
$$\left. \left. -\frac{rF_n}{(F_1 - rF_{n+1})^2}, -\frac{(rF_n)^2}{(F_1 - rF_{n+1})^3} \, , \ldots , \, -\frac{(rF_n)^{n-3}}{(F_1 - rF_{n+1})^{n-2}} \right) \right\}$$

dir.

İspat:

$$f_n = F_1 - rF_n + \sum_{k=1}^{n-2} r.F_k \left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

ve

$$f_n' = \sum_{k=1}^{n-1} F_{k+1} \left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

olmak üzere

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & -f_n' & \frac{r.f_n'}{f_n}F_{n-2} - F_{n-1} & \frac{r.f_n'}{f_n}F_{n-3} - F_{n-2} & \cdots & \frac{r.f_n'}{f_n}F_1 - F_2 \\ 0 & 1 & -\frac{r.F_{n-2}}{f_n} & -\frac{r.F_{n-3}}{f_n} & \cdots & -\frac{r.F_1}{f_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. O halde

$$M.E_n.N_1.N_2 = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_1 - rF_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -rF_n & F_1 - rF_{n+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -rF_n & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -rF_n & F_1 - rF_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -rF_n & F_1 - rF_{n+1} \end{bmatrix}$$

olur. $V = diag(F_1, f_n)$ ve $V \oplus Y$, V ile Y nin direkt toplamı olmak üzere

$$ME_n N_1 N_2 = V \oplus Y$$

olarak yazılabilir. $N = N_1 N_2$ alınırsa,

$$E_n^{-1} = N(V^{-1} \oplus Y^{-1})M$$

olarak elde edilir. N matrisinin son satırı

$$\left(0,1,-\frac{rF_{n-2}}{f_n},-\frac{rF_{n-3}}{f_n},...,-\frac{rF_2}{f_n},-\frac{rF_1}{f_n}\right)$$

olur. E_n , $r$circulant matris olduğundan E_n^{-1} matrisi de $r$circulant olacaktır [3,4,9].

$$E_n^{-1} = rcirc(x_1, x_2, ..., x_n)$$

alınırsa, Lemma 2.1'den ve $E_n^{-1} = N(V^{-1} \oplus Y^{-1})M$ eşitliğinden faydalanılarak E_n^{-1} $r$circulant matrisinin son satır elemanları;

$$r.x_2 = -\frac{r}{f_n} + \frac{r^2}{f_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i},$$

$$r.x_3 = -\frac{rF_1}{f_n(F_1 - rF_{n+1})},$$

$$r.x_4 = -\frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{3-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \frac{rF_1}{f_n(F_1 - rF_{n+1})},$$

$$r.x_5 = -\frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{3}\frac{F_{4-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{3-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \frac{rF_1}{f_n(F_1 - F_{n+1})},$$

$$\vdots$$

$$r.x_n = -\frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{F_{n-2-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{n-4}\frac{F_{n-3-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i},$$

$$x_1 = \frac{1}{f_n} + \frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \frac{r}{f_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{F_{n-2-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}$$

olur. $j = 1, 2, ..., n-2$ için

$$B_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{j}\frac{F_{j+1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}$$

olsun. O halde

$$B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = -\frac{F_1}{F_1 - rF_{n+1}} + \sum_{i=1}^{2}\frac{F_{3-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} = \frac{rF_n}{(F_1 - rF_{n+1})^2}$$

$$B_n^{(n-2)} + B_n^{(n-3)} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} + \sum_{i=1}^{n-3} \frac{F_{n-2-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} = \frac{F_1(rF_n)^{n-3}}{(F_1 - rF_{n+1})^{n-2}} + \sum_{i=1}^{n-3} \frac{(F_{n-1-i} + F_{n-2-i})(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}$$

ve

$$B_n^{(j+2)} - B_n^{(j+1)} - B_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{j+2} \frac{F_{j+3-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} - \sum_{i=1}^{j+1} \frac{F_{j+2-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i} - \sum_{i=1}^{j} \frac{F_{j+1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}$$
$$= \frac{F_2(rF_n)^j}{(F_1 - rF_{n+1})^{j+1}} + \frac{F_1(rF_n)^{j+1}}{(F_1 - rF_{n+1})^{j+2}} - \frac{F_1(rF_n)^j}{(F_1 - rF_{n+1})^{j+1}}$$
$$+ \sum_{i=1}^{j} \frac{(F_{j+3-i} - F_{j+2-i} - F_{j+1-i})(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}$$
$$= \frac{(rF_n)^{j+1}}{(F_1 - rF_{n+1})^{j+2}}, \ (j = 1, 2, ..., n-4)$$

olur. Buradan da

$$E_n^{-1} = rcirc\left(\frac{1 + rB_n^{(n-2)} + rB_n^{(n-3)}}{f_n}, \frac{rB_n^{(n-2)} - 1}{f_n}, -\frac{B_n^{(1)}}{f_n}, -\frac{B_n^{(2)} - B_n^{(1)}}{f_n}, \right.$$
$$\left. -\frac{B_n^{(3)} - B_n^{(2)} - B_n^{(1)}}{f_n}, \ldots, -\frac{B_n^{(n-2)} - B_n^{(n-3)} - B_n^{(n-4)}}{f_n} \right)$$
$$= \frac{1}{f_n} \left\{ rcirc\left(1 + r.\sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}, -1 + r.\sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1 - rF_{n+1})^i}, -\frac{1}{F_1 - rF_{n+1}}, \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{rF_n}{(F_1 - rF_{n+1})^2}, -\frac{(rF_n)^2}{(F_1 - rF_{n+1})^3}, \ldots, -\frac{(rF_n)^{n-3}}{(F_1 - rF_{n+1})^{n-2}} \right) \right\}$$

olur ki, bu da istenendir.

