T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Hatice TAŞKESEN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran–2012

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Hatice TAŞKESEN tarafından yapılan "Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Matematiksel Davranışı" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof.Dr.Allaberen Ashyralyev

Üye : Prof.Dr.Abdulkadir Ertaş

Üye : Doç Dr.M.Enver Aydın

Üye : Doç.Dr. Pakize Taylan

Üye : Doç.Dr. Necat Polat

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 18/06/2012

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20...

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberlikleriyle bu tez çalışmasının her anında yanımda olan değerli danışmanım **Prof. Dr. Abdulkadir Ertaş'** a, tez konumu seçmemde bana yardımcı olan ve tezin oluşturulması sırasında bilgilerinden fazlasıyla yararlandığım ikinci danışmanım **Doç. Dr. Necat Polat**' a şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunmak istiyorum.

Son olarak da, maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK' a teşekkürlerimi sunuyorum. TÜBİTAK' ın maddi desteği olmasaydı bu çalışma var olamazdı.

Canım kızıma…

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEŞEKKÜR…….		I
İÇİNDEKİLER…….....		III
ÖZET…….....		V
ABSTRACT…….....		VI
1.	**GİRİŞ**…….....	1
2.	**ÖN BİLGİLER**……...	7
2.1.	Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı …….....	7
2.2.	Lebesgue Uzayı ……..……..	10
2.3.	Sobolev Uzayı ……	11
2.4.	Operatörler ……..	14
2.5.	Eşitsizlikler ……..	15
2.6.	Fourier Dönüşümü ……..	18
3.	**POTENTIAL WELL METODU**…….....	21
3.1.	Potential Well Metoduyla İlgili Temel Bilgiler…….…….	21
3.2.	Potential Well Metodunun Hiperbolik ve Parabolik Denklemlere Uygulanması…….……...	26
3.2.1	(3.6)-(3.8) Probleminin Çözümlerinin Global Varlık ve Yokluğu……..	34
3.2.2.	(3.9)-(3.11) Probleminin Çözümlerinin Global Varlık ve Yokluğu ……...	37
4.	**DURAĞAN FAZ (STATIONARY PHASE) METODU**…….……..	41
5.	**ALTINCI MERTEBEDEN UZAMSAL TÜREVLER İÇEREN BOUSSINESQ-TİPLİ BİR DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİ** …..	45
5.1.	$\alpha = 1$ İçin Lokal Varlık ……..…….	46
5.2.	Potential Well…….……...…...	48
5.3.	$\alpha = 1$ Global Varlık ve Yokluk……..	51
5.4.	$\alpha = -1$ İçin Blow Up…….....	56
5.4.1.	(5.40), (5.41) Problemi İçin Blow Up……	57

6. ALTINCI MERTEBEDEN BOUSSINESQ-TİPLİ BİR DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİ …… 61

6.1 Üstkritik Başlangıç Enerjili Durum İçin Global Çözümlerin Varlığı……..... 66

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ KÖTÜ BOUSSINESQ TİPLİ BİR DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL VARLIĞI VE AZALMASI…….. 71

7.1. Lokal Varlık ……..……..…….. 72

7.2. Doğrusal Kestirimler…….……... 75

7.3 Temel Sonuçların İspatı …….. 83

8. TARTIŞMA ve SONUÇLAR…… 87

9. KAYNAKLAR…… 89

ÖZGEÇMİŞ ……... 96

#

ÖZET

DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Hatice TAŞKESEN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2012

Bu tezin ilk bölümünde davranışları çalışılacak olan denklemlerin tarihi gelişimleri ve bu denklemlerle ilgili literatür çalışmasına yer verilmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, teorem ve lemmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde bu tezde kullanılan metotlardan ilki olan *potential well* metodu anlatılmış, bu metotla ilgili literatür çalışmasına yer verilmiş ve metodun uygulandığı bir denklemin davranışı (global varlık ve blow up) ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde tezde kullanılan ikinci metot olan *durağan faz* (*stationary phase)* metoduna değinilmiştir.

Beşinci bölümde altıncı mertebeden sadece uzamsal türevler içeren iyi Boussinesq-tipli bir denklem için lokal, global varlık ve blow up incelenmiş, ayrıca altıncı mertebeden sadece uzamsal türevler içeren kötü Boussinesq-tipli bir denklem için de çözümlerin blow up'ı verilmiştir.

Altıncı bölümde iyi Boussinesq-tipli altıncı mertebeden bir denklem için çözümlerin global varlığı superkritik başlangıç enerjili durum için potential well metodu yardımıyla incelenmiştir.

Yedinci bölüm ise, kötü Boussinesq-tipli bir denklem için çözümlerin lokal, global varlığını ve azalmasını (decay) içermektedir. Çözümlerin davranışı durağan faz (stationary phase) metoduyla çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler : İyi Boussinesq-Tipli Denklem, Kötü Boussinesq-Tipli Denklem, Potential Well Metodu, Durağan Faz (Stationary Phase) Metodu, Lokal Varlık, Global Varlık, Patlama (Blow up), Azalma (Decay)

ABSTRACT

MATHEMATICAL BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

PhD THESIS

Hatice TAŞKESEN

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2012

In the first chapter of this thesis historical development of the equations which will be investigated in the next chapters, and relevant literature are given.

In the second chapter, basic definitions, theorems and lemmas that will be used throughout the thesis are given.

In the third chapter, the first method used in this thesis, the potential well method, is explained and related literature is given. Moreover, global existence and blow up of solutions of a problem is given by aid of this method.

In the fourth chapter, the second method of the thesis, namely stationary phase method is mentioned.

In the fifth chapter, local and global existence and blow up is investigated for a purely spatial sixth order good Boussinesq-type equation by potential well method. Moreover, blow up of solutions is given for a purely spatial sixth order bad Boussinesq-type equation.

In the sixth chapter, a sixth order Boussinesq-type equation with supercritical initial energy is investigated by aid of potential well method.

The seventh chapter contains local and global existence and decay of solutions for a bad Boussinesq type equation. The behavior of solutions is studied by stationary phase method.

Keywords: Good Boussinesq-Type Equation, Bad Boussinesq- Type Equation, Potential Well, Stationary Phase, Local and Global Existence, Blow up, Decay .

1. GİRİŞ

Dünya yüzeyinin %70'inden fazlası sularla kaplıdır. Rüzgarlı bir günde bir botla küçük bir gezi yapıldığında suyun durgun bir yapıya sahip olmadığı görülür. Deniz altındaki depremlerin oluşturduğu dalgalar veya bir okyanusa düşen bir meteor, kıyılarda 5 000 kilometreden daha uzağa ciddi zararlar verebilir. Yanlış hızla giden bir geminin oluşturduğu neredeyse sürekli formdaki dalgalar kıyıya ulaştığında çok yıkıcı olabilirler. Tüm bu örnekler, yüzeydeki su dalgalarının davranışlarının gözlemlenmesinin günlük hayat açısından ne kadar önemli olduğunu göstermektedir (Schneider ve Wayne, 2002). Dalgaların yıkıcı etkilerinin dışında, sağladığı faydalar açısından da gözlemlenmeleri ve formule edilerek davranışlarının belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Şöyle ki, dalgalar kontrol altına alınamamış çok büyük enerji barındırmaktadırlar. Günümüzde de yenilenebilir enerji kaynakları büyük önem taşıdığından, bu enerjinin en azından bir bölümü kontrol altına alınabilirse, dünyanın günlük elektrik ihtiyacını (bazı tahminlere göre dünya enerji tüketiminin %10'unu) karşılayabilir. Bu kapsamda Portekiz'de Pelamis aygıtları kullanılarak dünyanın ilk dalga çiftliği kurulmuş. İngiltere, İrlanda, Norveç gibi ülkelerde de dalga enerjisinin önemi anlaşılmış, santraller kurulmuş, devlet desteğiyle pilot çalışmalar başlatılmış ya da konu, enerji planlamalarında yakın hedef olarak yer almıştır. Norveç'in kuzey sahillerinde, Endonezya-Avustralya arasında dalga enerjisi ile çalışan santraller de hizmettedir.

Fiziki olduğu kadar matematiksel problemler de su dalgaları ve onların sahil üzerine kırılmaları, nehirlerdeki su taşkınlarından oluşan dalgalar, okyanuslardaki fırtınalardan oluşan dalgalar, sulardaki gemi dalgaları, göller ve limanlar gibi kapalı sulardaki serbest salınımlarla ilgilenmişlerdir (Debnath, 1994). Newton tarafından yapılan ilk çalışmalardan sonra, 18. yüzyıl ve 19. yüzyılın başlarında Fransız matematikçiler Laplace, Lagrange, Poisson ve Cauchy su dalgalarının doğrusal teorisi üzerine önemli ilerlemeler kaydetmişler, Almanya'da Gerstner doğrusal olmayan dalgaları ele almış ve Weber kardeşler de bunlarla ilgili önemli deneyler yapmışlardır. İngiltere'de 1837–1847 yılları arasında Russell, Green, Kelland, Airy ve Earnshaw, daha sonraları Stokes ve diğerlerinin çalışmalarına kaynak oluşturacak önemli katkılarda bulunmuşlardır (Craik, 2004). Scott Russell, Edinburgh ve Glasgow şehirlerini birbirine bağlayan kanalda bir gemi şirketi için araştırmalar yaparken, hız ve şekil değişikliğine uğramadan ilerleyen ve hızı genliğine bağlı olan solitary dalgaları keşfetmiş ve 1844 teki "Reports on waves" isimli çalışmasında bu dalgalar için matematiksel bir bağıntı vererek, akışkanlardaki, plazmalardaki ve elastik ortamlardaki dalgaların modellenmesine öncülük etmiştir. Ancak Scott Russell, solitary dalgaların önemini anlamakta çağının çok ötesindeydi, öyle ki Airy, Stokes gibi çağdaşları Scott Russell'ın gözlemlerine ve açıklamalarına inanmamışlardı. Bu gözlemler uzun yıllar sonra, 1872'de Boussinesq

ve 1895'te Korteweg ve De Vries tarafından doğru temellere oturtulabildi. Korteweg ve De Vries, hidrodinamiğin temel kurallarından ve problemde iki küçük parametre (kanaldaki su dalgalarının yüksekliğinin kanalın derinliğine oranı (genlik) ve kanalın derinliğinin kanalın uzunluğuna oranı) olmasından hareketle, sabit ve serbest (doğrusal olmayan) sınır koşullarını kullanarak, sistematik (asimtotik) açılımla Scott Russell'ın gözlemlerinin $\eta(x,t)$ genliği için

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

doğrusal olmayan dalga denklemiyle (KdV denklemi) modellenebileceğini göstermiştir. Burada $u\left(x,t\right)$, $\eta(x,t)$ genliğiyle doğrusal olarak bağlantılıdır.

Ne yazık ki böylesine önemli bir konu, solitary dalgaların varlığını kapsamlı olarak gösteren ve doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemle modelleyen Korteweg-De Vries'in analizlerinden 70 yıl sonrasına kadar bile, Zabusky ve Kruskal (1965) tamamen yeni bir fiziksel durum için yani doğrusal olmayan bir latiste, Fermi-Pasta-Ulam (FPU) latisinde, dalgaların yayılımı için tamamen aynı KdV denklemini elde edinceye kadar, bilim camiasından yeteri kadar ilgi görmemiştir. Zabusky ve Kruskal'ın 1965'teki bu bulguları bir yandan soliton kavramını (Scott Russel'ın solitary dalgası aslında bir solitondur) ve en nihayetinde integrallenebilirlik kavramını ortaya çıkarırken, diğer yandan da Hamilton kaosunun ortaya çıkmasına öncülük etmiştir. Daha sonra 1970-1996 yılları arasında bu iki yeni kavram hem daha iyi anlaşılmış, hem de fiziğin hemen hemen her alanında uygulama alanları bulmuştur (Detaylı literatür bilgisi için bkz. Craik, 2004).

Daha önce bahsettiğimiz gibi, KdV denkleminden önce elde edilen, sığ suların yüzeyindeki uzun dalgaların yayılımını modelleyen ve Scott Russell'ın deneysel gözlemlerini destekleyen diğer bir denklem de Boussinesq denklemidir. 1872'de Joseph Valentin Boussinesq'in (Boussinesq, 1872) yayılma ve doğrusal olmama etkilerini de hesaba katarak Euler'in hareket denklemlerinden oluşturduğu bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_{tt} = u_{xx} - \alpha u_{xxxx} + \beta \left(u^2\right)_{xx}. \tag{1.1}$$

Burada $u\left(x,t\right)$ akışkanın serbest yüzeyindeki yükselti (genlik), α, β ($\alpha < 0$) akışkanın derinliğine ve uzun dalgaların karakteristik hızına bağlı olan sabitlerdir. (1.1) denklemi, sığ su dalgalarının dışında, serbest yüzeyli ince akışmaz tabaka dinamikleriyle ilgili çalışmalarda, doğrusal olmayan şeritlerde, şekil-koruyan alaşımlarda, elastik çubuklardaki dalgaların yayılımında, birleştirilmiş elektrik devreleri gibi birçok yerde karşımıza çıkmaktadır. Sonraları (1.1) denkleminin Cauchy problemi için, kısa dalga uzunluklarında fiziksel problemden kaynaklanmayan doğrusal kararsızlığa sahip olduğu, yani Hadamard anlamında iyi konulmamış olduğu görülmüştür. Bir problemin Hadamard anlamında kararlı olması için, bir çözümünün olması, var olan çözümün tek olması

ve çözümün başlangıç verilerine sürekli bağımlı olması (yani, başlangıç verilerindeki küçük bir değişiklik çözümde çok büyük değişikliklere neden olmamalı) gerekmektedir. Bir modelin pratik önem taşıması için yapısal olarak kararlı olması gerektiği iyi bilinen bir gerçektir. Ancak bu durumda, model nümerik olarak simüle edilebilir ve modeli yöneten parametrelerin büyük aralıklardaki değişimi için gözlemler yapılabillir.

Bu kararsızlığı gidermek amacıyla denklemde bazı değişiklikler yapılmıştır. Bunlardan ilki, denklemdeki dördüncü mertebeden dispersif terimin negatif olan işaretini pozitif ile değiştirmektir. Bu durum akışkanlar dinamiğinde çok güçlü bir yüzey gerilimine karşılık gelirken, latislerde uzun mesafeli etkileşimlerin baskınlığı anlamına gelir ki, bunlar gerçekte karşılaşılmayan durumlardır. Dolayısıyla, dördüncü mertebeden terimin işareti derin fiziksel anlamlar taşıdığından, model elde edilirken alınan temel varsayımlar değiştirilmeden, basit gibi görünse de bu işaret değiştirmesi yapılamaz (Christov ve ark., 1996).

(1.1) denklemini Hadamard anlamında kararlı kılmak için bir diğer yol, dördüncü mertebeden uzamsal türevi, karışık türevle değiştirmektir. Bu durumda denklem *geliştirilmiş Boussinesq denklemi* adını alır ve

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} = \left(u^2\right)_{xx}$$

şeklindedir. Bu değişiklik fiziksel varsayımları değiştirmez, ancak bu durumda da denklem tam integrallenebilirlik özelliğini kaybettiğinden analitik teknikler açısından elverişliliğini kaybeder.

Üçüncü bir yol da, dispersiyon bağıntıları yazılırken altıncı mertebeden uzamsal türevin de denklemde bulundurulmasıdır, yani

$$u_{tt} = u_{xx} + \beta \left(u^2\right)_{xx} + u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxxx}, \qquad \gamma > 0$$

denklemidir. Bu durumda da denklem tam olarak integrallenebilir değildir.

Görüldüğü gibi Boussinesq'in 1872'de elde ettiği denklem, sığ suların yüzeyindeki küçük genlikli uzun dalgaları modelleyen tek denklem değildir. Bağımsız değişkenlerin farklı seçimi ve düşük mertebeden terimlerin, dispersiyon bağıntıları kullanılarak modifiye edilmeleri farklı Boussinesq denklemlerini (Boussinesq-tipli denklemleri) ortaya çıkarmıştır. Tüm bu denklemler doğrusal olmama ve dispersiyonun küçük etkilerinin hesaba katılarak oluşturulduğu doğrusal dalga denklemlerinin pertürbeleridir. Boussinesq-tipli denklemler doğrusal olmayan dispersif dalga yayılımının ilk modelleri olmalarına rağmen, bu denklemlerin matematiksel teorisi KdV-tipli denklemlerde olduğu gibi henüz tamamlanmamıştır. Bu da bir anlamda Boussinesq-tipli denklemlerin başlangıç değer problemlerinin her zaman iyi konumlu olmamasıyla ilgilidir (Bona ve Sachs, 1988).

Boussinesq-tipli denklemlerin çözümlerinin farklı matematiksel davranışlarını ele

alan bir çok makale bulunmaktadır. Matematiksel davranış kapsamında, bir problemin, verilen başlangıç/başlangıç-sınır değerleri için çözümünün sonlu bir $[0,T)$ zaman aralığında var olup olmadığı (lokal çözüm), bu sonlu aralığın bazı yerlerinde singülaritelerin oluşup oluşmadığı (blow-up), eğer sonlu aralıkta çözüm var ise bunun $(0,\infty)$ aralığına genişletilebilip genişletilemeyeceği (global çözüm) ve çözümün T sonsuza giderken azalması ve saçılması gibi konular ele alınır. Bu bölümün geri kalan kısmında kısaca bu çalışmalara değineceğiz.

Bona ve Sachs (1988),

$$u_{tt} = u_{xx} - \left(u^2 + u_{xx}\right)_{xx} \tag{1.2}$$

denklemi için başlangıç değer probleminin her zaman için lokal olarak iyi konumlu olduğunu Kato'nun soyut teorisini kullanarak gösterdikten sonra, lokal çözümlerin bazı koşullar altında global çözüme genişletilebileceğini göstermişlerdir. Ayrıca, dalganın yayılma hızının belli bir aralığı için, doğrusal olmayan solitary dalga çözümlerinin kararlılığını ispatlamışlardır. Daha sonra bu kararlılık ve lokal varlık sonuçlarını birleştirerek global varlığı ispatlamışlardır.

Linares (1993), doğrusal olmayan şeritlerin modellenmesiyle oluşan

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + \psi\left(u\right)_{xx} = 0 \tag{1.3}$$

$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right), \qquad u_t\left(x,0\right) = g\left(x\right) \tag{1.4}$$

başlangıç değer probleminin çözümlerinin lokal ve global varlığını çalışmış, daha önce Schrödinger denklemi için kullanılmış olan $L^p - L^q$ Strichartz kestirimlerini kullanarak, başlangıç verilerinin $(f,g) = (f,\partial_x h) \in L^2\left(R\right) \times \dot{H}^{-1}\left(R\right)$ ve $(f,g) = (f,\partial_x h) \in H^1\left(R\right) \times L^2\left(R\right)$ durumları için lokal varlığı vermiş, ayrıca $f \in H^1\left(R\right)$ ve $g = \partial_x h \in L^2\left(R\right)$ nin yeterince küçük olma koşulu altında çözümlerin global varlığını ispatlamıştır.

Linares ve Scialom (1995), (1.3) ve (1.4) probleminde doğrusal olmayan terimi $\psi\left(u\right) = \left|u\right|^{\alpha-1}u$ şeklinde alarak, çözümlerin asimtotik davranışını incelemişler ve başlangıç koşullarının yeterince küçük olması durumunda $\left\|u\right\|_p \leq C\left(1+t\right)^{-\gamma/2}$ olduğunu ispatlamışlardır.

Sachs'ın (1990) (1.3) denkleminde $\psi\left(u\right) = u^2$ doğrusal olmayan terimiyle çözümlerin blow up olmasıyla ilgili çalışması, Liu (1993, 1997) tarafından genişletilmiş ve blow up ile ilgili daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Fang ve Grillakis (1996), (1.3), (1.4) problemi için çözümlerin varlık ve tekliğini birim çemberde ele alıp, Bourgain'in (1993 a,b) çalışmalarından esinlenerek elde ettikleri kestirimler yardımıyla lokal varlığı ve enerjinin korunumundan yola çıkarak da global varlığı ispatlamışlardır.

Xue (2006), $\psi\left(u\right) = u^{k+1}$ doğrusal olmayan terimiyle (1.3) denklemini çalışmış, $k > 4$ için Besov uzayında lokal ve global çözümlerin varlığını göstermiştir. Bu amaçla

daralma dönüşümü prensibini kullanmış ve Bourgain (1998), Cazanave ve Weissler (1990), Molinet ve Ribaud (2003) tarafından sunulan teknikleri modifiye etmiştir.

(1.3) denkleminin genel bir doğrusal olmayan terimle çok boyutta Zhijian ve Guo (2008) tarafından zayıf çözümlerinin global varlık ve yokluğu ispatlanmıştır.

Turitsyn (1993), geliştirilmiş Boussinesq denklemini

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + \left(u^2\right)_{xx} = 0 \tag{1.5}$$

periyodik sınır koşullarıyla ele almış ve bu denklemin çözümlerinin blow up ı için bir teorem vererek ispatlamıştır. Ayrıca (1.5) denkleminin doğrusal halinin sınır değer problemi için Godefroy (1998) çözümlerin blow up olduğunu göstermiştir.

Chen ve Wang (1999), (1.5) denkleminin sınır değer problemini genel bir doğrusal olmayan terimle çalışmışlardır. Çözümlerin lokal ve global varlığını ispatladıktan sonra, blow up olmasını vermişler ve $f(u) = k|u|^q$ özel durumunda çözümler için blow up ve global varlığı da ayrıca ispatlamışlardır.

(1.5) denkleminin Cauchy problemi çok boyutta, Wang ve Chen (2002a) tarafından çözümlerin lokal, global varlık ve global yokluğu çalışılmıştır. Diğer bir makalede yine aynı yazarlar (Wang ve Chen, 2002b) tarafından aynı problem için küçük genlikli çözümlerin global varlığı ve küçük başlangıç verileriyle saçılması ele alınmıştır.

Ayrıca (1.5) denklemi,çeşitli makalelerde farklı açılardan ele alınmıştır [(Xue, 2008), (Chen ve Chen, 2008)].

Dördüncü mertebeden çift dispersif terimli Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} = \left(u^2\right)_{xx} \tag{1.6}$$

şeklinde olup, bu denklemin başlangıç ve sınır değer problemi için lokal, global varlık ve blow up tek ve çok boyutta bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır.

Altıncı mertebeden Boussinesq-tipli ve çift dispersiyon terimli Boussinesq-tipli denklemler sırasıyla

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = \left(u^2\right)_{xx}, \tag{1.7}$$

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = \left(u^2\right)_{xx} \tag{1.8}$$

şeklindedir. (1.7) denklemi 3. bölümde çalışılacağından denklemle ilgili literatür çalışmaları 3. bölümde verilecektir. Wang ve Mu (2007), (1.8) denklemini bir boyutta ve çok boyutta genel bir doğrusal olmayan terimle ele almışlardır. Bir boyutta denklemin lokal, global varlığını, çözümlerinin blow up olmasını ve küçük genlikli çözümlerin global varlık ve saçılmasını incelemişlerdir. Çok boyutta da yine lokal, global varlık ve blow up ile ilgili sonuçlar bulmuşlardır. Çok boyutlu durum, Xia ve Yuan (2010) tarafından Besov uzayları kullanılarak tekrar ele alınmıştır.

Son olarak (1.3), (1.5) ve (1.6) denklemlerine çeşitli damping terimler eklenerek elde

edilen denklemlerle ilgili çalışmalara yer verilecektir. (1.3) denklemi zayıf dampingle R^2 nin silindirik olmayan bir bölgesinde Clark ve ark. (2007) tarafından ve güçlü dampingle Varlamov (1999a, 1999b) tarafından birim çemberde ve R^2 de çalışılmıştır. (1.5) denklemi güçlü dampingle Polat (2008) ve Wang ve Xu (2012) tarafından çalışılmıştır. (1.6) denklemi Chen ve ark. (2004), Wang ve Chen (2006), Chen ve Xue (2008), Polat ve Ertaş (2009)tarafından çalışılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler verilecektir [Adams ve Fournier (2003), Kreyszig (1989), Musayev (2000), Stein (1986, 1993, 2003)].

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$\|.\| : X \to R_+$, $x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(N_1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$;

(N_2) $\|ax\| = |a| \|x\|$;

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir.

Verilen bir norm aracılığıyla $\|u\|$ olarak tanımlanan u bir uzaklık fonksiyonudur ve böylece her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay olur.

Tanım 2.1.2. $\{x_n\}$, $(X, \|.\|)$normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.3. $\{x_n\}$, $(X, \|.\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir. $(X, \|.\|)$ uzayı tam ise bu uzaya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.5. X vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ olsun. $A > 0$, $B > 0$ sabitleri için

$$A \|.\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B \|.\|_1$$

eşitsizliği X uzayındaki her x noktası için geçerli ise, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normlarına eşdeğer normlar denir.

Tanım 2.1.6. K cismi üzerinde bir X vektör uzayı verildiğinde, $X \times X$ uzayı üzerinde tanımlı K değerli

$$(.,.) : X \times X \to K$$

bir fonksiyonun her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona *iç çarpım* denir;

(i) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (burada $\overline{c}$, $c\in C$ nin karmaşık eşleniğini belirtir),

(ii) $(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z)$,

(iii) $(x,x)\geq 0$, $(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0$.

$K=R$ halinde $(x,y)=(y,x)$ olduğu hemen görülür.

Bir iç çarpım ile

$$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

tanımlanan $\|.\|:X\to R$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.1.7. Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya *Hilbert uzayı* denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.1.8. $n-$boyutlu R^n ve gerçel Euclid uzayında bir nokta $x=(x_1,...,x_n)$ ve bu noktanın normu $|x|=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. x ve y nin iç çarpımı $x\cdot y=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$ şeklindedir.

Tanım 2.1.9. X bir normlu uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi X uzayının *dual uzayını* oluşturur. X' veya X^* ile gösterilen bu uzay

$$\|f\|_{X'}=\sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|_X}<\infty$$

normuyla bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')'=X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve *ikinci dual* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.10. X normlu uzayında bir dizi (x_n) olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_X=0$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_n) dizisine *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama $x_n\to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.11. (x_n), X normlu uzayında bir dizi olsun. Her $f\in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)\to f(x)$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_n) dizisine *zayıf yakınsak dizi* denir. Bu yakınsama $x_n\rightharpoonup x$ veya $x_n\xrightarrow{z}x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12. (f_n), X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerin bir dizisi olsun. Bu durumda

(a)

$$\|f_n-f\|\to 0$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) *güçlü yakınsaktır* denir. $f_n \to f$ şeklinde yazılır.

(b) her $x \in X$ için

$$f_n(x) \to f(x)$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ varsa (f_n) *zayıf* yakınsaktır* denir. $f_n \xrightarrow{w^*} f$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.13. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya çoklu-indis denir ve x^α, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \partial/\partial x_j$ ise, o zaman

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. $D^{(0,...,0)}u = u$ olur.

Tanım 2.1.14. Eğer $G \subset R^n$ ise R^n de G nin kapanışı $\overline{G}$ ile belirtilir. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ R^n in kompakt (kapalı ve sınırlı) altkümesi ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. u, G de tanımlı bir fonksiyon ise, u fonksiyonun desteği

$$supp\ u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

şeklinde tanımlanır. $supp\ u \subset\subset \Omega$ ise u fonksiyonu Ω da *kompakt desteğe sahiptir* denir.

Tanım 2.1.15. Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için Ω bölgesinde sürekli bütün ϕ fonksiyonları ve $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha\phi$ kısmi türevleri sürekli olan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir. $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ olur. $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarına ait ve kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. Ω açık bir bölge olduğundan, $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonların Ω bölgesinde sınırlı olması gerekmeyebilir. $C_B^m(\Omega)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha\phi$ lerin sınırlı olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha\phi(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.17. Eğer $\phi \in C(\Omega)$ Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise, Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ ile $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^\alpha\phi$ lerin sınırlı ve düzgün sürekli olduğu $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonları belirtilir. (Eğer Ω bölgesi sınırsız ise simgelerin yanlış kullanımı belirsizliğe yol açar; örneğin, $\overline{R^n} = R^n$ olsa bile $C^m\left(\overline{R^n}\right) \neq C^m(R^n)$ dır.) $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı $C_B^m(\Omega)$ uzayının

kapalı bir alt uzayıdır. Bu nedenle $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ uzayı da

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \phi(x)|$$

aynı norm ile bir Banach uzayıdır.

2.2. Lebesque Uzayı

Tanım 2.2.1. Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif gerçel sayılar olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına aşağıdaki koşul altında

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

$L_p(\Omega)$ *uzayı* denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzay

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.2. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna hemen hemen sınırlıdır denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve $ess\sup_{x\in\Omega}$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzaya $L_\infty(\Omega)$ *uzayı* denir. $L_\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.3. Ω, R^n de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt altkümesinde $p.$ kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.2.4. X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

(i) X, Y nin bir alt uzayı,

(ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan I birim operatörü sürekli ise, X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \to Y$ ile gösterilir.

I birim operatörü doğrusal olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X, \qquad x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.2.5. $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L_q(\Omega)$ ise o zaman $u \in L_p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

olur. Bu nedenle

$$L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

Tanım 2.2.6. $L_2(\Omega)$ uzayı

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.2.7. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olsun. $\|f(.)\|_X \in L_p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) den X e tanımlanmış ölçülebilir f fonksiyonları uzayına $L_p(a,b;X)$ *uzayı* denir. $L_p(a,b;X)$ uzayı

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)} = \begin{cases} \left\{\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt\right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ ess\sup\limits_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $f \in L_p(c,d;X)$ ise, o zaman $f \in L_p(a,b;X)$ yazılır ve $p = 1$ için f *lokal integrallenebilirdir* denir.

