



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HİBRİT BİR ALGORİTMA

DİLAY SULTAN DURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HİBRİT BİR ALGORİTMA

Dilay Sultan DURAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
2019, 38+x Sayfa

Jüri

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Ozan ÖZKAN (Danışman)
Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

Bu tezde, conformable anlamında kesirli mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için; Conformable Laplace dönüşümü ve Diferensiyel Dönüşüm yöntemlerinin ardışık kullanımı esasına dayanan ve hibrit bir yöntem olan Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (CLDDM) sunulmuştur. Dolayısıyla, kesirli mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için alternatif bir yöntem sunulmuştur. Yöntemin etkinliği, çeşitli örneklerde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Analiz, Kesirli Mertebeden Kısmi Diferensiyel Denklemler, Conformable Türev, Conformable Laplace Dönüşümü, Yaklaşık Çözüm.

ABSTRACT

MS THESIS

A HYBRID ALGORITHM FOR SOLVING FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dilay Sultan DURAN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN
2019, 38+x Pages

Jury

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assoc. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN (Advisor)
Assit. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

In this thesis in order to find solutions of fractional order partial differential equations (FPDEs) in conformable sense; Conformable Laplace Differential Transform Method (CLDDM), a hybrid method based on the use of conformable Laplace transform and differential transform methods, is presented. Thus, an alternative method for finding approximate solutions of fractional PDEs is presented. The efficiency of the method is shown in several examples.

Keywords: Fractional Analysis, Fractional Partial Differential Equations, Conformable Derivative Conformable Laplace Transform, Approximate Solution.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ozan ÖZKAN danışmanlığında hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans Tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm literatür özetlerini içene alan giriş bölümüdür. İkinci bölüm tezin diğer bölümlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümde; tez çalışmasında ele alınacak olan problemin çözümünde kullanılacak olan yöntemler literatürdeki mevcut halleri ile sunulmuştur. Beşinci bölümde; çalışmanın orijinal kısmını oluşturan Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu ve uygulamaları yer almaktadır. Son olarak da sonuç ve öneriler altıncı bölümde verilmiştir.

Tez çalışması konusunun seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Ozan ÖZKAN' a, katkılarından dolayı Dr. Öğr. Üyesi Ali KURT' a ve her zaman yanımda olan kıymetli aileme ve sevgili eşime teşekkürlerimi sunarım.

Dilay Sultan DURAN
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ ..... **viii**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **ix**

TABLOLAR LİSTESİ ..... **x**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL TANIMLAR **5**

2.1. Gamma Fonksiyonu 5
2.2. Beta Fonksiyonu 5
2.3. Laplace Dönüşümü 5
2.4. Ters Laplace Dönüşümü 6
2.5. Kesirli Mertebeden Adi Diferensiyel Denklem 6
2.6. Kesirli Mertebeden Kısmi Diferensiyel Denklem 6
2.7. Conformable Kesirli Türev ve Özellikleri 6
2.7.1. Conformable Kesirli Türev 8

3. CONFORMABLE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ **11**

3.1. Conformable Laplace Dönüşümü 11
3.2. Conformable Laplace Dönüşümünün Özellikleri 12

4. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE ÖZELLİKLERİ **16**

4.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm 16
4.2. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşümün Özellikleri 17

5. CONFORMABLE LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (CLDDM) VE UYGULAMALARI **21**

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **33**

KAYNAKLAR **34**

ÖZGEÇMİŞ **38**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simgeler

$B(x,y)$	: Beta Fonksiyonu
$\Gamma(n)$	: Gamma Fonksiyonu
$L\left[f(t)\right]=F(s)$	: $f(t)$ Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü
$L^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$	: $F(s)$ Fonksiyonunun ters Laplace Dönüşümü
${}^{RL}D^{\alpha}$	: α. mertebeden Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^{C}D^{\alpha}$	: α. mertebeden Caputo Kesirli Türev Operatörü
D^{α}	: α. mertebeden Conformable Kesirli Türev Operatörü
I^{α}	: α. mertebeden Conformable Kesirli İntegral Operatörü
L_{α}	: Conformable Laplace Dönüşüm Operatörü
$\bar{u}(x,s)=L_{\alpha}\left[u(x,t)\right]$	: $u(x,t)$ Fonksiyonunun Conformable Laplace Dönüşümü
$y(x)$	: Orijinal Fonksiyon (Başlangıç Fonksiyonu)
$Y(k)$	: Diferensiyel Dönüşüm Fonksiyonu (DDM)
£	: n. Mertebeden Lineer Diferensiyel Operatör

Kısaltmalar

KTDD	: Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem
DDM	: Diferensiyel Dönüşüm Metodu
CLDDM	: Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 5.1. Örnek 5.1' in u(x,t) çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$ 26
Şekil 5.2. Örnek 5.2' nin u(x,t) çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$ 28
Şekil 5.3. Örnek 5.3' ün u(x,t) çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$ 30
Şekil 5.4. Örnek 5.4' ün u(x,t) çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$ 31
Şekil 5.5. Örnek 5.5' in u(x,t) çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$ 32

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 3.1. Bazı Özel Fonksiyonların Conformable Laplace Dönüşümleri..... 15
Tablo 4.1. Bir Değişkenli Bazı Özel Fonksiyonların Diferensiyel Dönüşümleri…..…...20
Tablo 5.1. Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile çözüm döngüsü….23

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi tüm bilim dallarında ve mühendislikte fiziksel olayların anlaşılabilmesi ve olaylara müdahale edilebilmesi için bilim tarihi boyunca matematiksel modeller inşa edilmiştir. Bu modellerin çoğu ise bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerini içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar. Böyle denklemler ise diferensiyel denklem olarak isimlendirilir. Diferensiyel denklemlerdeki türev kavramı, yaklaşık dört yüzyıl önce Newton tarafından geliştirilmiş olmakla beraber $\frac{dy}{dx}$ ifadesi ilk kez Leibniz tarafından kullanılmıştır. Ancak ilk olarak 1695' de Leibniz' in L'Hospital' a sormuş olduğu "*Tam sayı mertebeden türevler, kesir mertebeden türevlere genişletilebilir mi?*" sorusu kesirli türev ve kesirli analiz kavramlarının ortaya çıkmasını ateşleyen fitil olmuştur. Bu konu o günden bu yana birçok matematikçinin ve bilim insanının ilgisini çekmiştir (Nishimoto, 1991); Weilbeer (2005). Kesirli türevin bilimsel tanımı ilk olarak, 1812' de P.S. Laplace' ın yazmış¸ olduğu "*Theoric analytique des probabilites*" adlı kitabında bulunmakta olup (Weilbeer, 2005), ardından çeşitli nedenlerle birçok farklı kesirli türev tanımının yapılmış olduğu literatürde mevcuttur. Günümüzde yapılan çalışmalarda ise daha sonraları ortaya çıkan tanımlardan ancak birkaç tanesinin bilim dünyası tarafından daha çok ilgi ve kabul gördüğü görülmektedir.

Günümüzde bilim dünyası tarafından kabul gören kesirli türev tanımlarının çoğu ise, G.F. Bernhard Riemann tarafından verilmiş olan tanımlardır. Riemann' nın kesirli analiz ile ilgili ilk çalışmaları ölümünden sonra 1872 yılında "*Gesamenelte Mathematische Werke*" adlı eserde yayımlanmıştır (Ross, 1974). Günümüzde kabul gören bir diğer tanım ise, Grünwald' ın 1867 ve Letnikov' un 1868 yılında farklı iki çalışmada belirttikleri $^{GL}D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h)^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}}$ biçiminde ifade edilen kesirli türev tanımıdır ve literatürde Grünwald-Letnikov kesirli türevi olarak adlandırılır (Ross, 1974; Samko ve ark., 1993; Weilbeer, 2005; Kilbas ve ark., 2006). Daha sonra bu tanımın bazı koşullar altında Riemann-Liouville tanımı olarak adlandırılan tanıma denk olduğu ispatlanmıştır (Ross, 1974; Samko ve ark., 1993; Hilfer, 2000).

Her ne kadar kesirli analiz ile ilgili çalışmalarda kullanılan kesirli analiz teorisinin büyük bir kısmı 20. yüzyıldan önce geliştirilmiş olsa da mühendislik ve fen bilimlerindeki güncel problemlerden dolayı matematikçiler yeni gelişmelere ayak uydurabilmek için kesirli analiz teorisine katkı yapmayı sürdürmektedir. Bu anlamda Caputo, Riemann-

Liouville kesirli türeve sahip diferensiyel denklemlerin çözümündeki tam sayı mertebeli başlangıç şartlarını kullanmak amacıyla Riemann-Liouville kesirli türevinden esinlenerek "Caputo türevi" olarak adlandırılan yeni bir türev tanım sunmuştur (Hilfer, 2000). M. Caputo tarafından 1967 yılında ifade edilen bu yeni tanım, başlangıç şartları tam sayı mertebeden türevli olan kesirli diferensiyel denklemlerin ifade edilmesinde kullanılmıştır (Oldham ve Spanier, 1974; Podlubny, 1999; Kilbas ve ark., 2006).

Conformable kesirli türev ve integral kavramı ise ilk olarak Khalil ve ark. (2014) tarafından ifade edilmiştir. Hemen ardından bu yeni tanım birçok bilim insanı tarafından kabul görmüştür (Chung, 2015; Eslami ve Rezazadeh, 2015; Atangana ve ark., 2015a; Atangana, 2015b; Eslami, 2016; Gökdoğan ve ark., 2016; Koca ve Atangana, 2016).