2.3.Teorem: L_k, k. Lucas sayısı olmak üzere $K_n = rCirc(L_1, L_2, ..., L_n)$ $r$circulant matrisinin determinantı

$$r \neq \frac{L_1}{L_{n+1}} \text{ ve } l_n = L_1 - 3rL_n + \sum_{k=1}^{n-2} r(L_{k+2} - 3L_{k+1}) \left(\frac{rL_n - 2}{L_1 - rL_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

için

$$\det(K_n) = l_n.(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}$$

dir.

İspat: $n=1$ $\det(K_1)=1$ dir. $n>1$ için

$$U=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ -3r & & 0 & & & & 1 \\ -r & & & & & 1 & -1 \\ 0 & & & & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ 0 & & 1 & \iddots & \iddots & & \\ 0 & & \iddots & \iddots & & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & -1 & & & \end{bmatrix}$$

ve

$$Z_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{rL_n-2}{L_1-rL_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{rL_n-2}{L_1-rL_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{rL_n-2}{L_1-rL_{n+1}}\right) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$l_n=L_1-3rL_n+\sum_{k=1}^{n-2} r(L_{k+2}-3L_{k+1})\left(\frac{rL_n-2}{L_1-rL_{n+1}}\right)^{n-(k+1)}$$

ve

$$l'_n=\sum_{k=1}^{n-1} L_{k+1}\left(\frac{rL_n-2}{L_1-rL_{n+1}}\right)^{n-(k+1)}$$

için

$$UK_nZ_1=\begin{bmatrix} L_1 & l'_n & L_{n-1} & L_{n-2} & \cdots & L_3 & L_2 \\ 0 & l_n & r(L_n-3L_{n-1}) & r(L_{n-1}-3L_{n-2}) & \cdots & r(L_4-3L_3) & r(L_3-3L_2) \\ 0 & 0 & L_1-rL_{n+1} & & & & \\ 0 & 0 & 2-rL_n & L_1-rL_{n+1} & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & 2-rL_n & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \ddots & L_1-rL_{n+1} & \\ 0 & 0 & & 0 & & 2-rL_n & L_1-rL_{n+1} \end{bmatrix}$$

olur. Her iki tarafın determinantı alınırsa

$$\det(UK_nZ_1)=\det(K_n)=L_1.l_n.(L_1-rL_{n+1})^{n-2}$$

dir.

$$\det U = \det Z_1 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

olduğundan

$$\det(K_n) = L_1.l_n.(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}$$

olur ki, ispat tamamlanır.

Lemma 2.2:

$$h_{i,j} = \begin{cases} L_1 - rL_{n+1}, & i = j \\ 2 - rL_n, & i = j+1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $H = \left[h_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n-2}$ ve $r \neq \frac{L_1}{L_{n+1}}$ için $(n-2)\times(n-2)$ tipinde bir matris olsun. H matrisinin tersi vardır ve $H^{-1} = [h'_{ij}]_{i,j=1}^{n-2}$ tersi

$$h'_{ij} = \begin{cases} \frac{(rL_n - 2)^{i-j}}{(L_1 - rL_{n+1})^{i-j+1}}, & i \geq j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

formülüyle verilir.

İspat: $t_{ij} = \sum_{k=1}^{n-2} h_{ik}.h'_{kj}$ olsun. $i < j$ için $t_{ij} = 0$ dır. $i = j$ için

$$t_{ii} = h_{ii}.h'_{ii} = (L_1 - rL_{n+1}).\frac{1}{(L_1 - rL_{n+1})} = 1$$

ve $i \geq j+1$ için

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n-2} h_{ik}.h'_{kj} = h_{i,i-1}.h'_{i-1,j} + h_{ii}.h'_{ij}$$

$$= (2 - rL_n).\frac{(rL_n - 2)^{i-j-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^{i-j}} + (L_1 - rL_{n+1}).\frac{(rL_n - 2)^{i-j}}{(L_1 - rL_{n+1})^{i-j+1}} = 0$$

olur ki, $HH^{-1} = I_{n-2}$ istenendir. Benzer şekilde $H^{-1}H = I_{n-2}$ olduğu da gösterilir.