Tanım 2.2.8. Her $t \in [0,T]$ için $[0,T]$ den X e tanımlanmış ve m. mertebeden türevleri sürekli olan u fonksiyonları uzayına $C^m([0,T];X)$ *uzayı* denir. $C^m([0,T];X)$ uzayı

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u(t)\|_X$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.3. Sobolev Uzayı

Tanım 2.3.1. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α. *zayıf türevi* denir. v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda $D^{\alpha}u$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^{\alpha}u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^{\alpha}u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.3.2. Ω, R^n de bir bölge, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L_{\infty}(\Omega)}, \quad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ile gösterilir.

Aşikâr olarak $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L_p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ dır. Herhangi bir m pozitif tamsayısı için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülmeleri geçerlidir.

Tanım 2.3.3. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

ile verilir.

Tanım 2.3.4. $H^m(\Omega)$ uzayı

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v) \tag{1}$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u,v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L_2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx\right)^{1/2}$$

olur.

Tanım 2.3.5. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω, $\mathbb{R}^N$ de koni özeliğine sahip açık bir bölge, $1 \leq m$ ve $0 \leq j$ şeklindeki tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

(i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^*$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq q^*$$

gömülmesi elde edilir.

(ii) $mp = N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

ya da

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Üstelik $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

(iii) $mp > N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-mp} & N > mp \\ +\infty & N \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde W yerine W_0 uzayı alınırsa, Ω bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın yukarıdaki gömülmeler yine geçerli olur.

Teorem 2.3.6. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi bazı $p \leq q$ değerleri için kompakt ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

Teorem 2.3.7. Eğer $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi $1 \leq q < p$ özelliğini sağlayan bazı p ve q değerleri için mevcut ise, o zaman $|\Omega| < \infty$ dur.

2.4. Operatörler

Tanım 2.4.1. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A : D_A \subset X \to Y$ dönüşümü X deki bir x elemanını Y de bir tek elemana götürüyorsa A ya *operatör*, D_A ya da A operatörünün *tanım kümesi* denir.

Tanım 2.4.2. $D_A \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne her $x, y \in D_A$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

koşuluyla birlikte *doğrusal operatör* denir.

Tanım 2.4.3. Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörüne her $x, y \in D_A$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliği ile birlikte *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.4.4. $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne belli bir $M \geq 0$ sayısı ve her $x \in D_A$ için

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliği ile birlikte *sınırlı operatör* denir.

Tanım 2.4.5. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal, simetrik bir A operatörüne her $x \in D_A \subset H$

$$(Ax, x) \geq 0$$

eşitsizliği ile birlikte *negatif olmayan operatör* denir. Negatif olmayan A operatörü için

$$(Ax, x) > 0 \Rightarrow x = 0$$

ile *pozitif operatör* denir.

Tanım 2.4.6. X ve Y iki Hilbert uzayı ve $(.,.)$ X uzayının, $[.,.]$ de Y uzayının iç çarpımı ve $A : X \to Y$ doğrusal, sınırlı operatörü tüm X Hilbert uzayında tanımlı olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$[Ax, y] = (x, A^* y)$$

koşulunu sağlayan $A^* : Y \to X$ operatörüne, A operatörünün *eş operatörü* denir. Eğer $A = A^*$ ise böyle bir operatöre *öz-eşlenik (self-adjoint) operatör* denir.

Tanım 2.4.7. H Hilbert uzayında tanımlı doğrusal ve öz-eşlenik bir A operatörüne her $x \in H$ için

$$(Ax, x) \geq C \|x\|_H^2, \qquad C > 0$$

ile birlikte pozitif belirli bir operatör denir.

2.5. Eşitsizlikler

Tanım 2.5.1. Cauchy Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R^1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.5.2. Young Eşitsizliği. Eğer $\varepsilon > 0$, $a, b \in R^1$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman

$$|ab| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|b/\varepsilon|^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.5.3. Hölder Eşitsizliği. $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L_1(\Omega)$ olup

$$\|uv\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\|v\|_{L_q(\Omega)} = ess_\Omega \sup |v|$ alırız.

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwartz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Ayrıca $u \in L_r(\Omega)$, $p \leq q \leq r$ ve $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L_p(\Omega)} \|u\|^{1-\lambda}_{L_r(\Omega)}$$

ara değer eşitsizliği geçerlidir. $\alpha = \lambda p$ ve $\beta = (1-\lambda) q$ alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa $z = p/\lambda q$ ve $y = r/(1-\lambda) q$ için

$$\int_\Omega |u|^q dx = \int_\Omega |u|^\alpha |u|^\beta dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{\alpha z} dx\right)^{1/z} \left(\int_\Omega |u|^{\beta y} dx\right)^{1/y}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür.

Tanım 2.5.4. Minkowski Eşitsizliği. $u, v \in L_p(\Omega)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|u + v\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.5.5. Sobolev Eşitsizliği. $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset R^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, o zaman $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C\,|\Omega|^{1/n-1/p}\,\|Du\|_{L_p(\Omega)}$$

olur.

Tanım 2.5.6. Kısmi İntegral Alma Formülleri. $\Omega \subset R^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x) = (A_1(x), ..., A_n(x))$ vektörü $i = 1, ..., n$ olmak üzere $A_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $\operatorname{div} A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\overline{\Omega}$ (R^n uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise,

$$\int_\Omega \operatorname{div} A(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A(x)\,n(x)\,dS$$

olup burada $n(x)$ Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül, Ostrogradskii formülü olarak bilinmektedir.

$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $v(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ve $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + ... + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradskii formülüne göre

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

elde edilir. Burada $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir.

Tanım 2.5.7. Daralma Dönüşümü. X bir metrik uzay olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer

$$d(T(x), T(y)) \leq c\,d(x, y), \qquad x, y \in X$$

olacak şekilde bir $0 \leq c < 1$ sabit sayısı varsa, T daralma dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 2.5.8. Daralma Dönüşümü Prensibi. X tam bir metrik uzay olsun. $T : X \to X$, c daralma sabiti ile verilmiş bir daralma dönüşümü olsun. $x_0 \in X$ olsun ve tümevarımsal olarak

$$x_{n+1} = T(x_n), \qquad n \geq 0$$

tanımlansın. Bu durumda T bir tek a sabit noktasına sahip, x_n dizisi a ya yakınsak ve

$$d(a, x_n) \leq c^n d(a, x_0)$$

dır.

Tanım 2.5.9. Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form)

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her t ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyon olsun. O zaman hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

(ii) Özel olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds$$

ise, o zaman her yerde $\xi(t) = 0$ dır.

Lemma 2.5.10. Van der Corput Lemması.(Stein 2003) $\Omega \subseteq R^n$ olmak üzere, f, Ω üzerinde iki defa diferansiyellenebilir konveks veya konkav bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \int_\Omega e^{if(r)} dr \right| \leq C \left\{ \min_\Omega \left| D^2 f(r) \right| \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

olup, burada Ω bölgesinde $D^2 f(r) \neq 0$ dir.

Theorem 2.5.11. Fubini Teoremi.(Adams ve Fournier 2003) f, R^{m+n} de ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{R^{m+n}} |f(x,y)|\, dxdy, \\ I_2 &= \int_{R^m} \left(\int_{R^n} |f(x,y)|\, dx \right) dy, \\ I_3 &= \int_{R^n} \left(\int_{R^m} |f(x,y)|\, dy \right) dx \end{aligned}$$

integrallerinden en az birinin var ve sonlu olduğu kabul edilsin. I_2 ve benzer olarak I_3 "R^n üzerinde integrallenebilir öyle bir g fonksiyonu vardır ki, $g(y)$ hemen hemen her (h.h.h.) y için içteki integrale eşittir" şeklinde yorumlanabilir. Bu durumda

(a) h.h.h. $y \in R^m$ için $f(.,y) \in L^1(R^n)$ dir.

(b) h.h.h. $x \in R^n$ için $f(x,.) \in L^1(R^m)$ dir.

(c) $\int_{R^m} f(.,y)dy \in L^1(R^n)$ dir.

(d) $\int_{R^n} f(x,.)dx \in L^1(R^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$.

2.6. Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü, birçok doğrusal kısmi diferansiyel denklemin başlangıç-sınır değer probleminin çözümünde faydalanılan çok kullanışlı bir dönüşümdür. Bu dönüşüm yardımıyla problem daha basit bir forma indirgenir.

Tanım 2.6.1. Bir $u(x,t)$ fonksiyonunun $x \in R$ değişkenine göre *Fourier dönüşümü* $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(k,t)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,t)\, dx$$

integrali ile tanımlıdır. Burada k bir reel sayıdır ve dönüşüm değişkeni olarak adlandırılır. Ters Fourier dönüşümü $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{u}(k,t)\} = u(x,t)$ şeklinde gösterilir ve

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{u}(k,t)\} = u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widehat{u}(k,t)\, dk$$

integrali ile tanımlıdır.

$u(x,t)$, n defa sürekli türevlere sahip ve $|x| \to \infty$ iken, $k = 1,2,3,..,(n-1)$ için $\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \to 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right\} = (ik)^n \mathcal{F}\{u(x,t)\} = (ik)^n \widehat{u}(k,t)$$

olur. Tanım 2.6.1 den

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \frac{d\widehat{u}}{dt}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \frac{d^2\widehat{u}}{dt^2}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right\} = \frac{d^n\widehat{u}}{dt^n}$$

dir.

Teorem 2.6.2. Konvolüsyon Teoremi. Eğer $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ ve $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(k)$ ise, o zaman

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(k)\, G(k)$$

veya

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\, G(k)\} = f(x) * g(x)$$

sağlanır. Burada $f(x) * g(x)$, integrallenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonudur ve

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

ile tanımlıdır.

- $f * g$ süreklidir. Buradan iki fonksiyonun konvolüsyonu olan $f * g$ nin f veya g den daha düzgün olduğu anlaşılmaktadır, çünkü f ve g sadece integrallenebilir (Riemann anlamında) fonksiyonlardır.

Teorem 2.6.3. Plancherel Teoremi. $u \in L^1(R) \cap L^2(R)$ olsun. Bu durumda $\widehat{u}$, $\check{u} \in L^2(R)$ olur ve

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(R)} = \|\check{u}\|_{L^2(R)} = \|u\|_{L^2(R)}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\check{u}$ ters Fourier dönüşümünü göstermektedir.

$H^m(R)$ uzayı,

$$\|u\|_{H^m(R)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + k^2\right)^m |\widehat{u}|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuyla

$$H^m(R) = \left\{ u \in L^2(R) \mid \left(1 + k^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}(k) \in L^2(R) \right\}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada, $k \in R$ dir.

$m \geq 0$ tamsayıları yerine $s \geq 0$ reel sayıları alınırsa, $H^s(R)$ uzayı

$$H^s(R) = \left\{ u \in L^2(R) \mid \left(1 + k^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(k) \in L^2(R) \right\}$$

olur. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{H^s} = \left\| \left(I - \partial_x^2\right)^{\frac{s}{2}} u \right\| = \left\| \left(1 + k^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \right\|$$

şeklindedir.

$s_1 < s_2$ iken

$$H^{s_2} \hookrightarrow H^{s_1}$$

sürekli gömülmesi geçerlidir ve $H^0(R)) = L^2(R)$ dir. Ancak $L^p(R)$ Lebesgue uzaylarında bu gömülme geçerli değildir.

Tanım 2.6.4. Schwartz Uzayı. f, R üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. f ve f nin tüm türevleri, yani $f', f'', ..., f^{(l)}, ...$ her $k, l \geq 0$ için

$$\sup_{x \in R} |x|^k \left| f^{(l)}(x) \right| < \infty$$

anlamında hızlı olarak azalan ise bu tür fonksiyonların oluşturduğu küme Schwartz uzayı olarak adlandırılır. Schwartz uzayı $\mathcal{S}(R)$ ile gösterilmektedir.

- Eğer $f \in \mathcal{S}(R)$ ise o zaman $f' = \frac{df}{dx} \in \mathcal{S}(R)$ ve $xf(x) \in \mathcal{S}(R)$ dir. Dolayısıyla Schwartz uzayı türev alma ve polinomla çarpım altında kapalıdır.

- Eğer $f \in \mathcal{S}(R)$ ise o zaman $\hat{f} \in \mathcal{S}(R)$ dir.

Fourier dönüşümünde önemli bir rolü bulunan $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu bu uzaya ait olan fonksiyonlara basit bir örnek olarak verilebilir. Bu fonksiyonun türevi $f'(x) = P(x)\, e^{-x^2}$ formundadır, bu da $f(x) \in \mathcal{S}(R)$ olduğunu göstermektedir. $a > 0$ olmak üzere $f(x) = e^{-ax^2}$ fonksiyonu da bu uzayın bir elemanıdır. $e^{-|x|}$ fonksiyonu hızlı olarak azalan bir fonksiyon olmasına rağmen 0 noktasında türevlenebilir olmadığından bu uzaya ait değildir.

3. POTENTIAL WELL METODU

Bu bölümde, tezin özünü oluşturan problemlerin çözümlerinde kullanılan metotlardan ilki olan *potential well (potansiyel kuyusu)* metoduyla ilgili bazı bilgilere yer verilecek ve bu metodun bir probleme uygulanması örnek olarak verilecektir.

3.1. Potential Well Metoduyla İlgili Temel Bilgiler

Potential well metodu ilk olarak 1968 yılında Sattinger tarafından

$$u_{tt} - \nabla^2 u + f(x,u) = 0, \qquad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{array}{l} u(x,0) = U(x), \qquad x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = V(x), \qquad x \in \Omega, \end{array}, \tag{3.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.3}$$

başlangıç-sınır değer problemine uygulanmış ve bu problemin pozitif tanımlı enerjiye sahip olmayan global çözümlerinin varlığını ispatlamak amacıyla kullanılmıştır. Burada $\Omega \subset R^n$ parçalı düzgün sınıra sahip bir bölge, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dir. Metot, (3.1) denkleminin enerji integralleri üzerine kurulu bazı analizlere dayanmaktadır. (3.1) denklemi için kinetik ve potansiyel enerji sırasıyla

$$K(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 dx,$$

$$J(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\text{grad}\, u|^2 + F(x,u) \right\} dx$$

şeklindedir. Burada $F_u = f$ dir. Sonlu sayıda serbestlik derecesine (bir fiziksel sistemin durumunu hesaplamak için belirlenmesi gereken parametre sayısı) sahip mekanik bir sistemin potansiyel fonksiyonunun lokal minimumuna benzer olarak, fonksiyon uzayında $u = u_0$ da konumlanmış bir W potential well düşünülebilir. Eğer U, W nun içindeyse ve başlangıç verilerinin toplam enerjisi W nun derinliğinden küçük ise, o zaman (3.1)-(3.3) probleminin bir global çözüme sahip olması beklenir. Sattinger, buradan yola çıkarak problemini bir varyasyonel probleme dönüştürdükten sonra, doğrusal olmayan $f(u)$ terimi üzerine koyduğu bazı koşullar yardımıyla global zayıf çözümün varlığını ispatlamıştır. $u(x,t)$ fonksiyonunun zayıf türevi, η test fonksiyonu olmak üzere

$$\int_0^\infty \int_\Omega u \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx = -\int_0^\infty \int_\Omega u_i \eta dx$$

ile tanımlı u_i, $i = 0, ..., n$ fonksiyonudur. (3.1), (3.3) probleminin yaklaşık çözümleri

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t)\,\psi_i(x)$$

şeklindedir. Burada $\{\psi_i(x)\}$,

$$\nabla^2\psi_i + \mu_i\psi_i = 0$$

denkleminin özdeğerleridir.

$u(x,0) = U(x)$ başlangıç koşulunun zayıf formu

$$\int_0^{\infty}\int_{\Omega} u_0\eta + u\eta_0 dx dx_0 = \int_{\Omega} U(x)\,\eta dx \tag{3.4}$$

şeklinde olup, burada u_0, u nun zayıf türevidir.

$u_t(x,0) = V(x)$ başlangıç koşulunun zayıf formu ise

$$\int_{\Omega}\eta V(x)\,dx + \int_0^{\infty}\int_{\Omega}\left\{u_t\eta_t - \sum_{i=1}^{n} u_i\frac{\partial\eta}{\partial x_i} - f(x,u)\,\eta\right\}dxdt = 0$$

şeklindedir.

$u_0(x)$ fonksiyonu

$$-\nabla^2 u_0 + f(x,u_0) = 0, \qquad u_0\,|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.5}$$

denklemini sağlıyorsa, bu durumda (3.1) in bir durağan çözümüdür. Sattinger, (3.1), (3.5) probleminin durağan çözümünün orjinde olduğunu kabul etmiştir. (3.6) denklemi J potansiyel fonksiyonelinin ekstremumları için Euler denklemidir. (3.5) in zayıf formu

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i\frac{\partial\eta}{\partial x_i} + f(x,u_0)\,\eta\right\}dx = 0$$

dır.

J nin ikinci varyasyoneli

$$\delta^2 J(\eta) = \int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right)^2 + f_u(x,0)\,\eta^2\right\}dx$$

dir. $\delta^2 J(\eta)$, $A = -\nabla^2 + f_u(x,0)$ operatörü için (3.3) sınır koşuluyla birlikte kuadratik formdadır. Böylece J nin orjinde bir lokal minimuma sahip olması için gerekli koşul A operatörünün pozitif olmasıdır. Dolayısıyla, her $\eta \in \dot{H}^1$ için

$$r\delta^2 J(\eta) \geq \|\eta\|^2$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sabiti vardır.

J fonksiyoneli her $u \in \dot{H}^1$ fonksiyonu için tanımlı olsun. J başlangıçta bir minimuma sahip olduğundan $J(\lambda u)$, başlangıcın bir komşuluğunda λ nın ($\lambda > 0$ için) artan bir fonksiyonudur. $\lambda_1 > 0$, $J(\lambda u)$ nun azalmaya başladığı ilk değer olsun. d potential well derinliği

$$d = \inf_{u \in \overset{\circ}{H}^1} J(\lambda_1 u)$$

dir ve $0 \leq d \leq \infty$ olduğu açıktır. Eğer $d > 0$ ise, potential well

$$W = \left\{ u : u \in \overset{\circ}{H}^1,\ 0 \leq J(\lambda u) < d,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

şeklindedir. Böylece $u \in W$ olması için, $J(u) < d$ olmalı ve 0 ile u arasındaki bütün noktaların, yani λu $(0 \leq \lambda \leq 1)$ biçimindeki bütün noktaların d potential well seviyesinin altında kalması gerekir.

(3.1)-(3.3) problemi için

$$u_k \in C^1\left(\overline{\Omega}_\infty\right) \text{ ve } u_k = 0, \qquad u \in \partial\Omega,$$

$$u_k \in W, \qquad \forall t \geq 0,$$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)^2 + f_u(x,0)\,\eta^2 \right\} dx \leq d, \qquad \forall t \geq 0$$

özelliklerine sahip $\{u_k(x,t)\}$ yaklaşık çözümleri oluşturulmuş ve

(i) $f(x,u)$ fonksiyonu, her $x \in \Omega$ için u ya göre iki defa sürekli türevlenebilirdir.

(ii) Her $x \in \Omega$ ve $-\infty < u < \infty$ için, $F(x,u)$, alttan düzgün sınırlı veya $0 < c < \frac{1}{2}$ iken

$$cuf(x,u) - F(x,u) \leq N$$

koşulunu sağlayacak birer c ve N sabitleri vardır.

(iii) $A = -\nabla^2 + f_u(x,0)$ operatörü (3.3) sınır koşuluyla pozitif tanımlıdır.

(iv) $f_u(x,0)$, Ω üzerinde sınırlı ve ölçülebilirdir.

(v) $n = 1$ durumunda, eğer $u \leq \rho$ ise, $f_{uu}(x,u) \leq M_\rho$ olacak şekilde bir M_ρ sabiti vardır. Buradan da $u \leq \rho$ ise, $f(x,u) \leq \frac{1}{2}\rho^2 M_\rho$ olduğu görülür.

(vi) $n = 2$ durumunda

$$\begin{aligned} f_{uu}(x,u) &\leq C_1 + C_2 |u|^q, \\ f(x,u) &\leq C_1 + C_2 |u|^q, \\ uf(x,u) &\leq C_1 + C_2 |u|^q \end{aligned}$$

olacak şekilde C_1, C_2 ve q $(1 \leq q < \infty)$ sabitleri vardır.

(vii) $n = 3$ durumunda

$$\begin{aligned} f_{uu}(x,u) &\leq C_1 + C_2 |u|^q, \\ f(x,u) &\leq C_1 + C_2 |u|^{q+2}, \\ uf(x,u) &\leq C_1 + C_2 |u|^{q+3} \end{aligned}$$

olacak şekilde C_1, C_2 ve q $(q < 3)$ sabitleri vardır.

koşulları altında aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.1. J fonksiyoneli $u = u_0(x)$ da bir lokal minimuma sahip olsun. Basit bir dönüşümle u_0 orjine kaydırılabilir ve $u_0 = 0$ ve $f(x,0) = F(x,0) = 0$ olduğu kabul edilebilir. $f(x,u)$ fonksiyonu yukarıdaki (i)-(vii) koşullarını sağlasın. Bu durumda bir d pozitif sayısı ve d derinliğine sahip bir W potential well'i vardır. Ayrıca (3.1)-(3.3) başlangıç-sınır değer problemi, $U \in W$ ve toplam başlangıç enerjisinin d den küçük olması durumunda bir global zayıf çözüme sahiptir.

Sattinger son olarak, kullandığı bu metodun doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin varlık teoremlerini ispatlamak için genel bir yaklaşım olabileceğini, metodun başarılı bir şekilde parabolik denklemlere veya sistemlere uygulanabileceğini ve ayrıca,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= f(u), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

şeklindeki doğrusal olmayan eliptik sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığını ispatlamak için de kullanılabileceğini söylemiştir.

Potential well metodu sonradan birçok yazar tarafından çeşitli denklemlere uygulanmıştır.

Nakao ve Ono (1993),

$$u_{tt} - \Delta u + u_t - |u|^p u = 0$$

damping terimli dalga denklemi için Cauchy problemini ele almışlardır. Damping terimin etkisiyle lokal çözüm için enerjinin azalmasına dair bir sonuç elde edip, (u_0, u_1) üzerine her $t > 0$ için $u \in W$ olmasını sağlayacak bir koşul koyarak global çözümlerin varlığını ispatlamışlardır.

Esquivel-Avila (2003),

$$u_{tt} - \alpha \Delta u + g(u_t) = f(u)$$

denkleminin başlangıç-sınır değer problemi için global ve global olmayan çözümlerin

varlığını, blow up ını ve asimtotik davranışını potential well metodu yardımıyla vermiş, ayrıca Kirchhof denklemi için de global olmayan çözümlerin varlığını yine bu yöntemle ispatlamıştır.

Yacheng (2003),

$$u_{tt} - \Delta u = |u|^{p-1} u$$

denkleminin sınır değer problemi için potential well metodunu modifiye ederek global çözümlerin varlığıyla ilgili yeni teoremler bulmuştur. Kullandığı modifiye metot yardımıyla bilinen potential well'i özel bir durum olarak içeren yeni potential well aileleri oluşturmuş, daha sonra bunları kullanarak herhangi bir $e \in (0, d)$ için, $0 < E(0) \leq e$ koşulunu sağlayan $E(0)$ başlangıç enerjili tüm çözümlerin sadece $H_1^0(\Omega)$ uzayının ya küçük bir yuvarının içinde ya da daha büyük bir yuvarının dışında olduğunu göstermiştir.

Cavalcanti ve Domingos Cavalcanti (2004), A bir self-adjoint operatör olmak üzere,

$$u_{tt} - Au + g(u_t) = |u|^{\rho} u$$

denklemini bir Γ kompakt manifoldu üzerinde çalışarak, global zayıf çözümlerin varlığını potential well metodunu kullanarak ispatlamışlardır.

Yacheng ve Junsheng (2004), doğrusal olmayan parabolik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + u^{1+\alpha}$$

denkleminin sınır değer problemi için $0 \leq u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $J(u_0) = d$, $I(u_0) > 0$ veya $I(u_0) = 0$, $0 < J(u_0) \leq d$ koşulları altında bir $u \in L^{\infty}\left(0, \infty; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, $u_t \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ ve $u \in \overline{W}$ global çözümüne sahip olduğunu göstermiştir.

Esquivel-Avila (2005),

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i(u_{x_i})\right)_{x_i} = f(u)$$

denklemini sınırlı bir bölgede çalışarak, çözümlerin nitel davranışlarını ileriye ve geriye dönük olarak çalışmıştır. $t \to \pm\infty$ iken blow up, sınırlılık ve en düşük enerji seviyesine yakınsamayı karakterize etmek için potential well i ve çeşitli değişmez ve pozitif değişmez kümeleri kullanmıştır.

Gazzola ve Squassina (2006), R^n nin açık, sınırlı ve Lipschitz bir alt kümesinde

$$u_{tt} - \Delta u + \omega \Delta u_t + \mu u_t = |u|^{p-2} u$$

denkleminin her global çözümünün düzgün sınırlı olduğunu, çözümler için blow up ı ve yüksek başlangıç enerjili çözümlerin blow up ını yine potential well metodunu kullanarak ispatlamışlardır.

Wang ve ark. (2007), Benney-Luke denkleminin

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - m\Delta u + \alpha \left(2\nabla u \cdot \nabla u_t + u_t \Delta u\right) + \beta \nabla \left(|\nabla u|^p \nabla u\right) = 0$$

Cauchy problemi için global çözümlerin varlık ve tekliğini, $\beta \leq 0$ için enerji korunum kanunlarını kullanarak, $\beta > 0$ için ise kararlı (potential well) ve kararsız kümeyi kurarak ispatlamışlardır.

Lin ve ark. (2008)

$$u_{tt} - \alpha \Delta u_t + \Delta^2 u - \Delta u = f(u)$$

denklemi için R^n nin düzgün sınırlı bir bölgesinde global çözümlerin varlığını ispatlamışlardır.

Taskesen ve ark. (2012)

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = \left(f(u)\right)_{xx}$$

denkleminin Cauchy problemi için global çözümlerin varlığını üstkritik başlangıç enerjili durum ve $f(u) = \gamma |u|^p$ doğrusal olmayan terimiyle, başlangıç hızını da içeren yeni bir fonksiyonel tanımlayarak vermişlerdir.

3.2. Potential Well Metodunun Hiperbolik ve Parabolik Denklemlere Uygulanması

Bu kısımda, potential well metodunun daha iyi anlaşılmasını sağlamak için bu metodun hiperbolik

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f(u), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0, && (3.6)\\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \qquad t \geq 0, && (3.7) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \Omega, \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \qquad x \in \Omega \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

ve parabolik

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(u), \qquad x \in \Omega, \quad t > 0, && (3.9)\\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \Omega && (3.10)\\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \qquad t \geq 0, && (3.11) \end{aligned}$$

denklemlerinin başlangıç-sınır değer problemlerine uygulanması örnek olarak verilecektir (Yacheng ve Junsheng 2006).

Bu kısım boyunca, $f(u)$ nun aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilecektir.

(1) $f \in C^1$ ve $f(0) = f'(0) = 0$

(2) $f(u)$, $u > 0$ için monoton ve konveks, $u < 0$ için konkavdır.

(3) $F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$ olmak üzere, $(p+1)F(u) \leq uf(u)$, $|uf(u)| \leq \gamma F(u)$; $n = 1, 2$ ise $2 < p+1 \leq \gamma < \infty$, $n \geq 3$ ise $2 < p+1 \leq \gamma \leq 2n/(n-2)$

Burada $\|.\|_p$ ve $\|.\|_2$, sırasıyla $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ ve $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ normlarını göstermekte olup, $(u, v) = \int_\Omega uvdx$ dir.

(3.6)-(3.8), (3.9)-(3.11) problemleri için global varlık ve yokluğa geçilmeden önce, bu problemler için potential well ve bazı özellikleri verilecektir.

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)\,dx,$$

$$I(u) = \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega uf(u)\,dx$$

olmak üzere

$$W = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid I(u) > 0,\ J(u) < d\right\} \cup \{0\},$$

ve $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\| \neq 0$ ve $I(u) = 0$ için

$$d = \inf J(u)$$

dir.

Lemma 3.2.1. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın. O zaman

(i) Bazı $A > 0$ ve her $u \in R$ için $|F(u)| \leq A|u|^\gamma$ dır.

(ii) Bazı $B > 0$ ve her $|u| \geq 1$ için $|F(u)| \geq B|u|^{p+1}$.

(iii) $u(uf'(u) - f(u)) \geq 0$ (eşitlik sadece $u = 0$ da sağlanır).

Sonuç 3.2.2. Yukarıdaki lemmanın koşulları altında

(i) Her $u \in R$ için $|uf(u)| \leq \gamma A|u|^\gamma$, $|f(u)| \leq \gamma A|u|^{\gamma-1}$,

(ii) $|u| \geq 1$ için $uf(u) \geq (p+1)B|u|^{p+1}$

sağlanır.

Lemma 3.2.3. (Payne ve Sattinger 1975) $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\| \neq 0$ olsun. Bu kabuller altında

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} J(\lambda u) = -\infty$, $\lim_{\lambda\to 0} J(\lambda u) = 0$,

(ii) $\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$ olacak şekilde bir tek $\lambda^* = \lambda^*(u)$ vardır,

(iii) $\frac{d^2}{d^2\lambda} J(\lambda u) < 0$,

(iv) $J(\lambda u)$, $[0, \lambda^*]$ aralığında kesin artan, $[\lambda^*, \infty)$ aralığında kesin azalandır ve $\lambda = \lambda^*$ da maksimum değerini alır,

(v) $\lambda \in (0, \lambda^*)$ için $I(\lambda u) > 0$, $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$ için $I(\lambda u) < 0$ ve $I(\lambda^* u) = 0$

olur.

