الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Civil et Hydraulique
Ref :……

جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم:……
المرجع:……

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de

Doctorat en Génie Civil

Spécialité : Modélisation Numérique des Géomatériaux

Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel

---

Présentée par :

Hassina ZIOU

Soutenue publiquement le 23/04/2017

Devant le jury composé de :

Dr.Guettala A.Hamid	**Professeur**	**Président**	**Université de Biskra**
Dr. Guenfoud Mohamed	**Professeur**	**Rapporteur**	**Université de Guelma**
Dr.Belounar Lamine	**Professeur**	**Examinateur**	**Université de Biskra**
Dr.Tati Abdelouaheb	**Professeur**	**Examinateur**	**Université de Biskra**
Dr.Sedira Lakhdar	**MCA**	**Examinateur**	**Université de Biskra**
Dr.Maalem Toufik	**MCA**	**Examinateur**	**Université de Batna**

بسم الله الرحيم الرحمن

DEDICACE

Je dédie ce travail à

Ma famille que je prie de trouver ici l'expression de ma reconnaissance, de mon profond respect et de mes sentiments les plus respectueux. Ainsi qu'a tous mes amis.

REMERCIMENTS

Voilà venue une section très importante... la section des remerciements ! ! !
Peut-être est-ce la plus difficile dans un manuscrit ! En effet, chaque personne qui y est citée mérite la plus belle phrase ce qui nécessite des réels talents littéraires... Ainsi, comme tout un chacun, je vais essayer de faire au mieux et que tous les gens qui me liront sachent que ces quelques lignes ont été écrites avec tout mon cœur.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Mr le Professeur **MOHAMED GUENFOUD** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide et sa rigueur scientifique. Ses encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr **MOHAMED HIMEUR**, docteur à l'université du 08 mai 1945-Guelma-, qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur A.Hamid GUETTALA, Professeur à l'Université de Biskra, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Monsieur Lamine BELOUNAR, Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.
- Monsieur Abdelouaheb TATI, Professeur à l'Université de Biskra, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.
- Docteur Lakhdar SEDIRA, Enseignant à l'Université de Biskra, qui a accepté lui aussi d'examiner cette thèse. Je tiens à le remercier pour son extrême gentillesse.
- Docteur Toufik MAALEM, Enseignant à l'Université de Batna, d'avoir accepté d'examiner ce travail

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements aux enseignants du département de Génie Civil de l'Université de Biskra.
Je voudrais enfin remercier toute personne ayant contribué de prés ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Publications

En plus de cette thèse de doctorat, le sujet a conduit aux publications et communications suivantes:

❖ Publications internationales

1. **H. Ziou,** H. Guenfoud, M. Guenfoud, "Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method". International Journal of Structural Engineering 7(3), 239-261, 2016.
2. **H. Ziou,** M. Guenfoud " Buckling analysis of functionally graded material beams subjected to Eccentric Axial Load " ***(to be submitted)***.
3. **H. Ziou,** H. Guenfoud, M. Guenfoud**,** "Free vibration analysis of functionally graded materials beam using a Finite Element Method " ***(to be submitted)***.
4. **H. Ziou,** H. Guenfoud, M. Guenfoud "A finite element for the static analysis of functionally graded material beam" ***(to be submitted)***.

❖ Publications nationales

5. **H. Ziou,** H. Guenfoud, M. Himeur , M. Guenfoud, "Numerical modelling of an FGM beam using the finite element method". *Accepted Manuscript*. Courrier du Savoir Scientifique et Technique (Biskra), 2017.
6. H. Guenfoud**, H. Ziou,** M. Himeur, M. Guenfoud " Analyses of a composite functionally graded material beam with a new transverse shear deformation function ". Journal of Applied Engineering Science & Technology (Biskra) 2(2), 105-113, 2016.

❖ Communication internationale

7. H. Guenfoud, **H. Ziou,** M. Himeur, M. Guenfoud " An exact beam finite element based on a new polynomial shear function " (ACE2016), 12th International Congress on advances in civil engineering, September 21-23, 2016, Boğaziçi University, Istanbul/Turkey.

❖ **Communication nationale**

1. **H. Ziou,** H. Guenfoud, M. Himeur, M. Guenfoud " Etude du flambement des poutres FGM par la méthode des éléments finis ", CMG, 09 et 10 novembre 2015, Biskra-Algérie.

Résumé

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur, induisant des changements, en conséquence des propriétés thermomécaniques globales de l'élément structural qu'ils constituent. Ils ont été conçus pour pallier aux problèmes engendrés par des environnements thermiques sévères. L'analyse des structures en FGM nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, notamment, le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification de ces structures complexes.

Dans ce travail de thèse, un élément fini avec trois degré de liberté par nœud, a été développé, en utilisant les différentes théories de poutres à savoir: la théorie d'Euler Bernoulli (CBT) et la théorie de Timoshenko (TBT). Cet élément est destiné à l'analyse statique, l'analyse modale, et aussi l'analyse par flambement des poutres en FGM. La performance et la fiabilité de l'élément développé ont été évaluées à travers des tests de validation. Par ailleurs, des études paramétriques sont présentées pour souligner l'influence des différents paramètres sur les différentes analyses (statique, vibration, flambement). Ensuite, une nouvelle théorie à ordre élevé a été proposée qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser le comportement en flexion des poutres FGM. En plus, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la poutre FGM, une comparaison entre les théories d'ordre élevé a été établie.

L'utilisation d'éléments à facettes planes (éléments triangulaires), pour discrétiser les structures coques FGM est l'approche qu'on a considéré. En ce sens, la géométrie des coques FGM peut être approchée en utilisant les éléments plans par superposition d'un élément de membrane, un élément de flexion et d'un élément de couplage. Ceci suppose, bien sûr que les phénomènes de membrane et de flexion sont couplés. La comparaison des résultats obtenus avec des solutions de références, a montré la performance et la précision de l'approche proposée. L'utilisation de cette dernière permet l'analyse des structures coque FGM avec une précision satisfaisante.

Mots clés: Matériaux fonctionnellement gradués, poutre mince et épaisse, coque mince et épaisse, éléments finis, analyse statique, analyse dynamique, flambage.

Abstract

Functionally graded materials (FGM's) are a new kind of composite materials which have a gradual and continuous variation of the volume fraction of each component (usually metal and ceramic) through the thickness direction, leading to changes of global thermomechanical properties of the structural element they represent. They were designed to overcome the problems caused by severe thermal environments. Analysis of FGM structures requires to establish tools for modeling the mechanical behavior of increasingly sophisticated, including the calculation by the finite element method is essential for the design and verification of these complex structures.

In this thesis, a finite element with three degrees of freedom per node has been developed, using different beams theories namely Euler Bernoulli beam theory (CBT) and Timoshenko beam theory (TBT). This element is intended to the static analysis, modal analysis, and also the analysis of buckling FGM beams. The performance and accuracy of the developed element were evaluated through validation tests. In addition, parametric studies has been presented to highlight the influence of various parameters on the various analyzes (static, vibration, buckling). Then, a new higher order shear deformation beam theory have been proposed that takes into account the transverse shear effect to analyze the bending behavior of FGM beams. In addition, it don't need to use shear correction factor and gives a parabolic description of the shear stress across the thickness while meeting the zero shear stress condition on the free edges of the FGM beam, a comparison between the higher order theories have been established.

The use of flat elements (triangular elements) to discretize the FGM shell structures is the approach we have considered. In this sense, the geometry of FGM shells can be approximated using planar elements by superposing of a membrane element, bending element and a coupling element. This of course assumes that, the membrane and bending phenomena are coupled. Comparing the results obtained with reference solutions showed the performance and accuracy of the proposed approach. The use of this approach allows the analysis of FGM shell structures with satisfactory accuracy.

Keywords: Functionally graded materials, thin and thick beam, thin and thick shell, finite element, static analysis, dynamic analysis, buckling.

ملخّص

المواد متدرجة الخواص أو المتدرجة وظيفيا هي مجموعة جديدة من المواد المركبة تمتاز بتغيرات تدريجية و مستمرة لأجزاء الحجم لكل من المركبين (عموما المعادن و السيراميك) على مدى السمك، وهذا ما يؤدي إلى اختلاف في الخصائص الحرارية الميكانيكية للعنصر المكون للهيكل العام. و هي مصممة لمقاومة المشاكل التي تسببها البيئات شديدة الحرارة. يتطلب تحليل الهياكل المصنوعة من المواد متدرجة الخواص إلى أدوات إنشاء لنمذجة السلوك الميكانيكي على مستوى عالي، بما في ذلك، الحساب باستخدام طريقة العناصر المحدودة الذي أصبح أمر ضروري للتصميم والتحقق من هذه الهياكل المعقدة.

في هذه الأطروحة، تم تطويرعنصر محدود جديد مع ثلاث درجات من الحرية لكل عقدة، وذلك باستخدام النظريات المختلفة للروافد وهي : نظرية أويلر برنولي ونظرية تيموشينكو. هذا العنصر مخصص للتحليل الستاتيكي ، التحليل الديناميكي، و أيضا تحليل الاتواء للروافد المتدرجة الخواص. مقارنة النتائج المتحصل عليها مع الحلول المتاحة في المراجع أظهرت الأداء الجيد و أثبتت دقة النموذج المقترح.من جهة اخرى، أجريت دراسة بارومترية لإظهار تأثير بعض المعلمات على مختلف التحاليل (الانحناء، الاهتزاز والالتواء). بعدها تم اقتراح نظرية ترتيب عالية جديدة تأخذ بعين الاعتبار تأثير القص العرضي لتحليل سلوك الانحناء للروافد المتدرجة وظيفيا. وبالإضافة إلى ذلك، أنها لا تتطلب معامل تصحيح القص وتعطي وصف قطعي مكافئ لإجهاد القص عبر السمك، في حين يكون إجهاد القص صفر على حواف الرافدة، أيضا تم إنشاء مقارنة بين نظريات الترتيب العالي.

استعمال العناصر المسطحة (العناصر الثلاثية) لتقسيم الهياكل القشرية المتدرجة الخواص هي المنهج الذي اتبعناه، في هذا المعنى، هندسة هذه الهياكل تقرب باستعمال العناصر المستوية بتركيب عنصر غشاء، عنصر انحناء، وعنصر اقتران. وهذا يفترض بالطبع أن الغشاء و الانحناء في حالة ارتباط. وبمقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع حلول المراجع تم إظهار دقة وأداء المنهج المقترح. استخدام هذه الأخيرة غالبا ما يسمح بتحليل الهياكل القشرية المتدرجة وظيفيا بدقة كافية و مرضية.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا, رافدة رقيقة و سميكة ,عنصر قشري رقيق و سميك, طريقة العناصر المنتهية , التحليل الستاتيكي, التحليل الاهتزازي, الالتواء .

Table des matières

Résumé i

Abstract ii

ملخص iii

Table des matières iv

Liste des figures ix

Liste des tableaux xiv

Liste des notations xvi

1. Introduction 1

2. objective de la thèse 2

3. Plan de la thèse 2

CHAPITRE 1 : LES MATERIAUX COMPOSITES ET LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

1.1 Introduction 4

1.2 Classification des matériaux composites 5

1.3 Constituants des matériaux composites 5

1.3.1 Les fibres 6

1.3.2 Les matrices 6

1.3.3 L'interphase 7

1.4 Considérations d'usage des matériaux composites 7

1.4.1 Les avantages 7

1.4.2 Les inconvénients 8

1.5 Mécanismes de rupture des stratifiés composites à renforts de fibres longues 10

1.5.1 Rupture intra-laminaire 11

1.5.2 Rupture inter-laminaire 11

1.5.3 Rupture trans-laminaire 12

1.6 Délaminage et FGM 12

1.7 Idée générale sur le développement des FGM 14

1.8 Conceptions des structures FGM 15

1.9 Le gradient 17

1.10 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués 18

1.11 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel 19
1.12 Lois régissantes la variation des propriétés matérielles des FGM 21
1.13 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM 22
1.14 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM 23
1.15 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM 23
1.16 Conclusion 25

CHAPITRE 2 : REVUE DES TRAVAUX ANTERIEURS SUR LA MODELISATION DES FGM

2.1 Introduction 25
2.2 Structure de poutre 25
2.2.1 Etudes sur les problèmes élastiques statiques des poutres FGM 25
2.2.2 Etudes sur les problèmes de vibration des poutres FGM 27
2.2.3 Etudes sur les problèmes de flambement des poutres FGM 28
2.3 Structure de plaque 29
2.3.1 Etudes sur les problèmes élastiques statiques des plaques FGM 29
2.3.2 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques FGM 30
2.3.3 Etudes sur les problèmes de flambement des plaques FGM 31
2.4 Conclusion 31

CHAPITRE 3 : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1 Introduction 32
3.2 Généralités sur la mécanique des milieux continus et la méthode des éléments finis (MMC et MEF) 33
3.2.1 Cinématique des milieux continus 33
3.2.2 Les conditions de compatibilité cinématique 34
3.2.3 Contraintes, équations d'équilibre et déformations 35
3.2.3.1 Etat de contraintes 35
3.2.3.2 Equations d'équilibre 37
3.2.3.3 Tenseur des déformations 37
3.2.4 Loi de comportement 37
3.2.5 Principe des travaux virtuels 39

3.2.6 Principe des travaux virtuels complémentaires 39
3.3 La méthode des éléments finis en déplacement 39
3.3.1 Discrétisation du champ de déplacement 40
3.3.2 Application du principe des travaux virtuels (ou principe des déplacements virtuels) 40
3.3.3 Assemblage des éléments 41
3.4 La méthode des éléments finis en déformation 41
3.4.1 Hypothèse et démarche 42
3.4.2 Principe de formulation 42
3.4.3 Procédure de formulation 43
3.4.4 Ses avantages 44
3.5 Conclusion 45

CHAPITRE 4 : MODELISATION DES POUTRES EN MATERIAU A GRADIENT FONCTIONNEL

4.1 Structure de poutre 46
4.2 Modèle d'Euler Bernoulli 47
4.2.1 Analyse statique 47
4.2.1.1 Le champ de déplacement 47
4.2.1.2 Le champ de déformation et les contraintes normales 48
4.2.1.3 La position de l'axe neutre et les contraintes de cisaillement 48
4.2.1.4 Principe des travaux virtuel 50
4.2.2 Analyse modale 51
4.2.3 Instabilité au flambement 51
4.2.4 La formulation élément fini 54
4.2.4.1 Les fonctions d'interpolation 54
4.2.4.2 La matrice de rigidité 55
4.2.4.2.1 Partie membranaire 55
4.2.4.2.2 Partie couplage 55
4.2.4.2.3 Partie flexionnelle 55
4.2.4.3 La matrice de masse 56
4.2.4.3.1 Partie membranaire 56
4.2.4.3.2 Partie flexionnelle 57

4.2.4.4 Construction de la matrice des contraintes initiales $[K_\sigma]$ 57
4.3 Modèle de Timoshenko 58
4.3.1 Analyse statique 58
4.3.1.1 Le champ de déplacement 58
4.3.1.2 Les contraintes et les contraintes résultantes 59
4.3.1.3 La matrice constitutive généralisée 60
4.3.1.4 Le couplage axiale-flexion et l'axe neutre 60
4.3.2 La formulation élément finis 62
4.3.2.1 Les fonctions d'interpolation 62
4.3.2.2 La matrice de rigidité 64
4.3.2.2.1 Partie membranaire 64
4.3.2.2.2 Partie couplage 64
4.3.2.2.3 Partie flexionnelle 65
4.3.2.2.4 Partie de cisaillement 65
4.3.3 Analyse modale 66
4.3.3.1 La matrice de masse 66
4.3.3.1.1 Partie membranaire 66
4.3.3.1.2 Elément de poutre 66
4.3.4 Instabilité au flambement 67
4.3.4.1 Construction de la matrice des contraintes initiales $[K_\sigma]$ 67
4.4 Tests de validation 68
4.4.1 Analyse statique 68
4.4.1.1 Poutre FGM simplement appuyé soumise à une charge uniformément répartie 69
4.4.1.2 Comparaison entre les théories 71
4.4.1.3 L'influence du paramètre du matériau p sur la flèche, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement 73
4.4.2 Analyse modale 78
4.4.3 Analyse de stabilité initiale (flambement) 83
4.5 Etude paramétrique 86
4.5.1 L'effet du coefficient de Poisson sur l'analyse statique 86
4.5.1.1 Exemple 1 : poutre mince L/h=100 86
4.5.1.2 Exemple 2 : poutre à épaisseur modéré L/h=15 88

4.5.2 L'effet de cisaillement transversal, des conditions aux limites, du paramètre du matériau, et du rapport d'élancement sur l'analyse dynamique 92
4.5.3 L'effet de cisaillement transversal, des conditions aux limites, du paramètre du matériau, et du rapport d'élancement sue l'étude du flambement 99
4.6 Etude de la flexion des poutres FGM en utilisant une nouvelle théorie à ordre élevé 100
4.6.1 Théories de déformation de cisaillement à ordre élevé 101
4.6.2 Résultats numérique 102
4.6.2.1 Le premier cas : L/h=100 103
4.6.2.2 Le deuxième cas : L/h=5 105
4.7 Conclusion 108

CHAPITRE 5 : FORMULATION D'ELEMENTS DE COQUES FGM A BASE TRIANGULAIRE

5.1 Introduction 109
5.2 Formulation des éléments de flexion 109
5.2.1 Elément de plaque mince « Pmi43 » 109
5.2.1.1 Caractéristiques 109
5.2.1.2 Cinématique 110
5.2.1.3 Conditions de compatibilité cinématique 112
5.2.1.4 Loi de comportement 112
5.2.1.5 Equation d'équilibre 112
5.2.1.6 Fonctions d'interpolation 113
5.2.1.7 Matrice de rigidité élémentaire $\left[K_{pm}^{e}\right]$ 116
5.2.2 Elément de plaque épaisse « Pep43 » 117
5.2.2.1 Caractéristiques 117
5.2.2.2 Cinématique 117
5.2.2.3 Loi de comportement 118
5.2.2.4 Fonctions d'interpolation 118
5.2.2.5 Matrice de rigidité élémentaire $\left[K_{pe}^{e}\right]$ 121
5.3 Formulation de l'élément de membrane 121
5.3.1 Elément membranaire « T43 » 121
5.3.1.1 Caractéristiques 121

5.3.1.2 Loi de comportement 123
5.3.1.3 Matrice de rigidité $[K^e_{T43}]$ 123
5.4 Formulation de l'élément de couplage 124
5.4.1 Matrice de rigidité de couplage membrane-flexion (coque mince) $\left[K^e_{cpm}\right]$ 124
5.4.2 Matrice de rigidité de couplage membrane-flexion (coque épaisse) $\left[K^e_{cpe}\right]$ 125
5.5 Formulation des éléments de coque FGM 125
5.6 Test de validation 128
5.6.1 Coque mince 128
5.6.1.1 Validation vis-à-vis du comportement membranaire 128
5.6.1.2 Coque console en FGM soumise à une charge ponctuelle à son extrémité 130
5.6.2 Coque épaisse 131
5.6.2.1 Validation vis-à-vis du comportement membranaire 131
5.6.2.2 Validation vis-à-vis du comportement flexionnel 132
5.6.3 Une coque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentré ou répartie 133
5.7 Conclusion 135
Conclusion générale et perspectives 136
Références bibliographiques 138
Annexes 148

Liste des figures

CHAPITRE 1
LES MATERIAUX COMPOSITES ET LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL

Figure 1.1 : Classification des matériaux composites [2] 5

Figure 1.2 : Rupture par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) ±45°, (d) 0°/90° [7] 10

Figure 1.3 : Rupture par traction de différentes séquences d'empilement (a) 0°/90° tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope, (d) 0°/90° [7] 10

Figure 1.4 : Mécanismes de rupture dans un stratifié [7] 11

Figure 1.5 : Evolution de défauts [8] 13

Figure 1.6 : Mécanismes de l'endommagement accompagnant le délaminage [9] 13

Figure 1.7 : Configurations des composites et des FGM 14

Figure 1.8 : Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al2O3-SUS304) 16

Figure 1.9 : Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [14] 17

Figure 1.10 : Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM 18

Figure 1.11 : Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel : a) première approche; b) deuxième approche 19

Figure 1.12 : Variation continue de la microstructure : a) (schématisée) ; b) (photo) 20

Figure 1.13 : Géométrie d'une poutre FGM 21

Figure 1.14 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM 22

Figure 1.15 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM) 23

Figure 1.16 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM) 24

CHAPITRE 3
LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Figure 3.1 : Cinématique des milieux continus 33

Figure 3.2 : Corps en équilibre 35

CHAPITRE 4

MODELISATION DES POUTRES EN MATERIAU A GRADIENT FONCTIONNEL

Figure 4.1 : Elément de poutre FGM (Bernoulli) 47

Figure 4.2 : Un élément de poutre 54

Figure 4.3 : Convention de signe concernant N, M et Q 60

Figure 4.4 : La position de l'axe neutre sur une section de poutre rectangulaire 62

Figure 4.5 : Chargement appliqué à la poutre céramique-métal 69

Figure 4.6 : La variation de la flèche et de la contrainte normale non dimensionnelle en fonction de différents paramètres du matériau d'une poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie 70

Figure 4.7 : L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau pour (L/h=5) [a) TBT, b) CBT] 71

Figure 4.8 : L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau pour (L/h=20) [a) TBT, b) CBT] 71

Figure 4.9 : La distribution des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans la direction de l'épaisseur pour L/h=5 72

Figure 4.10 : La distribution des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans la direction de l'épaisseur pour L/h=20 72

Figure 4.11 : La flèche maximale non dimensionnelle d'une poutre FGM simplement appuyée en fonction des différents paramètres du matériau, différents élancements et différentes théories [a)L/h=5, b) L/h=20] 73

Figure 4.12 : Chargement appliqué à la poutre métal-céramique 74

Figure 4.13 : La distribution des flèches non dimensionnelles le long de la poutre pour (L/h=4 et L/h=16) [TBT] 76

Figure 4.14 : La distribution des déplacements axiaux non dimensionnels le long de la poutre pour (L/h=4 et L/h=16) [TBT] 76

Figure 4.15 : La distribution des contraintes normales non dimensionnelles pour différents paramètres du matériau pour (L/h=4 et L/h=16) 77

Figure 4.16 : La distribution des contraintes de cisaillement non dimensionnelles pour différents paramètres du matériau pour (L/h=4 et L/h=16) 78

Figure 4.17 : La variation des fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ en fonction des différents élancements et différents paramètres du matériau 79

Figure 4.18 : Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient fonctionnel 84

Figure 4.19 : Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la poutre FGM (L/h = 100) 86
Figure 4.20 : La flèche transversale à l'extrémité de la console FGM (L/h=100) 87
Figure 4.21 : La variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=100) 87
Figure 4.22 : La variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=100) 88
Figure 4.23 : L'énergie de déformation en fonction des différents paramètres du matériau (L/h=100) 88
Figure 4.24 : Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la poutre FGM (L/h = 15) 89
Figure 4.25 : La flèche transversale à l'extrémité de la console FGM (L/h=15) 89
Figure 4.26 : La variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=15) 90
Figure 4.27 : La variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=15) 90
Figure 4.28 : L'énergie de déformation en fonction des différents paramètres du matériau (L/h=100) 91
Figure 4.29 : Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient de propriété 92
Figure 4.30 : L'effet de L/h sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (SA-SA) 97
Figure 4.31 : L'effet de L/h sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (E-E) 97
Figure 4.32 : L'effet de L/h sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (SA-E) 98
Figure 4.33 : L'effet du paramètre du matériau sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (SA-SA) [TBT] 98
Figure 4.34 : Les coordonnées et la géométrie de la poutre FGM 103
Figure 4.35 : L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau au milieu de la poutre (L/h=100) 103
Figure 4.36 : La distribution des contraintes normales dans le sens de l'épaisseur au milieu de la poutre (L/h=100) 103
Figure 4.37 : La distribution des contraintes de cisaillement dans le sens de l'épaisseur pour différentes théories à ordre élevé au point (x=0) (L/h=100) 104
Figure 4.38 : L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau au milieu de la poutre (L/h=5) 105

Figure 4.39 : La distribution des contraintes normales dans le sens de l'épaisseur au milieu de la poutre (L/h=5) 105
Figure 4.40 : La distribution des contraintes de cisaillement dans le sens de l'épaisseur pour différentes théories à ordre élevé au point (x=0) (L/h=5) 106

CHAPITRE 5
FORMULATION D'ELEMENTS DE COQUES FGM A BASE TRIANGULAIRE

Figure 5.1 : Elément triangulaire de plaque mince avec trois degrés de liberté par nœud 110
Figure 5.2 : Déformation d'une plaque en flexion (Théorie de Kirchhoff) 111
Figure 5.3 : Les charges, les moments et les forces de cisaillement dans un élément de plaque 113
Figure 5.4 : Elément triangulaire de plaque épaisse avec trois degrés de liberté par nœud 117
Figure 5.5 : Elément T43 ; Triangle avec quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud (deux translations U et V et la rotation θ_z) 122
Figure 5.6 : L'élément de plaque par rapport aux deux repères (global et local) 126
Figure 5.7 : Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque $[K_e]$ au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales 128
Figure 5.8 : Coque-consol FGM en traction 129
Figure 5.9 : Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau 129
Figure 5.10 : Coque-consol en FGM soumise à une charge ponctuelle 130
Figure 5.11 : Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau 130
Figure 5.12 : Déplacement u au point de coordonnées (100,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau 131
Figure 5.13 : Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau 132
Figure 5.14 : Coque en FGM 133

Liste des tableaux

CHAPITRE 4
MODELISATION DES POUTRES EN MATERIAU A GRADIENT FONCTIONNEL

Tableau 4.1 : Valeur de h_0 en fonction du paramètre du matériau 49

Tableau 4.2 : Les fonctions de formes et ses dérivées d'un élément de poutre (flexion simple) 55

Tableau 4.3 : Les flèches et les contraintes non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie 70

Tableau 4.4 : Les flèches maximales non dimensionnelles de la poutre FGM pour différents paramètres du matériau 75

Tableau 4.5 : Les fréquences fondamentales non dimensionnelles de la poutre FGM 79

Tableau 4.6 : Les trois premières fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM 80

Tableau 4.7 : La première fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_1$ pour différents paramètres du matériau($E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}$, $\rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m} = 1$) 82

Tableau 4.8 : La deuxième fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_2$ pour différents paramètres du matériau($E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}$, $\rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m} = 1$) 82

Tableau 4.9 : La troisième fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_3$ pour différents paramètres du matériau($E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}$, $\rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m} = 1$) 83

Tableau 4.10 : Propriétés matérielles de la céramique et du métal 84

Tableau 4.11 : La charge critique non-dimensionnelle d'une poutre FGM avec L/h=5 85

Tableau 4.12 : La charge critique non-dimensionnelle d'une poutre FGM avec L/h=10 85

Tableau 4.13 : Propriétés matérielles de la céramique et du métal 93

Tableau 4.14 : Une étude convergente (S-S, p=0, L/h=100, la théorie de Timoshenko) 93

Tableau 4.15 : La comparaison de $\bar{\omega}$ (la théorie de Timoshenko) 94

Tableau 4.16 : L'effet des paramètres géométriques et la distribution matérielle sur $\bar{\omega}$ (SA-SA) 94

Tableau 4.17 : L'effet des paramètres géométriques et la distribution matérielle sur $\bar{\omega}$ (E-E) 95

Tableau 4.18 : L'effet des paramètres géométriques et la distribution matérielle sur $\bar{\omega}$ (S-C) 95
Tableau 4.19 : La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (E-L) 99
Tableau 4.20 : La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (E-E) 99
Tableau 4.21 : La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (E-SA) 99
Tableau 4.22 : La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (SA-SA) 100

CHAPITRE 5
FORMULATION D'ELEMENTS DE COQUES FGM A BASE TRIANGULAIRE

Tableau 5.1 : Modes de construction des éléments nouveaux de coque 127
Tableau 5.2 : Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon T43, et la théorie des poutres minces 129
Tableau 5.3 : Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon C.mi43, et la théorie des poutres minces 130
Tableau 5.4 : Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la coque FGM 131
Tableau 5.5 : Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon T_43, et la théorie des poutres épaisses 131
Tableau 5.6 : Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon C.ep43, et la théorie des poutres épaisses 132
Tableau 5.7 : Les déplacements non dimensionnels au centre d'une coque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentrée 134
Tableau 5.8 : Les déplacements non dimensionnels au centre d'une coque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge répartie 134

Liste des notations

P_i	Les propriétés du matériau constitutif i.
V_{Fi}	La fraction volumique du matériau constitutif i
p	Le paramètre du matériau
$E(z)$	Le module de Young en fonction de z
E_c	Le module de Young de la céramique
E_m	Le module de Young de métal
$G(z)$	Le module de cisaillement en fonction de z
G_c	Le module de cisaillement de la céramique
G_m	Le module de cisaillement de métal
$\nu(z)$	Le coefficient de Poisson en fonction de z
ν_c	Le coefficient de Poisson de la céramique
ν_m	Le coefficient de Poisson de métal
$\rho(z)$	La masse volumique en fonction de z
ρ_c	La masse volumique de la céramique
ρ_m	La masse volumique de métal
L	La longueur de la poutre ou la coque
b	La largeur de la poutre ou de la coque
h	L'épaisseur de la poutre ou de la coque
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Les déformations dans les directions x, y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Les déformations de cisaillement
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Les contraintes normales
$\tau_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	Les contraintes de cisaillement
C	La matrice de comportement (matrice des constantes élastiques)
δW_{int}	Le travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Le travail virtuel extérieur
f_s	Le vecteur des forces de surface
f_v	Le vecteur des forces de volume
$[N]$	La matrice des fonctions de forme

$\{q^e\}$	Le vecteur des déplacements nodaux
θ_z	La rotation autour de la normale (drilling rotation)
u, w	Les déplacements dans les directions x et z
u_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur l'axe neutre de la poutre
ε_0	La déformation du plan neutre
N, M, Q	L'effort normal, le moment de flexion, et l'effort tranchant
$\widehat{D}_a, \widehat{D}_{ab}, \widehat{D}_b, \widehat{D}_s$	Les termes de rigidité de la matrice de membrane, de couplage, de flexion et de cisaillement
K_m, K_{cp}, K_f, K_c	La rigidité membranaire, de couplage, de flexion et de cisaillement
$f(z)$	La fonction de gauchissement (de cisaillement)
ψ_x	La déformation de cisaillement du plan médian
$\{\ \}$	Vecteur colonne
$\langle\ \rangle$	Vecteur ligne
$[\ ]$	Matrice
MCR	mouvement de corps rigide
a_2 a_1 et a_3	Les mouvements de corps rigide
a_i	Les paramètres généraux de l'approximation
$[C_{pm}]$	La matrice d'élasticité de la plaque mince
$[C_{pe}]$	La matrice d'élasticité de la plaque épaisse
$[C_{T43}]$	La matrice d'élasticité de l'élément membranaire
$[C_{cpm}], [C_{cpe}]$	Les matrices d'élasticité de couplage (coque mince et coque épaisse)

Introduction générale

1 Introduction

Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très important. Depuis la nuit des temps, le moteur de la découverte de nouveaux matériaux a plus ou moins obéi à une double démarche. Cette dernière est associée aux problèmes que l'homme doit résoudre pour sa vie matérielle d'une part et à son besoin intellectuel de connaitre et de comprendre le monde qui l'entoure d'autre part. Il y a donc des matériaux qui ont été conçus pour répondre à un besoin technologique spécifique.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : ***F****unctionally* ***G****raded* ***M****aterials " F.G.M "*). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans une ou plusieurs directions pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques, leur utilisation et leur progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire,… etc.

L'analyse des structures en FGM a connu un essor en utilisant des méthodes numériques notamment la méthode des éléments finis.

Les poutres et les coques constituent des éléments de base dans les structures aérospatiales, marines et terrestres, c'est pourquoi un intérêt particulier est porté, pour bien comprendre leur comportement sous diverse sollicitations est une étape cruciale dans l'analyse structurale.

2 Objectif de la thèse

Par le présent sujet on vise une contribution à la modélisation des structures (poutres et coques) en matériau à gradient fonctionnel (FGM), par le développement d'éléments finis à matériau FGM. Ces éléments développés seront destinés à l'analyse des différents comportements (statique, dynamique et flambement) des structures en matériaux isotropes, composites et plus spécialement les structures en matériau à gradient fonctionnel. Par ailleurs, un autre objectif de ce travail est d'étudier l'influence de différents paramètres sur les différents types de comportements tels que la géométrie, les conditions aux limites, l'épaisseur (mince où épaisse), le paramètre du matériau utilisé (homogène où isotrope (FGM)).

3 Plan de la thèse

Le document comprend essentiellement cinq chapitres :

Le premier chapitre, dédie à présenter le positionnement du problème. Une représentation générale sur les matériaux composites, les mécanismes de rupture des composites sont ensuite abordés en insistant sur le phénomène de délaminage, puis nous définissons les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre, est consacré à la recherche bibliographique sur la simulation de structures fabriquées en FGM en utilisant la méthode des éléments finis, réalisée le long des deux dernières décennies.

Le troisième chapitre, est consacré à une présentation des notions de la mécanique des milieux continus. On enchaîne ensuite sur la manière dont il est possible d'en déduire les principaux modèles d'éléments finis existants, particulièrement les formulations « en déplacement », et « en déformation ».

Le quatrième chapitre, est dédié à un rappel sur les théories des poutres en FGM et leur modélisation par la méthode des éléments finis. Comme il est fait état d'une analyse comparative des performances de nos éléments par rapport à ceux développés par d'autres auteurs. Ensuite une étude paramétrique est présentée. Enfin, une nouvelle théorie à ordre élevé est proposée, elle prend en considération l'effet de cisaillement transverse.

Le cinquième chapitre est réservé à la formulation et au développement des éléments de coques FGM basés sur la formulation en déformation. On détaille par la suite la démarche de formulation des deux éléments de coque en FGM un mince et l'autre épaisse. La bonne performance de ces éléments a été clairement démontrée à travers une série d'exemples numériques.

Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel

1.1 Introduction

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels: légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger les structures et de réaliser des formes complexes aptes à remplir plusieurs fonctions.

Dans chacun des marchés d'application (bâtiment, automobiles, équipements industriels…), ces performances remarquables sont à l'origine de solution innovante.

Les matériaux composites offrent aux industriels et aux concepteurs de nouvelles possibilités d'associer fonctions, formes et matériaux au sein de la réalisation. C'est un système de plus en plus performant. Le poids, la plurifonctionnalité sont autant d'atouts de principes de processus nouveaux de conception, d'industrialisation, qui permettent d'étendre les possibilités techniques et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids -fonction) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Un matériau composite constitué dans le cas général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée " la matrice ", la phase discontinue est appelée "le renfort ".

1.2 Classification des matériaux composites

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts **[1], [2]**. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (Fig.1.1).

- Composites à renforts de particule
- Composites à renforts de paillettes
- Composites à renforts de fibres
- Composites stratifiés

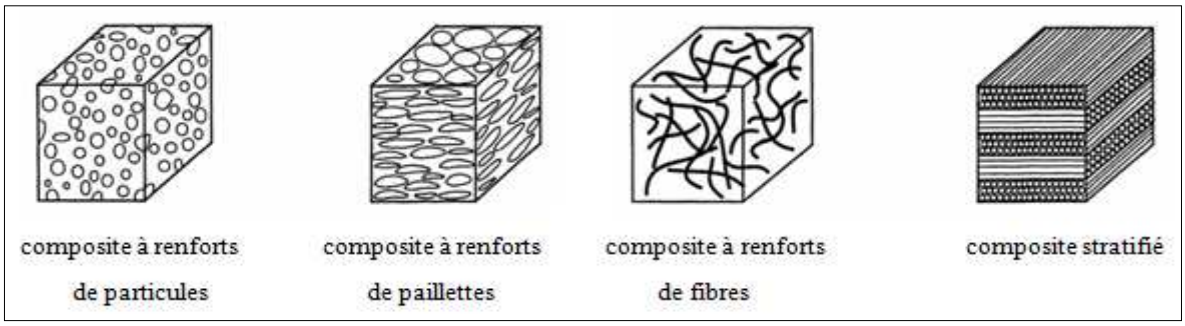


Fig.1.1 Classification des matériaux composites **[2]**

Les matériaux composites peuvent également être classés par la nature de la matrice comme suit :

- Composites à matrice polymérique
- Composites à matrice métallique
- Composites à matrice céramique

1.3 Constituants des matériaux composites

Dans la plupart des cas, dans l'industrie aéronautique. Les matériaux composites seront parfois appelés « composites fibreux » ou même « composites » par simplicité.

Les propriétés mécaniques des composites sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la fibre, la matrice, ainsi que l'interphase. La résistance et la rigidité d'un composite sont assurées principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.

Cette dernière, quant à elle, réunit les fibres et donne la forme géométrique de la structure. La matrice sert également à transférer les efforts mécaniques entre les fibres et les protéger contre les environnements.

L'interphase est la zone créée par l'adhérence et la réaction entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice **[3]**.

La disponibilité d'un grand choix de fibres et de matrices permet de réaliser des composites ayant diverses propriétés. Nous présenterons rapidement quelques-uns des constituants les plus couramment utilisés.

1.3.1 Les fibres

La rupture des matériaux hautes résistances ou hauts modules élastique est généralement provoquée par la propagation des défauts. Les matériaux en forme de fibre sont intrinsèquement plus résistants à la rupture qu'en forme massive car la taille des défauts est limitée par le diamètre faible **[1]**. Dans un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée principalement par les fibres. Par sa nature filamenteuse, la rupture de quelques fibres a pour résultat la redistribution du chargement sur les autres fibres, ce qui empêche la rupture catastrophique de la structure. Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes:

- Fibres de verre
- Fibres de carbone
- Fibres aramides

1.3.2 Les matrices

La matrice réunit les fibres par ses caractéristiques cohésive et adhésive. Elle maintient les fibres dans leur orientation et leur position prévues pour les charges appliquées. Ses autres rôles consiste à distribuer les efforts entre les fibres, fournir une résistance à la propagation de fissure, et fournir toutes les résistances en cisaillement du composite **[1]**. La matrice détermine en général la limite de la température d'utilisation et l'environnement de service du matériau.

Il existe un grand nombre de polymères pouvant servir de matrice aux matériaux composites. Ceux parmi les plus utilisés sont les suivants :

- Les résines thermodurcissables
- Les résines thermoplastiques

1.3.3 L'interphase

La nature de l'adhésion fibre/matrice inclut le verrouillage mécanique, l'attraction électrostatique, l'enchevêtrement moléculaire, et la réaction chimique **[3]**.

L'interphase est constituée de la surface de contact (interface) fibre/matrice ainsi que de la région d'un volume fini prolongée dans la matrice. Elle peut être considérée comme un constituant du composite car elle possède des propriétés chimiques, physiques, et mécaniques différentes de celles de la fibre et de la matrice. L'interphase assure la liaison fibre/matrice et permet le transfert des contraintes de l'une à l'autre sans déplacement relatif. Cependant, l'hypothèse que l'interphase n'a pas d'épaisseur est souvent faite pour faciliter l'analyse micromécanique des composites **[3]**.

1.4 Considérations d'usage des matériaux composites

Dans la conception des produits, il est essentiel d'évaluer et comparer les composites avec les matériaux conventionnels pour bien choisir les matériaux. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont présentés ci-dessous.

1.4.1 Les avantages

Les avantages les plus cités des matériaux composites incluent :

- **Propriétés mécaniques adaptables**

Un stratifié composite fibreux est un empilement des plis élémentaires qui se comportent ensemble comme un élément structural. Un pli élémentaire est anisotrope, ou orthotrope dans la plupart des cas, avec la résistance et la rigidité dans la direction des fibres beaucoup plus élevées que dans d'autres directions. Il faut alors associer différentes orientations de fibres afin d'obtenir un stratifié capable de résister à diverses sollicitations.

Un avantage principal du stratifié composite est que les plis élémentaires peuvent être orientés de telle façon que la résistance dans une direction donnée corresponde aux chargements prévus. La part de matériau dans des directions non-sollicitées est donc minimisée.

- **Haute résistance et haut module d'élasticité**

Les propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et le module des matériaux composites hauts performances permettent de répondre aux exigences de l'industrie aéronautique. D'autres industries en profitent également, par exemple la vitesse d'une balle de tennis est plus élevée avec des raquettes en carbone/époxy.

- **Poids**

Les matériaux composites hauts performances ont une densité de l'ordre de 1,6 contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, ils autorisent un gain de 10 à 30 % sur les éléments de structure **[4]**. Ce gain de masse permet d'employer des moteurs moins puissants. Ceux-ci consomment moins et permettent de réduire la taille des réservoirs de carburant pour le même cahier des charges de l'avion.

- **Production**

Les matériaux composites permettent de simplifier l'assemblage de la structure, ce qui compense partiellement leur prix élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être substantielle. Par exemple, un tronçon de fuselage qui réclame typiquement mille pièces et plusieurs milliers de fixations est fabriqué en un seul morceau pour le Boeing 787 **[4]**.

- **Maintenance**

Les composites ont besoin de moins d'entretien que les alliages métalliques. D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion. D'autre part, la tenue en fatigue est très bonne. Par exemple, l'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787, qui utilise massivement des matériaux composites, est porté à douze ans au lieu de dix ans sur un 777 **[4]**.

1.4.2 Les inconvénients

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants :

- **Coût**

Les matériaux composites hauts performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale où le coût élevé peut être toléré en échange de matériaux plus performants. Par conséquent, le transfert de la technologie des composites aux produits de grande consommation est lent, à quelques exceptions comme les équipements de sports où la performance prime également sur le coût.

- **Conception et analyse**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux conventionnels.

Elles nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures.

L'hétérogénéité impose l'analyse selon au moins deux points de vue. La micro mécanique examine l'interaction des constituants à l'échelle microscopique. La macro-mécanique suppose que le composite est homogène et s'intéresse aux propriétés apparentes du matériau.

Les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation (les lois de comportement). Ces propriétés sont déterminées selon les directions principales du pli élémentaire (directions parallèle et perpendiculaire à l'orientation des fibres) **[5]**.

- **Assemblage**

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, la redistribution des contraintes autour des sites de concentration telle que le trou est moins efficace. La résistance et la rigidité d'un stratifié ne peuvent pas toujours être entièrement transférés par un joint. Le trou est donc souvent renforcé par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié dans la partie trouée **[5]**. De tels renforcements entraînent du poids supplémentaire pour la structure. Le problème d'assemblage est donc critique pour le succès de l'emploi des matériaux composites.

- **Tolérance aux dommages**

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable.
En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer l'impact car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance de se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des

structures sont le programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages **[6]**.

1.5 Mécanismes de rupture des stratifiés composites à renforts de fibres longues

L'étude des matériaux composites comporte plusieurs thèmes tels que procédés de fabrication, élasticité anisotrope, micromécanique, etc. Nous nous intéressons au sujet de l'endommagement de ces matériaux, plus particulièrement des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce type de matériau est très répandu dans des applications où la réduction de poids est critique. Comme l'utilisation s'agrandit, la probabilité des ruptures éventuelles est également augmentée. La capacité de caractériser les ruptures, par exemple en termes des modes de rupture, des paramètres, ou des valeurs critiques à la rupture, est essentielle pour assurer l'intégrité des pièces en service et pour la conception des futurs produits.

La rupture des stratifiés composites peut se produire de plusieurs façons très complexes. Les modes de rupture dépendent de la stratification et de la direction du chargement par rapport à l'orientation des fibres. Les figures (Fig.1.2) et (Fig.1.3) montrent les allures des ruptures par flexion et par traction respectivement. Des différences remarquables à l'échelle macroscopique peuvent être constatées selon différentes stratifications. Etant donné la diversité de la stratification et du chargement, des modes de rupture bien définis à l'échelle macroscopique ne peuvent pas, en général, être identifiés **[7]**.

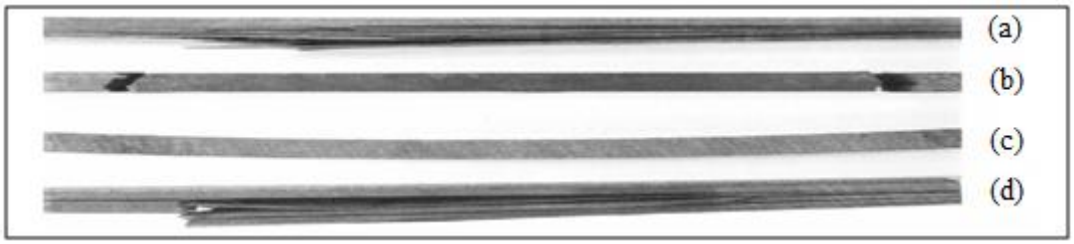


Fig.1.2 Ruptures par flexion de différentes séquences d'empilement (a) Quasi-isotrope, (b) Unidirectionnelle, (c) ±45°, (d) 0°/90° **[7]**

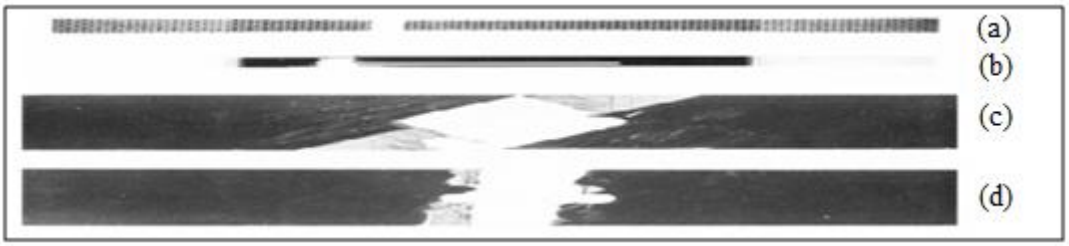
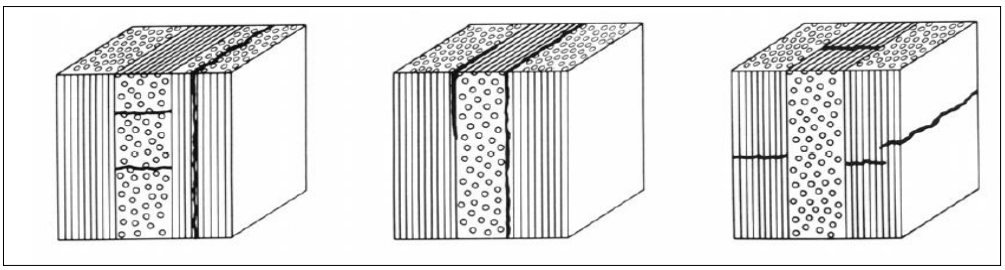


Fig.1.3 Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement (a) 0°/90° tissu, (b) Unidirectionnelle, (c) Quasi-isotrope, (d) 0°/90° **[7]**

La description de la rupture à l'échelle du pli est, par contre, relativement efficace pour le classement des mécanismes de rupture. Les stratifiés à renforts de fibres longues ont trois types de rupture : rupture intra-laminaire, rupture inter-laminaire, et rupture trans-laminaire **[7]**.

Ces trois mécanismes de rupture (Fig. 1.4) définissent le plan de rupture par rapport aux constituants du matériau. La rupture intra-laminaire se trouve à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture inter-laminaire décrit une rupture entre deux plis adjacents. La rupture trans-laminaire est orientée transversalement à l'orientation de fibres dans le pli endommagé.



Rupture intralaminaire Rupture interlaminaire Rupture translaminaire

Fig.1.4 Mécanismes de rupture dans un stratifié **[7]**

Avec cette convention, les ruptures des stratifiés à renforts de fibres longues peuvent être décrites en termes des mécanismes de rupture à l'échelle du pli, identifiables par des observations microscopiques sur les surfaces de rupture.

1.5.1 Rupture intra-laminaire

La rupture intra-laminaire est due principalement à la faible résistance de la matrice et de l'adhérence entre la matrice et les fibres. Elle est provoquée par les contraintes dans le plan du stratifié. Un pli se détériore par la contrainte résultante en traction dans la direction normale aux fibres. Ce type de rupture est donc couramment appelée la « fissuration transverse ».

Normalement cette fissuration de la matrice se produit bien avant la rupture de fibre.