2.4. Teorem: $K_n = rcirc(L_1, L_2, ..., L_n)$ *r*circulant matrisinin tersi;

$$r \neq \frac{L_1}{L_{n+1}} \text{ ve } l_n = L_1 - 3rL_n + \sum_{k=1}^{n-2} r.(L_{k+2} - 3L_{k+1}) \left(\frac{rL_n - 2}{L_1 - rL_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

olmak üzere

$$K_n^{-1} = rcirc\left(\frac{1}{l_n} \left\{ 1 + r.\sum_{i=1}^{n-2} \frac{(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, -3 + r\sum_{i=1}^{n-2} \frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, \right. \right.$$

$$\left. \left. , \frac{5}{L_1 - rL_{n+1}}, \frac{5(rL_n - 2)}{(L_1 - rL_{n+1})^2}, \frac{5(rL_n - 2)^2}{(L_1 - rL_{n+1})^3}, ..., \frac{5(rL_n - 2)^{n-3}}{(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}} \right\} \right)$$

dir.

İspat:

$$l_n = L_1 - 3rL_n + \sum_{k=1}^{n-2} r.(L_{k+2} - 3L_{k+1}) \left(\frac{rL_n - 2}{L_1 - rL_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

ve

$$l'_n = \sum_{k=1}^{n-1} L_{k+1} \left(\frac{rL_n - 2}{L_1 - rL_{n+1}} \right)^{n-(k+1)}$$

olmak üzere

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & -l'_n & \frac{l'_n.r.(L_n - 3L_{n-1})}{l_n} - L_{n-1} & \frac{l'_n.r.(L_{n-1} - 3L_{n-2})}{l_n} - L_{n-2} & \dots & \frac{l'_n.r.(L_3 - 3L_2)}{l_n} - L_2 \\ 0 & 1 & -r\frac{L_n - 3L_{n-1}}{l_n} & -r\frac{L_{n-1} - 3L_{n-2}}{l_n} & \dots & -r\frac{L_3 - 3L_2}{l_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. O halde $V = diag(L_1, l_n)$ ve $V \oplus D$ V ile D nin direkt toplamı olmak üzere

$$UK_nZ_1Z_2 = V \oplus D$$

yazabiliriz. $Z = Z_1Z_2$ olarak alınırsa,

$$K_n^{-1} = Z(V^{-1} \oplus D^{-1})U$$

elde edilir. Z matrisinin son satırı

$$\left(0, 1, \frac{r.(3L_{n-1} - L_n)}{l_n}, \frac{r.(3L_{n-2} - L_{n-1})}{l_n}, \dots, \frac{r.(3L_2 - L_3)}{l_n} \right)$$

dir. K_n , *r*circulant matris olduğundan K_n^{-1} matrisi de *r*circulant olacaktır [3,4,9].

$K_n^{-1} = rcirc(y_1, y_2, ..., y_n)$ olsun. Lemma 2.2'den K_n^{-1} in son satır elemanları;

$$r.y_2 = -\frac{3r}{l_n} + \frac{r^2}{l_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i},$$

$$ry_3 = -\frac{r(L_3 - 3L_2)}{l_n(L_1 - rL_{n+1})},$$

$$ry_4 = \frac{r(L_3 - 3L_2)}{l_n(L_1 - rL_{n+1})} + \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{5-i} - 3L_{4-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i},$$

$$ry_5 = \frac{r(L_3 - 3L_2)}{l_n(L_1 - rL_{n+1})} + \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{5-i} - 3L_{4-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} - \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{3}\frac{(L_{6-i} - 3L_{5-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i},$$

$$\vdots$$

$$ry_n = \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{n-4}\frac{(L_{n-1-i} - 3L_{n-2-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} + \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{(L_{n-i} - 3L_{n-1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}$$
$$-\frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i},$$

$$y_1 = \frac{1}{l_n} + \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{(L_{n-i} - 3L_{n-1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} + \frac{r}{l_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}.$$

olarak elde edilir. $j = 1, 2, ..., n-2$ için

$$T_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{j}\frac{(L_{j+3-i} - 3L_{j+2-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}$$

olsun. Bu taktirde

$$T_n^{(1)} - T_n^{(2)} = \frac{L_3 - 3L_2}{L_1 - L_{n+1}} - \sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{5-i} - 3L_{4-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} = \frac{5(rL_n - 2)}{(L_1 - rL_{n+1})^2}$$

$$\begin{aligned} T_n^{(n-3)} - T_n^{(n-2)} &= \sum_{i=1}^{n-3}\frac{(L_{n-i} - 3L_{n-1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} \\ &= \frac{(L_3 - 3L_2)(rL_n - 2)^{n-3}}{(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}} + \sum_{i=1}^{n-3}\frac{(L_{n-i} - 3L_{n-1-i} + L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} \\ &= \frac{(L_4 - 3L_3)(rL_n - 2)^{n-3}}{(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}} + \sum_{i=1}^{n-3}\frac{(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, \end{aligned}$$

$$T_n^{(j)} + T_n^{(j+1)} - T_n^{(j+2)} = \sum_{i=1}^{j} \frac{(L_{j+3-i} - 3L_{j+2-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i} + \sum_{i=1}^{j+1} \frac{(L_{j+4-i} - 3L_{j+3-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}$$

$$- \sum_{i=1}^{j+2} \frac{(L_{j+5-i} - 3L_{j+4-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}$$

$$= \frac{(L_3 - 3L_2)(rL_n - 2)^j}{(L_1 - rL_{n+1})^{j+1}} - \frac{(L_4 - 3L_3)(rL_n - 2)^j}{(L_1 - rL_{n+1})^{j+1}} - \frac{(L_3 - 3L_2)(rL_n - 2)^{j+1}}{(L_1 - rL_{n+1})^{j+2}}$$