Örneğin Özkan ve Kurt (2018a) conformable Laplace dönüşümün bazı temel özelliklerini sunmuşlar ardından bu dönüşümü kullanarak conformable kesirli integral ve kesirli integro diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmuşlardır. Özkan ve Kurt (2018b) diğer bir çalışmalarında iki katlı conformable Laplace dönüşümünü vermişlerdir. Aynı çalışmalarında yeni tanımın bazı özelliklerini ifade ettikten sonra conformable kesirli mertebeden ısı ve telgraf denklemlerinin çözümlerini bulmuşlardır. Rosales ve ark. (2019) ele aldıkları çalışmalarında conformable türeve sahip Drude modelini analiz etmek için conformable Laplace dönüşümünü kullanmışlardır.

Lojistik modeli, Von Foerster modeli ve Bertalanffy modeli ile ilgili bir sınıf sabit katsayılı kesirli diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri Silva ve ark. (2018) tarafından conformable Laplace dönüşümü ile elde edilmiştir. Eltayeb ve ark. (2019) ise conformable iki katlı Laplace ayrışım metodu diye isimlendirdikleri yeni metodu bir boyutlu kesirli mertebeden Burger denklem sisteminin çözümü için kullanmışlardır.

Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) kavramını ilk olarak Zhou (1986) tarafından kullanılmıştır. Zhou metodu ayrıntılı bir şekilde ifade ettikten sonra elektrik akım analizinin başlangıç değer probleminin çözümü için metodu kullanmıştır. DDM literatürdeki diğer yarı analitik yöntemlerle karşılaştırıldığında hem adi hem de kısmi diferensiyel denklemler basit bir dönüşüm yardımıyla, cebirsel denklemlere dönüşüyor olma özelliği en önemli özelliğidir. Metodu uyguladıktan sonra geriye cebirsel forma indirgenmiş bir problemin çözümünün bulunması problemi kalmaktadır. Özellikle analitik çözümü bilinmeyen lineer olmayan problemlerin çözümü için DDM büyük bir kolaylıktır. Bu nedenle metot birçok bilim insanının ilgisini çekmiştir (Chen ve Ho, 1996; Jang ve ark., 2001; Hassan, 2002; Cansu Kurt ve Ozkan, 2016; Paripour ve ark., 2017; Kadkhoda ve ark., 2018).

Literatüre bakıldığında özellikle lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi bilim dünyası için ayrı bir öneme sahiptir. Ayrıca bilim insanları bilmektedir ki geliştirdikleri metotlar ile bir çözüm elde etmek günümüzde tek başına yeterli değildir çünkü problemlerin doğasına uygun olarak çözümün elde ediliş hızı, ele alınan yöntemin bilgisayar ortamında kolay bir algoritma ile kodlanabiliyor olması, elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklığı ve yakınsaklık aralığı gibi konular bilim insanlarının dikkatini hep çekmiştir. Bu tür sorulardan bir kısmına cevap verebilmek adına bazen birden çok metot birleştirilerek yeni hibrit metotlar üretilmiştir. Hibrit yöntem olarak adlandırılan bu tür yöntemlerle son yıllarda oldukça sık karşılaşılmaktadır. Örneğin; Haq ve ark. (2017) Laplace dönüşümü ve Adomian Decomposition yöntemini birleştirerek kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümünü elde etmişlerdir. Morales-Delgado ve ark. (2016) "*Laplace homotopy analysis method"* adını verdikleri ve Laplace dönüşüm ile Homotopi analiz yönteminin kombine edilmesinden oluşan yöntemi, Li ve ark. (2016) da Laplace dönüşüm ile Homotopi analiz yönteminin kombine edilmesinden oluşan yöntemi kullanmışlardır. Li ve ark. (2014) Laplace varyasyonel iterasyon metodunda, Laplace dönüşümü ile varyasyonel iterasyon yöntemini beraber kullanmayı tercih etmişlerdir.

Bu tez çalışmasının ilham kaynağı ise, yukarıda sadece birkaçını saydığımız yöntemler ile Alquran ve ark. (2012)' nın yapmış olduğu çalışmadır. Alquran ve ark. (2012); Laplace Dönüşümü ile DDM' nu kombine ederek, homojen olmayan lineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinde önerdikleri bu yeni hibrit yöntemi kullanmışlardır. Laplace diferensiyel dönüşüm metodu (LDDM) olarak adlandırılan bu hibrit yöntem daha sonraları birçok bilimsel çalışmada da kullanılmıştır (Kumari ve ark., 2015; Kumari ve ark., 2016; Kumari ve Gupta, 2016). Son olarak da Özkan ve Kurt (2019) kesirli Laplace diferensiyel dönüşüm metodunu kesirli kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanmışlardır.

Biz ise bu tez çalışmasında kısmi türevli diferensiyel denklemler için verilen LDTM' nun conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemlere genişletilmesini ele aldık. Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (CLDDM) adını verdiğimiz bu yeni hibrit yöntemde; conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemler, conformable Laplace dönüşüm yardımıyla adi diferensiyel denklemlere dönüştürülmekte, ardından elde edilen bu yeni demklem adi diferensiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinde çok etkin bir yöntem olduğu literatürdeki birçok çalışma tarafından kanıtlanmış olan DDM (Chen ve Ho, 1996; Chen

ve Liu, 1998) ile çözüldükten sonra, elde edilen çözümün ters conformable Laplace dönüşümü alınarak ilk başta verilen conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemin çözümüne ulaşılabilmektedir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özetine, ikinci bölümde ise temel tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde conformable Laplace dönüşümünün tanımı ve bazı özellikleri sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise Diferensiyel Dönüşüm Metodu tanıtılmıştır. Tezin orijinal bölümü olan beşinci bölümde ise conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemler için '*Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu*' adını verdiğimiz hibrit yöntem tanıtılmış ve ardından yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı örnekler üzerinde uygulaması yapılmıştır. Sonuçlar ve öneriler diye adlandırılan son bölümde ise çalışmanın önemi ve çalışmayla ilgili bazı önerilere yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde; tez çalışmasının diğer bölümlerinde yer alan kısımların daha iyi anlaşılabilmesi için literatürde mevcut olan ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanan $\Gamma(n)$ fonksiyonuna **Gamma fonksiyonu** adı verilir. Bu genelleştirilmiş integralin her $n>0$ için yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gamma fonksiyonu ve bu fonksiyonun özellikleri ayrıntılı biçimde literatürde mevcuttur (Ross, 1984).

2.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu;

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \mathrm{Re}(x)>0, \mathrm{Re}(y)>0$$

integrali ile tanımlıdır. Beta fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birisi Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiyi veren,

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.2}$$

eşitliğidir (Spiegel, 1965) .

2.3. Laplace Dönüşümü

$f(t)$, $[0,\infty)$ için tanımlanmış bir fonksiyonu olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanır. Bu integralin sonucu s' nin bir fonksiyonu olduğundan $L[f(t)] = F(s)$ yazılabilir. (2.3) ile verilen integral s' nin bir değerine yakınsıyorsa $f(t)$' nin Laplace dönüşümü vardır denir (Spiegel, 1965) .

2.4. Ters Laplace Dönüşümü

$F(s)$ verilen bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(t)$ $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $L[f(t)] = F(s)$ sağlanıyor ise $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$' nin **ters Laplace dönüşümü** denir ve sembolik olarak $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ olarak ifade edilir (Spiegel, 1965).

2.5. Kesirli Mertebeden Adi Diferensiyel Denklem

Bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere **kesirli mertebeden adi diferensiyel denklem** denir (Benghorbal, 2004). Kesirli mertebeden sabit katsayılı diferensiyel denklemin en genel hali aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Podlubny, 1999)

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} + \ldots + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t) \quad . \tag{2.4}$$

2.6. Kesirli Mertebeden Kısmi Diferensiyel Denklem

Bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesirli mertebeden türevlerini içeren denklemlere **kesirli mertebeden kısmi diferensiyel denklem** denir (Podlubny, 1999).

2.7. Conformable Kesirli Türev ve Özellikleri

Kesirli analiz kavramının bilim dünyasında yer almasının ardından, tarihsel sürece bakıldığında kesirli türev tanımlarının pek çok benzerliklerinin olmasına rağmen çok

sayıda farklı kesirli türev tanımlarının bilim insanları tarafından verilmiş olmasının en önemli nedeni, teorinin pratiğe uygulanması esnasında mevcut tanımların problemleri tam olarak matematiksel modelleyememesinden kaynaklanan bazı eksikliklerinin görülmüş olmasıdır. Birçok bilimsel çalışmada tercih edilen ve tespitlerimize göre bilim insanları tarafından birçok bilimsel çalışmaya konu olan Riemann-Liouville, Grünvald-Letnikov, Caputo kesirli türev tanımlarının hem birbirlerine hem de diğer bilindik kesirli türev tanımlarına göre eksik yanları mevcuttur (Khalil ve ark. (2014). Bu alandaki tartışmalara en son olarak da Conformable kesirli türev ve integral tanımı dahil olmuştur. Çünkü Khalil ve ark. (2014) çalışmalarında bu durumu aşağıdaki gibi açıkça ifade etmişlerdir. Khalil ve ark. (2014)' nın iddiası şudur:

I. A bir sabit iken, eğer α bir doğal sayı değilse Riemann-Liouville kesirli türev tanımı için ${}^{RL}D_a^{\alpha}(A)=0$ eşitliği sağlanmaz. Ancak Podlubny (1999) tarafından verilen Caputo türev tanımı için ${}^{C}D_a^{\alpha}(A)=0$ eşitliğinin sağlandığı kolayca görülmektedir.

II. Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri iki fonksiyonun çarpımının türevi olarak bilinen aşağıdaki kuralı sağlamamaktadır:

$$D_a^{\alpha}(fg)=f\,D_a^{\alpha}(g)+g\,D_a^{\alpha}(f).$$

III. $$D_a^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gD_a^{\alpha}(f)-fD_a^{\alpha}(g)}{g^2}.$$

biçimindeki iki fonksiyonun bölümünün türev formülü Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri tarafından sağlamamaktadır.

IV. Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri aşağıdaki zincir kuralını sağlamamaktadır:

$$D_a^{\alpha}(f\circ g)=f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t).$$

V. Caputo türev tanımı f fonksiyonunun diferensiyellenebilir olduğu kabulü üzerine inşa edilmiştir.

Khalil ve ark. (2014) yukarıdaki eksiklikleri tespit ettikten sonra, bahsi geçen eksikliklerin aşağıdaki conformable kesirli türev tanımının ve özelliklerinin kullanılması durumunda ortadan kaldırılabileceğini ifade etmişlerdir. Aşağıda açık şekilde verilecek olan bu tanım birçok bilimsel çalışmada da kabul görmüş ve uygulanmıştır (Chung, 2015; Eslami ve Rezazadeh, 2015; Atangana ve ark., 2015a; Atangana, 2015b; Eslami, 2016; Gökdoğan ve ark., 2016; Koca ve Atangana, 2016).

2.7.1. Conformable Kesirli Türev

Herhangi bir (a,b) aralığında tanımlı f fonksiyonunun $t \in (a,b)$ olmak üzere t noktasındaki türevi

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

şeklindedir (Apostol, 1967). $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere (2.5) denkleminden

$$\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1} \tag{2.6}$$

olduğu açıktır. Burada şu soru akla gelmektedir:

" $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ için $\alpha.$ mertebeden kesirli türev için de benzer bir tanım ortaya koyulabilir mi? "

Bu sorunun cevabı Khalil ve ark. (2014) tarafından verilmiş olup, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\alpha.$ mertebeden kesirli türev tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $\alpha.$ mertebeden **conformable kesirli türev ifadesi**

$$D^{\alpha}(f(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Eğer f fonksiyonu $\alpha > 0$ için $(0,a)$ aralığında α diferensiyellenebilir ve ayrıca

$$\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

limiti mevcut ise bu durumda $f^{(\alpha)}(0)$ değeri

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

biçiminde tanımlanır. f fonksiyonunun $\alpha.$ mertebeden diferensiyellenebilir olması için f fonksiyonunun $\alpha.$ mertebeden kesirli türevinin mevcut olması gerekmektedir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 2.1. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere f, g fonksiyonları bir $t > 0$ noktasında $\alpha.$ mertebeden diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda;

(i) Her $a,b \in \mathbb{R}$ için

$$D^{\alpha}(af+bg)(t) = aD^{\alpha}(f)(t) + bD^{\alpha}(g)(t) \tag{2.8}$$

şeklindeki lineerlik özelliği sağlanmaktadır.

(ii) Her $p \in \mathbb{R}$ için

$$D^{\alpha}\left(t^{p}\right) = pt^{p-a} \tag{2.9}$$

şeklindedir.

(iii) f ve g fonksiyonları için

$$D^{\alpha}(fg)(t) = f(t)D^{\alpha}(g)(t) + g(t)D^{\alpha}(f)(t) \tag{2.10}$$

biçimindedir.

(iv) f ve g fonksiyonları için

$$D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,D^{\alpha}(f) - f\,D^{\alpha}(g)}{g^{2}} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Burada $g \neq 0$ olmalıdır.

(v) λ sabit olmak üzere, $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için

$$D^{\alpha}(\lambda) = 0 \tag{2.12}$$

dır.

(vi) f fonksiyonu $\alpha.$ mertebeden diferensiyellenebilir ise

$$D^{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt} \tag{2.13}$$

sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 2.2. f fonksiyonu değişkenleri $x_1,...,x_n$ biçiminde olan n değişkenli bir fonksiyon ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere f fonksiyonunun x_i bağımsız değişkenine göre conformable kesirli kısmi türevi

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f(x_1,...,x_n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_1,...,x_{i-1},x_i + \varepsilon x_i^{1-\alpha},...,x_n) - f(x_1,...,x_n)}{\varepsilon}$$

(2.14)

olarak tanımlanır (Atangana ve ark., 2015a).

Tanım 2.3. (Zincir Kuralı) $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, $f, g : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları α. mertebeden diferensiyellenebilir olsunlar. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere $h(t)$ fonksiyonu α. mertebeden diferensiyellenebilirdir ve $t \neq 0$, $g(t) \neq 0$ olmak üzere her t için

$$D^\alpha(h(t)) = D^\alpha(f(g(t)))D^\alpha(g(t))(g(t))^{\alpha-1} \tag{2.15}$$

olup eğer $t = a$ ise

$$D^\alpha(h(a)) = \lim_{t \to a^+} D^\alpha(f(g(t)))D^\alpha(g(t))(g(t))^{\alpha-1} \tag{2.16}$$

olur (Abdeljawad, 2015).

Tanım 2.4. (Conformable Kesirli İntegral) $\alpha \in (0,1]$ ve kullanılan integral genelleştirilmiş Riemann integrali olmak üzere,

$$I_a^\alpha(f(t)) = I_a^1(t^{\alpha-1} f(t)) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx \tag{2.17}$$

integraline conformable kesirli integral denir. I_a^α ve ${}^bI^\alpha$ sembolleri sırasıyla sağ ve sol conformable kesirli integrali ifade etmek üzere,

$${}^bI^\alpha(f(t)) = \int_t^b f(x) d_\alpha(b,x) = \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx \tag{2.18}$$

integraline sol kesirli integral ve

$$I_a^\alpha(f(t)) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x,a) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx \tag{2.19}$$

integraline ise sağ kesirli integral adı verilir (Khalil ve ark., 2014).

3. CONFORMABLE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Tezin orijinal kısmına ilham veren bu bölümde, Abdeljawad (2015)- ın conformable Laplace dönüşümü tanımı ile Özkan ve Kurt (2018a) ve Kurt (2018)- un yapmış oldukları çalışmalarda ayrıntılı biçimde ifade ettikleri conformable Laplace dönüşümünün bazı temel özellikleri ispatsız olarak ifade edilecektir.

3.1. Conformable Laplace Dönüşümü

Tanım 3.1. $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun α. **mertebeden conformable Laplace dönüşümü**

$$\begin{aligned} F_\alpha(s) = L_\alpha^{t_0}\left[f(t)\right](s) &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-s\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t) d_\alpha(t, t_0) \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-s\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} f(t)(t-t_0)^{\alpha-1} dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

integrali ile tanımlanır (Abdeljawad, 2015).

Conformable Laplace dönüşümü ile klasik Laplace dönüşümü arasındaki ilişki Abdeljawad (2015) tarafından aşağıdaki lemma yardımı ile ifade edilmiştir.

Lemma 3.2. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $L\left[f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ klasik Laplace dönüşümünü ifade etmek üzere $L_\alpha\left[f(t)\right] = F_\alpha(s)$ ile gösterilen conformable Laplace dönüşümünün var olduğu kabul edilsin. O halde,

$$L_\alpha\left[f(t)\right] = L\left[f((\alpha t))^{1/\alpha}\right] \tag{3.2}$$

şeklindedir (Abdeljawad, 2015).

Teorem 3.3. (Varlık Teoremi) f fonksiyonu $0 \leq t \leq A$ aralığında üstel mertebeden parçalı sürekli bir fonksiyon ve A bir pozitif reel sayı olsun. Ayrıca M, a, t_0 pozitif reel sayıları ve $t > t_0$ için $e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}} |f(t)| < M$ eşitsizliği sağlansın. O halde, herhangi bir

$s > a$ için (3.1) eşitliğiyle verilen conformable Laplace dönüşümü mevcuttur (Özkan ve Kurt, 2018a).

Teorem 3.4. (Teklik Teoremi) f, g reel değerli sürekli fonksiyonlarının conformable Laplace dönüşümleri var ve

$L_\alpha\left[f(t)\right] = L_\alpha\left[g(t)\right]$

yani $F_\alpha(s) = G_\alpha(s)$ ise $f(t) = g(t)$ dir (Kurt, 2018).

3.2. Conformable Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Teorem 3.5. (Lineerlik Özelliği) $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonlarının sırasıyla $s > a_1$ ve $s > a_2$ için conformable Laplace dönüşümleri mevcut ve $s > \max\{a_1, a_2\}$ olmak üzere c_1, c_2 keyfi reel sayıları için

$$L_\alpha\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 L_\alpha\left[f_1(t)\right] + c_2 L_\alpha\left[f_2(t)\right] \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanır (Özkan ve Kurt, 2018a).

Teorem 3.6. $f(t)$ fonksiyonunun $s > a \geq 0$ için conformable Laplace dönüşümü mevcut olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir (Özkan ve Kurt, 2018a).

(i) (*Öteleme Özelliği*) Keyfi bir c sabiti için

$$L_\alpha\left[e^{c\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)\right] = F_\alpha(s-c) \tag{3.4}$$

eşitliği sağlanır.

(ii) Keyfi bir m sabiti için

$$L_\alpha\left[t^m\right] = \alpha^{\frac{m}{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{\alpha}\right)}{s^{\frac{m+\alpha}{\alpha}}} \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanır.