Lemma 3.2.4. *$f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\| \neq 0$,*

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_\Omega u f(\lambda u)\, dx$$

olsun. O zaman

(i) $\lambda \in [0, \infty)$ için kesin olarak artandır.

(ii) $\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = +\infty$, $\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$.

İspat. $\lambda > 0$ için Lemma 3.2.1 (iii) den

$$\varphi'(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \int_\Omega \left(\lambda u^2 f'(\lambda u) - u f(\lambda u)\right) dx = \frac{1}{\lambda^3} \int_\Omega \lambda u \left(\lambda u f'(\lambda u) - f(\lambda u)\right) dx > 0$$

olur. Dolayısıyla $\varphi(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$ aralığında kesin olarak artandır.

(ii) Sonuç 3.2.2 (i) den

$$|\varphi(\lambda)| \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_\Omega \lambda u f(\lambda u)\, dx \leq \frac{\gamma A}{\lambda^2} \int_\Omega |\lambda u|^\gamma = \gamma A \lambda^{\gamma - 2} \|u\|_\gamma^\gamma$$

olur. Buradan $\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$ elde edilir. $u f(u) \geq 0$ ve Sonuç 3.2.2 (ii) den

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2} \int_\Omega \lambda u f(\lambda u)\, dx \geq \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Omega_\lambda} \lambda u f(\lambda u)\, dx \\ &\geq \frac{(p+1) B}{\lambda^2} \int_{\Omega_\lambda} |\lambda u|^{p+1}\, dx = (p+1) B \lambda^{p-1} \int_{\Omega_\lambda} |u|^{p+1}\, dx \end{aligned}$$

olur. Burada $\Omega_\lambda = \left\{x : x \in \Omega,\ |u| \geq \frac{1}{\lambda}\right\}$ dır. $\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\Omega_\lambda} |u|^{p+1}\, dx = \|u\|_{p+1}^{p+1} > 0$ olacağı açıktır. Dolayısıyla (ii) ispatlanmış olur.

Yeni bir fonksiyonel

$$I_\delta(u) = \delta \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega u f(u)\, dx$$

ve $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\| \neq 0$, $I_\delta(u) = 0$ için

$$d(\delta) = \inf J(u), \qquad \delta > 0$$

olarak tanımlansın.

Lemma 3.2.5. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $0 < \|\nabla u\| < r(\delta)$ olsun. O zaman $I_\delta(u) > 0$ dır. Özel olarak, $0 < \|\nabla u\| < r(1)$ ise $I(u) > 0$ olur. Burada C_*, $H_0^1(\Omega)$ den $L^\gamma(\Omega)$ ya gömülme sabiti olmak üzere

$$r(\delta) = \left(\frac{\delta}{aC_*^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}, \qquad a = \sup \frac{uf(u)}{|u|^\gamma}$$

dır.

İspat. Eğer $0 < \|\nabla u\| < r(\delta)$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} \int_\Omega uf(u)\,dx &\leq a\int_\Omega |u|^\gamma\,dx = a\|u\|_\gamma^\gamma \leq aC_*^\gamma \|\nabla u\|^\gamma \\ &= aC_*^\gamma \|\nabla u\|^{\gamma-2}\|\nabla u\|^2 \leq \delta\|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

olur ki bu da $I_\delta(u) > 0$ sonucunu verir.

Lemma 3.2.6. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $I_\delta(u) < 0$ olsun. O zaman $\|\nabla u\| > r(\delta)$ olur. Özel olarak, $I(u) > 0$ ise$\|\nabla u\| > r(1)$ olur.

İspat. $I_\delta(u) < 0$ dan

$$\|\nabla u\|^2 < \int_\Omega uf(u)\,dx \leq a\|u\|_\gamma^\gamma \leq aC_*^\gamma \|\nabla u\|^{\gamma-2}\|\nabla u\|^2 \tag{3.12}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitlsizlikten de $\|\nabla u\| > r(\delta)$ bulunur.

Lemma 3.2.5 ve 3.2.6 nın ispatına benzer olarak aşağıdaki lemma ispatlanabilir.

Lemma 3.2.7. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $I_\delta(u) = 0$ olsun. O zaman $\|\nabla u\| = 0$ veya $\|\nabla u\| \geq r(\delta)$ olur. Özel olarak, $I(u) = 0$ ise $\|\nabla u\| = 0$ veya $\|\nabla u\| \geq r(1)$ dir.

Lemma 3.2.8. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın.

(i) $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ için $d(\delta) > a(\delta) r^2(\delta)$ dir. Burada $a(\delta) = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{p+1}$.

(ii) $\lim_{\delta\to 0} d(\delta) = 0$ dır ve $0 < \delta < b$ için $d(b) = 0$ ve $d(\delta) > 0$ olacak şekilde $\frac{p+1}{2} \leq b \leq \frac{\gamma}{2}$ koşulunu sağlayan bir tek b vardır.

(iii) $d(\delta)$, $[0,1]$ aralığında kesin artan, $[1,b]$ aralığında kesin azalandır. $d = d(1)$ maksimumunu $\delta = 1$ de alır.

İspat. (i) Eğer $I_\delta(u) = 0$ ve $\|\nabla u\| \neq 0$ ise, Lemma 3.2.7 den $\|\nabla u\| \geq r(\delta)$ olur.

Buradan ve (3) koşulundan

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega uf(u)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{p+1}\right)\|\nabla u\|^2 + I_\delta(u) \\ &\geq a(\delta)\, r^2(\delta), \qquad 0 < \delta < \frac{p+1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) Lemma 3.2.4 den herhangi bir $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\| \neq 0$ ve $\delta > 0$ için

$$\delta\|\nabla(\lambda u)\|^2 = \int_\Omega \lambda u f(\lambda u)\,dx \tag{3.13}$$

olacak şekilde bir tek $\lambda = \lambda(\delta)$ tanımlanabilir. Buradan $\lambda(\delta) = \varphi^{-1}\left(\delta\|\nabla u\|^2\right)$ ve $I_\delta(\lambda u) = 0$ olur. Ayrıca Lemma 3.2.4 den

$$\lim_{\delta\to 0}\lambda(\delta) = 0, \qquad \lim_{\delta\to\infty}\lambda(\delta) = \infty$$

sonucuna varılır. Lemma 3.2.2 ve 3.2.3 den

$$\lim_{\delta\to 0} J(\lambda u) = \lim_{\lambda\to 0} J(\lambda u) = 0, \qquad \lim_{\delta\to 0} d(\delta) = 0,$$

$$\lim_{\delta\to\infty} J(\lambda u) = \lim_{\lambda\to\infty} J(\lambda u) = -\infty, \qquad \lim_{\delta\to\infty} d(\delta) = -\infty$$

olur. Bu lemmanın (i) şıkkından $0 < \delta < b$ için $d(b) = 0$ ve $d(\delta) > 0$ olacak şekilde bir $b \geq \frac{p+1}{2}$ vardır. Diğer taraftan $uf(u) \geq 0$ dan $F(u) \geq 0$ olur. Buradan $I_\delta(u) = 0$, $\|\nabla u\| \neq 0$ ve $\delta > \gamma/2$ için $uf(u) \leq \gamma|F(u)|$ ile

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \frac{1}{\gamma}\int_\Omega uf(u)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{\gamma}\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{\gamma}I_\delta(u) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{\gamma}\right)\|\nabla u\|^2 < 0 \end{aligned}$$

olduğu sonucuna varılır. Böylece $b < \gamma/2$ bulunur.

(iii) Herhangi bir $0 < \delta' < \delta'' < 1$ veya $1 < \delta'' < \delta' < b$ için $d(\delta') < d(\delta'')$ olduğu ispatlanacaktır. Bu amaçla herhangi bir $0 < \delta' < \delta'' < 1$ veya $1 < \delta'' < \delta' < b$ ve herhangi bir $u \in H_0^1(\Omega)$, $I_{\delta''}(u) = 0$ ve $\|\nabla u\| \neq 0$ için $I_{\delta'}(v) = 0$ ve $\|\nabla u\| \neq 0$

olmasını sağlayan bir $v \in H_0^1(\Omega)$ ve $J(v) < J(u) - \varepsilon(\delta', \delta'')$ olmasını sağlayan bir $\varepsilon(\delta', \delta'')$ sabitinin varlığını ispatlamak yeterli olacaktır. Aslında u için 3.13 ile $\lambda(\delta)$ tanımlanmıştı, buradan $I_\delta(\lambda(\delta)u) = 0$, $\lambda(\delta'') = 1$ olur. $g(\lambda) = J(\lambda u)$ olsun. Basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} g(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\left(\|\nabla(\lambda u)\|^2 - \int_\Omega \lambda u f(\lambda u)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\left((1-\delta)\|\nabla(\lambda u)\|^2 + I_\delta(\lambda u)\right) = (1-\delta)\lambda\|\nabla(\lambda u)\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. $v = \lambda(\delta')u$ alınırsa, $I_{\delta'}(v) = 0$ ve $\|\nabla u\| \neq 0$ olur. $0 < \delta' < \delta'' < 1$ ise , o zaman

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) &= g(1) - g(\lambda(\delta')) > (1-\delta'')\, r^2(\delta'')\, \lambda(\delta')(1-\lambda(\delta')) \\ &\equiv \varepsilon(\delta', \delta'') \end{aligned}$$

olur. Eğer $1 < \delta'' < \delta' < b$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) &= g(1) - g(\lambda(\delta')) > (\delta''-1)\, r^2(\delta'')\, \lambda(\delta')(\lambda(\delta')-1) \\ &\equiv \varepsilon(\delta', \delta'') \end{aligned}$$

olur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.9. *$f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ olsun.*

(i) *$J(u) \leq d(\delta)$ ve $I_\delta(u) > 0$ olduğu kabul edilirse, $0 < \|\nabla u\|^2 < \frac{d(\delta)}{a(\delta)}$ olur. Özel olarak, $J(u) \leq d$ ve $I(u) > 0$ ise, $0 < \|\nabla u\|^2 < \frac{2(p+1)}{p-1} d$ olur.*

(ii) *$J(u) \leq d(\delta)$ ve $\|\nabla u\|^2 > d(\delta)/a(\delta)$ olduğu kabul edilirse, $I_\delta(u) < 0$ olur. Özel olarak, $J(u) \leq d$ ve $\|\nabla u\|^2 > (2(p+1))/(p-1)\, d$ ise, $I(u) < 0$ olur.*

(iii) *$J(u) \leq d(\delta)$ ve $I_\delta(u) = 0$ olduğu kabul edilirse, $\|\nabla u\|^2 < d(\delta)/a(\delta)$ olur. Özel olarak, $J(u) \leq d$ ve $I(u) = 0$ ise, $\|\nabla u\|^2 < (2(p+1))/(p-1)\, d$ olur.*

İspat.

$$a(\delta)\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{p+1} I_\delta(u) < J(u) \leq d(\delta) \tag{3.14}$$

eşitsizliği (i) şıkkını ispatlayacaktır. (ii) ve (iii) de (3.14) kullanılarak ispatlanabilir.

Not 3.2.10. 3.2.5-3.2.7 ve 3.2.9 lemmaları $H_0^1(\Omega)$ uzayının $I_\delta(u) = 0$ ($\|\nabla u\| \neq 0$) yüzeyi tarafından $I_\delta(u) > 0$ ve $I_\delta(u) < 0$ şeklinde iki kısma ayrıldığını göstermektedir. $I_\delta(u) = 0$ ın iç kısmı $I_\delta(u) > 0$, dış kısmı ise, $I_\delta(u) < 0$ dır. $\|\nabla u\| = r(\delta)$ küresi $I_\delta(u) > 0$ ın içinde, $\|\nabla u\| = d(\delta)/a(\delta)$ küresi ise $I_\delta(u) < 0$ ın içinde kalmaktadır.

Potential well ailesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$W_\delta = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid I_\delta(u) > 0,\ J(u) < d(\delta)\right\} \cup \{0\}, \qquad 0 < \delta < b,$$

$$\overline{W}_\delta = W_\delta \cup \partial W_\delta = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid I_\delta(u) \geq 0,\ J(u) \leq d(\delta)\right\}, \qquad 0 < \delta < b.$$

$0 < \delta < b$ için ayrıca

$$\begin{aligned} V &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid I(u) < 0,\ J(u) < d\right\}, \\ V_\delta &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid I_\delta(u) < 0,\ J(u) < d(\delta)\right\}, \\ B_\delta &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\| < r(\delta)\right\}, \\ \overline{B}_\delta &= B_\delta \cup \partial B_\delta = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\| \leq r(\delta)\right\}, \\ B_\delta^c &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\| > r(\delta)\right\} \end{aligned}$$

kümeleri tanımlansın.

Lemma 3.2.11. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$B_{r_1(\delta)} \subset W_\delta \subset B_{r_2(\delta)}, \qquad V_\delta \subset B_\delta^c$$

sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} B_{r_1(\delta)} &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\|^2 < \min\left\{r^2(\delta),\ 2d(\delta)\right\}\right\}, \\ B_{r_2(\delta)} &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\|^2 < d(\delta)/a(\delta)\right\} \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\|\nabla u\| < r(\delta)$ dan $\|\nabla u\| = 0$ veya $I_\delta(u) > 0$ sonucuna varılır. Diğer taraftan, $J(u) \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2$ ve $\|\nabla u\|^2 < 2d(\delta)$, $J(u) < d(\delta)$ yı verir. Buradan $B_{r_1(\delta)} \subset W_\delta$ elde edilir. Lemmanın geri kalanı Lemma 3.2.6 ve 3.2.9 un (i) şıkkı kullanılarak ispatlanabilir.

W_δ, V_δ ve Lemma 3.2.8 kullanılarak aşağıdaki lemma elde edilebilir.

Lemma 3.2.12.

(i) $0 < \delta' < \delta'' \leq 1$ ise, $W_{\delta'} \subset W_{\delta''}$ dir.

(ii) $1 \leq \delta'' < \delta' < b$ ise, $V_{\delta'} \subset V_{\delta''}$ dir.

Lemma 3.2.13. Bazı $u \in H_0^1(\Omega)$ için $0 < J(u) < d$ olsun. $\delta_1 < \delta_2$, $d(\delta) = J(u)$ nun iki kökü olsun. Bu durumda $\delta_1 < \delta < \delta_2$ iken $I_\delta(u)$ nun işareti değişmez.

İspat. $J(u) > 0$ dan $\|\nabla u\| \neq 0$ elde edilir. $I_\delta(u)$ nun işaretinin değiştiği varsayılsın, bu durumda öyle bir $\overline{\delta} \in (\delta_1, \delta_2)$ vardır ki $I_\delta(u) = 0$ olur. $d(\delta)$ nın tanımından $J(u) \geq d\left(\overline{\delta}\right)$ elde edilir ki, bu da

$$J(u) = d(\delta_1) = d(\delta_2) < d\left(\overline{\delta}\right)$$

olmasıyla çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki lemmalar (3.6)-(3.8) in akışı altında yukarıda tanımlanan bazı kümelerin değişmezliğini göstermektedir.
(3.6)-(3.8) problemi için enerji

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-\int_\Omega F(u)\,dx\equiv\frac{1}{2}\|u_t\|^2+J(u)$$

olarak tanımlansın.

Theorem 3.2.14. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x)\in L_2(\Omega)$ olsun. $0<e<d$ olduğu kabul edilsin ve $\delta_1<\delta_2$, $d(\delta)=e$ nin iki kökü olsun. O zaman

(i) (3.6)-(3.8) probleminin $E(0)=e$ enerjisine sahip tüm çözümleri $\delta_1<\delta<\delta_2$ iken $I(u_0)>0$ veya $\|\nabla u\|=0$ koşullarının sağlanması durumunda W_δ ya aittir.

(ii) (3.6)-(3.8) probleminin $E(0)=e$ enerjisine sahip tüm çözümleri $\delta_1<\delta<\delta_2$ iken $I(u_0)<0$ koşulunun sağlanması durumunda V_δ ya aittir.

İspat. (i) $u(t)$, (3.6)-(3.8) probleminin $E(0)=e$ enerjisine sahip ve $I(u_0)>0$ veya $\|\nabla u\|=0$ koşullarını sağlayan herhangi bir çözümü, T de $u(t)$ nin varlık zamanı olsun. Eğer $\|\nabla u\|=0$ ise, $0<\delta<b$ için $u_0(x)\in W_\delta$ olur. $I(u_0)>0$ ise, $d(\delta)$ nın tanımı ve

$$\frac{1}{2}\|u_1\|^2+J(u_0)=E(0)=d(\delta_1)=d(\delta_2)<d(\delta),\qquad\delta_1<\delta<\delta_2 \tag{3.15}$$

den $I_\delta(u_0)>0$ ve $J(u_0)<d(\delta)$, yani $\delta_1<\delta<\delta_2$ için $u_0(x)\in W_\delta$ olur. $\delta_1<\delta<\delta_2$ ve $0<t<T$ için $u(t)\in W_\delta$ olduğu gösterilirse (i) nin ispatı tamamlanmış olur. Bunun doğru olmadığı kabul edilsin, bu durumda öyle bir $t_0\in(0,T)$ vardır ki, bazı $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$ için $u(t_0)\in\partial W_\delta$ dır, yani $I_\delta(u(t_0))=0$, $\|\nabla u(t_0)\|\neq0$ veya $J(u(t_0))=d(\delta)$ dır. Enerji eşitliğinden

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2+J(u)=E(0)<d(\delta),\qquad\delta_1<\delta<\delta_2,\qquad0<t<T \tag{3.16}$$

$J(u(t_0))=d(\delta)$ nın imkansız olduğu görülür. Diğer taraftan, $I_\delta(u(t_0))=0$ ve $\|\nabla u(t_0)\|\neq0$ ise $d(\delta)$ nın tanımından $J(u(t_0))\geq d(\delta)$ elde edilir ki bu da (3.16) ile çelişir.

(ii) $u(t)$, (3.6)-(3.8) probleminin $E(0)=e$ enerjisine sahip ve $I(u_0)<0$ koşulunu sağlayan herhangi bir çözümü, T de $u(t)$ nin varlık zamanı olsun. (3.15) den $I_\delta(u_0)<0$ ve $J(u_0)<d(\delta)$, yani $\delta_1<\delta<\delta_2$ için $u_0(x)\in V_\delta$ olur. (i) ye benzer olarak $\delta_1<\delta<\delta_2$ ve $0<t<T$ için $u(t)\in V_\delta$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Eğer bu doğru değilse, öyle bir $t_0\in(0,T)$ vardır ki, $0\leq t<t_0$ için $u(x)\in V_\delta$ ve $u(t_0)\in\partial V_\delta$ olur, yani bazı $\delta\in(\delta_1,\delta_2)$ için $I_\delta(u(t_0))=0$ veya $J(u(t_0))=d(\delta)$

dır. (3.16) dan $J(u(t_0)) = d(\delta)$ nın imkansız olduğu görülür. Eğer $I_\delta(u(t_0)) = 0$ ise, $0 \leq t < t_0$ için $I_\delta(u(t)) < 0$ olur ve Lemma 3.2.6 dan $\|\nabla u(t)\| > r(\delta)$ ve $\|\nabla u(t_0)\| \geq r(\delta)$ elde edilir. $d(\delta)$ nın tanımından $J(u(t_0)) \geq d(\delta)$ olur. Bu da bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.14 ve Lemma 3.2.8 yardımıyla aşağıda teoremler ispatlanabilir.

Teorem 3.2.15. Teorem 3.2.14 de $E(0) = e$ kabulü, $0 < E(0) \leq e$ değiştirilirse Teorem 3.2.14 ün sonuçları yine de geçerli olur.

Teorem 3.2.16. $f(u)$, $u_i(x)$ $(i = 0, 1)$, e ve δ_i $(i = 0, 1)$ Teorem 3.2.14 dekilerle aynı olsun. Bu durumda herhangi bir $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ için W_δ ve V_δ değişmezdir, dolayısıyla

$$W_{\delta_1\delta_2} = \bigcup_{\delta_1<\delta<\delta_2} W_\delta \text{ ve } V_{\delta_1\delta_2} = \bigcup_{\delta_1<\delta<\delta_2} V_\delta$$

kümelerinin ikisi de $0 < E(0) \leq e$ olması durumunda (3.6)-(3.8) in akışı altında değişmezdir.

Teorem 3.2.17. (3.6)-(3.8) probleminin $E(0) = 0$ enerjisine sahip tüm çözümleri

$$B_{r_0}^c = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \|\nabla u\| > r_0 = \left(\frac{1}{2AC_*^\gamma}\right)^{1/(\gamma-2)} \right\}$$

kümesine aittir.

3.2.1. (3.6)-(3.8) Probleminin Çözümlerinin Global Varlık ve Yokluğu

Tanım 3.2.1.1. $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ olmak üzere, $\Omega \times (0, T)$ de $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} (u_t, v) + \int_0^t (\nabla u, \nabla v)\, d\tau &= \int_0^t (f(u), v)\, d\tau + (u_1, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $u = u(x, t)$ şeklindeki çözümlere *zayıf çözüm* denir.

Teorem 3.2.1.2. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L_2(\Omega)$ olsun. $0 < E(0) < d$ ve $I(u_0) > 0$ veya $\|\nabla u_0\| = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.6)-(3.8) problemi $u(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ sağlanacak şekilde bir global zayıf çözüme sahiptir ve $0 \leq t < \infty$ için $u(t) \in W$ olur.

İspat. $\omega_j(x)$, $H_0^1(\Omega)$ da baz fonksiyonlarının bir tabanı olsun. (3.6)-(3.8) probleminin

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\, \omega_j(x), \qquad m = 1, 2, ...$$

şeklinde oluşturulan yaklaşık çözümleri aşağıdakileri sağlasın.

$$(u_{mtt}, \omega_s) + (\nabla u_m, \nabla \omega_s) = (f(u_m), \omega_s), \qquad s = 1, 2, ..., m, \tag{3.17}$$

$$H_0^1(\Omega) \text{ da } u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm}\omega_j(x) \to u_0(x), \tag{3.18}$$

$$L^2(\Omega) \text{ da } u_{mt}(x,0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm}\omega_j(x) \to u_1(x). \tag{3.19}$$

(3.17) $g'_{sm}(t)$ ile çarpılır ve s için toplanırsa

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2 + J(u_m) = E_m(0) < d, \qquad 0 \le t < \infty \tag{3.20}$$

elde edilir ve $0 \le t < \infty$ ve yeterince büyük m için $u_m \in W$ olur. (3.20) ve

$$\begin{aligned} J(u_m) &= \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|^2 - \int_\Omega F(u_m)\,dx \ge \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u_m f(u_m)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{p+1} I(u_m) \ge \frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u_m\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden yeterince büyük m için

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2 + \frac{p-1}{2(p+1)}\|\nabla u_m\|^2 < d \tag{3.21}$$

olur. (3.21) den

$$\|\nabla u_m\|^2 < \frac{2(p+1)}{p-1} d, \qquad 0 \le t < \infty, \tag{3.22}$$

$$\|u_m\|_\gamma^2 \le C_*^2 \|\nabla u_m\|^2 < C_*^2 \frac{2(p+1)}{p-1} d, \qquad 0 \le t < \infty, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \|f(u_m)\|_q^q &\le \int_\Omega \left(\gamma A |u_m|^{\gamma-1}\right)^q dx = (\gamma A)^q \|u_m\|_\gamma^\gamma \\ &\le (\gamma A)^q C_*^\gamma \left(\frac{2(p+1)}{p-1} d\right)^{\gamma/2}, \qquad q = \frac{\gamma}{\gamma-1}, \qquad 0 \le t < \infty, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\|u_{mt}\|^2 < 2d, \qquad 0 \le t < \infty$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.22)-(3.24) den öyle bir u, χ ve $\{u_m\}$ nin $\{u_v\}$ ile gösterilen bir alt dizisi vardır ki $v \to \infty$ iken

$L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ da ve $Q = \Omega \times [0, \infty)$ bölgesinin hemen hemen her yerinde (h.h.h.) $u_v \to u$ zayıf * yakınsar,

$L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ da $u_{vt} \to u_t$ zayıf * yakınsar,

$L^\infty(0, \infty; L^q(\Omega))$ da ve Q nun h.h.h $f(u_v) \to \chi$ zayıf * yakınsar.

Ayrıca $\chi = f(u)$ olduğunu biliyoruz (Lemma 1.3, Lions, 1969). (3.17) 0 dan t ye t değişkenine göre integrallenirse

$$(u_{mt}, \omega_s) + \int_0^t (\nabla u_m, \nabla \omega_s)\, d\tau = \int_0^t (f(u_m), \omega_s)\, d\tau + (u_{mt}(0), \omega_s) \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.25) de sabit s için $m = v \to \infty$ alınırsa

$$(u_t, \omega_s) + \int_0^t (\nabla u, \nabla \omega_s)\, d\tau = \int_0^t (f(u), \omega_s)\, d\tau + (u_1, \omega_s)$$

ve

$$(u_t, v) + \int_0^t (\nabla u, \nabla v)\, d\tau = \int_0^t (f(u), v)\, d\tau + (u_1, v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad t > 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.18) den $H_0^1(\Omega)$ da $u(x,0) = u_0(x)$ olur. Dolayısıyla $u(x,t)$, (3.6)-(3.8) probleminin bir zayıf çözümüdür.

Teorem 3.2.14 ve 3.2.1.2 yardımıyla aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.2.1.3. Teorem 3.2.1.2 de $I(u_0) > 0$, $I_{\delta_2}(u_0) > 0$ ile değiştirilirse, (3.6)-(3.8) problemi $u(t) \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$ sağlanacak şekilde bir global zayıf çözüme sahiptir ve $\delta_1 < \delta < \delta_2$ ve $0 \le t < \infty$ için $u(t) \in W_\delta$ olur. Burada δ_1, δ_2 $d(\delta) = E(0)$ ın $\delta_1 < \delta_2$ şeklindeki iki köküdür.

Teorem 3.2.1.3, Lemma 3.2.5 ve Lemma 3.2.9 (i) den aşağıdaki teorem bulunabilir.

Teorem 3.2.1.4. Teorem 3.2.1.2 de $I(u_0) > 0$ veya $\|\nabla u_0\| = 0$, $\|\nabla u_0\| < r(\delta_2)$ ile değiştirilirse, (3.6)-(3.8) problemi $u(t) \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$ sağlanacak şekilde bir global zayıf çözüme sahiptir ve $0 \le t < \infty$ olmak üzere $\delta_1 < \delta < \min\{\delta_2,\ (p+1)/2\}$ için $\|\nabla u\|^2 < d(\delta)/a(\delta)$, $\delta_1 < \delta < \delta_2$ için $\|u_t\|^2 < 2d(\delta)$ olur. Özel olarak, $0 \le t < \infty$ için $\|\nabla u\|^2 < d(\delta_1)/a(\delta_1)$ ve $\|u_t\|^2 < 2d(\delta_1)$ dir.

Teorem 3.2.1.5. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L_2(\Omega)$ olsun. $E(0) < d$ ve $I(u_0) < 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda (3.6)-(3.8) probleminin çözümleri sonlu zamanda patlar, yani

$$\lim_{t \to T} \|u(t)\| = +\infty \tag{3.26}$$

olacak şekilde bir $T > 0$ vardır.

İspat. $u(t)$, (3.6)-(3.8) probleminin $E(0) < d$ ve $I(u_0) < 0$ koşullarını sağlayan bir çözümü ve $M(t) = \|u(t)\|^2$ olsun. Basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} M'(t) &= 2(u_t, u), \\ M''(t) &= 2\|u(t)\|^2 + 2(u_{tt}, u) \\ &= 2\|u(t)\|^2 - 2I(u) \end{aligned} \tag{3.27}$$

ve

$$M''(t) \geq (p+3)\|u(t)\|^2 + (p-1)\lambda_1 M(t) - 2(p+1)E(0) \tag{3.28}$$

olarak bulunur. Burada $\lambda_1 > 0$, $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ probleminin ilk özdeğeridir.

(i) Eğer $E(0) \leq 0$ ise o zaman (3.28) den

$$M''(t) \geq (p+3)\|u(t)\|^2 \tag{3.29}$$

bulunur.

(ii) Eğer $0 < E(0) < d$ ise Teorem 3.2.14 ve 3.2.16 dan $1 < \delta < \delta_2$ ve $t > 0$ için $u(t) \in V_\delta$ olur. Buradan $1 < \delta < \delta_2$ ve $t > 0$ için $I_\delta(u) < 0$ ve $\|\nabla u\| > r(\delta)$ elde edilir. Böylece $t > 0$ için $I_{\delta_2} \leq 0$ ve $\|\nabla u\| > r(\delta_2)$ olur ve (3.27) den

$$M''(t) \geq 2(\delta_2 - 1)\|\nabla u\|^2 - 2I_{\delta_2}(u) \geq 2(\delta_2 - 1)r^2(\delta_2)t + M'(0)$$

elde edilir ki bu da $M'(t_0) > 0$ ve $M(t) \geq M'(t_0)(t - t_0) + M(t_0)$ olacak şekilde bir bir $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$ varlığını gösterir. Buradan yeterince büyük t için $(p-1)\lambda_1 M(t) > 2(p+1)E(0)$ olur ve (3.29) sağlanır. İspatın geri kalanı Payne ve Sattinger (1975) deki ispat ile aynıdır.

Aşağıdaki teorem $E(0) = d$ ve $I(u_0) \geq 0$ kritik durumu için global varlığı vermektedir ve ispatı Teorem 3.2.1.2 ninkine benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.2.1.6 $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. $E(0) = d$ ve $I(u_0) \geq 0$ olduğu kabul edilsin. O zaman (3.6)-(3.8) problemi $u(t) \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$, $u_t(t) \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$ sağlanacak şekilde bir global zayıf çözüme sahiptir ve $0 \leq t < \infty$ için $u(t) \in \overline{W}$ dir.