$$= \frac{5(rL_n - 2)^{j+1}}{(L_1 - rL_{n+1})^{j+2}}, \quad (j = 1, 2, ..., n-4)$$

olur. Buradan da

$$K_n^{-1} = rcirc\left(\frac{1 + rT_n^{(n-3)} + rT_n^{(n-2)}}{l_n}, \frac{rT_n^{(n-2)} - 3}{l_n}, -\frac{T_n^{(1)}}{l_n}, \frac{T_n^{(1)} - T_n^2}{l_n}, \frac{T_n^{(1)} + T_n^{(2)} - T_n^{(3)}}{l_n}, \ldots, \frac{T_n^{(n-4)} + T_n^{(n-3)} - T_n^{(n-2)}}{l_n} \right)$$

$$= rcirc\left(\frac{1}{l_n} \left\{ 1 + r.\sum_{i=1}^{n-2} \frac{(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, -3 + r.\sum_{i=1}^{n-2} \frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{5}{L_1 - rL_{n+1}}, \frac{5(rL_n - 2)}{(L_1 - rL_{n+1})^2}, \frac{5(rL_n - 2)^2}{(L_1 - rL_{n+1})^3}, \ldots, \frac{5(rL_n - 2)^{n-3}}{(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}} \right\} \right)$$

olur ki, bu da istenendir.

3. ÖRNEKLER

Örnek 3.1: $r=2$ için elemanları Fibonacci sayılarından oluşan E_4, $r$circulant matrisinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm: Bu problemi *maple* programı ile çözersek

```
> with(linalg) :
r := 2;
```

$$2$$

```
E4 := matrix(4, 4, [1, 1, 2, 3, 3·r, 1, 1, 2, 2·r, 3·r, 1, 1, r, 2·r, 3·r, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

```
det(E4);
```

$$-441$$

olur. Şimdi elde ettiğimiz formül ile sonuca gidelim.

$$\det(E_n)=F_1.f_n.(F_1-rF_{n+1})^{n-2} \Rightarrow n=4 \text{ için } \det(E_4)=F_1.f_4.(F_1-2.F_5)^{4-2}$$

$$f_n=F_1-rF_n+\sum_{k=1}^{n-2} rF_k\left(\frac{rF_n}{F_1-rF_{n+1}}\right)^{n-(k+1)} \quad ise$$

$$n=4 \; ve \; r=2 \text{ için } \; f_4=F_1-2.F_4+\sum_{k=1}^{2} 2.F_k\left(\frac{2.F_4}{F_1-2.F_5}\right)^{3-k}$$

olur. Bu durumda $\det(E_4)=f_4.(-9)^2$ dır.

$$f_4=-5+2.\left(\left(\frac{6}{9}\right)^2-\frac{6}{9}\right)=\frac{-49}{9}$$

olduğundan $\det(E_4)=\frac{-49}{9}.(-9)^2=-441$ olur.

Örnek 3.2: $r=3$ için elemanları Fibonacci sayılarından oluşan E_5, $r$circulant matrisinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm: Bu problemin *maple* çözümü

```
> with(linalg) :
r := 3;
```

$$3$$

```
E5 := matrix(5, 5, [1, 1, 2, 3, 5, 5·r, 1, 1, 2, 3, 3·r, 5·r, 1, 1, 2, 2·r, 3·r,
    5·r, 1, 1, r, 2·r, 3·r, 5·r, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 15 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 15 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 15 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

$det(E5);$

$$212548$$

olur.

Şimdi elde ettiğimiz formül ile sonuca gidelim.

$$\det(E_n) = F_1.f_n.(F_1 - rF_{n+1})^{n-2} \Rightarrow n = 5 \; ve \; r = 3 \; için \;\; \det(E_5) = F_1.f_5.(F_1 - 3.F_6)^{5-2}$$

$$f_n = F_1 - rF_n + \sum_{k=1}^{n-2} rF_k \left(\frac{rF_n}{F_1 - rF_{n+1}} \right)^{n-(k+1)} \quad ise$$

$$n = 5 \; ve \; r = 3 \; için \;\; f_5 = F_1 - 3.F_5 + \sum_{k=1}^{3} 3.F_k \left(\frac{3.F_5}{F_1 - 3.F_6} \right)^{4-k}$$

olur. Bu durumda $\det(E_5) = f_5.(-23)^3$ dır.

$$f_5 = 1 - 3.5 + 3.\left(\left(\frac{15}{-23} \right)^3 + \left(\frac{15}{-23} \right)^2 - \frac{30}{23} \right) = \frac{-212548}{(23)^3}$$

olduğundan $\det(E_5) = \frac{-212548}{(23)^3}.(-23)^3 = 212548$ olur.