(iii) c, m keyfi sabitleri için

$$L_\alpha\left[t^m e^{c\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right] = \alpha^{\frac{m}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{m+\alpha}{\alpha})}{(s-c)^{\frac{m+\alpha}{\alpha}}} \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.7. $f(t)$ fonksiyonunun herhangi bir $0 \le t \le A$ aralığında sürekli $D_t^\alpha(f(t))$ fonksiyonunun ise aynı aralıkta parçalı sürekli olduğunu kabul edelim. Bununla birlikte $t \ge t_0$ için $|f(t)| \le Me^{a\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde M, a ve t_0 sabitleri var olsun. Bu durumda $s > a$ için $L_\alpha\left[D_t^\alpha(f(t))\right]$ integrali var olmakla birlikte

$$L_\alpha\left[D_t^\alpha(f(t))\right] = sL_\alpha\left[f(t)\right] - f(0) \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır (Özkan ve Kurt, 2018a).

Sonuç 3.1. $f(t), D_t^\alpha(f(t)), D_t^{(2)\alpha}(f(t)), ..., D_t^{(n-1)\alpha}(f(t))$ fonksiyonları $0 \le t \le A$ aralığında sürekli ve $D_t^{(n)\alpha}(f(t))$ fonksiyonunun ise parçalı sürekli olduğunu kabul edelim. Yine $t > t_0$ için $|f(t)| \le Me^{a\frac{t^\alpha}{\alpha}}, \left|D_t^\alpha(f(t))\right|, Me^{a\frac{t^\alpha}{\alpha}}, ..., \left|D_t^{(n-1)\alpha}(f(t))\right| \le Me^{a\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ eşitsizlikleri sağlanacak biçimde M, a ve t_0 sabitleri mevcut olsun. Bu durumda $s > a$ için $L_\alpha\left[D_t^{(n)\alpha}(f(t))\right]$ dönüşümü mevcut ve

$$\begin{aligned} L_\alpha\left[D_t^{(n)\alpha}(f(t))\right] = s^n L_\alpha\left[f(t)\right] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}D_t^\alpha(f(0)) \\ -...- sD_t^{(n-2)\alpha}(f(0)) - D_t^{(n-1)\alpha}(f(0)) \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir. Burada $D_t^{(n)\alpha}(f(t))$ terimi $f(t)$ fonksiyonunun n kez ardışık conformable kesirli türevini göstermektedir (Özkan ve Kurt, 2018a).

Teorem 3.8. (Konvolüsyon Teoremi) $f, g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar ve $0<\alpha\le 1$ olsun. $(f*g)$ ifadesi f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonunu ifade etmek üzere $s\ge 0$ için $f(t), g(t)$ fonksiyonlarının $F_\alpha(s)=L_\alpha[f(t)]$ ve $G_\alpha(s)=L_\alpha[g(t)]$ şeklindeki Laplace dönüşümleri var ise $(f*g)$ konvolüsyon fonksiyonunun conformable Laplace dönüşümü,

$$L_\alpha[f*g](t)=F_\alpha(s)G_\alpha(s) \tag{3.9}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özkan ve Kurt, 2018a).

Tanım 3.2. f fonksiyonunun (3.1) ile verilen conformable Laplace dönüşümü var ve c keyfi bir reel sayı olmak üzere, ters conformable Laplace dönüşümü

$$L_\alpha^{-1}[F_\alpha(s)]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\int_{(\alpha(c-i\delta))^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\alpha(c+i\delta))^{\frac{1}{\alpha}}} e^{\frac{(st)^\alpha}{\alpha}}F_\alpha(s)d_\alpha s \tag{3.10}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $F_\alpha(s)=F\left(\frac{s^\alpha}{\alpha}\right)$ dır (Kurt, 2018).

Aşağıdaki tabloda bazı elementer fonksiyonların conformable Laplace dönüşümleri sunulmuştur (Abdeljawad, 2015; Kurt, 2018; Özkan ve Kurt, 2018a).

Fonksiyon	**Conformable Laplace Dönüşümü**
$f(t)=1$	$L_\alpha[1]=\frac{1}{s}$
$f(t)=t^n$	$L_\alpha\left[t^n\right]=\alpha^{\frac{n}{\alpha}}\frac{\Gamma(1+\frac{n}{\alpha})}{s^{1+\frac{n}{\alpha}}}$
$f(t)=\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^n$	$L_\alpha\left[\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f(t)=e^{\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}$	$L_\alpha\left[e^{\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right]=\frac{1}{s-\lambda}$
$f(t)=\sin(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})$	$L_\alpha\left[\sin(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})\right]=\frac{\lambda}{\lambda^2+s^2}$
$f(t)=\cos(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})$	$L_\alpha\left[\cos(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})\right]=\frac{s}{\lambda^2+s^2}$
$f(t)=\cosh(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})$	$L_\alpha\left[\cosh(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})\right]=\frac{s}{s^2-\lambda^2}$
$f(t)=\sinh(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})$	$L_\alpha\left[\sinh(\lambda\frac{t^\alpha}{\alpha})\right]=\frac{\lambda}{s^2-\lambda^2}$

Tablo 3.1. Bazı Özel Fonksiyonların Conformable Laplace Dönüşümleri

4. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE ÖZELLİKLERİ

Tarihsel süre bakıldığında ilk kez Zhou (1986) tarafından ortaya konulan Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM) daha sonra Chen ve Ho (1996) tarafından geliştirilip özdeğer problemlerinin çözümünde kullanmıştır. Chen ve Liu (1998) makalelerinde lineer olmayan bir diferensiyel denklemin çözümü için bu yöntemden yararlanmıştır. Ardından, DDM' nun hem adi hem de kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümü için etkin bir yöntem olduğu, yukarıdaki çalışmaları referans olarak alan yüzlerce bilimsel çalışmada bilim dünyası tarafından kabul görmüştür.

Yukarıda bahsettiğimiz gibi bilim dünyasında kendine özel bir yer bulan DDM; bu tez çalışmasının da önemli bir parçasını teşkil etmektedir. Bu nedenle, tezin orijinal kısmında kullanılacak olan DDM' nun tanımı ve bazı temel özellikleri bu bölümde ilerdeki bölümlerin anlaşılabilirliği açısından kısaca sunulacaktır. Verilen teoremlerin ispatları literatürde mevcut olduğundan dolayı ispatlarına yer verilmemiştir (Chen ve Ho, 1996; Chen ve Liu, 1998).

4.1. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm

Tanım 4.1. Bir değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşüm fonksiyon $F(k)$ olmak üzere $f(x)$' in diferensiyel dönüşümü,

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır (Chen ve Ho, 1996).

Tanım 4.2. $F(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters dönüşüm diferensiyel fonksiyonu,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x-x_0)^k \tag{4.2}$$

biçiminde tanımlanır (Chen ve Ho, 1996).

(4.1) eşitliği (4.2) eşitliğinde kullanılır ise

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}(x-x_0)^k \tag{4.3}$$

biçiminde yazılabilir.

Bu tez çalışmasında fonksiyonları tanımlarken küçük harfler orijinal fonksiyonu, büyük harfler ise orijinal fonksiyonun diferensiyel dönüşümünü ifade edecek şekilde kullanılmıştır.

4.2. Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşümün Özellikleri

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0},\quad G(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0},\quad H(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k h(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}, \tag{4.4}$$

olmak üzere, aşağıdaki teoremlerin ispatı literatürde mevcuttur.

Teorem 4.1. $y(x)=f(x)\pm g(x)$ biçiminde tanımlanmış ise bu fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=F(k)\pm G(k) \tag{4.5}$$

olur (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 4.2. $c\in\mathbb{R}$ sabit değeri için $y(x)=cf(x)$ çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=cF(k) \tag{4.6}$$

ile ifade edilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 4.3. Eğer $y(x)=\frac{df(x)}{dx}$ biçiminde tanımlanmış ise bu fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=(k+1)F(k+1) \tag{4.7}$$

ile verilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 4.4. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $y(x)=\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ biçimindeki bir fonksiyonun *n.* mertebeden türevinin diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=(k+1)(k+2)...(k+n)F(k+n)=\frac{(k+n)!}{k!}F(k+n) \tag{4.8}$$

ile verilir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 4.5. $y(x)=f(x)g(x)$ biçimindeki iki fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü, $r\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}F(r)G(k-r) \tag{4.9}$$

eşitliği ile verilir (Chen ve Ho, 1996).

Teorem 4.6. $y(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)...f_n(x)$ biçimindeki n tane fonksiyonun çarpımının diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\sum_{k_{n-1}=0}^{k}\sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}}...\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2}F_1(k_1)F_2(k_2-k_1)F_3(k_3-k_2)...F_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})F_n(k-k_{n-1}) \tag{4.10}$$

ile ifade edilir (Arikoglu ve Ozkol, 2005).

Teorem 4.7. $y(x)=f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}$ biçimindeki bir fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)F(r)G(k-r+1) \tag{4.11}$$

eşitliği ile verilir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 4.8. $y(x)=\dfrac{df(x)}{dx}\dfrac{dg(x)}{dx}$ biçimindeki fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)F(r+1)G(k-r+1) \tag{4.12}$$

ile ifade edilir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 4.9. $y(x)=a^{\lambda x}$ biçimindeki bir üstel fonksiyonun diferensiyel dönüşümü $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$Y(k)=\frac{\lambda^k(\ln a)^k}{k!} \tag{4.13}$$

ile verilir (Jang ve Chen, 1997).