1.5.2 Rupture inter-laminaire

La rupture inter-laminaire se produit dans l'interface entre deux plis d'un stratifié. La surface de rupture montre, en général, la rupture de la matrice et la décohésion fibre/matrice. Ces mécanismes impliquent peu de rupture de fibres. Comme pour les matériaux métalliques, la rupture peut être en mode I (ouverture), mode II (glissement droit), mode III (glissement vis).

1.5.3 Rupture trans-laminaire

La rupture trans-laminaire concerne la rupture de fibres. Les surfaces de rupture sont donc généralement marquées par la morphologie rugueuse des bouts de fibres. En effet, la contrainte à rupture des fibres est plus importante que celle de tous les autres constituants d'un stratifié composite. Par conséquent, ce mécanisme de rupture entraîne souvent la rupture totale du stratifié. La rupture trans-laminaire peut être séparée en deux modes selon les chargements : la rupture par traction et le micro-flambage par compression. La rupture peut être provoquée par un mode individuel ou une combinaison des deux modes.

1.6 Délaminage et FGM

L'un des avantages majeurs des stratifiés composites à renforts de fibres longues est la capacité d'orienter les fibres de chaque pli afin d'avoir les propriétés, souvent la résistance et la rigidité, appropriées aux chargements dans les directions prévues. Par exemple, une plaque stratifiée peut avoir une rigidité en traction dans une direction deux fois supérieure à celle dans une autre direction. Malgré d'excellentes propriétés dans le plan, les stratifiés présentent un problème propre aux matériaux réalisés par stratification : la rupture inter-laminaire. Ce mécanisme de rupture se caractérise par un décollement ou une décohésion entre les plis du stratifié. Il est couramment appelé le « délaminage ».

Un stratifié soumis à un chargement présente différentes étapes de dégradation. Dans le scénario d'évolution des défauts le plus « classique » **[8]**, la matrice et l'interface fibre/matrice sont les premières à se détériorer (Fig. 1.5.a). Les premiers défauts sont donc la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique. Ensuite, ces défauts s'agrandissent de façon stable à l'échelle du pli par coalescence (Fig. 1.5.b), les micro-défauts se rejoignent pour former des fissurations transverses. Les fissures transverses peuvent parvenir à l'interface des plis et provoque le délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires (Fig. 1.5.c). Ces défauts et leur évolution dépendent de l'empilement, du nombre de plis, du chargement, et de la taille et de la forme de la structure considérée.

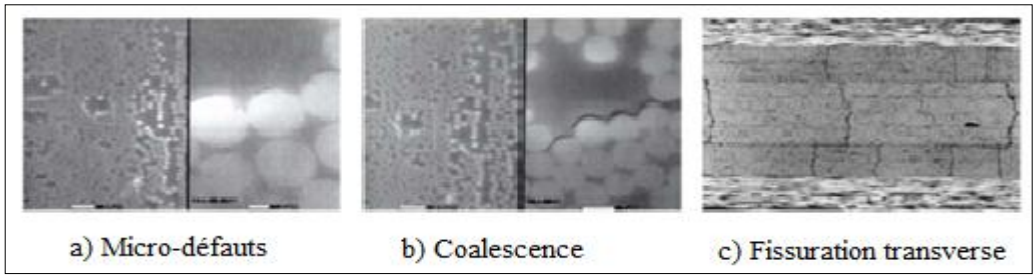


Fig.1.5 Evolution de défauts [8]

Les micro-mécanismes principaux de l'endommagement qui accompagnent un délaminage sont présentés schématiquement dans la (Fig.1.6) **[9]**. Ils incluent :

• **Zone endommagée :** La forte concentration de contraintes autour de la pointe de fissure provoque une zone endommagée où se trouvent la déformation plastique et/ou des microfissures de la matrice.

• **Fissures latérales :** Après le passage de la fissure, les microfissures dans la zone endommagée peuvent se transformer en des fissures latérales de la matrice autour du plan de délaminage.

• **Pontage de fibres :** La présence de fissures au dessus ou en dessous du plan de délaminage facilite la création de ponts de fibres reliant les deux surfaces délaminées. Certains ponts de fibres se rompent pendant l'avancée du délaminage.

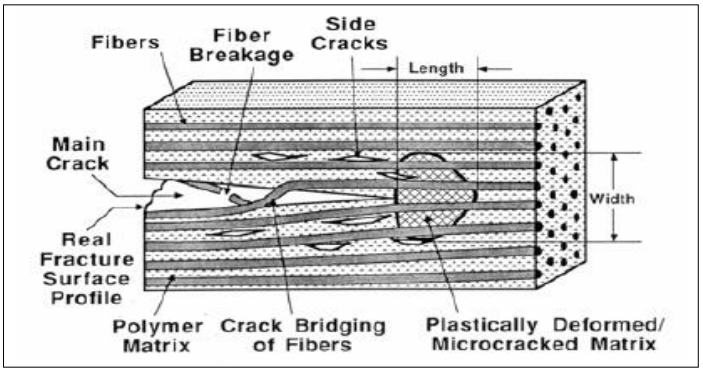


Fig.1.6 Mécanismes de l'endommagement accompagnant le délaminage **[9]**

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par

l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscités beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes.

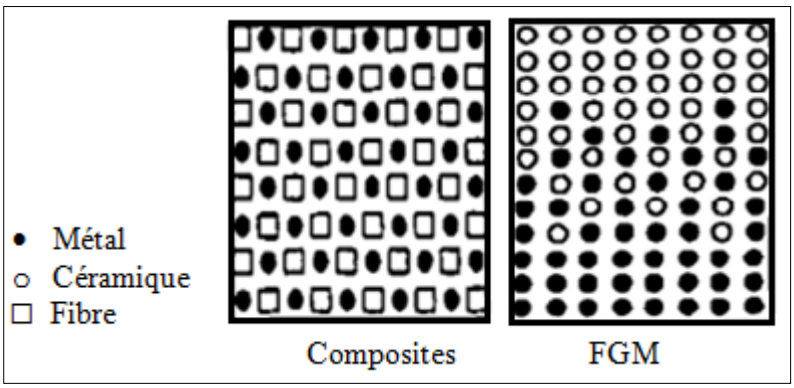


Fig.1.7 Configurations des composites et des FGM

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion **[10]**.

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.…**[11]**

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux **[12]**.

Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels **[10]**. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

1.7 Idée générale sur le développement des FGM

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la

relaxation des contraintes thermiques ". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques **[10]**.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau **[13]**.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc.…On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

1.8 Conception des structures FGM

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent le FGM comme étant un matériau composé particulier pour lesquels la fraction de volume varie sans interruption dans la direction de l'épaisseur. Quelques études considèrent également le FGM comme étant un composé renforcé par un tissu dans lesquels l'orientation de fibre varie à travers l'épaisseur.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures a l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure.

La (Fig.1.8) montre une micrographie par microscope électronique à balayage de la section transversale d'une billette en FGM (Al_2O_3-SUS304).

Dans un matériau à gradient fonctionnel, les différentes phases micro-structurelles ont des fonctions différentes, et le matériau à gradient fonctionnel global atteint le statut multi structural par gradation de leurs propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des constituants du matériau, leurs propriétés matérielles présentent un passage lisse et continu d'une surface à une autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et l'atténuation des concentrations de contraintes. Cela est dû au fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des environnements de haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique assure une meilleure performance mécanique et réduit la possibilité d'une rupture catastrophique.

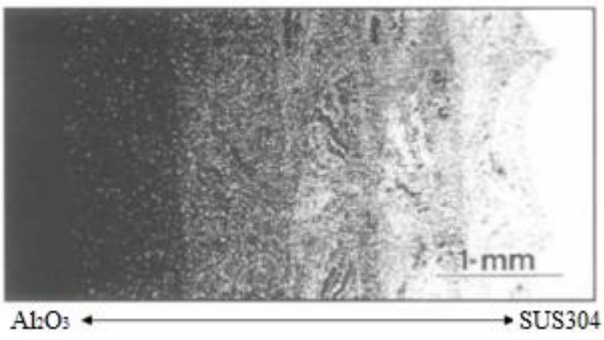


Fig. 1.8 Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel (Al2O3-SUS304)

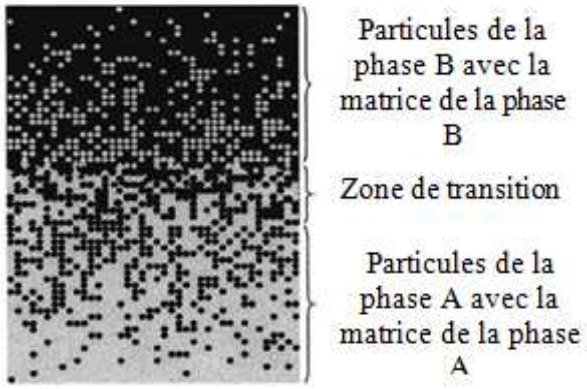


Fig. 1.9 Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées **[14]**

Un FGM typique, avec un effet élevé de couplage flexion-extension est illustré dans la (Fig.1.9) **[14]**, où les particules sphériques ou presque sphériques sont intégrées au sein d'une matrice isotrope.

1.9 Le gradient

Contrairement aux matériaux homogènes, les propriétés des FGM varient non seulement avec leur composition, mais dépendent également de la connectivité de la structure du réseau interne. (Fig.1.10) montre une représentation schématique de la microstructure commune produisant dans un matériau tel que le contenu de la deuxième phase est augmentée.

À des fractions de faible volume, la seconde phase existe sous forme des particules isolées dispersées dans une matrice (a). Comme le contenu de la deuxième phase augmente, les particules commencent à avoir des contacts et former des amas agglomérés (b).

Comme il augmente encore, une transition microstructurale critique a lieu, où la deuxième phase n'est plus dispersée, mais devient plutôt reliés entre eux sur de longues distances (c, d, e). La transition a un effet profond sur les propriétés des matériaux, par exemple, conductivité thermique ou électrique, et un petit changement de composition va donc se traduire par une variation distincte des propriétés **[15]**.

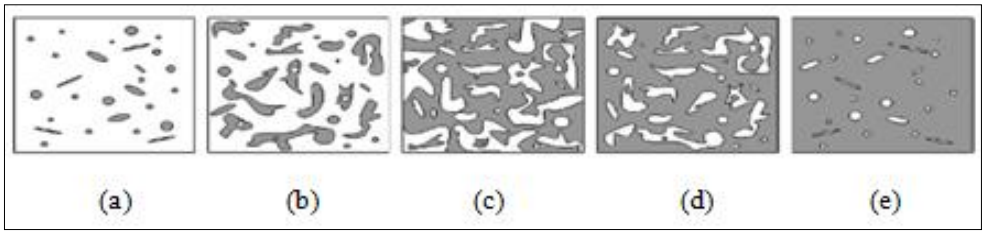


Fig.1.10 Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM

1.10 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large interval des domaines tels que :

- **Aérospatial**

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être utilisés dans des conditions de haute température avec une de ses constituants à faible conductivité thermique. Ils peuvent résister à des gradients thermiques élevés, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriée beaucoup dans les structures aérospatiales comme les composants de véhicules spatiaux (moteur de fusée, corps des avions spatiaux.etc...)

- **Médecine**

Les FGM a trouvé une large gamme d'application dans le domaine dentaire et orthopédique pour les dents et le remplacement des os.

- **Défense**

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

- **Énergie nucléaire**

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.

❖ Optoélectronique

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo; support de stockage magnétique, semi-conducteur à bande graduée.

Autres domaines d'application sont: produits (matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre), conversion d'énergie (générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible), optiques (fibres optiques, lentilles), matières biologiques (implants, peau artificielle), chimique (échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction).

1.11 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Plusieurs FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle est généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique.

Tandis que la fraction volumique de chaque phase graduellement varie dans la direction de gradation, les propriétés effectives de FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les FGM comme modèles : Pour la première, une variation par morceaux de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est à dire, couche quasi-homogène de céramique-métal (Fig.1.11.a) ; Pour la deuxième, une variation continue de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée (Fig.1.11.b).

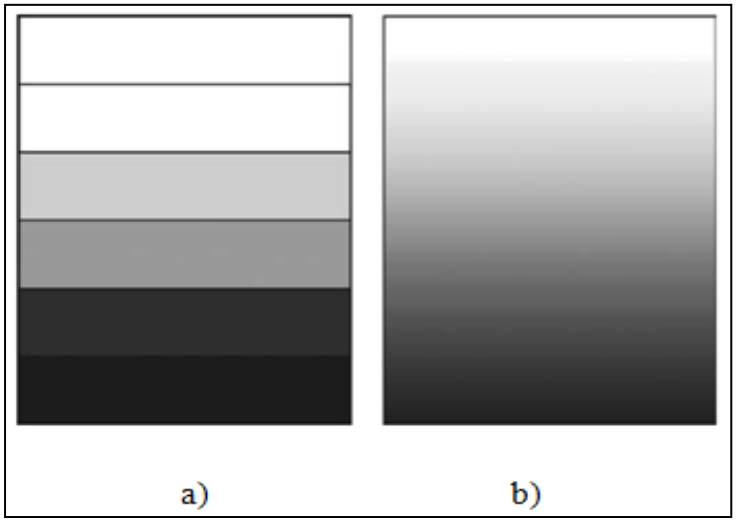


Fig. 1.11 Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel :a) première approche; b) deuxième approche

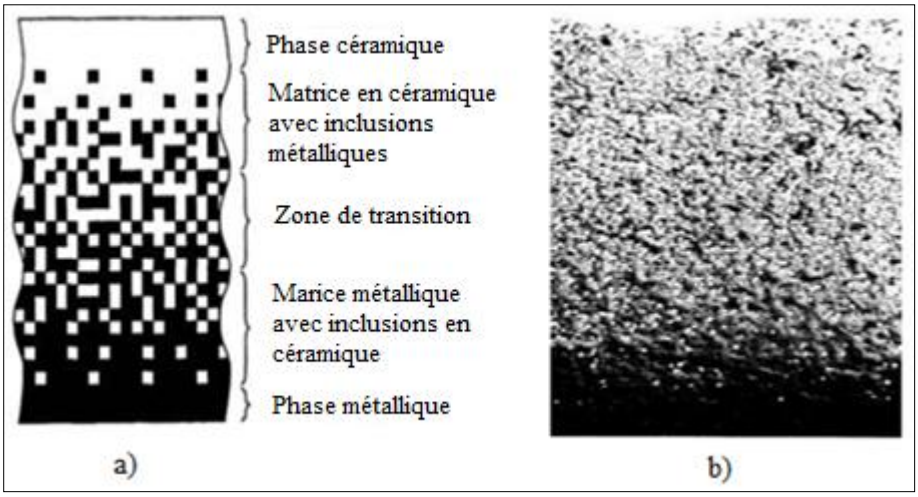


Fig.1.12 Variation continue de la microstructure : a) (schématisée) ; b) (photo)

La variation continue des propriétés (Fig.1.12) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
- haute température de fusion ou de décomposition ;
- haut module d'élasticité et haute dureté ;
- charge à la rupture élevée ;
- bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
- conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

1.12 Lois régissantes la variation des propriétés matérielles des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \tag{1-1}$$

Où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \tag{1-2}$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général (Fig.1.13). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \tag{1-3}$$

$$V_c + V_m = 1 \tag{1-4}$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

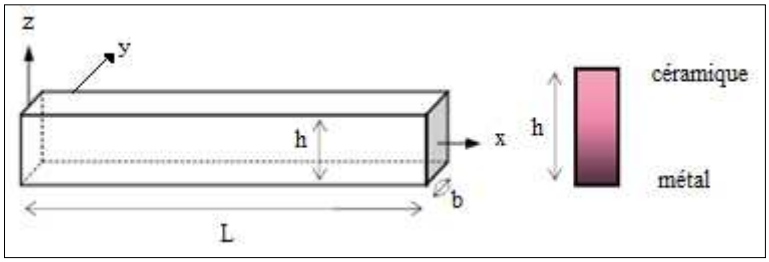


Fig.1.13 Géométrie d'une poutre FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (fig.1.13). Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit :$E = E(z)$ et ν=ν(z).

Jin and Batra **[16]**, Ziou et *al.* **[17]** ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

1.13 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V_c(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^p \tag{1-5}$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V_c(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \tag{1-6}$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure $(z = +h/2)$ et de la surface inférieure $(z = -h/2)$ de la poutre FGM.

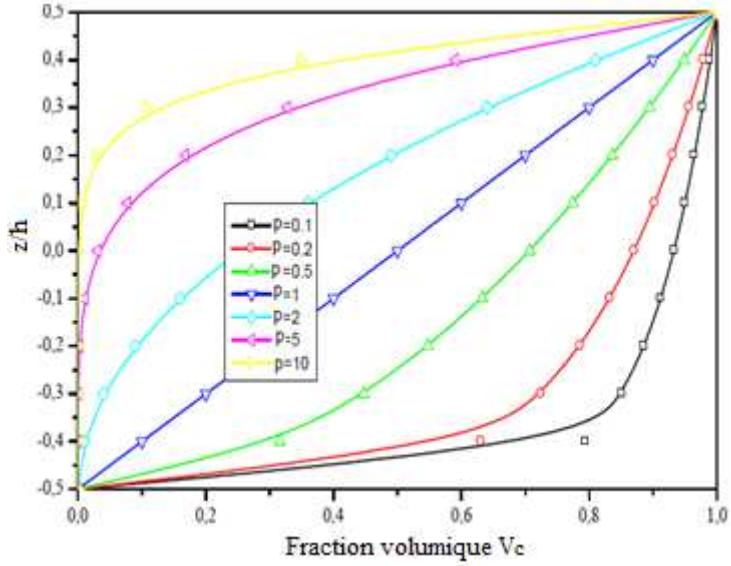


Fig.1.14 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (Fig.1.14). Il apparait clairement que cette dernière change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

1.14 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Chi et al **[18]** ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h/2+z}{h/2}\right)^p \qquad \text{pour } : -h/2 \le z \le 0 \qquad (1\text{-}7a)$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h/2-z}{h/2}\right)^p \qquad \text{pour } : 0 \le z \le h/2 \qquad (1\text{-}7b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \qquad \text{Pour } : -h/2 \le z \le 0 \quad (1\text{-}8a)$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \qquad \text{Pour } : 0 \le z \le h/2 \quad (1\text{-}8b)$$

La (Fig.1.15) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1-7a) et (1-7b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM).

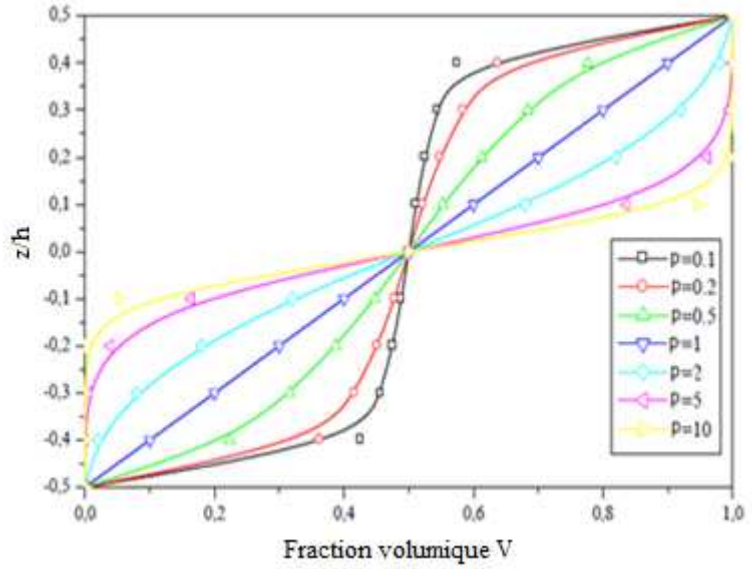


Fig.1.15 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM)

1.15 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme **[19]**

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \tag{1-9a}$$

$$B = \frac{1}{h} ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \tag{1-9b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la (Fig.1.16).

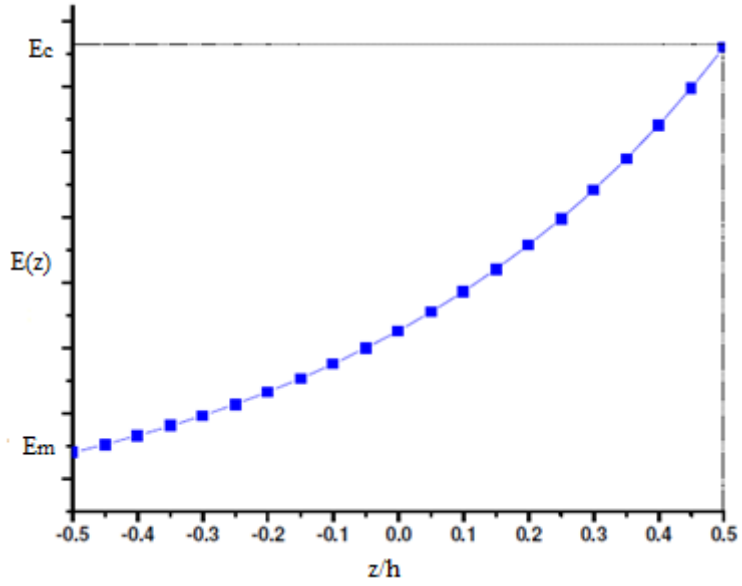


Fig. 1.16 Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM)

1.16 Conclusion

Avec la naissance d'un nouveau matériau composite (matériau à gradient fonctionnel) et son utilisation dans cette thèse, ce chapitre dédie à présenter le positionnement du problème. Une présentation générale sur les matériaux composites et le rôle des différentes phases (fibre, interface, matrice…) y est faite avec ses avantages et ses inconvénients. Les mécanismes de rupture des composites sont ensuite abordés en insistant sur le phénomène de délaminage. Puis nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leur conception ainsi leurs différents domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre 2

Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des FGM

2.1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (**F**unctionally **G**raded **M**aterials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués c'est une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales.

Cette étude bibliographique présente quelques travaux réalisés sur les structures fabriquées en FGM, en utilisant la méthode des éléments finis pour souligner l'ampleur qu'a pris ces nouveaux matériaux durant les deux dernières décennies.

2.2 Structure de poutre FGM

2.2.1 Etudes sur les problèmes élastiques statiques des poutres en FGM

Un nouvel élément de poutre basé sur la théorie du premier ordre (la théorie de Timoshenko) a été développé pour étudier le comportement élastique des poutres FGM par Chakraborty et *al.* **[20]**. Chakraborty et *al.* **[21]** ont employé la fonction de loi de puissance, et la fonction exponentielle pour décrire la distribution des propriétés matérielles des structures

FGM. Kapuria et *al.* **[22]** ont présenté un modèle d'élément fini pour les réponses statiques et de vibration libre d'une poutre FGM, par l'utilisation de la théorie du troisième ordre pour estimer le module d'élasticité effectif, et sa validation expérimentale pour deux systèmes différents d'un FGM sous divers conditions aux limites. Kadoli et *al.* **[23]** ont proposé un modèle précis d'élément fini basé sur une approximation de troisième ordre de déplacement axial et un déplacement transversal constant pour l'analyse statique des poutres FGM en métal-céramique. La fraction volumique des composants était supposée varier selon une fonction de loi de puissance. Une approche de couche discrète a été adoptée pour tenir en compte la gradation du matériau. Autant que des solutions d'élasticité sont concernées. Shi et *al.* **[24]** ont présenté l'élément fini quasi-conforme pour l'analyse de flexion des poutres composites à l'aide des théories d'ordre élevé. Kutis et *al.* **[25]** ont présenté une procédure d'éléments finis pour modéliser une poutre FGM avec une variation spatiale des propriétés matérielles. En utilisant la méthode des éléments finis, Pindera et Dunn **[26]** ont évalué la théorie d'ordre élevé en effectuant une analyse détaillée des éléments finis en FGM. Ils ont constatés que les résultats (HOTFGM = Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials) coïncident bien avec les résultats FEM. Aussi, Reddy **[27]** a conçu un modèle d'élément fini super convergent pour les problèmes statiques des poutres de Timoshenko.

Chen et ces collaborateurs **[28]**, ont développé une intégration nodale stabilisée pour la méthode de maillage de Galerkin afin d'obtenir une plus grande efficacité avec la précision souhaitée et les propriétés convergentes, une stabilisation de la déformation est introduite pour calculer la déformation nodale par une contrepartie de divergence d'une moyenne spatiale de la déformation. Liu et *al.* **[29]** ont récemment développé avec succès une famille lustrée MEF (S-FEM = Smoothed FEM). Il existe différentes types tels que: une cellule / élément basé sur la méthode des éléments finis (CS- FEM = Cell Smoothed FEM) **[30]** ; un bord basé sur la méthode des éléments finis (ES- FEM = Edge Smoothed FEM) **[31, 32]**; un nœud basé sur la méthode des éléments finis (NS- FEM = Node Smoothed FEM) **[33, 34]** et qu'une surface basée sur la méthode des éléments finis (FS- FEM = Face Smoothed FEM) **[35, 36]**. Concernant le modèle NS- FEM, il est essentiellement formulé à base d'un opérateur de déformation lisse sur des domaines lisses associés avec les nœuds des éléments. Tous les éléments adjacents autour du nœud. Par conséquent, le nombre de nœuds de support vers un domaine lisse est plus important que celui dans l'élément. Cela conduit à une augmentation de la bande passante de la matrice de rigidité dans le modèle NS-FEM, et le coût de calcul et donc devient plus élevé que ceux de la FEM standard avec les mêmes ensembles des nœuds.

Les grandes déflexions des poutres coniques FGM soumises à des forces d'extrémité sont étudiées par Nguyen et Gan **[37]** en utilisant la méthode des éléments finis. Les propriétés des matériaux des poutres sont supposées varier à travers l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance. Par l'utilisation d'un élément fini para-linéaire, Wood et Zienkiewicz **[38]** ont calculé la réponse de grand déplacement d'une colonne non uniforme soumise à une force de compression axiale excentrique. Nguyen **[39]** a étudié par la méthode des éléments finis, la réponse de grand déplacement des consoles-coniques en matériau à gradation fonctionnel. L'étude de Yu et Chu **[40]** a été consacré à l'analyse statique et dynamique des poutres FGM en utilisant la méthode des éléments finis. Murin et Kutis **[41]** ont été introduit un nouvel élément fini de poutre Euler-Bernoulli 3D pour l'analyse des poutres avec une variation graduelle et continue à travers la section transversale.

2.2.2 Etudes sur les problèmes de vibration des poutres FGM

Aussi par l'utilisation de la méthode des éléments finis, Elshorbagy et *al.* **[42]** ont étudié les caractéristiques des poutres Euler-Bernoulli pour la vibration libre des poutres FGM à la fois axialement et transversalement à travers l'épaisseur de la poutre. En adoptant la méthode de Ritz, Aminbaghai et *al.* **[43]** ont étudié la vibration libre des poutres FGM avec une variation polynomiale spatiale continue de propriétés matérielles par une quatrième équation différentielle de la théorie du deuxième ordre, Oz **[44]** a calculé les fréquences naturelles d'une poutre Euler-Bernoulli avec une masse concentrée en utilisant la méthode des éléments finis avec différentes conditions aux limites. Mohanty et *al.* **[45]** ont étudié l'instabilité dynamique des poutres ordinaire à gradient fonctionnel (FGO = Functionally Graded Ordinary) et la poutre sandwich FGM (FGSW = Functionally Graded Sandwich Beam) repose sur une fondation de type Winkler en utilisant la méthode des éléments finis. Shahba et *al*. **[46]** ont étudié la vibration libre et l'analyse de stabilité des poutres coniques FGM de Timochenko selon des conditions aux limites classiques et non classiques et à travers une approche d'élément fini.

Les premières publications réalisées sur l'analyse des vibrations par élément fini des poutres ont été présenté par Mei **[47-49]**. Venkateswara et *al.* **[50]** ont formulé les grandes amplitudes des vibrations libres des poutres et des plaques par la linéarisation des termes quadratiques dans les relations contraintes-déplacements. Cependant, ils ont ignoré l'effet du déplacement axial. Après, des efforts énormes ont été fait sur la recherche des solutions d'élément fini pour ce problème. Gupta et *al.* **[51]** ont présenté une formulation élément fini relativement simple donnant les fréquences naturelles non linéaires des poutres d'Euler-Bernoulli avec des

supports d'extrémité de tout type. Leur formulation commence avec une hypothèse de la (SHM = Simple Harmonic Motion) et par conséquent corrigée par l'application de la méthode du bilan harmonique (HBM = Harmonic Balance Method). Ensuite, ils ont continué leur travail et ont étudié le même problème basé sur la théorie de Timoshenko **[52]**.

M. Hemmatnezhad et *al.* **[53]** ont étudié l'analyse de vibration libre à grande amplitude des poutres à gradient fonctionnel à l'aide d'une formulation par éléments finis. Les relations de type non linéaires de déformation - déplacement de Von-Karman sont employées lorsque les extrémités de la poutre sont contraints de se déplacer axialement. Les effets de cisaillement transverse et de l'inertie de rotation sont inclus sur la base de la théorie des poutres de Timoshenko. Les propriétés du matériau sont supposées être variées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance.

Les caractéristiques dynamiques d'une poutre FGM dans laquelle les propriétés des matériaux changent soit dans une direction axiale ou le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance sont étudiées par Sudhanwa et *al.* **[54]**. Le système résultant des équations différentielles ordinaires d'analyse de vibration libre sont résolus en utilisant une méthode analytique. La méthode des éléments finis est utilisée pour discrétiser le modèle et obtenir une approximation numérique d'équation de mouvement. Le modèle a été vérifié avec les articles déjà publiées et ils ont trouvé une bonne conformité avec eux.

Mohammad Azadi **[55]** a étudié une méthode d'élément fini (FEM) pour la vibration latérale libre et forcée des poutres en matériau à gradation fonctionnel avec différents conditions aux limites et les fréquences naturelles ont été obtenues. Ses résultats ont été comparés avec la solution analytique et les résultats des logiciels ANSYS et NASTRAN. Les résultats numériques ont été obtenus pour montrer l'influence et la dépendance de la température des propriétés matérielles, la distribution de la fraction de volume, les paramètres géométriques et les conditions aux limites.

2.2.3 Etudes sur les problèmes de flambement des poutres FGM

Les méthodes de recherche couramment adoptées dans l'analyse post-flambement des structures comprennent l'analytique, le semi-analytique et la méthode des éléments finis **[56-58]**. Malekzadeh et Karami **[59]** ont exploité une méthode quadrature différentielle mixte et la méthode des éléments finis pour étudier les vibrations et les comportements de flambement des structures analogues à des poutres sur des fondations élastiques.

2.3 Structure de plaque FGM

2.3.1 Etudes sur les problèmes élastiques statiques des plaques FGM

En 2000, Reddy **[60]** a présenté une formulation théorique et des modèles d'éléments finis basé sur la théorie du troisième ordre pour analyser des plaques FGM. Ray et Sachade **[61]** ont l'intention de présenter un modèle d'élément fini de plaque (FGM) intégré avec une couche de matériau composite renforcés par une fibre piézoélectrique (CIPF = Piezoelectric Fiber Reinforced Composite). Une telle approximation peut prédire les déplacements globaux et les moments fléchissant avec une précision suffisante **[62, 63]**. Des études, analytiques et par éléments finis sur l'analyse de la flexion des plaques FGM sont récemment disponibles dans la littérature en utilisant les théories de la plaque 2-D. Récemment, en considérant la surface physique neutre, Zhang, Zhou **[64]** ; Prakash et *al.* **[65]** ont présenté l'analyse analytique et l'analyse d'élément fini des plaques FGM, respectivement. H. Nguyen Xuan et *al.* **[66]** ont présenté une approche numérique efficace qui repose sur la combinaison de la nœud-base de déformation lisse avec un écart de cisaillement discrèt d'une plaque triangulaire pour la statique, la vibration libre et l'analyse de flambement mécanique/thermique des plaques FGM. A. Taghvaeipour et *al.* **[67]** ont prolongé le nouvel élément super-cylindrique vers un matériau à gradient fonctionnel et la procédure d'extraction de la matrice de rigidité et la matrices de masse d'un élément est complètement illustrée. En utilisant les matrices élémentaires, plusieurs chargements et des conditions aux limites sont étudiés pour les cylindres FG, et les déformations qui en résulte, les contraintes et les fréquences naturelles sont comparés avec les éléments finis conventionnel et les résultats analytiques. Parveen et Reddy **[68]** ont étudié la réponse des plaques FGM en utilisant la FEM prenant en compte l'effet de cisaillement transverse, l'inertie de rotation et les rotations modérées au sens de Von Karman. La variation des propriétés est définie selon une loi de puissance à travers l'épaisseur et les comparaisons ont été faites avec des plaques isotropes homogènes. Sadowski et *al.* **[69]** ont élaboré des modèles numériques des parties structuraux d'avions fabriqué en différents composites. L'analyse par élément fini de la réponse mécanique des éléments structuraux ont été comparés avec des modèles analytiques simplifiés formulées précédemment. Nguyen et *al.* **[70]** ont formulé ES-DSG (Edge-based Smoothed Discrete Shear Gap Method) pour les analyses : statique, vibration libre et de flambage des plaques (FGM).

2.3.2 Etudes sur les problèmes de vibration des plaques FGM

L'élément de type Mindlin et l'élément de type Reissner ont été développé pour la modélisation des plaques composites (FGC = Functionally Graded Composite) soumis au flambement et à la vibration libre par Oyekoya et ses collaborateurs **[71]**. Les caractéristiques de vibration des plaques FGM avec une grande amplitude ont été étudiées en utilisant la plaque de haute précision à quatre nœuds par Prakash et *al.* **[72]**. Sundararajan et *al.* **[73]** ont développé une formulation non linéaire basée sur les hypothèses de Von-Karman pour étudier les caractéristiques de vibration libre des plaques FGM dans un environnement de haute température. Ils ont obtenu des équations non linéaires en utilisant les équations du mouvement de Lagrange et résolus en utilisant la MEF, couplé avec la technique itérative directe.

L'analyse de vibration libre à grande amplitude des plaques (FGM) est examinée par Talha et Singh **[74]** .Les équations non linéaires des éléments finis sont obtenues en utilisant les théories de déformation de cisaillement à ordre élevé avec une modification spéciale dans le déplacement transversal. Batra et Jin **[75]** ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre associée avec la méthode des éléments finis pour étudier les vibrations libres d'une plaque rectangulaire anisotrope en FGM. La vibration libre et l'analyse statique d'une plaque à gradient fonctionnel (FGM) sont étudiées en utilisant la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement avec une modification spéciale dans le déplacement transversal en conjonction avec des modèles d'éléments finis par Talha et Singh **[76]**. Les caractéristiques asymétriques de vibration libre et la stabilité thermo-élastique des plaques circulaires en FGM sont examinées par Prakash et *al.* **[77]** en utilisant la procédure des éléments finis. Ramu I et *al.* **[78]** ont visé à effectuer une analyse modale d'une plaque à gradient fonctionnel (FGM) pour déterminer les fréquences et les modes naturelles en utilisant la méthode des éléments finis (FEM). L'analyse modale des plaques FGM a été codée sur le logiciel MATLAB. Fakhari et *al.* **[79]** ont présenté une formulation d'éléments finis basé sur (HOST = A Higher Order Shear Deformation Theory) pour analyser les fréquences naturelles non linéaires et le temps de réponse de la plaque FGM. Ils ont utilisé la relation de Von Karman pour tenir en compte la grande déformation de la plaque. Dans cette étude, les propriétés matérielles des FGM changent dans le sens de l'épaisseur suivant la loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

2.3.3 Etudes sur les problèmes de flambement des plaques FGM

L'influence de la fondation élastique de type Winkler est considéré par Shariyat et demi **[80]**, les propriétés du matériau sont supposés orthotrope dans le plan et hétérogène transversalement. Prakash et *al.* **[81]** ont étudié le comportement post-flambement des plaques obliques en FGM sous une charge thermique basé sur la méthode des éléments finis de déformation de cisaillement. La fraction de volume et les propriétés des matériaux constitutifs ont été estimé en utilisant la méthode d'homogénéisation de Mori-Tanaka. La température a été supposée varier de façon exponentielle à travers l'épaisseur et le coefficient de poisson est supposé être constant.

2.4 Conclusion

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux composites formés de deux ou plusieurs phases constitutives avec une composition variable et continue dans l'espace. Ils possèdent un certain nombre d'avantages qui les rendent intéressant dans des applications potentielles. Durant les deux dernières décennies, beaucoup de travaux ont été consacrés à ces matériaux et il est prudent de réduire la recherche bibliographique dans ce chapitre en se concentrant sur les travaux dédiés aux problèmes liés aux poutres et plaques en FGM en utilisant la méthode des éléments finis réalisée dans cette période. Le but ici étant de montrer l'étendue du domaine de recherche dans le contexte des FGM et qu'il y a encore beaucoup à faire dans cet axe de recherche.

Chapitre 3

La méthode des éléments finis

3.1 Introduction

Dans les années 1960, grâce au développement de l'informatique, de nombreux secteurs industriels et en particulier celui de l'aéronautique, ont vu apparaitre un nouvel outil de production devenu, aujourd'hui, incontournable : la Conception Assistée par Ordinateur (CAO).

En conception et validation des structures la méthode des éléments finis est certainement la méthode la plus répandue et la plus utilisée de nos jours. L'intérêt des éléments finis est qu'ils représentent un outil puissant d'analyse numérique pour arriver à des solutions approchées des problèmes que rencontrent les ingénieurs, qui ne cherchent plus des solutions exactes et fermes car elles nécessitent énormément d'efforts intellectuels et de temps, lorsqu'elles sont possibles.

Cette étape dans la production d'une pièce consiste à placer virtuellement celle-ci dans l'environnement ou elle est censée évoluer pour analyser son comportement sans avoir recours à l'expérimentation. Pour ce faire, il est nécessaire en premier lieu de créer une maquette informatique virtuelle (modélisation) de l'objet à analyser et dans un second lieu de résoudre les équations physiques qui régissent les interactions de cet objet avec les sollicitations extérieures auquel il est sollicité.

La solution exacte de tels problèmes est généralement impossible à calculer ; c'est pourquoi on a souvent recours à des méthodes de résolutions numériques conduisant seulement à des solutions approchées du problème. Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis qui s'est imposée par sa robustesse et sa flexibilité. Elle est actuellement utilisée pour résoudre des problèmes divers et variés tels que ceux de la mécanique des solides, de la thermique de l'électromagnétisme…etc.

Mais celui qui nous intéresse, dans ce travail, est celui de la mécanique des milieux continus.

3.2 Généralités sur la mécanique des milieux continus et la méthode des éléments finis (MMC et MEF)

3.2.1 Cinématique des milieux continus

Soit un corps solide quelconque ayant une configuration initiale Ω_0. Ce corps, soumis à différentes sollicitations, se transforme au cours du temps. A un instant *t* quelconque, il prend une nouvelle configuration appelée Ω_t (Fig.3.1).

Donc dans un repère cartésien global *O(x, y, z)* un point matériel quelconque *Mo* appartenant à un domaine Ω_0 est repéré par le vecteur des coordonnées $\overrightarrow{X_0}(x_0, y_0, z_0)$. A l'instant *t* le point *Mo* devient un nouveau point M_t appartenant au domaine Ω_t qui est maintenant repéré par le vecteur des coordonnées $\overrightarrow{X_t}(x_t, y_t, z_t)$.

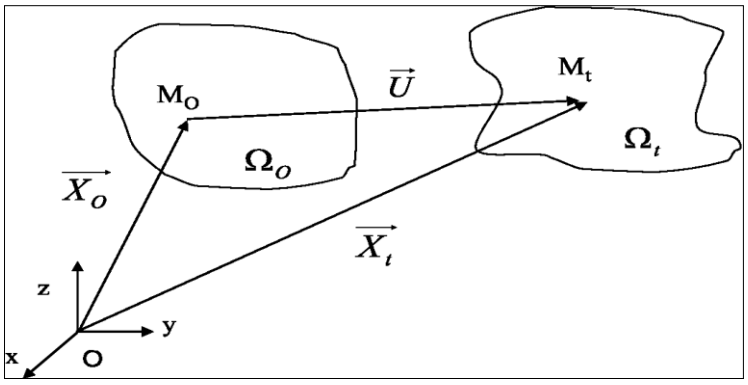


Fig.3.1 Cinématique des milieux continus

Dans le cadre d'une description lagrangienne, on a :

$$\overrightarrow{X_t} = \overrightarrow{X_0} + \overrightarrow{M_0M_t} = \overrightarrow{X_0} + \vec{U} \tag{3-1}$$

Où le vecteur $\vec{U}$ est appelé le déplacement du point *Mo*.

En écrivant :

$$\overrightarrow{X_t}^T = \left\{\overrightarrow{X_t}\right\}^T = \langle\overrightarrow{X_t}\rangle = \langle x_t \quad y_t \quad z_t\rangle ;$$

$$\overrightarrow{X_0}^T = \left\{\overrightarrow{X_0}\right\}^T = \langle\overrightarrow{X_0}\rangle = \langle x_0 \quad y_0 \quad z_0\rangle ;$$

$$\vec{U}^T = \left\{\vec{U}\right\}^T = \langle u \quad v \quad w\rangle \tag{3-2}$$

Le tenseur gradient décrivant la transformation est défini comme suit :

$$\nabla\overrightarrow{X_t} = \nabla\overrightarrow{X_0} + \nabla\vec{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial x_0} & \frac{\partial x_t}{\partial y_0} & \frac{\partial x_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_t}{\partial x_0} & \frac{\partial y_t}{\partial y_0} & \frac{\partial y_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_t}{\partial x_0} & \frac{\partial z_t}{\partial y_0} & \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial x_0}{\partial y_0} & \frac{\partial x_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x_0} & \frac{\partial y_0}{\partial y_0} & \frac{\partial y_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_0}{\partial x_0} & \frac{\partial z_0}{\partial y_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

Ou encore

$$\nabla\overrightarrow{X_t} = \nabla\overrightarrow{X_0} + \nabla\vec{U} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0}\\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0}\\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0}\end{bmatrix} = [I] + [L_0] \tag{3-4}$$

Si on peut écrire que $[L_0] = \frac{1}{2}([L_0] + [L_0]^T) + \frac{1}{2}([L_0] - [L_0]^T) = [D_0] + [W_0]$, alors après calcul on a :

$$[D_0] = \begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0}\right)\\ & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0}\right)\\ & & \frac{\partial w}{\partial z_0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ & & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{3-5}$$

$$[W_0] = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0}\right)\\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial y_0}\right)\\ \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0}\right) & \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0}\right) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\theta_z & \theta_y\\ \theta_z & 0 & -\theta_x\\ -\theta_y & \theta_x & 0\end{bmatrix} \tag{3-6}$$

Ainsi on remarque que la matrice $[D_0]$ représente le tenseur des déformations linéarisées ou petites déformations et $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ représentent les rotations infinitésimales autour des axes *x, y, z* qui ne produisent aucune déformation.

3.2.2 Les conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions **[82]** ont été établies par Saint Venant (1854). Physiquement, elles expriment la continuité de la matière avant et après transformation d'un corps solide, d'où l'appellation de conditions de compatibilité cinématique.

Mathématiquement, elles expriment des restrictions sur la forme des fonctions des déformations pour permettre l'intégration des équations aux dérivées partielles. De ce fait, elles sont, également appelées conditions d'intégralité. Leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements.

En état tridimensionnel, les six équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right) = 0 \qquad (3\text{-}7)$$

En élasticité plane et en état plan de déformations, cinq équations sont automatiquement vérifiées. La sixième condition qui doit être vérifiée est:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (3\text{-}8)$$

Pour le cas de l'état plan de contraintes, trois autres équations doivent être en plus vérifiées :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0, \qquad (3\text{-}9)$$

3.2.3 Contraintes, équations d'équilibre et déformations

3.2.3.1 Etat de contraintes

Soit un corps (C) en équilibre sous l'action de forces extérieures. En tout point M de ce corps naissent des forces intérieures de cohésion et de frottement.

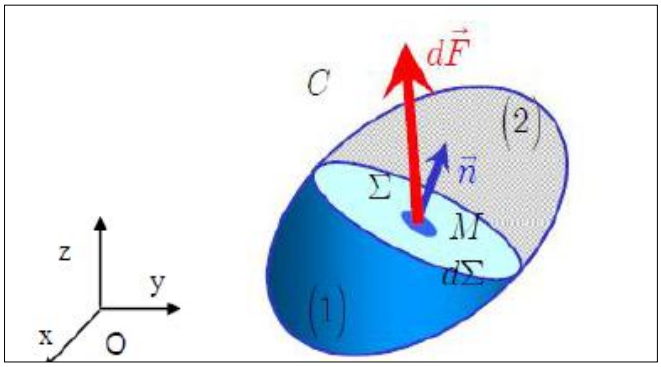


Fig.3.2 Corps en équilibre

Si $\overrightarrow{dF}$ est la résultante des forces qui s'exercent sur l'élément de surface $d\Sigma$ de normale $\vec{n}$au point *M* (Fig.3.2), le vecteur des contraintes est définie par le postulat de Cauchy :

$$\vec{\sigma}(M,\vec{n}) = \lim_{d\Sigma \to 0} \left\{\frac{d\vec{F}}{d\Sigma}\right\} \qquad (3\text{-}10)$$

Ainsi en fonction de l'orientation de $\vec{n}$, il existe une infinité de vecteur de contraintes au point *M*. Si on considère un repère cartésien *O(x, y, z)*, les vecteurs contraintes agissant sur les

facettes de normales, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ du repère sont notés respectivement $\sigma(\overrightarrow{\imath})$, $\sigma(\overrightarrow{\jmath})$ et $\sigma(\overrightarrow{k})$. Leurs composantes sont définies en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma(\overrightarrow{\imath}) &= \sigma_{xx}\vec{\imath} + \tau_{yx}\vec{\jmath} + \tau_{zx}\vec{k}\\ \sigma(\overrightarrow{\jmath}) &= \tau_{xy}\vec{\imath} + \sigma_{yy}\vec{\jmath} + \tau_{zy}\vec{k}\\ \sigma(\overrightarrow{k}) &= \tau_{xz}\vec{\imath} + \tau_{yz}\vec{\jmath} + \sigma_{zz}\vec{k}\end{aligned} \tag{3-11}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy au point *M* est ainsi défini comme suit :

$$\sigma = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \tag{3-12}$$

En l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide, l'équilibre des moments autour des axes passant par *M*, conduit à :

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}\\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}\\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}\end{aligned} \tag{3-13}$$

Ce qui permet de conclure que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique.

Ainsi le vecteur axial des contraintes se résume à six composantes ; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$.

Pour un état bidimensionnel, plusieurs hypothèses peuvent être envisagées. On cite entre autres l'état plan de contraintes et l'état plan de déformations.

* *En état plan de contraintes*, l'hypothèse considérée suppose que les contraintes hors plan sont nulles. C'est-à-dire, par rapport à un plan de référence *(O, x, y)*, les composantes des contraintes σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles sur les deux faces de coordonnées $\mp h/2$. Sur les autres plans intérieurs parallèles au plan *(x, y)*, la valeur de ces composantes est tellement faible qu'on peut affirmer qu'elles sont nulles. On en déduit, ainsi que :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \text{ et } \varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \tag{3-14}$$

L'hypothèse des contraintes planes est généralement admise pour le calcul des structures minces (poutres, plaques et coques) où l'axe « *O, z* » représente la direction de l'épaisseur *h*.

* *En état plan de déformations*, l'hypothèse considérée suppose que les déformations hors plan sont nulles. C'est-à-dire $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ ce qui entraine

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ et } \sigma_{zz} = \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) \tag{3-15}$$

Cette hypothèse peut être utilisée pour l'analyse des sections des cylindres longs dans la direction z. Comme, elle s'adapte bien pour l'étude du profil d'un barrage.

3.2.3.2 Equations d'équilibre

Si le solide est soumis dans la configuration actuelle $\sum_t$ à des sollicitations comme des forces surfaciques $\overrightarrow{f_s}$ appliquées sur une partie de la frontière $\partial_1\sum_t$, des déplacements imposés $\overrightarrow{u_d}$ appliqués sur une partie de la frontière $\partial_2\sum_t$ et des forces volumiques $\overrightarrow{f_v}$, l'équilibre du système s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{div(\sigma)} + \overrightarrow{f_v} = \vec{0} \\ \vec{\sigma}(M)\vec{n} = \overrightarrow{f_s} \\ \vec{u}(M) = \overrightarrow{u_d} \end{cases} \tag{3-16}$$

$\forall$ M $\in \sum_t$, $\forall$ M $\in \partial_1\sum_t$, $\forall$ M $\in \partial_2\sum_t$

Avec la somme des parties de frontière $\partial_1\sum_t$ et $\partial_2\sum_t$ représente la frontière totale fermée $\partial\sum_t$ de $\sum_t$.