Örnek 3.3: $r = 4$ için elemanları Lucas sayılarından oluşan K_3, $r$circulant matrisinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm: Problemin *maple* ile çözümü

```
> with(linalg) :
r := 4;
```

$$4$$

```
K3 := matrix(3, 3, [1, 3, 4, 4·r, 1, 3, 3·r, 4·r, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 16 & 1 & 3 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

```
det(K3);
```

$$989$$

dır. Şimdi elde ettiğimiz formül ile sonuca gidelim.

$$\det(K_n) = l_n.(L_1 - rL_{n+1})^{n-2} \Rightarrow n = 3 \; ve \;\; r = 4 \; için \;\; \det(K_3) = l_3.(L_1 - 4.L_4)^{3-2}$$

$$l_n = L_1 - 3rL_n + \sum_{k=1}^{n-2} r.(L_{k+2} - 3L_{k+1}) \left(\frac{rL_n - 2}{L_1 - rL_{n+1}} \right)^{n-(k+1)} \quad ise$$

$$n=3\ ve\ \ r=4\ \ için\ l_3=L_1-3.4.L_3+\sum_{k=1}^{1}4.(L_{k+2}-3L_{k+1})\left(\frac{4L_3-2}{L_1-4L_4}\right)^{2-k}$$

olur. Bu durumda $\det(K_3)=l_3.(-27)$ dır.

$$l_3=1-3.4.4+4.(4-3.3)\left(\frac{4.4-2}{1-4.7}\right)=\frac{-989}{27}$$

olduğundan $\det(K_3)=\frac{-989}{27}.(-27)=989$ olur.

Örnek 3.4: $r=2$ için elemanları Lucas sayılarından oluşan K_4, $r$circulant matrisinin determinantını hesaplayınız.

Çözüm: Problemin *maple* ile çözümü

```
> with(linalg) :
r := 2;
```

$$2$$

```
K4 := matrix(4, 4, [1, 3, 4, 7, 7·r, 1, 3, 4, 4·r, 7·r, 1, 3, 3·r, 4·r, 7·r,
    1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 14 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 14 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
det(K4);
```

$$-17001$$

dir. Şimdi elde ettiğimiz formül ile istenen cevabı bulalım.

$$\det(K_n)=l_n.(L_1-rL_{n+1})^{n-2}\Rightarrow n=4\ ve\ \ r=2\ için\ \ \det(K_4)=l_4.(L_1-2.L_5)^{4-2}$$

$$l_n=L_1-3rL_n+\sum_{k=1}^{n-2}r.(L_{k+2}-3L_{k+1})\left(\frac{rL_n-2}{L_1-rL_{n+1}}\right)^{n-(k+1)}\ \ ise$$

$$n=4\ ve\ \ r=2\ \ için\ l_4=L_1-3.2.L_4+\sum_{k=1}^{2}2.(L_{k+2}-3L_{k+1})\left(\frac{2L_4-2}{L_1-2L_5}\right)^{3-k}$$

olur. Bu durumda $\det(K_4)=l_4.(-21)^2$ dır.

$$l_4=1-3.2.7+2.(4-3.3)\left(\frac{12}{21}\right)^2+2.(7-3.4)\left(\frac{12}{-21}\right)=-\frac{17001}{(21)^2}$$

olduğundan $\det(K_4)=\frac{-17001}{(21)^2}.(-21)^2=-17001$ olur.

Örnek 3.5: Örnek 3.1'deki E_4 matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: Problemin *maple* ile çözümü

```
> with(linalg) :
r := 2;
```

$$2$$

```
E4 := matrix(4, 4, [1, 1, 2, 3, 6, 1, 1, 2, 4, 6, 1, 1, 2, 4, 6, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

```
inverse(E4);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{19}{147} & \frac{29}{147} & -\frac{1}{49} & \frac{2}{147} \\ \frac{4}{147} & -\frac{19}{147} & \frac{29}{147} & -\frac{1}{49} \\ -\frac{2}{49} & \frac{4}{147} & -\frac{19}{147} & \frac{29}{147} \\ \frac{58}{147} & -\frac{2}{49} & \frac{4}{147} & -\frac{19}{147} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de elde ettiğimiz formülle cevabı bulalım.

$$E_n^{-1} = \frac{1}{f_n}\left\{ rcirc\left(1+r\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1-rF_{n+1})^i}\,,\, -1+r\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1-rF_{n+1})^i}\,,\, -\frac{1}{F_1-rF_{n+1}}\,,\right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{rF_n}{(F_1-rF_{n+1})^2}, -\frac{(rF_n)^2}{(F_1-rF_{n+1})^3}\,,\ldots,\, -\frac{(rF_n)^{n-3}}{(F_1-rF_{n+1})^{n-2}}\right)\right\}$$

için

$$E_4^{-1} = \frac{1}{f_4}\left\{ rcirc\left(1+2.\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{4-i}(2F_4)^{i-1}}{(F_1-2F_5)^i}\,,\, -1+2\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{3-i}(2F_4)^{i-1}}{(F_1-2F_5)^i}\,,-\frac{1}{F_1-2F_5}\,,-\frac{2F_4}{(F_1-2F_5)^2}\right)\right\}$$

olur. Örnek 3.1'den $f_4 = -\frac{49}{9}$ dur.

$$x_1 = \frac{1}{f_4}\left(1+2.\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{4-i}(2F_4)^{i-1}}{(F_1-2F_5)^i}\right) = \left(-\frac{9}{49}\right).\left(\frac{57}{81}\right) = -\frac{19}{147}$$

$$x_2 = \frac{1}{f_4}\left(-1+2\sum_{i=1}^{2}\frac{F_{3-i}(2F_4)^{i-1}}{(F_1-2F_5)^i}\right) = \frac{1}{f_4}\left(-1+\frac{2}{-9}+\frac{12}{81}\right) = \left(\frac{-9}{49}\right)\left(\frac{-87}{81}\right) = \frac{29}{147}$$

$$x_3 = \frac{1}{f_4}\left(-\frac{1}{F_1-2F_5}\right) = \frac{-9}{49}.\frac{1}{9} = -\frac{1}{49}$$

$$x_4 = \frac{1}{f_4}\left(-\frac{2F_4}{\left(F_1 - 2F_5\right)^2}\right) = \frac{-9}{49}.\frac{-6}{81} = \frac{2}{147}$$

olup $r = 2$ için E_4, $r$circulant matrisinin tersi

$$E_4^{-1} = rcirc(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} -\frac{19}{147} & \frac{29}{147} & -\frac{1}{49} & \frac{2}{147} \\ \frac{4}{147} & -\frac{19}{147} & \frac{29}{147} & -\frac{1}{49} \\ -\frac{2}{49} & \frac{4}{147} & -\frac{19}{147} & \frac{29}{147} \\ \frac{58}{147} & -\frac{2}{49} & \frac{4}{147} & -\frac{19}{147} \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 3.6: Örnek 3.2'deki E_5 matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: Problemin *maple* ile çözümü