3.2.2. (3.9)-(3.11) Probleminin Çözümlerinin Global Varlık ve Yokluğu

Bu kısımda parabolik (3.9)-(3.11) probleminin zayıf çözümlerinin çözümlerinin global varlık ve yokluğu incelenecektir. Öncelikle, Payne ve Sattinger (1975) de olduğu gibi T, $u(x,t)$ nin varlık zamanı olmak üzere, (3.9)-(3.11) probleminin

$$\int_0^t \|u(t)\|^2 d\tau + J(u) \leq J(u_0), \qquad \forall t \in [0,T) \tag{3.30}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. 3.2.14-3.2.17 , 3.2.1.2-3.2.1.4, 3.2.1.6 teoremlerinin ispatı incelenirse, "$u_1(x) \in L^2(\Omega)$" ve "$\|\nabla u\| = 0$" ifadeleri çıkarılıp, $E(0)$, $J(u_0)$ ile $E(t) = E(0)$ enerji eşitliği (3.30) ile, $u_t(t) \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$ de, $u_t(t) \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$ ile değiştirilirse bahsedilen teoremlerin sonuçları yine de geçerli olur.

Teorem 3.2.2.1. $f(u)$, (1)-(3) koşullarını sağlasın ve $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ olsun. $J(u_0) < d$ ve $I(u_0) < 0$ olduğu kabul edilsin. O zaman (3.9)-(3.11) probleminin

çözümü sonlu zamanda patlar, yani

$$\lim_{t\to T}\int_0^t \|u\|^2 d\tau = +\infty \tag{3.31}$$

olacak şekilde bir $T>0$ vardır.

İspat. $u(t)$, (3.9)-(3.11) probleminin $J(u)<d$ ve $I(u_0)<0$ koşullarını sağlayan bir çözümü ve

$$M_1(t) = \int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

olsun. $M_1(t)$ nin t ye göre birinci ve ikinci türevi

$$\begin{aligned} M_1'(t) &= \|u\|^2, \\ M_1''(t) &= 2(u_t,u) = 2\left((f(u),u) - \|\nabla u\|^2\right) = -2I(u) \end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklindedir. (3.30), (3.32) ve

$$\int_\Omega uf(u)\,dx \geq (p+1)\int_\Omega F(u)\,dx$$

yardımıyla

$$\begin{aligned} M_1''(t) &\geq 2(p+1)\int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + (p-1)\|\nabla u\|^2 - 2(p+1)J(u_0) \\ &\geq 2(p+1)\int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + (p-1)\lambda_1 M_1'(t) - 2(p+1)J(u_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} M_1M_1'' - \frac{p+1}{2}\left(M_1'\right)^2 &\geq p+1\left[\int_0^t \|u\|^2 d\tau \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau - \left(\int_0^t (u,u_t)\,d\tau\right)^2\right] \\ &\quad + (p-1)\lambda_1 M_1M_1' - (p+1)\|u_0\|^2 M_1' \\ &\quad -2(p+1)J(u_0)M_1 + \frac{p+1}{2}\|u_0\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} M_1M_1'' - \frac{p+1}{2}(M_1')^2 &\geq (p-1)\lambda_1 M_1M_1' - (p+1)\|u_0\|^2 M_1' \\ &\quad -2(p+1)J(u_0)M_1 + \frac{p+1}{2}\|u_0\|^2 \end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir.

(i) Eğer $J(u_0) \leq 0$ ise,

$$M_1 M_1'' - \frac{p+1}{2}(M_1')^2 \geq (p-1)\lambda_1 M_1 M_1' - (p+1)\|u_0\|^2 M_1'$$

olur. Önce, $t > 0$ için $I(u) < 0$ olduğunu ispatlayacağız. Eğer bu yanlış ise, $I(u(t_0)) = 0$ olacak şekilde bir $t_0 > 0$ olmalıdır. $t_0 > 0$, $I(u(t_0)) = 0$ olmasını sağlayan ilk zaman olsun, bu durumda $0 \leq t < t_0$ için $I(u(t)) < 0$ olur. Lemma 3.2.6 dan $0 < t < t_0$ için $\|\nabla u\| > r(1)$ olur. Dolayısıyla $\|\nabla u(t_0)\| > r(1)$ ve $J(u(t_0)) \geq d$ olur, bu da (3.30) ile çelişir. (3.32) den $t > 0$ için $M_1''(t) > 0$ elde edilir. Buradan ve $M_1'(0) = \|u_0\|^2 \geq 0$ dan $M_1'(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_0 \geq 0$ vardır ve

$$M_1(t) \geq M_1'(t_0)(t - t_0) + M_1(t_0) \geq M_1'(t_0)(t - t_0), \qquad t \geq t_0$$

dır. Yeterince büyük t için $(p-1)\lambda_1 M_1 > (p+1)\|u_0\|^2$ ve

$$M_1 M_1'' - \frac{p+1}{2}(M_1')^2 > 0 \tag{3.34}$$

dır.

(ii) $0 < J(u_0) < d$ ise, Teorem 3.2.1.5 in ispatına benzer olarak $t \geq 0$ için $I_{\delta_2}(u) \leq 0$ ve $\|\nabla u\| > r(\delta_2)$ elde edilebilir. (3.32) den

$$\begin{aligned}
M_1''(t) &= -2I(u) = 2(\delta_2 - 1)\|\nabla_u\|^2 - 2I_{\delta_2}(u) \geq 2(\delta_2 - 1)r^2(\delta_2) > 0, \qquad t \geq 0, \\
M_1'(t) &\geq 2(\delta_2 - 1)r^2(\delta_2)t + M_1'(0) \geq 2(\delta_2 - 1)r^2(\delta_2)t, \qquad t \geq 0, \\
M_1(t) &\geq (\delta_2 - 1)r^2(\delta_2)t^2 + M_1(0) = (\delta_2 - 1)r^2(\delta_2)t^2, \qquad t \geq 0
\end{aligned}$$

olur. Yeterince büyük t için

$$\frac{1}{2}(p-1)\lambda_1 M_1(t) > (p+1)\|u_0\|^2,$$

$$\frac{1}{2}(p-1)\lambda_1 M_1'(t) > 2(p+1)J(u_0).$$

Dolayısıyla, (3.33) yardımıyla tekrar (3.34) elde edilir. İspatın geri kalanı Payne ve Sattinger (1975) deki ispat ile aynıdır.

Teorem 3.2.2.2. Teorem 3.2.2.1 in koşulları altında ek olarak

$$\overline{\lim_{t \to T}} \|u\|_r = +\infty$$

ve

$$\overline{\lim_{t \to T}} \|\nabla u\| = +\infty$$

dur.

Burada $n = 1$ ise $2 \leq r \leq \infty$; $n = 2$ ise $2 \leq r < \infty$; $n \geq 3$ ise $2 \leq r \leq 2n/(n-2)$.

4. DURAĞAN FAZ (STATIONARY PHASE) METODU

Bir fonksiyon analitik değilse (kuvvet serilerine açılamıyorsa) veya fonksiyonu tanımlayan ifadelerin hesaplanması bazı değerler için zor ise bu durumda fonksiyon için bir asimptotik açılım bulmak fonksiyonun yaklaşık değerini bulmamıza yardımcı olur. $n!$ in büyük n ler için yaklaşık değerinin hesaplanmasını sağlayan Stirling yaklaşımı bu duruma verilebilecek klasik bir örnektir ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Durağan faz (stationary phase) metodu, Fourier integralinin bir çeşidiyle ifade edilebilen bir fonksiyonun, yani reel değerli

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx \tag{4.1}$$

fonksiyonunun asimptotik seri açılımının bulunmasını sağlayan bir metottur. Burada λ ve x reel değerlidir, a, b sonsuz ve ψ kompleks değerli olabilir.

(4.1) tipindeki integraller *salınımlı integral* olarak adlandırılmaktadır ve bu integrallerin asimptotik açılımını bulmanın kökeni Laplace (1820) ın

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx$$

integraliyle ilgili çalışmasına dayanmaktadır. Laplace, integrale temel katkının integrasyon aralığında $\phi(x)$ in mutlak maksimumuna ulaştığı noktaların komşuluğundan geldiğini ifade etmiştir. (4.1) de $\left|e^{i\lambda\phi(x)}\right|$ in sabit olması Laplace ın metodunun kullanılmasını engellemektedir. Cauchy (1827) su dalgalarının yayılmasıyla ilgili bir çalışmasında, Stokes (1856) un Airy integrallerini hesaplamak için kullandığı bir metoda değinmiştir. Durağan faz metodu her ne kadar Cauchy, Stokes ve Riemann' ın çalışmalarında bazı Fourier dönüşümlerinin asimptotik açılımlarını bulmak için kullanılmışsa da, açık olarak ilk defa Lord Kelvin (1887) tarafından verilmiştir. Kelvin, düz bir kanaldaki su dalgalarının yayılmasıyla ilgili çalışmasında (4.1) formunda bir integral elde etmiştir. İntegralin ortaya çıktığı fiziksel olaya dayanarak, bu integrale en büyük katkının integrasyon aralığının uç noktalarının komşuluğundan ve integrasyon aralığında $\phi'(x)$ in durağan olduğu, yani $\phi'(x) = 0$ ı sağlayan noktalardan geldiğini belirtmiştir.

Durağan faz (stationary phase) metodu uzun bir süreden beri jeofiziksel ısı iletimi, elastik titreşim problemleri, dalgaların yayılması, optik, astronomi, kuantum mekaniği, olasılık teorisi ve sayıların geometrisi gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Fiziksel problemlerde, özellikle de dalgaların yayılımında $\phi(x)$ veya $\lambda\phi(x)$ faz olarak, $\psi(x)$ de genlik olarak yorumlandığından Stokes ve Kelvin' in metodu, durağan faz metodu olarak bilinmektedir.

Watson (1918), ϕ ve ψ üzerine koyduğu oldukça genel koşullar altında metodun ispatını kesin olarak ilk defa vermiş, onu 1934 de van der Corput izlemiştir. Erdélyi (1956), (4.1) integralini ϕ ve ψ nin kısıtlanmış bir sınıfı, yani

$$\phi'(x) = (x-a)^{\rho-1}(b-x)^{\sigma-1} f_1(x), \qquad (\rho, \sigma \geq 1)$$

ve

$$\psi'(x) = (x-a)^{\lambda-1}(b-x)^{\mu-1} g_1(x), \qquad (0 < \lambda, \mu \leq 1)$$

için incelemiştir. Burada, $f_1(x)$ pozitif ve $a \leq x \leq b$ için N defa sürekli türevlenebilir, $g_1(x)$ ise $a \leq x \leq b$ için N defa sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Erdélyi, integrale a ve b noktalarındaki (f nin formundan dolayı durağan noktalar sadece (a,b) aralığındadır) katkıyı ayrı olarak ele almak için kısmi integrasyon ve van der Corput neutralizer (birimin parçalanması) ı kullanmıştır. Eğer $f_1(x)$ ve $g_1(x)$ tüm mertebelerden sürekli türevlere sahip iseler bu durumda Erdélyi' nin metodu (4.1) için tam bir asimptotik açılım verir.

Durağan faz metodunun temel mantığı (4.1) salınımlı integralinde bir dizi indirgeme yapmaya dayanmaktadır. Bu indirgemeler üç adımda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1. ψ, ϕ nin durağan noktalarının küçük bir komşuluğuna lokalize edilir.
2. Her bir durağan noktanın katkısı ayrı olarak alınır ve her durağan nokta için bir lokalize salınımlı integrale ulaşılır.
3. Her bir lokalize integral için faz fonksiyonu ve ψ bir analitik fonksiyona indirgenir.

Bu üç adım aşağıda daha açık olarak verilmiştir.

(a) Lokalizasyon: $I(\lambda)$ integralinin asimptotik davranışı $\phi'(x) = 0$ eşitliğini sağlayan noktalar tarafından belirlenir.

Lemma 4.1. (Stein 1986) $\psi \in C_0^\infty(a,b)$ ve $[a,b]$ aralığında $\phi'(x) \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\lambda \to \infty$ iken, her $N \geq 0$ için $I(\lambda) = O\left(\lambda^{-N}\right)$ dir.

(b) *Ölçeklendirme (Scaling):* Bazı sabit k lar için sadece $\left|\frac{d^k\phi(x)}{dx^k}\right| \geq 1$ olduğu bilinsin ve $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx$ integrali için a ve b den bağımsız bir kestirim elde edilmeye çalışılsın. Bu durumda basit bir ölçeklendirme argümanıyla mümkün olan tek kestirimin $O\left(\lambda^{-1/k}\right)$ olduğu görülür. Bu da aslında Van der Corput lemmasındaki durumdur.

Lemma 4.2. (Stein 1986) ϕ, $[a,b]$ aralığında reel değerli ve düzgün olsun. $\left|\phi^{(k)}(x)\right| \geq 1$ ise, o zaman

(i) $k \geq 2$

(ii) veya $k=1$ ve ek olarak $\phi'(x)$ in monoton olduğu kabul edillirse

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx \leq C_k\lambda^{-1/k}$$

eşitsizliği geçerli olur.

Lemma 4.3. (Stein 1986) Lemma 4.2 de ϕ üzerine konulan koşullar altında

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx\right| \leq C_k\lambda^{-1/k}\left[\psi(b)+\int_a^b \phi'(x)\,dx\right]$$

sonucuna varılabilir.

(c) *Asimptotikler:* Yukarıda $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi dx$ integralinin davranışının $\phi'(x_0)=0$ (ϕ nin kritik noktaları) eşitliğini sağlayan x_0 noktaları tarafından belirlendiği açıklanmıştı. ψ nin desteğinin, ϕ nin sadece bir tane kritik noktasını kapsayacak kadar küçük olduğu kabul edilsin. Bu durumda asimptotik açılımın karakteri $\phi^{(k)}(x_0)\neq 0$ ı sağlayan en küçük k ya bağlıdır ve Lemma 4.2. ile bağlantılı olarak λ nın kuvvetlerinin terimleriyle verilir.

Lemma 4.4. (Stein 1986) ϕ nin reel ve düzgün olduğu, $k\geq 2$ ve $\phi^k(x_0)\neq 0$ iken $\phi(x_0)=\phi'(x_0)=...=\phi^{(k-1)}(x_0)=0$ olduğu kabul edilsin. Eğer $\psi\in C_0^\infty$ ve ψ nin desteği x_0 ın yeterince küçük bir komşuluğu ise, bu durumda, negatif olmayan n ve r tamsayıları için $\lambda\to\infty$ iken

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^r\left[I(\lambda)-\sum_{j=0}^{N}a_j\lambda^{-j/k}\right]=O\left(\lambda^{-(N+1)/k-r}\right)$$

anlamında

$$I(\lambda)=\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx\sim\lambda^{-1/k}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\lambda^{-j/k}$$

dır.

Not 4.5. k çift iken, tek j ler için $a_j=0$ dır.

Durağan faz metodu birçok yazar tarafından farklı denklemlerin çözümlerinin global varlığı ve azalması (decay) incelenirken kullanılmıştır, ancak burada sadece birkaçı verilecektir.

Albert (1989), Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin çözümlerinin küçük başlangıç verileri için azalmasını (decay) durağan faz (stationary phase) metodu yardımıyla göstermiştir.

Biler (1992), BBM denkleminin çözümlerinin uzun zaman davranışını iki boyutta bu yöntem yardımıyla incelemiştir.

Godefroy (2004), kötü Boussinesq tipli bir denklem için çözümlerinin global varlığını ve azalmasını, başlangıç verilerinin küçüklüğü koşulu altında bu yöntemle ispatlamıştır.

Muñoz Grajales ve Rivas (2008), Boussinesq tipli bir denklem için çözümlerin varlığını ve decayını yine bu yöntemle ispatlamıştır.

5. ALTINCI MERTEBEDEN UZAMSAL TÜREVLER İÇEREN BOUSSINESQ TİPLİ BİR DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİ

Bu bölümde, altıncı mertebeden sadece uzamsal türevler içeren Boussinesq tipli denklem için aşağıdaki Cauchy problemi

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} - u_{xxxxxx} = f(u)_{xx}, \quad x \in R,\ t > 0, \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in R \tag{5.2}$$

incelenecektir. Burada, $u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon, f doğrusal olmayan terim, $\alpha = \pm 1$ ve u_0 ve u_1 verilmiş başlangıç değer fonksiyonlarıdır. (5.1) denklemi, Daripa (2006) tarafından Euler'in hareket denklemine standart perturbasyon metodu uygulanarak elde edilen ve sığ su dalgalarının iki yönlü yayılımını ifade eden yüksek mertebeden Boussinesq-tipli bir denklemdir. $\alpha = 1$ için denklem *iyi Boussinesq tipli* bir denklem iken, $\alpha = -1$ için *kötü Boussinesq tiplidir*. Kötü Boussinesq denkleminin başlangıç değer problemi çeşitli kısa dalga kararsızlıklarına sahiptir ve bu kararsızlıktan dolayı keyfi başlangıç verileri için denklemin klasik çözümleri var olmayabilir. Bu bölümde (5.1), (5.2) problemi için $\alpha = 1$ iken lokal, global varlık ve blow up incelenecek, ayrıca $\alpha = -1$ için de $f(u) = u^2$ lineer olmayan terimi ve farklı başlangıç koşullarıyla blow up verilecektir.

$\alpha = 1$ için global varlık ispatlanırken (5.1), (5.2) problemi aşağıdaki yardımcı probleme dönüştürülecektir.

$$v_{tt} - v_{xx} + v_{xxxx} - v_{xxxxxx} = \varphi(v_x)_x, \quad x \in R,\ t > 0, \tag{5.3}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in R. \tag{5.4}$$

Burada $\varphi(s) = -\gamma |s|^p$, $\gamma \neq 0$ ve $p > 1$ sabitlerdir. $v_x(x,t) = u(x,t)$, $v_{0x}(x) = u_0(x)$ ve $v_{1x}(x) = u_1(x)$ alınarak (5.1), (5.2) probleminin global çözümü (5.3), (5.4) probleminden elde edilebilir. Bölümün temel sonuçları aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.1. $\frac{1}{2} < s < p$ olsun. $u_0 \in H^s(R), u_1 \in H^{s-3}(R)$ için $[0, T_m)$, u nun maksimal varlık zaman aralığı olmak üzere (5.1), (5.2) Cauchy problemi bir tek $u \in C([0,T_m); H^s) \cap C^1([0,T_m); H^{s-3})$ çözümüne sahiptir. Ayrıca eğer

$$\sup_{0 \le t < T_m} \left(\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-3}} \right) < \infty \tag{5.5}$$

ise, $T_m = \infty$ olur.

Teorem 5.2. $2 \le s < p+1$, $v_0 \in H^{s+1}$ ve $v_1 \in H^{s-2}$ olsun. Eğer $v_0 \in W$ ve $E(0) \le d$ ise, o zaman (5.3), (5.4) probleminin bir tek $v \in C([0,\infty); H^{s+1}) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2})$ global çözümü vardır ve her $t \in [0,\infty)$ için $v \in W \cap \partial W$ dır.

Teorem 5.3. $2 \leq s < p+1$, $v_0 \in H^{s+1}$ ve $v_1 \in H^{s-2}$ olsun.

(i) $E(0) \leq d$ ve $v_0 \in V$,

(ii) $E(0) = d$ iken $(v_0, v_1) \geq 0$ ve $v_0 \in V$

koşullarından biri sağlanıyorsa, o zaman (5.3), (5.4) probleminin $v(x,t)$ çözümü sonlu zamanda blow up olur..

Teorem 5.4. $(\varphi, \psi) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R})$ ve $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi_x \in L^2(R)$ olsun. Eğer başlangıç verileri

(i) $E(0) = \frac{1}{2}\left\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi_x\right\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{1}{2}\|\varphi_x\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_{xx}\|^2 + \frac{1}{3}\int_R \varphi^3 dx < 0,$

(ii) $E(0) = 0$ *ve* $\left((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi_x\right) > 0,$

(iii) $E(0) > 0$ *ve* $\left((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi, (-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi_x\right) > \sqrt{\frac{12}{\alpha+2} E(0) \left\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi\right\|^2}$

koşullarından birini sağlıyorsa bu durumda u çözümü sonlu zamanda blow up olur.

5.1. $\alpha = 1$ İçin Lokal Çözümün Varlığı

Bu kısımda (5.1), (5.2) probleminin lokal çözümlerinin varlık ve tekliği daralma dönüşümü prensibi yardımıyla verilecektir.

Lemma 5.1.1. $s \in R$ olsun. Herhangi bir $T > 0$ için $u_0 \in H^s, u_1 \in H^{s-3}$ ve $h \in L^1([0,T]; H^s)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} - u_{xxxxxx} = (h(x,t))_{xx}, \quad x \in R,\ t > 0 \tag{5.6}$$

doğrusal denklemi (5.2) başlangıç koşullarıyla bir tek $u \in C([0,T); H^s) \cap C^1([0,T); H^{s-3})$ çözümüne sahiptir ve

$$\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^{s-3}} \leq C(1+T)\left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-3}} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{H^s} d\tau\right), \quad 0 \leq t \leq T \tag{5.7}$$

kestirimi geçerlidir.

İspat. (5.6), (5.2) doğrusal problemine karşılık gelen u çözümünün varlık ve tekliği klasik metotlarla kolayca yapılabilmektedir. Burada sadece (5.7) kestiriminin ispatı verilecektir.

(5.6), (5.2) ye x e göre Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\widehat{u}_{tt} + \left(\xi^2 + \xi^4 + \xi^6\right)\widehat{u} = -\xi^2 \widehat{h}(\xi, t), \tag{5.8}$$

$$\widehat{u}(\xi,0)=\widehat{u}_0(\xi),\qquad \widehat{u}_t(\xi,0)=\widehat{u}_1(\xi) \tag{5.9}$$

elde edilir. Yukarıdaki Cauchy probleminin integral formundaki çözümü

$$\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{u}_0(\xi)\cos(\sigma(\xi)t)+\frac{\widehat{u}_1(\xi)}{\sigma(\xi)}\sin(\sigma(\xi)t)-\int_0^t\frac{\xi^2\sin((t-\tau)\sigma(\xi))\widehat{h}(\xi,\tau)}{\sigma(\xi)}d\tau \tag{5.10}$$

şeklinde olup, burada $\sigma(\xi)=\sqrt{\xi^2+\xi^4+\xi^6}$ dir. $|\xi|\geq 1$ için

$$c_1\left(1+|\xi|^2\right)^3\leq\sigma^2(\xi)\leq c_2\left(1+|\xi|^2\right)^3 \tag{5.11}$$

eşitsizliği geçerli olup, burada $c_1>\frac{1}{3}$, $c_2>0$ dır. (5.10) t ye göre diferansiyellenir ve (5.11) kullanılırsa (5.7) elde edilebilir.

$$X(T)=\left\{u:u\in C([0,T);H^s)\cap C^1\left([0,T);H^{s-3}\right)\right\}$$

fonksiyon uzayı

$$\|u\|_{X(T)}=\max_{0\leq t\leq T}\left(\|u(t)\|_{H^s}+\|u_t(t)\|_{H^{s-3}}\right)$$

normuyla tanımlansın. $X(T)$ nin bir Banach uzayı olduğu açıktır.

Her $M,T>0$ için

$$Q(M,T)=\left\{u:\|u\|_{X(T)}\leq M\right\}$$

kümesi tanımlansın. Her $M,T>0$ için $Q(M,T)$, $X(T)$ nin boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir. Her $u\in X(T)$ için

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxx}-u_{xxxxxx}=f(\omega)_{xx},\qquad x\in R,\ t>0 \tag{5.12}$$

denklemi (5.2) başlangıç koşuluyla ele alınsın. $f(\omega(x,t))=h(x,t)$ için bu problem Lemma 5.1.1 deki doğrusal probleme dönüşür, dolayısıyla Lemma 5.1.1 uygulanabilir. $\mathcal{N}$, ω yı (5.12), (5.2) probleminin tek çözümüne götüren dönüşüm olsun. Lemma 5.1.1 den $\mathcal{N}$ nin $X(T)$ yi $X(T)$ ye dönüştürdüğü görülür. Burada amaç $\mathcal{N}$ nin $Q(M,T)$ de bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermektir.

Lemma 5.1.2 (Polat ve Ertaş 2009) $s\geq 0$ olmak üzere $f\in C^{[s]+1}(R)$, $f(0)=0$, $u\in H^s\cap L^\infty$ olsun. Bu durumda, eğer $\|u\|_\infty\leq M$ ise

$$\|f(u)\|_{H^s}\leq K_1(M)\|u\|_{H^s}$$

olur. Burada $K_1(M)$, M ye bağlı bir sabittir.

Lemma 5.1.3 (Polat ve Ertaş 2009) $s\geq 0$ olmak üzere $f\in C^{[s]+1}(R)$, $u,v\in H^s\cap L^\infty$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, eğer $\|u\|_\infty\leq M$ ve $\|v\|_\infty\leq M$ ise

$$\|f(u)-f(v)\|_{H^s}\leq K_2(M)\|u-v\|_{H^s}$$

olur. Burada $K_2(M)$, M ye bağlı bir sabittir.

Lemma 5.1.4. $s > \frac{1}{2}$, $u_0 \in H^s, u_1 \in H^{s-3}$ *ve* $f \in C^k(R)$ $(k = [s] + 1)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{N}$, yeterince küçük T için $Q(M,T)$ den kendi içine bir daralma dönüşümüdür.

İspat. 5.1.2 ve 5.1.3 lemmaları yardımıyla Polat ve Ertaş (2009) daki Lemma 2.3 ün ispatına benzer olarak bu lemma ispatlanabilir.

Teorem 5.1 in İspatı. Lemma 5.1.24 ve daralma dönüşümü prensibi yardımıyla uygun seçilmiş $T > 0$ için $\mathcal{N}$, (5.1), (5.2) probleminin çözümü olan bir tek $u(x,t) \in Q(M,T)$ sabit noktasına sahiptir. Her $T > 0$ için çözümün tekliğini göstermek zor değildir.
$[0, T_m)$, u nun maksimal varlık zaman aralığı olsun. (5.5) in sağlanması durumunda $T_m = \infty$ olduğu gösterilecektir.
(5.5) in sağlandığı ve $T_m < \infty$ olduğu kabul edilsin. Herhangi bir $T' \in [0, T_m)$ için

$$w_{tt} - w_{xx} + w_{xxxx} - w_{xxxxxx} = f(w)_{xx}, \tag{5.13}$$

$$w(x,0) = u(x,T'), \qquad w_t(x,0) = u_t(x,T') \tag{5.14}$$

Cauchy problemi ele alınsın. (5.5) den

$$\left\|u(T')\right\|_{H^s} + \left\|u_t(T')\right\|_{H^{s-3}} \leq K$$

olur. Burada K, $T' \in [0, T_m)$ den bağımsız bir sabittir. Lemma 5.1.4 ve daralma dönüşümü prensibinden her $T' \in [0, T_m)$ için (5.13), (5.14) problemi bir tek $w(x,t) \in X(T_1)$ çözümüne sahip olacak şekilde bir $T_1 \in [0, T_m)$ in var olduğu görülür.
$T' = T_m - \frac{T_1}{2}$ olarak alınsın ve

$$\overline{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in \left[0, T'\right], \\ w\left(x, t - T'\right), & t \in \left[T', T_m + \frac{T_1}{2}\right] \end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda $\overline{u}(x,t)$, (5.1), (5.2) probleminin $\left[0, T_m + \frac{T_1}{2}\right]$ aralığındaki bir çözümüdür ve lokal teklikten $\overline{u}$, u ya genişler. Bu da $[0, T_m)$ aralığının maksimalliğini bozar. Buradan (5.5) sağlanırsa, $T_m = \infty$ olması gerektiği sonucuna varılır.

5.2. Potential Well

Bu kısımda, (5.3), (5.4) problemi için potential well ve sonraki kısımdaki teoremlerin ispatında kullanılacak bazı lemmalar verilecektir.

(5.3), (5.4) Cauchy problemi için

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|v_t\|^2 + \|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2 + \|v_{xxx}\|^2\right] - \frac{\gamma}{p+1}\|v_x\|_{p+1}^{p+1} = E(0), \tag{5.15}$$

$$J(v)=\frac{1}{2}\left[\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right]-\frac{\gamma}{p+1}\|v_x\|_{p+1}^{p+1}, \tag{5.16}$$

$$I(v)=\left[\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right]-\gamma\|v_x\|_{p+1}^{p+1} \tag{5.17}$$

şeklindedir ve yukarıdakilerin tümü $H^3(R)$ de iyi tanımlıdır. Potential well kümesi W ve bu kümenin dışındaki bir küme olan V

$$\mathcal{W}=\left\{v\in H^3: I(v)>0, J(v)<d\right\}\cup\{0\}, \tag{5.18}$$

$$\mathcal{V}=\left\{v\in H^3: I(v)<0, J(v)<d\right\} \tag{5.19}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$d=\inf J(v)$$

dir.

Lemma 5.2.1. *Eğer* $v\in H^3(R)$ *ve* $v\neq 0$ ise, o zaman

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} J(\lambda v)=-\infty$, $\lim_{\lambda\to 0} J(\lambda v)=0$ dır,

(ii) $0<\lambda<\infty$ aralığında $\frac{dJ(\lambda v)}{d\lambda}=0$ olacak şekilde bir tek $\lambda^*=\lambda^*(v)$ mevcuttur,

(iii) $J(\lambda v)$, $[0,\lambda^*)$ aralığında artan ve (λ^*,∞) aralığında azalandır,

(iv) $0<\lambda<\lambda^*$ için $I(\lambda v)>0$ *ve* $\lambda^*<\lambda<\infty$ için $I(\lambda v)<0$ *ve* $I(\lambda^* v)=0$ dır.