3.2.3.3 Tenseur des déformations

Concernant des structures subissant des transformations élastiques caractérisées par de grands déplacements et de petites déformations pour lesquelles on utilise la mesure des déformations de Green-Lagrange linéarisées :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ Sym. & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ Sym. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

Ou encore :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3-18}$$

3.2.4 Loi de comportement

Le comportement d'un matériau donné est défini par sa loi constitutive (ou de comportement) qui met en relation les contraintes avec les déformations et ses variables

mécaniques intrinsèques internes. Pour un matériau dit élastique linéaire, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations sont données sous la forme générale suivante :

$$\sigma = C\varepsilon + \sigma_0 \tag{3-19}$$

Où :

- σ_0 est le tenseur des contraintes à l'état initial qu'on suppose nul $(\sigma_0 = 0)$ pour simplifier l'écriture du problème

- C est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau.

Etant donné que les tenseurs σ et ε sont symétriques, on a alors $C_{ijkl} = C_{jikl}$ et $C_{ijkl} = C_{ijlk}$

Ceci permet de réécrire la loi de comportement, en notation de Voigt, comme suit :

$$\sigma = C\varepsilon \tag{3-20}$$

Où C est la matrice de comportement de taille 6x6, c'est-à-dire ayant 36 composantes. Les tenseurs σ et ε sont ceux donnés dans les formules (3.12) et (3.18).

En élasticité tridimensionnelle, la matrice de comportement d'un matériau élastique, linéaire et isotrope prend la forme suivante :

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

Où E et ν sont respectivement, le module de Young et coefficient de poisson du matériau considéré.

Pour un état bidimensionnel, la matrice de comportement C se réduit à une taille de 3x3 pour fournir les composantes suivantes :

** à l'état plan de contraintes,*

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

** à l'état plan de déformations,*

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3\text{-}23)$$

3.2.5 Principe des travaux virtuels

Le principe consiste à satisfaire l'équation d'équilibre locale sous forme intégrale (On dit aussi sous forme faible). Ainsi, « pour tout champs de déplacements virtuels cinématiquement compatibles, le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel intérieur $\delta W_{ext} = \delta W_{int}$. Cet équilibre s'exprime par la relation :

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T f_v \, dV + \int_A \delta u^T f_s dA \quad (3\text{-}24)$$

$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV$: représente la variation de l'énergie de déformation.

$\int_V \delta u^T f_v dV + \int_A \delta u^T f_s dA$: représente la variation de l'énergie des forces extérieures, dans laquelle f_v est le vecteur des forces de volume et f_s est le vecteur des forces de surface.

3.2.6 Principe des travaux virtuels complémentaires

Ce principe s'annonce comme suit : pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces, « le travail virtuel complémentaire des forces extérieures est égal au travail virtuel complémentaire intérieur ». Cet équilibre s'exprime par la relation :

$$\int_V \delta\sigma^T \varepsilon dV = \int_V \delta {f_v}^T u \, dV + \int_A \delta {f_s}^T u dA \quad (3\text{-}25)$$

$\int_V \delta\sigma^T \varepsilon dV$: représente la variation de l'énergie de déformation.

$\int_V \delta {f_v}^T u dV + \int_A \delta {f_s}^T u dA$: représente la variation de l'énergie des forces extérieures, dans laquelle f_v est le vecteur des forces de volume et f_s est le vecteur des forces de surface.

3.3 La méthode des éléments finis en déplacement

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ de déplacement en considérant l'élément cinématiquement admissible ; c'est-à-dire l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

La démarche à ce niveau repose sur trois principales actions :

- La définition d'une forme paramétrique simple du champ de déplacement (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure.

- L'application à chacun des éléments le principe des travaux virtuels à travers la satisfaction des conditions de stationnarité de la fonctionnelle pour chacun des éléments. Ces conditions sont une forme faible des équations d'équilibre. Elles permettent de relier, par l'intermédiaire de la raideur de l'élément, les paramètres de la discrétisation aux grandeurs équivalentes des forces qui s'applique sur l'élément.
- L'assemblage des matrices de rigidité ainsi obtenues au niveau élémentaire conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de la structure dans sa globalité.

Les principes et les étapes de cette approche se présentent comme suit :

3.3.1 Discrétisation du champ de déplacement

Soit un élément Ω_e, la discrétisation fonctionnelle du champ de déplacement u à l'intérieur de l'élément est donnée sous forme matricielle par la relation :

$$\{u\} = [N]\{q^e\} \tag{3-26}$$

Où $\{q^e\}$ représente le vecteur des déplacements nodaux et $[N]$ la matrice des fonctions de forme de l'élément.

Dans le cas général en tridimensionnel et pour un élément possédant n nœuds, la matrice des fonctions de forme s'écrit sous forme développée comme suit :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_k & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_k & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_k & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \tag{3-27}$$

Avec N_k la fonction de forme du nœud *k*.

Et le vecteur des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{q^e\}^T = \langle u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \dots, u_{xk}, u_{yk}, u_{zk}, \dots, u_{xn}, u_{yn}, u_{zn} \rangle \tag{3-28}$$

3.3.2 Application du principe des travaux virtuels (ou principe des déplacements virtuels)

Cette méthode demande l'application du principe des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels) exprimé par la relation $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$ dont le développement est donné par la relation suivante :

$$\int_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \int_V \delta u^T f_V dV + \int_A \delta u^T f_s dA \tag{3-29}$$

Sachant que :

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta q^e\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q^e\} \tag{3-30}$$
$$[\sigma] = [C]\{\varepsilon\}$$

$[B]$ est la matrice de déformation

La relation (3-29) devient :

$$\int_V [B]^T \{\delta q^e\}^T [C][B]\{q^e\} dV = \int_V [N]^T \{\delta q^e\}^T \{f_v\}\, dV + \int_A [N]^T \{\delta q^e\}^T \{f_s\} dA \tag{3-31}$$

Ou encore

$$\{\delta q^e\}^T \left(\int_V [B]^T [C][B] dV\right)\{q^e\} = \{\delta q^e\}^T \left(\int_V [N]^T \{f_v\}\, dV + \int_A [N]^T \{f_s\} dA\right)$$

$$\langle \delta q^e \rangle [K^e]\{q^e\} = \langle \delta q^e \rangle \{F^e\} \tag{3-32}$$

La relation (3-32) s'écrit simplement $[K^e]\{q^e\} = \{F^e\}$

Avec

$[K^e] = \int_V [B]^T [C][B] dV$ et $\{F^e\} = \int_V [N]^T \{f_v\}\, dV + \int_A [N]^T \{f_s\} dA$ qui représentent, respectivement la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des charges aux nœuds équivalents aux forces extérieures.

3.3.3 Assemblage des éléments

Les matrices élémentaires $[K^e]$ sont ensuite assemblées, de manière à obtenir la matrice de rigidité globale $[K]$ de la structure. La résolution du système global $[K]\{q\} = \{F\}$ fournit les valeurs des déplacements $\{q\}$ des différents nœuds qui déterminent le maillage de la structure. Finalement par l'intermédiaire des déformations, on obtient l'expression des contraintes aux nœuds :

$$\{\sigma\} = [C][B]\{q\} \tag{3-33}$$

3.4 La méthode des éléments finis en déformation

Le problème de convergence d'éléments simples formulés à travers l'approche en déplacement pour l'analyse des structures courbes ont montré la nécessité d'intervention au niveau de la discrétisation physique pour améliorer au mieux la solution. Cette intervention consiste en la diminution de la taille des éléments (raffinement *h*) pour obtenir des résultats satisfaisants ; l'objectif étant de minimiser l'écart entre la solution exacte et la solution approchée et tendre asymptotiquement vers zéro l'erreur qui en résulte.

Ceci rend le niveau de précision de la solution tributaire du nombre d'éléments à utiliser dans la discrétisation physique. Ce qui pose à ce niveau une problématique en terme économique dans sa mise en œuvre : Quel rapport entre « la précision de la solution » et « le coût pour son obtention » ?

Pour répondre à ce questionnement, d'autres études ont été entreprises par Ashwell et *al.* **[83]**, utilisant cette fois-ci le modèle en déformation à la place du modèle en déplacement. Cette approche a abouti à des résultats plus performants sans avoir recours à un grand nombre d'éléments dans la discrétisation physique.

Ces résultats ont encouragé beaucoup de chercheurs pour développer des éléments d'ordre supérieurs, des éléments nécessitant uniquement les degrés de liberté essentiels. Ainsi beaucoup d'éléments finis d'élasticité plane et des éléments de coques ont vu le jour. On cite entre autres **[84]**, **[85]**, **[86]**, **[87]**, **[88]**, **[89]**, **[90]**, **[91]**, **[92]**.

3.4.1 Hypothèses et démarche

- Calcul exact des termes représentant les modes de corps rigides,
- Choix des termes du champ des déformations de sorte que les conditions de compatibilité cinématique soient vérifiées,
- Déduction des composantes du champ des déplacements par intégration des fonctions du champ de déformations, ce qui rend plus riche les polynômes (ordre supérieur) décrivant les champs des déplacements,
- Application du principe des travaux virtuels (PTV),
- Recherche de satisfaction du critère de complétude au niveau du champ de déformations.

3.4.2 Principe de formulation

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le champ des déformations en considérant l'élément cinématiquement admissible; c'est-à-dire la continuité et l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

La démarche à ce niveau consiste à :

- Choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du champ de déformations (discrétisation fonctionnelle) à l'intérieur des éléments finis de la structure.
- Le champ des déplacements est déduit, en second lieu, par intégration du champ des déformations.
- Il est, enfin, appliqué à chacun des éléments le principe des travaux virtuels.

En considérant la continuité du champ de déplacement dans toute la structure, l'assemblage des fonctionnelles, ainsi obtenues au niveau élémentaire, conduit à un système d'équations qui traduit les conditions de stationnarité de la fonctionnelle dans la structure dans sa globalité.

3.4.3 Procédure de formulation

Pour un élément membranaire similaire, les relations entre les déformations et les déplacements sont établies comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3-34}$$

La rotation autour de la normale est donnée par la relation :

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3-35}$$

Le choix des fonctions d'interpolation est établi en deux étapes :

- La première, permettant de représenter les modes de corps rigides (MCR),
- La seconde, permettant de représenter les modes supérieurs, particulièrement ceux donnant des états de déformations homogènes.

Pour les modes de corps rigides, les fonctions d'interpolation des déplacements doivent permettre à l'élément de subir un mouvement sans déformation interne.

Ce critère est essentiel, puisque :

- D'une part, il permet de représenter la réalité du comportement des structures,
- Et d'autre part, il évite la lenteur dans la convergence vers la solution exacte qui se produit s'il n'est pas respecté

Ainsi, pour les mouvements de corps rigide (MCR), les déformations sont nulles :

$$\varepsilon_x = 0 \qquad \varepsilon_y = 0 \qquad \Upsilon_{xy} = 0 \tag{3-36}$$

L'intégration des équations (3-36) nous donne les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$u_R = a_1 - a_3 y \qquad v_R = a_2 + a_3 x \qquad \theta_{zR} = a_3 \tag{3-37}$$

Avec a_1 et a_2, des paramètres représentant les translations u et v du corps rigide respectivement le long des axes x et y et a_3 représentant la rotation du corps rigide autour de la normale (*drilling rotation*) θ_z.

Notre élément est constitué de quatre nœuds. Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes (a_1. ……,a_{12}).

Les trois premières (a_1, a_2, a_3) sont utilisées dans les équations (3-37) pour représenter les mouvements de corps rigide.

Les neufs autres (a_4, ……. , a_{12}) sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément. Ils sont répartis dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à :

- satisfaire l'équation générale de compatibilité des déformations pour l'élasticité plane,

- et éviter la singularité de la matrice des coordonnées nodales de l'élément.

Ainsi les champs des déformations sont établis comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} x y^3 \\ \varepsilon_y = a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} y x^3 \\ \Upsilon_{xy} = 2a_5 + a_6 x + a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x \end{cases} \quad (3\text{-}38)$$

Ce champ se caractérise par :

- l'existence d'états de déformations constantes qui assurent la convergence lorsqu'on raffine le maillage, représentés par les constantes a_4, a_7, a_5.
- l'existence d'états de déformation linéaires au niveau des dilatations (ε_x, ε_y), représentés par les paramètres a_6 et a_8.
- Un état de déformation bilinéaire des distorsions (Υ_{xy}), représenté par les paramètres a_9, a_{12} et aussi par les paramètres a_6 et a_8 qui mettent en dépendance les distorsions avec les dilatations.
- Des états de déformations non linéaires (en y pour ε_x, et en x pour ε_y) permettant la satisfaction du critère de complétude des champs des déplacements et le changement de courbure des déformées. Ces états sont représentés par les paramètres a_{10} et a_{11}.
- La satisfaction de l'équation générale de compatibilité des déformations :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \Upsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3\text{-}39)$$

L'intégration des équations (3-38) nous donne les champs des déplacements suivants:

$$\begin{cases} u_s = a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_9 y^2 + a_{10} x y^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ v_s = a_5 x + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} x^3 y^2 + a_{12} x^2 \\ \theta_{zs} = -a_6 \frac{x}{2} + a_8 \frac{y}{2} - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{cases} \quad (3\text{-}40)$$

Le champ de déplacement final est obtenu en additionnant les relations (3-37) et (3-40)

$$\begin{cases} u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_9 y^2 + a_{10} x y^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ v = a_2 + a_3 x + a_5 x + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} x^3 y^2 + a_{12} x^2 \\ \theta_z = a_3 - a_6 \frac{x}{2} + a_8 \frac{y}{2} - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{cases} \quad (3\text{-}41)$$

Une fois le champ des déplacements défini, le reste des étapes de formulation pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire, d'assemblage et de résolution sont similaires que ceux de l'approche en déplacement.

3.4.4 Ses avantages

- Facilité de la mise en œuvre, au même titre que le modèle en déplacement,

- Satisfaction absolue des critères de convergence liés aux déformations : mode de corps rigide et mode de déformation constante,
- Pour un même élément fini, obtention de champ de déplacement plus riche et avec des polynômes ayant des termes d'ordre élevé, comparativement à ceux résultant du modèle en déplacement,
- Meilleure précision dans l'approximation des déformations et des contraintes que celle du modèle en déplacement où ces variables sont obtenues par dérivation du champ de déplacement provoquant ainsi une dégradation de leur approximation,

3.5 Conclusion

Le calcul des structures complexes nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus performant, et prenant en compte les spécifications de ces matériaux-structures. Du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est essentiel pour la conception et le calcul de ces structures complexes. Les objectifs recherchés dans ce chapitre visent à mettre en relief les principes et les méthodes théoriques de base à notre développement. Ainsi, les aspects traités concernant le domaine de la mécanique des milieux continus et la méthode des éléments finis à travers les deux approches en déplacement et en déformation ; utilisés pour l'étude des poutres FGM et des coques FGM, respectivement.

Chapitre 4

Modélisation des poutres en matériau à gradient fonctionnel

4.1 Structure de poutre

De manière générale, un élément de structure sera de type poutre si l'une de ses dimensions (la longueur) est supérieure devant les deux autres. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales.

- **Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres**

L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".

L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".

L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.

L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

- **Remarques importantes**

1) L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne.

2) L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes

généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes σ_{ij} en chaque point de la section droite.

Dans notre étude on utilise le modèle d'Euler Bernoulli et de Timoshenko.

4.2 Modèle d'Euler Bernoulli

4.2.1 Analyse statique

4.2.1.1 Le champ de déplacement

La (Fig. 4.1) présente un élément de poutre FGM de Bernoulli. Dont les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur.

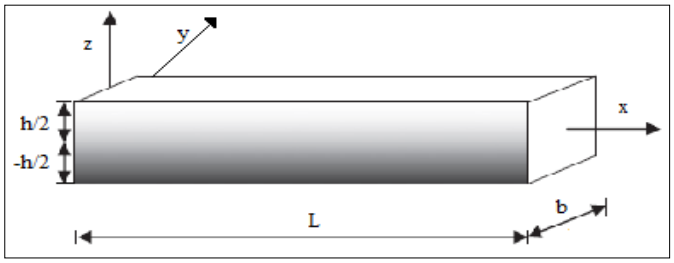


Fig.4.1 Elément de poutre FGM (Bernoulli)

Dans la théorie d'Euler-Bernoulli le cisaillement est négligé, le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit :

$$u(M) = \begin{cases} u(x,z) = u_0(x) - z\theta(x) \\ w(x,z) = w_0(x) \end{cases} \quad (4\text{-}1)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4\text{-}2a)$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (4\text{-}2b)$$

Où u_0 et w_0 sont les déplacements ; axial et transversal de n'importe quel point situé au plan médian, l'équation (4-1) peut être réécrite comme suit :

$$\{u_M\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4\text{-}3)$$

Et u_M c'est le vecteur de déplacement du point M,

4.2.1.2 Le champ de déformation, et les contraintes normales

Le champ de déformation est obtenu grâce à la formule suivante

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \tag{4-4a}$$

$$\varepsilon_{xx} = \langle 1 \quad -z \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \tag{4-4b}$$

ε_{xx} est la déformation normale suivant la direction x.

Considérant le matériau de poutre FGM obéit à la loi de Hooke, L'expression des contraintes peut être déterminée comme :

$$\sigma_{xx}(z) = E(z)\varepsilon_0 - zE(z)\kappa_{xx} \tag{4-5a}$$

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx} = E(z)\langle 1 \quad -z \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \tag{4-5b}$$

Avec : $\kappa_{xx} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$

Lorsque la variation du module de Young est à travers la direction de l'épaisseur l'équation constitutive des composites exprimées en fonction des efforts de membrane N et des moments M, est donnée par :

$$(N, M) = \int_A \sigma_{xx}(1, z)dA \tag{4-6a}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{D}_a & -\widehat{D}_{ab} \\ -\widehat{D}_{ab} & \widehat{D}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_{xx} \end{Bmatrix} \tag{4-6b}$$

ε_0 : Déformation du plan medium,

κ_{xx} : Les courbures, b : la largeur de la poutre FGM.

$\widehat{D}_a$, $\widehat{D}_{ab}$, $\widehat{D}_b$ sont respectivement les termes de rigidité de la matrice de membrane, de couplage et de flexion respectivement qui sont données par l'expression suivante :

$$\left(\widehat{D}_a, \widehat{D}_{ab}, \widehat{D}_b\right) = b\int_{-h/2}^{h/2} E(z)(1, z, z^2)dz \tag{4-7}$$

4.2.1.3 La position de l'axe neutre et les contraintes de cisaillement

Il est clair que, en raison de la variation du module de Young, l'axe neutre n'est pas au milieu de la section comme pour les poutres isotropes, mais il se déplace du plan médian. Pour déterminer la position de l'axe neutre, on construit un nouveau système de coordonnées

de telle sorte que le nouvel axe x est positionné au niveau de l'axe neutre, qui sera déterminée comme suit:

$$x = x' \qquad z = z' + h_0 \tag{4-8}$$

Où,

h_0: C'est la distance entre l'axe neutre et le plan médian de la poutre.

Dans ce cas et de manière similaire au traitement habituel dans la théorie des poutres (CBT), nous pouvons écrire directement:

$$\varepsilon_{xx} = -z' \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \qquad \sigma_{xx} = E(z')\, \varepsilon_{xx} \tag{4-9}$$

Où w_0 est le déplacement transversal de la poutre FGM. La position de l'axe neutre peut être déterminée en choisissant h_0 de telle sorte que la force axiale totale de la section transversale devient nulle:

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad b \int_{-h/2-h_0}^{+h/2-h_0} \sigma_{xx}\, dz = 0 \tag{4-10}$$

La substitution d'équation (4-8), conjointement avec (4-9) en (4-10) entraînent

$$- \int_{-h/2-h_0}^{+h/2-h_0} bE(z')\, z' \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz' = 0 \tag{4-11}$$

Par changement de l'intervalle de l'intégrale, on obtient:

$$- \int_{-h/2}^{+h/2} bE(z)\, (z - h_0) \frac{d^2 w_0}{dx^2} dz = 0 \tag{4-12}$$

Puis

$$-b \frac{d^2 w}{dx^2} \left(\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z dz - h_0 \int_{-h/2}^{+h/2} E(z) dz \right) = 0 \tag{4-13}$$

La position de l'axe neutre peut être déterminée en résolvant l'équation suivante :

$$h_0 = \frac{\widehat{D}_{ab}}{\widehat{D}_a} = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z dz}{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) dz} \tag{4-14}$$

Alors la position de l'axe neutre varie en fonction de divers paramètres du matériau p, cette valeur peut être donnée sur le tableau 4.1 :

Tableau 4.1 Valeur de h_0 en fonction du paramètre du matériau

p	0	1	2	3	4	5
h_0	0	$\frac{h}{6}\frac{(E_c - E_m)}{(E_c + E_m)}$	$\frac{h}{4}\frac{(E_c - E_m)}{(E_c + 2E_m)}$	$\frac{3h}{10}\frac{(E_c - E_m)}{(E_c + 3E_m)}$	$\frac{h}{3}\frac{(E_c - E_m)}{(E_c + 4E_m)}$	$\frac{15h}{42}\frac{(E_c - E_m)}{(E_c + 5E_m)}$

Avec l'intégration de la première équation des équations d'équilibres différentielles, la relation de la distribution des contraintes de cisaillement peut être dérivée, qui vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieures et inférieures de la structure.
L'expression pour les contraintes de cisaillement à une distance z′peut être dérivée comme suit ou $F_x = 0$ (pour simplicité):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \rightarrow \tau_{xz}(x, z') = -\int_{-(h/2)-h_0}^{z'} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz \qquad (4\text{-}15)$$

4.2.1.4 Principe des travaux virtuel

Le travail virtuel des efforts internes est exprimé par :

$$(\delta W_{int}) = (\delta W_{ext}) \qquad (4\text{-}16)$$

$$\int_v \delta\varepsilon^T \sigma dv = (\delta W_{ext}) \qquad (4\text{-}17)$$

$$\int_v \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\right) E(z) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) dv = (\delta W_{ext}) \qquad (4\text{-}18)$$

$$\int_v [\underbrace{\left(E(z)\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{\text{Rigidité membranaire}} + \underbrace{\left(z^2 E(z)\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)}_{\text{rigidité flexionnelle}} - \underbrace{\left(zE(z)\frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)}_{\text{rigidité de couplage}} - \underbrace{\left(zE(z)\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{\text{rigidité de couplage}}] dv$$

(4-19)

La matrice de rigidité peut être divisée en sous-matrices comme suit :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_m & K_{cp} \\ K_{cp} & K_f \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}20)$$

K_m : La rigidité membranaire ;

K_{cp} : La rigidité de couplage ;

K_f : La rigidité flexionnelle.

$$K_m = \int_v \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} E(z) \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) dv \qquad (4\text{-}21)$$

$$K_f = \int_v \left(z^2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} E(z) \frac{\partial {w_0}^2}{\partial x^2}\right) dv \qquad (4\text{-}22)$$

$$K_{cp} = -\int_v \left(z\, E(z) \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \frac{\partial {w_0}^2}{\partial x^2} \right) dv \tag{4-23}$$

$$K_{cp} = -\int_v \left(z\, E(z) \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dv \tag{4-24}$$

4.2.2 Analyse modale

L'état d'équilibre de la structure dynamique de vibration libre basé sur le principe des travaux virtuels s'écrit comme suit :

$$\delta W_{int} + \delta W_{ine} = 0 \tag{4-25}$$

Avec δW_{int} est le travail virtuel donné par le champ de contrainte et le champ de déformation virtuel:

$$\delta W_{int} = \int_v \delta \varepsilon^T \sigma dv \tag{4-26}$$

En substituant les équations (4-4), et (4-5) dans l'équation (4-26) on trouve :

$$\delta W_{int} = b \int_0^L \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right\} \left[\int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} E(z) & -zE(z) \\ -zE(z) & z^2 E(z) \end{bmatrix} dz \right] \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{Bmatrix} dx \tag{4-27}$$

Le travail virtuel fait des forces d'inertie dans le champ de déplacement virtuel peut être présenté comme suit :

$$\delta W_{ine} = -\int_v \rho(z) \ddot{u}_M \delta u_M dv \tag{4-28}$$

Par le remplacement de l'équation (4-3) dans (4-28) on trouve :

$$\delta W_{ine} = b \int_0^L \left\{ \ddot{u}_0 \quad \ddot{w}_0 \quad \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right\} \left[\int_{-h/2}^{+h/2} \begin{bmatrix} \rho(z) & 0 & -\rho(z)z \\ 0 & \rho(z) & 0 \\ -\rho(z)z & 0 & \rho(z)z^2 \end{bmatrix} dz \right] \delta \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} dx \tag{4-29}$$

Après le remplacement des équations (4-47), (4-48), et (4-49) dans (4-27) et (4-29), et aussi dans l'équation (4-25) et après intégration nous obtenons l'équation de mouvement suivante :

$$M\ddot{u}_M + Ku_M = 0 \tag{4-30}$$

M : La matrice de masse globale de la poutre.

K : La matrice de rigidité globale.

4.2.3 Instabilité au flambement

Le champ de déformation totale s'écrit comme suit :

$$\{\varepsilon_x\} = \{\varepsilon_l\} + \{\varepsilon_{nl}\} \tag{4-31}$$

$\{\varepsilon_l\}$: Déformation linéaire

$\{\varepsilon_{nl}\}$: Déformation non linéaire

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right] \quad (4\text{-}32)$$

L'effet de la non linéarité due au déplacement axial peut dans la plupart du temps être négligé devant la non linéarité due au déplacement transversal de flexion. Donc :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 \approx 0 \quad (4\text{-}33)$$

On peut décomposer ε_x en deux parties la première partie linéaire et la deuxième non linéaire :

$$\begin{cases}\{\varepsilon_l\} = [B]\{q_e\} \\ \{\varepsilon_{nl}\} = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\end{cases} \quad (4\text{-}34)$$

[B] = la différentielle de $[N(x)]$.

L'énergie potentielle totale s'écrit comme suite:

$$\pi = \sum_{e=1}^{nelt}(U - W) + U_m \quad (4\text{-}35)$$

U: L'énergie de déformation élémentaire.

W: Travail des forces extérieures élémentaire.

U_m: Le travail de la force axiale dans le cas des grands déplacements.

L'énergie potentielle des déformations est :

$$(U)_e = \frac{1}{2}\int_{v_e}\{\varepsilon_l\}^T\{\sigma_x\}dv^e \quad (4\text{-}36)$$

Avec : $\{\varepsilon_l\} = [B]\{q_e\}$ et $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon_l\}$

On obtient

$$(U)_e = \frac{1}{2}\{q_e\}^T[K_e]\{q_e\} \quad (4\text{-}37)$$

$$[K_e] = \int_{v_e}[B]^T[C][B]dv^e \quad (4\text{-}38)$$

Le travail extérieur produit par les forces nodales réelles est donné comme suit :

$$(W)_e = \{q_e\}^T\{F_e\} \tag{4-39}$$

La première variation de l'énergie potentielle totale permet d'obtenir l'expression de l'équation d'équilibre. Soit :

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}2\{\delta q_e\}^T[K_e]\{q_e\} - \{\delta q_e\}^T\{F_e\} = 0 \tag{4-40}$$

$$[K_e]\{q_e\} = \{F_e\} \tag{4-41}$$

Après l'assemblage on obtient l'équation générale suivante :

$$[K]\{q\} = \{F\} \tag{4-42}$$

Où : {F} est le vecteur force global et {q} est le vecteur des déplacements global.
Le travail de la force axiale donnée par l'expression suivante:

$$\mathrm{U_m} = \mathrm{P}\int_0^{\mathrm{L}} \varepsilon_{\mathrm{nl}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{P}\left(\frac{\partial \mathrm{w_0}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2 \mathrm{dx} \tag{4-43}$$

L'intégrale de cette équation devient :

$\mathrm{U_m} = \frac{1}{2}\{\mathrm{q}\}^{\mathrm{T}}[\mathrm{K_\sigma}]\{\mathrm{q}\}$; $\quad [\mathrm{K_\sigma}] = \int_0^{\mathrm{L}}[\mathrm{G}]^{\mathrm{T}}\,\mathrm{P}[\mathrm{G}]\mathrm{dx}$

$[\mathrm{K_\sigma}]$: est la matrice de rigidité géométrique avec $[\mathrm{G}] = \left[\frac{\mathrm{dN_3}}{\mathrm{dx}}\ \frac{\mathrm{dN_4}}{\mathrm{dx}}\ \frac{\mathrm{dN_5}}{\mathrm{dx}}\ \frac{\mathrm{dN_6}}{\mathrm{dx}}\right]$

L'annulation de la deuxième variation de l'énergie potentielle de déformation, permet d'obtenir le problème de valeurs propres suivant :

$$([\mathrm{K}] + \lambda[\mathrm{K_\sigma}])\{\delta\mathrm{q}\} = 0 \tag{4-44}$$

Pour qu'il y ait flambage, il faut que $\{\delta q\} \neq 0$, dans ce cas :

$$\det([\mathrm{K}] + \lambda[\mathrm{K_\sigma}]) = 0 \tag{4-45}$$

λ: Paramètre de charge.

Finalement la charge critique de flambement est donnée comme suit :

$$\{\mathrm{P}\}_{\mathrm{cr}} = \lambda\{\mathrm{P}\} \tag{4-46}$$

$\{P\}_{cr}$: est la charge critique de flambement.

$\{P\}$: est le vecteur des charges appliquée.

4.2.4 La formulation élément fini

Les composantes de déplacement dans le plan médian d'un élément de poutre sont représentées sur la (Fig.4.2).

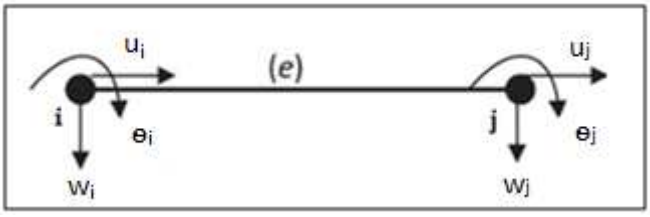


Fig.4.2 Un élément de poutre

Les déplacements en un point de cordonnées x de la poutre sont données par :

$$u^{(e)}(x) = N_1 u_i + N_2 u_j \tag{4-47}$$

$$w^{(e)}(x) = N_3 w_i + N_4 \theta_i + N_5 w_j + N_6 \theta_j \tag{4-48}$$

$$\theta^{(e)}(x) = w_i \frac{\partial N_3}{\partial x} + \theta_i \frac{\partial N_4}{\partial x} + w_j \frac{\partial N_5}{\partial x} + \theta_j \frac{\partial N_6}{\partial x} \tag{4-49}$$

u_i, w_i, θ_i sont : le déplacement axial, le déplacement transversal, et la rotation de chacune des nœuds, respectivement.

N_i Sont les fonctions d'interpolation.

4.2.4.1 Les fonctions d'interpolation

Les fonctions de forme (les fonctions d'interpolations) sont les fonctions qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieur à un élément aux déplacements nodaux qui sont les degrés de liberté dans le cas de l'approche cinématique : il y a pour un élément autant de fonctions de forme que de degré de liberté dans l'élément. Elles assurent le passage du problème continu au problème discret.

Les deux fonctions de forme aux deux degrés de libertés de membrane (barre) sont :

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \tag{4-50a}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{4-50b}$$

Les fonctions de formes et ses dérivées de l'élément de poutre plane en flexion simple sont présentées sur le tableau 4.2 :

Tableau 4.2 Les fonctions de formes et ses dérivées d'un élément de poutre (flexion simple)

$N_i(\xi)$	$\frac{\partial^2 N_i(\xi)}{\partial \xi^2}$
$N_3(\xi)=\frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3)$	$N_3''(\xi)=\frac{3}{2}\xi$
$N_4(\xi)=\frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3)$	$N_4''(\xi)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\xi$
$N_5(\xi)=\frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3)$	$N_5''(\xi)=\frac{-3}{2}\xi$
$N_6(\xi)=\frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)$	$N_6''(\xi)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\xi$

4.2.4.2 La matrice de rigidité

4.2.4.2.1 Rigidité membranaire

Soit une barre de longueur L. Les deux fonctions associées aux deux degré de libertés sont :

$$N_1(\xi)=\frac{1-\xi}{2} \quad , \qquad N_2(\xi)=\frac{1+\xi}{2}$$

$$\varepsilon(x)=Du=DNq=Bq \Rightarrow \qquad B(\xi)=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$K_m=\int_v\left(\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}E(z)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)dv \tag{4-51}$$

La matrice de raideur K_m est définie par la relation suivante :

$$[K_m]=\widehat{D}_a\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & \frac{-1}{L}\\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix} \tag{4-52}$$

4.2.4.2.2 Rigidité de couplage

$$K_{cp}=-\int_v\left(z\,E(z)\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}\frac{\partial {w_0}^2}{\partial x^2}\right)dv \tag{4-53}$$

La matrice de couplage est définie par la relation ci-dessous :

$$\left[K_{cp}\right]=-\widehat{D}_{ab}\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L}\\ 0 & 0\\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix} \tag{4-54}$$

4.2.4.2.3 Rigidité flexionnelle

$$K_f=\int_v\left(z^2\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2}E(z)\frac{\partial {w_0}^2}{\partial x^2}\right)dv \tag{4-55}$$

$$\left[K_f\right]=b\int_0^L E(z)z^2dz\left[B_f\right]^T\left[B_f\right]dx \tag{4-56}$$

Après la simplification on obtient :

$$[K_f] = \widehat{D}_b \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \tag{4-57}$$

La matrice de rigidité générale d'un élément de poutre 2-D en FGM est

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{D}_a}{L} & 0 & \frac{-\widehat{D}_{ab}}{L} & \frac{-\widehat{D}_a}{L} & 0 & \frac{\widehat{D}_{ab}}{L} \\ & \frac{12\widehat{D}_b}{L^3} & \frac{6\widehat{D}_b}{L^2} & 0 & \frac{-12\widehat{D}_b}{L^3} & \frac{6\widehat{D}_b}{L^2} \\ & & \frac{4\widehat{D}_b}{L} & \frac{\widehat{D}_{ab}}{L} & \frac{-6\widehat{D}_b}{L^2} & \frac{2\widehat{D}_b}{L} \\ & & & \frac{\widehat{D}_a}{L} & 0 & \frac{-\widehat{D}_{ab}}{L} \\ & & & & \frac{12\widehat{D}_b}{L^3} & \frac{-6\widehat{D}_b}{L^2} \\ & & & & & \frac{4\widehat{D}_b}{L} \end{bmatrix} \tag{4-58}$$

L : la longueur de chaque élément.

Et les intégrales précédentes deviennent :

$$\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{a}} = \mathrm{b}\int_{-\mathrm{h}/2}^{+\mathrm{h}/2} \mathrm{E}(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \mathrm{bh}\left(\mathrm{E_m} + \frac{\mathrm{E_c}-\mathrm{E_m}}{\mathrm{p}+1}\right) \tag{4-59}$$

$$\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{ab}} = \mathrm{b}\int_{-\mathrm{h}/2}^{+\mathrm{h}/2} \mathrm{E}(\mathrm{z})\mathrm{zdz} = \frac{\mathrm{bh}^2}{2}(\mathrm{E_c} - \mathrm{E_m})\left[\frac{\mathrm{p}}{(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}+2)}\right] \tag{4-60}$$

$$\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{b}} = \mathrm{b}\int_{-\mathrm{h}/2}^{+\mathrm{h}/2} \mathrm{E}(\mathrm{z})\mathrm{z}^2\mathrm{dz} = \frac{\mathrm{bh}^2}{12}\left[3(\mathrm{E_c} - \mathrm{E_m})\frac{\mathrm{p}^2+\mathrm{p}+2}{(\mathrm{p}+3)(\mathrm{p}+2)(\mathrm{p}+1)}\right] \tag{4-61}$$

4.2.4.3 La matrice de masse

4.2.4.3.1 Partie membranaire

La matrice de masse d'un élément de barre est donnée par l'expression suivante :

$$[M_m] = \int_v \rho(z) N^T N dv \tag{4-62}$$

$$[M_m] = \widehat{D}_\rho \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \tag{4-63}$$

4.2.4.3.2 Partie flexionnelle

La matrice de masse pour un élément poutre à 4 DDL est donnée par :

$$[M_w] = \widehat{D}_\rho \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & \frac{-13L^2}{420} \\ & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} \\ & & \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ & & & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \tag{4-64}$$

Pour un élément poutre à 6 DDL la matrice de masse est la superposition des deux matrices données :

$$[M] = \widehat{D}_\rho \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ & \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & 0 & \frac{9L}{70} & \frac{-13L^2}{420} \\ & & \frac{L^3}{105} & 0 & \frac{13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} \\ & & & \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ & & & & & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \tag{4-65}$$

Avec:

$$\left[\widehat{D}_\rho\right] = b\int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z)dz = bh\left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{p+1}\right) \tag{4-66}$$

p est varié de zéro jusqu'à l'infini ∞.

4.2.4.4 Construction de la matrice des contraintes initiales $[\mathbf{K_\sigma}]$

Lors de l'application du théorème des déplacements virtuels, le travail des efforts de la déformation du second ordre conduit à la matrice dite « contraintes initiales ».Elle s'écrit comme suit :

$$[\mathrm{K}_\sigma] = \int_0^{\mathrm{L}} [\mathrm{G}]^{\mathrm{T}}\, \mathrm{P}[\mathrm{G}]\mathrm{dx} \tag{4-67}$$

Après l'intégration de l'équation (4-67) la matrice des contraintes initiales est donnée par :

$$[K_\sigma] = \frac{P}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5} & \frac{-L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}68)$$

4.3 Modèle de Timoshenko

Dans le modèle de Bernoulli nous avons opté pour des hypothèses cinématiques excluant le cisaillement. La théorie de Timoshenko prend en considération l'effet de cisaillement transverse.

4.3.1 Analyse statique

4.3.1.1 Le champ de déplacement

Le champ de déplacement de n'importe quel point M situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit :

$$u(M) = \begin{cases} u(x,z) = u_0(x) - z\theta_z(x) \\ w(x,z) = w_0(x) \end{cases} \quad (4\text{-}69)$$

Où u_0 et w_0 sont les déplacements axial et transversal de n'importe quel point situé à l'axe neutre.

Les champs de déformation axiale et transversale s'obtiennent respectivement par la formule suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \quad (4\text{-}70a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z \quad (4\text{-}70b)$$

L'équation (4-70) peut être écrite sous la forme matricielle comme suit :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial \theta_z}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z \end{bmatrix}^T = S\hat{\varepsilon} \quad (4\text{-}71a)$$

Avec

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & \frac{\partial \theta_z}{\partial x} & \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z \end{bmatrix}^T \tag{4-71b}$$

Où ε est le vecteur de déformation, $\hat{\varepsilon}$ est le vecteur de déformation généralisée contenant l'allongement de l'axe de la poutre $\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$, La courbure $\left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right)$ et la déformation de cisaillement transverse $\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z\right)$ et S est la matrice de transformation déformation-déplacement.

L'hypothèse $\theta_z = \frac{\partial w_0}{\partial x}$ (la théorie d'Euler-Bernoulli) conduit à la nullité de cisaillement transverse. La théorie de Timoshenko est préférable pour les poutres courtes en raison de la pertinence de la déformation de cisaillement transversale dans ces structures.

4.3.1.2 Les contraintes et les contraintes résultantes

Les contraintes normales et de cisaillement sont exprimés à partir des équations (4-71):

$$\sigma_x = E(z)\varepsilon_x = E(z)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right) \tag{4-72a}$$

$$\tau_{xz} = G(z)\gamma_{xz} = G(z)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z\right) \tag{4-72b}$$

Où $E = E(x,z)$ et $G = G(x,z)$ sont le module de Young longitudinal et le module de cisaillement du matériau FGM.

Équation (4-72) peuvent être écrite sous la forme matricielle en utilisant l'équation (4-71)

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E(z) & 0 \\ 0 & G(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = C\varepsilon = CS\hat{\varepsilon} \tag{4-73}$$

Où C est la matrice standard constitutive qui relie les contraintes et les déformations d'un point dans la section transversale.

L'effort normal N, le moment de flexion M et la force de cisaillement Q dans une section de poutre sont obtenus par :

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \int\int_A \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ -z\sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dA = \int\int_A S^T \sigma dA \tag{4-74}$$

Où $\hat{\sigma}$ est le vecteur de contrainte résultante, S est la matrice de transformation de l'équation (4-71b) et A est la section transversale.

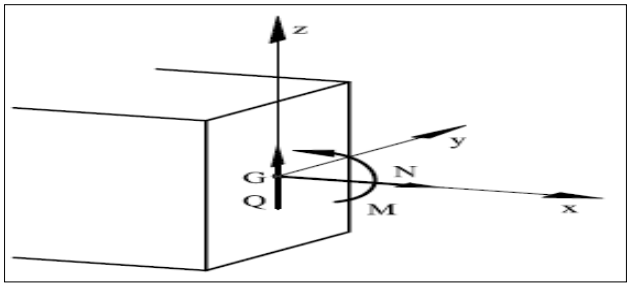


Fig.4.3 Convention de signe concernant N, M et Q

4.3.1.3 La matrice constitutive généralisée

En substituant l'équation (4-73) dans l'équation (4-74)

$$\hat{\sigma} = \left(\int \int_A S^T C S dA\right)\hat{\varepsilon} = \hat{D}\hat{\varepsilon} \tag{4-75}$$

Où $\hat{\varepsilon}$ est le vecteur de déformation généralisée définie dans l'équation. (4-71b) et $\hat{D}$ est la matrice constitutive généralisée. Les termes de $\hat{D}$ sont calculés comme suit :

$$\hat{D} = \int \int_A S^T C S dA = \begin{bmatrix} \hat{D}_a & \hat{D}_{ab} & 0 \\ \hat{D}_{ab} & \hat{D}_b & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_s \end{bmatrix} \tag{4-76}$$

$$\hat{D}_a = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)dz \; ; \qquad \hat{D}_{ab} = -b\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)zdz$$

$$\hat{D}_b = b\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)z^2dz \qquad ; \qquad \hat{D}_s = K_z\hat{G}$$

$$\hat{G} = b\int_{-h/2}^{+h/2} G(z)dz \tag{4-77}$$

Où $\hat{D}_a$, $\hat{D}_b$, $\hat{D}_{ab}$,$\hat{D}_s$ sont les termes de rigidité de la matrice de membrane, de flexion, de couplage, et de cisaillement , K_z est le paramètre de correction de cisaillement pour la flexion autour de l'axe y, et b c'est la largeur de la poutre

4.3.1.4 Le couplage axiale-flexion et l'axe neutre

Le terme hors diagonale dans la matrice, $\hat{D}_{ab}$ provient d'un couplage entre les effets axial et de flexion. Ainsi, une force axiale produit une courbure et un moment de flexion induit un allongement de l'axe de poutre. Ce terme de couplage disparaît dans certaines circonstances, pour lesquelles l'axe x est le soi-disant l'axe neutre.

Pour un matériau homogène

$$\hat{D}_a = EA, \quad \hat{D}_{ab} = -E\bar{S}, \quad \hat{D}_b = EI_y, \quad \hat{D}_s = K_zGA \tag{4-78}$$

Où A est l'aire de la section transversale, I_y est le moment d'inertie par rapport à l'axe y, $\bar{S} = \int\int_A z dA = z_g\, A$ où z c'est la coordonnée verticale du centre de gravité de la section G. Si l'axe x est placé au point G alors $\bar{S} = 0$ et, par conséquent, $\widehat{D}_{ab} = 0$ ce qui signifie que, pour les matériaux homogènes, l'axe x est l'axe neutre, et les effets axiaux et de flexion sont découplés.

Si les propriétés matérielles (la géométrie de la section) sont symétriques par rapport à l'axe de référence x, alors x est aussi l'axe neutre.

Nous allons définir une nouvelle coordonnée verticale où : $z' = z - h_0$

h_0 est la distance verticale entre l'axe de la poutre x et l'axe neutre. Si l'axe des x est placé au point O définissant l'axe neutre (fig. 4.4), alors

$$\widehat{D}_{ab} = -\int\int_A E z'\, dA = -\int\int_A E(z - h_0) dA = 0 \qquad (4\text{-}79a)$$

De l'équation (4-79a) et (4-78) nous pouvons obtenir

$$h_0 = -\frac{\widehat{D}_{ab}}{\widehat{D}_a} \qquad (4\text{-}79b)$$

En conclusion, les effets axiaux et le moment de flexion peut être couplés au niveau de section en plaçant simplement l'origine de l'axe des x au point O (fig.4.3) et en changeant z par z′ dans toutes les équations. Cela ne modifie pas les expressions pour $\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{a}}$ et $\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{s}}$ (car ils ne dépendent pas de z) et de $\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{b}}$ (comme $\int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{Ez}'^2\, \mathrm{dA} = \int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{Ez}^2\, \mathrm{dA}$).

Le changement de z par z′ influe sur le déplacement axial u, $u = u_0 - z'\theta_z$ (Eq.4-69) et le calcul de la contrainte normale σ_x par Eq. (4-72a). Cependant, les résultats pour la déflection verticale w_0, la rotation θ_z et la contrainte de cisaillement transverse sont indépendantes de l'origine de l'axe de la poutre.

L'équation (4-72b) montre que la contrainte de cisaillement τ_{xz} est constante à travers l'épaisseur de la poutre (comme il est habituel dans la théorie du premier ordre de cisaillement (Timoshenko)). La distribution «correcte» de τ_{xz} qui satisfait les équations d'équilibre d'élasticité peut être calculée à posteriori une fois que les déplacements sont obtenus.

De l'équation d'équilibre le long de la direction x nous avons :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \rightarrow \tau_{xz}(x, z') = -\int_{-(h/2)-h_0}^{+z'} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz \qquad (4\text{-}80)$$

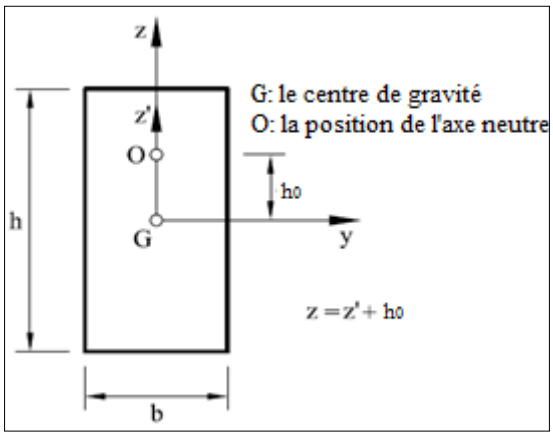


Fig.4.4 La position de l'axe neutre sur une section de poutre rectangulaire

4.3.2 La formulation élément fini

4.3.2.1 Fonctions d'interpolation

Pour un élément de poutre FGM à section constante et non chargé, les deux équations d'équilibre se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z\right) = 0 \qquad (4\text{-}81)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} \widehat{D}_b + G(z) A K_z \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z\right) = 0 \qquad (4\text{-}82)$$

$w_0(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ où a_0, a_1, a_2 et a_3 sont des constantes.

De l'équation d'équilibre, on déduit :

$\theta_z(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} + c$ Où c est une constante d'intégration de l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial^2 \theta_z}{\partial x^2} = \frac{G(z) A K_z c}{b \int E(z) z^2 dz} = \frac{12c}{\Phi_z L^2} \qquad (4\text{-}83)$$

$$\Phi_z = \frac{12 \int E(z) z^2 dz}{L^2 K_z \int G(z) dZ} \qquad (4\text{-}84)$$

$$\Phi_z = \frac{12 \widehat{D}_b}{L^2 \widehat{D}_s} \qquad (4\text{-}85)$$

Le coefficient Φ_z caractérise les déformations transversales. Il dépend à la fois de la géométrie et des caractéristiques matérielle de la section.

Cette équation et les quatre conditions aux limites cinématiques :

$$w_0(0) = w_{0i},\ w_0(L) = w_{0j},\ \theta_z(0) = \theta_{zi},\ \theta_z(L) = \theta_{zj} \qquad (4\text{-}86)$$

Nous permettent le calcul des cinq coefficients $a_0, a_1, a_2,\ a_3$ et c en fonction des déplacements nodaux.

$$w_0(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{4-87}$$

Pour *x=0*

$$w_0(0) = w_i = a_0 \tag{4-88}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 = \theta_z(x) - c \Rightarrow a_1 = \theta_{zi} - c \tag{4-89}$$

$$\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 6a_3 = \frac{12c}{\phi_z L^2} \Rightarrow a_3 = \frac{2c}{\phi_z L^2} \tag{4-90}$$

Ce qui nous donne :

$$w_0(x) = w_{0i} + (\theta_{zi} - c)x + a_2 x^2 + \frac{2c}{\phi_z L^2} x^3 \tag{4-91}$$

Reste à déterminer les deux inconnus a_2 et par les deux conditions aux limites non utilisé jusqu'ici :

$$w_0(L) = w_{0j},\ \theta_z(L) = \theta_{zj} \tag{4-92}$$

Pour ces deux conditions aux limites nous obtenons

$$w_0(L) = w_{0i} + (\theta_{zi} - c)L + a_2 L^2 + \frac{2c}{\theta_z} L = w_{0j} \tag{4-93}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = (\theta_{zi} - c) + 2a_2 x + \frac{6c}{\phi_z L^2} x^2 = \theta_z(L) - c \Rightarrow (\theta_{zi} - c) + 2a_2 L + \frac{6c}{\phi_z} = \theta_{zj} - c \tag{4-94}$$

La résolution de toutes ces équations nous donne :

$$c = \frac{\phi_z}{1+\phi_z}\left(\frac{(\theta_{zi}+\theta_{zj})}{2} + \frac{(w_{0i}-w_{0j})}{L}\right) \tag{4-95}$$

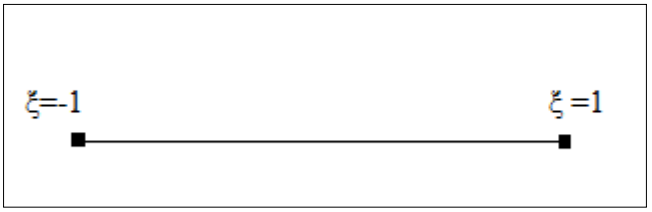
$$a_0 = w_{0i} \tag{4-96}$$

$$a_1 = \frac{\theta_{zi}(2+\phi_z)}{2(1+\phi_z)} - \frac{\theta_{zj}\phi_z}{2(1+\phi_z)} + \frac{\phi_z}{(1+\phi_z)}\left(\frac{w_{0i}-w_{0j}}{L}\right) \tag{4-97}$$

$$a_2 = \frac{-\theta_{zi}(4+\phi_z)}{2L(1+\phi_z)} + \frac{\theta_{zj}(\phi_z-2)}{2(1+\phi_z)} - \frac{3}{(1+\phi_z)}\left(\frac{w_{0i}-w_{0j}}{L^2}\right) \tag{4-98}$$

$$a_3 = \frac{2}{L^2(1+\phi_z)}\left(\frac{(\theta_{zi}+\theta_{zj})}{2} + \frac{(w_{0i}-w_{0j})}{L}\right) \tag{4-99}$$

Le champ de déplacement de n'importe quel point M s'écrit sous la forme paramétrique.



$$\begin{cases} x(\xi) = \frac{1+\xi}{2} L & -1 \le \xi \le 1 \\ w_0(\xi) = \left[N_{w_0}(\xi)\right]\{u\}, \theta_z(\xi) = \left[N_{\theta_z}(\xi)\right]\{u\} \end{cases} \tag{4-100}$$

Avec ces fonctions d'interpolation :

$$\left[N_{w_0}\right]^T = \frac{1}{8(1+\phi_z)}\begin{bmatrix} 2(\xi-1)(\xi^2+\xi-2-2\phi_z) \\ L(\xi^2-1)(\xi-1-\phi_z) \\ -2(\xi+1)(\xi^2-\xi-2-2\phi_z) \\ L(\xi^2-1)(\xi+1+\phi_z) \end{bmatrix} \quad (4\text{-}101)$$

$$\left[\frac{dN_{w_0}}{dx}\right]^T = \frac{1}{4L(1+\phi_z)}\begin{bmatrix} 6\xi^2-6-4\phi_z \\ L(3\xi^2-2\xi-2\xi\phi_z-1) \\ -6\xi^2+6+4\phi_z \\ L(3\xi^2+2\xi+2\xi\phi_z-1) \end{bmatrix} \quad (4\text{-}102)$$

$$\left[N_{\theta_z}\right]^T = \frac{1}{4L(1+\phi_z)}\begin{bmatrix} 6(\xi^2-1) \\ L(\xi-1)(3\xi+1-2\phi_z) \\ 6(1-\xi^2) \\ L(\xi+1)(3\xi-1+2\phi_z) \end{bmatrix} \quad (4\text{-}103)$$

$$\left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx}\right]^T = \frac{1}{L^2(1+\phi_z)}\begin{bmatrix} 6\xi \\ L(3\xi-1-\phi_z) \\ -6\xi \\ L(3\xi+1+\phi_z) \end{bmatrix} \quad (4\text{-}104)$$

Le passage de l'élément paramétrique vers l'élément réel se fait par :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi \ = Jd\xi, J = \frac{L}{2}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial \xi}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{J^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (4\text{-}105)$$

$$\int_0^l f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f(x(\xi))Jd\xi \quad (4\text{-}106)$$

J : est le jacobien de la transformation géométrique $x(\xi)$ connu explicitement.

4.3.2.2 La matrice de rigidité

4.3.2.2.1 Rigidité membranaire

Soit une barre de longueur$L$. Les deux fonctions associées aux deux degré de libertés sont :

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \qquad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

$$K_m = \int_v \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} E(z) \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) dv \quad (4\text{-}107)$$

La matrice de raideur K est définie par la relation

$$[K_m] = \widehat{D}_a \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}108)$$

4.3.2.2.2 Rigidité de couplage

$$K_{cp} = -\int_v \left(z\, E(z) \frac{\partial \delta u_0}{\partial x}\frac{\partial \theta_z}{\partial x}\right) dv \quad (4\text{-}109)$$

La matrice de couplage est définie par la relation ci-dessous :

$$[K_{cp}] = -\widehat{D}_{ab}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{4-110}$$

$$[K_f] + [K_c] = b\int_0^L E(z)z^2 dz\,[B_f]^T[B_f]dx + bK_z\int_0^L G(z)dz[B_c]^T[B_c]dx \tag{4-111}$$

Avec : $[B_f] = \left[\frac{dN_{\theta_z}}{dx}\right]$, $[B_c] = \left[\frac{dN_{w_0}}{dx}\right] - [N_{\theta_z}] = \frac{\phi_z}{2L(1+\phi_z)}[-2 \quad -L \quad 2 \quad -L]$ (4-112)

4.3.2.2.3 Rigidité flexionnelle

$$K_f = \int_v \left(z^2 E(z)\frac{\partial\theta_z}{\partial x}\frac{\partial\delta\theta_z}{\partial x}\right)dv \tag{4-113}$$

Après la simplification on obtient :

$$[K_f] = \frac{\widehat{D}_b}{(1+\phi_z)^2}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{(4+2\phi_z+{\phi_z}^2)}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{(2-2\phi_z-{\phi_z}^2)}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ & & & \frac{(4+2\phi_z+{\phi_z}^2)}{L} \end{bmatrix} \tag{4-114}$$

4.3.2.2.4 Rigidité de cisaillement

$$K_c = \int_v \left(G(z)K_z\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_z\right)\left(\frac{\partial\delta w_0}{\partial x} - \delta\theta_z\right)\right)dv \tag{4-115}$$

Après la simplification on obtient :

$$[K_c] = \frac{\widehat{D}_s{\phi_z}^2}{(1+\phi_z)^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{L} & \frac{1}{2} \\ & \frac{L}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{L}{4} \\ & & \frac{1}{L} & \frac{-1}{2} \\ & & & \frac{L}{4} \end{bmatrix} \tag{4-116}$$

K_f et K_c sont les matrices élémentaires calculées par intégration sur la géométrie de l'élément.

$$[K] = \frac{\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_z)}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & L^2(4+\phi_z) & -6L & L^2(2-\phi_z) \\ & & 12 & -6L \\ & & & L^2(4+\phi_z) \end{bmatrix} \tag{4-117}$$

La matrice de rigidité de l'élément portique en FGM à 6 DDL dans le repère local est donnée par l'expression suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{D}_a}{L} & 0 & -\frac{\widehat{D}_{ab}}{L} & \frac{-\widehat{D}_a}{L} & 0 & \frac{\widehat{D}_{ab}}{L} \\ & \frac{12\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_z)} & \frac{6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{-12\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_z)} & \frac{6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_z)} \\ & & \frac{\widehat{D}_b(4+\phi_z)}{L(1+\phi_z)} & \frac{\widehat{D}_{ab}}{L} & \frac{-6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_z)} & \frac{\widehat{D}_b(2-\phi_z)}{L(1+\phi_z)} \\ & & & \frac{\widehat{D}_a}{L} & 0 & \frac{-\widehat{D}_{ab}}{L} \\ & & & & \frac{12\widehat{D}_b}{L^3(1+\phi_z)} & \frac{-6\widehat{D}_b}{L^2(1+\phi_z)} \\ & & & & & \frac{\widehat{D}_b(4+\phi_z)}{L(1+\phi_z)} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}118)$$

4.3.3 Analyse modale

Un élément de Timoshenko est défini par deux nœuds et trois degré de liberté pour chacun.

Par l'utilisation du principe des travaux virtuel, le système des équations d'élément fini peut être exprimé comme suit :

$$[K]\{U\} = \omega^2[M]\{U\} \quad (4\text{-}119)$$

[M] : La matrice de masse globale de la poutre.

[K] : La matrice de rigidité globale.

{U} : Le vecteur des déplacements nodaux et ω est la fréquence circulaire.

4.3.3.1 La matrice de masse

4.3.3.1.1 Partie membranaire

Si $\rho(z)$ la masse volumique du matériau constitutif de la barre, la matrice de masse élémentaire a pour expression selon l'axe de l'élément :

$$[M_m] = \int \rho(z) N^T N dv \quad (4\text{-}120)$$

$$[M_m] = \widehat{D}_\rho \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}121)$$

4.3.3.1.2 Élément de poutre

La matrice de masse est égale à :

$$[M] = \left[M_{w_0}\right] + [M_{\theta z}] \quad (4\text{-}122)$$

$$[M_{w_0}] = \frac{bL}{420(1+\phi_z)^2} \int \rho(z)dz \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ & m_5 & -m_4 & m_6 \\ & & m_1 & -m_2 \\ & & & m_5 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}123)$$

$$[M_{\theta_z}] = \frac{b}{30L(1+\phi_z)^2} \int \rho(z)z^2dz \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ & & m_7 & -m_8 \\ & & & m_9 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}124)$$

Avec $\widehat{D}_\rho = b \int \rho(z)dz$ et $\widehat{D}_R = b \int \rho(z)z^2dz$

$$m_1 = 156 + 294\phi_z + 140{\phi_z}^2$$
$$m_2 = \frac{L}{2}(44 + 77\phi_z + 35{\phi_z}^2)$$
$$m_3 = 54 + 126\phi_z + 70{\phi_z}^2$$
$$m_4 = \frac{-L}{2}(26 + 63\phi_z + 35{\phi_z}^2)$$
$$m_5 = \frac{L^2}{2}(8 + 14\phi_z + 7{\phi_z}^2)$$
$$m_6 = \frac{-L^2}{2}(6 + 14\phi_z + 7{\phi_z}^2)$$
$$m_7 = 36$$
$$m_8 = L\,(3 - 15\phi_z)$$
$$m_9 = L^2(4 + 5\phi_z + 10{\phi_z}^2)$$
$$m_{10} = L^2(-1 - 5\phi_z + 5{\phi_z}^2)$$

4.3.4 Instabilité au flambement

4.3.4.1 Construction de la matrice des contraintes initiales $[K_\sigma]$

La matrice des contraintes initiales s'écrit :

$$[K_\sigma] = \int_0^L [G]^T P[G]\,dx \quad (4\text{-}125)$$

$[G]$ est le vecteur de déformation du second ordre.

P : est l'effort normal

Soit :

$$[K_\sigma] = \frac{P}{(1+\phi_z)^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & P_1 & P_2 & 0 & P_3 & P_4 \\ & & P_5 & 0 & P_6 & P_7 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & P_8 & P_9 \\ & & & & & P_{10} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}126)$$

Avec:

$$P_1 = \frac{6}{5L} + \frac{2\phi_z}{L} + \frac{{\phi_z}^2}{L}$$

$$P_2 = \frac{1}{10}$$

$$P_3 = \frac{-6}{5L} - \frac{2\phi_z}{L} - \frac{{\phi_z}^2}{L}$$

$$P_4 = \frac{1}{10}$$

$$P_5 = \frac{2L}{15} - \frac{\phi_z L}{6} - \frac{{\phi_z}^2 L}{12}$$

$$P_6 = \frac{-1}{10}$$

$$P_7 = \frac{-L}{30} - \frac{\phi_z L}{6} - \frac{{\phi_z}^2 L}{12}$$

$$P_8 = \frac{6}{5L} + \frac{2\phi_z}{L} + \frac{{\phi_z}^2}{L}$$

$$P_9 = \frac{-1}{10}$$

$$P_{10} = \frac{2L}{15} + \frac{\phi_z L}{6} + \frac{{\phi_z}^2 L}{12}$$

4.4 Tests de validation

Dans cette section, nous évaluons les performances des éléments développés, en termes de précision, de convergence et de stabilité, à travers une série de test de validation.
Des poutres isotropes, des poutres fonctionnellement gradué, ainsi que différents cas de chargement, de géométrie, des conditions aux limites et d'épaisseur (mince ou épaisse) ont été considérés. Les résultats obtenues sont comparés avec les solutions obtenus analytiquement et ceux obtenus par d'autres modèles d'éléments finis disponibles dans la littérature.

4.4.1 Analyse statique

Dans cette section nous traitons deux exemples :

4.4.1.1 Poutre FGM simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie

Exemple 1 : Considérons la poutre P-FGM simplement appuyée de la (fig. 4.5). La poutre Al/Al_2O_3 composé d'aluminium (métal) et d'alumine (céramique). Les propriétés de l'aluminium sont $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0.3$ et celles de l'alumine sont $E_c = 380$ GPa, $\nu_c = 0.3$.

Les résultats du déplacement transversal (w), les contraintes normales σ_{xx} et les contraintes de cisaillement transversal τ_{xz} sont normalisés par les équations suivantes respectivement, et ils sont représentés sur le tableau 4.3.

$$\overline{w} = 100\frac{E_m h^3}{qL^4} w\left(\frac{L}{2}\right) \ , \qquad \overline{\sigma}_{xx} = \frac{h}{qL}\sigma_{xx}\left(\frac{L}{2},\frac{h}{2}\right) \quad \overline{\tau}_{xz} = \frac{h}{qL}\tau_{xz}(0,0)$$

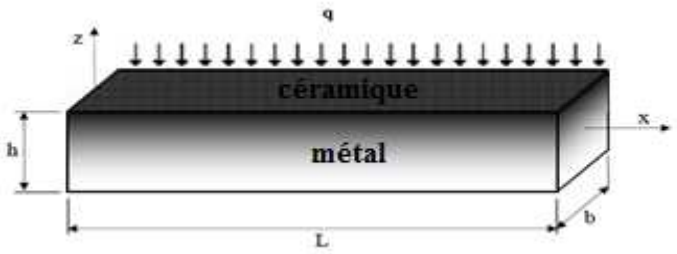


Fig.4.5 Chargement appliqué à la poutre céramique-métal

Le tableau 4.3 présente les flèches et les contraintes non dimensionnelles d'une poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie q pour différents paramètres du matériau p et différents rapports longueur-épaisseur L / h.

Notons que les résultats de Li et al. **[93]** sont évalués sur la base des solutions analytiques données en annexe B de la Réf. **[93]**. Nous observons que les valeurs obtenues en utilisant les deux théories des poutres à savoir (CBT et TBT) sont en bon accord avec les valeurs données par Li et al. **[93]** et Tai, H., Vo, T. **[94]** pour tous les paramètres du matériau p et les rapports L / h. Pour illustrer l'effet de l'indexe p sur la flexion des poutres FGM sous une charge uniformément répartie, la flèche transversale non dimensionnelle, et la contrainte normale non dimensionnelle sont respectivement représentés sur la (fig. 4.6). Nous remarquons que l'augmentation du paramètre du matériau p permettra de réduire la raideur des poutres FGM, et par conséquent, conduit à une augmentation des flèches et des contraintes normales. Cela est dû, au fait que les valeurs plus élevées de p correspondent à haute portion de métal par rapport à la pièce en céramique, qui rend ces poutres FGM plus flexible.

Tableau 4.3 Les flèches et les contraintes non-dimensionnelles de la poutre FGM sous charge uniformément répartie

P	Méthode	L/h=5			L/h=20		
		$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Li et al **[93]**	31,657	38,02	7,5	28,962	150,13	7,5
	TBT (présent)	31,657	37,599	7,031	28,963	150,38	7,031
	CBT **[94]**	28,783	37,500	-	28,783	150,00	-
	CBT (présent)	28,784	37,599	-	28,784	150,38	-
1	Li et al **[93]**	62,599	58,837	7,5076	58,049	232,054	7,5076
	TBT (présent)	62,545	58,124	5,917	57,997	232,534	5,917
	CBT **[94]**	57,746	57,959	-	57,746	231,834	-
	CBT (présent)	57,6919	58,124	-	57,694	232,534	-
2	Li et al **[93]**	80,602	68,812	6,3886	74,415	270,989	6,3886
	TBT (présent)	80,189	67,873	5,073	74,286	271,522	5,073
	CBT **[94]**	74,003	67,676	-	74,003	270,704	-
	CBT (présent)	73,891	67,873	-	73,894	271,522	-
5	Li et al **[93]**	97,802	81,03	5,1218	88,151	318,112	5,1218
	TBT (présent)	96,331	79,668	5,049	87,927	318,693	5,049
	CBT **[94]**	87,508	79,428	-	87,508	317,711	-
	CBT (présent)	87,362	79,668	-	87,364	318,693	-

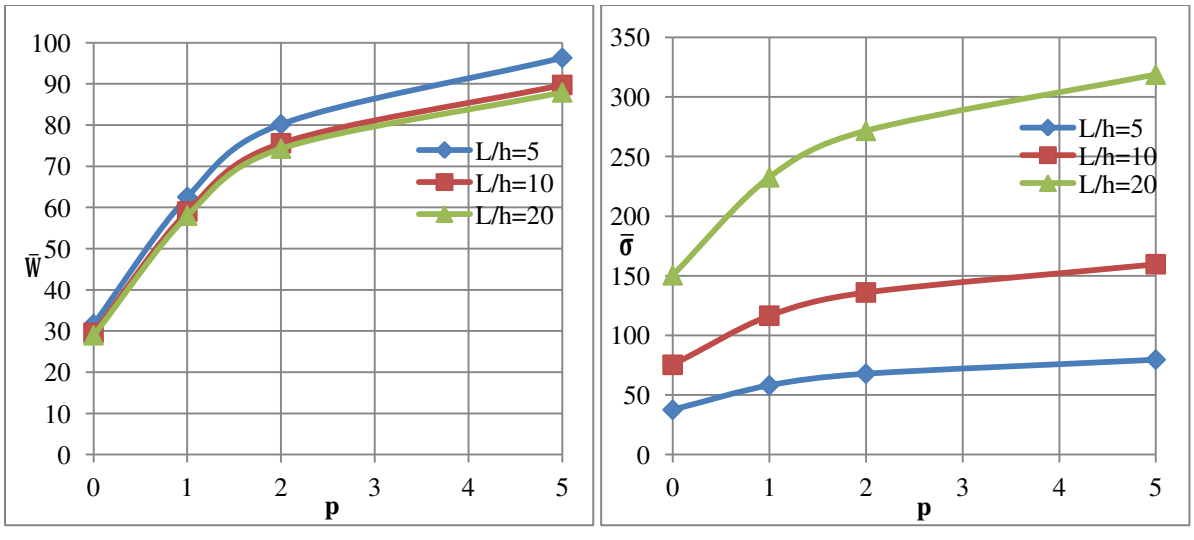
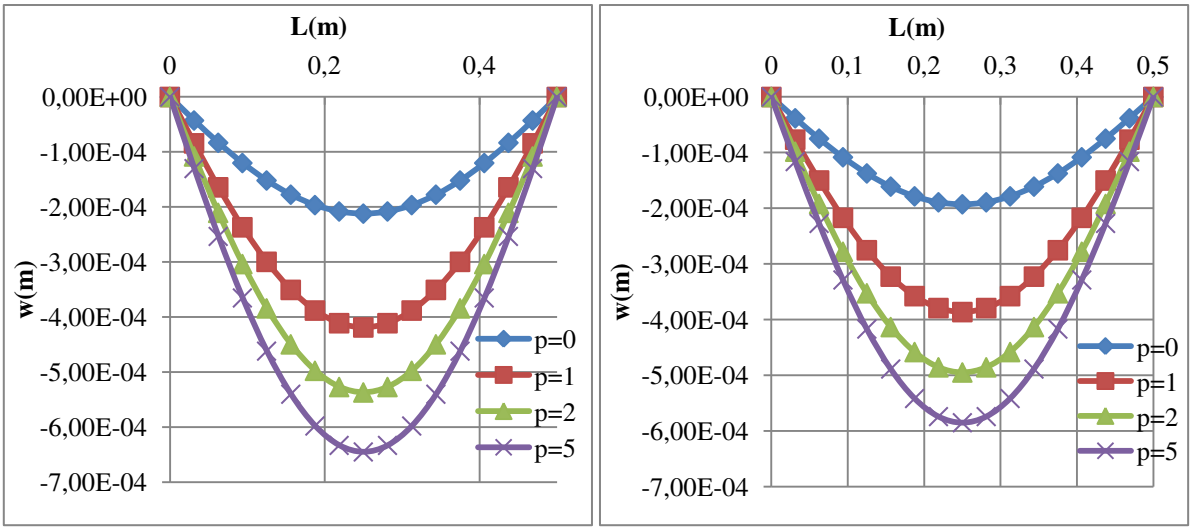
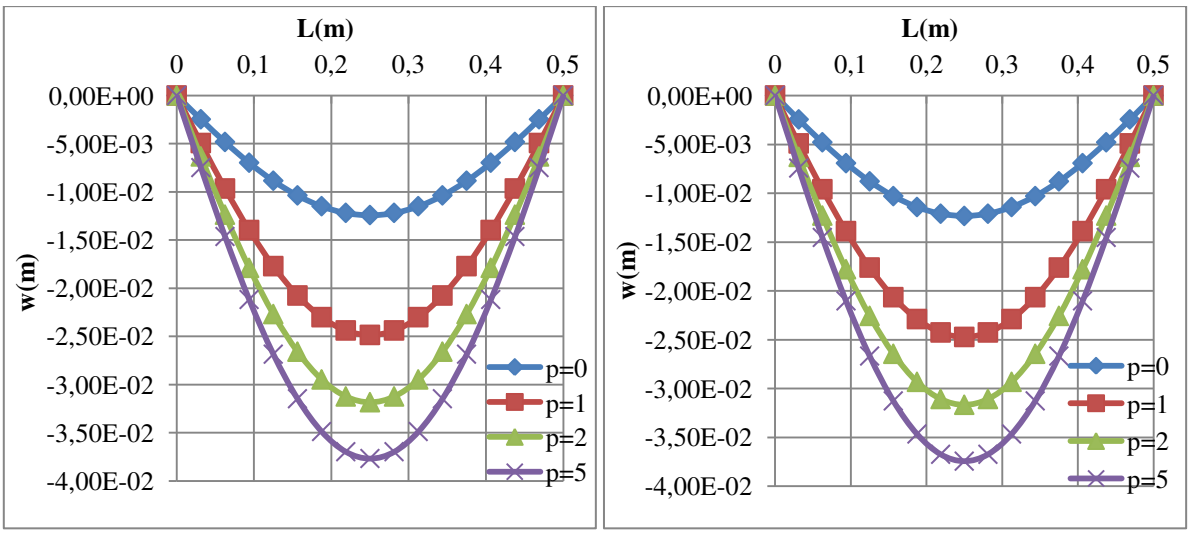


Fig.4.6 La variation de la flèche et de la contrainte normale non dimensionnelle en fonction de différents paramètres du matériau d'une poutre FGM soumise à une charge uniformément répartie (TBT)



a) TBT **b) CBT**

Fig.4.7 L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau pour (L/h=5) [a) TBT, b) CBT]



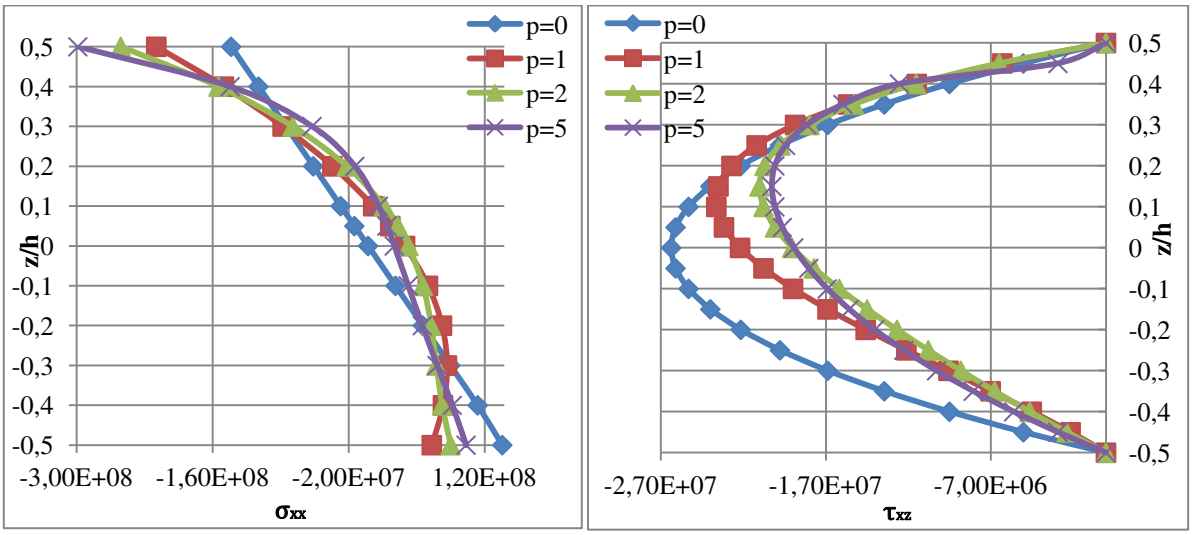
a) TBT **b) CBT**

Fig.4.8 L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau pour (L/h=20) [a) TBT, b) CBT]

4.4.1.1 Comparaison entre les théories

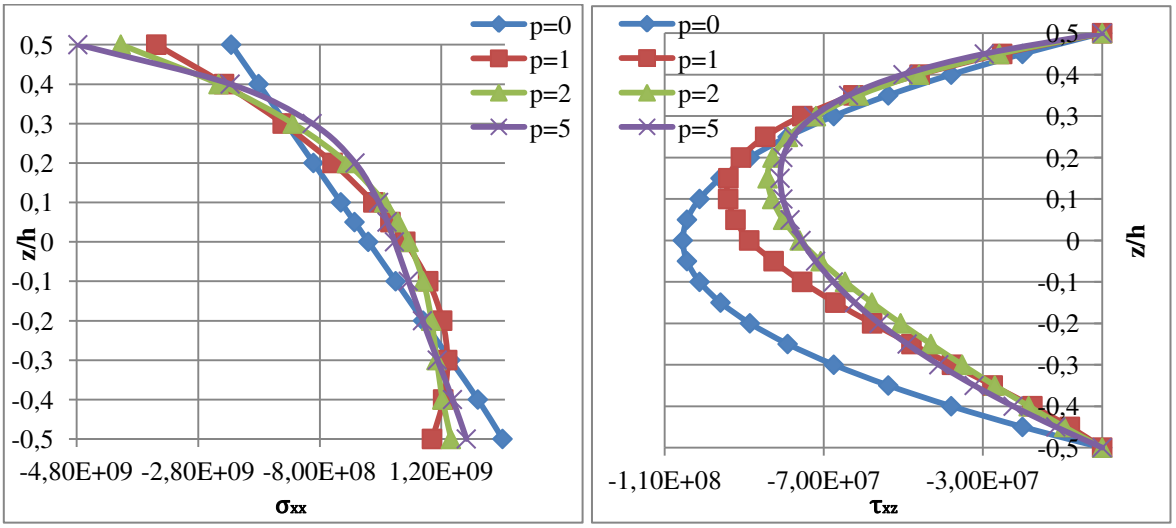
L'évolution de la flèche totale de la poutre FGM pour les deux théories utilisées (CBT, TBT) est représentée sur les (Fig.4.7) et (Fig.4.8) (L/h=5 et L/h=20 respectivement). A partir de ces deux figures on remarque que la flèche du modèle de Timoshenko est plus grande que celle d'Euler- Bernoulli. Ceci est dû à la présence de l'effet de cisaillement transverse.

La théorie d'Euler-Bernoulli ne traite que la flexion simple sans prendre en compte l'effet de cisaillement transversal.



a) b)

Fig.4.9 La distribution des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans la direction de l'épaisseur pour L/h=5



a) b)

Fig.4.10 La distribution des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans la direction de l'épaisseur pour L/h=20

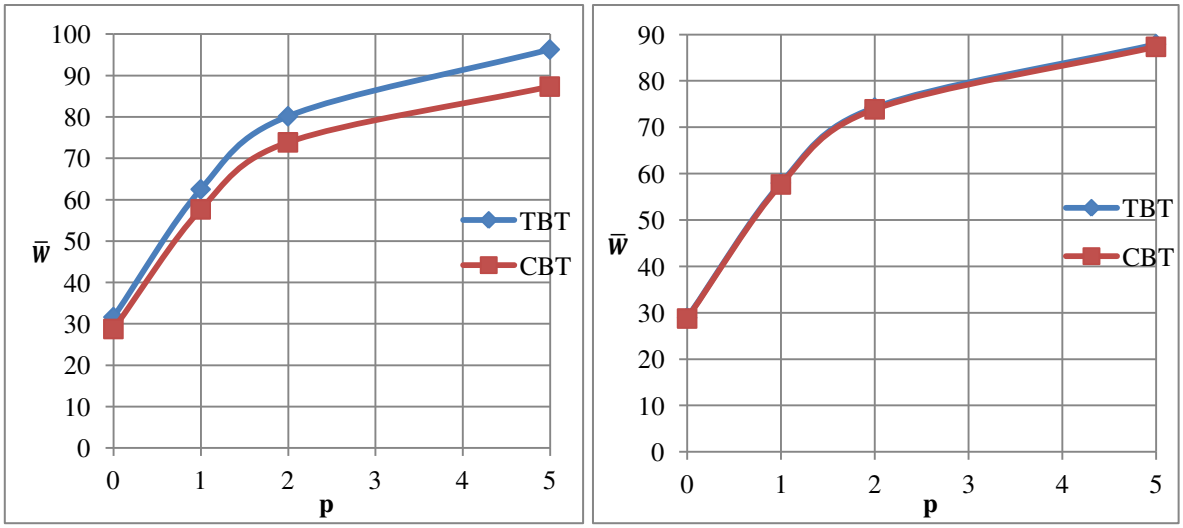


Fig.4.11 La flèche maximale non dimensionnelle d'une poutre FGM simplement appuyée en fonction des différents paramètres du matériau, différents élancements et différentes théories [a)L/h=5, b) L/h=20]

4.4.1.2 L'influence du paramètre du matériau p sur la flèche, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement

On peut voir clairement que, la flèche totale augmente avec l'augmentation du paramètre du matériau pour les deux cas (mince et épaisse). Ceci est dû à l'influence du module de Young qui est élevé pour la céramique par rapport à celui du métal.

Les figures (Fig.4.9.a) et (Fig.4.10.a) présentent la distribution de la contrainte normale de la poutre FGM en fonction des différents élancements et différents paramètres du matériau p, on constate que les contraintes de compression sont sur les surfaces supérieures (face en céramique) et les contraintes de traction sont sur les surfaces inférieures (face en métal).

Ces distributions sont linéaires pour les poutres homogènes (poutres entièrement en céramique). Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre FGM avec des paramètres du matériau p= 1, 2 et 5, l'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour la poutre P-FGM avec le paramètre du matériau p utilisé. De plus les contraintes de compression sont plus grandes en valeur absolue par rapport à la contrainte de traction.

L'évolution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM pour divers paramètres du matériau est illustrée sur les figures (Fig.4.9.b) et (Fig.4.10.b).

On voit que l'influence du paramètre du matériau est illimitée et son augmentation mène à une diminution de la contrainte de cisaillement.

D'après la (Fig.4.11) la flèche totale non dimensionnelle augmente avec l'augmentation du paramètre du matériau pour les deux rapports longueur-épaisseur (L/h=5, L/h=20), et lorsqu'on augmente l'élancement les deux courbes seront identique (la solution de Timoshenko tend vers la solution de Bernoulli).

Exemple 2 : Cet exemple nous s'intéressons à l'étude d'une poutre P-FGM simplement appuyée (Fig.4.12) composé d'aluminium (E_m = 70 GPa, ν_m = 0.3) et de Zirconium (E_c = 200 GPa, ν_c = 0.3). La fonction de loi de puissance est employée pour décrire les variations des propriétés matérielles de la poutre FGM. Dans le présent exemple, on inverse le positionnement des deux matériaux tel que la surface supérieure de la poutre est supposée être en aluminium (métal) et la surface inférieure en Zirconium (céramique). La largeur et l'épaisseur de la poutre sont considérées comme constants b=0.1m et h=0.1m. La longueur L=0.4m et L=1.6m pour deux valeurs de L/h, L/h=4 et L/h=16. Le facteur de correction de cisaillement est considéré $K_s = 5/6$ pour TBT.

Le déplacement axial (u), et le déplacement transversal (w), sont normalisés par rapport la déflexion statique, $w_{sta} = \frac{5qL^4}{384E_{Al}I}$ d'une poutre entièrement métallique soumise à une charge uniformément répartie.

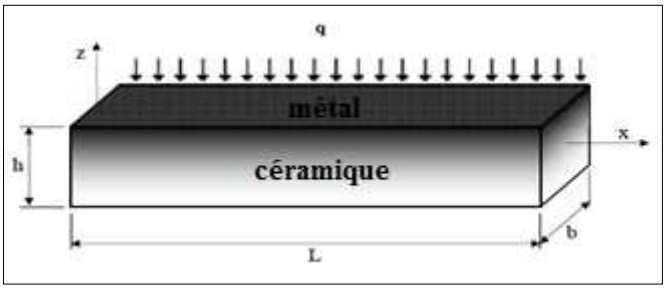


Fig.4.12 Chargement appliqué à la poutre métal-céramique

Les contraintes normales σ_{xx} et les contraintes de cisaillement transversal τ_{xz} sont normalisés par les équations suivantes respectivement

$$(\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\tau}_{xz}) = \left(\frac{\sigma_{xx}\left(x=\frac{L}{2}\right)A}{qL}, \frac{\tau_{xz}\left(x=\frac{L}{2}\right)A}{qL} \right).$$

Dans le tableau 4.4, les flèches maximales non dimensionnelles de la poutre FGM sont représentées pour différents paramètres du matériau et pour différents rapports longueur-épaisseur L/h=4,16. On peut voir clairement que, ces déplacements diminuent avec l'augmentation du paramètre du matériau p, cela est dû au fait que l'augmentation du paramètre du matériau p permettra d'augmenter la raideur des poutres FGM, et, par conséquent, conduit à une diminution des flèches. Et aussi que les valeurs plus élevées de p correspondent au cas à haute portion de céramique par rapport à la pièce en métal.

On peut observer que les valeurs obtenues en utilisant les deux théories des poutres (CBT et TBT) sont en bon accord avec les valeurs donnée par Simsek **[95]** pour toutes les paramètres du matériau p et les rapports L / h. L'effet de déformation de cisaillement joue un rôle important sur les réponses des poutres courtes. Ainsi, les déplacements du modèle de Timoshenko sont plus grands que celle d'Euler Bernoulli, ceci est dû à la présence de l'effet de cisaillement transverse.

Tableau 4.4 Les flèches maximales non dimensionnelles de la poutre FGM pour différents paramètres du matériau

Le paramètre du matériau p	**Les différentes théories**	**La flèche maximale non dimensionnelle**	
		L/h=4	**L/h=16**
p=0 (métal)	**Simsek [95]**	1,13002	1,00812
	TBT (présent)	1,15600	1,00976
	CBT (présent)	1,00000	1,00001
p=1	**Simsek [95]**	0,62936	0,56615
	TBT (présent)	0,64269	0,56585
	CBT (présent)	0,56179	0,56180
p=2	**Simsek [95]**	0,56165	0,50718
	TBT (présent)	0,57316	0,50781
	CBT (présent)	0,50346	0,50346
p=5	**Simsek [95]**	0,49176	0,44391
	TBT (présent)	0,50192	0,44451
	CBT (présent)	0,44070	0,44069
p=∞ (céramique)	**Simsek [95]**	0,39550	0,35284
	TBT (présent)	0,40460	0,35341
	CBT (présent)	0,35000	0,35000

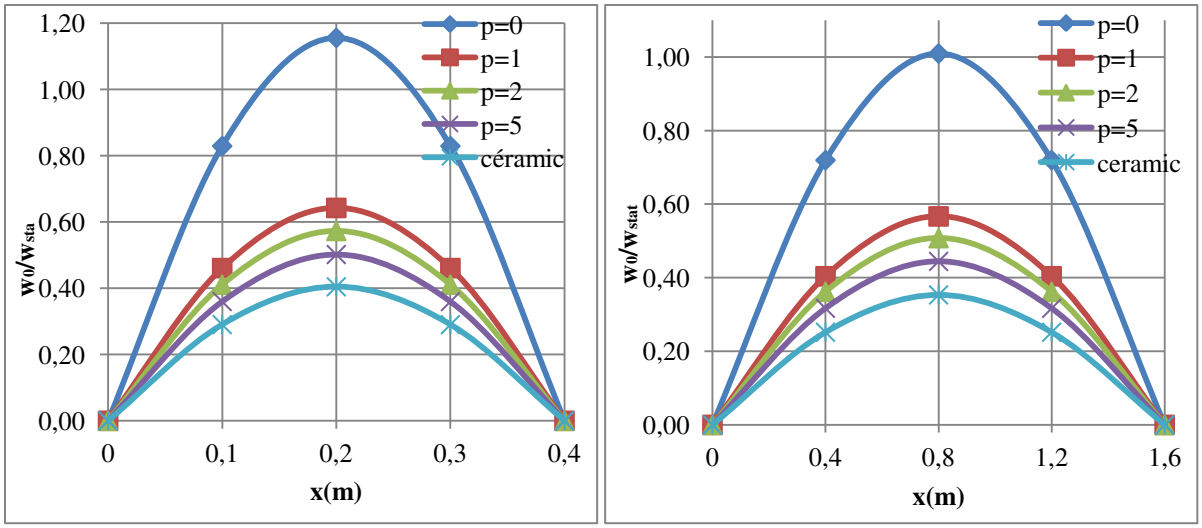


Fig.4.13 La distribution des flèches non dimensionnelles le long de la poutre pour (L/h=4 et L/h=16) [TBT]

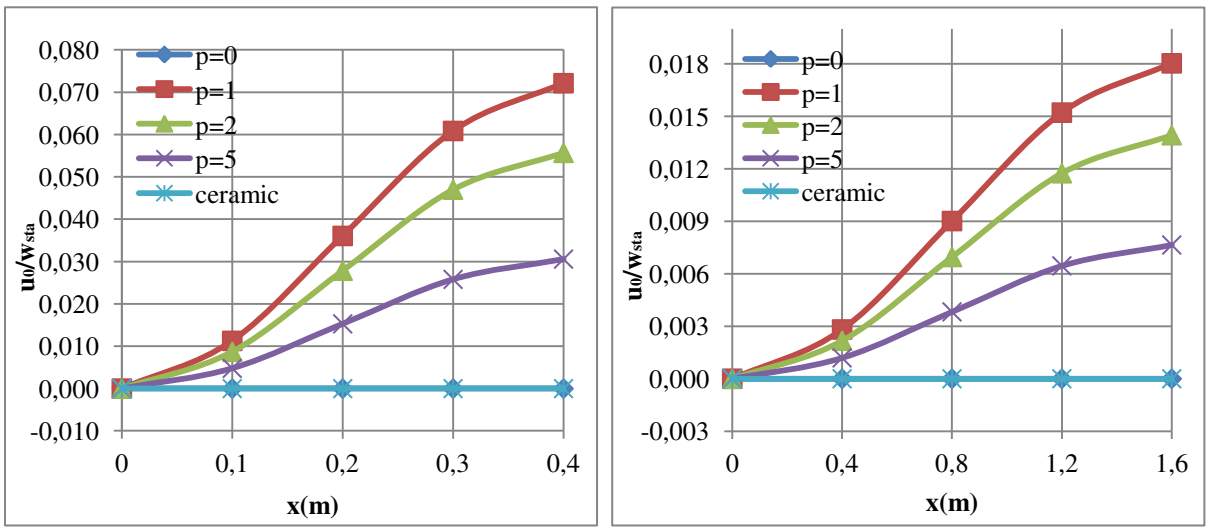


Fig.4.14 La distribution des déplacements axiaux non dimensionnels le long de la poutre pour (L/h=4 et L/h=16) [TBT]

Les figures (Fig.4.13, Fig.4.14) présentent la distribution des flèches et des déplacements axiaux non dimensionnels, respectivement, le long de la poutre FGM. Lorsque l'exposant de la loi de puissance augmente, les fléches non dimensionnels de la poutre FGM diminuent.

D'après la Fig. (4.14) nous remarquons que les déplacements axiaux diminuent avec l'augmentation du paramètre du matériau. Les déplacements axiaux non dimensionnels des poutres entièrement métallique ou entièrement céramique sont nulles et coïncident les uns avec les autres parce que pour les poutres isotropes (soit en métal ou en céramique), il n'y a

pas de couplage entre la flexion et la membrane. Il est également à noter que les valeurs plus élevées de p correspondent à haute portion de céramique.

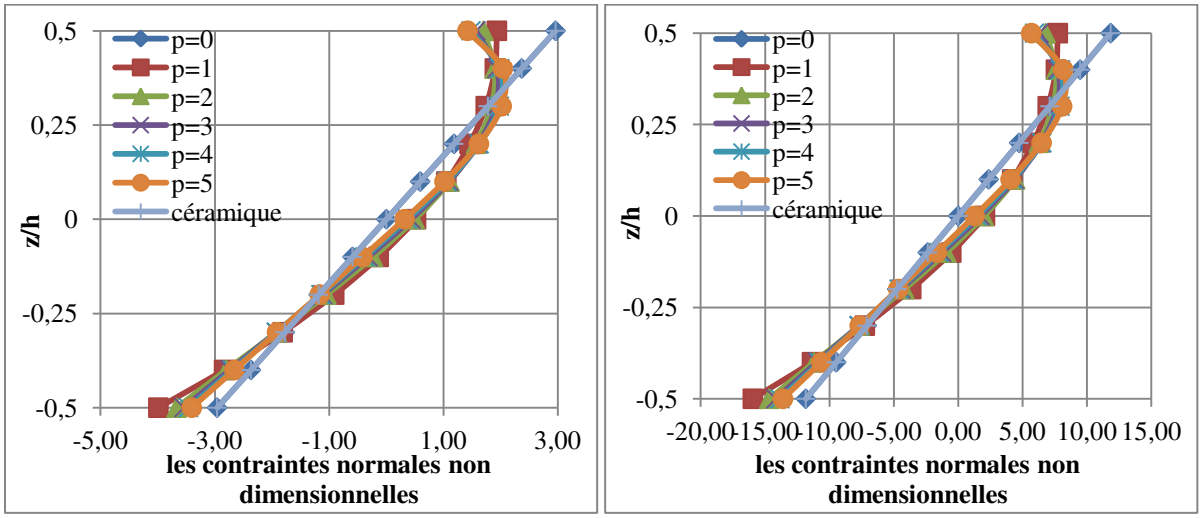


Fig.4.15 La distribution des contraintes normales non dimensionnelles pour différents paramètres du matériau pour (L/h=4 et L/h=16) à $x = \frac{L}{2}$

La figure 4.15 présente la distribution de la contrainte normale de la poutre FGM en fonction des différents élancements et différents paramètres du matériau p, on constate que les contraintes de compression sont sur les surfaces supérieures (face en métal) et les contraintes de traction sont sur les surfaces inférieures (face en céramique). Ces distributions sont linéaires pour les poutres homogènes (poutres entièrement en céramique ou métallique). Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre FGM avec des paramètres du matériau, l'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour la poutre P-FGM avec le paramètre du matériau p utilisé. De plus les contraintes de traction sont plus grandes en valeur absolue par rapport à la contrainte de compression.

L'évolution des contraintes de cisaillement non dimensionnelles à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM pour divers paramètres du matériau et pour différents rapports longueur-épaisseur est illustrée sur la figure (Fig.4.16). On voit que l'augmentation du paramètre du matériau mène à une augmentation de la contrainte de cisaillement.

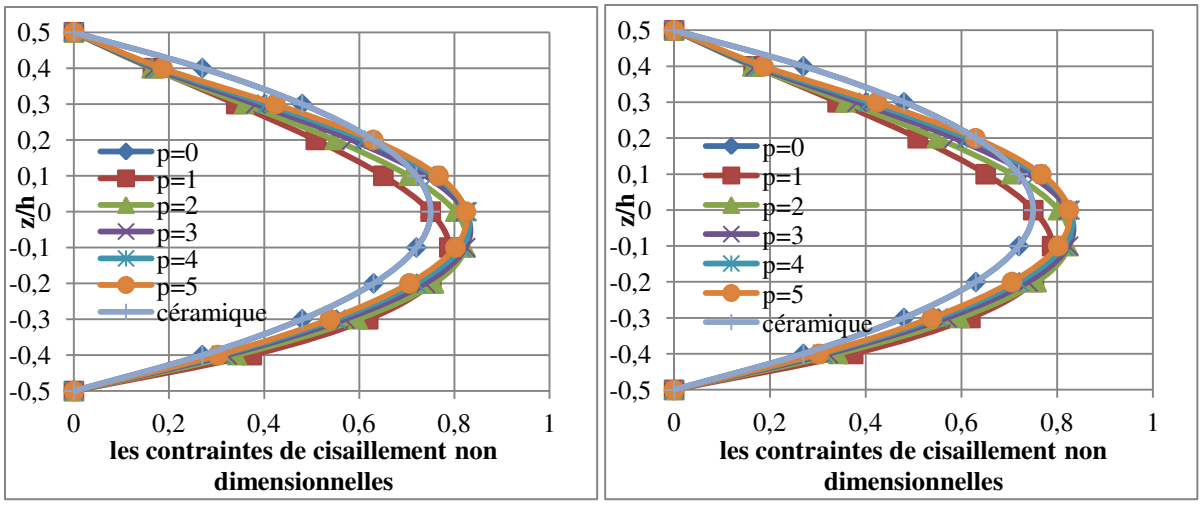


Fig.4.16 La distribution des contraintes de cisaillement non dimensionnelles pour différents paramètres du matériau pour (L/h=4 et L/h=16) à $x = \frac{L}{2}$

4.4.2 Analyse modale

Exemple 1 : Dans la deuxième section, nous étudions la vibration libre d'une poutre P-FGM simplement appuyée composé d'aluminium (métal) et d'alumine (céramique). Les propriétés de l'aluminium sont (E_m = 70 *GPa*, ρ_m=2702 kg/m^3, ν_m = 0.3) et celles de l'alumine sont (E_c = 380*GPa*, ρ_c=3960 kg/m^3, ν_c = 0.3).

La fréquence non-dimensionnelle de comparaison est

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \qquad (4\text{-}127)$$

Le tableau 4.5 montre les fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une poutre FGM pour différentes paramètres du matériau p et différents rapports L / h. Les fréquences calculées sont comparés avec ceux donnés par Simsek **[96]** en utilisant les deux théories des poutres à savoir (CBT et TBT). Un excellent accord entre les présentes solutions et les résultats de Simsek **[96]** a été trouvé.

Les trois premières fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM prédits par divers modèles proposée sont présentés sur le tableau 4.6 pour différents paramètres du matériau p et différents rapport longueur-épaisseur L / h.

Tableau 4.5 Les fréquences fondamentales non dimensionnelles de la poutre FGM

L/h	Les différentes Théories	La méthode	p			
			0	1	2	5
5	TBT	Sismek [96]	5,1527	3,9904	3,6264	3,4012
		Présent	5,1531	3,9678	3,6011	3,4005
	CBT	Sismek [96]	5,3953	4,1484	3,7793	3,5949
		Présent	5,4832	4,1861	3,7985	3,6136
20	TBT	Sismek [96]	5,4603	4,205	3,8361	3,6485
		présent	5,4602	4,2049	3,8366	3,6509
	CBT	Sismek [96]	5,4777	4,2163	3,8472	3,6628
		présent	5,4831	4,2205	3,8511	3,6667

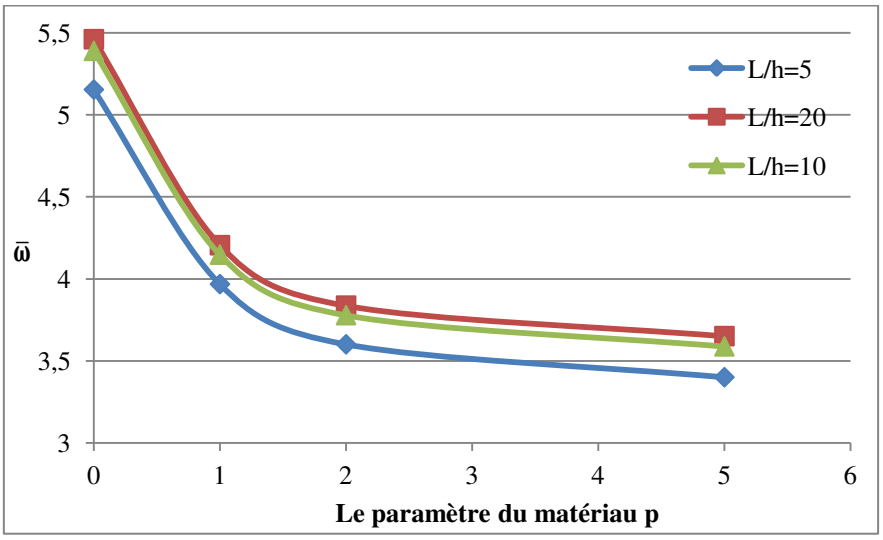


Fig.4.17 La variation des fréquences non dimensionnelles $\bar{\omega}$ en fonction des différents élancements et différents paramètres du matériau (TBT)

D'après la (Fig. 4.17) on observe que la diminution de l'indice de loi de puissance entraîne une augmentation de la fréquence non dimensionnelle. Les valeurs de fréquence les plus élevées sont obtenues pour des poutres entièrement céramique ($p = 0$), tandis que les valeurs de fréquence les plus faibles sont obtenues pour des poutres entièrement métalliques ($p \to \infty$)

ceci est dû au fait que l'augmentation du paramètre du matériau se conduit à une diminution de la valeur du module d'élasticité. La poutre devient flexible avec l'augmentation du paramètre du matériau.

Tableau 4.6 Les trois premières fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM

L/h	Mode	La méthode	p			
			0	1	2	5
5	1	Tai et al. [94]	5,1527	3,9904	3,6264	3,4012
		TBT (présent)	5,1531	3,9678	3,6011	3,4005
		Tai et al. [94]	5,3953	4,1484	3,7793	3,5949
		CBT (présent)	5,4832	4,1861	3,7985	3,6136
	2	Tai et al. [94]	17,8812	14,01	12,6405	11,5431
		TBT (présent)	17,9096	14,4222	13,2453	12,15
		Tai et al. [94]	20,6187	15,7982	14,326	13,5876
		CBT (présent)	21,9418	17,0586	15,6342	14,7276
	3	Tai et al. [94]	34,2097	27,0979	24,3152	21,7158
		TBT (présent)	34,6779	27,442	24,8335	22,7587
		Tai et al. [94]	43,3483	33,0278	29,7458	28,085
		CBT (présent)	47,4413	35,6391	31,6911	29,1177
20	1	Tai et al. [94]	5,4603	4,2051	3,8361	3,6485
		TBT (présent)	5,4602	4,2049	3,8366	3,6509
		Tai et al. [94]	5,4777	4,2163	3,8472	3,6628
		CBT (présent)	5,4831	4,2205	3,8511	3,6667
	2	Tai et al. [94]	21,5732	16,6344	15,1619	14,3746
		TBT (présent)	21,5762	16,6268	15,1578	14,3968
		Tai et al. [94]	21,8438	16,81	15,3334	14,5959
		CBT (présent)	21,9331	16,8679	15,3803	14,64
	3	Tai et al. [94]	47,593	36,7679	33,4689	31,578
		TBT (présent)	47,6843	36,6775	33,3357	31,5037
		Tai et al. [94]	48,8999	37,6173	34,2954	32,6357
		CBT (présent)	49,3797	37,8017	34,3497	32,5667

Ces résultats sont comparés avec ceux donnés par (Tai et al. **[94]**). La différence entre les fréquences de la CBT et TBT est importante pour les modes les plus élevés et pour les petits rapports longueur-épaisseur L / h, cela est du à la présence de l'effet de déformation de cisaillement et l'inertie de rotation. Ces effets conduisent à une diminution des fréquences et la réduction est amplifiée à des modes de vibration plus élevés et de faibles rapports d'élancement L/h. Cela implique que le modèle de (TBT) doit être utilisé pour une meilleure prédiction des fréquences au lieu de CBT qui néglige l'effet de cisaillement transversal et de l'inertie de rotation.

Exemple 2 : cette partie présente les caractéristiques dynamiques d'une poutre FGM, La fonction de loi de puissance est employée pour décrire les variations des propriétés matérielles de la poutre FGM.

Le calcul numérique se base sur une poutre FGM simplement appuyée. La poutre est composée d'aluminium (métal) et d'alumine (céramique) est considérée.

Les paramètres de la poutre sont : b (la largeur)=0.4m, L (la longueur)=20m. La poutre composé de métal (E_m = 210 GPa, ρ_m=7800 kg/m^3, ν_m = 0.3) et de céramique (E_c = 390 GPa, ρ_c=3960 kg/m^3, ν_c = 0.3). La surface supérieure de la poutre est supposée être en céramique et la surface inférieure en métal.

Les paramètres non-dimensionnels utilisés ici sont :

$\mathrm{E_{ratio}} = \frac{\mathrm{E_c}}{\mathrm{E_m}}$, $\rho_{\mathrm{ratio}} = \frac{\rho_c}{\rho_m}$, $\bar{\omega}^2 = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}\frac{A}{I}}$. Où $I = bh^3/12$ est le moment d'inertie de la section de la poutre.

Les fréquences adimensionnelles de la poutre FGM sont calculées et obtenues pour différents paramètres du matériau, différents ratios de module de Young, et différents rapports longueur-épaisseur. La poutre est simplement appuyée durant l'analyse.

Les effets des ratios de module de Young, des rapports longueur-épaisseur, et du paramètre du matériau sur les trois fréquences adimensionnelles sont présentés sur les tableaux 4.7, 4.8 et 4.9. On peut observer que les fréquences naturelles augmentent avec l'augmentation de p (quand E_{ratio}<1), et de diminuent avec une augmentation de ce paramètre (quand E_{ratio} > 1).

Tableau 4.7 La première fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_1$ pour différents paramètres du matériau($E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}$, $\rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m} = 1$)

L/h	Théorie	E_{ratio}	p=0	p=1	p=2	p=5
20	**Présent**	**0,25**	2,2665	2,7600	2,8639	2,9911
	Simsek [97]		2,2203	2,7035	2,8053	2,9302
	Présent	**0,5**	2,2665	2,4846	2,5289	2,5846
	Simsek [97]		2,6403	2,8944	2,9459	3,011
	Présent	**1**	3,1345	3,1345	3,1345	3,1345
	Simsek [97]		3,1399	3,1399	3,1399	3,14
	Présent	**2**	3,9311	3,6253	3,5567	3,4957
	Simsek [97]		3,734	3,4421	3,3765	3,3196
	Présent	**4**	4,3349	3,7326	3,5620	3,4479
	Simsek [97]		4,4406	3,8234	3,6485	3,5326
100	**Présent**	**0,25**	2,2591	2,7555	2,8580	2,9827
	Simsek [97]		2,2213	2,7053	2,8071	2,9317
	Présent	**0,5**	2,2591	2,4778	2,5217	2,5767
	Simsek [97]		2,6416	2,896	2,9475	3,0125
	Présent	**1**	3,1437	3,1437	3,1437	3,1437
	Simsek [97]		3,1415	3,1415	3,1415	3,1415
	Présent	**2**	3,9301	3,6247	3,5560	3,4951
	Simsek [97]		3,7359	3,444	3,3784	3,3213
	Présent	**4**	4,3476	3,7443	3,5586	3,4432
	Simsek [97]		4,4427	3,8259	3,6513	3,5343

Tableau 4.8 La deuxième fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_2$ pour différents paramètres du matériau($E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}$, $\rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m} = 1$)

L/h	Théorie	E_{ratio}	p=0	p=1	p=2	p=5
20	**Présent**	**0,25**	4,5330	5,5177	5,7262	5,9816
	Simsek [97]		4,4338	5,3997	5,6028	5,8514
	Présent	**0,5**	4,5330	4,9687	5,0572	5,1690
	Simsek [97]		5,2727	5,7804	5,8832	6,0128
	Présent	**1**	6,2690	6,2690	6,2690	6,2690
	Simsek [97]		6,2703	6,2703	6,2703	6,2703
	Présent	**2**	7,8751	7,2720	7,1362	7,0099
	Simsek [97]		7,4567	6,874	6,7431	6,6291
	Présent	**4**	8,6698	7,4621	7,1191	6,8911
	Simsek [97]		8,8676	7,6363	7,2877	7,0541
100	**Présent**	**0,25**	4,5266	5,5433	5,7436	5,9834
	Simsek [97]		4,4425	5,4314	5,6139	5,8629
	Présent	**0,5**	4,5266	4,9708	5,0579	5,1651
	Simsek [97]		5,2831	5,7918	5,8948	6,0246
	Présent	**1**	6,2874	6,2874	6,2874	6,2874
	Simsek [97]		6,2827	6,2827	6,2827	6,2827

Présent	**2**	7,8746	7,2716	7,1356	7,0097
Simsek [97]		7,4714	6,8876	6,7564	6,6421
Présent	**4**	8,6952	7,4907	7,1714	6,9308
Simsek [97]		8,885	7,6515	7,3023	7,0683

Tableau 4.9 La troisième fréquence adimensionnelle $\bar{\omega}_3$ pour différents paramètres du matériau($E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}$, $\rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m} = 1$)

L/h	Théorie	E_{ratio}	p=0	p=1	p=2	p=5
20	**Présent**	**0,25**	6,8013	8,2625	8,5805	8,9702
	Simsek [97]		6,6338	8,0783	8,3823	8,7546
	Présent	**0,5**	6,8013	7,4496	7,5837	7,7537
	Simsek [97]		7,889	8,6483	8,8022	8,9962
	Présent	**1**	9,4060	9,4060	9,4060	9,4060
	Simsek [97]		9,3817	9,3817	9,3817	9,3817
	Présent	**2**	11,8964	11,0045	10,8027	10,6037
	Simsek [97]		11,157	10,285	10,089	9,9182
	Présent	**4**	13,0082	11,1754	10,6478	10,2983
	Simsek [97]		13,268	11,424	10,902	10,553
100	**Présent**	**0,25**	6,8382	8,4218	8,7132	9,0536
	Simsek [97]		6,6631	8,1462	8,4199	8,7935
	Présent	**0,5**	6,8382	7,5223	7,6520	7,8077
	Simsek [97]		7,9238	8,6868	8,8413	9,036
	Présent	**1**	9,4314	9,4314	9,4314	9,4314
	Simsek [97]		9,423	9,423	9,423	9,423
	Présent	**2**	11,8959	11,0041	10,8021	10,6033
	Simsek [97]		11,206	10,33	10,134	9,9622
	Présent	**4**	13,0433	11,3897	10,9217	10,5384
	Simsek [97]		13,326	11,476	10,952	10,601

Pour un paramètre du matériau constant, une augmentation de E_{ratio} provoque l'augmentation des fréquences fondamentales, aucune variation significative sur les fréquences par rapport à la variation dans le rapport d'élancement. Ces résultats illustrent que les fréquences dépendent de la variation de E_{ratio} beaucoup plus que la variation de l'exposant de puissance.

La comparaison des résultats obtenus par la présente méthode et ceux obtenus par Simsek **[97]** ont montré l'efficacité du présent élément.

4.4.3 Analyse de stabilité initiale (flambement)

La poutre en FGM parfaitement rectiligne est chargée en compression suivant son axe par une charge P. elle a une variation graduelle et continue des fractions volumiques de

chacun des constituants (métal et céramique) à travers son épaisseur. Différentes conditions aux limites sont considérées. La surface supérieure de la poutre est supposée être en céramique et la surface inférieure en métal (Fig.4.18). Les propriétés matérielles du métal et de la céramique sont données sur le tableau 4.10.

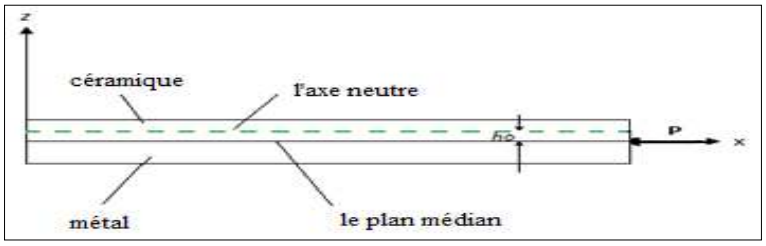


Fig.4.18 Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient fonctionnel

Tableau 4.10 Propriétés matérielles de la céramique et du métal

propriété	**Céramique**	**Métal**
E (GPa)	$E_c = 380$	$E_m = 70$
ν	$\nu_c = 0{,}23$	$\nu_m = 0{,}23$

La charge critique non-dimensionnelle est : $$P_{cr} = \frac{\lambda L^2}{E_m I} \quad (4\text{-}128)$$

λ :la charge critique

La charge critique non-dimensionnelle correspondant aux différents rapports d'élancement L/h =(5, 10, respectivement), des poutres FGM avec différentes conditions aux limites (E-E, E-SA, SA-SA et E-L) et différents paramètres du matériau a été donné sur les tableaux 4.11 et 4.12.

D'après les tableaux, Nous observons que l'augmentation du paramètre du matériau entraîne une diminution de la charge non-dimensionnelle de flambement. On peut voir aussi que cette valeur est plus importante pour les poutres entièrement céramiques que pour les poutres FGM. Les résultats obtenus par la présente méthode sont identiques à ceux donnés par Li et Batra **[98]**.

Tableau 4.11 La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM avec L/h=5

Conditions aux limites		**p : paramètre du matériau**			
		0	**1**	**2**	**5**
E-E	CBT (présent)	214,3115	106,8942	83,4480	70,5829
	Li et al. **[98]**	214,31	106,82	83,355	70,491
E-SA	CBT (présent)	109,6068	54,6646	42,6725	36,0943
	Li et al. **[98]**	109,61	54,633	43,631	36,052
SA-SA	CBT (présent)	53,5779	26,7194	20,8571	17,6420
	Li et al. **[98]**	53,578	26,705	20,838	17,623
E-L	CBT (présent)	13,3944	6,6795	5,2139	4,4102
	Li et al. **[98]**	13,394	6,6763	5,2097	4,4057

Tableau 4.12 La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM avec L/h=10

Conditions aux limites		**p : paramètre du matériau**			
		0	**1**	**2**	**5**
E-E	CBT (présent)	214,3115	106,8942	83,4480	70,5829
	Li et al. **[98]**	214,31	106,82	83,355	70,491
E-SA	CBT (présent)	109,6068	54,6646	42,6725	36,0943
	Li et al. **[98]**	109,61	54,622	43,631	36,052
SA-SA	CBT (présent)	53,5779	26,7194	20,8571	17,6420
	Li et al. **[98]**	53,578	26,705	20,838	17,623
E-L	CBT (présent)	13,3944	6,6795	5,2139	4,4102
	Li et al. **[98]**	13,395	6,6763	5,2097	4,4057

E-E : encastré-encastré

SA-SA : simplement appuyé- simplement appuyé

E-SA : encastré-simplement appuyé

E-L : encastré-libre

4.5 Etude paramétrique

Cette étude paramétrique vise à démontrer l'influence des différents paramètres de la poutre FGM sur les différentes analyses statique, dynamique et flambement. On considère les paramètres suivants : l'effet du coefficient de Poisson, l'effet des conditions aux limites, l'effet du paramètre du matériau, l'effet de l'élancement…etc.

4.5.1 L'effet du coefficient de Poisson sur l'analyse statique

Dans cette section, deux exemples sont pris en compte pour différents élancement (L/h).

4.5.1.1 Exemple 1 : poutre mince (L/h=100)

Les résultats sont discutés pour une poutre console FGM discrétisée en 50 éléments (L = 1.2 m, h = 0.012m, b = 0.1 m), la poutre est sollicitée à l'autre extrémité libre de la console par une charge (P = 1000 N). La poutre est composé d'alumine (Al_2O_3) (E_c = 151 *GPa)* et de l'acier (E_m = 75.5 *GPa).* Tout d'abord, le coefficient de Poisson change sans interruption dans toute la direction d'épaisseur selon la fraction de volume des constituants définis par la fonction de la loi de puissance (ν_c = 0.3, ν_m = 0.25), puis il est supposé être constant ($\nu_c = \nu_m$ =0.3), le facteur de correction de cisaillement est pris comme $K_z = 5/6$ pour la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (TBT). Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la console FGM sont présentées sur (Fig.4.19).

Les quantités non-dimensionnelles utilisées ici sont:

$\frac{E_c}{E_m} = 2$, $\frac{G_c}{G_m} = 1.92$ (Lorsque le coefficient de Poisson est supposé être varié)

$\frac{E_c}{E_m} = 2$, $\frac{G_c}{G_m} = 2$ (Lorsque le coefficient de Poisson est constant)

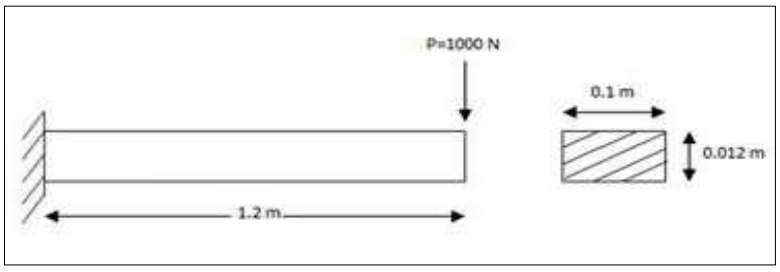


Fig.4.19 Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la poutre FGM (L/h = 100)

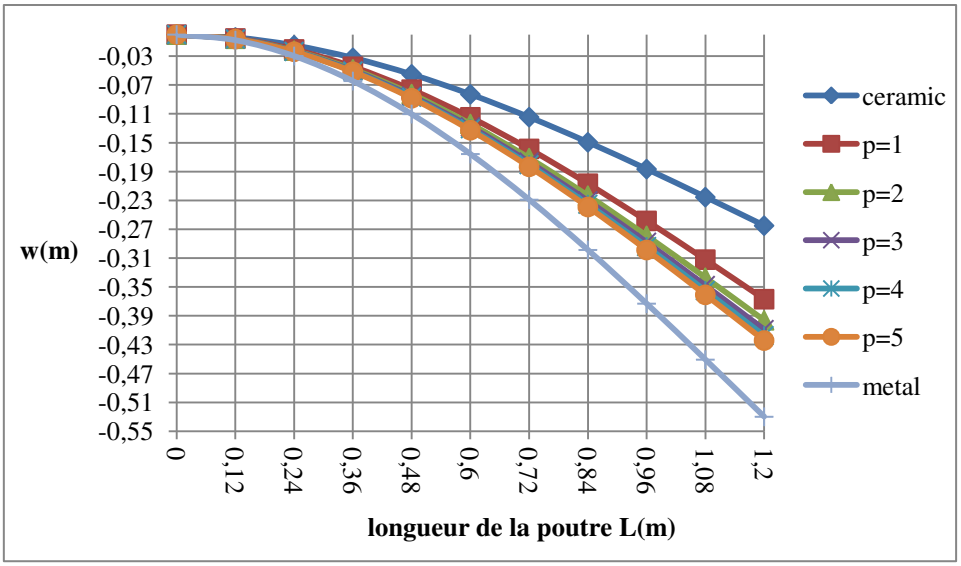


Fig.4.20 La flèche transversale à l'extrémité de la console FGM (L/h=100)

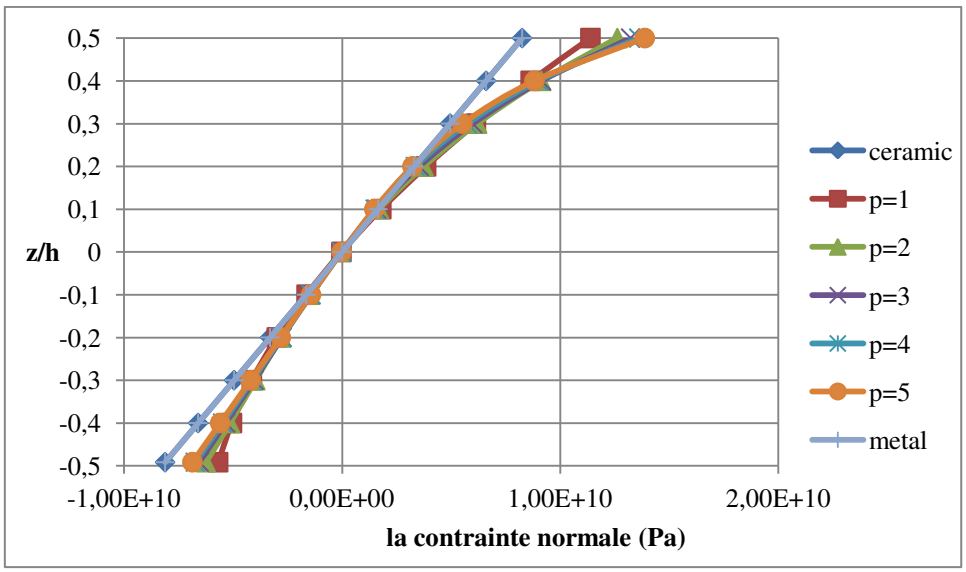


Fig.4.21 La variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=100)

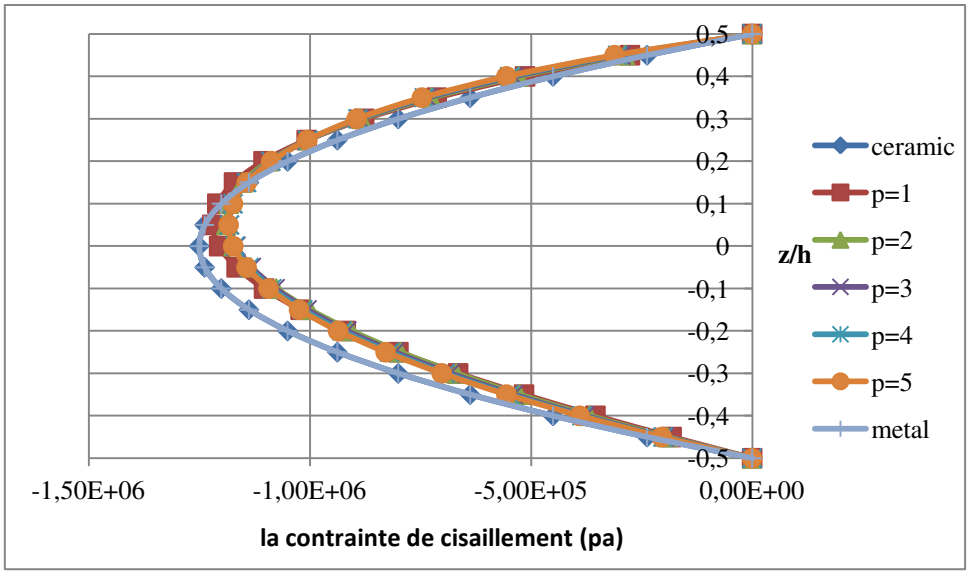


Fig.4.22 La variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=100)

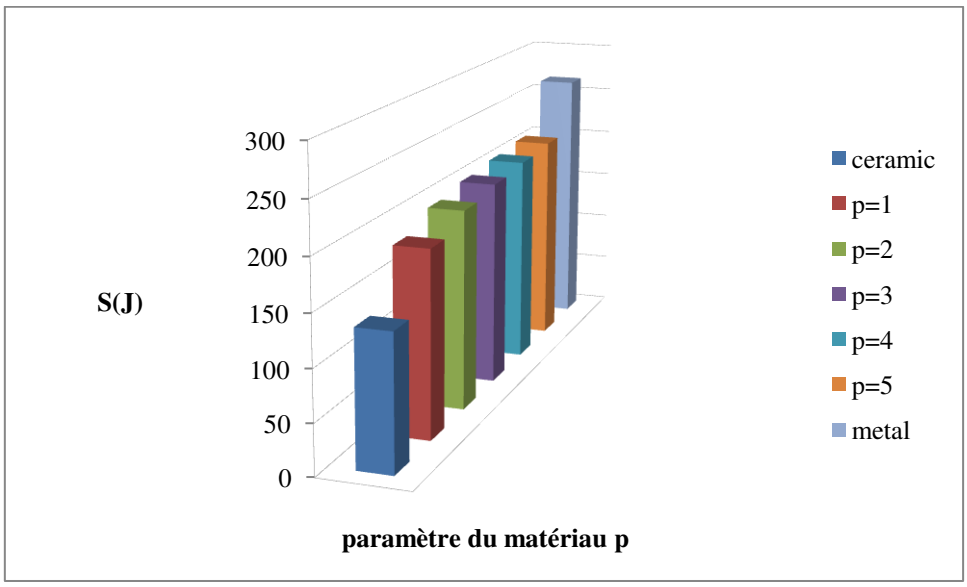


Fig.4.23 L'énergie de déformation en fonction des différents paramètres du matériau (L/h=100)

4.5.1.2 Exemple 2 : poutre à épaisseur modéré (L/h=15)

Il s'agit d'une poutre console FGM, soumis à une charge ponctuelle à l'extrémité libre (P = 1000 N). Discrétisé en 50 éléments .Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la poutre sont (L = 1.2 m, h = 0.08 m, b = 0.1 m). La poutre est composé d'alumine (E_c = 151 *GPa)* et de l'acier (E_m = 75.5 *GPa*). Comme dans l'exemple précédent, le coefficient de

Poisson est supposé varié à travers l'épaisseur de la poutre en fonction de la loi de puissance (ν_c = 0.3, ν_m = 0.25) puis il est supposé comme constant ($\nu_c = \nu_m$ = 0.3). Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la console FGM sont présentées sur la (Fig.4.24).

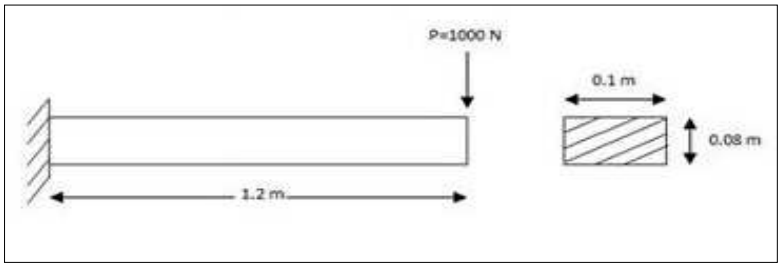


Fig.4.24 Les caractéristiques géométriques et les propriétés de la poutre FGM (L/h = 15)

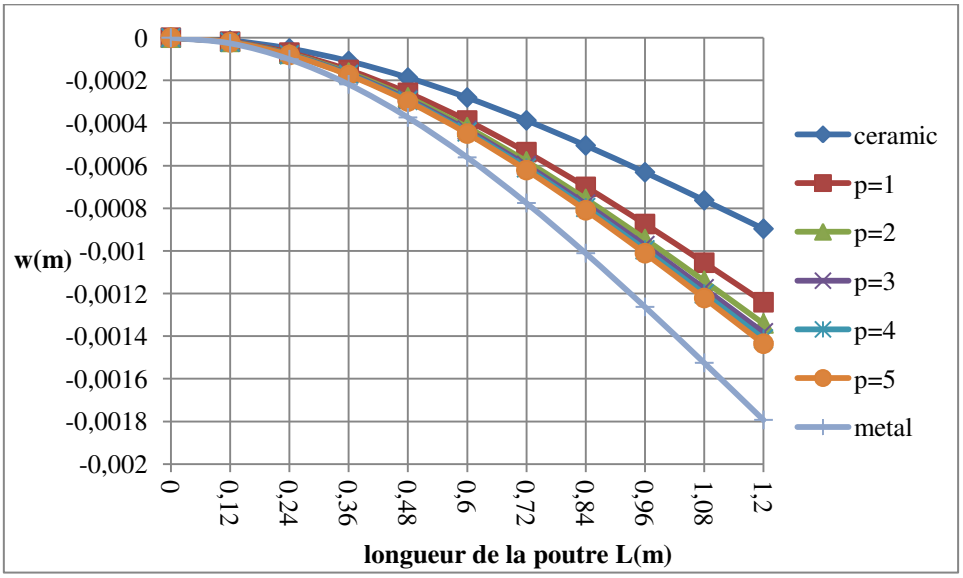


Fig.4.25 La flèche transversale à l'extrémité de la console FGM (L/h=15)

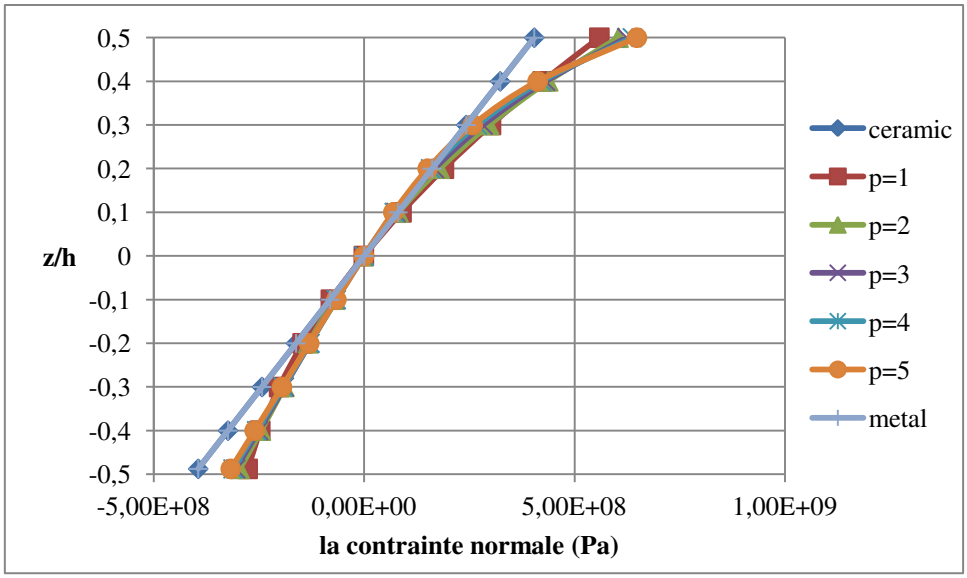


Fig.4.26 La variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=15)

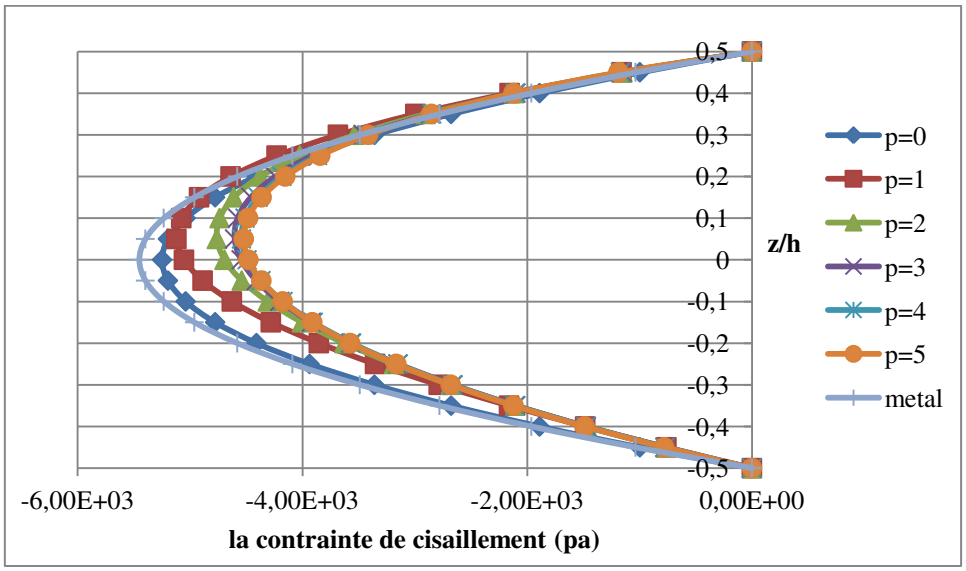


Fig.4.27 La variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres du matériau au x=0.6m (L/h=15)

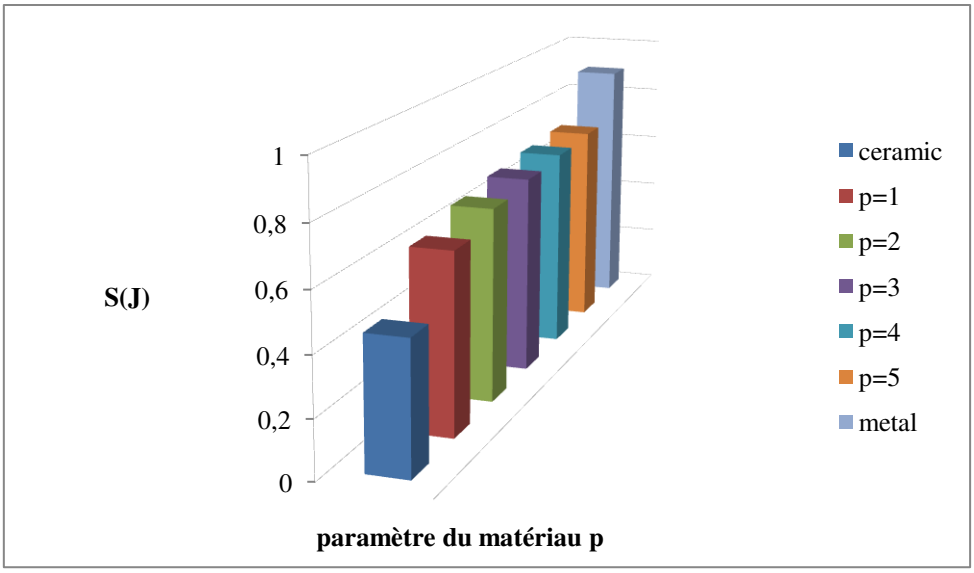


Fig.4.28 L'énergie de déformation en fonction des différents paramètres du matériau (L/h=100)

Si le coefficient de Poisson est supposé varier dans toute la direction de l'épaisseur selon la fraction de volume des constituants (définis par la fonction de loi de puissance), ou il est supposé être constant, on obtient les mêmes résultats.

La flèche transversale à l'extrémité de la console FGM est représentée sur les figures (4.20) et (4.25) pour les deux exemples (L/h=100 et L/h=15), respectivement pour divers paramètres du matériau p.

Nous remarquons que la flèche totale est plus importante pour les poutres entièrement métalliques que pour les poutres entièrement céramiques. Ceci est dû à l'influence du module de Young qui est élevé pour la céramique (151GPa) par rapport à celui du métal (75.5 GPa) par un rapport double. Par conséquent la flèche totale augmente pendant que le paramètre du matériau p augmente.

Les figures (4.21) et (4.26) présentent la distribution de la contrainte normale et la contrainte de cisaillement de la poutre FGM en fonction des différents paramètres du matériau p, les contraintes de compression sont sur les surfaces supérieures (face en céramique) et les contraintes de traction sont sur les surfaces inférieures (face en métal).

Ces distributions sont linéaires pour les poutres homogènes (poutres entièrement en céramique ou entièrement en métal). Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre FGM avec des paramètres du matériau p=1, 2,3, etc. L'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour la poutre FGM

avec le paramètre du matériau p utilisé. De plus la contrainte de compression est plus grande en valeur absolue par rapport à la contrainte de traction.

L'évolution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre FGM pour divers paramètres du matériau est illustrée sur les figures (4.22) et (4.27). On remarque que l'influence du paramètre du matériau est illimitée et son augmentation mène à une diminution des contraintes de cisaillement. Les figures (4.23) et (4.28) montrent la variation de l'énergie de déformation en fonction de différentes valeurs de p; on voit que l'énergie de déformation augmente pendant que le paramètre du matériau p augmente.

Nous observons qu'il n'y a pas de relation entre le coefficient de Poisson, la flèche, les contraintes normales et de cisaillement et aussi l'énergie de déformation.

L'analyse statique des poutres FGM montre que les flèches, les contraintes normales et les contraintes cisaillement dépendent beaucoup plus de la position de l'axe neutre dépendant lui même de l'indice de la loi de puissance, et ils ne dépendent pas du coefficient de Poisson.

4.5.2 L'effet de cisaillement transversal, des conditions aux limites, du paramètre du matériau, et du rapport d'élancement sur l'analyse dynamique

Un analyste adopte une analyse d'une poutre mince négligeant les effets du cisaillement transversal sur les fréquences. Ici nous avons tenté de faire ressortir clairement l'importance de considération de l'effet de cisaillement transversal dans l'analyse dynamique des structures de type poutre.

Le calcul numérique se base sue une poutre FGM (Fig.4.29) avec différentes conditions aux limites, en utilisant les deux formulations d'Euler Bernoulli (CBT) et de Timoshenko (TBT).

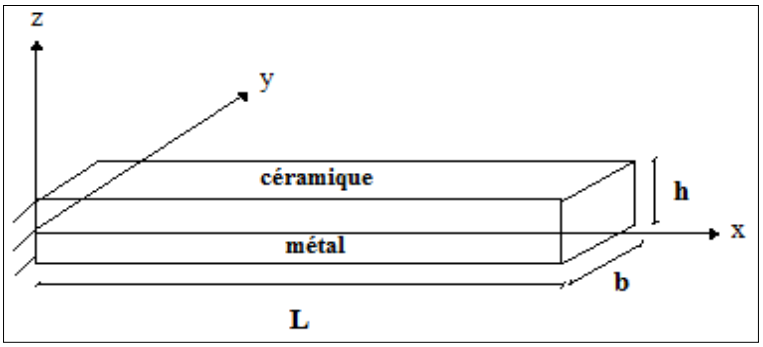


Fig.4.29 Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient de propriété

Les propriétés matérielles du métal et de la céramique sont données sur le tableau (4.13)

Tableau 4.13 Propriétés matérielles de la céramique et du métal

Propriété	**Céramique**	**Métal**
E(GPa)	151	70
ν	0,3	0,3
ρ (kg/m^3)	5000	2780

Une étude convergente est réalisée avec différents nombres d'éléments (NE). Les résultats avec 5 éléments se révèlent donner des fréquences convergentes à la précision souhaitée comme a été indiqué sur le tableau 4.14.

Tableau 4.14 Une étude convergente (SA-SA, p=0, L/h=100, la théorie de Timoshenko)

NE	**La fréquence fondamentale (rad/s)**
5	1,5656
10	1,5656
20	1,5654
40	1,5656
50	1,5656
80	1,5656

Les quantités non-dimensionnelles utilisées ici sont

$$E_{ratio} = \frac{E_c}{E_m}, \quad G_{ratio} = \frac{G_c}{G_m}, \quad \rho_{ratio} = \frac{\rho_c}{\rho_m}, \quad \bar{\omega}^2 = \omega L^2 \sqrt{\frac{I_0}{E_m h^3}}$$

Avec $$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho(z)dz = h\left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{p+1}\right) \quad (4\text{-}129)$$

Pour la validation, la fréquence fondamentale non dimensionnelle d'une poutre entièrement céramique obtenue à partir de la théorie de Timoshenko est comparée à $\bar{\omega}$ obtenue par Sanjay **[99]**. Les résultats sont donnés sur le tableau (4.15), nous observons que les valeurs sont en bon accord avec ceux qui données par Sanjay **[99]** pour tous les rapports L/h considérés.

Tableau 4.15 La comparaison de $\bar{\omega}$ (la théorie de Timoshenko)

L/h	SA-SA (p=0)		E-E (p=0)		SA-E (p=0)	
	Sanjay [99]	**présent**	**Sanjay [99]**	**présent**	**Sanjay [99]**	**présent**
5	3,9338	3,9335	7,6363	7,6402	5,7008	5,7014
10	4,1178	4 ,1163	8,9017	8,8964	6,2952	6,2918
20	4,1690	4,1671	9,3368	9,3272	6,4778	6,4729
50	4,1838	4,1818	9,4713	9,4602	6,5321	6,5268
100	4,1858	4,1837	9,4910	9,4797	6,5399	6,5346

Après la validation des résultats d'une poutre homogène, nous considérons les vibrations libres d'une poutre FGM.

Tableau 4.16 L'effet des paramètres géométriques et la distribution matérielle sur $\bar{\omega}$ (SA-SA)

L/h	Les théories	p=0	p=1	p=5
5	**CBT**	4,1846	3,4900	3,2197
	TBT	3,9335	3,2887	3,0148
	% diff	6,3836	6,1209	6,7964
10	**CBT**	4,1846	3,4968	3,2254
	TBT	4,1163	3,4417	3,1689
	% diff	1,6592	1,6090	1,7829
20	**CBT**	4,1846	3,4983	3,2267
	TBT	4,1671	3,4842	3,2122
	% diff	0,4199	0,4046	0,4514
50	**CBT**	4,1846	3,4987	3,2270
	TBT	4,1818	3,4964	3,2247
	% diff	0,0669	0,06578	0,07132
100	**CBT**	4,1846	3,4988	3,2271
	TBT	4,1837	3,4982	3,2265
	% diff	0,0215	0,0171	0,0185

Tableau 4.17 L'effet des paramètres géométriques et la distribution matérielle sur $\bar{\omega}$ (E-E)

L/h	Les théories	p=0	p=1	p=5
5	**CBT**	9,4862	7,9303	7,3141
	TBT	7,6402	6,4361	5,8159
	% diff	24,1616	23,2159	25,7604
10	**CBT**	9,4862	7,9357	7,3186
	TBT	8,8964	7,4606	6,8321
	% diff	6,6296	6,3681	7,1207
20	**CBT**	9,4862	7,9370	7,3196
	TBT	9,3272	7,8091	7,1877
	% diff	1,7046	1,6378	1,8350
50	**CBT**	9,4862	7,9373	7,3199
	TBT	9,4602	7,9164	7,2983
	% diff	0,2748	0,2640	0,2959
100	**CBT**	9,4862	7,9374	7,3200
	TBT	9,4797	7,9321	7,3146
	% diff	0,0685	0,0668	0,0738

Tableau 4.18 L'effet des paramètres géométriques et la distribution matérielle sur $\bar{\omega}$ (SA-C)

L/h	Les théories	p=0	p=1	p=5
5	**CBT**	6,5372	5,4797	5,0511
	TBT	5,7014	4,8023	4,3664
	% diff	14,6595	14,1057	15,6811
10	**CBT**	6,5372	5,4838	5,0545
	TBT	6,2918	5,2853	4,8509
	% diff	3,9003	3,7556	4,1971
20	**CBT**	6,5372	5,4848	5,0553
	TBT	6,4729	5,4328	5,0017
	% diff	0,9933	0,9571	1,0716
50	**CBT**	6,5372	5,4850	5,0555
	TBT	6,5268	5,4766	5,0468

	% diff	0,1593	0,1533	0,1723
100	**CBT**	6,5372	5,4851	5,0555
	TBT	6,5346	5,4830	5,0534
	% diff	0,0397	0,0383	0,0415

SA-SA : simplement appuyé- simplement appuyé

E-E : encastré-encastré

SA -E : encastré-simplement appuyé

La différence en pourcentage de la fréquence fondamentale obtenue en utilisant les deux théories pour différents rapports L / h, différents paramètres du matériau, et différentes conditions aux limites est présentée dans les tableaux 4.16, 4.17 4.18. Nous remarquons que, pour toutes les conditions aux limites, les effets de cisaillement transverse sont moins prédominants après L / h ≥ 50. Comme L / h tend vers 100, la différence entre les fréquences obtenues par la théorie d'Euler et de Timoshenko devient négligeable. Pour L / h identique, la différence maximale est observée pour la poutre E-E par rapport à la poutre SA-SA et à la poutre SA-E. Pour la poutre SA-E, la différence se situe entre celle de la poutre encastrée et celle de la poutre simplement supporté. Pour une L / h donnée, on observe que la différence est presque semblable pour différents paramètre de fraction volumique.

La figure 4.30 présente la variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle en fonction du rapport longueur / épaisseur (L / h) pour la poutre FGM (SA-SA) avec différents paramètres du matériau pour les deux théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timochenko. Comme il est prévu, pour le même exposant de fraction volumique, les fréquences ne correspondent pas aux petits rapports L / h montrant clairement l'effet du cisaillement transversal par l'augmentation de la flexibilité, réduisant ainsi la fréquence comparée à celle obtenue par la théorie d'Euler, nous notons aussi que ces remarques sont similaire pour tous les paramètres du matériau considérés.

L'étude est répétée avec les autres conditions aux limites (E-E et SA-E), comme elles montrent les figures 4.31 et 4.32. Pour toutes les conditions aux limites considérées, il existe une grande différence entre la fréquence non dimensionnelle obtenue à partir de ces deux théories pour L /h > 10. Pour les poutres simplement appuyée, la courbe obtenue par la théorie de Timoshenko coïncide avec la courbe obtenue par la théorie d'Euler après L / h ≥ 25. Pour les poutres encastrée-encastrée, ces deux courbes ne coïncident qu'après L / h ≥ 50.

Pour la poutre avec une extrémité simplement appuyé et une autre extrémité encastrée, nous remarquons que la réponse est entre celle des poutres SA-SA et E-E. Ainsi, pour de petites valeurs de L / h, le cisaillement transversal est plus significatif que pour les poutres longues et minces. Comme nous avons mentionné précédemment, cela peut être attribué à l'augmentation de la flexibilité pour les petites rapports L / h (la théorie de Timoshenko).

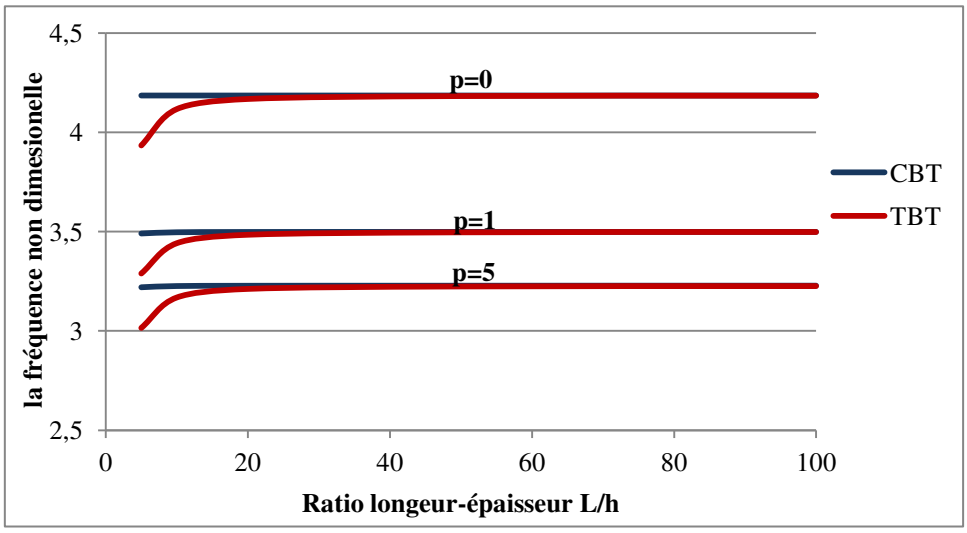


Fig.4.30 L'effet de L/h sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (SA-SA)

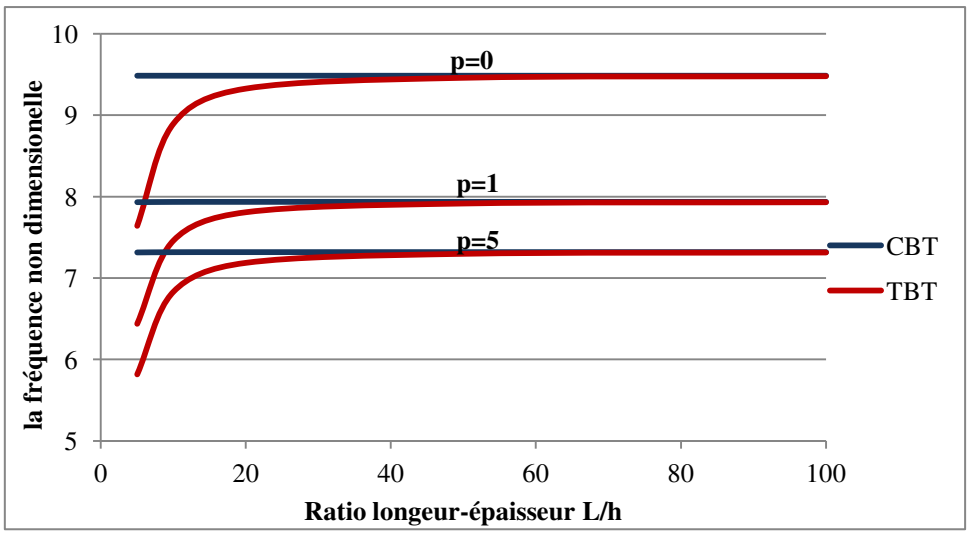


Fig.4.31 L'effet de L/h sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (E-E)

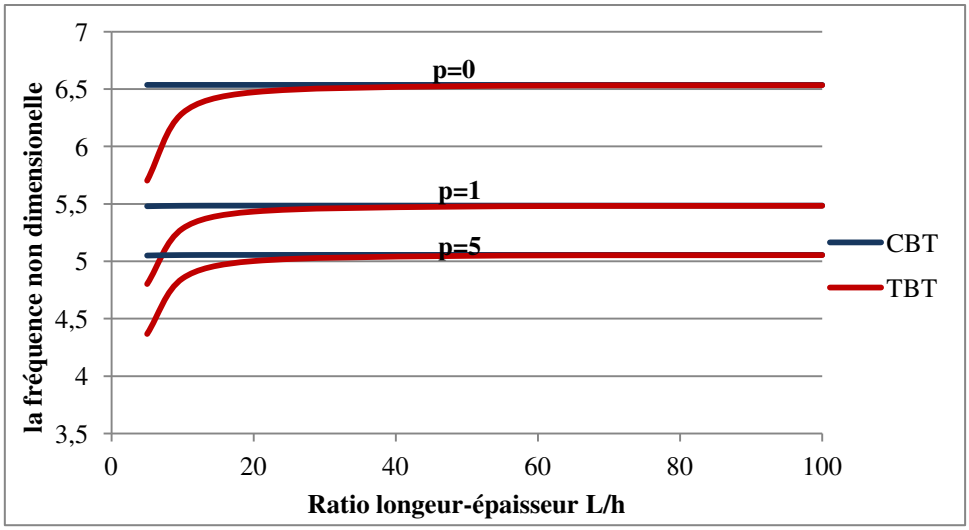


Fig.4.32 L'effet de L/h sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (SA-E)

La figure 4.33 présente l'effet de l'exposant p sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ pour différents rapports L / h pour le cas SA-SA. Nous observons que la diminution de l'exposant de loi de puissance entraîne une augmentation de la fréquence non dimensionnelle. Les valeurs de fréquence les plus élevées sont obtenues pour des poutres entièrement céramique ($p = 0$), tandis que les valeurs de fréquence les plus faibles sont obtenues pour des poutres entièrement métalliques ($p \to \infty$), ceci est dû au fait que l'augmentation du paramètre du matériau se conduit à une diminution de la valeur du module d'élasticité. La poutre devient flexible avec l'augmentation du paramètre du matériau.

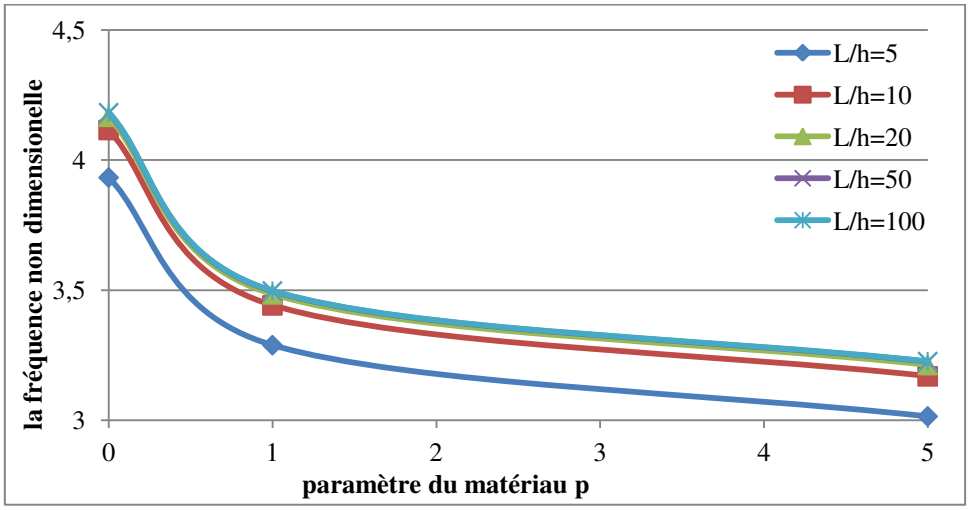


Fig.4.33 L'effet du paramètre du matériau sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle (SA-SA) [TBT]

4.5.3 L'effet de cisaillement transversal, des conditions aux limites, du paramètre du matériau, et du rapport d'élancement sur l'étude du flambement

Nous reprenons pour ce cas l'exemple de la figure (4.18) avec les mêmes données géométriques et mécaniques de la poutre FGM.

Cette fois ci nous utilisons les deux théories des poutres (CBT, TBT), la charge critique non-dimensionnelle correspondant aux différents rapports longueur-épaisseur L/h, des poutres minces de type FGM avec différentes conditions aux limites (E-E, E-SA, SA-SA et E-L) et différents paramètres du matériau a été donné sur les tableaux 4.19 - 4.22.

Tableau 4.19 La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (E-L)

L/h	Théories	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
100	**CBT**	13,394	6,681	5,216	4,748	4,539	4,412
	TBT	12,636	6,303	4,887	4,426	4,217	4,091
200	**CBT**	13,394	6,681	5,216	4,748	4,539	4,412
	TBT	13,198	6,584	5,131	4,664	4,455	4,328

Tableau 4.20 La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (E-E)

L/h	Théories	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
100	**CBT**	214,356	107,441	84,083	76,562	73,161	71,062
	TBT	202,050	101,288	78,728	71,311	67,914	65,831
200	**CBT**	214,356	107,441	84,083	76,562	73,161	71,062
	TBT	211,178	105,852	82,695	75,196	71,794	69,698

Tableau 4.21 La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (E-SA)

L/h	Théories	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
100	**CBT**	109,612	54,820	42,854	39,016	37,290	36,231
	TBT	103,361	51,697	40,138	36,353	34,630	33,578
200	**CBT**	109,612	54,820	42,854	39,016	37,290	36,231
	TBT	107,998	54,013	42,150	38,324	36,597	35,539

Tableau 4.22 La charge critique non-dimensionnelle de la poutre FGM (SA-SA)

L/h	Théories	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
100	**CBT**	53,578	26,752	20,896	19,023	18,184	17,671
	TBT	50,537	25,235	19,577	17,730	16,892	16,382
200	**CBT**	53,578	26,752	20,896	19,023	18,184	17,671
	TBT	52,793	26,361	20,554	18,687	17,848	17,335

D'après les tableaux, nous observons que l'augmentation du paramètre du matériau entraîne une diminution de la charge non-dimensionnelle de flambement. On peut voir aussi que cette valeur est plus importante pour les poutres homogènes que pour les poutres FGM. Nous remarquons aussi que, les charges non-dimensionnelles de flambement ne dépendent pas de la variation du rapport L/h, elles restent constantes pour la théorie d'Euler Bernoulli. La différence entre les charges non-dimensionnelles de flambement obtenue par la théorie d'Euler et de Timoshenko devient négligeable quand on augmente le rapport d'élancement.

4.6 Etude de la flexion des poutres FGM en utilisant une nouvelle théorie à ordre élevé

L'objectif de cette partie est de présenter une nouvelle théorie à ordre élevé qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser le comportement en flexion des poutres épaisses fonctionnellement graduées (FGM). Cette théorie a de fortes similitudes avec la théorie classique des poutres dans certaines notions telles que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions des contraintes résultantes. Les équations et les conditions aux limites sont dérivées à partir du principe des travaux virtuel.

Ce nouveau modèle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inferieure de la poutre FGM. La distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse suivant l'épaisseur de la poutre est prise en considération dans cette analyse à l'aide d'une fonction de forme polynômiale. Les propriétés matérielles de la poutre FGM varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants. On peut conclure que cette théorie est efficace et simple pour l'analyse de la flexion statique des poutres fonctionnellement graduées.

4.6.1 Théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé

Le champ de déplacement d'un point matériel situé aux coordonnées (x, y, z) dans la poutre s'écrit comme suit :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}(x) + f(z)\psi_x(x) \tag{4-130a}$$

$$w(x,z) = w_0(x) \tag{4-130b}$$

La fonction de $f(z)$ et ces dérivées sont données comme suit :

$$f(z) = z\left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{6h^2}\right) = z\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{6}\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) = \frac{9}{8}z - \frac{9z^3}{6h^2} \tag{4-131a}$$

$$f'(z) = \left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{2h^2}\right) \tag{4-131b}$$

$$f''(z) = -\left(\frac{9z}{h^2}\right) \tag{4-131c}$$

Par compensation de l'équation (4-131a) dans (4-130) on peut trouver :

$$u(x,z) = u_0(x) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{9}{8}z - \frac{9z^3}{6h^2}\right)\psi_x \tag{4-132a}$$

$$u(x,z) = u_0(x) - z\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{9}{8}\psi_x\right) - \frac{9z^3}{6h^2}\psi_x \tag{4-132a}$$

Avec,u, w sont les déplacements dans les directions x, z ; u_0, et w_0 sont les déplacements du plan médian,

$f(z)$ représente la fonction de cisaillement déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur. Le champ de déplacement de la théorie classique des poutres (CBT) est obtenu en posant $f(z) = 0$. La théorie du premier ordre (first-order shear déformation theory ou FSDT) est obtenue en posant $f(z) = z$. En plus, la théorie des déformations du troisième ordre (the third-order shear deformation theory ou TSDT) Reddy **[100]** est obtenue par:

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \tag{4-133}$$

La théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal (The sinusoidal shear deformation theory ou SSDT) de Touratier **[101]** est obtenue en posant :

$$f(z) = \frac{h}{\Pi}sin\left(\frac{\Pi z}{h}\right) \tag{4-134}$$

En plus, la théorie de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) de Karama **[102]** est obtenue en posant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \tag{4-135}$$

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (4-130) est :

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z)\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (4\text{-}136a)$$

$$\gamma_{xz}(x,z) = \frac{\partial f}{\partial z}.\psi_x = \left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{6h^2}\right)\psi_x \quad (4\text{-}136b)$$

$f'(z) = 0$ aux surfaces limites (supérieure et inferieure) de la poutre, ce qui implique la nullité des contraintes de cisaillement transverse sur les surfaces supérieure et inferieure de la poutre

$f''(z)$ est égal à zéro quand $z = 0$. Ceci implique que la contrainte de cisaillement est maximale au niveau du plan médian,

ψ_x: est la déformation de cisaillement de l'axe neutre.

Maintenant, nous introduisons l'angle de rotation perpendiculaire à la ligne médiane ou $\theta = \frac{\partial u}{\partial z}$ lorsque $z = 0$, par conséquent, nous avons:

$$\psi_x(x) = \theta + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4\text{-}137)$$

Donc, la déformation normale $\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u}{\partial x}$ peut être exprimée en fonction de la flexion transversale w et la rotation de la section comme suit :

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(\frac{9z}{8} - \frac{9z^3}{2h^2}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{9z}{8} - \frac{9z^3}{2h^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4\text{-}138a)$$

$$\gamma_{xz}(x,z) = \frac{\partial f}{\partial z}\psi_x = \left(\frac{9}{8} - \frac{9z^2}{2h^2}\right)\left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (4\text{-}139b)$$

Si $z = 0$, la déformation normale est égale : $\varepsilon_x(x,z) = \frac{\partial u_0}{\partial x}$

4.6.2 Résultats numériques

Géométrie de la poutre FGM : b=h/100=0.001m, h=0.1m.

Les propriétés mécaniques de la poutre FGM : Céramique : E_c = 10.10^4 GPa, ν_c = 0.25, métal : E_m = 10.10^3 GPa, ν_m = 0.25.

La poutre a une longueur L. Deux cas sont considérés; L / h est égale à 100 (poutre mince) et aussi L / h à 5 (poutre épaisse), voir (Fig.4.34).

Les quantités non-dimensionnelles utilisées ici sont:

$\frac{E_c}{E_m} = 10$, $\frac{G_c}{G_m} = 10$

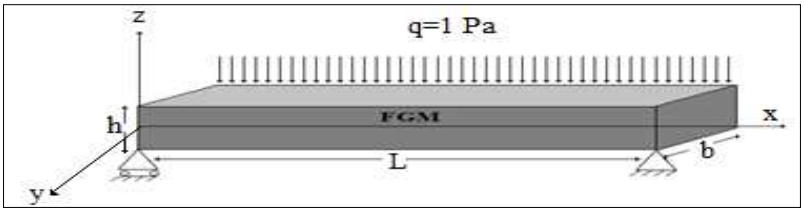


Fig.4.34 Les coordonnées et la géométrie de la poutre FGM

4.6.2.1 Le premier cas : L/h=100

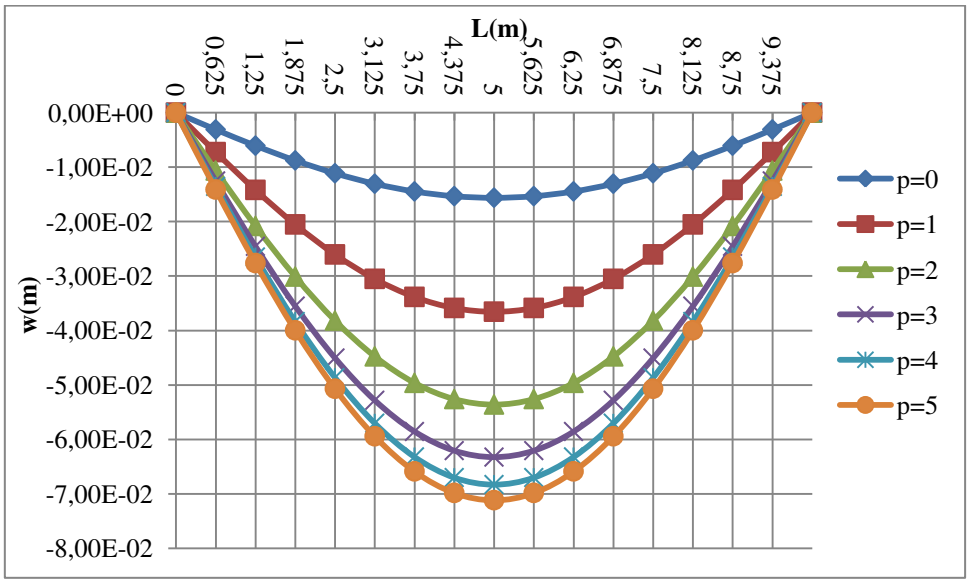


Fig.4.35 L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau au milieu de la poutre (L/h=100)

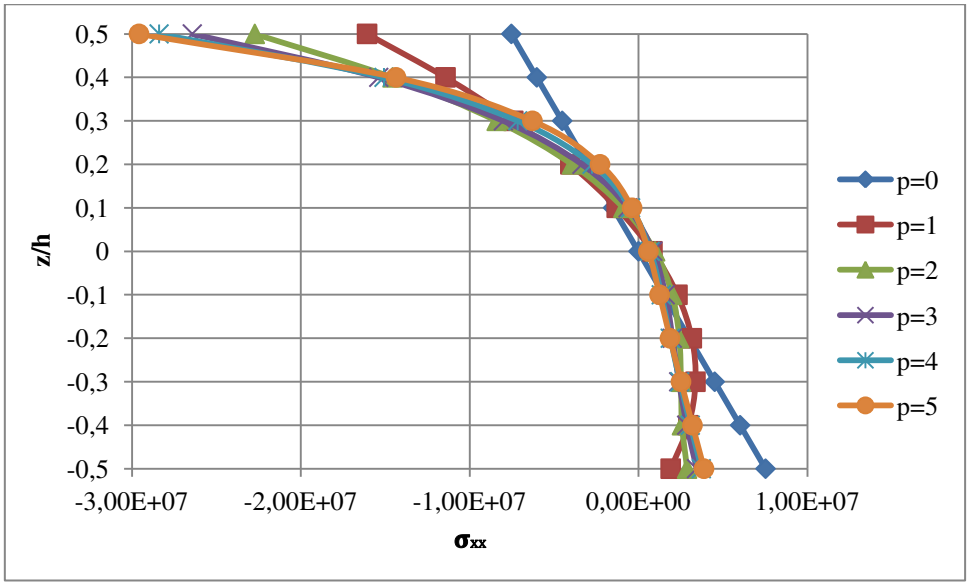


Fig.4.36 La distribution des contraintes normales dans le sens de l'épaisseur au milieu de la poutre (L/h=100)

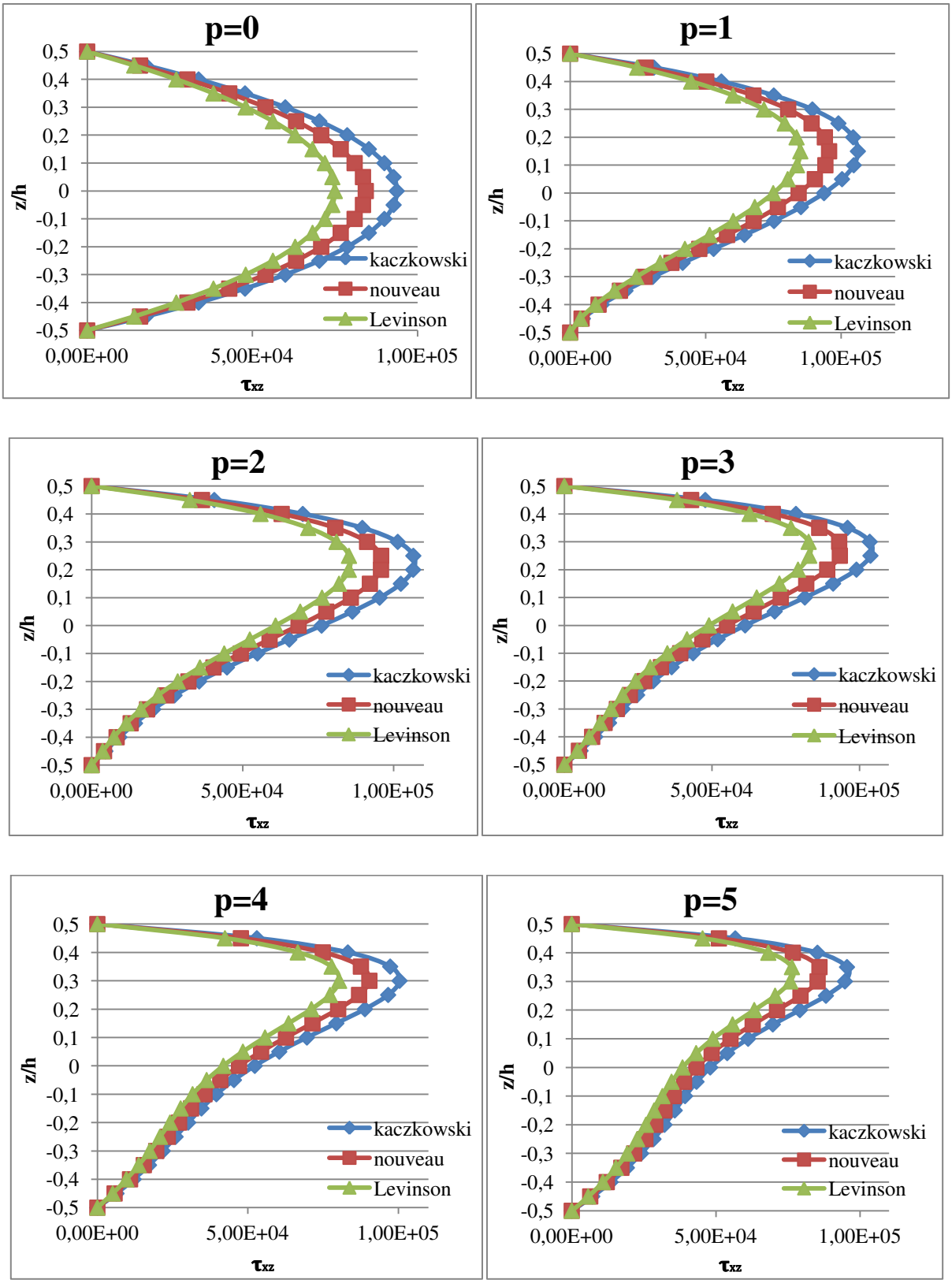


Fig.4.37 La distribution des contraintes de cisaillement dans le sens de l'épaisseur pour différentes théories à ordre élevé au point (x=0) (L/h=100)

4.6.2.2 Le deuxième cas : L/h=5

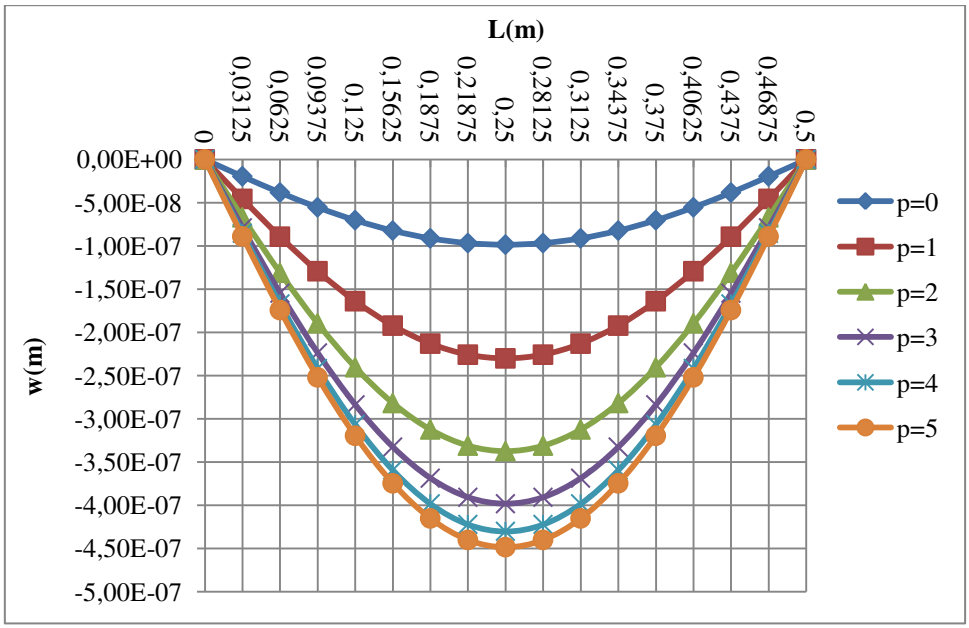


Fig.4.38 L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction des divers paramètres du matériau au milieu de la poutre (L/h=5)

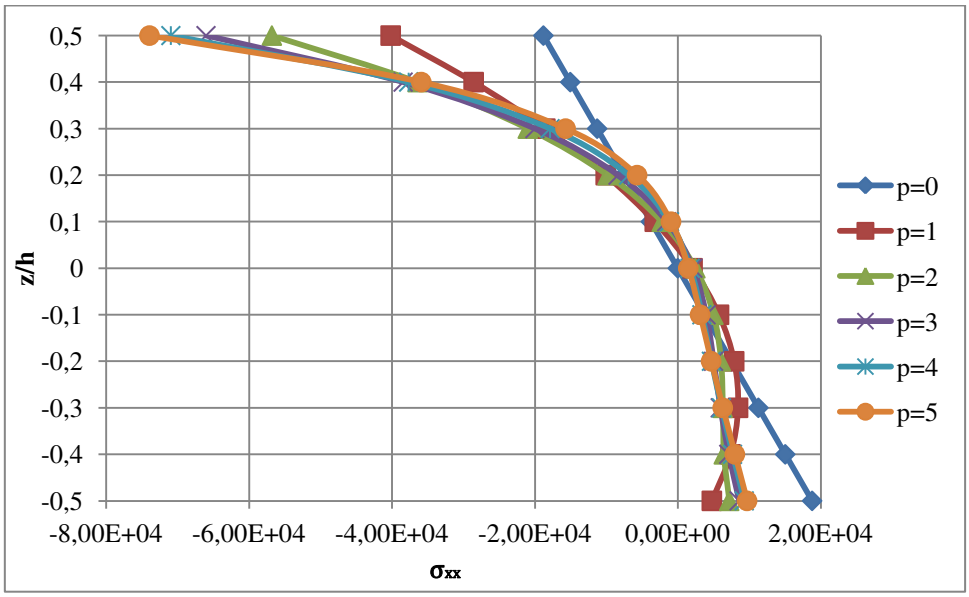


Fig.4.39 La distribution des contraintes normales dans le sens de l'épaisseur au milieu de la poutre (L/h=5)

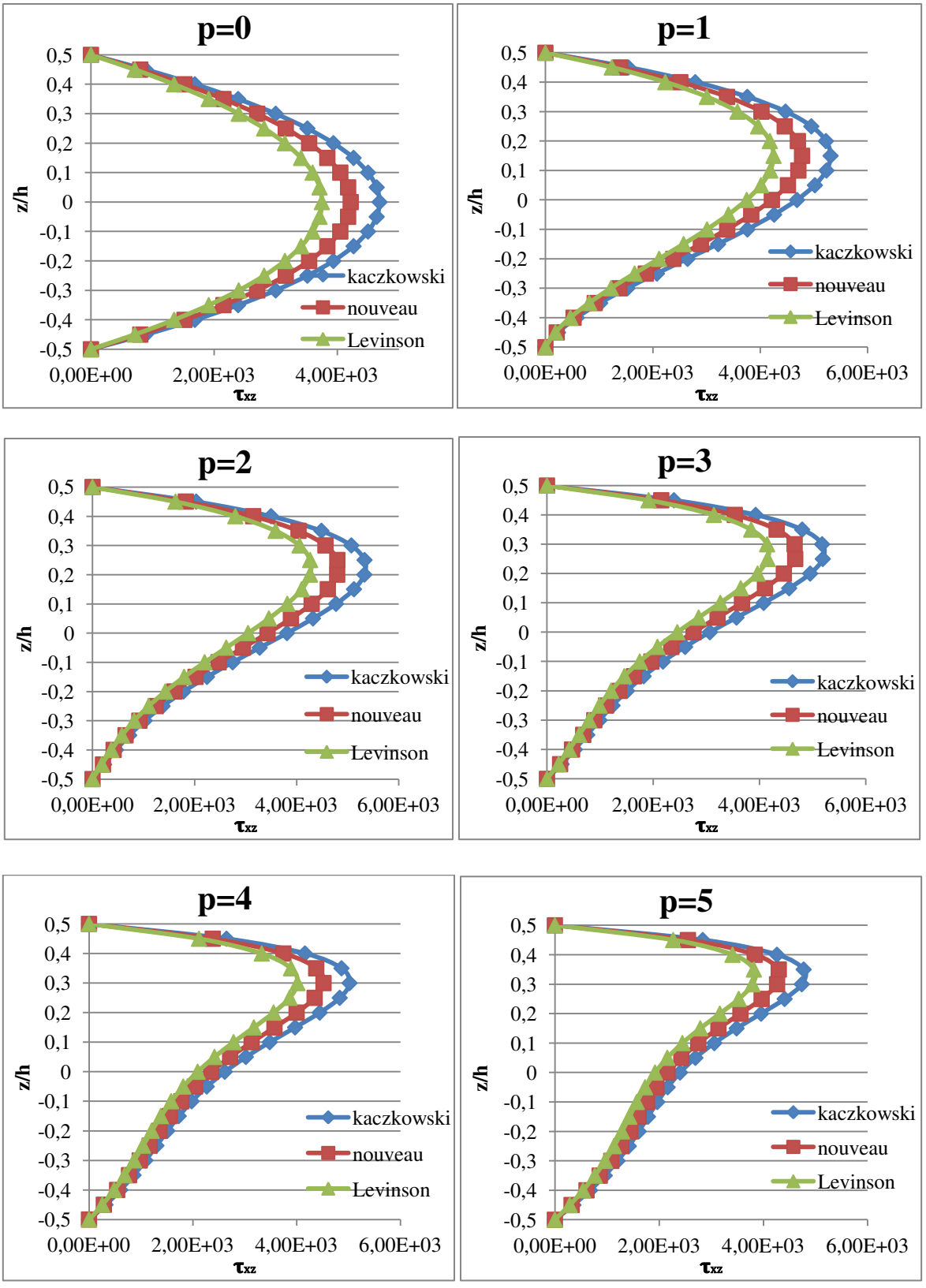


Fig.4.40 La distribution des contraintes de cisaillement dans le sens de l'épaisseur pour différentes théories à ordre élevé au point (x=0) (L/h=5)

La flèche transversale au milieu de la poutre FGM est représenté sur les figures (4.35) et (4.38) pour les deux exemples (L/h=100 et L/h=5), respectivement et pour divers paramètres du matériau p.

On remarque que, la flèche totale est plus importante pour les poutres entièrement métalliques que pour les poutres entièrement en céramique. Ceci est dû à l'influence du module de Young qui est élevé pour la céramique (10000GPa) par rapport à celui du métal (1000 GPa). Par conséquent la flèche totale augmente lorsque le paramètre du matériau p augmente.
Les figures (4.36) et (4.39) présentent la distribution de la contrainte normale de la poutre FGM en fonction des différents paramètres du matériau p.
Ces distributions sont linéaires pour les poutres homogènes (poutres entièrement en céramique ou entièrement en métal). Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre FGM avec des paramètres du matériau p=1, 2,3, etc. L'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour la poutre FGM avec le paramètre du matériau p utilisé. De plus les contraintes de compression sont plus grandes en valeur absolue par rapport à la contrainte de traction.
Les figures (Fig.4.37) et (Fig.4.40) représentent la variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre FGM pour les différents élancements (L / h = 100, L / h = 5, respectivement), différentes valeurs de p et différentes théories d'ordre élevé (Kaczkowski et Levinson) à x = 0. On peut observer que les courbes obtenues par la présente théorie de déformation de cisaillement sont proches de ceux donnés par rapport les deux théories de poutre (Kaczkowski et Levinson) pour toutes les valeurs de p et toute les rapports L / h.

Dans le cadre de cette étude, nous avons présenté une nouvelle théorie à ordre élevé qui détermine les contraintes et les déplacements d'une poutre fonctionnellement graduée (FGM) simplement appuyée. Toutes les études comparatives effectuées ont montrées que les flèches et les contraintes obtenues par cette théorie, en comparaison avec les autres théories (Kaczkowski et Levinson) sont presque identiques sauf pour les contraintes de cisaillement.
D'une manière générale, tous les modèles de déformation de cisaillement d'une poutre donnent des résultats différents, dans le cas de la contrainte de cisaillement transversal. Il peut être expliqué par les différentes fonctions de forme de contrainte de cisaillement transversal utilisé dans chacun des modèles.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation théorique d'un élément fini en FGM, en utilisant les deux théories de poutres : la théorie d'Euler Bernoulli (CBT) et la théorie de Timoshenko (TBT). Puis, nous avons abordé la validation de cet élément pour l'analyse des différents comportements (statique, dynamique, et aussi flambement) des poutres isotropes ainsi que des poutres en FGM à travers une série d'applications en flexion, vibration libre et en flambement.

On peut conclure que l'utilisation de l'élément fini développé est capable de donner d'excellents résultats pour les différents comportements.

Par ailleurs, on a aussi montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres, tels que le paramètre du matériau, le rapport L/h, le coefficient de Poisson…etc. sur les différentes analyses (statique, vibration, flambement).

Ensuite, une nouvelle théorie à ordre élevé est proposée prenant en considération l'effet de cisaillement transverse. En plus, elle a une forte similitude avec la théorie classique des poutres dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la poutre.

Chapitre 5

Formulation d'éléments de coques FGM à base triangulaire

5.1 Introduction

L'utilisation d'éléments plats triangulaires pour discrétiser les structures permet l'analyse des structures coque en FGM avec une précision satisfaisante. Cependant la présence des éléments finis membranaires (de classe C^0) face aux éléments flexionnels (de classe C^1) pose des problématiques exprimées

- En termes de pauvreté en déplacement pour le traitement des aspects de flexion, ce qui oblige d'opter pour des réseaux denses afin d'approcher correctement la géométrie curviligne des coques et décrire les variations de contrainte.
- Et en terme de problèmes de continuité et de conformité lorsqu'ils sont utilisés en jonction avec des éléments de plaques et lors du passage aux éléments de coques.

La recherche de solutions à ces problèmes constitue l'objectif de notre contribution par le développement d'éléments de coques FGM à facettes planes basés sur la formulation en déformation et construits par superposition des éléments membranaires aux éléments flexionnels plus un couplage membrane-flexion . Ces éléments sont nuancés selon leurs caractéristiques fonctionnelles et selon la formulation adoptée pour chaque d'eux.

5.2 Formulation des éléments de flexion

5.2.1 Elément de plaque mince « Pmi43 »

5.2.1.1 Caractéristiques

C'est un élément fini de plaque mince triangulaire auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif positionné à l'extérieur et loin du triangle (voir Fig.5.1). Cette position, à l'extérieur, est choisie pour éviter l'assouplissement de la matrice de rigidité entraînant une surestimation des déplacements nodaux.

Chaque nœud possède trois degrés de liberté : la flèches w_i et les rotations θ_{xi} et θ_{yi}.

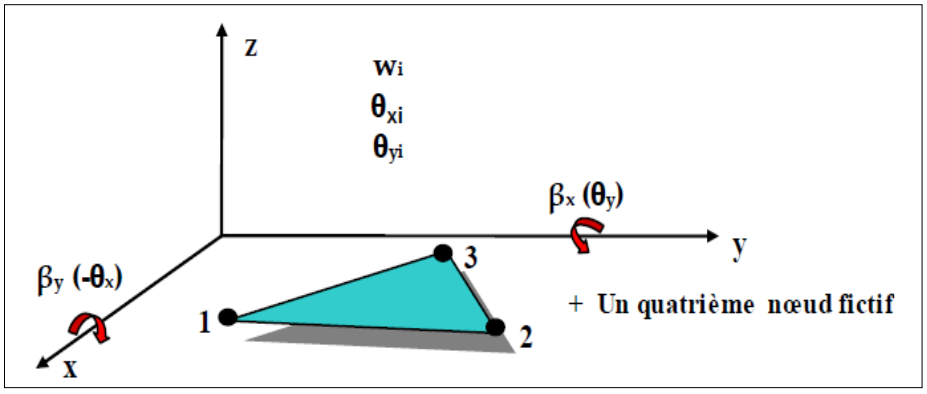


Fig.5.1 Elément triangulaire de plaque mince avec trois degrés de liberté par nœud

Les degrés de liberté correspondant à ce quatrième nœud sont par la suite éliminés par condensation statique de la matrice de rigidité au niveau élémentaire. Donc l'intérêt majeur de ce nœud fictif réside en l'enrichissement des champs de déplacements (raffinement p), et vise, par conséquent, une plus grande précision dans l'approximation de la solution. Sa formulation se base sur l'approche en déformation.

Les fonctions d'interpolation des champs de déformation, par conséquent des déplacements et des contraintes sont développées en utilisant le triangle de Pascal.

Le critère variationnel correspondant est celui de l'énergie potentielle totale. L'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, est fortement intéressante pour éviter la perte de convergence; phénomène observé chez les éléments iso paramétriques (utilisant l'intégration numérique) qui sont très sensibles à la géométrie des éléments (leur convergence est conditionnée par un maillage régulier - non distordu).

Les hypothèses de cette formulation sont celles de la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff) en négligeant le cisaillement transversal.

5.2.1.2 Cinématique

Dans la figure 5.2, les rotations autour des deux axes x et y sont notées θ_x et θ_y les pentes dans les deux directions sont définies par les variables β_x et β_y, avec :

$$\beta_x = \theta_y \qquad \beta_y = -\theta_x \tag{5-1}$$

L'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque. Ce qui se traduit par :

$$u(x,y,z) = z\beta_x(x,y) = z\theta_y(x,y)$$
$$v(x,y,z) = z\beta_y(x,y) = -z\theta_x(x,y)$$
$$w(x,y,z) = w(x,y) \tag{5-2}$$

Les expressions (5-2) permettent de découpler les champs des déplacements (u, v) de celui de la flèche (w) qui constitue, en référence aux hypothèses de Kirchoff, l'unique champ permettant de définir le comportement de la plaque.

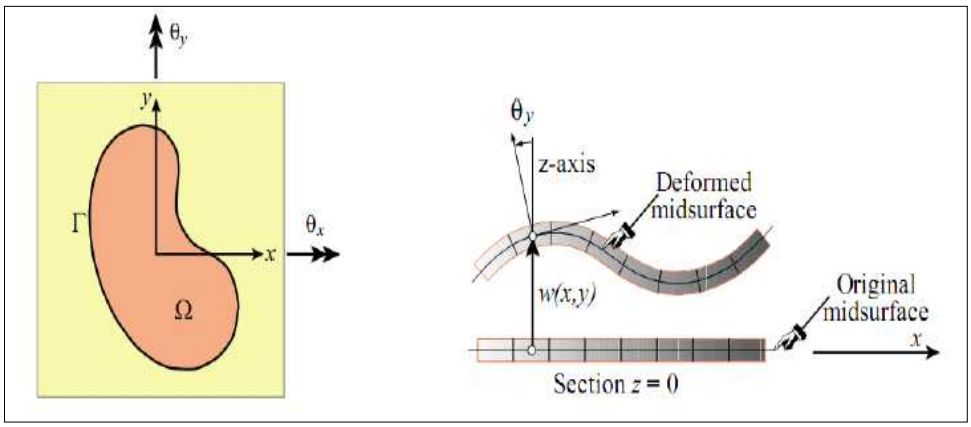


Fig.5.2 Déformation d'une plaque en flexion (Théorie de Kirchhoff)

Ainsi, les déplacements sont donnés par :

$$w(x,y,z) = w(x,y) \qquad u(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial x} \quad v(x,y,z) = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{5-3}$$

Et les rotations sont données par :

$$-\theta_x = \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_y = \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{5-4}$$

Le tenseur de Green linéarisé est alors :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z\frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \; ; \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right) = -2z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{5-5}$$

Les courbures liées aux déplacements sont données par :

$$K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad K_{xy} = \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right) = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{5-6}$$

5.2.1.3 Conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions **[82]** ont été établies par Saint Venant (1854). Leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements. Les équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2}+\frac{\partial K_{xy}}{\partial x}=2\frac{\partial K_x}{\partial y}\\
&\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2}+\frac{\partial K_{xy}}{\partial y}=2\frac{\partial K_y}{\partial x}
\end{aligned} \tag{5-7}$$

5.2.1.4 Loi de comportement

En état plan de contraintes et pour des matériaux orthotropes (FGM), l'hypothèse généralement admise pour le calcul des structures minces en FGM (poutres, plaques et coques), la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{-zE(z)}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \tag{5-8}$$

Ce qui se traduit en terme de relation "moments - courbures" par le système d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=D\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}K_x\\ K_y\\ K_{xy}\end{Bmatrix}=D\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{-\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \frac{-2\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \tag{5-9}$$

Avec $$D=\frac{1}{(1-\nu^2)}\int_{-h/2}^{+h/2}E(z)z^2dz \tag{5-10}$$

5.2.1.5 Equation d'équilibre

L'équilibre d'un élément géométrique de dimensions dx × dy est obtenu par le bilan des actions extérieures et des actions internes.

En étudiant l'équilibre d'un tronçon de plaque soumis à une charge répartie f_z (Fig.5.3) on obtient :

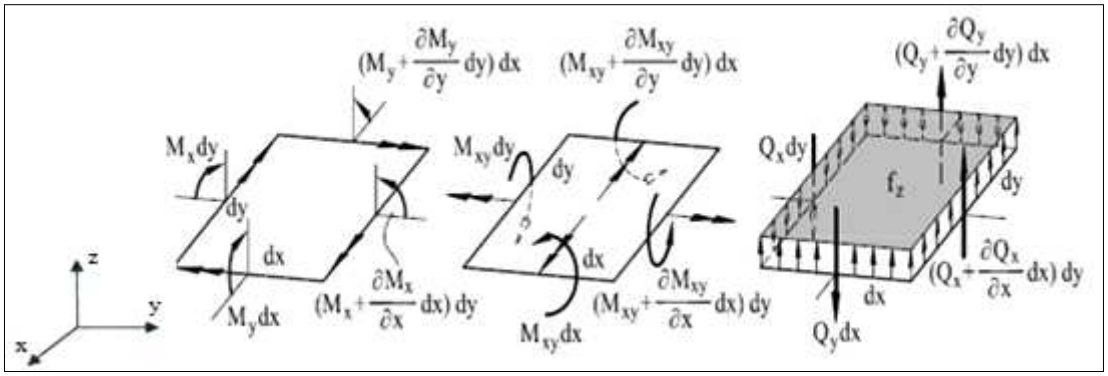


Fig.5.3 Les charges, les moments et les forces de cisaillement dans un élément de plaque

En sommant les forces par rapport à l'axe z :

$$\sum F_z = 0 \Longmapsto f_z dxdy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx - Q_x dy - Q_y dx = 0 \quad (5\text{-}11)$$

Où Q_x et Q_y sont respectivement les efforts tranchants dans les sections perpendiculaires aux axes x et y. L'expression (5-11) est simplifiée pour donner :

$$f_z + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (5\text{-}12)$$

En sommant les moments par rapport à l'axe y et x :

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy\right)dx - M_x dy - M_{xy}dx - Q_x dxdy = 0 \quad (5\text{-}13)$$

D'où après simplification :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (5\text{-}14)$$

De la même manière et en étudiant l'équilibre suivant l'axe x, on trouvera comme troisième équation d'équilibre :

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (5\text{-}15)$$

En remplaçant les valeurs des équations (5-12), (5-14) et (5-15) dans la relation établie par les équations (5-9), la condition d'équilibre se traduirait en fonction du déplacement "*w*" par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{f_z}{D} = 0 \quad (5\text{-}16)$$

5.2.1.6 Fonctions d'interpolation

Pour les mouvements de corps rigide (MCR), les courbures liées aux déplacements sont nulles :

$$K_x = 0 \qquad K_y = 0 \qquad K_{xy} = 0 \quad (5\text{-}17)$$

En remplaçant dans les équations (5-6) les courbures par leurs valeurs données par les équations (5-17) et après intégration, on obtient les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$w = a_1 - a_2 x - a_3 y \qquad \beta_x = a_2 \qquad \beta_y = a_3 \tag{5-18}$$

Avec a_2 et a_3 des paramètres représentant les rotations θ_y et θ_x du corps rigide respectivement autour des axes "y" et "x" et a_1 représentant la translation (flèche) du corps rigide le long de la normale (axe "z").

Notre élément possède quatre nœuds (les trois sommets du triangle auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif). Chacun de ces nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs des déplacements, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes *(a_1, .., a_{12})*. Les trois premières *(a_1, a_2, a_3)* sont utilisées dans les équations (5-18) pour représenter les mouvements de corps rigide.

Les neuf autres *(a_4, ..., a_{12})* sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément. Ils sont répartis sur les fonctions d'interpolation des déformations de manière à satisfaire les équations (5-7) de compatibilité cinématique.

Ainsi, les champs de déformation pour les modes supérieurs sont établis à partir du triangle de Pascal comme suit :

$$\begin{aligned} K_x &= a_4 + a_5 x + a_6 y + a_7 xy \\ K_y &= a_8 + a_9 x + a_{10} y + a_{11} xy \\ K_{xy} &= a_{12} + 2a_6 x + a_7 x^2 + 2a_9 y + a_{11} y^2 \end{aligned} \tag{5-19}$$

En remplaçant dans les équations (5-6) les courbures par leurs valeurs données par les équations (5-19) et après intégration, on obtient les champs des déplacements suivants :

$$\begin{aligned} w &= -a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2 y}{2} - a_7 \frac{x^3 y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{xy^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{y^3 x}{6} - a_{12} \frac{xy}{2} \\ \beta_x &= a_4 x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 xy + a_7 \frac{x^2 y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y &= a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8 y + a_9 xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \end{aligned} \tag{5-20}$$

Le champ final des déplacements est obtenu en additionnant les relations (5-18) et (5-20):

$$\begin{aligned} w &= a_1 - a_2 x - a_3 y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2 y}{2} - a_7 \frac{x^3 y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{xy^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - \\ & a_{11} \frac{y^3 x}{6} - a_{12} \frac{xy}{2} \\ \beta_x &= a_2 a_4 x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 xy + a_7 \frac{x^2 y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y &= a_3 + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8 y + a_9 xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \end{aligned} \tag{5-21}$$

Sous forme matricielle le champ des déplacements donné par les équations (5-21) s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)]\{a_i\} \tag{5-22}$$

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & \frac{-x^2}{2} & \frac{-x^3}{6} & \frac{-x^2y}{2} & \frac{-x^3y}{6} & \frac{-y^2}{2} & \frac{-xy^2}{2} & \frac{-y^3}{6} & \frac{-xy^3}{6} & \frac{-xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & \frac{x^2}{2} & xy & \frac{x^2y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & 0 & \frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} & y & xy & \frac{y^2}{2} & \frac{xy^2}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \tag{5-23}$$

Connaissant les coordonnées nodales (x_i, y_i) correspondant aux nœuds j (j=1,…,4) et par l'application de la relation (5-22) le vecteur des déplacements nodaux, au niveau élémentaire, est donné comme suit :

$$\{q_{pm}^e\} = \begin{bmatrix} [f(x_1,y_1)] \\ [f(x_2,y_2)] \\ [f(x_3,y_3)] \\ [f(x_4,y_4)] \end{bmatrix} \{a_i\} \tag{5-24}$$

Avec, $\{q_{pm}^e\} = \langle w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4} \rangle$

$[a_i]^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$[A_{pm}] = \begin{bmatrix} [f(x_1,y_1)] \\ [f(x_2,y_2)] \\ [f(x_3,y_3)] \\ [f(x_4,y_4)] \end{bmatrix}$: Matrice des coordonnées nodales de la plaque mince.

La forme matricielle développée de la matrice des coordonnées nodales de la plaque mince $[A_{pm}]$ est donnée en annexe.

De l'équation (5-24), on en déduit la valeur des paramètres "a_i" qui sont données par le système d'équations suivant :

$$\{a_i\} = [A_{pm}]^{-1}\{q_{pm}^e\} \tag{5-25}$$

En remplaçant les valeurs des paramètres a_i données par la relation (5-25) dans le système d'équation (5-22), on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ \beta_x(x,y) \\ B_y(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)][A_{pm}]^{-1}\{q_{pm}^e\} \tag{5-26}$$

Dans laquelle, $[N] = [f(x,y)][A_{pm}]^{-1}$ représente la matrice des fonctions d'interpolation N_i pour le cas de la plaque mince.

En remplaçant dans les équations (5-6), $w(x,y)$ par ses valeurs de l'équation (5-22), Les courbures liées aux moments prendront la forme développée suivante :

$$\{K_{pm}\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \{a_i\} \quad (5\text{-}27)$$

Ainsi, la matrice de déformation de la plaque mince est donnée comme suit :

$$[Q_{pm}(x,y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}28)$$

5.2.1.7 Matrice de rigidité élémentaire $[K_{pm}^e]$

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta\{\varepsilon_{pm}\}^T [\sigma_{pm}] dV^e \quad (5\text{-}29)$$

Sachant que :

$$\{\varepsilon_{pm}\} = [N']\{q_{pm}^e\} = [Q_{pm}(x,y)][A_{pm}]^{-1}\{q_{pm}^e\} \quad (5\text{-}30)$$

Et que : $$\{\sigma\} = [C_{pm}]\{\varepsilon_{pm}\} \quad (5\text{-}31)$$

Et en remplaçant dans l'expression (5-29) $\{\varepsilon_{pm}\}$ et $\{\sigma_{pm}\}$ par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (5-30) et (5-31), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta\{q_{pm}^e\}^T \int_A [Q_{pm}(x,y)]^T [A_{pm}{}^{-1}]^T [C_{pm}] [Q_{pm}(x,y)][A_{pm}]^{-1}\{q_{pm}^e\} dA \quad (5\text{-}32)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (5-32) est la suivante :

$$[K_{pm}^e] = \int_A [Q_{pm}(x,y)]^T [A_{pm}{}^{-1}]^T [C_{pm}][Q_{pm}(x,y)][A_{pm}]^{-1} dA \quad (5\text{-}33)$$

L'expression (5-33) peut, s'écrire :

$$[K_{pm}^e] = [A_{pm}{}^{-1}]^T \int_A [Q_{pm}(x,y)]^T [C_{pm}][Q_{pm}(x,y)] dA\, [A_{pm}]^{-1} = [A_{pm}{}^{-1}]^T [K_0^{pm}][A_{pm}]^{-1} \quad (5\text{-}34)$$

Où $$[C_{pm}] = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z^2 dz}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

L'évaluation de l'expression $[K_0^{pm}]$ est établie par intégration analytique des différentes composantes résultant du produit matriciel $[Q_{pm}(x,y)]^T [C_{pm}][Q_{pm}(x,y)]$. Dont les expressions prennent la forme $H_{\alpha x \beta} = C x^\alpha y^\beta$. La matrice $[K_0^{pm}]$ relative à l'élément plaque mince est donnée en annexe.

Enfin la matrice de rigidité élémentaire à prendre en considération au niveau de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, est celle obtenue après condensation de la matrice $[K_{pm}^{e}]$.Cette condensation statique concerne les degrés de liberté relatifs au quatrième nœud fictif.

5.2.2 Elément de plaque épaisse « Pep43 »

5.2.2.1 Caractéristiques

C'est un élément fini de plaque épaisse triangulaire auquel on a rajouté un quatrième nœud fictif positionné à l'extérieur et loin du triangle (voir Fig. 5.4). Cette position, à l'extérieur, est choisie pour éviter l'assouplissement de la matrice de rigidité entraînant une surestimation des déplacements nodaux.

Chaque nœud possède trois degrés de liberté : la flèches w_i et les rotations θ_{xi} et θ_{yi}.

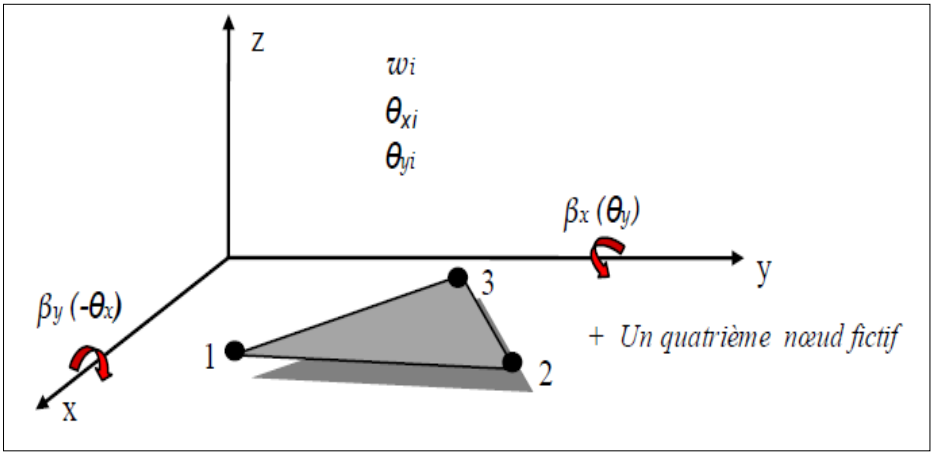


Fig.5.4 Elément triangulaire de plaque épaisse avec trois degrés de liberté par nœud

Les hypothèses de cette formulation sont celles de la théorie des plaques épaisses (théorie de Reissner-Mindlin).

5.2.2.2 Cinématique

En considérant les hypothèses de la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques, les déplacements en un point du domaine dans un système d'axes cartésien sont établis comme suit :

$$u(x,y,z) = z\beta_x(x,y) = z\theta_y(x,y)$$
$$v(x,y,z) = z\beta_y(x,y) = -z\theta_x(x,y)$$
$$w(x,y,z) = w(x,y) \qquad (5\text{-}35)$$

Il est à noter que l'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque.

Et les rotations sont données par :

$$-\theta_x = \beta_y \qquad \theta_y = \beta_x \tag{5-36}$$

Le tenseur de déformation infinitésimal est alors :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z\frac{\partial \beta_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z\frac{\partial \beta_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{5-37}$$

Les courbures sont données par :

$$K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \qquad K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \qquad K_{xy} = \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right) \tag{5-38}$$

5.2.2.3 Loi de comportement

En état plan de contraintes et pour des matériaux à gradient fonctionnel, la relation "contraintes - déformations" selon la théorie de Reissner-Mindlin est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{5-39}$$

- k : le coefficient de réduction de la section pris généralement égal à 5/6.

-D est donnée dans l'équation (5-10).

-M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y représentent respectivement les moments de flexion, le moment de torsion et les efforts tranchants par unité de longueur.

5.2.2.4 Fonctions d'interpolation

Pour les mouvements de corps rigide (MCR), les courbures liées aux moments sont nulles :

$$K_x = 0, \qquad K_y = 0 \qquad K_{xy} = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0 \tag{5-40}$$

En reportant (5-37) et (5-38) dans (5-40) et après intégration, on déduit les champs des déplacements représentant les modes à déformation nulle qui se présentent comme suit :

$$w = a_1 - a_2 x - a_3 y \qquad \beta_x = a_2 \qquad \beta_y = a_3 \tag{5-41}$$

a_2 et a_3 des paramètres représentant les rotations θ_y et θ_x du corps rigide respectivement autour des axes "y" et "x" et a_1 représentant la translation (flèche) du corps rigide le long de la normale (axe "z").

Notre élément possède quatre nœuds, chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs des déplacements, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes *(a_1, .., a_{12})*. Les trois premières *(a_1,a_2, a_3)* sont utilisées dans les équations (5-41) pour représenter les modes à déformation nulle.

Les neuf autres (a_4, ..., a_{12}) sont utilisés dans le modèle de déformation de l'élément.

Ils sont répartis sur les fonctions d'interpolation des déformations de manière à satisfaire les équations (5-7) de compatibilité cinématique.

Les champs de déformation pour les modes supérieurs sont établis à partir du triangle de Pascal comme suit :

$$\begin{aligned} K_x &= a_4 + a_5 y + a_9 \frac{y}{2} \\ K_y &= a_6 + a_7 x + a_{10} \frac{x}{2} \\ K_{xy} &= a_8 + a_9 x + a_{10} y \\ \gamma_{xz} &= a_{11} - a_7 y^2 \\ \gamma_{yz} &= a_{12} - a_5 x^2 \end{aligned} \tag{5-42}$$

Après intégration des équations (5-42) et leur addition aux déplacements donnés dans (5-41), le champ final des déplacements devient :

$$w = a_1 - a_2 x - a_3 y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2 y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{x y^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} - a_9 \frac{x^2 y}{4} - a_{10} \frac{x y^2}{4} - a_{11} \frac{x}{2} - a_{12} \frac{y}{2}$$

$$\begin{aligned} \beta_x &= a_2 + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{xy}{2} + a_{10} \frac{y^2}{4} + \frac{a_{11}}{2} \\ \beta_y &= a_3 - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} + a_9 \frac{x^2}{4} + a_{10} \frac{xy}{2} + \frac{a_{12}}{2} \end{aligned} \tag{5-43}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)]\{a_i\} \tag{5-44}$$

Le vecteur des déplacements nodaux, au niveau élémentaire, devient :

$$\{q_{pe}^{e}\} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{a_i\} \tag{5-45}$$

Où, $\{q_{pe}^{e}\} = \langle w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4} \rangle$

$[a_i]^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$[A_{pe}] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix}$: Matrice des coordonnées nodales de la plaque épaisse.

La matrice des coordonnées nodales de la plaque épaisse développée $[A_{pe}]$ est donnée en annexe.

De l'équation (5-45), on en déduit les valeurs des paramètres $"a_i"$ données par le système d'équations suivant :

$$\{a_i\} = [A_{pe}]^{-1} \{q_{pe}^{e}\} \tag{5-46}$$

En remplaçant les valeurs des paramètres a_i données par la relation (5-46) dans le système d'équation (5-44), on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ \beta_x(x,y) \\ B_y(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)][A_{pe}]^{-1} \{q_{pe}^{e}\} \tag{5-47}$$

Dans laquelle, $[N] = [f(x,y)][A_{pe}]^{-1}$ représente la matrice des fonctions d'interpolation N_i pour le cas de la plaque épaisse.

En remplaçant dans les équations (5-37), $w(x,y)$ par ses expressions de l'équation (5-47), Les courbures prendront la forme développée suivante :

$$\{K_{pe}\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ y_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a_i\} =$$

$$[Q_{pe}(x,y)]\{a_i\} \tag{5-48}$$

Ainsi, la matrice de déformation prend la forme suivante :

$$[Q_{pe}(x,y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-49}$$

5.2.2.5 Matrice de rigidité élémentaire $[K_{pe}^e]$

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta\{\varepsilon_{pe}\}^T [\sigma_{pe}] dV^e \tag{5-50}$$

$$\{\varepsilon_{pe}\} = [N]'\{q_{pe}^e\} = [Q_{pe}(x,y)][A_{pe}]^{-1}\{q_{pe}^e\} \tag{5-51}$$

$$\{\sigma_{pe}\} = [C_{pe}]\{\varepsilon_{pe}\} \tag{5-52}$$

Et en remplaçant dans l'expression (5-50) $\{\varepsilon_{pe}\}$ et $\{\sigma_{pe}\}$ par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (5-51) et (5-52), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta\{q_{pe}^e\}^T \int_A [Q_{pe}(x,y)]^T [A_{pe}{}^{-1}]^T [C_{pe}] [Q_{pe}(x,y)][A_{pe}]^{-1}\{q_{pe}^e\} dA \tag{5-53}$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (5-53) s'exprime :

$$[K_{pe}^e] = \int_A [Q_{pe}(x,y)]^T [A_{pe}{}^{-1}]^T [C_{pe}][Q_{pe}(x,y)][A_{pe}]^{-1} dA \tag{5-54}$$

L'expression (5-54) peut, s'écrire :

$$[K_{pe}^e] = [A_{pe}{}^{-1}]^T \int_A [Q_{pe}(x,y)]^T [C_{pe}][Q_{pe}(x,y)] dA\, [A_{pe}]^{-1} = [A_{pe}{}^{-1}]^T [K_0^{pe}][A_{pe}]^{-1} \tag{5-55}$$

Où
$$[C_{pe}] = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z^2 dz}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2} \end{bmatrix}$$

La matrice relative $[K_0^{pe}]$ à l'élément "plaque épaisse" est donnée en annexe.

5.3 Formulation de l'élément de membrane

5.3.1 Elément membranaire « T43 »

5.3.1.1 Caractéristiques

Cet élément de membrane, baptisé T43 n'est autre que l'élément de membrane triangulaire développé par **[103]** avec ses quatre nœuds et ses trois degrés de liberté par nœud (les deux translations u et v et la rotation autour de la normale « drilling rotation » θ_z), voir (Fig.5.5).

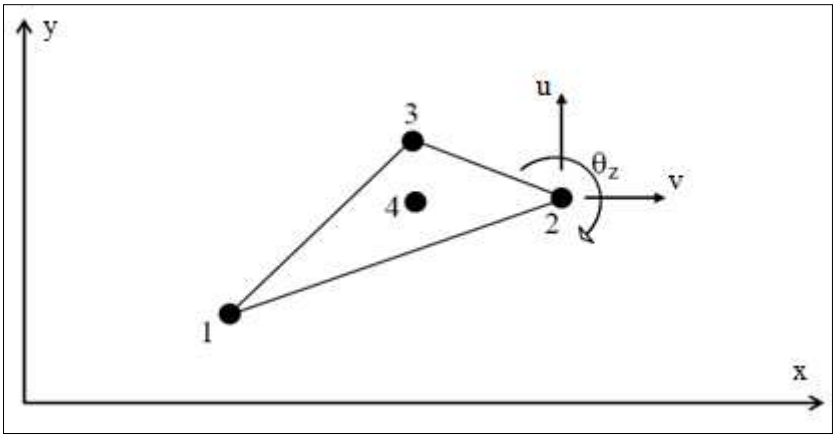


Fig.5.5 Elément T43 ; Triangle avec quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud (deux translations u et v et la rotation θ_z)

Cet élément a été développé sur la base des éléments suivants :

* Cinématique de base :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5-56}$$

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5-57}$$

* Champs des déplacements :

$$\begin{cases} u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ v = a_2 + a_3 x + a_5 x + a_7 y + a_8 xy - a_{10} yx^2 - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \\ \theta_z = a_3 - a_6 \frac{x}{2} + a_8 \frac{y}{2} - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{cases} \tag{5-58}$$

* Matrice des coordonnées nodales :

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & y & xy & 0 & 0 & y^2 & xy^2 & x^2y^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & x & 0 & y & xy & 0 & -x^2y & -x^3y^2 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-x}{2} & 0 & \frac{y}{2} & -y & -2xy & -3x^2y^2 & x \end{bmatrix} \tag{5-59}$$

$$\{q^e_{T43}\} = \begin{bmatrix} [f(x_1,y_1)] \\ [f(x_2,y_2)] \\ [f(x_3,y_3)] \\ [f(x_4,y_4)] \end{bmatrix} \{a_i\} \tag{5-60}$$

Avec, $\{q^e_{T43}\} = \langle u_1, v_1, \theta_{z1}, u_2, v_2, \theta_{z2}, u_3, v_3, \theta_{z3}, u_4, v_4, \theta_{z4} \rangle$

$[a_i]^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$

$[A_{T43}] = \begin{bmatrix} [f(x_1,y_1)] \\ [f(x_2,y_2)] \\ [f(x_3,y_3)] \\ [f(x_4,y_4)] \end{bmatrix}$: Matrice des coordonnées nodales de l'élément membranaire.

Le développement de la matrice des coordonnées nodales pour l'élément fini « T43 » est détaillé en annexe.

* Matrice des coordonnées nodales :

$$\{a_i\} = [A_{T43}]^{-1}\{q^e_{T43}\} \tag{5-61}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ \theta_z(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)][A_{T43}]^{-1}\{q^e_{T43}\} \tag{5-62}$$

Dans laquelle,$[N] = [f(x,y)][A_{T43}]^{-1}$ représente la matrice des fonctions d'interpolation N_i de l'élément membranaire.

* Matrice des déformations :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \tag{5-63}$$

$$\{\varepsilon_{T43}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2yx^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x & 0 & y & 2y & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \tag{5-64}$$

Ainsi, la matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q_{T43}(x,y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2yx^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x & 0 & y & 2y & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \tag{5-65}$$

5.3.1.2 Loi de comportement

En état plan de contraintes et pour des matériaux à gradient fonctionnel, la loi de comportement s'écrit comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5-66}$$

5.3.1.3 Matrice de rigidité $[K^e_{T43}]$

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta\{\varepsilon_{T43}\}^T [\sigma_{T43}] dV^e \tag{5-67}$$

Sachant que :

$$\{\varepsilon_{T43}\} = [N']\{q^e_{T43}\} = [Q_{T43}(x,y)][A_{T43}]^{-1}\{q^e_{T43}\} \quad (5\text{-}68)$$

Et que :

$$\{\sigma_{T43}\} = [C_{T43}]\{\varepsilon_{T43}\} \quad (5\text{-}68)$$

Et en remplaçant dans l'expression (5-67) $\{\varepsilon_{T43}\}$ et $\{\sigma_{T43}\}$ par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (5-68) et (5-69), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta\{q^e_{T43}\}^T \int_A [Q_{T43}(x,y)]^T \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^T [C_{T43}]\,[Q_{T43}(x,y)][A_{T43}]^{-1}\{q^e_{T43}\}dA \quad (5\text{-}70)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (5-70) est la suivante :

$$[K^e_{T43}] = \int_A [Q_{T43}(x,y)]^T \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^T [C_{T43}][Q_{T43}(x,y)][A_{T43}]^{-1}dA \quad (5\text{-}71)$$

L'expression (5-71) peut, s'écrire :

$$[K^e_{T43}] = \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^T \int_A [Q_{T43}(x,y)]^T [C_{T43}][Q_{T43}(x,y)]dA\,[A_{T43}]^{-1}\left[A_{T43}{}^{-1}\right]^T [K_0^{T43}][A_{T43}]^{-1} \quad (5\text{-}72)$$

Avec $$[C_{T43}] = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z)dz}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Le développement de la matrice $[K_0^{T43}]$ de l'élément membranaire est donné en annexe.

5.4 Formulation de l'élément de couplage

5.4.1 Matrice de rigidité de couplage membrane-flexion (coque mince) $\left[K^e_{cpm}\right]$

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{Ve} \delta\{\varepsilon_{T43}\}^T \left[\sigma_{pm}\right]dV^e \quad (5\text{-}73)$$

Sachant que : $$\{\varepsilon_{T43}\} = [N']\{q^e_{T43}\} = [Q_{T43}(x,y)][A_{T43}]^{-1}\{q^e_{T43}\} \quad (5\text{-}74)$$

Et que : $$\left\{\sigma_{pm}\right\} = \left[C_{cpm}\right]\left\{\varepsilon_{pm}\right\} \quad (5\text{-}75)$$

Et en remplaçant dans l'expression (5-73) $\{\varepsilon_{T43}\}$ et $\left\{\sigma_{pm}\right\}$ par leurs expressions données, respectivement dans les équations (5-74) et (5-75), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta\{q^e_{T43}\}^T \int_A [Q_{T43}(x,y)]^T \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^T \left[C_{cpm}\right]\left[Q_{pm}(x,y)\right]\left[A_{pm}\right]^{-1}\left\{q^e_{pm}\right\}dA \quad (5\text{-}76)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (5-76) est la suivante :

$$\left[K^e_{cpm}\right] = \int_A [Q_{T43}(x,y)]^T \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^T \left[C_{cpm}\right]\left[Q_{pm}(x,y)\right]\left[A_{pm}\right]^{-1}dA \quad (5\text{-}77)$$

L'expression (5-77) peut, s'écrire :

$$\left[K_{cpm}^{e}\right] = \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^{T} \int_{A} [Q_{T43}(x,y)]^{T} \left[C_{cpm}\right] \left[Q_{pm}(x,y)\right] dA \left[A_{pm}\right]^{-1} = \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^{T} \left[K_{0}^{cpm}\right] \left[A_{pm}\right]^{-1} \quad (5\text{-}78)$$

Avec $$\left[C_{cpm}\right] = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z dz}{1-\nu^{2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice $\left[K_{0}^{cpm}\right]$ relative à l'élément de couplage (coque mince) est donnée en annexe.

5.4.2 Matrice de rigidité de couplage membrane-flexion (coque épaisse) $\left[K_{cpe}^{e}\right]$

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^{e} = \int_{V^{e}} \delta\{\varepsilon_{T43}\}^{T} \left[\sigma_{pe}\right] dV^{e} \quad (5\text{-}79)$$

Sachant que : $$\{\varepsilon_{T43}\} = [N']\{q_{T43}^{e}\} = [Q_{T43}(x,y)][A_{T43}]^{-1}\{q_{T43}^{e}\} \quad (5\text{-}80)$$

Et que : $$\left\{\sigma_{pe}\right\} = \left[C_{cpe}\right]\left\{\varepsilon_{pe}\right\} \quad (5\text{-}81)$$

Et en remplaçant dans l'expression (5-79) $\{\varepsilon_{T43}\}$ et $\left\{\sigma_{pe}\right\}$ par leurs expressions données, respectivement dans les équations (5-80) et (5-81), on obtient :

$$(\delta W_{int})^{e} = \delta\{q_{T43}^{e}\}^{T} \int_{A} [Q_{T43}(x,y)]^{T} \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^{T} \left[C_{cpe}\right] \left[Q_{pe}(x,y)\right] \left[A_{pe}\right]^{-1} \{q_{pe}^{e}\} dA \quad (5\text{-}82)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (5-82) est la suivante :

$$\left[K_{cpe}^{e}\right] = \int_{A} [Q_{T43}(x,y)]^{T} \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^{T} \left[C_{cpe}\right] \left[Q_{pe}(x,y)\right] \left[A_{pe}\right]^{-1} dA \quad (5\text{-}83)$$

L'expression (5-83) peut, s'écrire :

$$\left[K_{cpe}^{e}\right] = \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^{T} \int_{A} [Q_{T43}(x,y)]^{T} \left[C_{cpe}\right] \left[Q_{pe}(x,y)\right] dA \left[A_{pe}\right]^{-1} = \left[A_{T43}{}^{-1}\right]^{T} \left[K_{0}^{cpe}\right] \left[A_{pe}\right]^{-1} \quad (5\text{-}84)$$

Où $$\left[C_{cpe}\right] = \frac{\int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z dz}{1-\nu^{2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^{2}} \end{bmatrix}$$

La matrice $\left[K_{0}^{cpe}\right]$ relative à l'élément de couplage (coque épaisse) est donnée en annexe.

5.5 Formulation des éléments de coque FGM

Maintenant on va développer la formulation des éléments de coques dont les matrices de rigidité élémentaires sont obtenues en superposant la matrice prenant en compte l'effet de flexion à une matrice prenant en compte l'effet de membrane et une matrice de couplage.

Les éléments utilisés pour ce but sont ceux développés précédemment :

- Utilisation de l'élément T43, pour ce qui est de la rigidité prenant en compte l'effet de membrane,
- Utilisation de l'élément plaque mince, pour ce qui de la rigidité prenant en compte l'effet de flexion sans cisaillement transversal (pour la construction des éléments de coque mince),
- Utilisation de l'élément plaque épaisse, pour ce qui de la rigidité prenant en compte l'effet de flexion avec cisaillement transversal (pour la construction des éléments de coque épaisse),
- Utilisation de l'élément de couplage (cpm pour la coque mince, cpe pour la coque épaisse).

La combinaison de tous ces éléments permet de définir deux éléments de coque :

Le premier est un élément destiné pour discrétiser les structures épaisses ayant des comportements en cisaillement dominants mais qui sont également bien adaptés au calcul des structures minces. Il s'agit de :

- L'élément de coque baptisé « **C.ep43** », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles d'élément de plaque épaisse, de membrane «T43 » et d'élément de couplage.

Le deuxième est un élément destiné pour discrétiser les structures minces ayant des comportements flexionnels dominants. Il s'agit de :

- L'élément de coque baptisé « C.mi43 », dont la matrice de rigidité est structurée autour de celles d'élément de plaque mince, de membrane «T43 » et d'élément de couplage.

L'élément de coque peut avoir une orientation quelconque dans le repère global XYZ. Par contre l'élément plan est défini dans un repère local xyz (Fig.5.6)

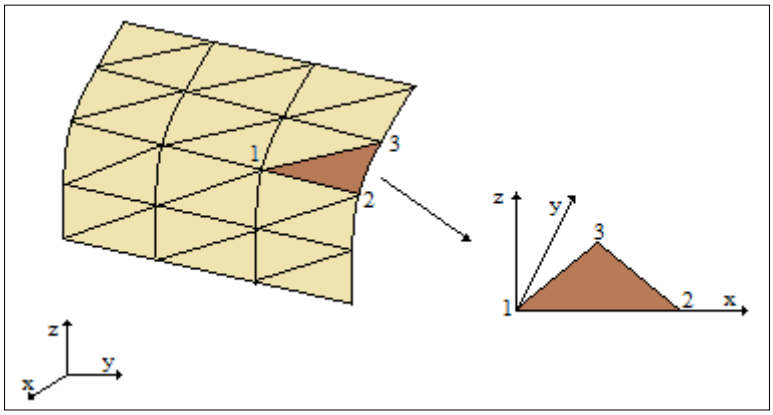
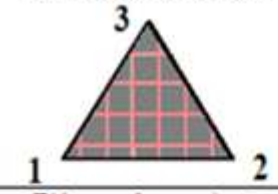
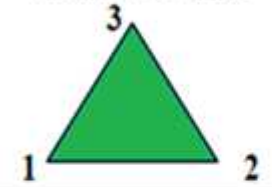
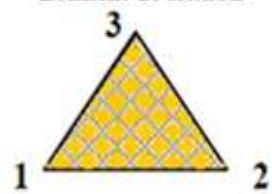
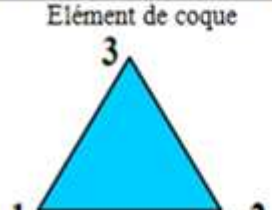


Fig.5.6 L'élément de plaque par rapport aux deux repères (global et local)

* Le passage du repère local au repère global est établi par le biais de la matrice de rotation $[R_0]$ comme suit :

$$\langle \delta U \rangle [K_e]\{u\} = \langle \delta U \rangle [R_o]^T [K_e][R_o]\{U\} \tag{5-85}$$

Tableau 5.1 Modes de construction des éléments de coque

Elément de membrane 	**9DDL**	$\{u_1\ v_1\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ \theta_{z2}\ u_3\ v_3\ \theta_{z3}\}^T$
Elément de couplage 	**18DDL**	$\begin{Bmatrix} u_1\ v_1\ w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ \theta_{z1}\ u_2\ v_2\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ \theta_{z2} \\ u_3\ v_3\ w_3\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}^T$
Elément de flexion 	**9DDL**	$\{w_1\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ w_2\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\}^T$
Elément de coque 	**18DDL**	**1-C.ML43** **2-C.EP.43**

* L'éclatement des termes de rigidité à l'intérieur de la matrice de rigidité de l'élément de coque (18x18) au niveau élémentaire avant assemblage est schématisé sur (Fig.5.7).

Pour ce qui est des éléments de coques « **C.mi43**» et « **C.ep43** » la difficulté liée à la rigidité suivant θ_z est levée dans la formulation de l'élément membranaire en introduisant la rotation autour de la normale « drilling rotation » dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire correspondante.

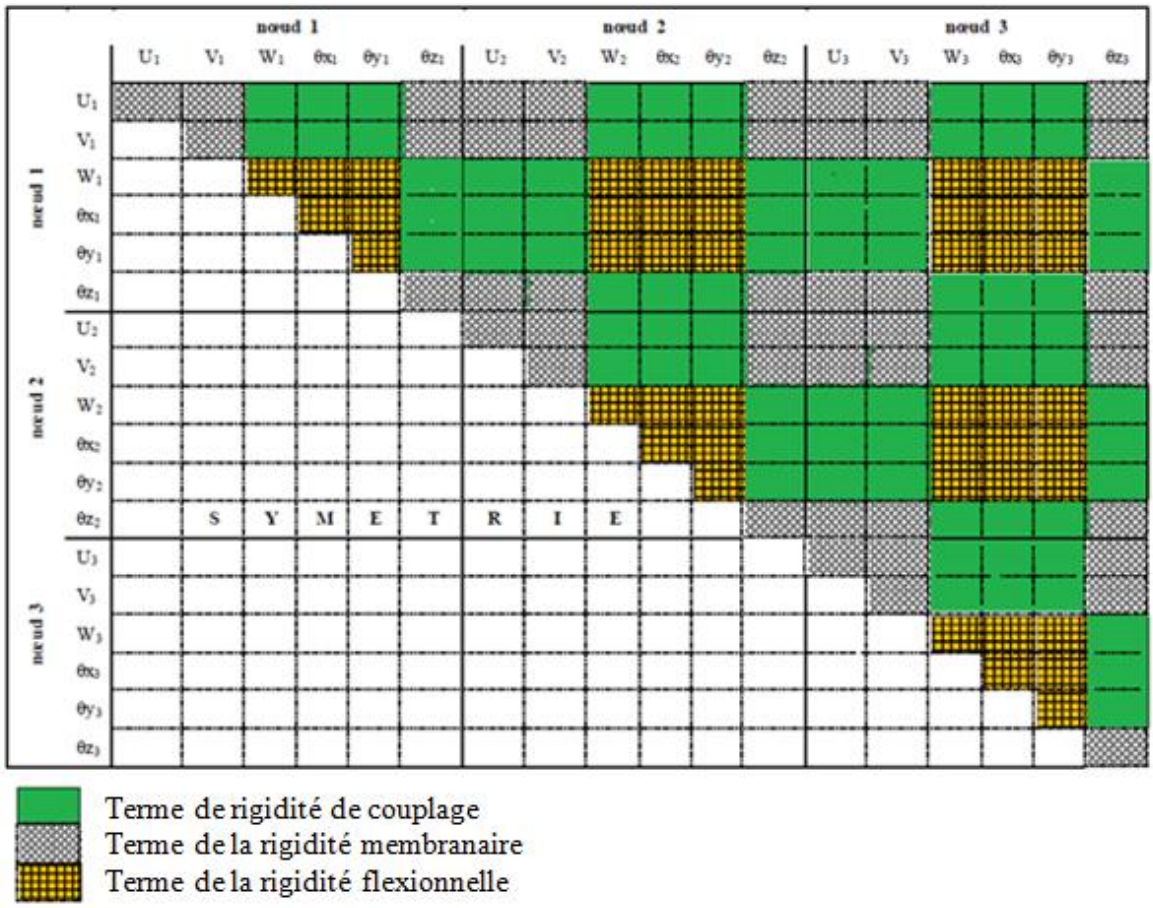


Fig.5.7 Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque $[K_e]$ au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales

5.6 Test de validation

Pour valider nos éléments vis-à-vis des comportements membranaires et flexionnels, on les a soumis à un ensemble de cas tests. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, à la solution de référence selon la théorie des poutres.

5.6.1 Coque mince

5.6.1.1 Validation vis-à-vis du comportement membranaire

Considérons une coque FGM (Fig.5.8) d'épaisseur *h=0.1m* de longueur L=*10m* et de largeur *b=1m*. Cette dernière est constituée d'un mélange de deux matériaux distincts (métal et céramique) et elle est sollicitée à la traction par une charge *P=0.1Pa*. Les coordonnées x et y sont suivant le plan et l'axe z est dirigé selon l'épaisseur. La surface supérieure est faite entièrement en céramique tandis que celle inférieure est en métal.

Les propriétés du matériau de la céramique sont $E_c = 1.2E6\ GPa, \nu_c = 0$ et celles du métal sont $E_m = \frac{E_c}{2}$, $\nu_m = 0$

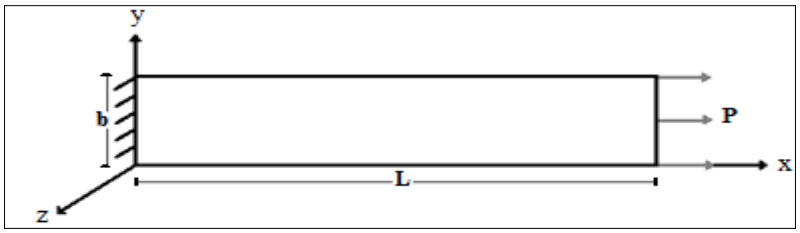


Fig.5.8 Coque-consol FGM en traction

Tableau 5.2 Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon T43, et la théorie des poutres minces

Paramètre du matériau	Solution selon T43	Solution selon la théorie des poutres minces	La flèche w
0	8,59E-06	8,33E-06	0,00E+00
1	1,15E-05	1,15E-05	3,82E-04
2	1,29E-05	1,31E-05	4,64E-04
3	1,37E-05	1,39E-05	4,60E-04
4	1,43E-05	1,44E-05	4,34E-04
5	1,47E-05	1,47E-05	4,05E-04

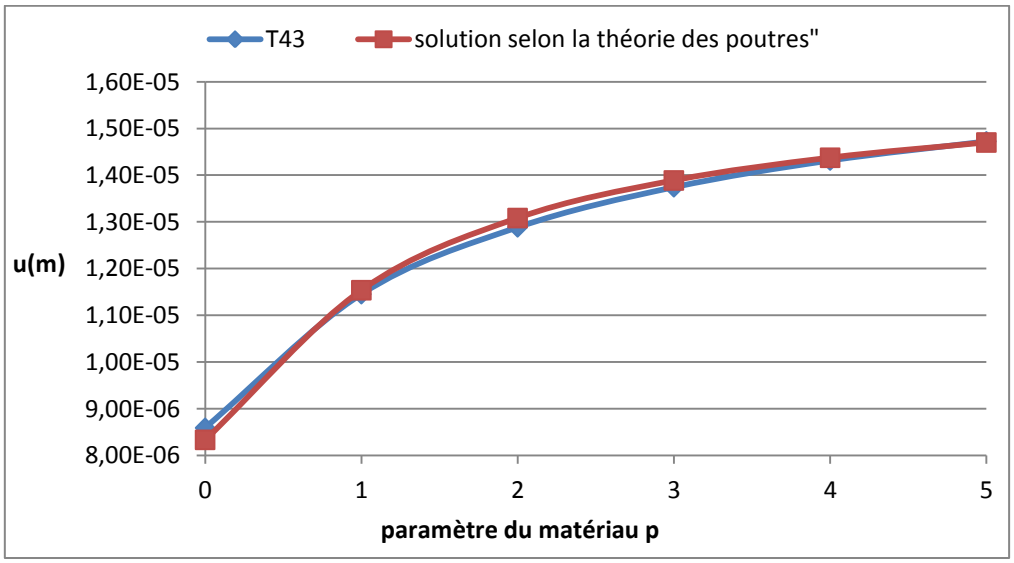


Fig.5.9 Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

5.6.1.2 Coque-console en FGM soumise à une charge ponctuelle à son extrémité

On reprend pour ce cas test l'exemple précédent avec les mêmes données géométriques et mécaniques du matériau, mais cette fois ci la coque FGM est sollicitée à la flexion par une charge *P=0.1Pa* (Fig.5.10).

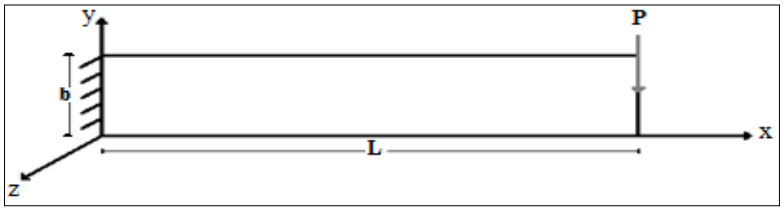


Fig.5.10 Coque-consol en FGM soumise à une charge ponctuelle

Tableau 5.3 Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon C.mi43, et la théorie des poutres minces

Paramètre du matériau	Solution selon C.mi43	Solution selon la théorie des poutres minces	Le déplacement u
0	3,42E-01	3,33E-01	0,00E+00
1	4,57E-01	4,62E-01	-3,86E-04
2	4,89E-01	4,99E-01	-4,68E-04
3	5,07E-01	5,15E-01	-4,64E-04
4	5,21E-01	5,25E-01	-4,39E-04
5	5,33E-01	5,34E-01	-4,09E-04

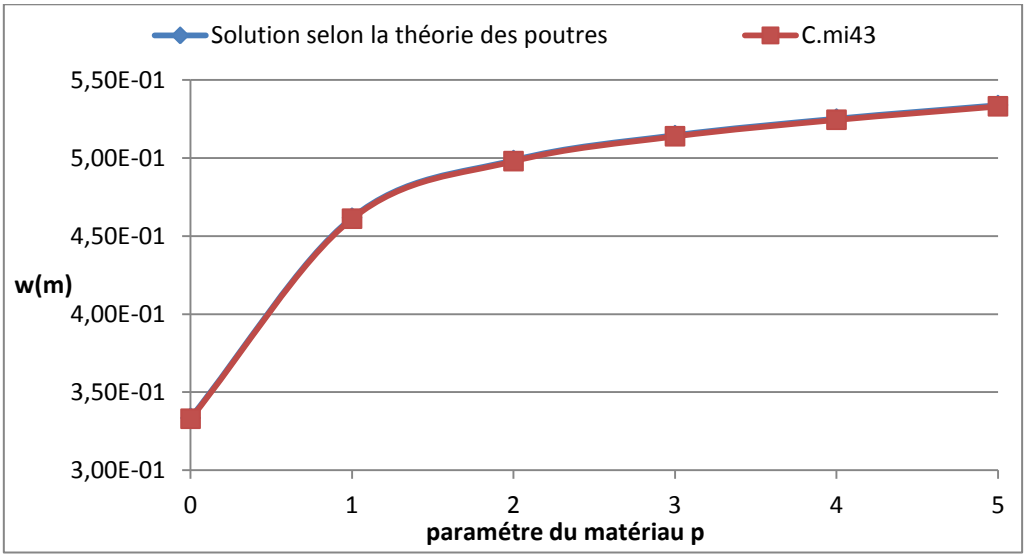


Fig.5.11 Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

5.6.2 Coque épaisse

5.6.2.1 Validation vis-à-vis du comportement membranaire

Il s'agit pour ce test, d'une coque épaisse en FGM sollicité à la traction (Fig.5.8). Les données géométriques et mécaniques de la coque sont données sur le tableau 5.4.

Tableau 5.4 Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la coque FGM

Longueur	10m
Epaisseur	1m
E_c	1,2E6 GPa
E_m	$\frac{E_c}{2}$
Coefficient de Poisson	0
Chargement	0,1 Pa

Tableau 5.5 Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon T43, et la théorie des poutres épaisses

Paramètre du matériau	Solution selon T43	Solution selon la théorie des poutres épaisses	La flèche w
0	8,75E-07	8,33E-07	0,00E+00
1	1,17E-06	1,15E-06	3,85E-06
2	1,31E-06	1,31E-06	4,67E-06
3	1,40E-06	1,39E-06	4,63E-06
4	1,46E-06	1,44E-06	4,38E-06
5	1,50E-06	1,47E-06	4,08E-06

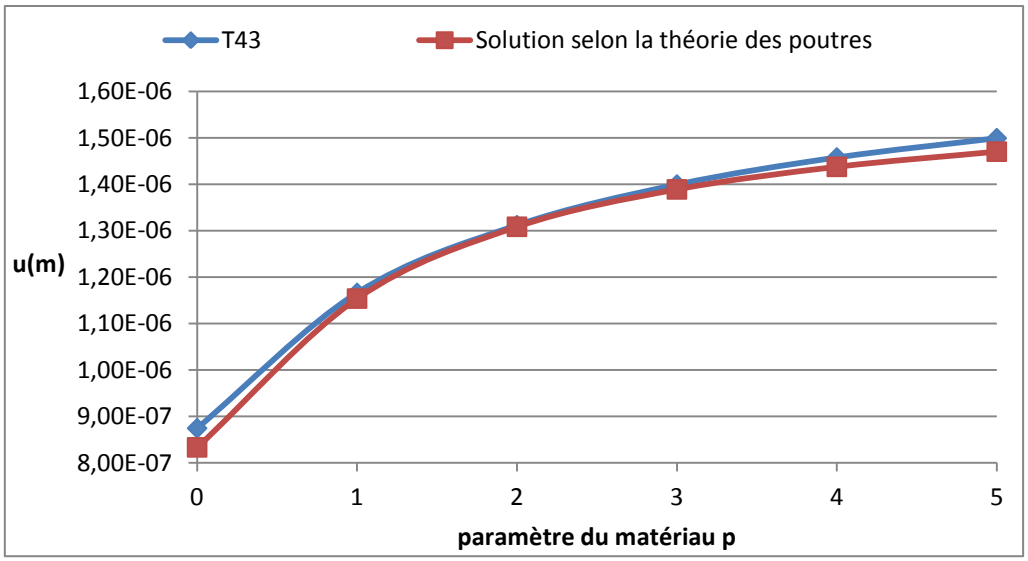


Fig.5.12 Déplacement u au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

5.6.2.2 Validation vis-à-vis du comportement flexionnel

On reprend l'exemple précédent avec les mêmes données géométriques et mécaniques du matériau, la coque FGM est sollicitée à la flexion (Fig.5.10).

Tableau 5.6 Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau selon C.ep43, et la théorie des poutres épaisses

Paramètre du matériau	Solution selon C.ep43	Solution selon la théorie des poutres épaisses	Le déplacement u
0	3,48E-4	3,35E-04	0,00E+00
1	4,64E-4	4,64E-04	3,85E-06
2	4,98E-4	5,02E-04	4,67E-06
3	5,16E-4	5,18E-04	4,63E-06
4	5,30E-4	5,29E-04	4,38E-06
5	5,42E-4	5,37E-04	4,08E-06

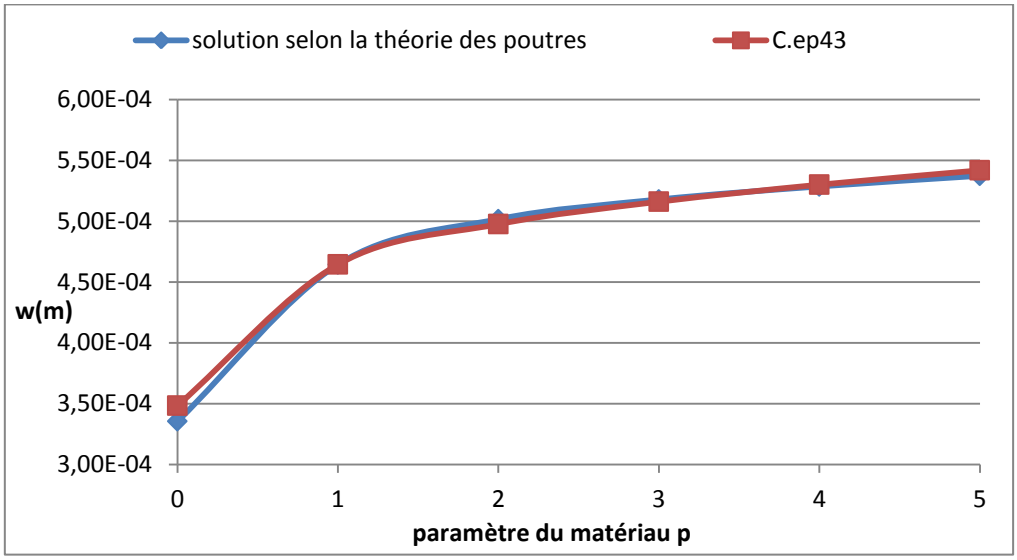


Fig.5.13 Déplacement w au point de coordonnées (10,0.5) en fonction des différents paramètres du matériau

Les deux tableaux 5.2 et 5.5 et les graphes des figures 5.9 et 5.12 représentent le déplacement u à l'extrémité de la coque FGM mince et épaisse, respectivement en fonction des différents paramètres du matériau, et la comparaison du comportement de l'élément T43, par rapport à la solution de référence (selon la théorie des poutres minces et épaisses, respectivement).

Les tableaux 5.3 et 5.6 et les figures 5.11 et 5.13 regroupent les résultats du déplacement w à l'extrémité de la coque FGM mince et épaisse, respectivement en fonction des différents paramètres du matériau, la comparaison du comportement de cet élément avec ceux obtenues par la solution de référence (selon la théorie des poutres minces et épaisses, respectivement) a été faite.

On voit que les deux déplacements d'une coque entièrement en céramique est moins importante que celle d'une coque FGM, cela est dû au fait que les valeurs les plus élevées de p correspondent à haute portion de métal, ainsi les déplacements axial et transversal augmentent quand l'indice matériel p augmente.

On remarque aussi que le comportement très performant de nos éléments, cela est apparait dans la comparaison de ces résultats avec les solutions selon la théorie des poutres, soit pour le traitement des aspects de dilatation, des aspects de flexion et des aspects de flexion avec cisaillement transversale.

5.6.3 Une coque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentré ou répartie

Dans cet exemple, les résultats numériques pour la flexion d'une coque carrée en FGM sont présentés pour démontrer la validité de l'approche qu'on a considéré (formulation d'éléments de coques FGM à base triangulaire). C'est supposé que la coque FGM se compose d'une céramique (alumine) et d'un métal (aluminium), (Fig.5.14), la coque FGM soumis soit à une charge uniformément répartie q_0, ou à une charge concentrée F, au centre de la coque . En effet leur formulation repose sur la théorie classique des plaques minces.

Céramique (alumina) :$E_c = 380$ GPa, métal (aluminum) : $E_c = 70$ GPa, $\nu_c = \nu_m = 0.3$.

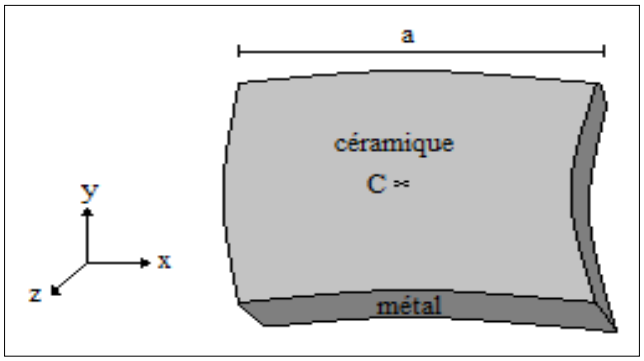


Fig.5.14 Coque en FGM

Les résultats des déplacements non dimensionnels au centre (w_c) d'une coque FGM soumise à une charge concentré F et charge répartie q_0 sont normalisés respectivement par les équations suivantes :

$$\frac{\bar{w}_c\, D}{Fa^2} \times 10^3 \qquad \frac{\bar{w}_c\, D}{q_0 a^4} \times 10^3,\ D = \frac{1}{(1-\nu^2)} \int_{-h/2}^{+h/2} E(z) z^2 dz$$

$\bar{w}_c$: Le déplacement au centre de la coque FGM

a : La longueur du côté,

Les deux tableaux 5.7 et 5.8 regroupent les déplacements non dimensionnels au centre de la coque FGM, soumise à une charge concentré F et à une charge répartie q_0 , respectivement, pour différentes valeurs du paramètre du matériau et pour différents maillage.

Les résultats concernant les déplacements non dimensionnels au centre de la coque FGM sont en bon accord avec les valeurs données par Li et *al.* **[104]**, elles montrent une convergence rapide du modèle vers les valeurs de référence pour les deux chargements et pour toutes les valeurs du paramètre du matériau p.

Tableau 5.7 Les déplacements non dimensionnels au centre d'une coque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge concentrée

Maillage	P=0	P=1	P=2	P=3	P=10	métal
2x2	2,0245	3,4527	4,0253	4,3770	5,9299	11,0012
4x4	2,1035	3,7243	4,4402	4,8400	6,3482	11,4187
8x8	2,1365	3,7822	4,5049	4,9097	6,4480	11,5985
16x16	2,1392	3,7794	4,4961	4,8995	6,4459	11,6129
Li et *al*. [104]	2,1371	4,2876	5,4947	6,0370	7,1333	11,602

Tableau 5.8 Les déplacements non dimensionnels au centre d'une coque carrée en FGM simplement appuyée soumise à une charge répartie

Maillage	P=0	P=1	P=2	P=3	P=10	métal
2x2	0,5061	0,8631	1,0063	1,0942	1,4824	2,7475
4x4	0,6985	1,2316	1,4640	1,5953	2,1012	3,7920
8x8	0,7391	1,2968	1,5357	1,6727	2,2150	4,0122
Li et *al.* [104]	0,7483	1,5012	1,9238	2,1137	2,4976	4,0620

5.7 Conclusion

L'objet de ce chapitre est la mise au point d'une série d'éléments finis de coque FGM permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages. Nous avons utilisé d'éléments plats triangulaires pour discrétiser les structures coques FGM, puis nous avons détaillé la démarche de formulation des deux éléments de coque en FGM un mince et l'autre épaisse.

La bonne performance de ces éléments a été clairement démontrée à travers une série de test de validation.

Conclusion générale et perspectives

1 Conclusion générale

Dans cette étude, un élément fini avec trois degré de liberté par nœud, a été développé, en utilisant les différentes théories de poutres: la théorie d'Euler Bernoulli (CBT) et la théorie de Timoshenko (TBT). Cet élément est destiné à l'analyse des différents comportements des poutres en FGM. La performance, la fiabilité et la polyvalence de l'élément développé ont été évaluées à travers une série d'applications en flexion, vibration libre et aussi en flambement des poutres isotropes, et des poutres FGM avec différents cas de chargement, de géométrie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés avec des solutions analytiques de références, et ceux obtenus par des modèles d'éléments finis. Pour les différentes analyses (statique, vibration et de flambement) les exemples numériques montrent que les éléments finis développés sont capables de donner d'excellents résultats.

En plus, on a montré à travers une étude paramétrique, l'effet de certains paramètres tels que le paramètre de matériau, le rapport L/h, le coefficient de Poisson…etc, sur la variation du déplacement transversal, les contraintes normales et de cisaillement, les fréquences naturelles, ainsi que les charges critiques d'une poutre FGM.

Ensuite, une nouvelle théorie à ordre élevé a été proposée, qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser le comportement en flexion des poutres fonctionnellement graduées, elle a une forte similitude avec la théorie classique des poutres dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la poutre. Une comparaison entre les théories d'ordre élevé est établie, Toutes les études comparatives ont démontrées que les résultats obtenus par la présente théorie de déformation de cisaillement sont proches de ceux donnés par les autres théories de poutre (Kaczkowski et Levinson) pour tous les valeurs de p et tous les rapports L / h. D'une manière générale, tous les modèles de déformation de cisaillement d'une poutre donnent des résultats différents, dans le cas de la contrainte de cisaillement transversal. Il peut être expliqué par les différentes fonctions de forme de contrainte de cisaillement transversal utilisé dans chacun des modèles.

L'objectif de la deuxième partie est la mise au point d'une série d'éléments finis de coque FGM permettant de prendre en compte l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages. L'utilisation des éléments plats triangulaires pour discrétiser les

structures coques FGM est l'approche qu'on a considéré. L'avantage essentiel des éléments appartenant à cette catégorie est leur simplicité relative. En effet leur formulation repose sur les théories classiques des plaques (minces et épaisses). De ce fait on évite toutes les complexités dues à la prise en compte des courbures dans les théories des coques. En ce sens, la géométrie des coques FGM peut être approchée en utilisant les éléments plans par superposition d'un élément de membrane et d'un élément de flexion et un autre élément de couplage. La comparaison des résultats obtenus avec des solutions de références, a montré la performance et la précision de l'approche proposée.

2 Perspectives

En perspectives, il est prévu d'appliquer le modèle d'ordre élevé proposé pour le calcul de différentes formes de structures FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, flambement).

En ce qui concerne les coques en FGM, leur maturation reste nécessaire. Il est intéressant d'étudier leur comportement en dynamique, en flambement et de conforter les performances observées par plus de tests de validation.

Enfin, on peut dire que ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre laboratoire dans le domaine des structures en matériaux composites à gradient fonctionnel.

Références bibliographiques

[1] Reinhart, T.J. and Clements, L.L. (1993), Introduction to composites. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites, Ohio, USA: ASM International, p. 27-34. ISBN 0871702797 (v.1).

[2] Gurdal, Z., Haftka, R.T., and Hajela, P. (1999), Design and optimization of laminated composite materials, Canada: Wiley-Interscience Publication, 352 p. ISBN 047125276X.

[3] Kim, J.K. and Mai, Y.W. (1998), Engineered interfaces in fiber reinforced composites, Pays-Bas: Elsevier Science Ltd.416 p. ISBN 0080426956.

[4] Dubois, T. (2005), Boeing 787 : Les belles promesses de la légèreté. Science & vie, hors-série N° 231, p. 22-29.

[5] Jones, R.M. (1975), Mechanics of composite materials, Washington D.C., USA: Scripta Book Company, 355 p. ISBN 0070327904.

[6] Horton, R.E. and Mccarty, J.E. (1993), Damage tolerance of composites. Engineered materials handbook - Volume 1: Composites. Ohio, USA: ASM International, p. 259-267. ISBN 0871702797 (v.1).

[7] Smith, B.W. (1993), Fractography for continuous fiber composites: Engineered materials handbook - Volume 1: Composites. Ohio, USA: ASM International, p. 786-793. ISBN 0871702797 (v.1).

[8] Payan, J. (2004), Etude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue, Thèse : Mécanique. Marseille : Université de la Méditerranée Aix- Marseille II, 139 p.

[9] Friedrich, K. (1989), Fractographic analysis of polymer composites. Application of fracture mechanics to composite materials. Ed. par K. FRIEDRICH. Amsterdam, Pays-Bas: Elsevier Science Publishers B.V. p. 425-487. ISBN 0444872868 (vol. 6)

[10] Koizumi M. (1992), The concept of FGM. Ceramic transaction, functionally graded materials 34, 3-10.

[11] Kieback, B., Neubrand, Riedel, A. H. (2003), Processing techniques for functionally graded materials, Materials Science and Engineering A362 81–105.

[12] Moya, J. S., Sanchez-Herencia, A. J., Requena, J. & moreno, R, (1992), Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, Materials Letters, Vol. 14, p.333-35.

[13] Abdizadeh, H., (1997), Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine, Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 212p.

[14] Yin, H. and Sun, L. and Paulino, G., (2004), Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, Acta Materiala , vol.52,p.3535-3543.

[15] K.Morinaga and K.U.Toto, « Fabricate Thick Alumina-Tungsten FGM Using S lip Cast Method », Sci.Technol, p.4, December 1993.

[16] Jin, Z. H, Batra, R. C. (1996), Journal of Thermal Stresses 19, 317–339.

[17] H. Ziou, H. Guenfoud, M. Guenfoud (2016), Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering; 7(3), 239-261.

[18] Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243.

[19] Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non homogeneous plane. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614.

[20] Chakraborty, A. and Gopalakrishnan,S. (2003), A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams. International Journal of Solids and Structures, vol.40:2421–48.

[21] Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. and Reddy, JN. (2003), A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. International Journal of Mechanical Sciences; vol.45:519–39.

[22] Kapuria, S., Bhattacharyya, M. and Kumar, AN. (2008), Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation. Composite Structures, 82(3): 390-402.

[23] Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. (2008), Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. Applied Mathematical Modelling, 32(12):2509-2525.

[24] Shi, G., Lam, K.Y. and Tay,T.E. (1998) , On efficient finite element modeling of composite beams and plates using higher-order theories and an accurate composite beam element, Composite Structures, 41 159–165.

[25] Kutiš, V., Murin, J., Belak, R. and Paulech, J. (2011), Beam element with spatial variation of material properties for multiphysics analysis of functionally graded materials, Computers & Structures 89 1192–1205.

[26] Pindera, M-J., Dunn, P. (1995), An Evaluation of Coupled Microstructural Approach for the Analysis of Functionally Graded Composites via the Finite Element Method, NASA CR 195455. Lewis Research Center, Cleveland, OH.

[27] Reddy, JN. (1997), On the dynamic behaviour of the Timoshenko beam finite elements, Sadhana; 24:175–98.

[28] Chen, JS., Wu, CT., Yoon, S. and You, Y. (2001), A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering; 50:435–66.

[29] Liu, GR., Nguyen-Thoi, T. (2010), Smoothed finite element methods. New York: CRC Press, Taylor and Francis Group.

[30] Liu, GR., Dai, KY., and Nguyen, TT. (2007), A smoothed finite element for mechanics problems. Computational Mechanics; 39:859–77.

[31] Liu, GR., Nguyen-Thoi T. and Lam, KY. (2009), An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static and dynamic problems of solid mechanics. Journal of Sound and Vibration; 320:1100–30.

[32] Nguyen-Xuan, H., Liu, GR., Thai-Hoang, C., Nguyen-Thoi, T. (2010), An edge-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 199:471–89.

[33] Liu, GR., Nguyen-Thoi, T., Nguyen-Xuan, H., Lam, KY. (2009), A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems. Computers and Structures; 87:14–26

[34] Nguyen-Xuan, H., Rabczuk, T., Nguyen-Thanh, N., Nguyen-Thoi, T., Bordas, S. (2010), A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates. Computational Mechanics; 46:679–701.

[35] Nguyen-Thoi, T., Liu, GR., Lam, KY., Zhang, GY. (2009), A face-based smoothed finite element method (FS-FEM) for 3D linear and geometrically non-linear solid mechanics problems using 4-node tetrahedral elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering; 78:324–53.

[36] Nguyen-Thoi, T., Liu, GR., Vu-Do, HC., Nguyen-Xuan, H., (2009), A face-based smoothed finite element method (FS-FEM) for visco-elastoplastic analyses of 3D solids using tetrahedral mesh. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 198:3479–98.

[37] Nguyen, D.K. and Gan, B.S. (2014), Large deflections of tapered functionally graded beams subjected to end forces". Applied Mathematical Modelling; 38 3054–3066.

[38] Wood, RD., Zienkiewicz, OC. (1977), Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. Computers & Structures; 7(6): 725–35.

[39] Nguyen Dinh Kien. (2013), Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material. Composites: Part B 55 298–305.

[40] Yu, Z., Chu, F. (2009), Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method. Journal of Sound and Vibration; 325(1–2):69-84.

[41] Murin, J., Kutiš, V. (2002), 3D-beam element with continuous variation of the crosssectional area. Computers & Structures; 80(3–4):329–52.

[42] Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A., Mahmoud, F.F. (2011), Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. Applied Mathematical Modelling. 35 412–425.

[43] Aminbaghai, M. Murin, Kutiš, J. V. (2012), Modal analysis of the FGM-beams with continuous transversal symmetric and longitudinal vibration of material properties with effect of large axial force, Engineering Structures. 34, 314–329.

[44] Oz, HR. (2000), Calculation of the natural frequencies of a beam-mass system using finite element method. Mathematical Computational Applications; 5:67–75.

[45] Mohanty, SC., Dash, RR., Rout, T. (2011), Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's foundation. Nuclear Engineering and Design; 241:2698–715.

[46] Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, MT., Hajilar, S. (2011), Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. Composites: Part B; 42:801–8.

[47] Mei, C. (1972), Nonlinear vibration of beams by matrix displacement method, AIAA 10 (3) 355–357.

[48] Mei, C. (1973), Finite element analysis of nonlinear vibrations of beam columns", AIAA 11 115–117.

[49] Mei, C. (1973), Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates, Computers & Structures. 3, 163–174.

[50] Venkateswara Rao G., Kanaka Raju K., Raju I.S. (1976), Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of slender beams and orthotropic circular plates. Computers and Structures, 6, 169-172.

[51] Gupta, R.K., Jagadish Babu, G., Ranga Janardhan, G., Venkateswara Rao G. (2009), Relatively simple finite element formulation for the large amplitude free vibrations of uniform beams. Finite Elements in Analysis and Design, 45, 624-631.

[52] Jagadish Babu, G., Gupta, R.K., Ranga Janardhan, G., Venkateswara, Rao G. (2010), Large amplitude free vibration analysis of Timoshenko beams using a relatively simple finite element formulation. International Journal of Mechanical Sciences, 52, No. 12, 1597-1604.

[53] Hemmatnezhad, M., Ansari, R. Rahimi, G.H. (2013), Large-amplitude free vibrations of functionally graded beams by means of a finite element formulation. Applied Mathematical Modelling, 37, 8495–8504

[54] Sudhanwa Kulkarni and Mandar Chikate. (2013), Vibration analysis of Functionally Graded beam by using Finite Element Method. International Journal of Advanced Research in Civil, Structural, Environmental and Infrastructure Volume-1: Issue-1 JAN.

[55] Mohammad Azadi, (2011), A finite element method (FEM) free and forced lateral vibration analysis of beams made of functionally graded materials (FGMs), Journal of Mechanical Science and Technology, 25 (1) 69~80.

[56] Huang, B.Z. and Atluri, S.N. (1995), A simple method to follow post-buckling paths in finite element analysis. Computers & Structures.57 477–489.

[57] Madenci, E. and Barut, A. (1994), Pre- and postbuckling responses of curved, thin, composite panels with cutouts under compression, International Journal for Numerical Methods Engineering. 37 1499–1510.

[58] Kim, Y.H.and Noor, A.K. (1996), Buckling and postbuckling of composite panels with cutouts subjected to combined loads, Finite Elements in Analysis and Design. 22,163-185.

[59] Malekzadeh, P. and Karami, G. (2008) , A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams on two-parameter elastic foundations, Applied Mathematical Modelling.32, 1381–1394.

[60] Reddy, JN. (2000), Analysis of functionally graded plates. International journal for numerical methods in engineering; 47:663–84.

[61] Ray, M.C. and Sachade, H.M. (2006), Finite element analysis of smart functionally graded plates. International Journal of Solids and Structures 43, 5468–5484

[62] Rohwer, K. and Rolfes, R. (1998), Calculating 3-D stresses in layered composite plates and shells, Mechanics of Composite Materials 34 (4) 355–362.

[63] Birman, V. and Byrd, L.W. (2007), Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, Applied Mechanics Reviews 60, 195–216.

[64] Zhang, D-G. and Zhou, Y-H. (2008), A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface, Computational Materials Science 44,716–720.

[65] Prakash, T., Singha, M.K. and Ganapathi, M. (2009), Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates, Computational Mechanics 43 (3) 341–350.

[66] Nguyen-Xuan, H., Loc V. Tran, Chien H. Thai, T. Nguyen-Thoi. (2012), Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing .Thin-Walled Structures; 54 1–18.

[67] Afshin Taghvaeipour, Mohammad Bonakdar, Ahmadian, M.T. (2012), Application of a new cylindrical element formulation in finite element structural analysis of FGM hollow cylinders". Finite Elements in Analysis and Design, 50, 1–7

[68] Paraveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates, International Journal of Solids and Structures. 35 4457–4476.

[69] Sadowski T., Birsan, M. and Pietras, D. (2014), Multilayered and FGM structural elements under mechanical and thermal loads. Part I: Comparison of finite elements and analytical models, Archives of Civil and Mechanical Engineering.15, 1180-1192.

[70] Nguyen-Xuan, H., Loc V. Tran, Nguyen-Thai, T. and Vu-Do H.C. (2011), Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. Composite Structures, 93, 3019–3039.

[71] Oyekoya, O.O., Mba D.U., El-Zafrany A.M. (2009), Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method. Composite Structures, 89, 134-142.

[72] Prakash, T., Singha, M.K., Ganapathi M. (2012), A finite element study on the large amplitude flexural vibration characteristics of FGM plates under aerodynamic load. International Journal of Non-Linear Mechanics, 47,439-447

[73] Sundararajan, N., Prakash,T., Ganapathi, M. (2005), Nonlinear free flexural vibrations of functionally graded rectangular and skew plates under thermal environment, Finite Elements in Analysis and Design. 42, 152–168.

[74] Mohammad Talha., Singh, B.N. (2011), Large amplitude free flexural vibration analysis of shear deformable FGM plates using non linear finite element method. Finite Elements in Analysis and Design.47, 394–401

[75] Batra, R.C. Jin, J. (2005), Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate, Journal of Sound and Vibration. 282, 509–516.

[76] Mohammad Talha, Singh, B.N. (2010), Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. Applied Mathematical Modelling. 34 3991–4011.

[77] Prakash, T. and Ganapathi, M. (2006), Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method .Composites: Part B 37, 642–649.

[78] Ramu, I., Mohanty, S.C. (2014), Modal analysis of Functionally Graded material Plates using Finite Element Method. Procedia Materials Science, 6,460 – 467

[79] Fakhari, V., Ohad, A., Yousefian, P. (2011), Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment. Composite Structures; 93:2310–21.

[80] Shariyat, M. Asemi, K. (2014), Three-dimensional non-linear elasticity-based 3D cubic B-spline finite element shears buckling analysis of rectangular orthotropic FGM plates surrounded by elastic foundations. Composites: Part B, 56, 934–947.

[81] Prakash, T., Singha, and Ganapathi, M.K. M. (2008), Thermal post buckling analysis of FGM skew plates, Engineering Structures, 30, 22–32.

[82] François Freey, (1998), Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausane – Volume 3 – Analyse des structures et milieux continus – mécanique des solides, Presses polytechniques et universitaires romandes CH-1015.

[83] Ashwell D.G, Sabir A.B , Roberts T.M., (1971), Further studies in the application of curved finite elements to circular arches, IJMS Vol. 13, pp. 507-517

[84] Ashwell D.G. and Sabir A.B., (1972), A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, IJMS Vol. 14, pp. 171-183.

[85] Sabir A.B., (1975) ,Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions, The mathematics of finite elements and application II, Editor J.R. Whiteman. Chapter 34, 411-421, Academic Press

[86] Sabir A.B. and Ashwell D.G., (1978), Dif fusion of concentrated loads into thin cylindrical shells. The mathematics of finite elements and application III, Editor J.R. Whiteman, Academic Press

[87] Sabir A.B., (1985), A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees freedom, chapter 9 in proceeding of the 2nd International conference on variational methods in engineering, Southampton University, Springer verlag, Berlin, pp 17-25.

[88] Sabir A.B. and Ramadhani F., (1985), A shallow shell finite element for general shell analysis, Variational methods in engineering Proceeding of the 2nd international conference of Southampton England.

[89] Sabir A.B. and Salhi H. Y., (1986), A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res. Mathematica 19, pp 1-16.

[90] Belarbi M. T. et Charif A., (1998), Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, revue européenne des éléments finis, Vol 7, n°4, pp 439-458.

[91] Belarbi M. T. et Charif A., (1999), Nouvel élément héxaédrique simple basé sur le modèle de déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, apparu dans la revue européenne des éléments finis, Vol 8, n°2.

[92] Himeur M., (2008), Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation, Thèse de magistère, Université de Guelma (Algérie), Département de Génie Civil.

[93] Li, XF. Wang, BL., Han JC. (2010), A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. Archive of Applied Mechanics; 80(10):1197-1212.

[94] Tai, H., Vo, T. (2012), Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. International Journal of Mechanical Sciences, 62(1). 57 - 66.

[95] Şimşek M., (2009), Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method, International Journal of Engineering and Applied Sciences, vol.1, p.1-11.

[96] Simsek M. (2010), Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. Nuclear Engineering and Design; 240(4):697-705.

[97] Simsek M., Kocaturk T., (2009), Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load, Composite Structures, vol. 90, p. 465–473.

[98] Li S-R., and Batra, R.C. (2013), Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler-Bernoulli beams, Composite Structures, 95, 5-9.

[99] Sanjay Anandrao K., Gupta R.K., Ramachandran P., Venkateswara Rao G. (2012), Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams, Defence Science Journal, Vol. 62, No. 3, pp. 139-146.

[100] Reddy J.N. (1984), A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, p. 745-752.

[101] Touratier M. (1991), An Efficient Standard Plate Theory, International Journal of Engineering Science, Vol. 25, p. 901-16.

[102] Karama M., Afaq K.S, Mitsou S., (2003), Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, International Journal of Solids and Structures, vol. 40, p. 1525-1546.

[103] Himeur, M. (2008), Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation. Thèse de magistère. Université de Guelma (Algérie), Département de Génie Civil.

[104] Shi-Rong Li, Xuan Wang, Romesh C.Batra, (2015), correspondence Relations Between Deflection, Buckling Load, and Frequencies of Thin Functionally Graded Material Plates and Those of Corresponding Homogenous Pates, Journal of Applied Mechanics; 82(11):111006-111006-8.

ANNEXE I – Matrices des coordonnées nodales [A]

I-a / Elément fini de membrane « T43 »

I-b / Elément fini de plaque mince « Pmi43 »

I-c / Elément fini de plaque épaisse « Pep43 »

ANNEXE II – Matrices $[\mathbf{K_0}]$

II-a / Elément fini de membrane « T43 »

II-b / Elément fini de plaque mince « Pmi43 »

II-c / Elément fini de couplage coque mince « cpmi »

II-d / Elément fini de plaque épaisse « Pep43 »

II-e / Elément fini de couplage coque épaisse « cppe »

ANNEXE III – Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque $[K_e]$ au niveau élémentaire construite dans le système d'axes des coordonnées locales

ANNEXE I – Matrices des coordonnées nodales [A]

I-a / Elément fini de membrane « T43 »

$$[A_{T43}] = \begin{bmatrix}
1 & 0 & -y_1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & y_1^2 & x_1y_1^2 & x_1^2y_1^3 & 0 \\
0 & 1 & x_1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & x_1y_1 & 0 & -x_1^2y_1 & -x_1^3y_1^2 & x_1^2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_1}{2} & 0 & \frac{y_1}{2} & -y_1 & -2x_1y_1 & -3x_1^2y_1^2 & x_1 \\
1 & 0 & -y_2 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & x_2y_2^2 & x_2^2y_2^3 & 0 \\
0 & 1 & x_2 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & x_2y_2 & 0 & -x_2^2y_2 & -x_2^3y_2^2 & x_2^2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_2}{2} & 0 & \frac{y_2}{2} & -y_2 & -2x_2y_2 & -3x_2^2y_2^2 & x_2 \\
1 & 0 & -y_3 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & y_3^2 & x_3y_3^2 & x_3^2y_3^3 & 0 \\
0 & 1 & x_3 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & x_3y_3 & 0 & -x_3^2y_3 & -x_3^3y_3^2 & x_3^2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_3}{2} & 0 & \frac{y_3}{2} & -y_3 & -2x_3y_3 & -3x_3^2y_3^2 & x_3 \\
1 & 0 & -y_4 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & y_4^2 & x_4y_4^2 & x_4^2y_4^3 & 0 \\
0 & 1 & x_4 & 0 & x_4 & 0 & y_4 & x_4y_4 & 0 & -x_4^2y_4 & -x_4^3y_4^2 & x_4^2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{x_4}{2} & 0 & \frac{y_4}{2} & -y_4 & -2x_4y_4 & -3x_4^2y_4^2 & x_4
\end{bmatrix}$$

I-b / Elément fini de plaque mince « Pmi43 »

$$[A_{pm}] = \begin{bmatrix}
1 & -x_1 & -y_1 & \frac{-x_1^2}{2} & \frac{x_1^3}{6} & -\frac{x_1^2y_1}{2} & \frac{-x_1^3y_1}{6} & -\frac{y_1^2}{2} & \frac{-x_1y_1^2}{2} & \frac{-y_1^3}{6} & \frac{-x_1y_1^3}{6} & \frac{-x_1y_1}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_1y_1 & \frac{x_1^2y_1}{2} & 0 & \frac{y_1^2}{2} & 0 & \frac{y_1^3}{6} & \frac{y_1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{x_1^3}{6} & y_1 & x_1y_1 & \frac{y_1^2}{2} & \frac{x_1y_1^2}{2} & \frac{x_1}{2} \\
1 & -x_2 & -y_2 & \frac{-x_2^2}{2} & \frac{x_2^3}{6} & -\frac{x_2^2y_2}{2} & \frac{-x_2^3y_2}{6} & -\frac{y_2^2}{2} & \frac{-x_2y_2^2}{2} & \frac{-y_2^3}{6} & \frac{-x_2y_2^3}{6} & \frac{-x_2y_2}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_2 & \frac{x_2^2}{2} & x_2y_2 & \frac{x_2^2y_2}{2} & 0 & \frac{y_2^2}{2} & 0 & \frac{y_2^3}{6} & \frac{y_2}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_2^2}{2} & \frac{x_2^3}{6} & y_2 & x_2y_2 & \frac{y_2^2}{2} & \frac{x_2y_2^2}{2} & \frac{x_2}{2} \\
1 & -x_3 & -y_3 & \frac{-x_3^2}{2} & \frac{x_3^3}{6} & \frac{-x_3^2y_3}{2} & \frac{-x_3^3y_3}{6} & \frac{-y_3^2}{2} & \frac{-x_3y_3^2}{2} & \frac{-y_3^3}{6} & \frac{-x_3y_3^3}{6} & \frac{-x_3y_3}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_3 & \frac{x_3^2}{2} & x_3y_3 & \frac{x_3^2y_3}{2} & 0 & \frac{y_3^2}{2} & 0 & \frac{y_3^3}{6} & \frac{y_3}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_3^2}{2} & \frac{x_3^3}{6} & y_3 & x_3y_3 & \frac{y_3^2}{2} & \frac{x_3y_3^2}{2} & \frac{x_3}{2} \\
1 & -x_4 & -y_4 & \frac{-x_4^2}{2} & \frac{x_4^3}{6} & \frac{-x_4^2y_4}{2} & \frac{-x_4^3y_4}{6} & \frac{-y_4^2}{2} & \frac{-x_4y_4^2}{2} & \frac{-y_4^3}{6} & \frac{-x_4y_4^3}{6} & \frac{-x_4y_4}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_4 & \frac{x_4^2}{2} & x_4y_4 & \frac{x_4^2y_4}{2} & 0 & \frac{y_4^2}{2} & 0 & \frac{y_4^3}{6} & \frac{y_4}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_4^2}{2} & \frac{x_4^3}{6} & y_4 & x_4y_4 & \frac{y_4^2}{2} & \frac{x_4y_4^2}{2} & \frac{x_4}{2}
\end{bmatrix}$$

I-c / Elément fini de plaque épaisse « Pep43 »

$$[A_{pe}] = \begin{bmatrix}
1 & -x_1 & -y_1 & \frac{-x_1^2}{2} & \frac{-x_1^2 y_1}{2} & \frac{-y_1^2}{2} & \frac{-x_1 y_1^2}{2} & \frac{-x_1 y_1}{2} & \frac{-x_1^2 y_1}{4} & \frac{-x_1 y_1^2}{4} & \frac{-x_1}{2} & \frac{-y_1}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_1 & x_1 y_1 & 0 & \frac{-y_1^2}{2} & \frac{y_1}{2} & \frac{x_1 y_1}{2} & \frac{y_1^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & y_1 & x_1 y_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1^2}{4} & \frac{x_1 y_1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -x_2 & -y_2 & \frac{-x_2^2}{2} & \frac{-x_2^2 y_2}{2} & \frac{-y_2^2}{2} & \frac{-x_2 y_2^2}{2} & \frac{-x_2 y_2}{2} & \frac{-x_2^2 y_2}{4} & \frac{-x_2 y_2^2}{4} & \frac{-x_2}{2} & \frac{-y_2}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_2 & x_2 y_2 & 0 & \frac{-y_2^2}{2} & \frac{y_2}{2} & \frac{x_2 y_2}{2} & \frac{y_2^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x_2^2}{2} & y_2 & x_2 y_2 & \frac{x_2}{2} & \frac{x_2^2}{4} & \frac{x_2 y_2}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -x_3 & -y_3 & \frac{-x_3^2}{2} & \frac{-x_3^2 y_3}{2} & \frac{-y_3^2}{2} & \frac{-x_3 y_3^2}{2} & \frac{-x_3 y_3}{2} & \frac{-x_3^2 y_3}{4} & \frac{-x_3 y_3^2}{4} & \frac{-x_3}{2} & \frac{-y_3}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_3 & x_3 y_3 & 0 & \frac{-y_3^2}{2} & \frac{y_3}{2} & \frac{x_3 y_3}{2} & \frac{y_3^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x_3^2}{2} & y_3 & x_3 y_3 & \frac{x_3}{2} & \frac{x_3^2}{4} & \frac{x_3 y_3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -x_4 & -y_4 & \frac{-x_4^2}{2} & \frac{-x_4^2 y_4}{2} & \frac{-y_4^2}{2} & \frac{-x_4 y_4^2}{2} & \frac{-x_4 y_4}{2} & \frac{-x_4^2 y_4}{4} & \frac{-x_4 y_4^2}{4} & \frac{-x_4}{2} & \frac{-y_4}{2} \\
0 & 1 & 0 & x_4 & x_4 y_4 & 0 & \frac{-y_4^2}{2} & \frac{y_4}{2} & \frac{x_4 y_4}{2} & \frac{y_4^2}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x_4^2}{2} & y_4 & x_4 y_4 & \frac{x_4}{2} & \frac{x_4^2}{4} & \frac{x_4 y_4}{2} & 0 & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}$$

ANNEXE II – Matrices $[K_0]$

II-a / Elément fini de membrane « T43 »

**** Forme générale***

$$\left[K_0^{T43}\right] = \frac{\int E(z)dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ y & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & 2y \\ y^2 & -x^2 & 0 \\ 2xy^3 & -2yx^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2yx^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & x & 0 & y & 2y & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée avant intégration analytique***

$$\left[K_0^{T43}\right]$$

$$= \frac{\int E(z)dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & \nu & \nu x & 0 & y^2 - \nu x^2 & 2xy^3 - 2\nu yx^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4d & 2xd & 0 & 2yd & 4yd & 0 & 0 & 4xd \\ 0 & 0 & 0 & y & 2xd & y^2 + x^2 d & y\nu & xy\nu + xyd & 2xyd & y^3 - x^2 y\nu & 2xy^4 - 2\nu y^2 x^3 & 2x^2 d \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & \nu y & 1 & x & 0 & \nu y^2 - x^2 & 2x\nu y^3 - 2yx^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\nu & 2yd & xy\nu + xyd & x & x^2 + y^2 d & 2y^2 d & x\nu y^2 - x^3 & 2x^2 \nu y^3 - 2yx^4 & 2xyd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4yd & 2xyd & 0 & 2y^2 d & 4y^2 d & 0 & 0 & 4xyd \\ 0 & 0 & 0 & y^2 - \nu x^2 & 0 & y^3 - \nu yx^2 & y^2\nu - x^2 & y^2 x\nu - x^3 & 0 & y^4 + x^4 - 2\nu x^2 y^2 & 2yx^5 + 2xy^5 - 4x^3 y^3 \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2xy^3 - 2\nu yx^3 & 0 & 2xy^4 - 2y^2 x^3 \nu & -2x^3 y + 2xy^3 \nu & 2x^2 y^3 \nu - 2x^4 y & 0 & 2xy^5 + 2yx^5 - 4x^3 y^3 \nu & 4x^2 y^6 + 4y^2 x^6 - 8x^4 y^4 \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4xd & 2x^2 d & 2xyd & 4xyd & 0 & 0 & 4x^2 d \end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée après intégration analytique***

$$= \frac{\int E(z)dz}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{00} & 0 & H_{01} & \nu H_{00} & \nu H_{10} & 0 & H_{02} - \nu H_{20} & 2H_{13} - 2\nu H_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4dH_{00} & 2dH_{10} & 0 & 2H_{01}d & 4dH_{01} & 0 & 0 & 4dH_{10} \\ 0 & 0 & 0 & H_{01} & 2dH_{10} & H_{02} + dH_{20} & \nu H_{01} & \nu H_{11} + dH_{11} & 2dH_{11} & H_{03} - \nu H_{21} & 2H_{14} - 2\nu H_{32} & 2dH_{20} \\ 0 & 0 & 0 & \nu H_{00} & 0 & \nu H_{01} & H_{00} & H_{10} & 0 & \nu H_{02} - H_{20} & 2\nu H_{13} - 2H_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu H_{10} & 2dH_{01} & \nu H_{11} + dH_{11} & H_{10} & H_{10} + dH_{02} & 2dH_{02} & \nu H_{12} - H_{30} & 2\nu H_{23} - 2H_{41} & 2dH_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4dH_{01} & 2dH_{11} & 0 & 2dH_{02} & 4dH_{02} & 0 & 0 & 4dH_{11} \\ 0 & 0 & 0 & H_{02} - \nu H_{20} & 0 & H_{03} - \nu H_{21} & \nu H_{02} - \nu H_{20} & \nu H_{12} - H_{30} & 0 & H_{04} + \nu H_{40} - 2\nu H_{22} & 2H_{51} + 2H_{15} - 4\nu H_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2H_{13} - 2\nu H_{31} & 0 & 2H_{14} - 2\nu H_{32} & -2H_{31} + 2\nu H_{13} & 2\nu H_{23} - H_{41} & 0 & 2H_{15} + 2H_{51} - 4\nu H_{33} & 4H_{26} + 4H_{62} - 8\nu H_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4dH_{10} & 2dH_{20} & 2dH_{11} & 4d\nu H_{11} & 0 & 0 & 4dH_{20} \end{bmatrix}$$

Avec : $H_{\alpha\beta} = \iint X^{\alpha} Y^{\beta} dxdy$

II-b / Elément fini de plaque mince « Pmi43 »

**** Forme générale***

$$[K_0^{pm}] = \frac{\int E(z) z^2 dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 2x \\ xy & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2y \\ 0 & y & 0 \\ 0 & xy & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} dxdy$$

$$[K_0^{pm}] = \frac{\int E(z)z^2dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & x & y & xy & \nu & \nu x & \nu y & \nu xy & 0 \\ & & & & x^2 & xy & x^2y & \nu x & \nu x^2 & \nu xy & \nu x^2 y & 0 \\ & & & & & 4x^2d + y^2 & 2x^3d + xy^2 & \nu y & xy(\nu + 4d) & \nu y^2 & xy^2(\nu + 2d) & 2xd \\ & & & & & & x^4d + x^2y^2 & \nu xy & x^2y(\nu + 2d) & \nu xy^2 & x^2y^2(\nu + d) & x^2d \\ & & & & & & & 1 & x & y & xy & 0 \\ & & & & & & & & x^2 + 4dy^2 & xy & x^2y + 2dy^3 & 2yd \\ & & & & & & & & & y^2 & xy^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & x^2y^2 + y^4d & y^2d \\ & & & & & & & & & & & d \end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée après intégration analytique***

$$[K_0^{pm}] = \frac{\int E(z)z^2dz}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & \nu H_{00} & \nu H_{10} & \nu H_{01} & \nu H_{11} & 0 \\ & & & & H_{20} & H_{11} & H_{21} & \nu H_{10} & \nu H_{20} & \nu H_{11} & \nu H_{21} & 0 \\ & & & & & 4H_{20}d + H_{02} & 2H_{30}d + H_{23} & \nu H_{01} & H_{11}(\nu + 4d) & \nu H_{02} & H_{12}(\nu + 2d) & 2H_{10}d \\ & & & & & & H_{40}d + H_{22} & \nu H_{11} & H_{21}(\nu + 2d) & \nu H_{12} & H_{22}(\nu + d) & H_{20}d \\ & & & & & & & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & 0 \\ & & & & & & & & H_{20} + 4dH_{02} & H_{11} & H_{21} + 2dH_{03} & 2H_{01}d \\ & & & & & & & & & H_{02} & H_{12} & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{22} + H_{04}d & H_{02}d \\ & & & & & & & & & & & H_{00}d \end{bmatrix}$$

II-c / Elément fini de couplage coque mince « cpm»

*** Forme générale**

$$[K_0^{cpm}] = \frac{\int E(z)z\,dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ y & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & 2y \\ y^2 & -x^2 & 0 \\ 2xy^3 & -2x^3y & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2y & -x^2 & 0 & -2y & 0 & -y^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \end{bmatrix} dxdy$$

*** Forme développée avant intégration analytique**

$$[K_0^{cpm}] =$$

$$\frac{\int E(z)z\,dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y - 2\nu x & xy - \nu x^2 & 0 & -2y\nu & 0 & -y^2\nu & -\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d & 2xd & 2yd & 2xyd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & xy & y^2 - 2xy\nu & xy^2 - x^2y\nu & xd & -2\nu y^2 + x^2 d & xyd & -y^3\nu + dx^2 y & -y\nu \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \nu x & \nu y - 2x & \nu xy - x^2 & 0 & -2y & 0 & -y^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x\nu & x^2\nu & xy\nu - 2x^2 & x^2 y\nu - x^3 & yd & -2xy + xyd & y^2 d & -xy^2 + dxy^2 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2yd & 2xyd & 2y^2 d & 2xy^2 d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2 - \nu x^2 & xy^2 - \nu x^3 & y^3 - \nu x^2 y - 2\nu xy^2 + 2x^3 & xy^3 - \nu x^3 y + x^4 - \nu x^2 y^2 & 0 & -2\nu y^3 + 2x^2 y & 0 & x^2 y^2 - \nu y^4 & x^2 - \nu y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2xy^3 - 2\nu y x^3 & 2x^2 y^3 - 2x^4 y\nu & 2xy^4 - 2x^3 y^2 \nu - 4x^2 \nu y^3 + 4x^4 y & 2x^2 y^4 - 2y^2 x^4 \nu - 2x^3 \nu y^3 + 2yx^5 & 0 & -4x\nu y^4 + 4x^3 y^2 & 0 & -2\nu xy^5 + 2x^3 y^3 & 2yx^3 - 2x\nu y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2xd & 2x^2 d & 2xyd & 2x^2 yd & 0 \end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée après intégration analytique***

$$\left[K_0^{cpm}\right]$$

$$= \frac{\int E(z)z\,dz}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & H_{00} & H_{10} & H_{01}-2\nu H_{10} & H_{11}-\nu H_{30} & 0 & -2\nu H_{01} & 0 & -\nu H_{02} & -\nu H_{00} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d & 2dH_{10} & 2dH_{01} & 2dH_{11} & 0 \\
0 & 0 & 0 & H_{01} & H_{11} & H_{02}-2H_{11}\nu & H_{12}-\nu H_{21} & dH_{10} & -2\nu H_{02}+dH_{20} & dH_{11} & -\nu H_{03}+dH_{21} & -\nu H_{01} \\
0 & 0 & 0 & \nu H_{00} & \nu H_{10} & \nu H_{01}-2H_{10} & \nu H_{11}-H_{20} & 0 & -2H_{01} & 0 & -H_{02} & -H_{00} \\
0 & 0 & 0 & \nu H_{10} & \nu H_{20} & \nu H_{11}-2H_{20} & \nu H_{21}-H_{30} & dH_{01} & -2H_{11}+dH_{11} & dH_{02} & -H_{12}+dH_{12} & -H_{10} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2dH_{01} & 2dH_{11} & 2dH_{12} & 2dH_{12} & 0 \\
0 & 0 & 0 & H_{02}-\nu H_{20} & H_{12}-\nu H_{31} & H_{03}-\nu H_{21}-2\nu H_{12}+2H_{30} & H_{13}-\nu H_{31}+H_{40}-\nu H_{22} & 0 & -2\nu+2H_{21} & 0 & H_{22}-\nu H_{04} & H_{20}-\nu H_{02} \\
0 & 0 & 0 & 2H_{13}-2\nu H_{31} & 2H_{23}-2\nu H_{41} & 2H_{15}-2\nu H_{32}-4\nu H_{23}+4H_{41} & 2H_{24}-2\nu H_{42}-2\nu H_{33}+2H_{51} & 0 & -4\nu H_{14}+4H_{32} & 0 & -2\nu H_{15}+2H_{33} & 2H_{31}-2\nu H_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2dH_{10} & 2dH_{20} & 2dH_{11} & 2dH_{21} & 0
\end{bmatrix}$$

Avec : $H_{\alpha\beta} = \iint X^{\alpha} Y^{\beta}\, dxdy$

II-d / Elément fini de plaque épaisse « Pep43 »

**** Forme générale***

$$\left[K_0^{pe}\right] = \frac{\int E(z)z^2\,dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y & 0 & 0 & 0 & -x^2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & -y^2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{y}{2} & 0 & x & 0 & 0 \\
0 & \frac{x}{2} & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\
\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & d & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée avant intégration analytique***

$$[K_0^{pe}] = \frac{\int E(z)z^2 dz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & \nu & \nu x & 0 & \frac{y}{2} & \frac{\nu x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & y^2 + Ax^4 & y\nu & \nu xy & 0 & \frac{y^2}{2} & \frac{xy\nu}{2} & 0 & -Ax^2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \nu y & 1 & x & 0 & \frac{\nu y}{2} & \frac{x}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\nu & xy\nu & x & x^2 + Ay^4 & 0 & \frac{xy\nu}{2} & \frac{x^2}{2} & -Ay^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & xd & yd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & \frac{y^2}{2} & \frac{y}{2}\nu & \frac{xy\nu}{2} & xd & \frac{y^2}{4} + x^2 d & \frac{xy\nu}{4} + xyd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu x}{2} & \frac{\nu xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x^2}{2} & yd & \frac{\nu xy}{4} + xyd & \frac{x^2}{4} + y^2 d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Ay^2 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Ax^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée après intégration analytique***

$$[K_0^{pe}] = \frac{\int E(z)z^2 dz}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & H_{00} & H_{01} & H_{00}\nu & H_{10}\nu & 0 & \frac{H_{01}}{2} & \frac{H_{10}\nu}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & H_{01} & H_{02}+AH_{40} & H_{01}\nu & \nu H_{11} & 0 & \frac{H_{02}}{2} & \frac{H_{11}\nu}{2} & 0 & -AH_{20}\\
0 & 0 & 0 & H_{00}\nu & \nu H_{01} & H_{00} & H_{10} & 0 & \frac{\nu H_{01}}{2} & \frac{H_{10}}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & H_{10}\nu & H_{11}\nu & H_{10} & H_{20}+AH_{04} & 0 & \frac{H_{11}\nu}{2} & \frac{H_{20}}{2} & -AH_{02} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dH_{00} & H_{10}d & H_{01}d & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{H_{01}}{2} & \frac{H_{02}}{2} & \frac{\nu H_{01}}{2} & \frac{H_{11}\nu}{2} & H_{10}d & \frac{H_{02}}{4}+H_{20}d & \frac{H_{11}\nu}{4}+H_{11}d & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\nu H_{10}}{2} & \frac{\nu H_{11}}{2} & \frac{H_{10}}{2} & \frac{H_{20}}{2} & H_{01}d & \frac{\nu H_{11}}{4}+H_{11}d & \frac{H_{20}}{4}+H_{02}d & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -AH_{02} & 0 & 0 & 0 & AH_{00} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -AH_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AH_{00}
\end{bmatrix}$$

II-e / Elément fini de couplage coque épaisse « cpe »

**** Forme générale***

$$[K_0^{cpe}] = \frac{\int E(z)z\,dz}{(1-\nu^2)}\iint \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
y & 0 & x & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & x & y & 0 & 0\\
0 & 0 & 2y & 0 & 0\\
y^2 & -x^2 & 0 & 0 & 0\\
2xy^3 & -2x^3y & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2x & 0 & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}
1 & \nu & 0 & 0 & 0\\
\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & d & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6k(1-\nu)}{h^2}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -x & -y & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & \frac{x}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée avant intégration analytique***

$$[K_0^{cpe}] = \frac{\int E(z)zdz}{(1-\nu^2)} \iint \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & -\nu & \frac{y}{2} - x\nu & -y\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2d & 2xd & 0 & 0 & xd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & y^2 & xd & x^2 d & -\nu y & \frac{y^2}{2} - \nu xy & -\nu y^2 + \frac{x^2}{2} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & \nu y & 0 & 0 & -1 & \frac{\nu y}{2} - x & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x\nu & xy\nu & yd & xyd & -x & \frac{xy}{2}\nu - x^2 & -xy + \frac{xy}{2} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2yd & 2xyd & 0 & 0 & xyd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2 - \nu x^2 & y^2 - \nu y x^2 & 0 & 0 & -\nu y^2 + x^2 & \frac{y^3}{2} - \frac{x^2 y\nu}{2} + x^3 - \nu x y^2 & -\nu y^3 + x^2 y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2xy^3 - 2\nu y x^3 & 2xy^4 - 2\nu x^3 y^2 & 0 & 0 & -2x\nu y^3 + 2yx^3 & xy^4 - \nu y^2 x^3 - 2x^2 \nu y^3 + 2yx^4 & -2x\nu y^4 + 2x^3 y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2xd & 2dx^2 & 0 & 0 & x^2 d & 0 & 0 \end{bmatrix} dxdy$$

**** Forme développée après intégration analytique***

$$[K_0^{cpe}] = \frac{\int E(z)zdz}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{00} & H_{01} & 0 & 0 & -\nu H_{00} & \frac{H_{01}}{2} - H_{10}\nu & -H_{01}\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_{00}d & 2H_{10}d & 0 & 0 & H_{10}d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{01} & H_{02} & H_{10}d & H_{20}d & -\nu H_{01} & \frac{H_{02}}{2} - \nu H_{11} & -\nu H_{02} + \frac{H_{20}}{2} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu H_{00} & \nu H_{01} & 0 & 0 & -H_{00} & \frac{\nu H_{01}}{2} - H_{10} & -H_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu H_{10} & \nu H_{11} & H_{01}d & H_{11}d & -H_{10}\nu & \frac{H_{11}}{2}\nu - H_{20} & -H_{11} + \frac{H_{11}}{2} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_{01}d & 2H_{11}d & 0 & 0 & H_{11}d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{02} - \nu H_{21} & H_{02} - \nu H_{21} & 0 & 0 & -\nu H_{02} + H_{20} & \frac{H_{03}}{2} - \frac{H_{21}\nu}{2} + H_{30} - \nu H_{12} & -\nu H_{03} + H_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2H_{13} - 2\nu H_{31} & 2H_{14} - 2\nu H_{33} & 0 & 0 & -2\nu H_{13} + 2H_{31} & H_{14} - \nu H_{32} - 2H_{23}\nu + 2H_{41} & -2H_{14}\nu + 2H_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_{10}d & 2dH_{20}x^2 & 0 & 0 & H_{20}d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{6k(1-\nu)}{h^2}$$

$$d = \frac{1-\nu}{2}$$

ANNEXE III – Structure type de la matrice de rigidité de l'élément coque FGM $[K_e]$ au niveau élémentaire construire dans le système d'axes des coordonnées locales

	Nœud 1						**Nœud 2**						**Nœud 3**					
	U_1	V_1	W_1	β_{x1}	β_{y1}	θ_{z1}	U_2	V_2	W_2	β_{x2}	β_{y2}	θ_{z2}	U_3	V_3	W_3	β_{x3}	β_{y3}	θ_{z3}
U_1	M_{11}	M_{12}	MF_{11}	MF_{12}	MF_{13}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	MF_{14}	MF_{15}	MF_{16}	M_{16}	M_{17}	M_{18}	MF_{17}	MF_{18}	MF_{19}	M_{19}
V_1		M_{22}	MF_{21}	MF_{22}	MF_{23}	M_{23}	M_{24}	M_{25}	MF_{24}	MF_{25}	MF_{26}	M_{26}	M_{27}	M_{28}	MF_{27}	MF_{28}	MF_{29}	M_{29}
W_1			F_{11}	F_{12}	F_{13}	FM_{13}	FM_{14}	FM_{15}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	FM_{16}	FM_{17}	FM_{18}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	FM_{19}
β_{x1}				F_{22}	F_{23}	FM_{23}	FM_{24}	FM_{25}	F_{24}	F_{25}	F_{26}	FM_{26}	FM_{27}	FM_{28}	F_{27}	F_{28}	F_{29}	FM_{29}
β_{y1}					F_{33}	FM_{33}	FM_{34}	FM_{35}	F_{34}	F_{35}	F_{36}	FM_{36}	FM_{37}	FM_{38}	F_{37}	F_{38}	F_{39}	FM_{39}
θ_{z1}						M_{33}	M_{34}	M_{35}	MF_{34}	MF_{35}	MF_{36}	M_{36}	M_{37}	M_{38}	MF_{37}	MF_{38}	MF_{39}	M_{39}
U_2							M_{44}	M_{45}	MF_{44}	MF_{45}	MF_{46}	M_{46}	M_{47}	M_{48}	MF_{47}	MF_{48}	MF_{49}	M_{49}
V_2								M_{55}	MF_{54}	MF_{55}	MF_{56}	M_{56}	M_{57}	M_{58}	MF_{57}	MF_{58}	MF_{59}	M_{59}
W_2									F_{44}	F_{45}	F_{46}	FM_{46}	FM_{47}	FM_{48}	F_{47}	F_{48}	F_{49}	FM_{49}
β_{x2}										F_{55}	F_{56}	FM_{56}	FM_{57}	FM_{58}	F_{57}	F_{58}	F_{59}	FM_{59}
β_{y2}											F_{66}	FM_{66}	FM_{67}	FM_{58}	F_{67}	F_{68}	F_{69}	FM_{69}
θ_{z2}												M_{66}	M_{67}	M_{68}	MF_{67}	MF_{68}	MF_{69}	M_{69}
U_3													M_{77}	M_{78}	MF_{77}	MF_{78}	MF_{79}	M_{79}
V_3														M_{88}	MF_{87}	MF_{88}	MF_{89}	M_{89}
W_3															F_{77}	F_{78}	F_{79}	FM_{79}
β_{x3}																F_{88}	F_{89}	FM_{89}
β_{y3}																	F_{99}	FM_{99}
θ_{z3}																		M_{99}

M_{ij} : Terme de rigidité membranaire ;

F_{ij} : Terme de rigidité flexionnelle ;

FM_{ij} et MF_{ij} : Terme de la rigidité de couplage.