```
with(linalg) :
r := 3;
```

$$3$$

```
E5 := matrix(5, 5, [1, 1, 2, 3, 5, 5·r, 1, 1, 2, 3, 3·r, 5·r, 1, 1, 2, 2·r, 3·r,
    5·r, 1, 1, r, 2·r, 3·r, 5·r, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 15 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 15 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 15 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

```
inverse(E5);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} & -\frac{529}{212548} & \frac{345}{212548} & -\frac{225}{212548} \\ -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} & -\frac{529}{212548} & \frac{345}{212548} \\ \frac{1035}{212548} & -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} & -\frac{529}{212548} \\ -\frac{1587}{212548} & \frac{1035}{212548} & -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} \\ \frac{44943}{212548} & -\frac{1587}{212548} & \frac{1035}{212548} & -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi de elde ettiğimiz formülle cevabı bulalım.

$$E_n^{-1}=\frac{1}{f_n}\left\{rcirc\left(1+r\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1-rF_{n+1})^i}\,,\,-1+r\sum_{i=1}^{n-2}\frac{F_{n-1-i}(rF_n)^{i-1}}{(F_1-rF_{n+1})^i}\,,\,-\frac{1}{F_1-rF_{n+1}}\,,\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{rF_n}{(F_1-rF_{n+1})^2},-\frac{(rF_n)^2}{(F_1-rF_{n+1})^3}\,,\ldots,-\frac{(rF_n)^{n-3}}{(F_1-rF_{n+1})^{n-2}}\right)\right\}$$

için

$$E_5^{-1}=\frac{1}{f_5}\left\{rcirc\left(1+3.\sum_{i=1}^{3}\frac{F_{5-i}(3F_5)^{i-1}}{(F_1-3F_6)^i}\,,\,-1+3\sum_{i=1}^{3}\frac{F_{4-i}(3F_5)^{i-1}}{(F_1-3F_6)^i}\,,\,-\frac{1}{F_1-3F_6}\,,-\frac{3F_5}{(F_1-3F_6)^2},-\frac{(3F_5)^2}{(F_1-3F_6)^3}\right)\right\}$$

olur. Örnek 3.2'den $f_5=\dfrac{-212548}{(23)^3}$ tür.

$$x_1=\frac{1}{f_5}\left(1+3.\sum_{i=1}^{3}\frac{F_{5-i}(3F_5)^{i-1}}{(F_1-3F_6)^i}\right)=\frac{1}{f_5}.\left(1+3.\left(\left(\frac{-3}{23}\right)+\frac{30}{(23)^2}-\frac{225}{(23)^3}\right)\right)=\left(-\frac{(23)^3}{212548}\right).\frac{8801}{(23)^3}=-\frac{8801}{212548}$$

$$x_2=\frac{1}{f_5}\left(-1+3\sum_{i=1}^{3}\frac{F_{4-i}(3F_5)^{i-1}}{(F_1-3F_6)^i}\right)=\frac{1}{f_5}\left(-1+3.\left(\frac{-2}{23}+\frac{15}{(23)^2}-\frac{225}{(23)^3}\right)\right)=\frac{-(23)^3}{212548}.\frac{-14981}{(23)^3}=\frac{14981}{212548}$$

$$x_3=\frac{1}{f_5}\left(-\frac{1}{F_1-3F_6}\right)=\frac{-(23)^3}{212548}.\frac{1}{23}=\frac{-529}{212548}$$

$$x_4=\frac{1}{f_5}\left(-\frac{3F_5}{(F_1-3F_6)^2}\right)=\frac{-(23)^3}{212548}.\frac{-15}{(23)^2}=\frac{345}{212548}$$

$$x_5=\frac{1}{f_5}\left(-\frac{(3F_5)^2}{(F_1-3F_6)^3}\right)=\frac{-(23)^3}{212548}.\frac{-225}{(-23)^3}=-\frac{225}{212548}$$

olup $r=3$ için E_5, *r*circulant matrisinin tersi

$$E_5^{-1}=rcirc(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\begin{bmatrix}-\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} & -\frac{529}{212548} & \frac{345}{212548} & -\frac{225}{212548}\\ -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} & -\frac{529}{212548} & \frac{345}{212548}\\ \frac{1035}{212548} & -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548} & -\frac{529}{212548}\\ -\frac{1587}{212548} & \frac{1035}{212548} & -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548} & \frac{14981}{212548}\\ \frac{44943}{212548} & -\frac{1587}{212548} & \frac{1035}{212548} & -\frac{675}{212548} & -\frac{8801}{212548}\end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 3.7: Örnek 3.3'deki K_3 matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: Problemin *maple* ile çözümü