Teorem 4.10. $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $y(x)=e^{\lambda x}$ biçimindeki fonksiyonun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\frac{\lambda^k}{k!} \tag{4.14}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.11. $m\in\mathbb{R}$ olmak üzere $y(x)=x^m$ biçiminde verilen fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü,

$$Y(k)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases} \tag{4.15}$$

ile verilir (Chen ve Ho, 1996).

Zhou (1986), Chen ve Ho (1996), Jang ve Chen (1997), Arikoglu ve Ozkol (2005), Momani ve Odibat (2008) ve Özkan (2010)' ın yapmış oldukları çalışmalarından ve referanslarından bazı temel fonksiyonların aşağıdaki diferensiyel dönüşüm tablosu kolaylıkla elde edilir:

Fonksiyon	**Diferensiyel Dönüşümü**
$y(x)=f(x)\pm g(x)$	$Y(k)=F(k)\pm G(k)$
$y(x)=cf(x)$	$Y(k)=cF(k)$
$y(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$	$Y(k)=(k+1)F(k+1)$
$y(x)=\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$	$Y(k)=(k+1)(k+2)...(k+n)F(k+n)$
$y(x)=f(x)g(x)$	$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}F(r)G(k-r)$
$y(x)=f(x)g(x)h(x)$	$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}F(r)G(t)H(k-r-t)$
$y(x)=f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}$	$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)F(r)G(k-r+1)$
$y(x)=f(x)\dfrac{d^2g(x)}{dx^2}$	$Y(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)F(r)G(k-r+2)$
$y(x)=a^{\lambda x}$	$Y(k)=\dfrac{\lambda^k(\ln a)^k}{k!}$
$y(x)=e^{\lambda x+b}$	$Y(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^b$
$y(x)=x^m$	$Y(k)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$
$y(x)=\sin(ax+b)$	$Y(k)=\dfrac{a^k}{k!}\sin\left(\dfrac{\pi k}{2}+a\right)$
$y(x)=\cos(ax+b)$	$Y(k)=\dfrac{a^k}{k!}\cos\left(\dfrac{\pi k}{2}+a\right)$
$y(x)=\left[f(x)\right]^b$	$Y(k)=\begin{cases}F(0), & k=0\\ \sum_{m=0}^{k}\dfrac{(b+1)m-k}{kF(0)}F(m)W(k-m), & k\geq 1\end{cases}$
$y(x)=\sin h(x)$	$Y(k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ tek ise}\\ 0, & k \text{ çift ise}\end{cases}$
$y(x)=\cos h(x)$	$Y(k)=\begin{cases}0, & k \text{ tek ise}\\ \dfrac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ çift ise}\end{cases}$

Tablo 4.1. Bir Değişkenli Bazı Özel Fonksiyonların Diferensiyel Dönüşümleri

5. CONFORMABLE LAPLACE DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU (CLDDM) VE UYGULAMALARI

$t \in \mathbb{R}_0^+$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} u(x,t) + \mathbf{N}\left[u(x,t)\right] + \mathbf{R}\left[u(x,t)\right] = f(x,t) \tag{5.1}$$

genel denklemi ile verilen lineer ve homojen olmayan değişken katsayılı conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denkleminin

$$u(x,0) = \mathrm{g}_0(x),\ u(0,t) = h_0(t),\ u_x(0,t) = h_1(t),\ u_x^{(2)}(0,t) = h_2(t),\ ...,\ u_x^{(n-1)}(0,t) = h_{n-1}(t) \tag{5.2}$$

koşullarını gerçekleyen (5.1)-(5.2) problemini ele alalım.

(5.1) eşitliği ile verilen denklemde $\mathbf{D}_t^{\alpha}$ operatörü**,** t değişkenine göre conformable anlamında diferensiyel operatör, $\mathbf{N}\left[.\right]$ ve $\mathbf{R}\left[.\right]$ sırasıyla lineer diferensiyel operatör ve lineer olmayan diferensiyel operatör, $f\left(x,t\right)$ ve $u\left(x,t\right)$ fonksiyonları da sırasıyla bilinen ve aranan fonksiyonları temsil etmektedir. Yazım kolaylığı olması bakımından yukarıda (5.2) eşitliği ile verilen koşullar aşağıda anlatılacak olan adımlara dahil edilmeyecektir. Bundan sonraki adımlarda göz ardı edilen bu koşulların da benzer süreçten geçtiği kabulü ile aşağıdaki adımlar takip edilmelidir. (5.1)-(5.2) probleminin CLDDM ile çözümünü veren adımlar aşağıda sıralanmıştır.

1.Adım: (5.1) eşitliği ile verilen conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemin t değişkenine göre conformable Laplace dönüşümü alınır ise

$$L_{\alpha}\left[\mathbf{D}_t^{\alpha} u(x,t)\right] + L_{\alpha}\left[\mathbf{N}\left[u(x,t)\right]\right] + L_{\alpha}\left[\mathbf{R}\left[u(x,t)\right]\right] = L_{\alpha}\left[f(x,t)\right] \tag{5.3}$$

eşitliği elde edilir.

2.Adım: Elde edilen (5.3) eşitliğinde, (5.2)' deki $u(x,0) = \mathrm{g}_0(x)$ başlangıç değerleri kullanılır ardından gerekli düzenlemeler yapılır ise

$$£\bar{u}(x,s)+N\bar{u}(x,s)=q(x,s) \tag{5.4}$$

biçiminde bir genel denklem ile verilen bağımsız değişkeni x olan adi diferensiyel denklem elde edilir. Elde edilen bu yeni diferensiyel denklemde, $\bar{u}(x,s)=L_{\alpha}\left[u(x,t)\right]$ biçiminde tanımlanmıştır. Diğer taraftan sırasıyla, £ n. mertebeden lineer diferensiyel operatör, N lineer olmayan diferensiyel operatör ve $q(x,s)$ bilinen analitik bir fonksiyonu göstermektedir. Bu adımda (5.4) eşitliği elde edilirken yapılan işlemlerin yazım kolaylığı olması bakımından şimdiye kadar ihmal edilen ve kullanılmayan (5.2) koşulları için de tekrarlandığını yani t dönüşüm değişkenine göre conformable Laplace dönüşümlerinin alındığını ve elimizde mevcut olduğunu varsaydığımızı unutmamalıyız.

3.Adım: (5.4) denklemi ile verilen adi türevli diferensiyel denkleminin diferensiyel dönüşüm metodu kuralları gereğince diferensiyel dönüşümü alınır ise,

$$A(k)U(k+n)+F(k)=Q(k) \tag{5.5}$$

$$U(k),\ k=0,1,...,n-1 \tag{5.6}$$

yineleme bağıntısı kolaylıkla elde edilir. Buradaki $A(k)$ katsayısı, diferensiyel denkleme DDM uygulandıktan sonra elde edilen $U(k+n)$' nin katsayısı $F(k)$ ve $Q(k)$ ise sırasıyla ve $N\bar{u}(x,s)$' nin ve $q(x,s)$' nin diferensiyel dönüşümleridir. (5.6) ifadesi ise yukarıda bahsettiğimiz ama yazar iken ihmal ettiğimiz için açık olarak şimdiye kadar yazmadığımız (5.2) ile verilen başlangıç şartlarının önce conformable Laplace dönüşümü ardından da DDM uygulandığında elde edilen $\bar{u}(x,s)$' nin bilinen spektrum değerleridir.

4.Adım: Yukarıdaki (5.6) eşitliği ile verilen $U(k)$, $k=0, 1, ..., n-1$ spektrum değerleri (5.5) yineleme bağıntısında kullanılır ve $\bar{u}(x,s)$' in bilinmeyen $U(k)$, $k=n,n+1,n+2,...$ spektrum değerleri elde edilir.

5.Adım: 4. Adımda elde edilen $\bar{u}(x,s)$' in tüm spektrumları (4.3) eşitliğindeki yerlerine yazıldıklarında

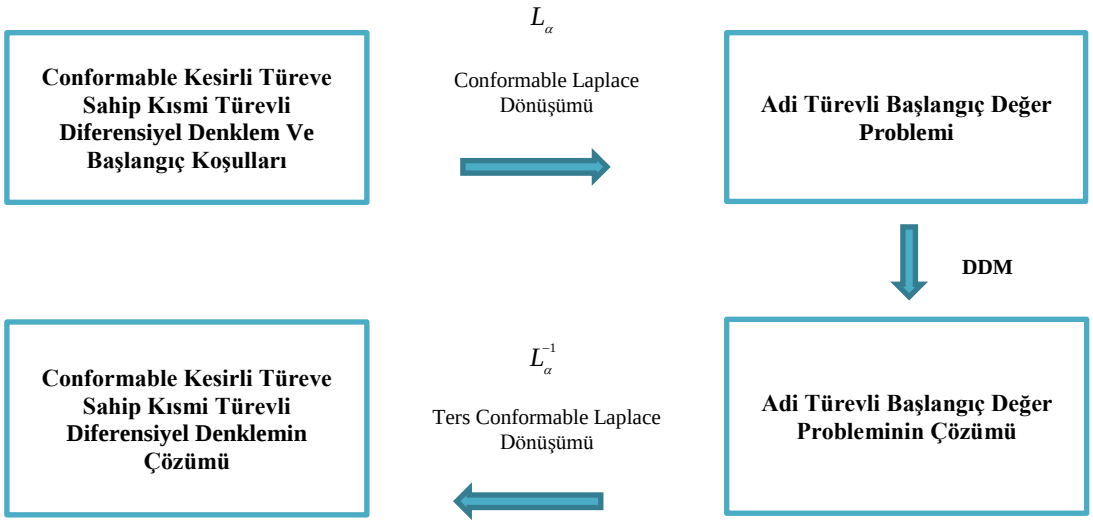
$$\bar{u}(x,s)=\sum_{k=0}^{\infty} U(k)\ x^k \tag{5.7}$$

eşitliği elde edilir. (5.7) eşitliği ile verilen $\bar{u}(x,s)$ fonksiyonu (5.4) başlangıç değer probleminin DDM ile elde edilen yarı analitik çözümü olarak adlandırılır (Chen ve Ho, 1996; Chen ve Liu, 1998). İlk başta verilen (5.1)-(5.2) probleminin çözümüne ulaşabilmek için son olarak (5.7) eşitliğinin her iki tarafının s dönüşüm değişkenine göre ters conformable Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(x,t)=L_\alpha^{-1}\left[\bar{u}(x,s)\right]=L_\alpha^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} U(k)\ x^k\right] \tag{5.8}$$

eşitliği elde edilir.