İspat. (5.16) dan

$$J(\lambda v)=\frac{\lambda^2}{2}\left[\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right]-\frac{\gamma}{p+1}\lambda^{p+1}\|v_x\|_{p+1}^{p+1} \tag{5.20}$$

dir. λ ya göre türev alınırsa

$$\frac{dJ(\lambda v)}{d\lambda}=\lambda\left[\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right]-\gamma\lambda^p\|v_x\|_{p+1}^{p+1} \tag{5.21}$$

bulunur.

Buradan (5.21) i sıfır yapan bir tek

$$\lambda^*=\left(\frac{\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2}{\gamma\|v_x\|_{p+1}^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{5.22}$$

ın var olduğu görülür. Bu durumda $J(\lambda v)$, $[0,\lambda^*)$ aralığında artan, (λ^*,∞) aralığında ise azalandır. (iv) şıkkı, $I(\lambda v)=\lambda\frac{dJ(\lambda v)}{d\lambda}$ gerçeğinden ve (5.21) den elde edilir.

(5.16), (5.17) den

$$J(v)=\frac{p-1}{2(p+1)}\left[\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right]+\frac{1}{p+1}I(v) \tag{5.23}$$

olur. $I(v)=0$ ve $v\neq 0$ alınırsa

$$J(v)=\frac{p-1}{2(p+1)}\left[\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right] \tag{5.24}$$

bulunur. Böylece, $I(v)=0$ ve Sobolev gömülme teoreminden

$$\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2=\gamma\|v_x\|_{p+1}^{p+1}\leq\gamma S_p^{p+1}\left(\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right)^{\frac{p+1}{2}} \tag{5.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada S_p, $H^3(R)$ den $L^{p+1}(R)$ ye

$$S_p=\sup_{v\in H^3,u\neq 0}\frac{\|v_x\|_{p+1}}{\left(\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklindeki gömülme sabitidir. (5.25) kullanılarak

$$\left(\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2\right)^{\frac{p-1}{2}}\geq\frac{1}{\gamma S_p^{p+1}} \tag{5.26}$$

elde edilir. (5.24), (5.26) dan potential well derinliği d, S_p cinsinden

$$d=\frac{p-1}{2(p+1)}|\gamma|^{\frac{-2}{p-1}}S_p^{-2\frac{p+1}{p-1}} \tag{5.27}$$

şeklinde yazılabilir. (5.24), (5.25) ve (5.27) yardımıyla aşağıdaki lemmalar ispatlanabilir.

Lemma 5.2.2. $J(v)\leq d$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $I(v)>0$ dır ancak ve ancak

$$0<\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2<2\frac{(p+1)}{p-1}d.$$

Lemma 5.2.3. $J(v)\leq d$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $I(v)<0$ dır ancak ve ancak

$$\|v_x\|^2+\|v_{xx}\|^2+\|v_{xxx}\|^2>\left(\gamma S_p^{p+1}\right)^{\frac{2}{1-p}}.$$

Aşağıdaki lemma $\mathcal{W}$ ve $\mathcal{V}$ nin (5.3), (5.4) probleminin akışı altında değişmezliğini göstermektedir.

Lemma 5.2.4. $v_0\in H^3$, $v_1\in L^2$ ve $v\in C([0,T_m);H^3)\cap C^1([0,T_m);L^2)$ nin (5.3), (5.4) Cauchy probleminin tek çözümü olduğu kabul edilsin. Ayrıca $E(0)<d$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $t\in[0,T_m)$ için
(i) Eğer $v(0)\in\mathcal{W}$ ise $v(t)\in\mathcal{W}$ dır.
(ii) Eğer $v(0)\in\mathcal{V}$ ise $v(t)\in\mathcal{V}$ dir.

İspat. Burada sadece (i) ispatlanacaktır, (ii) nin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. $v(0)\in\mathcal{W}$ olsun, her $t\in[0,T_m)$ için $v(t)\in\mathcal{W}$ olduğu ispatlanacaktır. $E(0)<d$

kabulünden $J(v) < d$ olur. Lemma 5.2.2 den

$$\|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2 + \|v_{xxx}\|^2 < \frac{2(p+1)}{p-1}d$$

elde edilir. Bu doğru değilse $I(u(t))$ nin sürekliliğinden bir $\bar{t} \in [0, T_m)$ vardır ki,

$$\left\|v_x\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xxx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 = \frac{2(p+1)}{p-1}d$$

dir. (5.25) ve (5.27) den

$$\begin{aligned} J\left(v\left(\bar{t}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left[\left\|v_x\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xxx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2\right] - \frac{\gamma}{p+1}\left\|v_x\left(\bar{t}\right)\right\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\left[\left\|v_x\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xxx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2\right] \\ &\quad -\frac{\gamma}{p+1}S_p^{p+1}\left[\left\|v_x\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xxx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2\right]^{\frac{p+1}{2}} \\ &= d \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da $J(v) < d$ yi ihlal ettiği için imkansızdır. Böylece lemma ispatlanmış olur.

5.3. $\alpha = 1$ İçin Global Varlık ve Yokluk

Bu kısımda 5.2 ve 5.3 teoremleri ispatlanacaktır.

Teorem 5.3.1. Teorem 5.1 in kabullerine ek olarak $T_m > 0$, (5.3), (5.4) probleminin maksimal varlık zamanı olsun. Eğer

$$\sup_{0 \leq t < T_m} \|v_x(t)\|_{L^\infty} = M < \infty$$

ise $T_m = \infty$ dır. Burada M bir sabittir.

İspat. Lemma 5.1.1 de $h(x,t) = f(v_x(x,t))$ olarak alınır ve Lemma 5.1.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|v_x(t)\|_{H^s} + \|v_{xt}(t)\|_{H^{s-3}} &\leq C(1+T)\left(\|v_{0x}\|_{H^s} + \|v_{1x}\|_{H^{s-3}} + \int_0^t \|f(v_x(\tau))\|_{H^s} d\tau\right) \\ &\leq C(1+T)\left(\|v_{0x}\|_{H^s} + \|v_{1x}\|_{H^{s-3}} + \int_0^t K_1(M)\|v_x(\tau)\|_{H^s} d\tau\right) \\ &\leq C(1+T) \\ &\quad \times \left(\|v_{0x}\|_{H^s} + \|v_{1x}\|_{H^{s-3}} + \int_0^t K_1(M)\left(\|v_x\|_{H^s} + \|v_{xt}\|_{H^{s-3}}\right) d\tau\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve Gronwall lemmasından $v_x(t)$ nin H^s -normunun ve $v_{xt}(t)$ nin H^{s-3} -normunun sonlu zamanda patlamadığı görülür. Dolayısıyla Teorem 5.1 den $T_m = \infty$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3.2. $2 \leq s \leq p+1$, $v_0 \in H^{s+1}$ ve $v_1 \in H^{s-2}$, $E(0) < d$ ve $I(v_0) > 0$ olsun. Bu durumda, (5.3), (5.4) Cauchy problemi bir tek $v \in C([0,\infty); H^{s+1}) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2})$ global çözümüne sahiptir ve $t \in [0,\infty)$ için $v \in \mathcal{W}$ dır.

İspat. Teorem 5.3.1 e göre (5.3), (5.4) Cauchy problemi için $v_x(t)$ nin L^∞ -normunun patlamayacağını göstermek yeterlidir. $E(0) < d$ ve $I(v_0) > 0$ kabulleri ve Lemma 5.2.4 den $v \in \mathcal{W}$ sonucuna varılır ve

$$\|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2 + \|v_{xxx}\|^2 < \frac{2(p+1)}{p-1} d$$

olur ki, buradan da

$$\sup_{0 \leq t < T_m} \|v_x(t)\|_{L^\infty} = M < \infty$$

sonucu çıkarılır. Dolayısıyla Teorem 5.3.1 den $T_m = \infty$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 5.2 nin İspatı. Teorem 5.1, (5.3), (5.4) Cauchy problemi için $v \in C([0,T_m); H^{s+1}) \cap C^1([0,T_m); H^{s-2})$ şeklinde bir lokal çözümün varlığını garantilemektedir. Şimdi $T_m = \infty$ olduğu gösterilecektir. Lemma 5.2.2, (5.25)-(5.27) den

$$\begin{aligned} \|v_{0x}\|_{p+1}^{p+1} &\leq S_p^{p+1} \left(\|v_{0x}\|^2 + \|v_{0xx}\|^2 + \|v_{0xxx}\|^2\right)^{\frac{p+1}{2}} \\ &\leq S_p^{p+1} \left(\frac{2(p+1)}{p-1} d\right)^{\frac{p-1}{2}} \left(\|v_{0x}\|^2 + \|v_{0xx}\|^2 + \|v_{0xxx}\|^2\right) \\ &= |\gamma|^{-1} \left(\|v_{0x}\|^2 + \|v_{0xx}\|^2 + \|v_{0xxx}\|^2\right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

olup, (5.21) ve (5.28) den

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\lambda v_0)}{d\lambda} &= \lambda \left[\|v_{0x}\|^2 + \|v_{0xx}\|^2 + \|v_{0xxx}\|^2\right] - \gamma \lambda^p \|v_{0x}\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq \lambda(1-\lambda) \left(\|v_{0x}\|^2 + \|v_{0xx}\|^2 + \|v_{0xxx}\|^2\right) > 0, \quad \forall \lambda \in (0,1) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.3), (5.4) Cauchy probleminin yaklaşık çözümlerinin oluşturulması için $0 < \lambda_m < 1$, $m = 1, 2, ...$olmak üzere $\{\lambda_m\}$ şeklinde bir dizi oluşturulsun. $v_{0m} = \lambda_m v_0$, $v_{1m} = \lambda_m v_1$ olsun. $m \to \infty$ iken $\lambda_m \to 1$ dir. (5.4) başlangıç koşulu

$$v(x,0) = v_{0m}(x), \qquad v_t(x,0) = v_{1m}(x) \tag{5.29}$$

formundadır. Eğer $v_0 \in \mathcal{W}$ ise, $I(v_0) > 0$ olur. Lemma 5.2.2 den

$$\begin{aligned} \|v_{0mx}\|^2 + \|v_{0mxx}\|^2 + \|v_{0mxxx}\|^2 &= \lambda_m^2 \left(\|v_{0x}\|^2 + \|v_{0xx}\|^2 + \|v_{0xxx}\|^2 \right) \\ &< \frac{2(p+1)}{p-1} d \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E_m(0) &= \frac{1}{2} \|v_{1m}\|^2 + J(v_{0m}) = \frac{1}{2} \|v_{1m}\|^2 + J(\lambda_m v_0) \\ &< \frac{1}{2} \|v_{1m}\|^2 + J(v_0) = E(0) \leq d \end{aligned}$$

elde edilir. $v_m \in C([0,T_m); H^s) \cap C^1([0,T_m); H^{s-3})$, (5.3), (5.29) Cauchy probleminin global zayıf çözümü olsun. Teorem 5.3.2 den her m için v_m nin (5.3), (5.29) probleminin tek global zayıf çözümü olacağı ve

$$\begin{aligned} (v_{mt}, w) + \int_0^t \left[(v_{mx}, w_x) + (v_{mxx}, w_{xx}) + (v_{mxxx}, w_{xxx}) + (\gamma |v_{mx}|^p, w_x) \right] d\tau &= (v_{1m}, w), \\ \forall w &\in H^3 \quad (5.30) \end{aligned}$$

eşitliğini sağlayacağı açıktır. Ayrıca (5.15) den

$$\frac{1}{2} \|v_{mt}\|^2 + J(v_m) = E_m(0) < d \tag{5.31}$$

olur. (5.31) ve

$$\begin{aligned} J(v_m) &= \frac{p-1}{2(p+1)} \left[\|v_{mx}\|^2 + \|v_{mxx}\|^2 + \|v_{mxxx}\|^2 \right] + \frac{1}{p+1} I(v_m) \\ &\geq \frac{p-1}{2(p+1)} \left[\|v_{mx}\|^2 + \|v_{mxx}\|^2 + \|v_{mxxx}\|^2 \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2} \|v_{mt}\|^2 + \frac{p-1}{2(p+1)} \left[\|v_{mx}\|^2 + \|v_{mxx}\|^2 + \|v_{mxxx}\|^2 \right] < d \tag{5.32}$$

bulunur. (5.32) den

$$\|v_{mx}\|^2 + \|v_{mxx}\|^2 + \|v_{mxxx}\|^2 < \frac{2(p+1)}{p-1} d \tag{5.33}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikler yardımıyla

$$\|v_{mt}\|^2 \leq 2d \tag{5.34}$$

ve

$$\|v_{mx}\|_{p+1}^{p+1} \leq |\gamma|^{-1} \frac{2(p+1)}{p-1} d \tag{5.35}$$

bulunur. (5.33)-(5.35) eşitsizliklerinden $\eta \to \infty$ iken
$L^{\infty}(0,\infty;H^2)$ da ve $R \times [0,\infty)$ ın h.h.h $v_{\eta x} \to \widetilde{v}_x$ zayıf* yakınsar,
$L^{\infty}(0,\infty;L^2)$ da $v_{\eta t} \to \widetilde{v}_t$ zayıf* yakınsar,
$L^{\infty}(0,\infty;L^q)$ da $|v_{\eta x}|^p \to |\widetilde{v}_x|^p$ zayıf* yakınsar
olacak şekilde $\widetilde{v} \in \mathcal{W} \cap \partial\mathcal{W}$ ve $\{v_m\}$ nin bir $\{v_\eta\}$ altdizisi vardır. Burada $q = \frac{p+1}{p}$ dir.

$m = \eta \to \infty$ alınırsa

$$(\widetilde{v}_t, w) + \int_0^t \left[(\widetilde{v}_x, w_x) + (\widetilde{v}_{xx}, w_{xx}) + (\widetilde{v}_{xxx}, w_{xxx}) + (\gamma |\widetilde{v}_x|^p, w_x)\right] d\tau = (\widetilde{v}_1, w)$$

olur. Bu da $\widetilde{v}$ nın (5.3) ü ve $\widetilde{v}(x,0) = v_0(x)$, $\widetilde{v}_t(x,0) = v_1(x)$ başlangıç koşullarını sağladığı anlamına gelir. Böylece, $\widetilde{v}$ (5.3), (5.4) probleminin bir global çözümüdür.

Zayıf çözümün tekliğinden $[0,T_m)$ aralığında $\widetilde{v} = v$ elde edilir ve

$$\|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2 + \|v_{xxx}\|^2 = \|\widetilde{v}_x\|^2 + \|\widetilde{v}_{xx}\|^2 + \|\widetilde{v}_{xxx}\|^2 \leq \frac{2(p+1)}{p-1} d$$

olur. Dolayısıyla, Teorem 5.3.1 den $T_m = \infty$ ve $v \in C([0,\infty); H^{s+1}) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2})$ bulunur.

Lemma 5.3.3. Lemma 5.2.4 ün kabullerine ek olarak $v \in C([0,T_m); H^3) \cap C^1([0,T_m); L^2)$ nin (5.3), (5.4) probleminin tek çözümü olduğu kabul edilsin. Ayrıca $E(0) = d$ ve $(v_0, v_1) \geq 0$ olsun. Bu durumda her $t \in [0,T_m)$ için $v(0) \in \mathcal{V}$ ise $v(t) \in \mathcal{V}$ dir.

İspat. Sonucun yanlış olduğu kabul edilsin. $\|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2 + \|v_{xxx}\|^2$ nin sürekliliğinden

$$\left\|v_x\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 + \left\|v_{xxx}\left(\bar{t}\right)\right\|^2 = \frac{2(p+1)}{p-1} d$$

olacak şekilde bir $\bar{t} \in [0,T_m)$ vardır. Lemma 5.2.4 ün ispatına benzer olarak $J\left(v\left(\bar{t}\right)\right) \geq d$ olur. Diğer taraftan $J\left(v\left(\bar{t}\right)\right) \leq E\left(\bar{t}\right) = E(0) = d$ dir.
Böylece, $J\left(v\left(\bar{t}\right)\right) = d$ ve

$$\left\|v_t\left(\bar{t}\right)\right\|^2 = 0$$

olur.

$$\theta(t) = \|v(t)\|^2$$

olsun. Basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= 2\int_R v(t)\, v_t(t)\, dx, \\ \theta'\left(\bar{t}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\theta^{''}(t) = 2\int_R v(t)\, v_{tt}(t)\, dx + 2\|v_t(t)\|^2$$

elde edilir. (5.3), v ile çarpılır ve elde edilen eşitliğin kısmi integrali alınırsa

$$(v_{tt}, v) + (v_x, v_x) + (v_{xx}, v_{xx}) + (v_{xxx}, v_{xxx}) = \gamma \|v_x\|_{p+1}^{p+1}$$

bulunur ki, buradan da

$$\begin{aligned}\theta^{''}(t) &= -2\|v_x(t)\|^2 - 2\|v_{xx}(t)\|^2 - 2\|v_{xxx}(t)\|^2 + 2\gamma\|v_x(t)\|_{p+1}^{p+1} + 2\|v_t(t)\|^2 \\ &= 2\|v_t(t)\|^2 - 2I(v)\end{aligned}$$

olur. (5.15) ve (5.23) den

$$\begin{aligned}\theta^{''}(t) &= (p+3)\|v_t(t)\|^2 - 2(p+1)E(0) + (p-1)\left[\|v_x(t)\|^2 + \|v_{xx}(t)\|^2 + \|v_{xxx}(t)\|^2\right] \\ &> 0\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\theta'(t)$ nin $\left[0, \bar{t}\right]$ üzerinde kesin artan olduğu sonucuna varılır. $\theta'(0) > 0$ olduğundan $\theta'\left(\bar{t}\right) > 0$ elde edilir ki, bu da $\theta'\left(\bar{t}\right) = 0$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3 ün İspatı. Teorem 5.1 den (5.3), (5.4) Cauchy probleminin bir tek $v \in C([0,T_m); H^s) \cap C^1([0,T_m); H^{s-3})$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. $T_m < \infty$ olduğu gösterilmelidir. Çelişki yoluyla ilerlenirse, v nin global çözüm olduğu kabul edilsin, yani $T_m = \infty$ olsun.

$$\theta(t) = \|v(t)\|^2 \tag{5.36}$$

alınsın. (5.36) nın türevi alınırsa

$$\theta'(t) = 2(v, v_t)$$

bulunur. (5.3) ve Lemma 5.2.3 kullanılırsa

$$(p-1)\left[\|v_x(t)\|^2 + \|v_{xx}(t)\|^2 + \|v_{xxx}(t)\|^2\right] > 2(p+1)d > 2(p+1)E(0)$$

bulunur. Buradan da

$$\theta^{''}(t) > 2(p+1)(d - E(0)) \geq 0 \tag{5.37}$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik t ye göre integrallenirse

$$\theta'(t) > \theta'(0)\, 2(p+1)(d - E(0))\, t$$

olur. $E(0) = d$ iken $(v_0, v_1) \geq 0$ olduğundan $\theta'(t_1) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 > 0$ zamanı vardır. Böylece $t > t_1$ için $\theta(t)$ artandır.
Bu durumda

$$\begin{aligned}\theta(t)\theta''(t) - \frac{(p+3)}{4}\left(\theta'(t)\right)^2 &= \left\{(p-1)\left[\|v_x(t)\|^2 + \|v_{xx}(t)\|^2 + \|v_{xxx}(t)\|^2\right]\right. \\ &\quad \left. -2(p+1)E(0) + (p+3)\|v_t(t)\|^2\right\}\theta(t) \\ &\quad -(p+3)\left[(v, v_t)\right]^2 \end{aligned} \tag{5.38}$$

olup, (5.38) in sağ tarafındaki son terim için Schwarz eşitsizliği ve Lemma 5.2.3 kullanılırsa,

$$\theta(t)\theta''(t) - \frac{(p+3)}{4}\left(\theta'(t)\right)^2 > 2(p+1)(d - E(0))\theta(t) \tag{5.39}$$

elde edilir. $\theta(t)$ nin tanımından ve (5.37) den (5.39) un sağ tarafının pozitif olduğu sonucuna varılır. $y(t) = \theta(t)^{-\frac{p-1}{4}}$ olarak alınırsa

$$y''(t) = -\frac{p-1}{4}\theta(t)^{-\frac{p+7}{4}}\left[\theta(t)\theta''(t) - \frac{(p+3)}{4}\left(\theta'(t)\right)^2\right] < 0, \quad \forall t \in [t_1, \infty)$$

olup, $y(t_1) > 0$ ve $y'(t_1) < 0$ dır. Böylece $y(t) \leq y(t_1) + (t - t_1)y'(t_1)$ dir. Dolayısıyla

$$\lim_{t \to T^*} \theta(t) = \infty$$

olacak şekilde bir $T^* \in \left(t_1, t_1 + \frac{4\theta(t_1)}{(p-1)\theta'(t_1)}\right)$ vardır. Bu da maksimal varlık aralığının sonsuz olmasıyla çelişir. İspat bitirilmiş olur.

5.4. $\alpha = -1$ İçin Blow Up

Bu kısımda, $\alpha = -1$ iken

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} - u_{xxxxxx} = \left(u^2\right)_{xx}, \qquad x \in R, \qquad t > 0, \tag{5.40}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = \partial_x u_1(x) \tag{5.41}$$

probleminin lokal varlığı verildikten sonra, problemin çözümlerinin blow up ı ispatlanacaktır.

Problemin lokal varlığıyla ilgili teorem verilmeden önce bazı uzaylar tanıtılacaktır.

Bourgain uzayı,

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \left\|\langle \tau - \gamma(\xi)\rangle^b \langle \xi\rangle^s \widehat{u}(\tau, \xi)\right\|_{L^2_{\tau,\xi}(\mathbb{R}^2)},$$

normuyla verilen ve $X^{s,b}$ ile gösterilen bir uzaydır. Burada $\gamma(\xi) \equiv \sqrt{\xi^2 - \xi^4 + \xi^6}$ dir. $X_T^{s,b}$ uzayı

$$\|u\|_{X_T^{s,b}} = \inf_{\widetilde{u} \in X^{s,b}} \{\|\widetilde{u}\|_{X^{s,b}} : \widetilde{u} = u \text{ on } [0,T]\}.$$

normuyla verilen kısıtlanmış uzaydır. Şimdi (5.40), (5.41) probleminin lokal varlığı verilecektir.

Theorem 5.4.1. (Esfahani 2011) $s > -\frac{1}{2}$ olsun. O zaman her $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$ ve $\psi \in H^{s-1}(\mathbb{R})$ için (5.40), (5.41) probleminin bir tek $u \in C^1([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap X_T^{s,b}$ çözümünün varlığını sağlayan bir $T = T\left(\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \|\psi\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\right)$ vardır. Ayrıca $T' \in (0,T)$ için $R = R(T') > 0$ olacak şekilde

$$W = \left\{\left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^{s-1}(\mathbb{R}) : \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} < R\right\}$$

kümesi verilsin, bu durumda

$$S : W \longrightarrow C([0,T']; H^s(\mathbb{R})) \cap X_T^{s,b}, \qquad \left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right) \longmapsto u(t)$$

dönüşümü Lipschitztir. Ek olarak, $s' > s$ iken $(\varphi, \psi) \in H^{s'}(\mathbb{R}) \times H^{s'-1}(\mathbb{R})$ ise, o zaman yukarıdaki sonuçlar $T = T\left(\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \|\psi\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})}\right)$ için aynı $[0,T]$ aralığında s yerine s' için de geçerlidir.

5.4.1. (5.40), (5.41) Problemi İçin Blow up

Burada genelleştirilmiş konkavlık metodu kullanılarak (5.40), (5.41) probleminin çözümlerinin blow up ı ispatlanacaktır. Blow up ile ilgili detaylı bilgi için Polat (2005) e bakılabilir.

Lemma 5.4.1.1 (Kalantarov ve Ladyzhenskaya, 1975). $\phi(t)$ pozitif, iki defa türevlenebilen bir fonksiyon olsun ve $t \geq 0$ için

$$\phi''(t)\phi(t) - (1+\upsilon)(\phi'(t))^2 \geq -2M_1\phi(t)\phi'(t) - M_2(\phi(t))^2$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada, $\upsilon > 0$ ve $M_1, M_2 \geq 0$ sabitlerdir. Eğer $\phi(0) > 0$, $\phi'(0) > -\mu_2\upsilon^{-1}\phi(0)$ ve $M_1 + M_2 > 0$ ise, o zaman

$$t \to t_1 \leq t_2 = \frac{1}{2\sqrt{M_1^2 + \upsilon M_2}} \ln \frac{\mu_1\phi(0) + \upsilon\phi'(0)}{\mu_2\phi(0) + \upsilon\phi'(0)}$$

iken $\phi(t)$ sonsuza gider. Burada, $\mu_{1,2} = -M_1 \pm \sqrt{M_1^2 + \upsilon M_2}$. $\phi(0) > 0$ ve $M_1 = M_2 = 0$ ise, bu durumda $t \to t_1 \leq t_2 = \frac{\phi(0)}{\upsilon\phi'(0)}$ iken $\phi(t) \to \infty$ olur.

(5.40), (5.41) problemi için enerji eşitliği

$$E(t)=\frac{1}{2}\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{1}{3}\int_R u^3dx=E(0), \quad (5.42)$$

şeklindedir. Burada $\left(-\partial_x^2\right)^{-\alpha}u(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[|x|^{-2\alpha}\mathcal{F}u(x)\right]$ dir.

Teorem 5.4 ün ispatı. u çözümünün global olduğu kabul edilsin. $H(t)$ fonksiyoneli

$$H(t)=\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u\right\|^2+\beta(t+\tau)^2 \quad (5.43)$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$H'(t)=2\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u,\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right)+2\beta(t+\tau). \quad (5.44)$$

olur. Diğer taraftan Schwartz eşitsizliği ve

$$(a_1b_1+...+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+...+b_n^2\right)$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}(H'(t))^2 &\leq 4\left[\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u\right\|^2+\beta(t+\tau)^2\right]\left[\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\beta\right]\\ &= 4H(t)\left[\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\beta\right] \quad (5.45)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $a_ib_i\geq 0$, $i=1,...,n$ dir.
(5.40) dan

$$\begin{aligned}H''(t) &= 2\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+2\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u,\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_{tt}\right)+2\beta\\ &= 2\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2-2\|u\|^2+2\|u_x\|^2-2\|u_{xx}\|^2-2\int_R u^3dx+2\beta\\ &= -6E(0)+5\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\|u\|^2-\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2+2\beta \quad (5.46)\end{aligned}$$

bulunur. (5.43)-(5.46) kullanılarak

$$\begin{aligned}H''(t)H(t)-\left(1+\frac{\gamma}{4}\right)(H'(t))^2 &\geq H''(t)H(t)-(4+\gamma)H(t)\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\beta\right)\\ &= H(t)\left\{-6E(0)+5\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\|u\|^2-\|u_x\|^2\right.\\ &\quad\left.+\|u_{xx}\|^2+2\beta-(4+\gamma)\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+\beta\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= H(t)\Big\{-6E(0)+(1-\gamma)\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 \\ &\quad +\|u\|^2-\|u_x\|^2+\|u_{xx}\|^2+(-2-\gamma)\beta\Big\} \\ &= H(t)\Big\{-6E(0)+(1-\gamma)\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 \\ &\quad +\|u\|_{H^2}^2-2\|u_x\|^2+(-2-\gamma)\beta\Big\} \end{aligned} \tag{5.47}$$

elde edilir. $s_1 < s_2$ için $H^{s_2} \subset H^{s_1}$ sürekli gömülmesi 2. bölümde verilmişti. Bu gömülmeden

$$\|u\|_{H^2}^2 \geq C\|u\|_{H^1}^2 \geq C\|u_x\|^2$$

olduğu görülür. Burada C sabittir. Yukarıdaki eşitsizlik (5.47) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} H''(t)H(t)-\left(1+\frac{\gamma}{4}\right)(H'(t))^2 \;\geq\; & H(t)\Big[-6E(0)+(1-\gamma)\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2 \\ & +(C-2)\|u_x\|^2+(-2-\gamma)\beta\Big] \end{aligned}$$

bulunur. $\gamma \in [0,1]$ ve $C \geq 2$ için

$$H''(t)H(t)-\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)(H'(t))^2 \geq H(t)\left[-6E(0)+(-2-\gamma)\beta\right] \tag{5.48}$$

olur.

$E(0) < 0$ ise $\beta = -\frac{6E(0)}{2+\gamma} > 0$ alındığında

$$H''(t)H(t)-\left(1+\frac{\gamma}{4}\right)(H'(t))^2 \geq 0$$

olur. τ, $H'(0) > 0$ olacak şekilde yeterince büyük seçilirse,

$E(0) = 0$ ise $\beta = 0$ seçilirse

$$H''(t)H(t)-\left(1+\frac{\gamma}{4}\right)(H'(t))^2 \geq 0$$

olur. Ayrıca (ii) kabulünden $H'(0) > 0$ dır. Yine Lemma 5.4.2.1 den $H(t)$ nin en fazla $T_2 = \frac{4H(0)}{\gamma H'(0)} < \infty$ ye eşit bir T_1 zamanında sonsuz olacağı görülür.

$E(0) > 0$ ise $\beta = 0$ alındığında (5.48) eşitsizliği

$$H''(t)H(t)-\left(1+\frac{\gamma}{4}\right)(H'(t))^2 \geq -6E(0)H(t) \tag{5.49}$$

olur. $\Phi(t) := (H(t))^{-\eta}$ şeklinde tanımlansın. Burada $\eta = \frac{\gamma}{4}$ tür. Bu durumda

$$\Phi'(t) = -\eta(H(t))^{-\eta-1}H'(t),$$

$$\Phi''(t) = -\eta (H(t))^{-\eta-2} \left(H''(t) H(t) - (1+\eta) (H'(t))^2 \right) \leq 6\eta E(0) (H(t))^{-\eta-1}, \tag{5.50}$$

olup burada (5.50) eşitsizliğini elde etmek için (5.49) kullanılmıştır. (iii) kabulünden $\Phi'(0) < 0$ dır.

$t^* = \sup \{t : \Phi'(t) < 0,\ \tau \in (0,t)\}$ olsun. $\Phi'(t)$ sürekli olduğundan t^* pozitiftir. (5.50) nin her iki tarafı $2\Phi'(t)$ ile çarpılırsa $\forall t \in [0, t^*)$ için

$$\begin{aligned} \left[(\Phi'(t))^2 \right]' &\geq -12\eta^2 E(0) (H(t))^{-2\eta-2} H'(t) \\ &= \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) \left[(H(t))^{-2\eta-1} \right]' \end{aligned} \tag{5.51}$$

elde edilir. (5.51) in $[0,t)$ de integrali alınırsa

$$\begin{aligned} (\Phi'(t))^2 &\geq \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) (H(t))^{-2\eta-1} + (\Phi'(0))^2 - \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) (H(0))^{-2\eta-1} \\ &\geq (\Phi'(0))^2 - \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) (H(0))^{-2\eta-1} \end{aligned}$$

bulunur. (iii) kabulünden

$$(\Phi'(0))^2 - \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) (H(0))^{-2\eta-1} > 0$$

olur. $\Phi'(t)$ nin sürekliliğinden $0 \leq t < t^*$ için

$$\Phi'(t) \leq -\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) (H(0))^{-2\eta-1} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.52}$$

dir. (5.52) eşitsizliği her $t \geq 0$ için sağlandığından

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) - \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{12\eta^2}{2\eta+1} E(0) (H(0))^{-2\eta-1} \right]^{\frac{1}{2}} t$$

olur. Böylece yeterince küçük T_1 ve

$$0 < T_1 \leq T_2 = \frac{\Phi(0)}{\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{3\gamma^2}{2\gamma+4} E(0) (H(0))^{-(\gamma+2)/2} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

için $\Phi(T_1) = 0$ dır. Dolayısıyla $H(t)$, sonlu bir T_1 zamanında sonsuz olur.

Yukarıdaki üç durumda da

$$\lim_{t \to T_1^-} H(t) = \infty$$

olduğu sonucuna varılır ki, bu da maksimal varlık zaman aralığının sonsuz olmasıyla çelişir. Böylece ispat bitirilmiş olur.

6. ALTINCI MERTEBEDEN BOUSSINESQ TİPLİ BİR DENKLEM İÇİN CAUCHY PROBLEMİ

Bu bölümde, altıncı mertebeden Boussinesq-tipli denklem için aşağıdaki Cauchy problemi

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (f(u))_{xx}, \qquad x \in R,, \qquad t > 0, \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in R \tag{6.2}$$

incelenecektir (Taskesen ve ark. 2012) Burada $f(u) = \gamma |u|^p$, $\gamma \neq 0$ olarak alınmıştır. (6.1) denklemi daha önce bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır [Wang ve Xu (2009), Wang ve Wang (2010), Xu ve ark. (2011)].

Wang ve Xu (2009), (6.1), (6.2) Cauchy problemini ele alarak, bu problemin çözümleri için lokal varlığı ispatladıktan sonra, $F(u) \geq 0$ veya $f'(u)$ nun alttan sınırlı olması koşulları altında çözümlerin global varlık ve yokluğunu göstermişlerdir. Burada $F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$ dir. Daha sonra, "potential well" metodu yardımıyla, $0 < E(0) \leq d$ durumu için doğrusal olmayan terimi $f(u) = -\beta |u|^p u$ şeklinde alarak çözümlerin global varlığını ispatlamışlardır.

Yüksek mertebeden dalga denklemlerinin bir sınıfı

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (\varphi(u)_x)_x \tag{6.3}$$

için başlangıç değer problemi Wang ve Wang (2010) tarafından ele alınmış, $\varphi(s) = \alpha |s|^p$, $\alpha \neq 0$ özel durumu için problemin çözümlerinin lokal varlığı daralma dönüşümü yardımıyla ispatlandıktan sonra global varlığı ve yokluğu potential well metodu kullanılarak gösterilmiştir.

Xu ve ark. (2011), çok boyutlu Boussinesq tipli

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} = \Delta(f(u)) \tag{6.4}$$

denklemini doğrusal olmayan terimi $\pm a |u|^p$, $-a |u|^{p-1} u$, $\pm a u^{2k}$ and $-a u^{2k+1}$ şekillerinde alarak incelemişler, lokal varlığı verdikten sonra $E(0) < d$ durumu için global varlık ve blow up ı ispatlamışlardır.

Yukarıda bahsedilen makalelerin üçünde de $E(0) < d$ veya $0 < E(0) \leq d$ durumları ele alınmıştır. $E(0) > 0$ durumu Wang ve Xu (2009) tarafından kısmen ele alınmış olsa da doğrusal olmayan terim üzerine konulan koşullar sadece tek dereceli doğrusal olmayan terimler için global varlığı vermektedir. Çift dereceli $f(u) = \gamma |u|^p$ doğrusal olmayan terimler ve üstkritik başlangıç enerjisiyle global varlık açık bir problemdir. Bu bölümde, bu tür doğrusal olmayan terimler ve üstkritik başlangıç enerjisi için global varlık verilmeye çalışılacaktır. Bu amaçla iki yeni fonksiyonel tanımlanacaktır.

Bu fonksiyonellerden ilki 3. Bölümdeki örnekte alınan I_δ fonksiyoneline benzer bir fonksiyoneldir, ikincisi ise hem başlangıç yer değişimi olan φ yi hem de başlangıç hızı ψ yi içeren bir fonksiyoneldir. Bu bölümde, ilk olarak sadece φ ye bağlı olan yeni fonksiyonelin (6.1), (6.2) probleminin çözümleri için global varlığı garantileyemediği gösterilecek, daha sonra hem φ ye hem de ψ ye bağlı olan fonksiyonelin global varlığı garantilediği ispatlanacaktır. Lokal varlık ve blow up yukarıda verilen makalelerde detaylı olarak incelenmiştir. Burada sadece lokal varlık ile ilgili teorem global varlığın ispatında kullanıldığından, ispatsız olarak verilecektir.

Öncelikle, (6.1)-(6.2) problemi için enerji ve potential well derinliği d tanımlanacaktır.

$s \geq 1$ olsun. (6.1), (6.2) Cauchy problemi için

$$E(t) = E(u(t), u_t(t)) = \frac{1}{2}\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \|u_{xt}\|^2 + \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\gamma}{p+1}\int_R |u|^p u dx = E(0), \tag{6.5}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{\gamma}{p+1}\int_R |u|^p u dx, \tag{6.6}$$

$$I(u) = \|u\|_{H^1}^2 + \gamma\int_R |u|^p u dx, \tag{6.7}$$

$$d = \inf_{u\in N} J(u), \qquad N = \left\{u \in H^1 : I(u) = 0, \quad \|u\|_{H^1} \neq 0\right\} \tag{6.8}$$

olarak tanımlansın. Yukarıda tanımlanan tüm ifadeler $u(x,t) \in H^1(R)$ için iyi tanımlıdır.

d (6.8) den farklı olarak

$$d = \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\gamma S_p^{p+1}\right)^{-2/(p-1)} \tag{6.9}$$

şeklinde de karakterize edilebilir. Burada S_p, $H^1(R)$ den $L^{p+1}(R)$ ye

$$S_p = \sup_{u\in H^1} \frac{\|u\|_{p+1}}{\|u\|_{H^1}}$$

şeklindeki gömülme sabitidir. (6.5) ve S_p nin tanımı kullanılırsa

$$\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{\gamma}{p+1}S_p^{p+1}\|u\|_{H^1}^{(p+1)/2} \leq J(u) \leq E(0)$$

olur.

$$h(k) = \frac{1}{2}k - \frac{\gamma}{p+1}S_p^{p+1}k^{(p+1)/2}$$

ile tanımlanan fonksiyon $[0, k_1)$ aralığında kesin artan, (k_1, ∞) aralığında kesin aza-

landır. Burada $k_1 = \gamma^{-2/(p+1)} S_p^{-2(p+1)/(p-1)}$ dir. (6.8) den

$$d = \max_{k\in[0,\infty)} h(k) = h(k_1) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\gamma S_p^{p+1}\right)^{-2/(p-1)}$$

bulunur. Aşağıdaki teorem Wang ve Xu (2009) daki Teorem 3.4 ve Xu ve ark. (2011) deki Teorem 6.2 nin genelleştirilmişidir.

Teorem 6.1. $\varphi \in H^1$, $\psi \in H^1$ ve $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi$, $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi \in L^2(R)$ olduğunu kabul edelim.

- Eğer $E(0) < 0$ ise, (6.1), (6.2) probleminin tüm zayıf çözümleri sonlu zamanda patlar.
- Eğer $E(0) = 0$ ise, (6.1), (6.2) probleminin aşikar çözümleri hariç diğer tüm zayıf çözümleri sonlu zamanda patlar.
- $0 < E(0) < d$ olsun. Eğer $I(\varphi) > 0$ ise, (6.1), (6.2) nin tüm zayıf çözümleri her $t \in [0,\infty)$ için global olarak tanımlıdır; eğer $I(\varphi) < 0$ ise, (6.1), (6.2) nin zayıf çözümleri sonlu zamanda patlar.

Not 6.2. Kritik ve altkritik başlangıç enerjili durum için $I(\varphi)$ fonksiyoneli (6.1), (6.2) probleminin çözümlerinin davranışını belirleyebilir. Fakat üstkritik durumda, sadece başlangıç yer değişimine, yani φ ye bağlı bir fonksiyonel Kutev ve ark. (2011) nın nümerik çalışmalarından da anlaşılacağı üzere, çözümlerin davranışını belirlemekte yetersiz kalmaktadır. Çünkü, başlangıç verilerinin farklı seçimleri için $I(\varphi) > 0$ iken bazı çözümler sonlu zamanda patlamakta, bazılarıysa global olarak var olmaktadırlar. 3. Bölüm' de verdiğimiz örnek problemde alınan I_δ fonksiyoneline benzer ama daha genel bir fonksiyonel alınarak üstkritik durum için global çözümlerin varlığı ispatlanmaya çalışılacaktır. Ancak görülecektir ki, böyle bir fonksiyonel bile çözümlerin davranışını belirleyememektedir. Bunun üstesinden gelmek için alınan yeni fonksiyonelde başlangıç hızını, yani ψ yi de içeren terimlerin bulunması gerekir.

İlk yeni fonksiyonel, $\sigma > -\frac{p-1}{2}$ için

$$I_\sigma(u) = (1-\sigma)\|u\|_{H^1}^2 + \gamma \int_R |u|^p u dx = I(u) - \sigma \|u\|_{H^1}^2$$

olarak tanımlansın. D_σ derinliği ve N_σ aşağıdaki gibidir:

$$D_\sigma = \inf_{u\in N_\sigma} J(u), \qquad N_\sigma = \left\{u \in H^1 : I_\sigma(u) = 0, \|u\|_{H^1} \neq 0\right\}. \tag{6.10}$$

$\sigma = 0$ olarak alınırsa, $I(u)$ fonksiyonelinin elde edileceği açıktır. Ayrıca $\sigma < -\frac{p-1}{2}$ için $D_\sigma < 0$ dır. Teorem 6.1 den bu durumda tüm zayıf çözümlerin sonlu zamanda patlayacağı bilinmektedir. Dolayısıyla bu durum bu bölümde göz önünde bulundurulmayacaktır.

Aşağıdaki lemmalar $\sigma > -\frac{p-1}{2}$ için ispatlanacaktır.

Lemma 6.3. $u \in H^1(R)$ olsun. O zaman $I_\sigma(u) < 0$ iken, $\|u\|_{H^1} > r(\sigma)$ ve $I_\sigma(u) = 0$ iken, $\|u\|_{H^1} \geq r(\sigma)$ veya $\|u\|_{H^1} = 0$ dır. Burada $r(\sigma) = \left(\frac{1-\sigma}{\gamma S_p^{p+1}}\right)^{1/(p-1)}$ dir.

İspat. $I_\sigma(u) < 0$ dan $\|u\|_{H^1} \neq 0$ olur. Buradan

$$(1-\sigma)\|u\|_{H^1}^2 < -\gamma \int_R |u|^p u dx \leq \gamma S_p^{p+1} \|u\|_{H^1}^{p+1} \tag{6.11}$$

eşitsizliği yardımıyla $\|u\|_{H^1} > r(\sigma)$ elde edilir.
Eğer $\|u\|_{H^1} = 0$ ise, $I_\sigma(u) = 0$ dır. $I_\sigma(u) = 0$ ve $\|u\|_{H^1} \neq 0$ ise,

$$(1-\sigma)\|u\|_{H^1}^2 = -\gamma \int_R |u|^p u dx \leq \gamma S_p^{p+1} \|u\|_{H^1}^{p+1},$$

eşitsizliğinden $\|u\|_{H^1} \geq r(\sigma)$ olur.

Lemma 6.4. Eğer $\|u\|_{H^1} < r(\sigma)$ ise, $I_\sigma(u) \geq 0$ dır.

İspat. $\|u\|_{H^1} < r(\sigma)$ dan

$$-\gamma \int_R |u|^p u dx \leq \gamma S_p^{p+1} \|u\|_{H^1}^{p+1} < (1-\sigma)\|u\|_{H^1}^2$$

elde edilir ki bu da $I_\sigma(u) \geq 0$ eşitsizliğini verir.

$I(u)$ nun özellikleri detaylı olarak çalışılmıştır. Özel olarak, yukarıdakilere benzer sonuçlar Xu ve ark. (2011) tarafından Lemma 3.3 de $\sigma = 0$ için elde edilmiştir.

Teorem 6.5. D_σ yukarıda tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda $\sigma > -\frac{p-1}{2}$ için

$$D_\sigma = b(\sigma) r^2(\sigma)$$

dır. Burada $b(\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{(1-\sigma)}{p+1}$ dir. D_σ, d cinsinden

$$D_\sigma = b(\sigma)(1-\sigma)^{2/(p-1)} \frac{2(p+1)}{p-1} d \tag{6.12}$$

şeklinde yazılır.

İspat. Eğer $u \in N_\sigma$ ise, Lemma 6.3 den $\|u\|_{H^1} \geq r(\sigma)$ bulunur. (6.11) deki eşitsizlik, sadece u fonksiyonunun $H^1 \hookrightarrow L^{p+1}$gömülmesinin bir minimize edici fonksiyonu olması durumunda eşitlik olur. $\|u\|_{p+1} = S_p \|u\|_{H^1}$ sadece $\widetilde{u} = \left(\cosh\left(\frac{p-1}{2}\right)x\right)^{-\frac{2}{p-1}}$ fonksiyonu için sağlandığından (Lieb, 1983) ve sabit bir işarete sahip olduğundan

$$\inf_{u \in N_\sigma} \|u\|_{H^1} = r(\sigma)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\inf_{u\in N_\sigma} J(u) &= \inf_{u\in N_\sigma}\left(\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2+\frac{\gamma}{p+1}\int_R |u|^p u dx\right)\\ &= \inf_{u\in N_\sigma}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{(1-\sigma)}{p+1}\right)\|u\|_{H^1}^2+\frac{1}{p+1}I_\sigma(u)\right]\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{(1-\sigma)}{p+1}\right)\inf_{u\in N_\sigma}\|u\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

ve D_σ nın tanımından $D_\sigma = b(\sigma) r^2(\sigma)$ olarak bulunur.

D_σ nın bir özelliği olarak aşağıdaki sonuç basit bir hesaplamayla kolayca bulunabilir.

Sonuç 6.6. D_σ, $\left(-\frac{p-1}{2},0\right)\cup(1,\infty)$ aralığı için kesin artan, $(0,1)$ aralığı için ise kesin azalandır. Ayrıca $\lim_{\sigma\to 1} D_\sigma = 0$ ve $D_{\sigma_0}=0$ olup, burada $\sigma_0 = -\frac{p-1}{2}$ dir.

Aşağıdaki teoremler sırasıyla $0<E(0)<d$ ve $E(0)=d$ iken (6.1), (6.2) probleminin akışı altında I_σ nın değişmezliğini göstermektedirler.

Teorem 6.7. $\varphi,\ \psi\in H^1(R)$, $\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\psi\in L^2(R)$ olduğu kabul edilsin. $0<E(0)<d$ olsun. $(\sigma_1,\sigma_2]$, $D_\sigma = E(0)$ eşitliğinin maximal aralığı olmak üzere, $\sigma\in(\sigma_1,\sigma_2]$ için (6.1), (6.2) probleminin akışı altında I_σ nın işareti değişmez.

İspat. $E(0)>0$ kabulünden $\|u\|_{H^1}>0$ elde edilir. $\sigma\in(\sigma_1,\sigma_2]$ için I_σ nın işaretinin değiştiği kabul edilsin. Bu durumda $I_{\overline{\sigma}}=0$ olacak şekilde bir $\overline{\sigma}\in(\sigma_1,\sigma_2]$ olmalıdır. Teorem önce $\overline{\sigma}\in(\sigma_1,\sigma_2)$ için ispatlanacaktır. (6.12) den $\sigma_1<0$ ve $\sigma_2\in(0,1)$ dir. Böylece $D_{\sigma_2}\geq E(0)\geq J(u)\geq D_{\overline{\sigma}}$ dır. D_σ, $(0,1)$ aralığında kesin artan olduğundan Sonuç 6.6 dan $D_{\overline{\sigma}}>D_{\sigma_2}$ bulunur ki bu da eşitsizlikle çelişir. Böylece teorem $\overline{\sigma}\in(\sigma_1,\sigma_2)$ için ispatlanmış olur. $\overline{\sigma}=\sigma_2$ için $I_{\sigma_2}=0$ ve $I_{\underline{\sigma}} = I_{\sigma_2}+(\sigma_2-\underline{\sigma})\|u\|_{H^1}^2$ olacak şekilde bazı $\underline{\sigma}\in(0,\sigma_2)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $I_{\underline{\sigma}}=(\sigma_2-\underline{\sigma})\|u\|_{H^1}^2>0$ ve bazı $t'>0$ için $I_{\underline{\sigma}}=0$ elde edilir. $\overline{\sigma}\in(\sigma_1,\sigma_2)$ için ispata benzer yolla bir çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.8. Teorem 6.7 nin kabullerine ek olarak $E(0)=d$ olduğu kabul edilsin. I_0 ($E(0)=d$ iken $\sigma_1=\sigma_2=0$ olur), (6.1), (6.2) ye göre her $t\in[0,\infty)$ için değişmezdir.

İspat. Teorem, $I_0(\varphi)\geq 0$ ise, $I_0(u(t))\geq 0$ olduğunu, aksine $I_0(\varphi)<0$ ise, $I_0(u(t))<0$ olduğunu ifade etmektedir. Sadece ilk ifadenin ispatı verilecektir, ikincisi benzer olarak yapılabilir. $u(t)$, (6.1), (6.2) probleminin $E(0)=d$ ile bir zayıf çözümü olsun. Eğer ifade yanlış ise, bu durumda $I_0(u(t'))<0$ olacak şekilde bir $t'>0$ olmalıdır. Lemma 6.3 ten $\|u(t')\|_{H^1}>0$ olur. Enerji eşitliğinden

$$\begin{aligned}d &= E(0)=\frac{1}{2}\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t(t')\right\|^2+\|u_{xt}(t')\|^2+J(u(t'))\\ &\geq J(u(t'))\geq\inf_{u\in N_0}J(u)=d\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $u(t')\in N_0$ ise, o zaman $u(t')$, $u\in N_0$ için $J(u)$ nun minimize edici

fonksiyonu ve $I_0(u(t')) = 0$ olmalıdır. Bu da $I_0(u(t')) < 0$ eşitsizliğiyle çeliştiği için imkansızdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda $\sigma > 1$ için 6.3 ve 6.4 lemmalarına benzer sonuçlar içeren ve söz konusu lemmalara benzer şekilde ispatlanabilen bir lemma verilecektir.

Lemma 6.9. $u \in H^1(R)$ olduğu kabul edilsin. O zaman $\sigma > 1$ için $I_\sigma(u) > 0$ iken $\|u\|_{H^1} > s(\sigma)$ olur. $I_\sigma(u) = 0$ iken $\|u\|_{H^1} \geq s(\sigma)$ veya $\|u\|_{H^1} = 0$ olur. Burada $s(\sigma) = \left(\frac{\sigma-1}{\gamma S_p^{p+1}}\right)^{1/(p-1)}$ dir. Ayrıca eğer $\|u\|_{H^1} < s(\sigma)$ ise, o zaman $I_\sigma(u) \leq 0$ ve $I_\sigma(u) = 0$ ancak ve ancak $\|u\|_{H^1} = 0$.

Teorem 6.10. $\varphi, \psi \in H^1(R)$, $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi \in L^2(R)$ olduğu kabul edilsin. Eğer $E(0) > 0$ ise, o zaman her $t > 0$ ve $\sigma \geq \sigma_m$ için $I_\sigma(u(t)) \leq 0$ olur. Burada σ_m, $D_\sigma = E(0)$ ın maksimal pozitif köküdür.

İspat. İspat $\sigma = \sigma_m$ ve $\sigma > \sigma_m$ için ayrı olarak verilecektir. Önce $\sigma = \sigma_m$ için ispatlanacaktır. Çelişki yoluyla ilerlenirse $I_{\sigma_m}(u(t')) > 0$ olacak şekilde bazı $t' > 0$ vardır. Lemma 6.3 ten $\|u\|_{H^1} > 0$ olur ve $I_\sigma(u(t')) = 0$ olacak şekilde bir $\sigma > \sigma_m$ değeri vardır. (6.5) yardımıyla $D_{\sigma_m} = E(0) \geq J(u(t')) \geq \inf_{u \in N_\sigma} J(u) = D_\sigma$ bulunur D_σ nın tanımından $\sigma > \sigma_m > 1$ için $D_\sigma > D_{\sigma_m}$ olur. Bir çelişki oluşur ki bu da $\sigma = \sigma_m$ için ispatı tamamlar. $\sigma \geq \sigma_m$ için $I_{\sigma_m}(u(t)) \geq I_\sigma(u(t))$ eşitsizliği her $\sigma \geq \sigma_m$ için teoremin doğru olduğunu ima eder.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 6.1 ve Teorem 6.10 nun doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 6.11. $\varphi, \psi \in H^1$, $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi \in L^2(R)$ olduğu kabul edilsin. $0 < E(0) < d$ ve $I_0(\varphi) > 0$ olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

$$0 < I_0(u(t)) < \sigma_m \|u\|_{H^1}^2 \tag{6.13}$$

eşitsizliği geçerli olur.

Not 6.12. $E(0) > 0$ iken çözümlerin davranışı sadece başlangıç yer değişimi φ yi içeren bir fonksiyonelle karakterize edilmeye çalışıldı. Ancak görüldü ki, bu amaçla oluşturulan $I_\sigma(u)$ fonksiyoneli $0 < E(0) < d$ ve $E(0) = d$ iken çözümlerin davranışını başarılı olarak belirleyebilirken, $E(0) > 0$ için başarısız olmaktadır. Çünkü $I_\sigma(u)$ fonksiyoneli Teorem 6.10 da görüldüğü gibi, $E(0) > 0$ için daima sıfır veya negatiftir.

6.1. Üstkritik Başlangıç Enerjili Durum İçin Global Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda, bu bölümün esas sonucu verilip ispat edilecektir. Öncelikle Wang ve Xu (2009) tarafından verilen lokal varlık teoremi ispatsız olarak verilecek ve daha sonra oluşturulacak yeni fonksiyonel ve lokal varlık teoremi yardımıyla global varlık ispatlanacaktır.

Teorem 6.1.1 [Wang ve Xu, (2009), Xu ve ark., (2011)]**.** $s > \frac{1}{2}$, $f \in C^m(R)$, $m \geq s$ bir tamsayı olarak alınsın. $\varphi, \psi \in H^1(R)$ ve $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi \in L^2(R)$ olduğu kabul

edilsin. Bu durumda sadece φ ve ψ ye bağlı bir T_0 zamanı vardır ki, her $T < T_0$ için (6.1)-(6.2) problemi bir tek $u \in C^1([0,T_0]; H^s)$ lokal çözümüne sahiptir. Ayrıca

$$\sup_{t\in[0,T_0)} \left(\|u(.,t)\|_{H^s} + \|u_t(.,t)\|_{H^s}\right) < \infty$$

ise, $T_0 = \infty$ dir.

Aşağıda verilen fonksiyonel hem başlangıç yer değişimi φ yi, hem de başlangıç hızı ψ yi içeren bir fonksiyonel olup, daha önce Kutev ve ark. (2011) tarafından benzer bir formda kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(v,\omega) &= \|v\|_{H^1}^2 + \gamma\int_R |v|^p v dx - \left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\omega\right\|^2 - \|\omega_x\|^2 \\ &= I_0(v) - \left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\omega\right\|^2 - \|\omega_x\|^2.\end{aligned}$$

Gösterim kolaylığı açısından

$$H(u,t) = \widetilde{H}(u(.,t), u_t(.,t))$$

şeklinde yazılacaktır. Yukarıdaki fonksiyonelin (6.1), (6.2) probleminin akışı altında değişmezliği gösterilirse, bunun yardımıyla global varlık ispatlanabilir.

Teorem 6.1.2. $\varphi,\ \psi \in H^1(R)$, $\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi$, $\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\psi \in L^2(R)$ ve $E(0) > 0$ olduğu kabul edilsin. σ_m daha önce tanımlandığı gibi olsun. Bazı $\sigma > \sigma_m$ için

$$\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\psi, \left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi\right) + (\psi_x,\varphi_x) + \frac{1}{2}\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi\right\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_x\|^2 + \frac{(p+1)\sigma}{p-1+(p+3)\sigma}E(0) \le 0 \quad (6.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca her $t \in [0,\infty)$ için $H(u,0)$ ın pozitif olması durumunda $H(u,t)$ de pozitiftir.

İspat. Global çözüm aramak bir anlamda blow up olmadığını göstermektir, dolayısıyla teorem ispatlanırken Levine (1974) tarafından verilen teknik modifiye edilerek kullanılacaktır. Bu amaçla,

$$\theta(t) = \left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \|u_x\|^2$$

fonksiyoneli tanımlansın. Basit hesaplamalarla

$$\theta'(t) = 2\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t, \left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u\right) + 2(u_{xt}, u_x)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta''(t) &= 2\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+2\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_{tt},\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u\right)+2\left(u_{xtt},u_x\right)+2\left\|u_{xt}(t)\right\|^2\\ &= 2\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+2\left\|u_{xt}(t)\right\|^2+2\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-1}u_{tt},u\right)-2\left(u_{xxtt},u\right)\\ &= 2\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t\right\|^2+2\left\|u_{xt}(t)\right\|^2-2I_0(u)\\ &= -2H(u,t)\end{aligned}$$

dır. Bir çelişki elde etmek için, $H(u,t')=0$ olacak şekilde bazı $t'>0$ olduğu kabul edilsin. $\theta''(t)<0$ olduğundan, $\theta'(t)$ nin $[0,t')$ aralığında kesin azalan olduğu sonucuna varılır. Ayrıca, (6.14) den $\theta'(0)<0$ ve buradan da $[0,t']$ de $\theta'(t)<0$ elde edilir ki, bu da $\theta(t)$ nin $[0,t']$ de kesin azalan olduğunu gösterir. Enerji eşitliği ve $H(u,t')=0$ dan

$$\begin{aligned}E(0) &= \frac{1}{2}\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t(t')\right\|^2+\left\|u_{xt}(t')\right\|^2\right)+\frac{p-1}{2(p+1)}\left\|u(t')\right\|_{H^1}^2+\frac{1}{p+1}I(u(t'))\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p+1}\right)\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t(t')\right\|^2+\left\|u_{xt}(t')\right\|^2\right)\\ &\quad+\frac{p-1}{2(p+1)}\left\|u(t')\right\|_{H^1}^2 \qquad (6.15)\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 6.10, Sonuç 6.11 ve $H(u,t')=0$ dan

$$\left\|u\right\|_{H^1}^2\geq\sigma_m^{-1}I_0(u(t'))\geq\sigma^{-1}\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t(t')\right\|^2+\left\|u_{xt}(t')\right\|^2\right)$$

olup, yukarıdaki eşitsizlik (6.15) de kullanılırsa

$$E(0)\geq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p+1}+\frac{p-1}{2(p+1)\sigma}\right)\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t(t')\right\|^2+\left\|u_{xt}(t')\right\|^2\right) \qquad (6.16)$$

olduğu görülür. (6.16), $\theta(t)$ ve $\theta'(t)$ cinsinden yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}E(0) &\geq \frac{(p+3)\sigma+p-1}{2(p+1)\sigma}\left[\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(u_t(t')+u(t')\right)\right\|^2+\left\|u_{xt}(t')+u(t')\right\|^2\right.\\ &\quad-2\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u_t(t'),\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u(t')\right)-2\left(u_{xt}(t'),u_x(t')\right)\\ &\quad\left.-\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}u(t')\right\|^2-\left\|u_x(t')\right\|^2\right]\end{aligned}$$

bulunur. $\theta(t)$ ve $\theta'(t)$ nin monotonluğundan

$$\begin{aligned}E(0) &> \frac{(p+3)\sigma+p-1}{(p+1)\sigma}\left[-\left(\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\psi,\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi\right)-\left(\psi_x,\varphi_x\right)\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2}\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|\varphi_x\right\|^2\right]\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da (6.14) ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 6.1.3. $\varphi,\ \psi \in H^1(R)$, $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\varphi$, $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\psi \in L^2(R)$ olsun. $E(0) > 0$, $H(u,0) > 0$ ve (6.14) eşitsizliğinin bazı $\sigma > \sigma_m$ için sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda (6.1), (6.2) probleminin çözümleri her $t \in [0,\infty)$ için global olarak tanımlıdır.

İspat. Teoremin ispatı, yukarıda verilen lokal varlık teoremi ve $H(u,t)$ fonksiyonelinin değişmezliği kullanılarak ispatlanacaktır. Eğer $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\psi \in L^2$ ise, o zaman $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}} u_t \in L^2$ dir [Xu ve ark. (2011), Lemma 2.8]. $H(u,0) > 0$ olması, $H(u,t)$ nin işaret koruma özelliğinden $H(u,t) > 0$ olmasını verir. Dolayısıyla her $t > 0$ için $I_0(u) > 0$ dır. Enerji eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\left(\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \|u_{xt}\|^2\right) + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{p+1}I(u) \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|\left(-\partial_x^2\right)^{-\frac{1}{2}} u_t\right\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{xt}\|^2 + \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|u\|_{H^1}$ ve $\|u_t\|_{H^1}$ in her $t > 0$ için sınırlı olduğu sonucuna varılır ve lokal varlık teoremi yardımıyla ispat tamamlanır.

Not 6.1.4. Wang and Wang (2009) ın 3. bölümünde, (6.1), (6.2) problemi üstkritik başlangıç enerjili durum için çalışılmıştır. Global varlıkla ilgili bir sonuç $F(u) \geq 0$ veya $f'(u)$ nun alttan sınırlı olması, yani $f'(u) \geq A_0$ kabulü altında ispatlanmıştır. Burada $F(u) = \int_0^u f(s)\,ds$ dir. Yazarların da bahsettiği gibi bu koşullar sadece tek dereceli doğrusal olmayan terimler, yani $f(u) = \beta u^{2p+1}$, ($u \in R$, $\beta > 0$, p negatif olmayan bir tamsayı) için global varlığı vermektedir. $f(u) = \beta|u|^p$ için bu koşul yeterli değildir. Örneğin, $f(u) = \frac{3}{2}u^2$ olarak alınırsa, $F(u) = \frac{1}{2}u^3$ ve $f'(u) = 3u$ olur ki, bu durumda doğrusal olmayan terim pozitiflik koşulunu sağlamaz. Yine $f(u) = \beta|u|^p$ için $F(u) = \frac{\beta}{p+1}|u|^p u$ ve $f'(u) = \beta p|u|^{p-2}u$ olur ve bu da pozitiflik koşulunu sağlamaz. Bunun üstesinden gelmek için, önceki fonksiyonellerden farklı olarak tanımlanan yeni fonksiyonelde başlangıç hızı olan ψ yi de içeren terimler ihtiva edilmiş ve bu fonksiyonelin değişmezliği kullanılmıştır.

.

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ KÖTÜ BOUSSINESQ-TİPLİ BİR DENKLEM İÇİN ÇÖZÜMLERİN GLOBAL VARLIĞI VE AZALMASI (DECAY)

Bu bölümde kötü Boussinesq-tipli bir denklem için aşağıdaki Cauchy problemi

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} - \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} = V(x) * \Delta f(u), \qquad x \in R^2, \qquad t > 0, \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = V(x) * \varphi(x), \quad u_t(x,0) = V(x) * \nabla\psi(x), \qquad x \in R^2. \tag{7.2}$$

çalışılacak olup, burada $V(x)$, $B(0,1) = \{\xi \in R^2, |\xi| \leq 1\}$ desteğine sahip ve $\widehat{V}(\xi) \in C_0^\infty(R^2)$ sınıfından bir potansiyel, $f(u)$ verilmiş doğrusal olmayan bir fonksiyon, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ verilmiş başlangıç verileridir.

Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_{xxxx} = \beta \left(u^2\right)_{xx} \tag{7.3}$$

olarak birinci bölümde verilmişti. (7.3) denkleminde $\alpha > 0$ ise denklem *kötü Boussinesq* denklemi, $\alpha < 0$ ise *iyi Boussinesq* denklemi olarak adlandırılır. Kötü Boussinesq denklemi doğrusal olarak kararsızdır ve son zamanlara kadar sadece soliton tipli çözümleri bilinmekteydi. Aşağıda (7.3) denklemi ile ilgili bazı çalışmalara değinilecek ve bölümün temel sonuçları verilecektir.

Levine ve Sleeman (1974),

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u_{xxxx} - 12\left(u^m\right)_{xx} \tag{7.4}$$

denklemi için global çözümlerin yokluğunu göstermişlerdir.

Deift ve ark. (1982), saçılma teorisini kullanarak (7.4) ün çözümlerinin global varlığını ve blow up ını ispatlamışlardır. Akmel (2004), (7.4) denklemini iki boyutta çalışmış ve çözümlerin lokal, global varlığını ve azalmasını incelemiştir. Zhijian (2002, 2003), (7.3) denkleminin başlangıç-sınır değer problemi için çözümlerin lokal varlığını ve blow up ını incelemiştir.

Ayrıca Fourier dönüşümü alındığında, doğrusal denklemin $\widehat{u}$ çözümünün zamana göre $e^{\pm k^2 t}$ şeklinde arttığı görülür ve bu durum doğrusal olmayan problem için de geçerlidir. Dolayısıyla, problemin iyi konumluluğunun çalışılabilmesi için $e^{\pm k^2 t}$ ile orantılı bileşen yok edilmelidir.

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{xxtt} - a v_{xxxx} + v_{xxxxtt} = \left(v^2\right)_{xx}, \qquad (x,t) \in R \times R, \qquad a \in R \tag{7.5}$$

denklemi, yüzey gerilimli su dalgaları çalışılırken ortaya çıkmaktadır (Schneider 2001). Schneider (2001), dejenere durum için uzun dalga limitinin iki tane Kawahara denklemi ile yaklaşık olarak verilebileceğini göstermiştir.

(7.5) denklemi, Wang (2009) tarafından çalışılmış ve bu denklemin Cauchy probleminin çözümleri için lokal ve global varlık ve asimptotik davranış verilmiştir.

Bu bölümde, Wang (2009) ın sonuçları iki boyutlu uzaya genişletilecektir. Duhamel Prensibi kullanılarak lokal varlık verildikten sonra, başlangıç verilerinin küçük olması koşulu altında bazı kestirimler yardımıyla problemin çözümlerinin supremum normunun $t \to \infty$ iken $(1+t)^{-\frac{1}{7}}$ şeklinde cebirsel olarak sıfıra azaldığı gösterilecektir. İki boyutlu uzayda çalışırken bazı zorluklarla karşılaşılmaktadır. Lokal varlık kolay bir şekilde ispatlanabilmektedir, ancak global varlığın ispatlanması pek de kolay değildir. Bu da kullanılan kestirimlerin ispatlanmasının epey uzun ve zor olmasından kaynaklanmaktadır. Bu kestirimleri ispatlamak için *durağan faz (stationary phase) metodu* kullanılacaktır.

Teorem 7.1. $s > 1,\ \varphi, \psi \in H^s,\ f \in C^{[s]+1}(R^2),\ f(0) = 0$ *ve* $[0, T_m)$ (7.1) ve (7.2) Cauchy probleminin çözümlerine karşılık gelen maximal varlık zaman aralığı olsun. Eğer

$$\sup_{t\in[0,T_m)} \|u(t)\|_\infty \leq M \tag{7.6}$$

sağlanırsa, o zaman $T_m = \infty$ olur. Burada $M > 0$ dır.

Teorem 7.2. $\varphi, \psi \in H^2(R^2) \cap L^1(R^2)$ ve $u \in C^1([0,\infty); H^2)$, (7.1) ve (7.2) Cauchy probleminin global çözümü olsun. $p > 8$ olarak alınırsa, yeterince büyük t ve yeterince küçük ζ için $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2} < \zeta$ iken

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{1}{7}}$$

olur. Burada $\zeta > 0$, ve $C > 0$ x ve t den bağımsız sabitlerdir.

7.1. Lokal Varlık

Doğrusal denklem için aşağıdaki Cauchy problemi ele alınsın:

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} - \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} = V(x) * \Delta h(x,t), \quad x \in R^2, \quad t > 0, \tag{7.7}$$

$$u(x,0) = V(x) * \varphi(x), \quad u_t(x,0) = V(x) * \nabla\psi(x), \quad x \in R^2. \tag{7.8}$$

(7.7)- (7.8) denkleminin her iki yanının x e göre Fourier dönüşümü alınırsa

$$\widehat{u}_{tt} + \frac{k^2(1+k^2)}{(1+k^2+k^4)}\widehat{u} = \frac{k^2}{(1+k^2+k^4)}\widehat{V}(k)\,\widehat{h}(k,t) \tag{7.9}$$

$$\widehat{u}(k,0) = \widehat{\varphi}(k), \quad \widehat{u}_t(k,0) = \widehat{\psi}(k) \tag{7.10}$$

elde edilir. Burada $\widehat{f}(k) = \mathcal{F}f(k) = \int_{R^2} e^{-i(x,k)} f(x)\,dx$, $x = (x_1, x_2)$, $k = (k_1, k_2)$.

(7.7) yi integral formunda yazmak için Duhamel prensibi kullanılırsa

$$u(x,t) = \partial_t S(t)(V(x) * \varphi(x)) + S(t)(V(x) * \nabla\psi(x)) + \int_0^t \mathcal{T}(t-\tau)(V(x) * \Delta h(x,\tau))\, d\tau \tag{7.11}$$

bulunur. Burada, $\mathcal{T}(t) = S(t)(1-\Delta+\Delta^2)^{-1}$ ve

$$\partial_t S(t)(V(x) * \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} e^{ixk}\cos\lambda(k)\, t\widehat{V}(k)\,\widehat{\varphi}(k)\, dk,$$

$$S(t)(V(x) * \nabla\psi(x)) = \frac{i}{2\pi}\int_{R^2} e^{ixk}\frac{\sin\lambda(k)\, t}{\lambda(k)} k\widehat{V}(k)\,\widehat{\psi}(k)\, dk,$$

$$\int_0^t \mathcal{T}(t-\tau)(V(x) * \Delta h(x,\tau))\, d\tau = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{R^2} e^{ixk}\frac{\sin\lambda(k)(t-\tau)}{\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}k^2\widehat{V}\widehat{h}\, dk d\tau,$$

$\lambda(k) = \frac{|k|\left(1-k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+k^2+k^4)^{\frac{1}{2}}}$ dir.

Lemma 7.1.1. Yukarıda tanımlanan $\partial_t S(t)$, $S(t)$ and $\mathcal{T}(t)$ operatörleri için

$$\begin{aligned}
\|\partial_t S(t)(V(x) * \varphi(x))\|_{H^s} &\leq C\|\varphi\|_{H^s}, && (7.12)\\
\|S(t)(V(x) * \nabla\psi(x))\|_{H^s} &\leq Ct\|\psi\|_{H^s}, && (7.13)\\
\|\mathcal{T}(t)(V(x) * \Delta h(x,\tau))\|_{H^s} &\leq Ct\|h\|_{H^s}, && (7.14)\\
\|\partial_{tt} S(t)(V(x) * \varphi(x))\|_{H^s} &\leq C\|\varphi\|_{H^s}, && (7.15)\\
\partial_t\mathcal{T}(t)(V(x) * \Delta h(x,\tau)) &\leq C\|h\|_{H^s} && (7.16)
\end{aligned}$$

kestirimleri geçerlidir.

İspat. İspatlar birbirine benzediği için (7.12) ile (7.13) ün ispatı verilecektir. Plancherel teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|\partial_t S(t)(V(x) * \varphi(x))\|_{H^s} &= \int_{R^2}\left(1+k^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(\partial_t S(t)(V(x) * \nabla\psi(x)))\, dk\\
&= \int_{R^2}\left(1+k^2\right)^{\frac{s}{2}}\cos\lambda(k)\, t\widehat{V}(k)\,\widehat{\varphi}(k)\, dk\\
&\leq C\|\varphi\|_{H^s},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(t)(V(x) * \Delta h(x,\tau))\|_{H^s} &= \int_{R^2}\left(1+k^2\right)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}\left(S(t)\left(1-\Delta+\Delta^2\right)^{-1}(V * \Delta h)\right) dk\\
&= \int_{R^2}\left(1+k^2\right)^{\frac{s}{2}}\frac{\sin\lambda(k)(t)}{\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}k^2\widehat{V}(k)\,\widehat{h}(k,\tau)\, dk\\
&\leq Ct\|h\|_{H^s}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (7.11) in t ye göre türevi alınır ve yukarıdakilere benzer işlemler yapılırsa (7.15) ve (7.16) kolayca ispatlanabilir.

Lemma 7.1.2 (Polat ve Ertaş 2009). $s > 0$ ise, o zaman $H^s \cap L^\infty$ bir cebirdir. Ayrıca $f, g \in H^s \cap L^\infty$ için

$$\|fg\|_{H^s} \leq C\left(\|f\|_\infty \|g\|_{H^s} + \|f\|_{H^s} \|g\|_\infty\right)$$

geçerlidir.

Yukarıdaki lemma, 5.1.2 ve 5.1.3 lemmaları ve daralma dönüşümü prensibi yardımıyla (7.1), (7.2) probleminin lokal çözümlerinin varlık ve tekliği ispatlanabilir. Bu amaçla, $s > 1$ için

$$\mathcal{M}(T) = \left\{u \in C^1\left([0,T]; H^s\right)\right\}$$

şeklindeki tam metrik uzay

$$\|u\|_{\mathcal{M}(T)} = \max_{0\leq t\leq T}\left(\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^s}\right)$$

normuyla tanımlansın.
$s > 1$ için $H^s(R) \hookrightarrow L^\infty(R)$ gömülmesi geçerli olduğundan $u \in \mathcal{M}(T)$ ise $u \in L^\infty(R)$ olur. $B_R(T)$, merkezi orjinde olan R yarıçaplı bir yuvar olsun, yani

$$B_R(T) = \left\{u \in \mathcal{M}(T) : \|u\|_{\mathcal{M}(T)} \leq R\right\}.$$

Teorem 7.1.3. $s > 1$, $\varphi, \psi \in H^s$ ve $f \in C^{[s]+1}(R^2)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $[0, T_m]$ maximal zaman aralığı olmak üzere, (7.1), (7.2) problemi bir tek $u \in C^1\left([0,T_m]; H^s\right)$ lokal çözümüne sahiptir. Ayrıca eğer

$$\sup_{0\leq t\leq T_m}\left(\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^s}\right) < \infty$$

ise, $T_m = \infty$ olur.

İspat. $\varphi, \psi \in H^s$ ve $u \in \mathcal{M}(T)$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(u(t)) &:= \partial_t S(t)\left(V(x) * \varphi(x)\right) + S(t)\left(V(x) * \nabla\psi(x)\right) \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{T}(t-\tau)\left(V(x) * \Delta h(x,\tau)\right) d\tau \end{aligned} \tag{7.17}$$

olsun.
İspatın geri kalanında R ve T iyi seçilmiş olmak şartıyla, $\mathcal{N} : B_R(T) \to B_R(T)$ nin daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$\delta \geq \|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^s}$ olsun. 5.1.2, 5.1.3 ve 7.1.2 lemmaları yardımıyla $u, v \in B_R(T)$ için

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(u)\|_{H^s} &\leq C\|\varphi\|_{H^s} + CT\|\psi\|_{H^s} + CT\int_0^T \|h(\tau)\|_{H^s} d\tau \\ &\leq C\delta + C(\delta + K(R))T \end{aligned}$$

ve

$$\|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)\|_{H^s} \leq C\int_0^T \|h(u(\tau)) - h(v(\tau))\|_{H^s} d\tau \leq CG(R)T\|u - v\|_{\mathcal{M}(T)}$$

olduğu elde edilir. Burada $K(R)$ ve $G(R)$, R nin fonksiyonlarıdır. (7.11) t ye göre türevlenir ve 5.1.2, 5.1.3 ve 7.1.2 lemmalarındaki eşitsizlikler kullanılırsa

$$\|\mathcal{N}(u)_t\|_{H^s} \leq C(\delta + K(R))T,$$

$$\|\mathcal{N}(u)_t - \mathcal{N}(v)_t\|_{H^s} \leq CK(R)T\|u - v\|_{\mathcal{M}(T)}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizlikler birleştirilir, $R = 2C\delta$ olarak seçilir ve T yeterince küçük olarak sabitlenirse, $\mathcal{N}$ nin $B_R(T)$ üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu görülür. Daralma dönüşümü prensibinden (7.1), (7.2) Cauchy probleminin bir tek u çözümüne sahip olduğu sonucuna varılır. Polat ve Ertaş (2009) daki standart teknik kullanıldığında,

$$\sup_{0\leq t\leq T_m} (\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^s}) < \infty$$

ise, $T_m = \infty$ olduğu görülür.

7.2. Doğrusal Kestirimler

Bu kısımda, problemin global varlığını ve decayını ispatlamakta kullanılacak olan kestirimler verilecektir.

Euler formülünden

$$\begin{aligned} \partial_t S(t)(V(x) * \varphi(x)) &= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{R^2} e^{ixk} e^{it\lambda(k)} \widehat{V}(k)\widehat{\varphi}(k)\, dk \right. \\ &\quad \left. + \int_{R^2} e^{ixk} e^{-it\lambda(k)} \widehat{V}(k)\widehat{\varphi}(k)\, dk\right) \qquad (7.18) \\ S(t)(V(x) * \nabla\psi(x)) &= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{R^2} e^{ixk} \frac{1}{\lambda(k)} e^{it\lambda(k)} k\widehat{V}(k)\widehat{\psi}(k)\, dk \right. \\ &\quad \left. - \int_{R^2} e^{ixk} \frac{1}{\lambda(k)} e^{-it\lambda(k)} k\widehat{V}(k)\widehat{\psi}(k)\, dk\right) \qquad (7.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t)(V(x)*\Delta h(x,\tau)) &= -\frac{1}{4\pi i}\left(\int_{R^2} e^{ixk}\frac{1}{\lambda(k)}e^{it\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}k^2\widehat{V}(k)\widehat{h}(k,\tau)\,dk\right.\\ &\quad\left.-\int_{R^2} e^{ixk}\frac{1}{\lambda(k)}e^{-it\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}k^2\widehat{V}\widehat{h}(k,\tau)\,dk\right) \quad (7.20)\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Herhangi bir genellik kaybı olmaksızın ispatlar, sadece (7.18), (7.19) ve (7.20) nin sağ tarafındaki ilk terimler için yapılabilir, çünkü elde edilecek olan kestirimler $\partial_t S(t)(V(x)*\varphi(x))$, $S(t)(V(x)*\nabla\psi(x))$ ve $\mathcal{T}(t)(V(x)*\Delta h(x,\tau))$ terimlerinin ispatını verecektir.

Lemma 7.2.1. $\varphi,\psi\in H^s(R^2)$, $s>0$ olsun. Bu durumda

$$\left\|\int_{R^2} e^{ixk+it\lambda(k)}\widehat{V}(k)\widehat{\varphi}(k)\,dk\right\|_{H^s}\le C\|\varphi\|_{H^s}, \quad (7.21)$$

$$\left\|\int_{R^2} e^{ixk+it\lambda(k)}\frac{1}{\lambda(k)}k\widehat{V}(k)\widehat{\psi}(k)\,dk\right\|_{H^s}\le C\|\psi\|_{H^s}, \quad (7.22)$$

$$\left\|\int_{R^2} e^{ixk+it\lambda(k)}\frac{1}{\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}k^2\widehat{V}(k)\widehat{h}(k,\tau)\,dk\right\|_{H^s}\le C\|h\|_{H^s} \quad (7.23)$$

kestirimleri geçerlidir.

İspat. (7.21) için $\int_{R^2} e^{ixk+it\lambda(k)}\widehat{V}(k)\widehat{\varphi}(k)\,dk = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{it\lambda(k)}\widehat{V}(k)\widehat{\varphi}(k)\right)(x)$ ve $\|.\|_{H^s}$ normunun Fourier dönüşümü kullanılarak verilen gösterimi kullanılırsa ispat bulunabilir. Şimdi (7.23) kestirimi ispatlanacaktır.

$$P=\int_{R^2} e^{ixk+it\lambda(k)}\frac{1}{\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}k^2\widehat{V}(k)\widehat{h}(k,\tau)\,dk$$

olsun. Plancherel teoreminden

$$\begin{aligned}\|P\|_{H^s}^2 &= \int_{R^2}(1+k^2)^s\left|\mathcal{F}\left(\int_{R^2} e^{ixk+it\lambda(k)}\frac{1}{\lambda(k)}k^2\frac{1}{1+k^2+k^4}\widehat{V}(k)\widehat{h}(k)\,dk\right)\right|^2 dk\\ &= \int_{R^2}(1+k^2)^s\left|e^{it\lambda(k)}\frac{k^2}{\lambda(k)}\frac{1}{1+k^2+k^4}\widehat{V}(k)\widehat{h}(k)\right|^2 dk\\ &= \int_{R^2}(1+k^2)^s\left|e^{it\lambda(k)}\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(k)\widehat{h}(k)\right|^2 dk\\ &= \int_{R^2}\left|\mathcal{F}(J^s h)\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(k)\right|^2 dk\\ &= \int_{R^2}\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(J^s h)\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(k)\right)\right|^2 dk\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\left|\int_R e^{ix_2k_2}\left(\int_R e^{ix_1k_1}\mathcal{F}(J^s h)\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(k)\,dk_1\right)dk_2\right|^2 dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\left|\mathcal{F}_{k_2}^{-1}\left(\int_R e^{ix_1k_1}\mathcal{F}(J^s h)\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(k)\,dk_1\right)(x_1,x_2)\right|^2 dx\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $J^s = (1-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ dir. Plancherel ve Fubini teoremlerinden

$$\begin{aligned}
\|P\|_{H^s}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_R\int_R \left|\int_R e^{ix_1k_1}\mathcal{F}\left(J^s h\right)\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}\left(k\right)dk_1\right|^2 dk_2dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_R\int_R \left|\int_R e^{ix_1k_1}\frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-k^2}}\widehat{V}\left(k\right)\left(\int_{R^2} e^{-iyk}J^s h\left(y\right)dy\right)dk_1\right|^2 dk_2dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} \left|\int_R e^{-iy_2k_2}J^s h\left(y\right)\left(\int_R e^{i(x_1-y_1)k_1}\frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-k^2}}\widehat{V}\left(k\right)dk_1\right)dy\right|^2 dk_2dx_1
\end{aligned} \tag{7.24}$$

olur.

$$\eta\left(r,k_2\right) = \int_R e^{irk_1}\frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-k^2}}\widehat{V}\left(k\right)dk_1$$

olarak alınsın. Burada $r = x_1 - y_1$ dir. Eğer $|k_2| > \frac{1}{2}$ ise, o zaman $\eta\left(r,k_2\right) = 0$ olur. (7.24), Schwartz, Fubini and Plancherel teoremleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|P\|_{H^s}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{R^2} \left|\int_R \eta\left(r,k_2\right)\left(\int_R e^{-iy_2k_2}J^s h\left(y\right)dy_2\right)dy_1\right|^2 dk_2dx_1 \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\left\{\left(\int_R \left|\eta\left(r,k_2\right)\right|^2 dy_1\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\int_R\left|\int_R e^{-iy_2k_2}J^s h\left(y\right)dy_2\right|^2 dy_1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 dk_2dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\left\{\left(\int_R \left|\eta\left(r,k_2\right)\right|^2 dy_1\right)\int_R\left|\mathcal{F}_{y_2}\left(J^s h\left(y\right)\right)\left(k_2\right)\right|^2 dy_1\right\}dk_2dx_1 \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{R^2}\sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}}\left|\eta\left(r,k_2\right)\right|^2 dx_1dy_1\right)\int_R\left(\int_R\left|\mathcal{F}_{y_2}\left(J^s h\left(y\right)\right)\left(k_2\right)\right|^2 dk_2\right)dy_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{R^2}\sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}}\left|\eta\left(r,k_2\right)\right|^2 dx_1dy_1\right)\int_R\left(\int_R\left|J^s h\left(y\right)\right|^2 dy_2\right)dy_1.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|P\|_{H^s}^2 \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{R^2}\sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}}\left|\eta\left(r,k_2\right)\right|^2 dx_1dy_1\right)\|h\|_{H^s}^2 \tag{7.25}$$

olur. (7.25) den (7.23) ün ispatlanması için $\eta\left(r,k_2\right)$ nin sınırlı olduğunu göstermenin yeterli olduğu anlaşılmaktadır. Bu amaçla $\eta\left(r,k_2\right)$,

$$\begin{aligned}
\eta(r,k_2) &= \int_R e^{irk_1}\frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-k^2}}\widehat{V}(k)\,dk_1 \\
&= \int_R e^{irk_1}\frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}+k_1\right|}\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\widehat{V}(k)\,dk_1 \\
&= \left(\int_{R^+}+\int_{R^-}\right)e^{irk_1}\frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}+k_1\right|}\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\widehat{V}(k)\,dk_1 \\
&= 2\pi\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1(k)\frac{1}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\right)(r) \\
&\quad +2\pi\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2(k)\frac{1}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\right)(-r) \\
&= 2\pi\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1(k)\right)*\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\right)(r) \\
&\quad +2\pi\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2(k)\right)*\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\right)(-r) \qquad (7.26)
\end{aligned}$$

şeklinde konvolüsyon formunda yazılsın. Burada $a_1(k) = \frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(k)}{\sqrt{\left|\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+k_1\right|}}\chi(k)$, $a_2(k) = \frac{|k|\left(1+k^2+k^4\right)^{-\frac{1}{2}}\widehat{V}(-k_1,k_2)}{\sqrt{\left|\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+k_1\right|}}\chi(k)$, $\chi(k) = 1_{\left\{k\in R^2,|k_2|\leq\frac{1}{2}\right\}}$ dir.

Basit bir hesaplamayla

$$\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}\right)(x_1,k_2) = \int_R e^{ix_1k_1}\frac{1}{\sqrt{\left|(1-k_2^2)^{\frac{1}{2}}-k_1\right|}}dk_1$$

$$\begin{aligned} &= e^{ix_1\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \int_R e^{ix_1(w+1)} \left|w\right|^{-\frac{1}{2}} dw \\ &= e^{ix_1\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \int_R e^{ix_1 w} \left|w\right|^{-\frac{1}{2}} dw \\ &= 2\pi e^{ix_1\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \mathcal{F}_w^{-1}\left(\left|w\right|^{-\frac{1}{2}}\right)(x_1) \\ &= 2\pi e^{ix_1\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left|x_1\right|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Gösterim kolaylığı açısından

$$\sigma\left(w,k_2\right) = \mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left|\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - k_1\right|}}\right)(w,k_2) = 2\pi e^{iw\left(1-k_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left|w\right|^{-\frac{1}{2}}$$

olsun. (7.25) ve (7.26) dan

$$\begin{aligned} \left\|P\right\|_{H^s}^2 &\leq C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\eta\left(r,k_2\right)\right|^2 dx_1 dy_1 \\ &\leq C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1\right)(.,k) * \sigma\left(.,k_2\right)(r)\right|^2 dx_1 dy_1 \\ &\quad + C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2\right)(.,k) * \sigma\left(.,k_2\right)(-r)\right|^2 dx_1 dy_1 \\ &\leq C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\int_R \mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1\right)(r-w,k_2)\,\sigma\left(w,k_2\right) dw\right|^2 dx_1 dy_1 \\ &\quad + C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\int_R \mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2\right)(-r-w,k_2)\,\sigma\left(w,k_2\right) dw\right|^2 dx_1 dy_1 \end{aligned}$$

bulunur. $\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1\right)\left(w,k_2\right)$, $\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2\right)\left(w,k_2\right)$, k_2 ye göre sınırlarına kompakt kümeler üzerinde ulaştığından

$$\begin{aligned} \left\|P\right\|_{H^s}^2 &\leq C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \left\{\int_R \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1\right)(r-w,k_2)\left|w\right|^{-\frac{1}{2}} dw\right|^2\right\} dx_1 dy_1 \\ &\quad + C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \left\{\int_R \sup_{|k_2|\leq\frac{1}{2}} \left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2\right)(-r-w,k_2)\left|w\right|^{-\frac{1}{2}} dw\right|^2\right\} dx_1 dy_1 \\ &= C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \left\{\int_R \left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1\right)(r-w,c_0)\left|w\right|^{-\frac{1}{2}} dw\right|^2\right\} dx_1 dy_1 \\ &\quad + C\left\|h\right\|_{H^s}^2 \int_{R^2} \left\{\int_R \left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2\right)(-r-w,c_0)\left|w\right|^{-\frac{1}{2}} dw\right|^2\right\} dx_1 dy_1 \end{aligned}$$

bulunur. Burada c_0 bir reel sabittir. $\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_1\right)\left(w,c_0\right)$, $\mathcal{F}_{k_1}^{-1}\left(a_2\right)\left(w,c_0\right) \in \mathcal{S}\left(R\right)$ için

$$\begin{aligned}\sup_{x_1,y_1,z\in R^3}\left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}(a_1)(r-w,c_0)\right|\left(1+|x_1|^2\right)^2\left(1+|y_1|^2\right)^2\left(1+|w|^2\right)^2 &\leq M_1,\\ \sup_{x_1,y_1,z\in R^3}\left|\mathcal{F}_{k_1}^{-1}(a_2)(r-w,c_0)\right|\left(1+|x_1|^2\right)^2\left(1+|y_1|^2\right)^2\left(1+|w|^2\right)^2 &\leq M_2\end{aligned}$$

olacak şekilde pozitif M_1 ve M_2 sabitleri vardır.
Bir f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü $\mathcal{F}^{-1}(f)\in\mathcal{S}(R)$ olduğundan Fourier dönüşümünün özellikleri kullanılarak yukarıdaki eşitsizliklerin doğruluğu gösterilebilir. Son olarak yukarıdaki eşitsizlikler ve Fubini teoremi kullanılırsa

$$\|P\|_{H^s}^2\leq C\|h\|_{H^s}^2$$

sonucuna ulaşılır. (7.22) de (7.23) ün ispatıyla aynı yol izlenerek ispatlanabilir.

Aşağıdaki lemmayı ispatlamak için faz fonksiyonu ve λ nın özelliklerine ihtiyaç duyulacaktır.

- $\lambda(k)$, $k\neq 0$, $|k|<1$ koşullarını sağlayan her k için C^∞ sınıfından bir fonksiyondur. Ayrıca

$$\nabla\lambda(k) = \frac{k\left(1-2k^2-2k^4\right)}{|k|\left(1-k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}D^2\lambda(k) = {}& \frac{1-6k^2-10k^4}{|k|\left(1-k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\left(1-2k^2-2k^4\right)\left(1-2k^2\right)}{|k|\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{\frac{3}{2}}}\\ &-\frac{3|k|\left(1-2k^2-2k^4\right)\left(+2k^2\right)}{\left(1-k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+k^2+k^4\right)^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned} \tag{7.28}$$

  dir.

- $\Psi(k) = \lambda(k)+t^{-1}(x,k)$ faz fonksiyonu olarak adlandırılır ve bilindiği gibi salınımlı integrallerin asimptotik davranışını büyük ölçüde faz fonksiyonunun durağan noktaları, yani $\nabla\Psi(k)=0$ eşitliğini sağlayan noktalar belirler. $|k|<1$ iken, $\nabla\Psi(k)=0$ eşitliği için derecesi 7 olan bir polinom elde edilir ve bu polinomun en fazla 14 tane durağan noktası vardır.

Aşağıdaki lemma (7.1), (7.2) probleminin çözümlerinin decayını ispatlamakta kullanılacaktır. İntegrallerin davranışını belirlemek için durağan faz (stationary phase) metodu kullanılacaktır.

Lemma 7.2.2. $\varphi,\psi\in H^2(R^2)\cap L^1(R^2)$ olsun. O zaman yeterince büyük her t için

$$\|\partial_t S(t)(V(x)*\varphi(x))\|_\infty\leq C(1+t)^{-\frac{1}{7}}\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_{H^2}\right), \tag{7.29}$$

$$\|S(t)(V(x)*\nabla\psi(x))\|_\infty\leq C(1+t)^{-\frac{1}{7}}\left(\|\psi\|_1+\|\psi\|_{H^2}\right), \tag{7.30}$$

$$\left\|\mathcal{T}(t)\left(V(x)*\Delta h(x,\tau)\right)\right\|_{\infty}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{7}}\left(\|h\|_{1}+\|h\|_{H^{2}}\right) \tag{7.31}$$

kestirimleri sağlanır. Burada C x ve t den bağımsız bir sabittir.

İspat. Önce (7.29) ispatlanacaktır. k_j, $j=1,2,...,14$ için, Ψ faz fonksiyonunun durağan noktaları olsun. r_1, $k_j\in(-r_1,r_1)$, $\forall j=1,2,...,14$ sağlanacak şekilde yeterince büyük ve $\epsilon>0$, $(k_j-\epsilon,k_j+\epsilon)\subset(-r_1,r_1)$ $\forall j=1,2,...,14$ sağlanacak kadar küçük olsun.

$$B_{\epsilon}=\{k\in(-r_1,r_1),\ \text{such that}\ |k-k_j|\geq\epsilon,\forall j=1,2,...,14\}$$

kümesi tanımlansın. (7.18) integralinin sağ tarafındaki ilk terim

$$\begin{aligned}\left|\int_{R^2}e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right| &= \left|\int_{|k|\leq r_1}e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk+\int_{|k|>r_1}e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right|\\ &\leq \left|\int_{|k|\leq r_1}e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right|+\left|\int_{|k|>r_1}e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right|\\ &= I_1+I_2\end{aligned} \tag{7.32}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (7.32) nin sağ tarafındaki iki terim ayrı ayrı hesaplanacaktır. İlki için, $Y=\{k:|k|\leq r_1\}$, $\beta(k,t)=e^{it\lambda(k)}\chi_Y(k)\widehat{V}(k)$ olsun. Burada $\chi_Y(k)$, Y kümesi üzerindeki karakteristik fonksiyondur. Buradan

$$\begin{aligned}|I_1| &= \left|\int_{|k|\leq r_1}e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right|=\left|\int_{R^2}e^{it\lambda(k)+ixk}\chi_Y(k)\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right|\\ &= \left|\int_{R^2}e^{ixk}\beta(k,t)\widehat{\varphi}dk\right|=\left|\int_{R^2}e^{ixk}\mathcal{F}^{-1}\left[\beta(k,t)\right]*\varphi dk\right|\\ &\leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\beta(k,t)\right]\right\|_{\infty}\int_{R^2}|\varphi|\,dk\leq\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\beta(x,t)\right]\right\|_{\infty}\|\varphi\|_1\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\alpha=\frac{x}{t}$ olsun. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim için

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}^{-1}\left[\beta(x,t)\right]\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{ixk}\beta(k,t)\,dk\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}e^{it(\lambda(k)+\alpha k)}\chi_Y(k)\widehat{V}(k)\,dk\right|\\ &\leq \sup_{-\infty<\alpha<\infty}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{R^2}e^{it(\lambda(k)+\alpha k)}\chi_Y(k)\widehat{V}(k)\,dk\right|\\ &\leq \sup_{-\infty<a<\infty}\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-r_1}^{r_1}e^{it(\lambda(k)+\alpha k)}\widehat{V}(k)\,dk\right|\\ &\leq C\left(\int_{B_{\epsilon}}+\sum_{j=1}^{14}\int_{[k_j-\epsilon,k_j+\epsilon]}\right)e^{it(\lambda(k)+\alpha k)}dk\\ &= I_3+\sum_{j=1}^{14}I_4^j\end{aligned}$$

bulunur. B_ϵ yuvarında $\nabla\lambda(k) \neq 0$ dır ve yeterince büyük $r_1 > 0$ için $|D^2\lambda(k)| > Cr_1^{-7}$ olur. Van der Corput lemmasından

$$|I_3| = \left| \int_{B_\epsilon} e^{it\Psi(k)} dk \right| \leq \frac{Ct^{-\frac{1}{2}}}{\left\{ \min_{B_\epsilon} |D^2\Psi(k)| \right\}^{\frac{1}{2}}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}} r_1^{\frac{7}{2}}$$

bulunur. Van der Corput lemması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left|I_4^j\right| &= \int_{|k-k_j|<\epsilon} e^{it\Psi(k)} dk = \left(\int_{|k-k_j|<t^{-\frac{1}{7}}} + \int_{t^{-\frac{1}{7}}<|k-k_j|<\epsilon} \right) e^{it\Psi(k)} dk \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{7}} + Ct^{-\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki kestirimler birleştirilirse

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq Ct^{-\frac{1}{2}} r_1^{\frac{7}{2}} + \sum_{j=1}^{14} \left(Ct^{-\frac{1}{7}} + Ct^{-\frac{3}{7}} \right) \|\varphi\|_1 \\ &\leq C\left(t^{-\frac{1}{2}} r_1^{\frac{7}{2}} + t^{-\frac{1}{7}} + t^{-\frac{3}{7}} \right) \|\varphi\|_1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi (7.32) deki ikinci integral incelenektir. Bu integralin analizi diğerine göre daha kolay olacaktır, çünkü burada durağan noktalar integrasyon aralığının dışındadır.

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{|k|>r_1} e^{it\lambda(k)+ixk} \widehat{V}\widehat{\varphi} dk \right| \leq \int_{|k|>r_1} \left|\widehat{V}\right| |\widehat{\varphi}| \, dk \\ &\leq \left(\int_{r_1<|k|<1} \left|\widehat{V}\right|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{7}} \|\varphi\|_{H^2}. \end{aligned}$$

Böylece

$$\left| \int_{R^2} e^{it\lambda(k)+ixk} \widehat{V}\widehat{\varphi} dk \right| \leq C\left(t^{-\frac{1}{2}} r_1^{\frac{7}{2}} + t^{-\frac{1}{7}} + t^{-\frac{3}{7}} \right) \|\varphi\|_1 + Ct^{-\frac{1}{7}} \|\varphi\|_{H^2}$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla, t yeterince büyük ise,

$$\left| \int_{R^2} e^{it\lambda(k)+ixk} \widehat{V}\widehat{\varphi} dk \right| \leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} \right) t^{-\frac{1}{7}} \tag{7.33}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left\|\int_{R^2} e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right\|_\infty &= \frac{1}{4\pi}\left|\int_{R^2} e^{it(\lambda(k)+\alpha k)}\widehat{\varphi}\,(k)\,\widehat{V}\,(k)\,dk\right| \\ &\leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_{H^2}\right) \qquad (7.34)\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. (7.33) ve (7.34) den

$$\left\|\int_{R^2} e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right\|_\infty^{-7} \geq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_{H^2}\right)^{-7}$$

ve

$$\left\|\int_{R^2} e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right\|_\infty^{-7} \geq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_{H^2}\right)^{-7} t$$

olur. Son iki kestirim toplanırsa

$$\left\|\int_{R^2} e^{it\lambda(k)+ixk}\widehat{V}\widehat{\varphi}dk\right\|_\infty \leq C\left(\|\varphi\|_1+\|\varphi\|_{H^2}\right)(1+t)^{-\frac{1}{7}}$$

elde edilir. (7.30) ve (7.31) de benzer şekilde ispatlanabilir.

7.3. Temel Sonuçların İspatı

Bu kısımda, bir önceki kısmın kestirimleri yardımıyla çözümlerin global varlığı ve azalması ispatlanacaktır.

Teorem 7.1 in İspatı. Lemma 5.1.2 ve Lemma 7.1.1 deki kestirimler yardımıyla

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{H^s}+\|u_t(t)\|_{H^s} &\leq C(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t\|f(u(\tau))\|_{H^s}\,d\tau\right) \\ &\leq C(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t K_1(M)\,\|u(\tau)\|_{H^s}\,d\tau\right) \\ &\leq C(1+T)\left(\|\varphi\|_{H^s}+\|\psi\|_{H^s}+\int_0^t K_1(M)\left(\|u\|_{H^s}+\|u_t\|_{H^s}\right)d\tau\right)\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğe Gronwall lemması uygulanırsa $u(t)$ ve $u_t(t)$ nin H^s normlarının sonlu zamanda patlamayacağı (blow up) görülür. Dolayısıyla Teorem 7.1.3 den $T_m=\infty$ sonucuna varılır. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 7.2 $f(u)=|u|^p u$ $(p\geq 1)$ doğrusal olmayan terimi için ispatlanacaktır, ancak önce gerekli bazı lemmalar verilecektir.

Lemma 7.3.1 (Strauss 1968). $\eta(t)$ sürekli, reel değerli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$$\eta(t) \leq C_1 + C_2\eta(t)^{\gamma}, \qquad t \in I,$$

olacak şekilde $\gamma > 1$, $C_i > 0$, $i = 1, 2$ sabitleri ve herhangi bir I aralığı $0 \in I$ şeklinde var olsun. Eğer $\eta(0) \leq C_1$ ve $C_1 C_2^{(\gamma-1)^{-1}} < (1-\gamma^{-1})\gamma^{-(\gamma-1)^{-1}}$ ise, bu durumda aynı aralıkta

$$\eta(t) < \frac{C_1}{1-\gamma^{-1}}$$

olur.

Lemma 7.3.2 (Racke 1991). $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ olsun ve

$$\alpha + \beta - \gamma \geq 1, \quad \alpha \geq \gamma, \quad \beta \geq \gamma$$

ve

$$\beta = 1 \text{ ise } \alpha > \gamma, \quad \alpha = 1 \text{ ise } \beta > \gamma$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \int_0^t (1+t)^{\gamma} (1+t-\tau)^{-\alpha} (1+\tau)^{-\beta} d\tau \leq \infty \tag{7.35}$$

eşitsizliği geçerli olur.

Lemma 7.3.3. $f \in C^{[s]+1}$ ve $u \to \infty$ iken $\alpha \geq 1$ bir pozitif tamsayı olmak üzere, $f(u) = O(|u|^{\alpha} u)$ olsun. Eğer $u \in H^s \cap L^{\infty}$ ve $\|u(t)\|_{\infty} \leq M$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{H^s} &\leq C(M) \|u\|_{H^s} \|u\|_{\infty}^{\alpha}, \\ \|f(u)\|_1 &\leq C(M) \|u\|^2 \|u\|_{\infty}^{\alpha-1} \end{aligned}$$

olur. Burada $C(M)$, M ye bağlı bir sabittir.

İspat. $f(u) = O(|u|^{\alpha} u)$ kabulünden

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(\alpha-1)}(0) = 0, \qquad f^{(\alpha)}(0) \neq 0$$

sonucuna varılır. Böylece $f(u)$

$$f(u) = K(u) u^{\alpha} u$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K(u) \neq 0$ dır. $G(u) = K(u) u$ olsun. $G(0) = 0$ ve

$$f(u) = G(u) u^{\alpha}$$

olur. Yukarıdaki eşitlik, 5.1.2 ve 7.1.2 lemmaları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{H^s} &\leq C\left(\|G(u)\|_\infty \|u^\alpha\|_{H^s} + \|G(u)\|_{H^s} \|u^\alpha\|_\infty\right)\\ &\leq C(M)\left(\|u\|_\infty \|u^\alpha\|_{H^s} + \|u\|_{H^s} \|u^\alpha\|_\infty\right)\\ &\leq C(M)\|u\|_{H^s} \|u^\alpha\|_\infty\end{aligned}$$

elde edilir. İlk eşitsizliğin ispatı tamamlanmış olur. Hölder eşitsizliği ve $f(u) = G(u)u^\alpha$ kullanılırsa ikinci eşitsizlik de ispatlanabilir. Lemma ispatlanmış olur.

Teorem 7.2 nin İspatı. $u \in C^1([0,\infty); H^2)$, (7.1) and (7.2) probleminin global çözümü olsun. Her $t \geq 0$ için σ fonksiyonu

$$\sigma(t) = \sup_{0\leq\tau<t}\left\{(1+\tau)^{\frac{1}{7}}\|u(\tau)\|_\infty + \|u(\tau)\|_{H^2}\right\} \tag{7.36}$$

olarak tanımlansın.

$$\sigma(t) \leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2}\right) + C\sigma^{p+1}(t) \tag{7.37}$$

olduğu ispatlanacaktır. $\sigma(t)$ nin her terimi ayrı ayrı incelenecektir. İlk terim için 7.1.3, 7.2.2 ve 7.3.2 lemmaları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\infty &\leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2}\right)(1+\tau)^{-\frac{1}{7}}\\ &\quad + C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\frac{1}{7}}\left(\||u|^p u\|_1 + \||u|^p u\|_{H^2}\right)d\tau\\ &\leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2}\right)(1+\tau)^{-\frac{1}{7}}\\ &\quad + C\int_0^t \left(\|u\|^2 \left\|u^{p-1}\right\|_\infty + \|u\|_{H^2}\|u^p\|_\infty\right)(1+t-\tau)^{-\frac{1}{7}}d\tau\end{aligned}$$

elde edilir. $\sigma(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\infty &\leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2}\right)(1+\tau)^{-\frac{1}{7}}\\ &\quad + \sigma(t)^{p+1}\int_0^t (1+\tau)^{\frac{1-p}{7}}(1+t-\tau)^{-\frac{1}{7}}d\tau\end{aligned} \tag{7.38}$$

elde edilir. Lemma 7.3.2 den, (7.38) integrali yakınsak ve $0 \leq t < \infty$ için, t den bağımsız bir sabitle sınırlıdır. Lemma 7.3.1 de $\beta = \frac{p-1}{7}$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{7}$ ve $p > 8$ alınsın. Böylece

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2} + \sigma(t)^{p+1}\right)(1+t)^{-\frac{1}{7}}$$

veya denk olarak

$$(1+t)^{\frac{1}{7}}\|u(t)\|_\infty \leq C\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_1 + \|\psi\|_{H^2} + \sigma(t)^{p+1}\right)$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan (7.21)-(7.23) den

$$\|u\|_{H^2} \leq C\left(\|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_{H^2} + \int_0^t \||u|^p u\|_{H^2}\, d\tau\right)$$

elde edilir. Lemma 7.3.2 deki ilk eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2} &\leq C\left(\|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_{H^2}\right) + C\int_0^t (1+\tau)^{\frac{1-p}{7}}\, d\tau \\ &\leq C\left(\|\varphi\|_{H^2} + \|\psi\|_{H^2}\right) + C\sigma(t)^{p+1}\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Şimdi Lemma 7.3.1 in hipotezleri gerçeklenecektir. $\sigma(t)$ nin negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_{H^2} \leq 2\|\varphi\|_{H^2} \\ &\leq 2\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2}\right)\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Burada $H^2 \hookrightarrow L^\infty$ gömülmesi kullanılmıştır. $C_1 = \max\{2, C\}\left(\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2}\right)$ ve $C_2 = C$, olarak seçilir (C (7.37) deki sabitle aynıdır), $\gamma = p+1$ ve yeterince küçük $\zeta > 0$ için $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_{H^2} < \zeta$ olarak alınırsa, Lemma 7.3.1 in tüm koşulları sağlanmış olur. Böylece

$$\sigma(t) \leq \frac{C_1}{1-\gamma^{-1}}$$

sonucuna varılır ve buradan

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{1}{7}}$$

olur.

8. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının son üç bölümünde farklı tipten Boussinesq denklemlemleri alınmış, bu denklemlerin çözümleri için lokal ve global varlık, blow up ve decay çalışılmıştır. Beşinci bölümde çalışılan problemin global çözümlerinin varlığı yeni bir fonksiyonel tanımlanarak üstkritik başlangıç enerjili durum için de çalışılabilir. Altıncı bölümde Boussinesq tipli bir denklemin üstkritik başlangıç enerjili durumu için global varlık verilmiştir. Üstkritik başlangıç enerjili durumda önceki yöntemler $f(u) = \beta |u|^p$ doğrusal olmayan terimi için global varlığı garantileyemez. Bu bölümde potential well metodu modifiye edilerek yeni bir fonksiyonel yardımıyla global varlık ispatlanmıştır. Bu modifiye metot üstkritik enerjili durum için söz konusu doğrusal olmayan terime sahip diğer Boussinesq tipli denklemlere de uygulanabilir. Yedinci bölümdeki problem R^2 de ele alınmıştır, R^n ye genişletilebilir ve bu problem için blow up da çalışılabilir.

.

9. KAYNAKLAR

Adams, R. A., Fournier, J.J.F. 2003. Sobolev Space. Academic Press. New York.

Akmel, D. G. 2004. Global existence and decay for solution to the bad Boussinesq equation in two space dimensions. Appl. Anal. 83 (1) 17–36.

Akmel, D.G. 1998. Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation. IMA J. Appl. Math. 60 123-138.

Albert, J. 1989. On the decay of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation. J. Math. Anal. Appl. 141 527-537.

Biler, P. 1992. Long time behavior of solutions of the generalized Benjami-Bona-Mahony equation in two space dimensions. Differential Integral Equations 5 891-901.

Bona, J.L., Sachs, R.L. 1988. Global Existence of Smooth Solutions and Stability of Solitary Waves for a Generalized Boussinesq Equation. Commun. Math. Phys. 118 15-29.

Bourgain J. 1993a. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations Geom. Funct. Anal. 3 107–156.

Bourgain J. 1993b. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. Geom. Funct. Anal. 3 209–262.

Boussinesq, J. V. 1872. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide continu dans 21 ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math. Pures Appl. 1755–108.

Cazanave T., Weissler F.B. 1990. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. Nonlinear Anal. 14 807–836.

Chen, G., Wang, S. 1999. Existence and nonexistence of global solutions for the generalized IMBq equation. Nonlinear Anal. 36 961-980.

Chen, G., Xue, H. 2008. Periodic boundary value problem and Cauchy problem of the generalized cubic double dispersion equation. Acta Mathematica Scientia 28B(3) 573–587.

Chen, G., Wang, Y., Wang, S. 2004. Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation. J. Math. Anal. Appl. 299 563-577.

Chen, X., Chen, G. 2008. Asymptotic behavior and blow-up of solutions to a nonlinear evolution equation of fourth order. Nonlinear Anal. 68 892-904.

Christov, C.I., Maugin G.A., Velarde M.G. 1996. Well-posed Boussinesq paradigm with purely spatial higher-order derivatives. Phys. Rev. E 54 3621–3638.

Craik, A.D.D. 2004. The origins of water wave theory. Annu. Rev. Fluid Mech. 36 1–28.

Daripa, P. 2006. Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves. European J.Mechanics B/Fluids 25 1008–1021.

de Laplace, P.S. 1820. Théorie analytique des probabilités, Third ed. vol. 2 part 2 chap.1=(Euvres complétes 1891-1904 7 89-110).

Debnath, L. 1994. Nonlinear Water Waves. Academic Press İnc.

Deift, P. Tomei, C. E. 1982. Trubowitz Inverse scattering and the Boussinesq equation, Comm. Pure Appl. Math. 35 567-628.

Esquivel-Avila, J.A. 2005. Dynamics around the ground state of a nonlinear evolution equation, Nonlinear Anal. 63 (5–7) 331–343.

Esfahani, A., Farah, L.G. 2011. Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation. J. Math. Anal. Appl. 385 230–242.

Fang, Y., Grillakis, M.G. 1996. Existance and uniqueness for Boussinesq type equations on a circle. Commun. in Partial Differential Equations. 21(7-8) 1253-1277.

Godefroy A. D. 1998. Blow up of solutions for the damped Boussinesq equation. IMA J. Appl. Math. 60 123-138.

Han, X. Wang, M. 2010. General decay of energy for a viscoelastic equation with nonlinear damping, J. Franklin Inst. 347 806–817.

Hardy, G. H. 1915. On the Expression of a Number as the Sum of Two Squares. Quart. J. Math. 46 263-283.

Johnson, R. S. 1996. A two dimensional Boussinesq equation for water waves and some of its solutions. J. Fluid Mech. 323 65-78.

Kalantarov, V.K., Ladyzhenskaya, O.A 1978. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type. J. Soviet Math. 10 53–70.

Kato, T. Ponce, G. 1988. Commutator estimates and the Euler and Navier Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math. 41 891-907.

Kelvin (Lord) 1887. On the Waves Produced by a Single Impulse in Water of any Depth, or in a dispersive medium. Philos. Mag. 5(23) 252-255.

Levine, H. A. 1974. Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Pu = Au_{tt} + F(u)$, TAMS 192 1–21.

Levine H.A. and Sleeman, B.O.1985. A note on the non-existence of global solutions of initial boundary value problems for the Boussinesq equation $u_{tt} = u_{xx} + 3u_{xxxx} - 12\left(u^2\right)_{xx}$. J. Math. Anal. 107 206–210.

Lin, Q. Wu,Y.H. Lai, S. 2008. On global solution of an initial boundary value problem for a class of damped nonlinear equations. Nonlinear Anal. 69 4340-4351.

Lin,Q. Wu, Y.H. Loxton, R. 2009. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation. J. Math. Anal. Appl. 353 186-195.

Linares, F. 1993. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation. J. Differential Equations. 106 257-293.

Linares, F., Scialom, M. 1995. Asymptotic behavior of solutions of a generalized Boussinesq type equation. Nonlinear Anal. 25 (1) 1147-1158.

Liu Y. 1993. Instability of solitary waves for generalized Boussinesq equation. J. Dynamics Diff. Eq. 5 537-558.

Liu Y. 1993. Decay and scattering of small solutions of a generalized Boussinesq equation. J.Funct. Anal. 147 51-68

Liu,Y. 1997. Decay and scattering of small solutions of a generalized Boussinesq equation. J. Funct. Anal. 147 51-68.

Liu,Y. Xu, R. 2008. Global existence and blow up of solutions for Cauchy problem of generalized Boussinesq equation. Physica D 237 721–731.

Molinet L., Ribaud F. 2003. On the Cauchy problem for the generalized KdV equation, Comm. Partial Differential Equations. 28 2065–2091.

Muñoz Grajales, J.C. Rivas, I. 2008. Existence and asymptotic decay for a Boussinesq-type model. J. Math. Anal. Appl. 345 455–475.

Musayev B., Alp M. 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları Tic. Ltd. Şti. Kütahya.

Polat, N. 2005. Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Polat, N. 2008. Existence and Blow up of solutions of the Cauchy problem of the generalized damped multidimensional improved modified Boussinesq equation. Z. Naturforsch. 63a 1-10.

Polat, N., Ertaş, A. 2009. Existence and Blow up of Solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation. J. Math. Anal. Appl. 349 10–20.

Polat, N. Kaya, D. 2006. Blow up of solutions for the generalized Boussinesq equation with damping term. Z. Naturforsch. 61a 235–238.

Polat,N. Kaya, D. 2009. Existence, asymptotic behaviour, and blow up of solution for a class of nonlinear wave equations with dissipative and dispersive term. Z. Naturforsch. 64a 1-12.

Racke, R.1991. Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Initial Value Problems. Aspects Math.

Russell, J. S. 1844. Report on Waves. Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science. September 311-390 London.

Schneider, G.Eugene, C. W. 2001. Kawahara dynamics in dispersive media. Physica D 152-153 384-394.

Schneider, G., Wayne, C. E. 2002. On the validity of 2D-surface water wave models. GAMM Mitt. Ges. Angew. Math. Mech. 25(1-2) 127–151.

Stein, E.M. 1986. Beijing Lectures in Harmonic Analysis. Princeton University Press. Princeton, NJ.

Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton University Press. Princeton, NJ.

Stein, E.M., Shakarchi, R. 2003. Princeton Lectures in Analysis I. Fourier Analysis: An Introduction. Princeton University Press. Princeton, NJ.

Stokes, G.G. 1856. On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series. Trans. Cambridge Philos. Soc. 9 166-187.

Strauss, W. 1968. Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$. J. Funct. Anal. 2 409–457.

Taskesen, H., Polat, N., Ertaş A. 2012. On global solutions for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation. Abst. Appl. Anal. Article in press.

Turitsyn, S.K. 1993. Blow-up in the Boussinesq equation. Phys. Rev. E 47(2) R796-R799.

van der Corput, J.G. 1934. Zur methode der stationaren phase I. Compositio Math. 5 15-38.

van der Corput, J.G. 1936. Zur methode der stationaren phase II. Compositio Math. 3 328-372.

Varlamov, V. 1999a. On the damped Boussinesq equation in a circle. Nonlinear Anal. 38 447-470.

Varlamov, V. 1999b. Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions. Internat. J. Math. & Math. Sci. 22(1) 131-145.

Voronoi, G. 1904. Sur une fonction transcendente et ses applications a la sommation de quelques s´eries, Annales Scienti ques de l' ´ Ecole Normale Sup´erieure. XXI 203-267 459-533.

Wang, S, Chen, G. 2002a. The Cauchy Problem for the Generalized IMBq Equation in $W^{s,p}(R^n)$. J. Math. Anal. Appl. 266 38–54.

Wang, S, Chen, G. 2002b. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation. J. Math. Anal. Appl. 274 846-866.

Wang, S, Chen, G. 2006. Cauchy problem of the generalized double dispersion equation. Nonlinear Anal. 64 159-173.

Wang, S., Xu, G. 2009. The Cauchy problem for the Rosenau equation. Nonlinear Anal. 71 456-466.

Wang, S. ,Xu, H. 2012. On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term. J. Differential Equations. 252 4243-4258.

Wang, Y., Mu, C. 2007. Global existence and blow-up of the solutions for the multidimensional generalized Boussinesq equation. Math. Meth. Appl. Sci. 30 1403-1417.

Wang,Y. Mu,C. Wu,Y. 2009. Decay and scattering of solutions for a generalized Boussinesq equation, J. Differential Equations 247 2380–2394.

Wang,Y-Z 2009. Global existence and asymptotic behaviour of solutions for the generalized Boussinesq equation, Nonlinear Anal. 70 465–482.

Wang, Y-Z., Wang, Y-X. 2010. Existence and nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equations of higher order. 72 4500-4507.

Watson, G. N. 1944. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Second edition. Cambridge University Press, London.

Whitham, G.B. 1974. Linear and Nonlinear Waves. Wiley. New York.

Xia, S. Yuan, J. 2010. Existence and scattering of small solutions to a Boussinesq type equation of sixth order. Nonlinear Anal. 73 1015-1027.

Xu, R. 2011. Cauchy problem of generalized Boussinesq equation with combined power-type nonlinearities. Math. Meth. Appl. Sci. 34 2318–2328.

Xu, R., Liu, Y., Liu, B. 2011. The Cauchy problem for a class of the multidimensional Boussinesq-type equation. Nonlinear Anal. 74 2425-2437.

Xue R. 2006. Local and global existence of solutions for the Cauchy problem of a generalized Boussinesq equation. J. Math. Anal. Appl. 316 307-327.

Zabusky, N. J., Kruskal, M. D. 1965. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. J.Phys. Rev. Lett. 15 (6) 240–243.

Zhijian, Y. 2002. On local existence of solutions of initial boundary value problems for the “bad” Boussinesq-type equation, Nonlinear Anal. 51 1259–1271.

Zhijian, Y., Boling, G. 2008. Cauchy problem for the multi-dimensional Boussinesq type equation. J. Math. Anal. Appl. 340 64–80.

Zhijian, Y., Wang, X. 2003. Blow up of solutions for the “bad” Boussinesq-type equation, J. Math. Anal. Appl. 285 282–298.

ÖZGEÇMİŞ

1982 Diyarbakır doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladım. 2006 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimimi tamamladım. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktoraya başladım. Evliyim ve bir kızım var.