```
> with(linalg) :
r := 4;
```

$$4$$

```
K3 := matrix(3, 3, [1, 3, 4, 4·r, 1, 3, 3·r, 4·r, 1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 16 & 1 & 3 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

```
inverse(K3);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{47}{989} & \frac{61}{989} & \frac{5}{989} \\ \frac{20}{989} & -\frac{47}{989} & \frac{61}{989} \\ \frac{244}{989} & \frac{20}{989} & -\frac{47}{989} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de elde ettiğimiz formülle cevabı bulalım.

$$K_n^{-1} = rcirc\left(\frac{1}{l_n}\left\{1 + r.\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, -3 + r\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i},\right.\right.$$
$$\left.\left., \frac{5}{L_1 - rL_{n+1}}, \frac{5(rL_n - 2)}{(L_1 - rL_{n+1})^2}, \frac{5(rL_n - 2)^2}{(L_1 - rL_{n+1})^3}, \ldots, \frac{5(rL_n - 2)^{n-3}}{(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}}\right\}\right)$$

için

$$K_3^{-1} = rcirc\left(\frac{1}{l_3}\left\{1 + 4.\sum_{i=1}^{1}\frac{(L_{5-i} - 3L_{4-i})(4L_3 - 2)^{i-1}}{(L_1 - 4L_4)^i}, -3 + 4.\sum_{i=1}^{1}\frac{(L_{4-i} - 3L_{3-i})(4L_3 - 2)^{i-1}}{(L_1 - 4L_4)^i}, \frac{5}{L_1 - 4L_4}\right\}\right)$$

olur. Örnek 3.3'den $l_3 = -\frac{989}{27}$ dir.

$$y_1 = \frac{1}{l_3}\left(1 + 4.\sum_{i=1}^{1}\frac{(L_{5-i} - 3L_{4-i})(4L_3 - 2)^{i-1}}{(L_1 - 4L_4)^i}\right) = \frac{-27}{989}.\frac{47}{27} = -\frac{47}{989}$$

$$y_2 = \frac{1}{l_3}\left(-3 + 4.\sum_{i=1}^{1}\frac{(L_{4-i} - 3L_{3-i})(4L_3 - 2)^{i-1}}{(L_1 - 4L_4)^i}\right) = \frac{-27}{989}.\frac{-61}{27} = \frac{61}{989}$$

$$y_3 = \frac{1}{l_3}\left(\frac{5}{L_1 - 4L_4}\right) = \frac{-27}{989}.\frac{-5}{27} = \frac{5}{989}$$

olup $r = 4$ için K_3 $r$circulant matrisinin tersi

$$K_3^{-1} = rcirc(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} -\frac{47}{989} & \frac{61}{989} & \frac{5}{989} \\ \frac{20}{989} & -\frac{47}{989} & \frac{61}{989} \\ \frac{244}{989} & \frac{20}{989} & -\frac{47}{989} \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 3.8: Örnek 3.4'deki K_4, $r$circulant matrisinin tersini hesaplayınız.

Çözüm: Problemin *maple* ile çözümü

```
with(linalg) :
r := 2;
```

$$2$$

```
K4 := matrix(4, 4, [1, 3, 4, 7, 7·r, 1, 3, 4, 4·r, 7·r, 1, 3, 3·r, 4·r, 7·r,
    1]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 14 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 14 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
inverse(K4);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{247}{5667} & \frac{137}{1889} & \frac{35}{5667} & -\frac{20}{5667} \\ -\frac{40}{5667} & -\frac{247}{5667} & \frac{137}{1889} & \frac{35}{5667} \\ \frac{70}{5667} & -\frac{40}{5667} & -\frac{247}{5667} & \frac{137}{1889} \\ \frac{274}{1889} & \frac{70}{5667} & -\frac{40}{5667} & -\frac{247}{5667} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de elde ettiğimiz formülle cevabı bulalım.