Böylelikle beş adım sonrasında; ilk başta ele alınan (5.1)-(5.2) başlangıç değer probleminin ***Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (CLDDM)*** ile çözümü olarak adlandıracağımız çözümü yukarıdaki (5.8) eşitliğindeki gibi elde edilmiş olunur. Metodun işleyişinin daha iyi anlaşılabilmesi için CLDDM Tablo 5.1' de resmedilmiştir.



Tablo 5.1. Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile çözüm döngüsü

Yukarıda özetlenen algoritmanın uygulanabilirliği aşağıdaki bazı örneklerde gösterilecektir. Ele alınan örneklerdeki tüm hesaplamalar *Maple 13* programı kullanılarak elde edilmiştir

Örnek 5.1.

$$D_t^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t),\ x>0,\ t\geq 0,\ 0<\alpha\leq 1 \tag{5.9}$$

$$u(x,0)=e^{x},\ u(0,t)=e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}},\ u_x(0,t)=e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{5.10}$$

biçiminde verilen (5.9)-(5.10) başlangıç değer probleminin çözümünü ele alalım (Kurt, 2018).

Yukarıda özetlenen beş adımdan oluşan algoritmada olduğu gibi birinci adım olarak (5.9) eşitliğinin her iki tarafının t dönüşüm değişkenine göre conformable Laplace dönüşümü alınırsa,

$$sL_{\alpha}\left[u(x,t)\right]-u(x,0)=L_{\alpha}\left[u_{xx}\right] \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir. (5.11) eşitliğinde (5.10)' da verilen $u(x,0)$ başlangıç koşulu yazılır ve 2. Adımda anlatıldığı gibi (5.10)' un şimdiye kadar kullanılmamış olan diğer başlangıç koşullarının da conformable Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki (5.12)-(5.13) problemi elde edilir.

$$\frac{d^2\bar{u}(x,s)}{dx^2}-s\bar{u}(x,s)=-e^{x} \tag{5.12}$$

$$\bar{u}(0,s)=\frac{1}{s-1},\ \frac{d\bar{u}}{dx}(0,s)=\frac{1}{s-1} \tag{5.13}$$

Görüldüğü gibi (5.12)-(5.13) problemi adi türevli bir başlangıç değer problemidir. Bu tür problemlerin DDM ile çözümünün yapılabileceği Chen ve Ho (1996), Chen ve Liu (1998) tarafından verilmiştir. Burada $\bar{u}(x,s)=L_{\alpha}\left[u(x,t)\right]$ eşitliği ile verilen $u(x,t)$

fonksiyonunun conformable Laplace dönüşümü anlatılmaktadır. 4. Bölümde anlatılan DDM metodu (5.12)-(5.13) problemine uygulanır ise,

$$U(k+2)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[sU(k)-\frac{1}{k!}\right] \tag{5.14}$$

$$U(0)=\frac{1}{s-1},\ U(1)=\frac{1}{s-1} \tag{5.15}$$

biçiminde verilen (5.14) yineleme bağıntısı ve (5.15) koşulları elde edilir. Bu adımda aranan $\bar{u}$ fonksiyonunun $U(k),\ k=2,3,...$ spektrumları; (5.15)' deki değerlerin (5.14) yineleme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilirler. Burada iterasyon sayısı istenilen sayıda tekrarlanabilir. Elde edilen $\bar{u}$' nun tüm spektrumları (4.3) denklemindeki yerlerine yazılırsa aşağıdaki (5.16) çözümüne kolaylıkla ulaşılır.

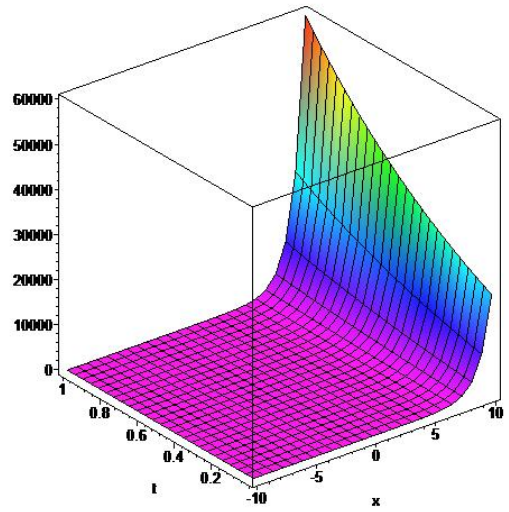
$$\bar{u}(x,s)=\frac{1}{s-1}(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...) \tag{5.16}$$

Elde edilen bu (5.16) çözümü aynı zamanda; (5.12)-(5.13) ile verilen başlangıç değer probleminin DDM çözümü olarak adlandırılır (Chen ve Ho, 1996; Chen ve Liu, 1998). Bu çözüm tabi ki ilk başta verilen (5.9)-(5.10) probleminin çözümü değildir. (5.9)-(5.10) probleminin çözümü için 5. Adımda olduğu gibi yukarıda elde edilen (5.16) çözüm fonksiyonunun s değişkenine göre ters conformable Laplace dönüşümünün alınması gerekmektedir. Bu işlem yapıldığında ise,

$$u(x,t)=L_\alpha^{-1}\left[\ \bar{u}(x,s)\right]=e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\ (1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...) \tag{5.17}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (5.17) çözümü ilk başta conformable kesirli mertebeden kısmi türevli diferensiyel denklem için verilen (5.9)-(5.10) probleminin çözümüdür. (5.17)' deki serinin kapalı formu $u(x,t)=e^{x+\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ olup, problemde $\alpha=1$ alırsa $u(x,t)=e^{x+t}$ fonksiyonu aynı zamanda (5.9)-(5.10) probleminin analitik çözümü olup grafiği aşağıdaki Şekil 5.1' deki gibidir. Ele alınan örnekte görüldüğü gibi bu tez çalışmasında önerilen

hibrit yöntem bu tür problemlerin çözümlerini elde edilmesini mümkün kılmaktadır. (5.17)' deki serinin yakınsaklığı ve doğruluğu değişik yöntemlerle incelenebilir.



Şekil 5.1. Örnek 5.1' in *u(x,t)* çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$

Örnek 5.2.

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) + u(x,t), t \geq 0, 0 < \alpha \leq 1 \tag{5.18}$$

$$u(x,0) = e^{-x}, u(0,t) = e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}, u_x(0,t) = -e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{5.19}$$

biçiminde verilen (5.18)-(5.19) probleminin çözümünü ele alalım.

Örnek 5.1' de olduğu gibi (5.18) eşitliğinin her iki tarafının t dönüşüm değişkenine göre conformable Laplace dönüşümü alınırsa,

$$sL_{\alpha}\left[u(x,t)\right] - u(x,0) = L_{\alpha}\left[u_{xx} + u_x + u\right] \tag{5.20}$$

eşitliği elde edilir. (5.20) eşitliğinde (5.19) da verilen $u(x,0)$ başlangıç koşulu yazılır ve (5.19)' da kullanılmayan diğer başlangıç koşullarının da conformable Laplace dönüşümü alınırsa aşağıdaki (5.21)-(5.22) problemi elde edilir.

$$\frac{d^2\bar{u}(x,s)}{dx^2}+\frac{d\bar{u}(x,s)}{dx}+(1-s)\bar{u}(x,s)=-e^{-x} \tag{5.21}$$

$$\bar{u}(0,s)=\frac{1}{s-1},\frac{d\bar{u}}{dx}(0,s)=-\frac{1}{s-1} \tag{5.22}$$

Daha önce olduğu gibi burada da $\bar{u}(x,s)=L_\alpha\left[u(x,t)\right]$ eşitliği ile *u* fonksiyonunun conformable Laplace dönüşümü anlatılmaktadır. (5.21)-(5.22) problemi adi türevli bir başlangıç değer problemi olup bu (5.21)-(5.22) problemin DDM ile çözümünü bulabilmek için (5.21) ve (5.22) eşitliklerinin diferensiyel dönüşümleri alınırsa aşağıdaki (5.23) yineleme bağıntısı ve (5.24) elde edilir.

$$U(k+2)=\frac{-1}{(k+1)(k+2)}\left[(k+1)U(k+1)+(1-s)U(k)+\frac{(-1)^k}{k!}\right] \tag{5.23}$$

$$U(0)=\frac{1}{s-1},\ U(1)=-\frac{1}{s-1} \tag{5.24}$$

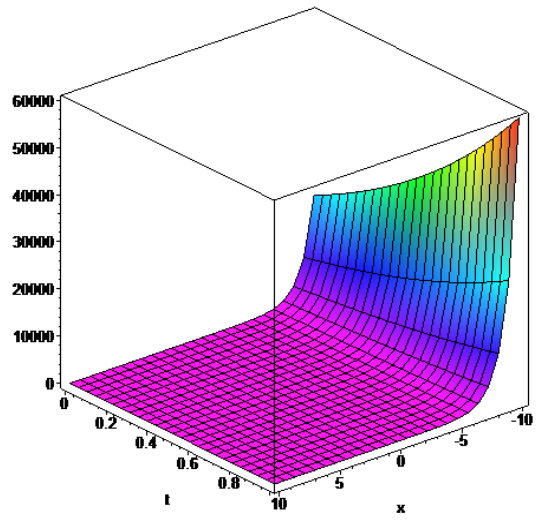
(5.21) denkleminin (5.22) koşularını gerçekleyen $\bar{u}$ fonksiyonunun $U(k),k=2,3,...$ bilinmeyen spektrumları (5.24)' deki değerlerinin (5.23)' deki yineleme bağıntısında kullanılmasıyla kolaylıkla elde edilirler. İterasyon sayısı istenilen sayıda tekrarlandıktan sonra elde edilen spektrumları (4.3) eşitliğindeki yerlerine yazıldıktan sonra

$$\bar{u}(x,s)=\frac{1}{s-1}(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+...) \tag{5.25}$$

biçiminde verilen (5.21)-(5.22) başlangıç değer probleminin DDM çözümüne kolaylıkla ulaşılır. İlk başta verilen (5.18)-(5.19) probleminin çözümüne ulaşabilmek için ise elde edilen (5.25) çözümünün *s* dönüşüm değişkenine göre ters conformable Laplace dönüşümünün alınması gerekmektedir. Bu işlem yapıldığında

$$u(x,t)=L_\alpha^{-1}\left[\bar{u}(x,s)\right]=e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}(1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+...) \tag{5.26}$$

elde edilir. (5.26) çözümüne, conformable kesirli mertebeden kısmi türevli (5.18)-(5.19) probleminin yarı analitik çözümü denir. (5.26)' da ki serinin kapalı formu ise $u(x,t)=e^{-x+\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}$ biçimindedir. Eğer (5.18)-(5.19) probleminde $\alpha=1$ alınırsa elde edilecek olan çözüm $u(x,t)=e^{-x+t}$ olup, bu çözüm aynı zamanda (5.18)-(5.19) probleminin $\alpha=1$ için analitik çözümüdür. Aşağıdaki Şekil 5.2' de $\alpha=1$ için Örnek 5.2' nin çözümünün grafiği verilmektedir.



Şekil 5.2. Örnek 5.2' nin *u(x,t)* çözüm yüzeyi, $\alpha=1$

Örnek 5.3.

$$D_t^{\alpha}u(x,t)=u_{xx}(x,t)+\left(xu(x,t)\right)_x, t\geq 0, 0<\alpha\leq 1 \tag{5.27}$$

$$u(x,0)=1, u(0,t)=e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}, u_x(0,t)=0 \tag{5.28}$$

biçiminde verilen (5.27)-(5.28) probleminin çözümünü ele alalım.

Burada da kesirli türev conformable anlamındadır. Yukarıdaki ilk iki örnekte olduğu gibi (5.27) eşitliğinin her iki tarafının t dönüşüm değişkenine göre conformable anlamında Laplace dönüşümü alınırsa

$$L_\alpha\left[D_t^\alpha u(x,t)\right]=L_\alpha\left[u_{xx}+(xu)_x\right] \tag{5.29}$$

eşitliği elde edilir.

Önceki örneklerde kullanılan algoritma burada da tekrarlanırsa yani (5.29) eşitliği açık olarak yazılıp, (5.28)' deki başlangıç değeri buradaki yerine yazılırsa aşağıdaki (5.30)-(5.31) başlangıç değer problemi elde edilir.

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}+\frac{d}{dx}(x\bar{u})-s\bar{u}=-1 \tag{5.30}$$

$$\bar{u}(0,s)=\frac{1}{s-1},\ \bar{u}_x(0,s)=0 \tag{5.31}$$

(5.31) deki eşitlikler, (5.28)' de verilen ve önceki adımda kullanılmayan başlangıç değerlerinin t değişkenine göre conformable Laplace dönüşümü alınması ile elde edilen değerlerdir. (5.30) ve (5.31)' in diferensiyel dönüşümleri alınırsa sırasıyla

$$U(k+2)=\frac{-1}{(k+1)(k+2)}\left[(1-s)U(k)+(k+1)\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)U(k+1-r)+\delta(k)\right] \tag{5.32}$$

$$U(0)=\frac{1}{s-1},\ U(1)=0 \tag{5.33}$$

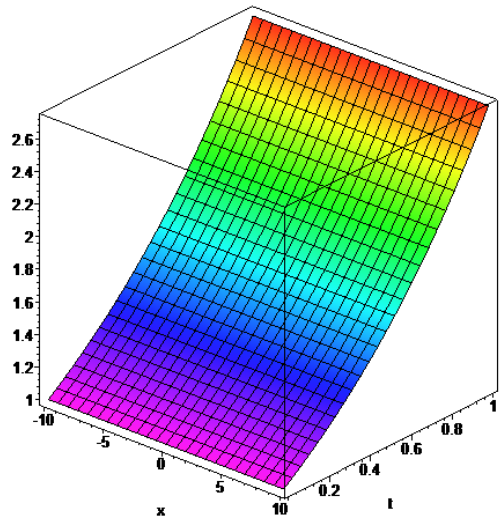
eşitlikleri elde edilir. (5.32) yineleme bağıntısında, (5.33)' deki değerler yazılırsa aranan $\bar{u}(x,s)$ fonksiyonunun $U(2)$, $U(3)$, $U(4)$, ... spektrum değerleri elde edilir. Yine önceki örneklerde olduğu gibi elde edilen istenen sayıdaki spektrumlar (4.3) denklemindeki yerlerine konulur ise

$$\bar{u}(x,s)=\frac{1}{s-1} \tag{5.34}$$

eşitliğine ulaşılır. (5.34) eşitliğinin s dönüşüm değişkenine göre ters conformable Laplace dönüşümü alındığında ise (5.27)-(5.28) probleminin çözümü

$$u(x,t)=L_\alpha^{-1}\left[\bar{u}(x,s)\right]=L_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} \tag{5.35}$$

olur. $\alpha = 1$ için grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.3. Örnek 5.3' ün *u(x,t)* çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$

Örnek 5.4.

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + x u_x(x,t) + u(x,t),\ t \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1 \tag{5.36}$$

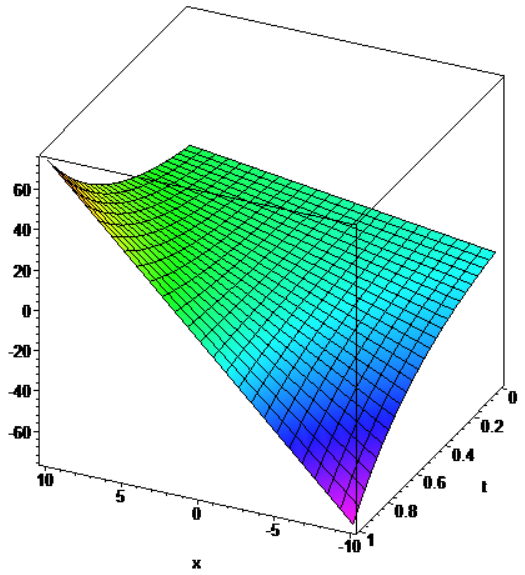
$$u(x,0) = x,\ u(0,t) = 0,\ u_x(0,t) = e^{2\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{5.37}$$

biçiminde verilen (5.36)-(5.37) probleminin çözümünü ele alalım (Yavuz, 2017).

(5.27) eşitliği açık olarak yazıldığında (5.36) denkleminin elde edileceği kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla örnek 5.3' deki başlangıç şartlarından farklı olarak verilen yukarıdaki (5.36)-(5.37) probleminin çözümü için CLDDM bu probleme uygulandığında,

$$u(x,t) = x e^{2\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{5.38}$$

çözümüne kolaylıkla ulaşılır. $\alpha = 1$ için elde edilen çözüm $u(x,t) = x e^{2t}$ olup bu aynı zamanda analitik çözümdür. Elde edilen çözüm fonksiyonunun $\alpha = 1$ için grafiği ise aşağıda sunulmuştur.



Şekil 5.4. Örnek 5.4' ün *u(x,t)* çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$

Örnek 5.5.

$$D_t^{\alpha} u(x,t) = u_{xx}(x,t), x > 0, t \geq 0, 0 < \alpha \leq 1 \tag{5.39}$$

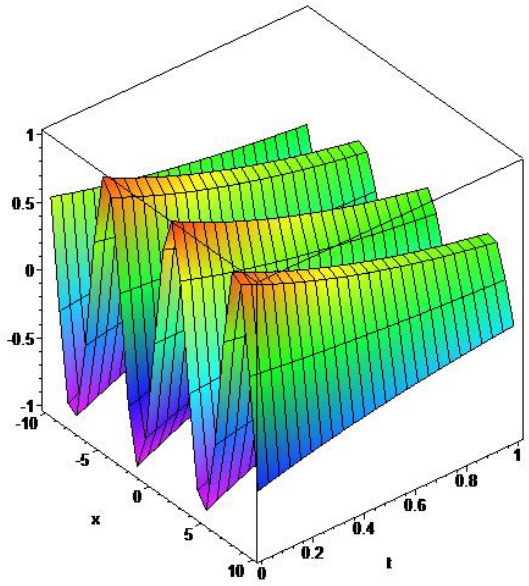
$$u(x,0) = \sin x,\ u(0,t) = 0,\ u_x(0,t) = e^{-\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{5.40}$$

biçiminde verilen (5.39)-(5.40) probleminin çözümünü ele alalım (Yavuz, 2017).

Başlangıç şartları farklı olsada bu problemdeki diferensiyel denklem **örnek 5.1**' deki diferensiyel denklemle aynı olup CLDDM bu problemde de önceki örneklerde olduğu gibi (5.39)-(5.40) problemine uygulanırsa aranan çözüm fonksiyonu;

$$u(x,t) = \sin x e^{-\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \tag{5.41}$$

biçiminde elde edilir. Problemde $\alpha = 1$ alınırsa elde edilecek olan $u(x,t) = \sin x e^{-t}$ çözüm fonksiyonunun grafiği ise aşağıda sunulmuştur.



Şekil 5.5. Örnek 5.5' in *u(x,t)* çözüm yüzeyi, $\alpha = 1$

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, Conformable Laplace Diferensiyel Dönüşüm Metodu (CLDDM) sunulmuştur. Sunulan hibrit yöntem aslında Conformable Laplace dönüşümü ile Diferensiyel Dönüşüm Metodu (DDM)' nun ardışık şekilde conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulanmasından ibarettir. Bu hibrit yöntemde conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemler ilk olarak conformable Laplace dönüşümü yardımıyla adi türevli diferensiyel denklemlere dönüştürülmekte, elde edilen adi diferensiyel denklemlerin diferensiyel dönüşüm metodu çözümleri bulunmakta ve son olarak elde edilen çözüm fonksiyonlarına ters conformable Laplace dönüşümü uygulanarak başlangıçta verilen conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılabilmektedir. Sunulan yeni yöntem uygulanabilirlik bakımından oldukça kolay ve basittir. Yöntemin conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerine ve conformable kesirli türeve sahip kısmi türevli integro-diferensiyel denklemler ile bazı özel fizik ve mühendislik problemlerine de uygulanabilirliğinin araştırılması bilim dünyası için önemli olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., 2015, On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.

Alquran, M., Al-Khaled, K., Ali, M. ve Ta'any, A., 2012, The combined Laplace transform-differential transform method for solving linear non-homogeneous PDEs, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 2 (3), 690-701.

Apostol, T. M., 1967, Calculus, vol 1: one-variable calculus, with an introduction to linear algebra, *John Wiley Sons*, New York.

Arikoglu, A. ve Ozkol, I., 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 1145-1158.

Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A., 2015a, New properties of conformable derivative, *Open Mathematics*, 13, 889-898.

Atangana, A., 2015b, Derivative with a new parameter: theory, methods and applications, *Academic Press*.

Benghorbal, M. M., 2004, Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals, PhD thesis, *Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario*, Canada.

Cansu Kurt, U. ve Ozkan, O., 2016, Exact solutions of some partial differential equations using the Modified Differential Transform Method, *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)*.

Chen, C. K. ve Ho, S. H., 1996, Application of differential transformation to eigenvalue problems, *Applied Mathematics and Computation*, 79 (2-3), 173-188.

Chen, C. L. ve Liu, Y. C., 1998, Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems, *Applied Mathematics and Computation*, 95 (2-3), 155-164.

Chung, W. S., 2015, Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 150-158.

Eltayeb, H., Bachar, I. ve Kılıçman, A., 2019, On conformable double Laplace transform and one dimensional fractional coupled Burger' s equation, *Symmetry*, 11 (3), 417.

Eslami, M. ve Rezazadeh, H., 2015, The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative, *Calcolo*, 1-11.

Eslami, M., 2016, Exact traveling wave solutions to the fractional coupled nonlinear Schrodinger equations, *Applied Mathematics and Computation*, 285, 141-148.

Gökdoğan, A., Ünal, E. ve Çelik, E., 2016, Existence and uniqueness theorems for sequential linear conformable fractional differential equations, *Miskolc Math. Notes*, 17 (1), 267279.

Haq, F., Shah, K., Khan, A., Shahzad, M. ve Rahman, G., 2017, Numerical solution of fractional order epidemic model of a vector born disease by Laplace Adomian decomposition method, *Punjab Univ. J. Math*, 49 (2), 13-22.

Hassan, I. A. H., 2002, On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation, *Applied Mathematics and Computation*, 127 (1), 1-22.

Hilfer, R., 2000, Applications of fractional calculus in physics, *World Scientific Publishing Co.,* London.

Jang, M. J. ve Chen, C. L., 1997, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique, *Applied Mathematics and Computation*, 88 (2-3), 137-151.

Jang, M. J., Chen, C. L. ve Liu, Y. C., 2001, Two-dimensional differential transform for partial differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 121 (2-3), 261-270.

Kadkhoda, N., Roushan, S. S. ve Jafari, H., 2018, Differential Transform Method: A Tool for Solving Fuzzy Differential Equations, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 4 (1), 33.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014, A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70.

Kilbas, A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, *Elsevier Science Limited*, San Diego.

Koca, I. ve Atangana, A., 2016, Analysis of a nonlinear model of interpersonal relationships with time fractional derivative, *Journal of Mathematical Analysis*, 7 (2), 1-11.

Kumari, K., Shanker, G. ve Gupta, P. K., 2015, Approximate analytical solution of liner boundary value problems by Laplace-differential transform method, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 7 (2), 99-108.

Kumari, K., Gupta, P. ve Shanker, G., 2016, Coupling of Laplace transform and differential transform for wave equations, *Physical Science International Journal*, 9 (4).

Kumari, K. ve Gupta, P. K., 2016, Application of ldtm for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *IJMSA*, 1(1).

Kurt, A., 2018, Conformable Laplace dönüşümleri ve uygulamaları, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora tezi, Konya.

Li, C., Kumar, A., Kumar, S. ve Yang, X. J., 2016, On the approximate solution of nonlinear time-fractional KdV equation via modified homotopy analysis Laplace transform method, *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9, 5463-5470.

Li, Y., Wang, L. F., Zeng, S. D. ve Zhao, Y., 2014, Local fractional Laplace variational iteration method for fractal vehicular traffic flow, *Advances in Mathematical Physics*.

Momani, S. ve Odibat, Z., 2008, A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220 (1-2), 85-95.

Morales-Delgado, V. F., Gómez-Aguilar, J. F., Yépez-Martínez, H., Baleanu, D., Escobar-Jimenez, R. F. ve Olivares-Peregrino, V. H., 2016, Laplace homotopy analysis method for solving linear partial differential equations using a fractional derivative with and without kernel singular, *Advances in Difference Equations*, 2016 (1), 164.

Nishimoto, K., 1991, An Essence of NishImoto's Fractional Calculus,, *Descarter Press Co.*

Oldham, K. ve Spanier, J., 1974, The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, *Academic Press*, New York.

Özkan, O., 2010, Numerical implementation of differential transformations method for integro-differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (12), 2786-2797.

Özkan, O. ve Kurt, A., 2018a, The analytical solutions for conformable integral equations and integro-differential equations by conformable Laplace transform, *Optical and Quantum Electronics*, 50 (2), 81.

Özkan, O. ve Kurt, A., 2018b, On conformable double Laplace transform, *Optical and Quantum Electronics*, 50 (2), 103.

Özkan, O. ve Kurt, A., 2019, A new method for solving fractional partial differential equations, *The Journal of Analysis*, 1-14.

Paripour, M., Karimi, L. ve Abbasbandy, S., 2017, Differential transform method for Volterra's population growth model, *Nonlinear Studies*, 24 (1).

Podlubny, I., 1999, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Academic Press*, San Diego.

Rosales, J., Godínez, F., Banda, V. ve Valencia, G., 2019, Analysis of the Drude model in view of the conformable derivative, *Optik*, 178, 1010-1015.

Ross, B., 1974, The development, theory and applications of the gamma-function and a profile of fractional calculus, PhD Thesis, *New York University*, New York.

Ross, S. L., 1984, Differential Equations *John Wiley&Sons Inc*, Singapore.

Samko, S., Kilbas, A. ve Marichev, O., 1993, Fractional integrals and derivatives: theory and applications, *Gordon and Breach Science Publishers*.

Silva, F., Moreira, D. ve Moret, M., 2018, Conformable Laplace transform of fractional differential equations, *Axioms*, 7 (3), 55.

Spiegel, M. R., 1965, Laplace transforms, *McGraw-Hill New York*.

Weilbeer, M., 2005, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background, PhD Thesis, *Von de Carl-Friedrich-Gaub-Fakultür Mathematik und Informatik der Technischen Universit, Braunschweig, Germany*

Yavuz, M., 2017, Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 8 (1), 1-7.

Zhou, J., 1986, Differential transformation and its applications for electrical circuits, *Huazhong University Press*, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Dilay Sultan DURAN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	İstanbul/ Kartal 27/03/1990
Telefon	**:**	553 0861070
e-mail	**:**	ed30052011@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Eskişehir Tayfur Bayar Anadolu Lisesi	2008
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2012
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014	Şırnak Cizre Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen
2017	Eskişehir Eğitimciler Spor Lisesi	Öğretmen
2018	Edirne Şehit Yıldız Gürsoy Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

O. ÖZKAN, **D. S. DURAN**, An Alternative Solution Approach For Conformable Fractional Partial Differential Equations, *BILMES2019 III. International Scientific and Vocational Studies Congress-Science and Health, 27-30 June 2019, Nevşehir, TURKEY*.