$$K_n^{-1} = rcirc\left(\frac{1}{l_n}\left\{1 + r.\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i}, -3 + r\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(L_{n+1-i} - 3L_{n-i})(rL_n - 2)^{i-1}}{(L_1 - rL_{n+1})^i},\right.\right.$$
$$\left.\left., \frac{5}{L_1 - rL_{n+1}}, \frac{5(rL_n - 2)}{(L_1 - rL_{n+1})^2}, \frac{5(rL_n - 2)^2}{(L_1 - rL_{n+1})^3}, \ldots, \frac{5(rL_n - 2)^{n-3}}{(L_1 - rL_{n+1})^{n-2}}\right\}\right)$$

için

$$K_4^{-1} = rcirc\left(\frac{1}{l_4}\left\{1 + 2.\sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{6-i} - 3L_{5-i})(2L_4 - 2)^{i-1}}{(L_1 - 2L_5)^i}, -3 + 2.\sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{5-i} - 3L_{4-i})(2L_4 - 2)^{i-1}}{(L_1 - 2L_5)^i}, \frac{5}{L_1 - 2L_5}, \frac{5(2L_4 - 2)}{(L_1 - 2L_5)^2}\right\}\right)$$

olur. Örnek 3.4'den $l_4 = \dfrac{-17001}{(21)^2}$ dir.

$$y_1 = \frac{1}{l_4}\left(1+2.\sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{6-i}-3L_{5-i})(2L_4-2)^{i-1}}{(L_1-2L_5)^i}\right) = \frac{-(21)^2}{17001}\left(1+\frac{20}{21}-\frac{120}{21^2}\right) = -\frac{247}{5667}$$

$$y_2 = \frac{1}{l_4}\left(-3+2.\sum_{i=1}^{2}\frac{(L_{5-i}-3L_{4-i})(2L_4-2)^{i-1}}{(L_1-2L_5)^i}\right) = \frac{-(21)^2}{17001}.\left(-3+\frac{10}{21}-\frac{120}{21^2}\right) = \frac{-(21)^2}{17001}.\frac{-1233}{21^2} = \frac{137}{1889}$$

$$y_3 = \frac{1}{l_4}\left(\frac{5}{L_1-2L_5}\right) = \frac{-(21)^2}{17001}.\frac{-5}{21} = \frac{35}{5667}$$

$$y_4 = \frac{1}{l_4}\left(\frac{5(2L_4-2)}{(L_1-2L_5)^2}\right) = \frac{-(21)^2}{17001}.\frac{60}{21^2} = -\frac{20}{5667}$$

olup $r=2$ için K_4, $r$circulant matrisinin tersi

$$K_4^{-1} = rcirc(y_1,y_2,y_3,y_4) = \begin{bmatrix} -\frac{247}{5667} & \frac{137}{1889} & \frac{35}{5667} & -\frac{20}{5667} \\ -\frac{40}{5667} & -\frac{247}{5667} & \frac{137}{1889} & \frac{35}{5667} \\ \frac{70}{5667} & -\frac{40}{5667} & -\frac{247}{5667} & \frac{137}{1889} \\ \frac{274}{1889} & \frac{70}{5667} & -\frac{40}{5667} & -\frac{247}{5667} \end{bmatrix}$$

olur.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Sonuç olarak biz özel bir matrisi ele aldık. Bu özel matrisin elemanlarını da yaygın olarak bilinen Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin elemanlarından seçtik. Daha sonra bu matrislerin determinantlarını ve terslerini formülize etmiş olduk.

4.2 Öneriler

Bu çalışmaya benzer şekilde sayı dizilerini seçerek ve daha farklı matrisler seçerek elde ettiğimiz matrislerin determinantlarını ve terslerini formülize edebiliriz.

KAYNAKLAR

[1] A. F. Horadam, Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, The University of North Carolina, Chapel Hill, N. C.

[2] D. Bozkurt, T. Y. Tam, Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas Numbers, Appl. Math. Comput. 219 (2012) 544–551.

[3] G. Labahn, T. Shalom, Inversion of Toeplitz Matrices with Only Two Standard Equations, Linear Algebra and Its Applications 175: 143-158(1992).

[4] I. C. Gohberg, A. A. Semencul, On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs (in Russian), Mat. Issled. 7(2):201-223(1972).

[5] P. J. Davis, Circulant matrices, A Wiley- Interscience Publication, Division of Applied Mathematics, Brown University.

[6] S. Solak, On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, Appl. Math. Comput. 160 (2005) 125-132.

[7] S. Q. Shen, J. M. Cen, Y. Hao, On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers, Appl. Math. Comput. 217(2011) 9790-9797.

[8] S. Q. Shen, J. M. Cen, Spectral norms of *r*circulant matrices with *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5,2010, no. 12, 569-578.

[9] T. N. E. Greville, Toeplitz Matrices with Toeplitz Inverses Revisited, Linear Algebra and Its Applications 55: 87-92(1983).

[10] T. Koshy, Fibonacci and Lucas numbers with Applications, A Wiley- Interscience Publication, Framingham State College.

[11] Z. Yosma, Fibonacci and Lucas numbers, Sakarya university, Yüksek Lisans Tezi.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Emrullah KIRKLAR
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : BİTLİS-1990
Telefon : 0506 335 17 07
Faks :
e-mail : emrullah.kirklar@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	**Ahlat Selçuklu Lisesi, Ahlat,BİTLİS**	**2006**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA**	**2011**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA**	**-**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR