



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRME METODU KULLANILARAK YENİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ VE KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Caner TANIŞ

DOKTORA TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

Mayıs-2020
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRME METODU KULLANILARAK YENİ İSTATİSTİKSEL DAĞILIMLARIN ELDE EDİLMESİ VE KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Caner TANIŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2020, 98 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU
Prof. Dr. Coşkun KUŞ
Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU
Dr. Öğr. Üyesi Yunus AKDOĞAN
Dr. Öğr. Üyesi Haydar KOÇ

Bu tez çalışmasında, kübik sıralı dönüştürülmüş Kumaraswamy, kübik sıralı dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz ve kübik sıralı dönüştürülmüş ters Rayleigh isminde üç yeni sürekli dağılım tanıtılmıştır. Bu dağılımlar kübik sıralı dönüştürme yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Bu yeni dağılımlara ilişkin sıra istatistikleri, momentler, varyans, basıklık katsayısı, çarpıklık katsayısı, moment üreten fonksiyon, medyan, ortalama kalan ömür, tam olmayan momentler, Lorenz ve Bonferroni eğrileri gibi bazı istatistiksel özellikler incelenmiştir. Ayrıca, önerilen yeni dağılımların bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler, maksimum çarpımsal aralık, Anderson-Darling ve Cramér -von Mises tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemler ile elde edilen tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamalarına göre performanslarını kıyaslamak ve değerlendirmek için Monte Carlo simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Ayrıca bu yeni dağılımların gerçek yaşam verilerinde kullanışlılığını göstermek için gerçek veri uygulamalarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kübik Sıralı Dönüştürme Yöntemi, Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Genelleştirilmiş Gompertz Dağılım, Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Kumaraswamy Dağılım, Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Ters Rayleigh Dağılım, Monte Carlo Simülasyon Çalışması, Parametre Tahmini.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

OBTAINING OF NEW STATISTICAL DISTRIBUTIONS BY USING CUBIC RANK TRANSMUTED METHOD AND EXAMINING OF THEIR CHARACTERISTIC PROPERTIES

Caner TANIŞ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN STATISTICS

Advisor: Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

2020, 98 Pages

Jury
Advisor Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU
Prof. Dr. Coşkun KUŞ
Prof. Dr. Murat ERİŞOĞLU
Asst. Prof. Dr. Yunus AKDOĞAN
Asst. Prof. Dr. Üyesi Haydar KOÇ

In this thesis, three new continuous distributions called cubic rank transmuted Kumaraswamy, cubic rank transmuted generalized Gompertz and cubic rank transmuted inverse Rayleigh distributions are introduced. These distributions are obtained by using cubic rank transmutation method. Their some statistical properties, such as order statistics, moments, variance, kurtosis coefficient, skewness coefficient, moment generating function, median, mean residual life, incomplete moments, Lorenz and Bonferroni curves are examined. Furthermore, the maximum likelihood, least squares, weighted least squares, maximum product spacings, Anderson-Darling and Cramér-von Mises estimation methods are used in order to estimate unknown parameters of the proposed new distributions. Monte Carlo simulation studies are performed to compare and evaluate the performances of estimators obtained with these methods according to bias and mean square errors. In addition, real data applications are performed in order to illustrate the usefulness of these new distributions in real life data.

Keywords: Cubic Rank Transmutation Method, Cubic Rank Transmuted Generalized Gompertz Distribution, Cubic Rank Transmuted Kumaraswamy Distribution, Cubic Rank Transmuted Inverse Rayleigh Distribution, Monte Carlo Simulation Study, Parameter Estimation.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilgisini, deneyimlerini benimle paylaşan, değerli katkılarıyla tez çalışmamda bana destek olan danışman hocam Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU' na, tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Coşkun KUŞ ve Dr. Öğr. Üyesi Haydar KOÇ hocalarıma, Prof. Dr. Aşır GENÇ, Dr. Öğr. Üyesi Ahmet PEKGÖR, Dr. Öğr. Üyesi Yunus AKDOĞAN, Dr. Öğr. Üyesi Kadir KARAKAYA' ya ve ayrıca hayatımın her anında olduğu gibi, tez çalışmam sırasında da anlayışları, sevgileri ve sabırlarıyla beni destekleyen sevgili eşim Reyhan'a ve sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Caner TANIŞ
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **7**

3.1. Sıra İstatistikleri 7
3.1.1. Ampirik Dağılım Fonksiyonu 7
3.2. Nokta Tahmini 8
3.2.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi 9
3.2.2. En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi 10
3.2.3. Maksimum Çarpımsal Aralık Yöntemi 10
3.2.4. Anderson-Darling Yöntemi 11
3.2.5. Cramér -von Mises Yöntemi 12
3.3. Uyum İyiliği Kriterleri 12
3.3.1. Akaike Bilgi Kriteri (AIC) 12
3.3.2. Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICc) 12
3.3.3. Bayes Bilgi Kriteri (BIC) 13
3.3.4. Anderson Darling İstatistiği (A*) 13
3.3.5. Cramér -von Mises İstatistiği (W*) 13
3.3.6. Kolmogorov-Smirnov İstatistiği (K-S) 13
3.4. Bazı Sürekli Dağılımlar 14
3.4.1. Üstel (Ü) Dağılım 14
3.4.2. Üstelleştirilmiş Üstel (ÜÜ) Dağılım 14
3.4.3. Weibull (W) Dağılımı 14
3.4.4. Gompertz (G) Dağılımı 15
3.4.5. Genelleştirilmiş Gompertz (GG) Dağılımı 15
3.4.6. Lindley (L) Dağılımı 15
3.4.7. Fréchet (F) Dağılımı 16
3.4.8. Kumaraswamy (Kw) Dağılımı 16
3.4.9. Üstelleştirilmiş Kumaraswamy (ÜKw) Dağılımı 16
3.4.10. Ters Rayleigh (TR) Dağılımı 16
3.4.11. Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Üstel (DÜÜ) Dağılımı 17
3.4.12. Dönüştürülmüş Weibull (DW) Dağılımı 17
3.4.13. Dönüştürülmüş Rayleigh (DR) Dağılımı 17
3.4.14. Dönüştürülmüş Genelleştirilmiş Gompertz (DGG) Dağılımı 17

3.4.15. Dönüştürülmüş Ters Rayleigh (DTR) Dağılımı 18
3.4.16. Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Ters Rayleigh (DÜTR) Dağılımı 18
3.4.17. Dönüştürülmüş Kumaraswamy (DKw) Dağılımı 18
3.4.18. Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Weibull (KSDW) Dağılımı 19
3.4.19. Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Log-Logistic (KSDLL) Dağılımı 19
3.5. Bazı Dağılım Elde Etme Yöntemleri 19
3.5.1. Karesel Sıralı Dönüştürme Yöntemi 19
3.5.2. Kübik Sıralı Dönüştürme Yöntemi 21
3.6. Hata Kareler Ortalaması ve Yan 23

4. KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ KUMARASWAMY DAĞILIMI 24

4.1. Bazı Dağılımsal Özellikler 29
4.2. Nokta Tahmini 34
4.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini 34
4.3. Simülasyon Çalışması 35
4.4. Gerçek Veri Uygulaması 39

5. KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ GOMPERTZ DAĞILIMI 44

5.1. Bazı Dağılımsal Özellikler 46
5.2. Nokta Tahmini 50
5.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini 50
5.2.2. En Küçük Kareler Tahmini 51
5.2.3. Maksimum Çarpımsal Aralık Tahmini 52
5.3. Simülasyon Çalışması 52
5.4. Gerçek Veri Uygulaması 65

6. KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ TERS RAYLEIGH DAĞILIMI 69

6.1. Bazı Dağılımsal Özellikler 70
6.2. Nokta Tahmini 73
6.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini 74
6.2.2. En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmini 74
6.2.3. Anderson Darling Tahmini 75
6.2.4. Cramér -von Mises Tahmini 75
6.3. Simülasyon Çalışması 76
6.4. Gerçek Veri Uygulaması 87

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 88

7.1 Sonuçlar 88
7.2 Öneriler 91

KAYNAKLAR 92

ÖZGEÇMİŞ 96

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\Gamma(\alpha)$: Gamma fonksiyonu

$Beta(\alpha,\beta)$: Beta fonksiyonu

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$f(x)$: Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$F(x)$: Dağılım fonksiyonu

$h(x)$: Hazard fonksiyonu

$F_n^*(x)$: Ampirik dağılım fonksiyonu

$M_X(t)$: Moment üreten fonksiyon

$Q(p)$: Kuantil fonksiyonu

$L(.|\mathbf{x})$: Olabilirlik fonksiyonu

$\ell(.|\mathbf{x})$: Log olabilirlik fonksiyonu

$erf(t)$: Hata fonksiyonu

Kısaltmalar

df : Dağılım fonksiyonu
oyf : Olasılık yoğunluk fonksiyonu
EÇO : En çok olabilirlik
EKK : En küçük kareler
AEKK : Ağırlıklandırılmış en küçük kareler
MÇA : Maksimum çarpımsal aralık
AD : Anderson Darling
CVM : Cramér-von Mises
AIC : Akaike bilgi kriteri
AICc : Düzeltilmiş Akaike bilgi kriteri
BIC : Bayes bilgi kriteri
A* : Anderson Darling istatistiği
W* : Cramér -von Mises istatistiği
K-S : Kolmogorov-Smirnov istatistiği
Ü : Üstel dağılım
ÜÜ : Üstelleştirilmiş Üstel dağılım
W : Weibull dağılımı
G : Gompertz dağılımı
GG : Genelleştirilmiş Gompertz dağılımı
L : Lindley dağılımı
F : Fréchet dağılımı
Kw : Kumaraswamy dağılımı
ÜKw : Üstelleştirilmiş Kumaraswamy dağılımı
TR : Ters Rayleigh dağılımı

DÜÜ : Dönüştürülmüş üstelleştirilmiş Üstel dağılım
DW : Dönüştürülmüş Weibull dağılımı
DR : Dönüştürülmüş Rayleigh dağılımı
DGG : Dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz dağılımı
DTR : Dönüştürülmüş ters Rayleigh dağılımı
DÜTR : Dönüştürülmüş üstelleştirilmiş ters Rayleigh dağılımı
DKw : Dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımı
KSDW : Kübik sıralı dönüştürülmüş Weibull dağılımı
KSDLL : Kübik sıralı dönüştürülmüş Log-Logistic dağılımı
KSDY : Kübik sıralı dönüştürme yöntemi
KSDKw : Kübik sıralı dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımı
HKO : Hata kareler ortalaması
ÇK : Çarpıklık katsayısı
BK : Basıklık katsayısı
KSDGG : Kübik sıralı dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz dağılımı
KSDTR : Kübik sıralı dönüştürülmüş ters Rayleigh dağılımı

1. GİRİŞ

Günümüzde, gerçek dünyadaki verileri modellemek ve bu veriler ile ilgili istatistiksel çıkarımlar yapmak, ilgilenilen alan hakkında gelecek ile ilgili bazı tahminlerde bulunmak, araştırmanın yapıldığı alan üzerinde izlenmesi gereken yol için aydınlatıcı bir gösterge niteliği taşımaktadır. Gerçek dünyadaki verilerin modellenmesi için literatürde yer alan birçok istatistiksel dağılım bulunmaktadır. Ekonomi, tıp, sosyal bilimler, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, veterinerlik vb. gibi birçok alanda elde edilen verilere uyum gösteren istatistiksel dağılımların tespit edilmesi, verilerin alındığı kitlenin bilinmeyenleri hakkında bilgi sahibi olunmasının yolunu açar. Ancak her geçen gün veri çeşitliliğinin artması nedeniyle değişik türden veriler için kullanılabilecek mevcut dağılımların elde edilebileceği ve bu dağılımlara göre daha esnek yeni istatistiksel dağılımların elde edilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Son yıllarda yeni istatistiksel dağılımlar elde etmek için birçok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler, mevcut istatistiksel dağılımların üzerinde dönüşüm veya birleşim yapılarak yeni bir istatistiksel dağılım üretilmesine yardımcı olmaktadır. Bu yöntemlerden yararlanılarak elde edilen dağılımların birçoğu, temelde kullanılan dağılıma göre ek parametre içerdiği için gerçek veri analizlerinde daha esnek bir yapıya sahiplerdir. Özellikle yaşam zamanı verilerine ilişkin bozulma oranı fonksiyonlarının grafikleri artan, azalan ve küvet eğrisi şeklinde olabilmektedir. Bozulma oranı fonksiyonunun grafiği küvet eğrisi şeklinde olan bir dağılım, artan veya azalan bozulma oranına sahip istatistiksel dağılımlara göre daha fazla çeşitteki gerçek veriyi modelleme potansiyeline sahiptir. Günümüzde çok çeşitli gerçek veri gruplarının modellenmesine imkan sağlayacak yeni istatistiksel dağılımların elde edilmesi ve bu dağılımlara ilişkin karakteristik özelliklerinin incelenerek dağılımın bilinmeyenleri hakkında istatistiksel sonuç çıkarımların yapılması ve bu çıkarımların gerçek hayattaki verilere uygulanması, verilerin elde edildiği alan ile ilgilenen kişi veya kurumların gelecekteki stratejilerini belirlemeleri açısından oldukça önemlidir.

Bu tez çalışmasında, kübik sıralı dönüştürülmüş Kumaraswamy, kübik sıralı dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz ve kübik sıralı dönüştürülmüş ters Rayleigh isminde üç yeni sürekli dağılım tanıtılmıştır. Yeni önerilen bu üç dağılıma ilişkin bazı istatistiksel ve matematiksel özellikler incelenmiştir. Dağılımların parametre tahminlerini elde etmek amacıyla en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi, ağırlıklandırılmış en küçük kareler yöntemi, maksimum çarpımsal aralık, Anderson-

Darling ve Cramér -von Mises yöntemi gibi bazı parametre tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Tahmin edicilerin performansları, Monte Carlo simülasyon çalışmaları yardımı ile yan ve hata kareler ortalaması (HKO) açısından değerlendirilmiştir. Önerilen yeni dağılımların gerçek yaşamda yerlerinin olduklarını göstermek için, bu yeni dağılımların bilinen bazı istatistiksel dağılımlar ile gerçek yaşam verilerine olan uyumlarını karşılaştırmak amacıyla gerçek veri uygulamaları yapılmıştır.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde, tez çalışmasının oluşumunda yararlanılan bazı kaynaklara ilişkin bilgiler yer almaktadır. Üçüncü bölümde temel kavramlar ve tez çalışmasında yer alan mevcut bazı sürekli dağılımların dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları verilmiştir. Dördüncü bölümde kübik sıralı dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımı, beşinci bölümde kübik sıralı dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz dağılımı ve altıncı bölümde ise kübik sıralı dönüştürülmüş ters Rayleigh dağılımı kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Tez çalışmasının yedinci ve son bölümünde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tez çalışmasının giriş bölümünde yeni istatistiksel dağılım türetmek için bazı yöntemlerin varlığından söz edilmişti. Yeni istatistiksel dağılımlar üretmek için ortaya atılan yöntemlerden biri karesel sıralı dönüştürme yöntemidir. Shaw ve Buckley (2009) tarafından önerilen karesel sıralı dönüştürme yöntemi, maksimum ve minimum sıra istatistikleri kullanılarak yeni bir sıralı dönüştürülmüş dağılım elde etmeye yönelik kullanılan bir yöntemdir. Temel kavramlar bölümünde karesel sıralı dönüştürme yöntemi ile ilgili detaylı bilgi verilecektir. Bu yöntem mevcut olan birçok istatistiksel dağılıma uygulanarak mevcut dağılımlardan daha esnek yeni dağılımlar ailelerinin elde edilmesine olanak sağlar. Bu yöntem kullanılarak yeni dağılımların elde edilmesi ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan bazıları şu şekilde sıralanabilir. Aryal ve Tsokos (2011) çalışmalarında, dönüştürülmüş Weibull isminde üç parametreli yeni bir dağılım önermişlerdir. Bu çalışmada, dönüştürülmüş Weibull dağılımının matematiksel ve istatistiksel özellikleri geniş bir biçimde incelenmiş ve bu dağılımın gerçek hayatta kullanışlılığını göstermek amacı ile bir gerçek veri uygulamasına yer verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, artan, azalan ve sabit bozulma oranı fonksiyonuna sahip olan dönüştürülmüş Weibull dağılımının kullanılan veri için Weibull dağılımından daha tatmin edici sonuçlar verdiği görülmüştür. Khan ve ark. (2016) çalışmalarında dönüştürülmüş Kumaraswamy isminde yeni bir istatistiksel dağılım tanıtmışlardır. Çalışmalarında dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımına ilişkin moment, moment üreten fonksiyon, entropi, ortalama sapma, Bonferroni ve Lorenz eğrileri ve sıra istatistiklerinin momentlerinin elde edilmesi gibi birçok istatistiksel özelliği incelemişlerdir. Bu çalışmada, dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır. Dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin performanslarını değerlendirmek amacı ile bir Monte Carlo simülasyon çalışmasına bu çalışmada yer verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, iklim ve tıp alanlarından iki gerçek veri seti kullanılarak dönüştürülmüş Kumaraswamy dağılımının bu iki veri setine Kumaraswamy (Kumaraswamy, 1980) dağılımından daha iyi uyum sağladığı gösterilmiştir. Khan ve ark. (2017b), çalışmalarında üç parametreli yeni bir dönüştürülmüş genelleştirilmiş üstel dağılım üzerinde çalışmışlardır. Bu yeni dağılımın ve literatürde mevcut olan iki parametreli genelleştirilmiş çeşitli üstel dağılımın bilinmeyen parametreleri için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin performansları karşılaştırılmıştır. Son olarak bu çalışmada, önerilen yeni dağılıma ilişkin bazı

matematiksel ve istatistiksel özellikler incelenerek bu yeni dağılımın gerçek hayatta kullanılabilirliğini göstermek için gerçek veri analizine yer verilmiştir. Khan ve ark. (2017a) çalışmalarında, dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz isminde yeni bir istatistiksel dağılım ortaya atmışlardır. Dört parametreli bu yeni dağılım, dönüştürülmüş Gompertz (Khan ve ark., 2014; Abdul-Moniem ve Seham, 2015), dönüştürülmüş genelleştirilmiş üstel (Merovci, 2013a; Khan ve ark., 2017b), dönüştürülmüş üstel (Tian ve ark., 2014), Gompertz (Gompertz, 1825), genelleştirilmiş üstel (Gupta ve Kundu, 2001) ve üstel dağılım gibi birçok dağılımı içermektedir. Bu çalışmada dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiş ve bir Monte Carlo simülasyon çalışması ile bu tahmin edicilerin tahmin prosedürlerini sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir. İki gerçek veri uygulaması ile sona eren çalışmada, dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz dağılımının bazı bilinen dağılımlar ile gerçek verilere olan uyumları karşılaştırılmıştır. Gerçek veri analizleri sonucunda dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz dağılımının diğer dağılımlara göre verilere daha iyi uyum gösterdiği görülmüştür. Ahmad ve ark. (2014) çalışmalarında ters Rayleigh dağılımının bir genellemesi olan dönüştürülmüş ters Rayleigh dağılımını önermişlerdir. Bu çalışmada dönüştürülmüş ters Rayleigh dağılımına ilişkin en çok olabilirlik tahmini ve dağılımın bazı karakteristik özellikleri üzerinde çalışmışlardır. Granzotto ve Louzada (2015), karesel sıralı dönüştürme yöntemini kullanarak yeni bir dağılım ortaya atmışlardır. Dönüştürülmüş Log-Lojistik adı verilen bu yeni dağılımın bazı istatistiksel özellikleri elde edilmiştir. Bu çalışmada ayrıca dönüştürülmüş Log-Lojistik dağılımının gerçek yaşam ile ilişkisini incelemek için gerçek veri uygulaması yapılmıştır. Kozubowski ve Podgórski (2016) tarafından yapılan çalışmada dönüştürülmüş dağılımlar ile ilgili teorik yorumlara yer verilmiştir. Bu çalışmada dönüştürülmüş dağılımların, bernoulli dağılımına sahip bir N rasgele değişkeninin maksimum ya da minimumunun dağılımı olarak görülebileceği gösterilmiştir. Afify ve ark. (2016), Kumaraswamy-dönüştürülmüş G-ailesi adı verilen yeni bir dağılımlar ailesi önermişlerdir. Önerilen yeni dağılımlar ailesinin bazı özel alt modelleri ve bazı matematiksel özellikleri elde edilmiştir. Model parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi kullanılmıştır. Ortaya konulan dağılımlar ailesinin kullanılabilirliğini göstermek için iki adet gerçek veri analizi yapılmıştır. Alizadeh ve ark. (2017), dönüştürülmüş dağılımlar ailesinin bir genellemesi olan yeni bir genelleştirilmiş dönüştürülmüş dağılımlar ailesini tanıtmışlardır. Bu yeni dağılımlar ailesi aynı zamanda üstelleştirilmiş dağılımların doğrusal bir kombinasyonudur. Adı geçen çalışmada,

genelleştirilmiş dönüştürülmüş (GD) dağılımlar ailesinin GD-Normal, GD-Üstel ve GD-Weibull isimli üç alt modeli tanıtılmıştır. Dönüştürülmüş genelleştirilmiş dağılımlar ailesinin, moment, tam olmayan moment, moment üreten fonksiyon, Bonferroni ve Lorenz eğrileri, entropi gibi bazı özelliklerinin incelendiği çalışmada dağılımın bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik, en küçük kareler ve maksimum çarpımsal aralık yöntemleri kullanılmıştır. Son olarak çalışmada üstel dağılım için oluşan alt model (Genelleştirilmiş dönüştürülmüş Üstel) için simülasyon çalışması yapılırken üstel ve Weibull dağılımları için oluşan alt modelller (Genelleştirilmiş dönüştürülmüş Üstel, genelleştirilmiş dönüştürülmüş Weibull) için gerçek veri analizi yapılmıştır. Merovci ve ark. (2016) çalışmalarında Alizadeh ve ark. (2017) ‘nın dönüştürülmüş dağılımlar ailesi üzerinde yapmış olduğu genellemeden farklı bir genelleme yaparak “başka genelleştirilmiş dönüştürülmüş dağılımlar ailesi” isminde yeni bir dağılımlar ailesi tanıtmışlardır. Bu yeni dağılımlar ailesi de Alizadeh ve ark. (2017) tarafından önerilen dağılım ailesi gibi üstelleştirilmiş yoğunluk fonksiyonlarının doğrusal bir kombinasyonudur. Bu çalışmada önerilen dağılımlar ailesinin bazı istatistiksel özellikleri elde edilmiştir. Farklı tahmin yöntemleri ile model parametreleri tahmin edilmiş, bu tahmin edicilerin performansları simülasyon çalışması ile incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmada yeni dağılımlar ailesinin gerçek yaşam ile uyumunu göstermek için iki adet gerçek veri kümesi ile gerçek veri uygulamaları yapılmıştır. Nofal ve ark. (2017), dönüştürülmüş dağılımlar ailesinin başka bir genelleştirmesini tanıtmışlardır. Çalışmalarında bu yeni dağılımlar ailesinin bazı özel alt modellerini ve bazı matematiksel özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmada ayrıca üç gerçek veri uygulaması sunularak, önerilen dağılımlar ailesinin gerçek hayatta yeri olduğu gösterilmiştir. Bakouch ve ark. (2017) çalışmalarında yeni bir dönüştürülmüş dağılımlar ailesini tanıtmışlardır. Bu yeni dağılımlar ailesine ilişkin bazı istatistiksel özellikler elde edilerek bu yeni dağılımlar ailesinin Burr, Gompertz, Weibull ve Gamma dağılımlarının içinde bulunduğu bazı alt modeller tanıtılmıştır. Ayrıca simülasyon çalışması ve bahsedilen alt modeller için gerçek veri analizi yapılmıştır. Granzotto ve ark. (2017), dönüştürülmüş dağılımlar ile ilgili yukarıda yer alan çalışmalardan farklı olarak yeni dağılım üretmeye yönelik yine sıra istatistiklerine dayanan yeni bir yöntem önermişlerdir. Kübik sıralı dönüştürme yöntemi (KSDY) ismindeki bu yeni yöntem, bu tez çalışmasında önerilen üç yeni dağılım elde edilirken kullanılmıştır. Temel kavramlar bölümünde KSDY ile ilgili detaylı bilgi verilecektir. Tez çalışmasının oluşmasında ana kaynak olarak alınan bu çalışmada kübik sıralı dönüştürülmüş Weibull ve kübik sıralı

dönüştürülmüş Log-Logistic isminde iki yeni dağılım tanıtılmıştır. Bu iki yeni dağılımın parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri ve bunlara ilişkin güven aralıkları elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için simülasyon çalışmalarına ayrıca yer verilmiştir. Önerilen dağılımların gerçek yaşam ile ilgisini değerlendirmek ve bilinen dağılımlar ile gerçek verilere olan uyumunu karşılaştırmak için üç adet gerçek veri uygulaması yapılmıştır. Granzotto (2017) tarafından dönüştürülmüş dağılımlar ile ilgili olarak istatistiksel karakterizasyon, yaşam analizi, uyum iyiliği, parametre tahmini ve regresyon analizi konuları üzerine çalışılan tez çalışmasında ayrıca kübik sıralı dönüştürme haritası hakkında kapsamlı bilgiler yer almaktadır. Kübik sıralı dönüştürme haritasının kullanışlılığını göstermek amacıyla kübik sıralı dönüştürülmüş Weibull ve kübik sıralı dönüştürülmüş Log-Lojistik modelleri tanıtılarak bu modellere ilişkin bazı matematiksel ve istatistiksel özellikler, en çok olabilirlik tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere ilişkin güven aralıkları elde edilmiştir. Ayrıca bu iki yeni dağılım için simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması yapılmıştır. Aslam ve ark. (2018) çalışmalarında Granzotto ve ark. (2017) tarafından önerilen kübik sıralı dönüştürülmüş dağılımlar ailesi üzerinde bir genelleme yaparak yeni bir dağılımlar ailesi önermişlerdir. Bu çalışmada yeni dağılımlar ailesinin üç özel modeli, kübik dönüştürülmüş üstel, kübik dönüştürülmüş Weibull ve kübik dönüştürülmüş Lomax dağılımları tanıtılmıştır. Parametre tahmini için en çok olabilirlik, en küçük kareler ve maksimum çarpımsal aralık yöntemleri kullanılan çalışmada simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulamalarına da ayrıca yer verilmiştir. Rahman ve ark. (2018), Shaw ve Buckley (2009) 'in tanıttığı dönüştürülmüş dağılımlar ailesi ve Granzotto ve ark. (2017) 'nın önerdiği kübik sıralı dönüştürülmüş dağılımlar ailesini içeren yeni bir dağılımlar ailesi önermişlerdir. Önerilen yeni dağılımlar ailesinde temel dağılım olarak Normal, Gamma, Log-Logistic, Pareto, Rayleigh, Gumbel ve üstel dağılım alınarak oluşturulan yeni modelleri tanıtmışlardır. Ayrıca bu çalışmada tanıtılan dağılımlar ailesinin üstel dağılım durumu için parametre tahmini ve istatistiksel çıkarım yapılmıştır. Gerçek veri uygulamaları ile sona eren çalışmada önerilen kübik dönüştürülmüş üstel ismindeki dağılımın gerçek yaşamda bir yerinin olduğu gösterilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışması ile ilgili temel kavramlar ve önerilen üç yeni dağılım ile gerçek verilere uyum karşılaştırmalarında kullanılan bazı sürekli dağılımlar hakkında kapsamlı bilgiler verilecektir.

3.1. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, ..., X_n$, $F(.|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ dağılımından alınan $n-$ birimlik bir örneklem olsun. Bu örneklemin küçükten büyüğe doğru sıraya dizilmesi ile oluşturulan $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$ rasgele değişkenlerine bu örnekleme ilişkin sıra istatistikleri adı verilir. Burada $F(.|\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ dağılım fonksiyonunun kesikli veya sürekli olması durumunda $j.$ sıra istatistiği olarak tanımlanan $X_{(j)}$'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{X_{(j)}}(x) = \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \left[F(x)\right]^i \left[1-F(x)\right]^{n-i} \tag{3.1}$$

biçimindedir. $F(x)$'in sürekli olması durumunda ise $X_{(j)}$'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \int_0^{F(x)} t^{i-1}(1-t)^{n-i}\, dt \tag{3.2}$$

şeklinde olup (3.1) ve (3.2) denklemleri birbirine eşitlenirse,

$$\sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} \left[F(x)\right]^i \left[1-F(x)\right]^{n-i} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \int_0^{F(x)} t^{i-1}(1-t)^{n-i}\, dt$$

eşitliği elde edilir. $F(x)$'in sürekli olması durumunda $X_{(j)}$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(x)\left[F(x)\right]^{j-1}\left[1-F(x)\right]^{n-j} \tag{3.3}$$

biçimindedir (Arnold ve ark., 1992).

3.1.1. Ampirik Dağılım Fonksiyonu

$X_1, X_2, ..., X_n$, dağılımı $F(.|\boldsymbol{\theta}), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ olan bir kitleden alınan n birimlik bir örneklem olsun. $\nu^*_n(x)$ ile bu örneklemdeki x'den küçük veya eşit olan X_i 'lerin sayısı gösterilsin. $F_n^*(x)$ ile gösterilen ampirik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_n^*(x) = \frac{\nu^*_n(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x) \tag{3.4}$$

Burada $I(X_i \le x)$, 0 ve 1 değerlerini alan bir rasgele değişken olup bu fonksiyon indikatör (gösterge) fonksiyonu olarak isimlendirilir. Dolayısıyla $nF_n^*(x)$ bir rasgele değişkendir. Bu rasgele değişken $[0,n]$ aralığında tam sayı değerlerini almaktadır ve binom dağılımına sahiptir. Bu durumda $F_n^*(x)$ ile gösterilen ampirik dağılım fonksiyonunun beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$$E\left(F^*_n(x)\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left(I(X_i \le x)\right)\right) = E\left(I(X_i \le x)\right) = F(x)$$

ve

$$Var\left(F^*_n(x)\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x)\right) = \frac{Var\left(I(X_i \le x)\right)}{n^2} = \frac{F(x)\left(1-F(x)\right)}{n}$$

Örneklem hacmi arttıkça ampirik dağılım fonksiyonunun aldığı değer teorik dağılım fonksiyonun aldığı değere yaklaşır. Yani $F^*_n(x)$ için büyük sayılar yasası gereğince;

$$F^*_n(x) \xrightarrow{hhhy} F(x)$$

biçiminde hemen hemen her yerde (1 olasılıkla yakınsama) yakınsama söz konusudur. Merkezi limit teoremi gereğince;

$$\frac{F^*_n(x) - F(x)}{\sqrt{Var\left(F^*_n(x)\right)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

biçimindedir. Ayrıca, ampirik dağılım fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun yansız ve tutarlı bir tahmin edicisidir. (Mahmoud, 2011). Bu bilgilere ek olarak örneklemin sırası $F_n^*(x)$ 'in hesaplanmasında önemli olmadığından (3.4) eşitliği, sıra istatistikleri kullanılarak;

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(X_{(i)} \le x\right)$$

biçiminde yazılabilir.

3.2. Nokta Tahmini

Kitlede yer alan bilgilerin tümüne her zaman ulaşmak mümkün değildir. Kitlenin dağılımı ile ilgili bilgi sahibi olunsa bile kitlenin parametrelerini tahmin etmek ve istatistiksel çıkarım yapmak istatistik teorisinin ilgilendiği önemli konular arasında yer almaktadır. Örneklem, kitleden alınan bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olarak tanımlanırken örneklemin bilinmeyen parametre içermeyen fonksiyonuna ise istatistik denir. Bazı istatistikler kitlenin özel bir parametresinin nokta

tahmini için aday tahmin ediciler olarak sezgisel bir şekilde önerilebilmektedir. Örneğin kitle ortalamasının nokta tahmini için örneklem ortalaması doğal bir aday tahmin edicidir. Ancak çoğu durumda bir parametre için sezgisel olarak bir tahmin edici önermek mümkün değildir. Böyle durumlarda çeşitli parametre tahmin yöntemleri kullanılmaktadır (Casella ve Berger, 2002). Bu tez çalışmasında nokta tahmini için parametre tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler, maksimum çarpımsal aralık, Anderson-Darling ve Cramér von-Mises yöntemleri kullanılmıştır. Bu bölümde bahsedilen tahmin yöntemleri ile ilgili bilgiler verilecektir.

3.2.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

En çok olabilirlik (EÇO) yöntemi en popüler parametre tahmin yöntemidir ve aşağıdaki şekilde tarif edilebilir.

$X_1, X_2, ..., X_n \sim f\left(x \mid \boldsymbol{\theta}\right), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip bağımsız rasgele değişkenler olsun. Örnekleme ilişkin $f\left(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n \mid \boldsymbol{\theta}\right)$ ile gösterilen ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $\boldsymbol{\theta}$ 'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde bu fonksiyon olabilirlik fonksiyonu adını alır. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L\left(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i \mid \boldsymbol{\theta}\right) \tag{3.5}$$

Eşitlik (3.5) 'deki olabilirlik fonksiyonunu en büyük yaparak elde edilen ve $\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{X}\right)$ ile gösterilen $\boldsymbol{\theta}$ 'nın en çok olabilirlik (ML) tahmin edicisi;

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{X}\right) = \arg\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L\left(\boldsymbol{\theta} \middle| \mathbf{x}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca (3.5)' deki fonksiyonun logaritmasına log-olabilirlik fonksiyonu adı verilir. Bazı durumlarda olabilirlik fonksiyonu yerine logaritması olan log-olabilirlik fonksiyonu kullanılarak EÇO tahmin edicisini elde etmek mümkündür. Logaritma fonksiyonu monoton artan bir fonksiyon olduğu için log-olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerleri olabilirlik fonksiyonunu da maksimum yapmaktadır. Log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Casella ve Berger, 2002).

$$\ell\left(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}\right) = Log\left(L\left(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(f\left(x_i \mid \boldsymbol{\theta}\right)\right) \tag{3.6}$$

3.2.2. En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri Swain ve ark. (1988) tarafından en çok olabilirlik yöntemine alternatif olarak önerilmiştir ve aşağıdaki şekilde tarif edilebilir.

$X_1, X_2, ..., X_n$, $f\left(x_1, x_2, ..., x_n \mid \boldsymbol{\theta}\right), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ dağılımından alınan örneklem ve $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$ bu örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. Olasılık integral dönüşümü dikkate alındığında $F\left(X_{(i)}\right)$ rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı

$$E\left[F\left(X_{(i)}\right)\right] = E\left[U_{(i)}\right] = \frac{i}{n+1}, i = 1, 2, ..., n \tag{3.7}$$

$$Var\left[F\left(X_{(i)}\right)\right] = \frac{i\left(n-i+1\right)}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)},\ i = 1, 2, ..., n \tag{3.8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $U_{(i)}$, düzgün dağılımdan alınmış i. sıra istatistiğidir. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ parametresinin en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi;

$$Z\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[F\left(x_{(i)}, \boldsymbol{\theta}\right) - \frac{i}{n+1}\right]^2 \tag{3.9}$$

biçiminde tanımlanan (3.9) eşitliğinin $\boldsymbol{\theta}$'ya göre minimize edilmesi ile elde edilir. Ayrıca $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ parametresinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicisi (AEKK)

$$\varpi\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\tau_i\left[F\left(x_{(i)}, \boldsymbol{\theta}\right) - \frac{i}{n+1}\right]^2, \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilen (3.10) eşitliğinin $\boldsymbol{\theta}$'ya göre minimize edilmesi ile bulunur. Burada

$$\tau_i = \frac{1}{Var\left[F\left(X_{(i)}\right)\right]} = \frac{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)}{i\left(n-i+1\right)},$$

şeklindedir. AEKK yöntemi Swain ve ark. (1988) tarafından önerilmiştir.

3.2.3. Maksimum Çarpımsal Aralık Yöntemi

Maksimum çarpımsal aralık (MÇA) yöntemi en çok olabilirlik yöntemine alternatif olarak Cheng ve Amin (1983) tarafından önerilmiştir. En çok olabilirlik tahmin edicisi bazı üç parametreli dağılımlarda her zaman tatmin edici sonuçlar vermeyebilir. Örneğin Log-normal dağılımı için bu problem Wilson ve Worcester (1945), Lambert (1964), Harter ve Moore (1965), Giesbrecht ve Kempthorne (1976), Wingo (1972); Wingo (1975; 1976) ve Griffiths (1980) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Parametrelerden herhangi bir α parametresinin tahmin edicisi gözlemlerin en küçüğüne yakın olma eğiliminde iken olabilirlik fonksiyonunun aldığı

değer sonsuza gitmektedir. Bu durum diğer parametrelerin tahminlerinin tutarsız olmasına neden olmaktadır. Böyle durumlarda bilgi matrisi kullanılarak en çok olabilirlik tahmin edicisinin varyansının hesaplanmasında ve tahmin edicinin tutarlı olması durumlarında problemler ortaya çıkmaktadır. MÇA yöntemi EÇO tahmin edicilerinden daha genel koşullar altında tutarlı tahminler vermektedir. MÇA tahmin edicileri etkin ve asimptotik olarak normaldir. MÇA yöntemi tek değişkenli dağılımlarda uygulanabilir (Cheng ve Amin, 1983). Bu yöntem, ardışık gözlemlerin aralarındaki farkın aynı şekilde dağıtılması gerektiği fikrine dayanır. Aralıklara ilişkin geometrik ortalama (GO) aşağıda verilmiştir.

$$GO = \left(\prod_{i=1}^{n+1} D_i \right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{3.11}$$

Burada D_i, aralığı ifade eder ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D_i = \int_{x_{(i-1)}}^{x_{(i)}} f\left(x|\boldsymbol{\theta}\right) dx; \quad i = 1, 2, ..., n+1. \tag{3.12}$$

Burada, $F\left(x_{(0)}|\boldsymbol{\theta}\right) = 0$ ve $F\left(x_{(n+1)}|\boldsymbol{\theta}\right) = 1$'dir. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ parametresi için MÇA tahmin edicisi, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{MÇA}}$, aralıkların geometrik ortalamasını maksimum yaparak elde edilir. Aynı zamanda (3.11)'deki fonksiyonun logaritması alınarak elde edilen aşağıda tanımlanan $LogGO$ fonksiyonunu maksimum yapan değer ve değerler de $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ parametresi için MÇA tahminleridir.

$$LogGO = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \log\left[F\left(x_{(i)}, \boldsymbol{\theta}\right) - F\left(x_{(i-1)}, \boldsymbol{\theta}\right) \right] \tag{3.13}$$

3.2.4. Anderson-Darling Yöntemi

En çok tercih edilen uyum iyiliği tahmin edicilerinden biri olan Anderson-Darling tahmin edicisi (ADE), Anderson ve Darling (1952) tarafından önerilen Anderson-Darling istatistiğine dayanmaktadır. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ parametresi için Anderson-Darling tahmin edicileri $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{AD}$;

$$A(\boldsymbol{\theta}) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \left(\log F\left(X_{(i)}, \boldsymbol{\theta}\right) + \log\left(1 - F\left(X_{(i)}, \boldsymbol{\theta}\right)\right) \right). \tag{3.14}$$

biçiminde tanımlanan (3.14) eşitliğinin $\boldsymbol{\theta}$'ya göre minimize edilmesi ile elde edilir.

3.2.5. Cramér -von Mises Yöntemi

Cramér-von Mises tahmin edicisi de en çok kullanılan uyum iyiliği tahmin edicilerinden biridir. Bu tahmin ediciler kümülatif dağılım fonksiyonu ile ampirik dağılım fonksiyonu arasındaki farklara dayanmaktadır. Macdonald (1971) çalışmasında Cramér von-Mises istatistiğinin seçimini teşvik ederken aynı zamanda bu tahmin edicinin yanının diğer uyum iyiliği tahmin edicilerinin yanlarından daha küçük olduğuna dair ampirik kanıtlar sunmuştur. $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ parametresinin Cramér von-Mises tahmin edicileri $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CVM}$;

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F\left(X_{(i)}, \boldsymbol{\theta}\right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edilen eşitliğin $\boldsymbol{\theta}$ 'ya göre minimize edilmesi ile bulunur.

3.3. Uyum İyiliği Kriterleri

3.3.1. Akaike Bilgi Kriteri (AIC)

Akaike bilgi kriteri (AIC) (Akaike, 1998), bir modelin olabilirliğinin gelecekteki değerini tahmin etmeye yönelik oldukça popüler bir yöntemdir. Japon istatistikçi Akaike'nin önerdiği AIC kriteri, gerçek veri çalışmalarında modellerin veriye olan uyumlarını karşılaştırmak için sıklıkla kullanılmaktadır. Bumham ve Anderson (2002), AIC ve genel olarak bilgi kriterlerinin ilk kapsamlı çalışmasını sunmuş ve bu konuda geniş çapta bir otorite olarak kabul edilmiştir (Snipes ve Taylor, 2014). Veri modellemesinde bilgi kaybını en aza indiren modelin seçilmesi istenir. Bu nedenle veriye uyum sağlayan modeller arasından hangi modelin veriye en iyi uyum gösterdiğini belirlemek için modellerin AIC değerleri hesaplanır ve en küçük değere sahip model veriye en iyi uyum sağlayan model olarak belirlenir. AIC aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$AIC = -2\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + 2k \tag{3.16}$$

burada ℓ, log-olabilirlik fonksiyonunu, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta}$'nın EÇO tahmin edicisini, k ise parametre sayısını ifade etmektedir.

3.3.2. Düzeltilmiş Akaike Bilgi Kriteri (AICc)

Hurvich ve Tsai (1989), küçük veri örnekleri için AIC üzerinde ufak bir düzeltme yaparak tanıttıkları Düzeltilmiş Akaike bilgi kriteri (AICc) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$AICc = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}. \tag{3.17}$$

Burada AIC ve k, eşitlik (3.16)' da tanımlandığı gibidir. n, örneklem sayısını göstermektedir. n, k 'ya göre çok büyük ise bu düzeltme göz ardı edilebilir. Bu durumda AIC yeterlidir. $AICc$ daha genel bir karşılaştırma kriteridir ve genellikle AIC 'nin yerine kullanılır (Snipes ve Taylor, 2014). Veriye en iyi uyum gösteren model en küçük $AICc$ değerine sahip modeldir.

3.3.3. Bayes Bilgi Kriteri (BIC)

Bayes bilgi kriteri (BIC), Schwarz (1978) tarafından önerilmiştir. BIC, AIC ve olabilirlik fonksiyonunun aldığı değer ile yakından ilişkilidir. Model seçimi için kullanılan BIC aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$BIC = -2\ell\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + k\log\left(n\right) \tag{3.18}$$

Veri analizi çalışmalarında veriye en iyi uyan modeli seçerken en küçük BIC değerine sahip olan model tercih edilir.

3.3.4. Anderson Darling İstatistiği (A*)

Anderson ve Darling (1952) tarafından önerilen Anderson-Darling istatistiği, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$A^* = -n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\log\left[F\left(X_{(j)}\right)\left(1-F\left(X_{(n-j+1)}\right)\right)\right] \tag{3.19}$$

Burada, $F_n(X)$, ampirik dağılım fonksiyonudur. Gerçek veri uygulamalarında Anderson-Darling istatistiği en küçük olan model veriye en iyi uyan model olarak belirlenir.

3.3.5. Cramér -von Mises İstatistiği (W*)

Cramér-von Mises istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$W^* = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(F\left(X_{(i)}\right) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \tag{3.20}$$

Burada n, örneklem büyüklüğünü ifade ederken $F_n(X)$ ise ampirik dağılım fonksiyonunu gösterir. Cramér-von Mises istatistiği ile ilgili daha detaylı bilgi için (Macdonald, 1971) ve (Chen ve Balakrishnan, 1995) 'a bakılabilir. Gerçek veri analizlerinde veriye en iyi uyum sağlayan modeli belirlerken Cramér-Von Mises istatistiği en küçük olan model seçilir.

3.3.6. Kolmogorov-Smirnov İstatistiği (K-S)

Kolmogorov-Smirnov (K-S) testi, popüler uyum iyiliği testlerinden biridir. K-S testi, örneklemin bir dağılıma uyum sağlayıp saylamadığını belirlemek amacıyla

kullanılırsa tek örneklem K-S testi olarak adlandırılır. Tek örnek için K-S uyum iyiliği testini 1933 yılında Rus matematikçi Kolmogorov önermiştir. 1939 yılında Rus matematikçi Smirnov, iki bağımsız örneklemin aynı dağılıma sahip olup olmadığını belirlemek için iki örneklem K-S uyum iyiliği testini önermişlerdir (Gamgam ve Altunkaynak, 2012). K-S istatistiği tek örneklem problemi için, ampirik dağılım fonksiyonu ile birikimli dağılım fonksiyonu arasındaki farkı temsil eder. K-S istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D = \sup\left|F_n(x) - F_0(x)\right| \tag{3.21}$$

Burada $F_n(x)$, ampirik dağılım fonksiyonunu gösterirken $F_0(x)$ birikimli dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Gerçek veri analizlerinde veriye en iyi uyum gösteren modeli seçerken K-S istatistiği en küçük olan model tercih edilir.

3.4. Bazı Sürekli Dağılımlar

Bu bölümde tez çalışmasında yer alan gerçek veri uygulamalarında önerilen yeni dağılımlar ile gerçek verilere olan uyumları karşılaştırılan bazı bilinen sürekli dağılımlara ilişkin bilgiler verilecektir.

3.4.1. Üstel (Ü) Dağılım

X, Üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf) ve dağılım fonksiyonu (df) sırasıyla aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x}$$

Burada $I_{(0,\infty)}(x)$ indikatör (gösterge) fonksiyonunu gösterir ve $\theta > 0$ şeklindedir.

3.4.2. Üstelleştirilmiş Üstel (ÜÜ) Dağılım

X, üstelleştirilmiş üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$f(x) = \theta\alpha\left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{\theta-1} e^{-\alpha x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = \left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{\theta}$$

Burada $\alpha, \theta > 0$ 'dır. ÜÜ dağılım (Gupta ve Kundu, 2001) tarafından önerilmiştir.

3.4.3. Weibull (W) Dağılımı

X, Weibull dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}\right\}I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}\right\}$$

Burada $\mu,\sigma>0$ 'dır.

3.4.4. Gompertz (G) Dağılımı

X, Gompertz dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=ae^{bx}e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}$$

Burada $a>0$ ve $b>0$ ölçek parametreleridir. Bu dağılım Gompertz (1825) tarafından önerilmiştir.

3.4.5. Genelleştirilmiş Gompertz (GG) Dağılımı

X, genelleştirilmiş Gompertz (GG) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\alpha ae^{bx}e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1}I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha}$$

Burada $\alpha>0$ şekil parametresi, $a>0$ ve $b>0$ ölçek parametreleridir. GG dağılımı El-Gohary ve ark. (2013) tarafından önerilmiştir.

3.4.6. Lindley (L) Dağılımı

X, Lindley dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{\theta^2}{\theta+1}(1+x)e^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=1-\frac{\theta+1+\theta x}{\theta+1}e^{-\theta x}$$

Burada $\theta>0$'dır. Bu dağılım Lindley (1958) tarafından önerilmiştir.

3.4.7. Fréchet (F) Dağılımı

X, Fréchet dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \mu\sigma^{\mu}x^{-(\mu+1)}e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\mu}}$$

şeklindedir. Burada $\mu, \sigma > 0$'dır.

3.4.8. Kumaraswamy (Kw) Dağılımı

X, Kumaraswamy dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = abx^{a-1}\left(1-x^{a}\right)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$$

$$F(x) = 1-\left(1-x^{a}\right)^{b}$$

Burada $a > 0$ ve $b > 0$ dağılımın şekil parametreleridir. Kw dağılımı, Kumaraswamy (1980) tarafından tanıtılmıştır.

3.4.9. Üstelleştirilmiş Kumaraswamy (ÜKw) Dağılımı

X, üstelleştirilmiş Kumaraswamy (ÜKw) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \theta abx^{a-1}\left(1-x^{a}\right)^{b-1}\left[1-\left(1-x^{a}\right)^{b}\right]^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$$

$$F(x) = \left[1-\left(1-x^{a}\right)^{b}\right]^{\theta}$$

Burada $a, b, \theta > 0$'dır. ÜKw dağılımı, Lemonte ve ark. (2013) tarafından tanıtılmıştır.

3.4.10. Ters Rayleigh (TR) Dağılımı

X, ters Rayleigh (TR) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{2\theta}{x^{3}}e^{-\left(\frac{\theta}{x^{2}}\right)} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\theta}{x^{2}}\right)}$$

Burada $\theta > 0$'dır.

3.4.11. Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Üstel (DÜÜ) Dağılımı

X, dönüştürülmüş üstelleştirilmiş Üstel (DÜÜ) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\theta\alpha\left(1-e^{-\alpha x}\right)^{\theta-1}e^{-\alpha x}\left[1+\lambda-2\lambda\left(1-e^{-\alpha x}\right)^{\theta}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=\left(1-e^{-\alpha x}\right)^{\theta}\left[1+\lambda-\lambda\left(1-e^{-\alpha x}\right)^{\theta}\right]$$

Burada $\alpha,\theta>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DÜÜ dağılım Merovci (2013a) tarafından tanıtılmıştır.

3.4.12. Dönüştürülmüş Weibull (DW) Dağılımı

X, dönüştürülmüş Weibull (DW) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu-1}e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}}\left[1-\lambda+2\lambda e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=\left(1-e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}}\right)\left[1+\lambda e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\mu}}\right]$$

Burada $\mu,\sigma>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DW dağılımı Aryal ve Tsokos (2011) tarafından tanıtılmıştır.

3.4.13. Dönüştürülmüş Rayleigh (DR) Dağılımı

X, dönüştürülmüş Rayleigh (DR) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left[1-\lambda+2\lambda e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=\left(1-e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right)\left[1+\lambda e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}\right]$$

Burada $\mu,\sigma>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DR dağılımı Merovci (2013b) tarafından tanıtılmıştır.

3.4.14. Dönüştürülmüş Genelleştirilmiş Gompertz (DGG) Dağılımı

X, dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz (DGG) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\alpha a e^{bx}e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1}\left[1+\lambda-2\lambda\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha}\left[1+\lambda-\lambda\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}\right]$$

Burada $\alpha,a,b>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DGG dağılımı ilk olarak Khan ve ark. (2017a) tarafından önerilmiştir.

3.4.15. Dönüştürülmüş Ters Rayleigh (DTR) Dağılımı

X, dönüştürülmüş ters Rayleigh (DTR) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)}\left[1+\lambda-2\lambda e^{-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=e^{-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)}\left[1+\lambda-\lambda e^{-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)}\right]$$

Burada $\theta>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DTR dağılımı ilk olarak Ahmad ve ark. (2014) tarafından önerilmiştir.

3.4.16. Dönüştürülmüş Üstelleştirilmiş Ters Rayleigh (DÜTR) Dağılımı

X, dönüştürülmüş üstelleştirilmiş ters Rayleigh (DÜTR) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{2\alpha\theta}{x^3}e^{-\left(\frac{\theta\alpha}{x^2}\right)}\left[1+\lambda-2\lambda e^{-\left(\frac{\theta\alpha}{x^2}\right)}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=e^{-\left(\frac{\theta\alpha}{x^2}\right)}\left[1+\lambda-\lambda e^{-\left(\frac{\theta\alpha}{x^2}\right)}\right]$$

Burada $\theta,\alpha>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DÜTR dağılımı ilk olarak ul Haq (2016) tarafından önerilmiştir.

3.4.17. Dönüştürülmüş Kumaraswamy (DKw) Dağılımı

X, dönüştürülmüş Kumaraswamy (DKw) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=abx^{a-1}\left(1-x^a\right)^{b-1}\left[1-\lambda+2\lambda\left(1-x^a\right)^b\right]I_{(0,1)}(x)$$

$$F(x)=\left[1-\lambda\left(1-x^a\right)^b\right]\left[1+\lambda\left(1-x^a\right)^b\right]$$

Burada $a,b>0,\lambda\in[-1,1]$'dır. DKw dağılımı ilk olarak Khan ve ark. (2016) tarafından önerilmiştir.

3.4.18. Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Weibull (KSDW) Dağılımı

X, kübik sıralı dönüştürülmüş Weibull (KSDW) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{\mu}{\beta^{\mu}}x^{\mu-1}e^{-(x/\beta)^{\mu}} \times\left[(3-\lambda_1-\lambda_2)+2(\lambda_1+2\lambda_2-3)e^{-(x/\beta)^{\mu}}+3(1-\lambda_2)e^{-2(x/\beta)^{\mu}}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=1+(\lambda_1+\lambda_2-3)e^{-(x/\beta)^{\mu}}+(3-\lambda_1-2\lambda_2)e^{-2(x/\beta)^{\mu}}+(\lambda_2-1)e^{-3(x/\beta)^{\mu}}$$

Burada $\mu,\beta>0, \lambda_1\in[0,1], \lambda_2\in[-1,1], \lambda_1+\lambda_2<2\sqrt{\lambda_1}$'dır. KSDW dağılımı ilk olarak Granzotto ve ark. (2017) tarafından önerilmiştir.

3.4.19. Kübik Sıralı Dönüştürülmüş Log-Logistic (KSDLL) Dağılımı

X, kübik sıralı dönüştürülmüş Log-Logistic (KSDLL) dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere oyf ve df sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$f(x)=\frac{\mu x^{\mu-1}e^{\beta}}{\left(1+e^{\beta}x^{\mu}\right)^4}\left[\lambda_1\left(1-e^{2\beta}x^{2\mu}\right)+\lambda_2 e^{\beta}x^{\mu}\left(2-e^{\beta}x^{\mu}\right)+3e^{2\beta}x^{2\mu}\right]I_{(0,\infty)}(x)$$

$$F(x)=\frac{x^{\mu}e^{\beta}}{\left(1+e^{\beta}x^{\mu}\right)}\left[\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)\frac{x^{\mu}e^{\beta}}{\left(1+e^{\beta}x^{\mu}\right)}+(1-\lambda_2)\frac{x^{\mu}e^{\beta}}{\left(1+e^{\beta}x^{\mu}\right)^2}\right]$$

Burada $\mu,\beta>0, \lambda_1\in[0,1], \lambda_2\in[-1,1], \lambda_1+\lambda_2<2\sqrt{\lambda_1}$'dır. KSDLL dağılımı ilk olarak Granzotto ve ark. (2017) tarafından önerilmiştir.

3.5. Bazı Dağılım Elde Etme Yöntemleri

Bu bölümde, tez çalışmasında önerilen yeni dağılımların oluşturulmasında kullanılan kübik sıralı dönüştürme yöntemi ve yine bu yöntem gibi sıra istatistiklerine dayanan karesel dönüştürme yöntemi ile ilgili bilgiler verilecektir.

3.5.1. Karesel Sıralı Dönüştürme Yöntemi

Shaw ve Buckley (2009) tarafından ortaya atılan karesel sıralı dönüştürme yöntemi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Ortak olasılık uzayına sahip iki dağılım verilsin. Sıralı dönüşüm olarak adlandırılan F_1 ve F_2 herhangi sürekli dağılım fonksiyonları olmak üzere;

$$G_{R12}(u)=F_2\left(F_1^{-1}(u)\right),\ G_{R21}(u)=F_1\left(F_2^{-1}(u)\right)$$

biçiminde tanımlanan ve $[0,1]$ aralığında değer alan $G_{R12}(u)$ ve $G_{R21}(u)$ monoton fonksiyonları kullanılarak yeni istatistiksel dağılımlar elde edilebilir. Bu durumda

$G_{Rij}(0)=0$ ve $G_{Rij}(1)=1$ olduğu kolayca görülebilir. Karesel sıralı dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$G_{R12}(u)=u+\lambda u(1-u)$$

Burada $\lambda\in[-1,1]$ 'dir. Bu dönüşümün sonucunda oluşan kümülatif dağılım fonksiyonu $F_2(x)=(1+\lambda)F_1(x)-\lambda F_2(x)^2$ şeklindedir. Sıralı dönüşümün tersi mevcut olduğundan karesel sıralı dönüştürülmüş dağılım fonksiyonundan örneklem elde etmek için aşağıdaki algoritma kullanılabilir.

$$F_2^{-1}(u)=F_1^{-1}\left(G_{R21}(u)\right),\ G_{R21}(u)=\frac{1+\lambda-\sqrt{(\lambda+1)^2-4u\lambda}}{2\lambda}$$

Karesel sıralı dönüştürme yöntemi simetrik bir dağılıma çarpıklık vermektedir. Yeni dağılım elde ederken kullanılan öznel dağılım F_1 'in simetrik olması gibi bir özel şart yoktur. Ancak F_1 dağılımı simetrik olursa $F_1(x)=1-F_1(-x)$ olacaktır. Bu durumda dönüştürülen rasgele değişkenin karesinin dağılımının, orijinal rasgele değişkenin karesinin dağılımı ile aynı olduğu sonucuna varılabilir. Bununla ilgili bazı örnekler için Roberts ve Geisser (1966), Gupta ve Chen (2004), Vicari ve Kotz (2005), Wang ve ark. (2004)'a bakılabilir (Shaw ve Buckley, 2009).

Granzotto ve ark. (2017) çalışmalarında karesel dönüştürme yöntemini elde etmenin aşağıdaki gibi farklı bir yolu da olduğunu belirtmişlerdir.

X_1 ve X_2 bağımsız ve aynı $G(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler ve

$Y\overset{d}{=}\min(X_1,X_2)$ p olasılıkla,

$Y\overset{d}{=}\max(X_1,X_2)$ 1- p olasılıkla,

olmak üzere karesel sıralı dönüştürme yöntemi ile elde edilen yeni dağılımın dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}F_Y(x)&=pP\left(\min(X_1,X_2)\le x\right)+(1-p)P\left(\max(X_1,X_2)\le x\right)\\&=p\left(1-\left(1-\left(G(x)\right)^2\right)\right)+(1-p)G^2(x)\\&=2pG(x)+(1-2p)G^2(x)\end{aligned}\qquad(3.22)$$

Burada $p\in[0,1]$ ve $1-2p=-\lambda$ olarak alınması durumunda Eşitlik (3.22), Eşitlik (3.23)' deki gibi yazılabilir.

$$F(x)=(1+\lambda)G(x)-\lambda\left[G(x)\right]^2 \tag{3.23}$$

Dönüştürülmüş dağılıma ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(x)=(1+\lambda)g(x)-2\lambda G(x)g(x) \tag{3.24}$$

şeklindedir. Burada $\lambda\in[-1,1]$ ve $G(x)$ herhangi bir dağılımın dağılım fonksiyonu iken $g(x)$ ise aynı dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur (Granzotto ve ark., 2017).

3.5.2. Kübik Sıralı Dönüştürme Yöntemi

Kübik sıralı dönüştürme yöntemi (KSDY), Granzotto ve ark. (2017) tarafından önerilmiştir. Bu tez çalışmasında önerilen yeni dağılımların elde edilmesinde kullanılan bu yöntem Shaw ve Buckley (2009) 'in tanıttığı karesel sıralı dönüştürme yöntemi gibi sıra istatistiklerine dayanmaktadır. KSDY aşağıdaki gibi özetlenebilir.

X_1, X_2, X_3 bağımsız ve aynı $G(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler ve $p_1+p_2+p_3=1$ olmak üzere bir Y rasgele değişkeni;

$Y\overset{d}{=}X_{(1)}$ p_1 olasılıkla

$Y\overset{d}{=}X_{(2)}$ p_2 olasılıkla

$Y\overset{d}{=}X_{(3)}$ p_3 olasılıkla

biçiminde tanımlansın. Bu durumda KSDY ile elde edilen yeni dağılımın dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}F_Y(x)&=p_1P\left(\min(X_1,X_2,X_3)\le x\right)+p_2P\left(X_{2:3}\le x\right)+p_3P\left(\max(X_1,X_2,X_3)\le x\right)\\&=p_1\left[1-\left(1-G(x)\right)^3\right]+p_2\frac{3!}{(2-1)!(3-2)!}\int_0^x G(x)\left(1-G(x)\right)g(x)dx+p_3G^3(x)\\&=3p_1G(x)+(3p_2-3p_1)G^2(x)+(1-3p_2)G^3(x)\end{aligned}$$

Burada $3p_1=\lambda_1, 3p_2=\lambda_2$ olarak alınırsa KSDY ile elde edilen kübik sıralı dönüştürülmüş dağılıma ilişkin df ve oyf sırasıyla,

$$F(x)=\lambda_1G(x)+(\lambda_2-\lambda_1)G^2(x)+(1-\lambda_2)G^3(x) \tag{3.25}$$

$$f(x)=g(x)\left[\lambda_1+2(\lambda_2-\lambda_1)G(x)+3(1-\lambda_2)G^2(x)\right] \tag{3.26}$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1\in[0,1], \lambda_2\in[-1,1], \lambda_1+\lambda_2<2\sqrt{\lambda_1}$ 'dır (Granzotto ve ark., 2017). Granzotto ve ark. (2017), bu yöntemi kullanarak Bölüm 3.4'de verilen KSDW ve KSDLL dağılımlarını önermişlerdir.

3.5.2.1. Cardona Yöntemi

Kübik sıralı dağılımlardan sayı üretebilmek için Cardano formülü kullanılmıştır. Cardano formülü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ şeklindeki denklemin kökleri;

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

ve

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

şeklindedir. Burada

$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$, $R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$, $Q = \frac{3ac - b^3}{9a^2}$ ve $D = Q^3 + R^2$, denklemin diskriminantı olarak adlandırılır. Denklemin köklerinden hangisinin seçileceği aşağıdaki durumlara göre değişiklik göstermektedir.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

- $D > 0$ ise köklerden biri reel sayı biri karmaşık sayıdır.
- $D = 0$ ise tüm kökler reel en az iki kök birbirlerine eşittir.
- $D < 0$ ise tüm kökler reel ve birbirinden farklıdır (Clark, 1984).

Cardona formülü eşitlik (3.25) 'de verilen KSDY ile elde edilen dağılım fonksiyonuna sahip dağılımdan sayı üretmek için kullanılmıştır. KSDY ile elde edilmiş herhangi bir dağılımdan sayı üretmek için öncelikle Cardona formülünden yararlanılarak eşitlik (3.25)' de $G(x)$ 'in reel kökü elde edilir. Ardından ters dönüşüm tekniğinden yararlanılarak kübik dereceli sıralı dağılımın dağılım fonksiyonu, $U(0,1)$ dağılımına sahip rasgele değişken olarak tanımlanan U 'ya eşitlenir. Bu denklemin reel kökünden yararlanılarak KSDY ile elde edilen $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip örnek üretilir. Kübik sıralı dönüştürülmüş dağılımın $p.$ kuantil fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$Q(p) = F^{-1}(h)$$

Burada

$$h=\left(a+\sqrt{b+c}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(a-\sqrt{b+c}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}{3-3\lambda_2}$$

$$a=\frac{9\left(1-\lambda_2\right)\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\lambda_1+27\left(1-\lambda_2\right)^2 p-2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)^3}{54\left(1-\lambda_2\right)^3}$$

$$b=\frac{3\left(1-\lambda_2\right)\lambda_1-\left(\lambda_2-\lambda_1\right)^2}{\left(729\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-\lambda_2\right)^2}$$

$$c=\frac{9\left(1-\lambda_2\right)\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\lambda_1+27\left(1-\lambda_2\right)^2 p-2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)^3}{\sqrt{2916}\left(1-\lambda_2\right)^3}$$

şeklindedir.

3.5.2.2. Gamma ve Beta Fonksiyonu

Tez çalışmasının bu bölümünde önerilen üç yeni dağılımın momentlerini elde ederken kullanılan gamma ve beta fonksiyonlarının tanımları verilecektir.

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\Gamma(.)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu ve $Beta(.,.)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu, sırasıyla,

$$\Gamma\left(\alpha\right)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{3.27}$$

ve

$$Beta\left(\alpha,\beta\right)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlanır.

3.6. Hata Kareler Ortalaması ve Yan

Simülasyon çalışmasında yer alan hata kareler ortalaması (HKO) ve yan aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$HKO=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{(i)}-\theta\right)^2}{n} \tag{3.29}$$

$$Yan=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_{(i)}-\theta}{n} \tag{3.30}$$

Burada n deneme sayısını ve $\hat{\theta}_{(i)}$, θ parametreli bir dağılım için θ'nın tahmin değerini göstermektedir.

4. KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ KUMARASWAMY DAĞILIMI

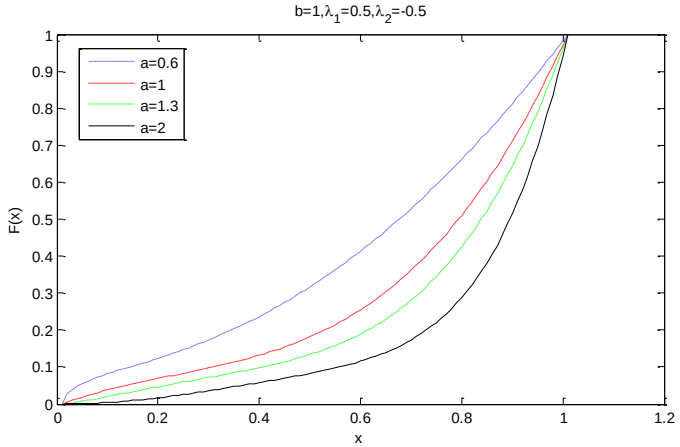
Bu bölümde, KSDY ile öznel dağılım Bölüm 3.4.8 'de verilen Kw dağılımı alınarak yeni bir istatistiksel dağılım elde edilmiştir. Kübik sıralı dönüştürülmüş Kumaraswamy (KSDKw) ismindeki bu yeni dağılımın momentleri, varyansı, basıklık ve çarpıklık katsayıları, moment üreten fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu gibi bazı matematiksel ve istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu yeni dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahminleri EÇO yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Buna ek olarak bu tahmin edicilerin yan ve HKO açısından performanslarını gözlemlemek amacıyla bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Son olarak, KSDKw dağılımının gerçek hayatta uygulanabilirliğini göstermek ve gerçek veriler ile olan uyumunu daha önce elde edilmiş mevcut bazı dağılımlar ile karşılaştırmak amacıyla iki gerçek veri uygulaması yapılmıştır.

Bölüm 3.5.2 de yer alan KSDY yöntemindeki $G(x)$ yerine Bölüm 3.4.8'de verilen Kw dağılımına ait df kullanılarak elde edilen KSDKw ismindeki yeni dağılıma ilişkin df ve oyf sırasıyla,

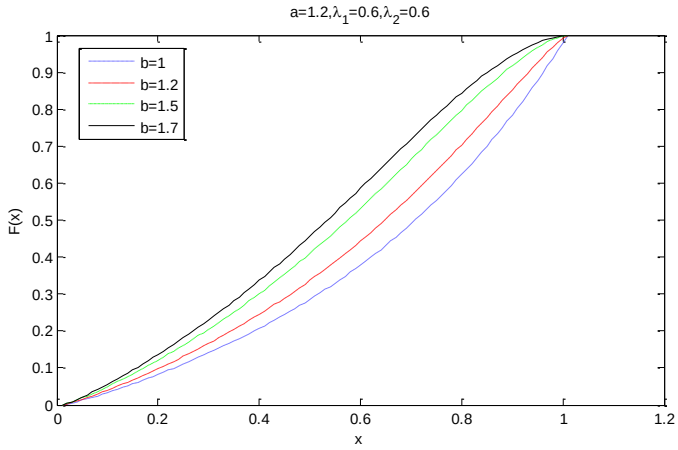
$$F(x)=1+(\lambda_1+\lambda_2-3)\left(1-x^a\right)^b+(3-\lambda_1-2\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}+(\lambda_2-1)\left(1-x^a\right)^{3b} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=abx^{a-1}\left(1-x^a\right)^{b-1}\\ &\times\left[3-\lambda_1-\lambda_2+2(\lambda_1+2\lambda_2-3)(1-x^a)^b+3(1-\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}\right]I_{(0,1)}(x)\end{aligned} \tag{4.2}$$

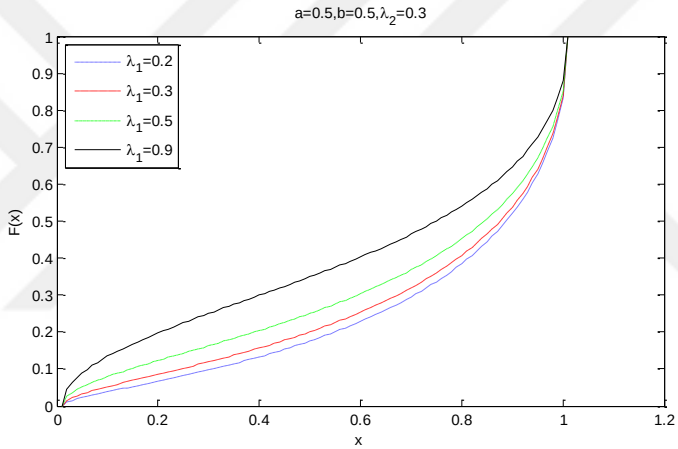
şeklindedir. Burada $a,b>0,\lambda_1\in[0,1],\lambda_2\in[-1,1],\lambda_1+\lambda_2<2\sqrt{\lambda_1}$'dir. Farklı parametre değerleri için KSDKw dağılımına ilişkin df grafikleri Şekil 4.1-4.4 de verilmiştir.



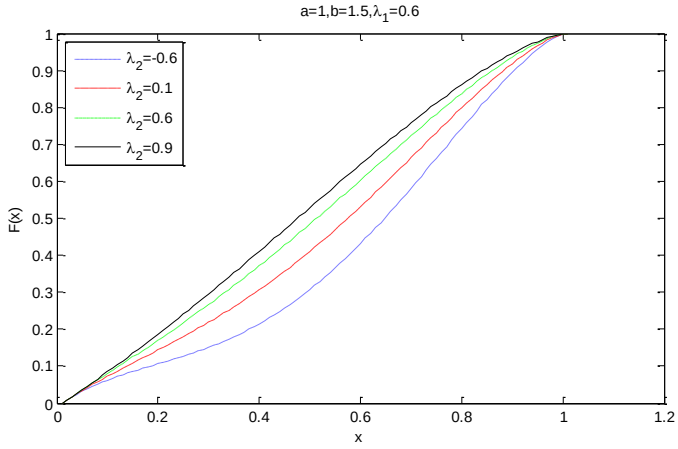
Şekil 4.1. Farklı a değerleri için KSDKw dağılımının df



Şekil 4.2. Farklı b değerleri için KSDKw dağılımının df

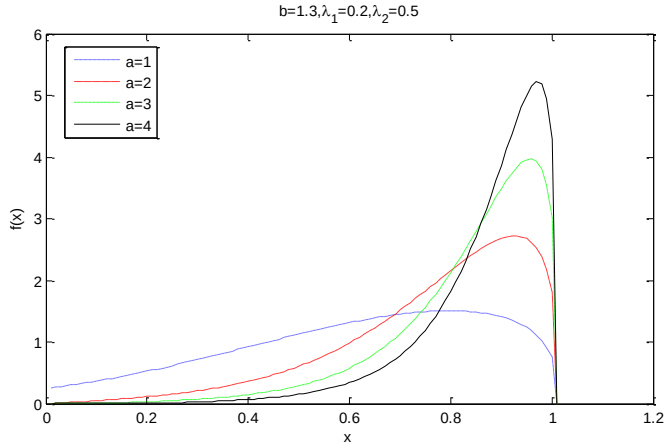


Şekil 4.3. Farklı λ_1 değerleri için KSDKw dağılımının df

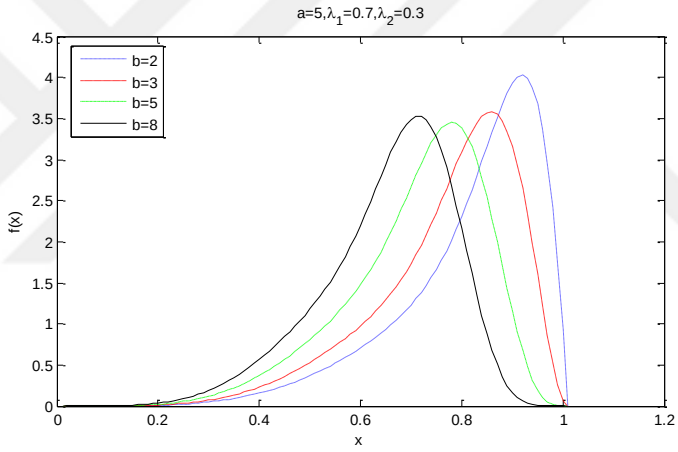


Şekil 4.4. Farklı λ_2 değerleri için KSDKw dağılımının df

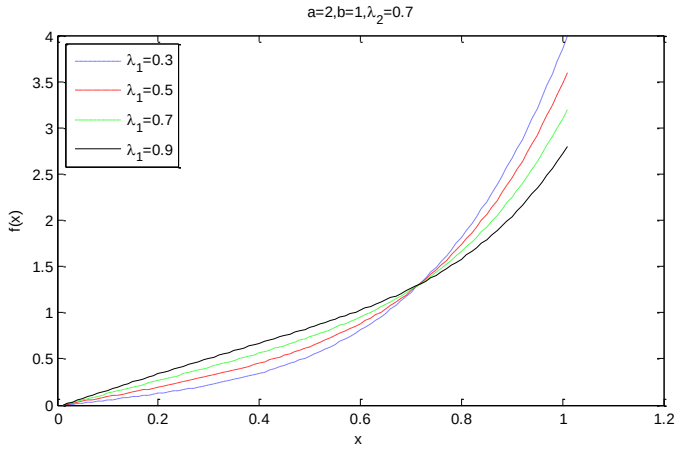
Farklı parametre değerleri için KSDKw dağılımının oyf grafikleri Şekil 4.5-4.8' de verilmiştir.



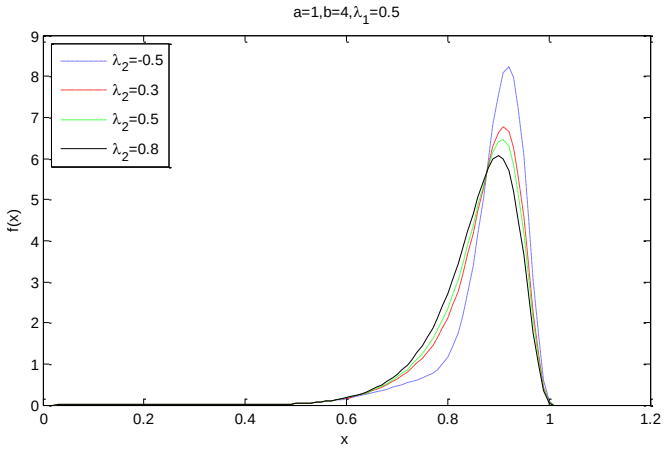
Şekil 4.5. Farklı a değerleri için KSDKw dağılımının oyf



Şekil 4.6. Farklı b değerleri için KSDKw dağılımının oyf



Şekil 4.7. Farklı λ_1 değerleri için KSDKw dağılımının oyf

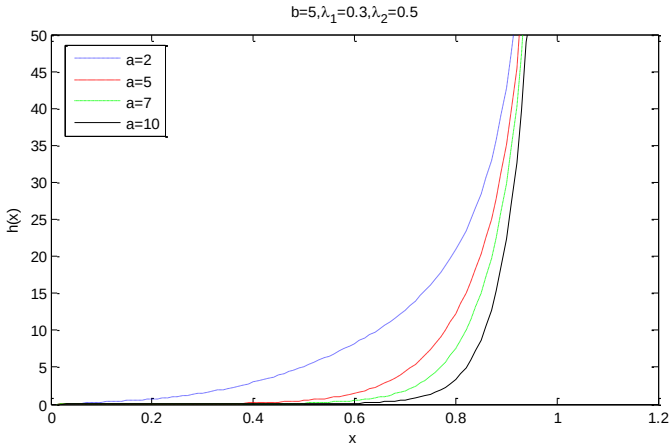


Şekil 4.8. Farklı λ_2 değerleri için KSDKw dağılımının oyf

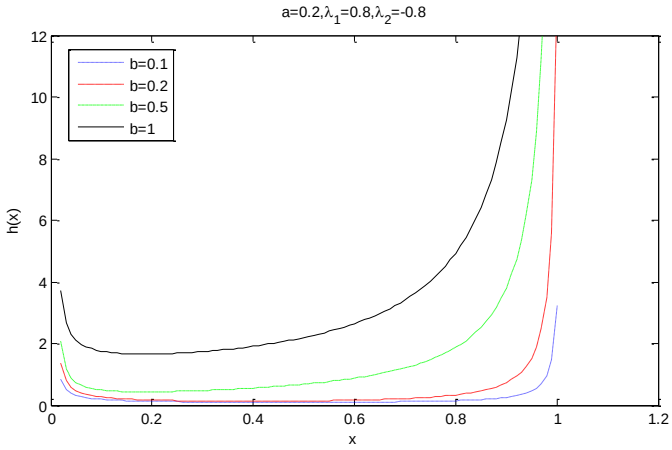
$\lambda_1 \to 1$ ve $\lambda_2 \to 1$ iken KSDKw dağılımı Bölüm 3.4.8'de verilen Kw dağılımına indirgenir. KSDKw$(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının hazard fonksiyonu (hf)

$$h(x)=\frac{abx^{a-1}}{\left(1-x^{a}\right)}\left[\frac{3-\lambda_1-\lambda_2+2\left(\lambda_1+2\lambda_2-3\right)\left(1-x^{a}\right)^{b}+3\left(1-\lambda_2\right)\left(1-x^{a}\right)^{2b}}{\left(3-\lambda_1-\lambda_2\right)+\left(\lambda_1+2\lambda_2-3\right)\left(1-x^{a}\right)^{b}+\left(1-\lambda_2\right)\left(1-x^{a}\right)^{2b}}\right] \tag{4.3}$$

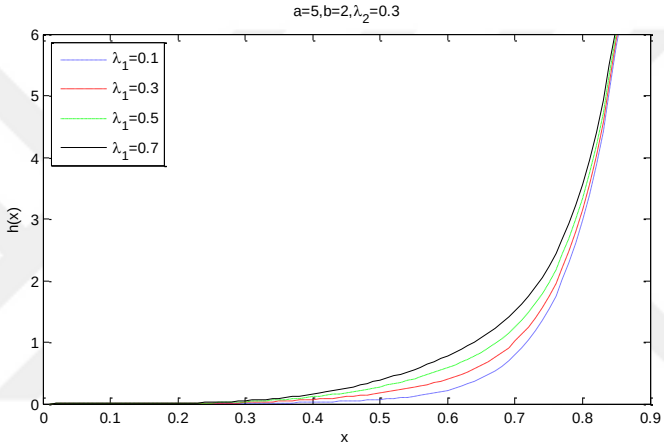
şeklinde olup farklı parametre değerleri için KSDKw dağılımının hf grafikleri Şekil 4.9-4.12' de verilmiştir.



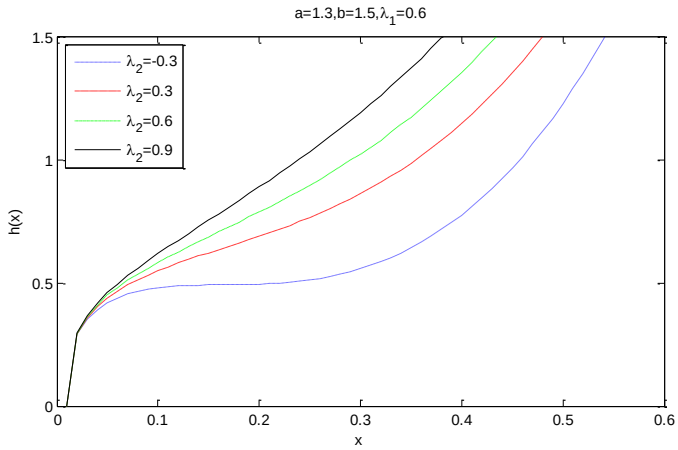
Şekil 4.9. Farklı a değerleri için KSDKw dağılımının hf



Şekil 4.10. Farklı b değerleri için KSDKw dağılımının hf



Şekil 4.11. Farklı λ_1 değerleri için KSDKw dağılımının hf



Şekil 4.12. Farklı λ_2 değerleri için KSDKw dağılımının hf

Şekil 4.8-4.12 incelendiğinde KSDKw$(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımına ilişkin hf $a>1, b>1$ iken artan, $0<a<1, 0<b<1$ iken küvet eğrisi şeklinde olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, KSDKw dağılımı artan ve küvet eğrisi şeklinde bozulma oranı fonksiyonuna sahip verileri modelleyebilmektedir.

4.1. Bazı Dağılımsal Özellikler

Bu bölümde KSDKw$(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının beklenen değer, varyans, basıklık katsayısı, çarpıklık katsayısı, moment üreten fonksiyon gibi bazı dağılımsal özellikleri verilecektir.

X , KSDKw$(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. X rasgele değişkeninin $r.$ momenti

$$E\left(X^r\right)=\int_0^1 x^r g\left(x\right)\left[\lambda_1+2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)G\left(x\right)+3\left(1-\lambda_2\right)G^2\left(x\right)\right]dx$$
$$=b\left(3-\lambda_1-\lambda_2\right)Beta\left(1+\frac{r}{a},b\right)+2b\left(2\lambda_2+\lambda_1-3\right)Beta\left(1+\frac{r}{a},2b\right) \quad (4.4)$$
$$+3b\left(1-\lambda_2\right)Beta\left(1+\frac{r}{a},3b\right)$$

şeklindedir. KSDKw dağılımının çarpıklık katsayısı (ÇK) ve basıklık katsayısı (BK) ise aşağıda sırayla verilmiştir.

$$ÇK=\frac{\Gamma_3-3\Gamma_2+2\Gamma_1^{\,3}}{\left(\Gamma_2-\Gamma_1^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.5)$$

$$BK=\frac{\Gamma_4-4\Gamma_1\Gamma_3+6\Gamma_1^{\,2}\Gamma_2-3\Gamma_1^4}{\left[\Gamma_2-\Gamma_1^2\right]^2}, \quad (4.6)$$

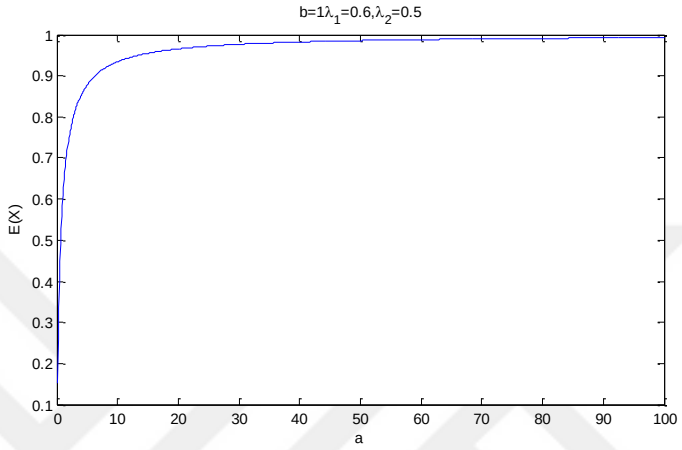
burada;

$$\Gamma_j=b(3-\lambda_1-\lambda_2)Beta\left(1+\frac{j}{a},b\right)+2b(2\lambda_2+\lambda_1-3)Beta(1+\frac{j}{a},2b)$$
$$+3b(1-\lambda_2)Beta(1+\frac{j}{a},3b),\quad j=1,2,3,4$$

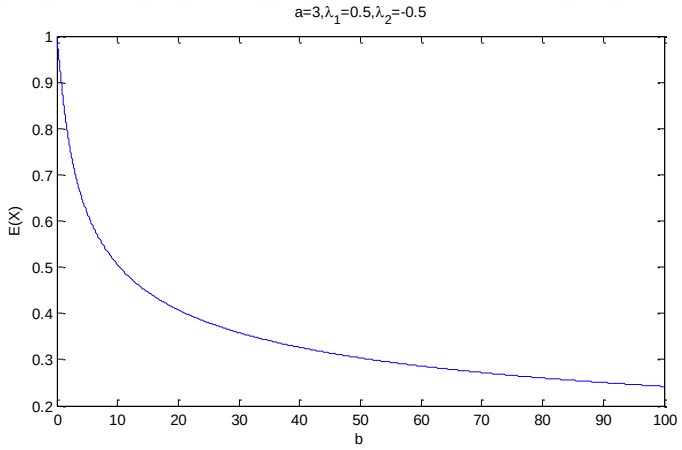
biçimindedir. KSDKw $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$dağılımının farklı parametre değerleri için ilk moment (beklenen değer), ikinci moment, varyans, ÇK ve BK Çizelge 4.1'de verilirken farklı parametre değerleri için beklenen değer, varyans, ÇK ve BK değişimlerini gösteren grafikler Şekil 4.13-4.20 'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Farklı parametre değerleri için KSDKw dağılımının beklenen değer, varyans, ÇK ve BK

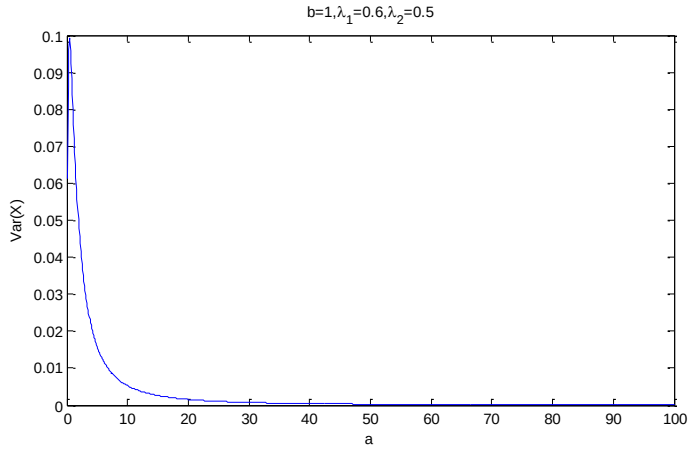
$(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$	$E(X)$	$E(X^2)$	$Var(X)$	CK	CS
$(0.5,0.3,0.5,-0.3)$	0.8544	0.8002	0.0702	6.1734	-2.0869
$(1,3,0.7,0.5)$	0.3143	0.1427	0.0439	2.4260	0.4757
$(3,5,0.5,-1)$	0.6408	0.4313	0.0206	5.1081	-1.2126
$(80,50,0.5,0.1)$	0.9525	0.9075	0.0002	7.3080	-1.6164



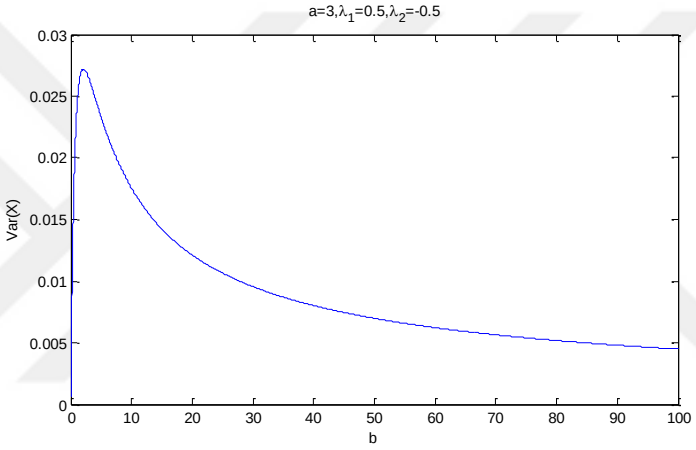
Şekil 4.13. $a \in [0,100], b=1, \lambda_1=0.6, \lambda_2=0.5$ değerleri için KSDKw dağılımının beklenen değeri



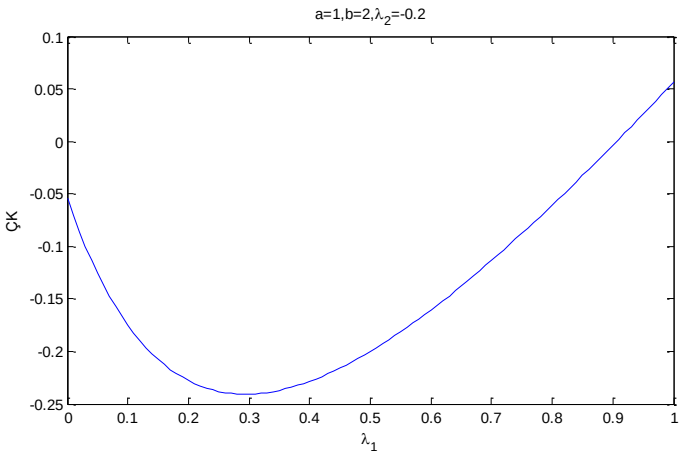
Şekil 4.14. $a=3, b \in [0,100], \lambda_1=0.5, \lambda_2=-0.5$ değerleri için KSDKw dağılımının beklenen değeri



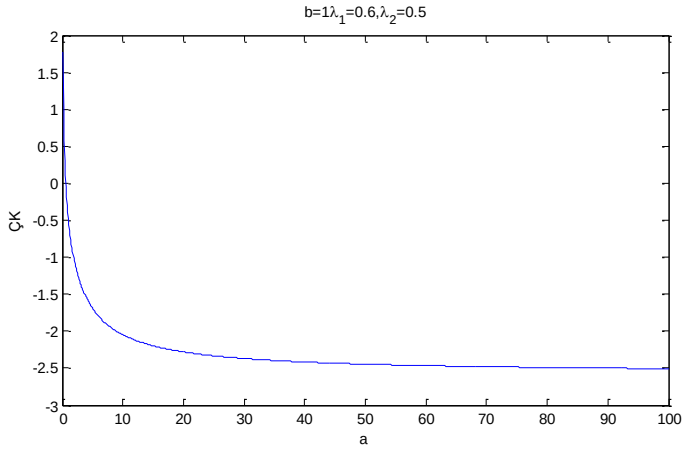
Şekil 4.15. $a \in [0,100], b = 1, \lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.5$ değerleri için KSDKw dağılımının varyansı



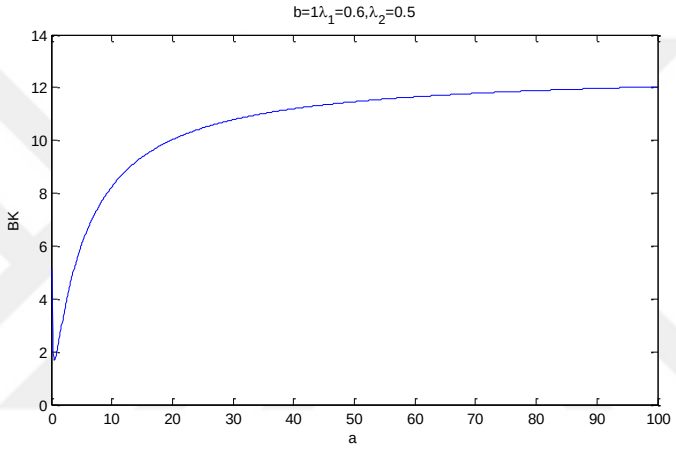
Şekil 4.16. $a = 3, b \in [0,100], \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -0.5$ değerleri için KSDKw dağılımının varyansı



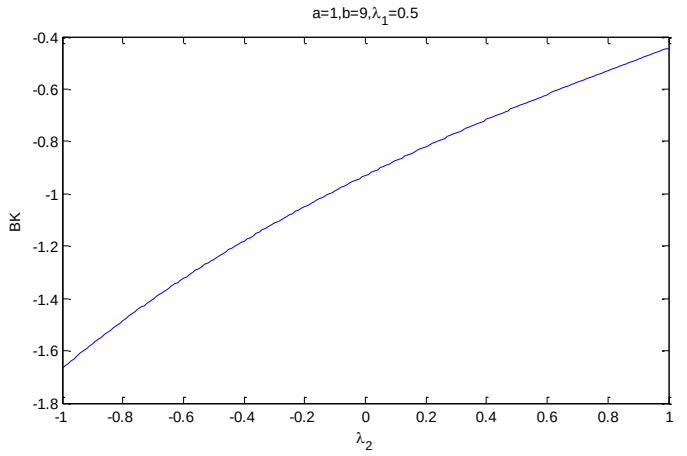
Şekil 4.17. $a = 1, b = 2, \lambda_1 \in [0,1], \lambda_2 = -0.2$ değerleri için KSDKw dağılımının çarpıklık katsayısı



Şekil 4.18. $a \in [0,100], b = 1, \lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.5$ değerleri için KSDKw dağılımının çarpıklık katsayısı



Şekil 4.19. $a \in [0,100], b = 1, \lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.5$ değerleri için KSDKw dağılımının basıklık katsayısı



Şekil 4.20. $a = 1, b = 0.9, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 \in [-1,1]$ değerleri için KSDKw dağılımının basıklık katsayısı

Şekil 4.13-4.20 incelendiğinde $a \to \infty$ iken $E(X) \to b$ olduğu ve $b \to \infty$ iken $E(X) \to 0$ olduğu yani a sonsuza giderken beklenen değerin b 'ye yaklaştığı ve b sonsuza giderken beklenen değerin 0'a yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca a arttıkça varyans 0'a yaklaşmaktadır. a parametresinin aldığı değer arttıkça, ÇK'nın azaldığı görülmektedir.

KSDKw $(a, b, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımına sahip X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu $M_X(t)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^1 e^{tx} f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \int_0^1 x^r f(x)\,dx \\ &= (3-\lambda_1-\lambda_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} b\beta\left(1+\frac{r}{a}, b\right) + 2(2\lambda_2+\lambda_1-3) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} b\beta\left(1+\frac{r}{a}, 2b\right) \\ &\quad + 3(1-\lambda_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} b\beta\left(1+\frac{r}{a}, 3b\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$X_1, X_2, ..., X_n$, KSDKw $(a, b, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımından alınan rasgele bir örneklem olsun ve $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ bu rasgele örneğe ait sıra istatistiklerini ifade etsin. Bu durumda $j.$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_{(j)}}$, aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} f_{X_{(j)}}(x) &= n!\left((j-1)!(n-j)!\right)^{-1} abx^{a-1}\left(1-x^a\right)^{b-1} \\ &\quad \times \left[3-\lambda_1-\lambda_2+2(\lambda_1+2\lambda_2-3)(1-x^a)^b+3(1-\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}\right] \\ &\quad \times \left[1+(\lambda_1+\lambda_2-3)\left(1-x^a\right)^b+(3-\lambda_1-2\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}+(\lambda_2-1)\left(1-x^a\right)^{3b}\right]^{j-1} \\ &\quad \times \left[(\lambda_1+\lambda_2-3)\left(1-x^a\right)^b+(3-\lambda_1-2\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}+(\lambda_2-1)\left(1-x^a\right)^{3b}\right]^{n-j} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Burada $j = 1, ..., n$ 'dir. j 'nin 1 ve n değerlerini alması durumunda oluşan KSDKw$(a, b, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımının minimum ve maksimum sıra istatistikleri $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= abx^{a-1}\left(1-x^a\right)^{b-1} \\ &\quad \times \left[3-\lambda_1-\lambda_2+2(\lambda_1+2\lambda_2-3)(1-x^a)^b+3(1-\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}\right] \\ &\quad \times \left[(\lambda_1+\lambda_2-3)\left(1-x^a\right)^b+(3-\lambda_1-2\lambda_2)\left(1-x^a\right)^{2b}+(\lambda_2-1)\left(1-x^a\right)^{3b}\right]^{n-1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = abx^{a-1}\left(1-x^a\right)^{b-1} \times\left[3-\lambda_1-\lambda_2+2\left(\lambda_1+2\lambda_2-3\right)(1-x^a)^b+3\left(1-\lambda_2\right)\left(1-x^a\right)^{2b}\right] \times\left[1+\left(\lambda_1+\lambda_2-3\right)\left(1-x^a\right)^b+\left(3-\lambda_1-2\lambda_2\right)\left(1-x^a\right)^{2b}+\left(\lambda_2-1\right)\left(1-x^a\right)^{3b}\right]^{n-1} \quad (4.10)$$

4.2. Nokta Tahmini

Bu bölümde KSDKw dağılımının bilinmeyen a,b,λ_1,λ_2 parametrelerinin EÇO tahmin edicileri verilecektir.

4.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2, ..., X_n$, KSDKw $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımından alınan rasgele bir örneklem olmak üzere log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell\left(a,b,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x}\right) = n\left(\log(a)+\log(b)\right)+(a-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(x_i\right)+(b-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-x_i^{\,a}\right) +\sum_{i=1}^{n}\log\left[\lambda_1+2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(1-(1-x_i^{\,a})^b\right)+3\left(1-\lambda_2\right)\left(1-(1-x_i^{\,a})^b\right)^2\right] \quad (4.11)$$

biçimindedir. $\ell\left(a,b,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x}\right)$ fonksiyonunun a,b,λ_1 ve λ_2 parametrelerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek oluşturulan aşağıdaki doğrusal olmayan denklemlerin eş zamanlı çözümü ile a,b,λ_1 ve λ_2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilir.

$$\frac{\ell\left(a,b,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x}\right)}{\partial a} = \frac{n}{a}+\sum_{i=1}^{n}\log\left(x_i\right)+(b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\,a}\log\left(x_i\right)}{x_i^{\,a}-1} -\frac{\sum_{i=1}^{n}2bx_i^{\,a}\log\left(x_i\right)\left(\left(-3\lambda_2+3\right)\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-3+\lambda_1+2\lambda_2\right)\left(1-x_i^{\,a}\right)^b\left(x_i^{\,a}-1\right)^{-1}}{n\left(\lambda_1+\lambda_2-3\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\,a}\right)^b\left(-3\lambda_2\left(1-x_i^{\,a}\right)^b+2\lambda_1+4\lambda_2+3\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-6\right)} \quad (4.12)$$

$$\frac{\ell\left(a,b,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x}\right)}{\partial b} = \frac{n}{b}+\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-x_i^{\,a}\right) -\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(1-x_i^{\,a}\right)^b\log\left(1-x_i^{\,a}\right)\left(\left(-3\lambda_2+3\right)\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-3+\lambda_1+2\lambda_2\right)\right]}{n\left(\lambda_1+\lambda_2-3\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\,a}\right)^b\left(-3\lambda_2\left(1-x_i^{\,a}\right)^b+2\lambda_1+4\lambda_2+3\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-6\right)} \quad (4.13)$$

$$\frac{\ell(a,b,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial\lambda_1}=\frac{n-2\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\,a}\right)^b}{n(\lambda_1+\lambda_2-3)-\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\,a}\right)^b\left(-3\lambda_2\left(1-x_i^{\,a}\right)^b+2\lambda_1+4\lambda_2+3\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-6\right)} \tag{4.14}$$

$$\frac{\ell(a,b,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial\lambda_2}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}4\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-3\left(1-x_i^{\,a}\right)^{2b}}{n(\lambda_1+\lambda_2-3)-\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\,a}\right)^b\left(-3\lambda_2\left(1-x_i^{\,a}\right)^b+2\lambda_1+4\lambda_2+3\left(1-x_i^{\,a}\right)^b-6\right)} \tag{4.15}$$

4.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, KSDKw$(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin EÇO tahmin edicilerinin HKO ve yan açısından performanslarını değerlendirebilmek amacı ile bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar alınmıştır. Örnek hacimleri 50,100,200,300,500,1000, parametre değerleri ise $(0.4,0.3,0.3,0.8)$, $(0.5,1.3,0.1,0.7)$, $(1,0.5,0.2,0.9)$, $(1,1.2,0.2,0.9)$ şeklinde alınmıştır. Simülasyon çalışması sonuçları Çizelge 4.2-4.5' de verilmiştir. Ayrıca dört farklı parametre durumu için yan ve HKO değerlerinin örneklem büyüklüğüne göre değişimini görmek için çizilen grafikler Şekil 4.21-4.28'de verilmiştir.

Çizelge 4.2. $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.3,0.3,0.8)$ durumu için HKO ve yan değerleri

	$\hat{a}$		$\hat{b}$		$\hat{\lambda}_1$		$\hat{\lambda}_2$	
n	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO
50	0.1176	0.0804	0.0460	0.0052	0.2348	0.1158	-0.8092	0.9020
100	0.0970	0.0537	0.0317	0.0027	0.2050	0.1079	-0.6096	0.5637
200	0.0721	0.0380	0.0197	0.0012	0.1569	0.0840	-0.4253	0.3114
300	0.0570	0.0296	0.0144	0.0008	0.1248	0.0672	-0.3302	0.2055
500	0.0401	0.0199	0.0104	0.0005	0.0873	0.0473	-0.2350	0.1239
1000	0.0185	0.0113	0.0056	0.0002	0.0450	0.0269	-0.1327	0.0563

Çizelge 4.3. $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,1.3,0.1,0.7)$ durumu için HKO ve yan değerleri

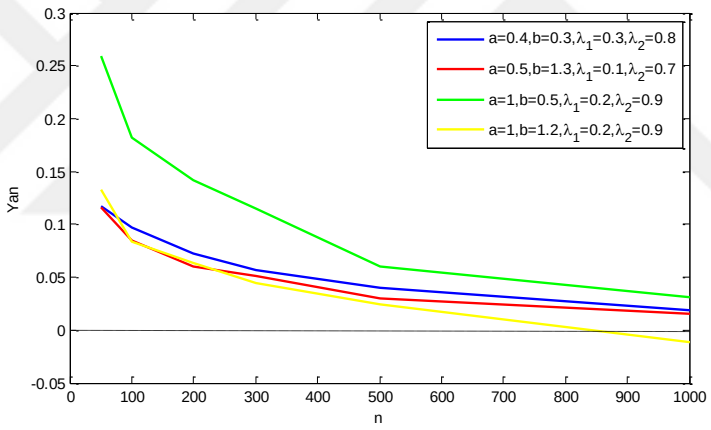
	$\hat{a}$		$\hat{b}$		$\hat{\lambda}_1$		$\hat{\lambda}_2$	
n	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO
50	0.1156	0.0566	0.2832	0.1910	0.3691	0.1955	-0.8333	0.9154
100	0.0850	0.0430	0.1821	0.0853	0.2960	0.1502	-0.6399	0.6246
200	0.0596	0.0371	0.1034	0.0373	0.2290	0.1161	-0.4710	0.4149
300	0.0512	0.0323	0.0794	0.0260	0.1908	0.0948	-0.3698	0.3045
500	0.0301	0.0241	0.0446	0.0139	0.1339	0.0663	-0.2778	0.2206
1000	0.0154	0.0174	0.0222	0.0065	0.0882	0.0436	-0.1989	0.1508

Çizelge 4.4. $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)=(1,0.5,0.2,0.9)$ durumu için HKO ve yan değerleri

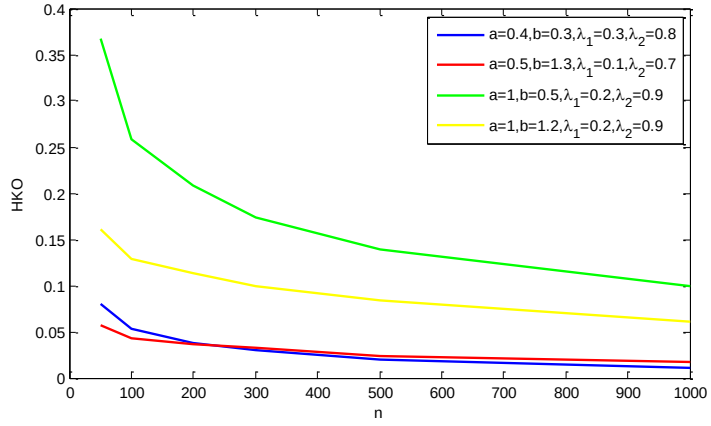
	$\hat{a}$		$\hat{b}$		$\hat{\lambda}_1$		$\hat{\lambda}_2$	
n	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO
50	0.2591	0.3677	0.0921	0.0186	0.3109	0.1574	-0.9528	1.1511
100	0.1824	0.2581	0.0649	0.0090	0.2509	0.1270	-0.7629	0.7875
200	0.1415	0.2077	0.0430	0.0043	0.1990	0.1015	-0.5790	0.4906
300	0.1146	0.1735	0.0338	0.0028	0.1670	0.0862	-0.4763	0.3614
500	0.0607	0.1389	0.0230	0.0016	0.1141	0.0620	-0.3756	0.2523
1000	0.0307	0.0995	0.0143	0.0007	0.0727	0.0410	-0.2618	0.1486

Çizelge 4.5. $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)=(1,1.2,0.2,0.9)$ durumu için HKO ve yan değerleri

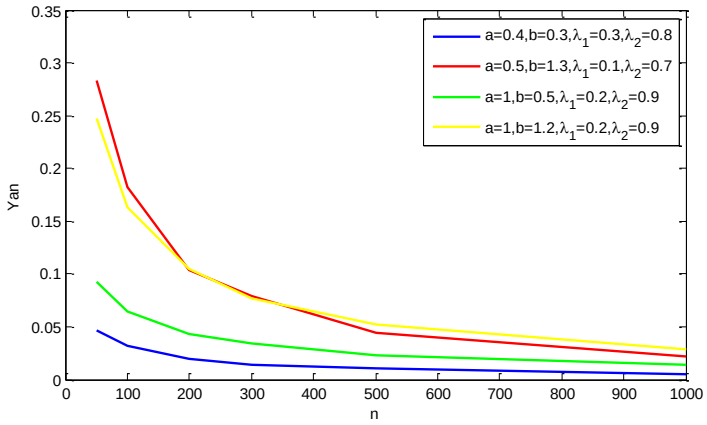
	$\hat{a}$		$\hat{b}$		$\hat{\lambda}_1$		$\hat{\lambda}_2$	
n	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO	Yan	HKO
50	0.1327	0.1604	0.2473	0.1468	0.3169	0.1588	-0.9840	1.2150
100	0.0835	0.1289	0.1633	0.0695	0.2529	0.1297	-0.8019	0.8636
200	0.0636	0.1133	0.1049	0.0332	0.2004	0.1109	-0.5992	0.5289
300	0.0445	0.0990	0.0769	0.0210	0.1652	0.0963	-0.4987	0.3960
500	0.0248	0.0844	0.0526	0.0122	0.1258	0.0788	-0.4032	0.2790
1000	-0.0116	0.0615	0.0282	0.0055	0.0679	0.0520	-0.3123	0.1864



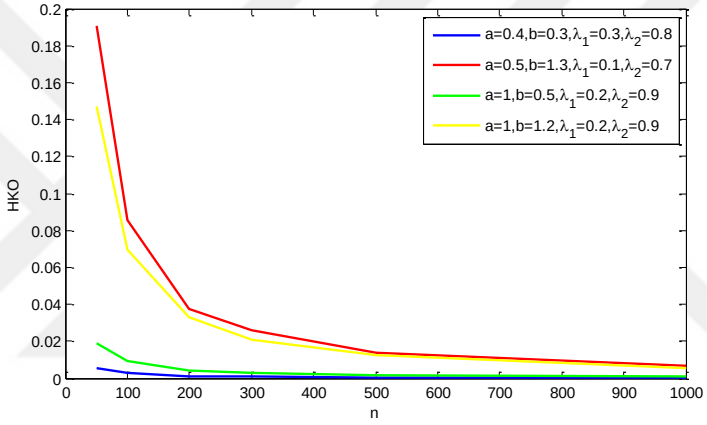
Şekil 4.21. Farklı parametre durumlarında a parametresi için yan



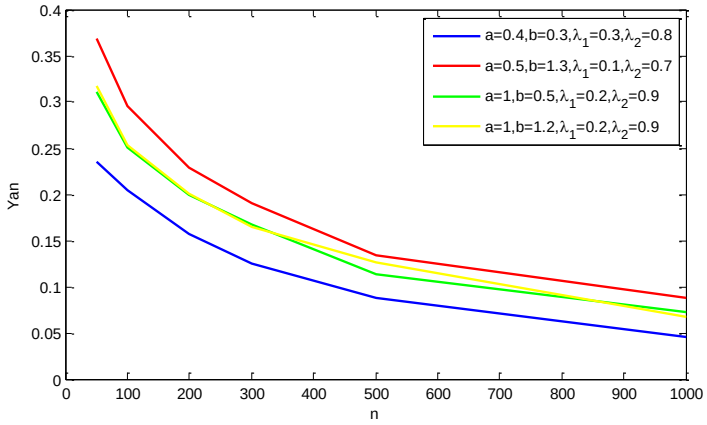
Şekil 4.22. Farklı parametre durumlarında a parametresi için HKO



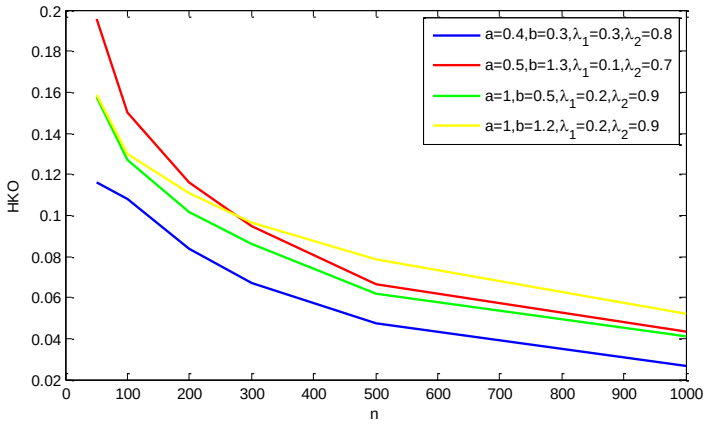
Şekil 4.23. Farklı parametre durumlarında b parametresi için yan



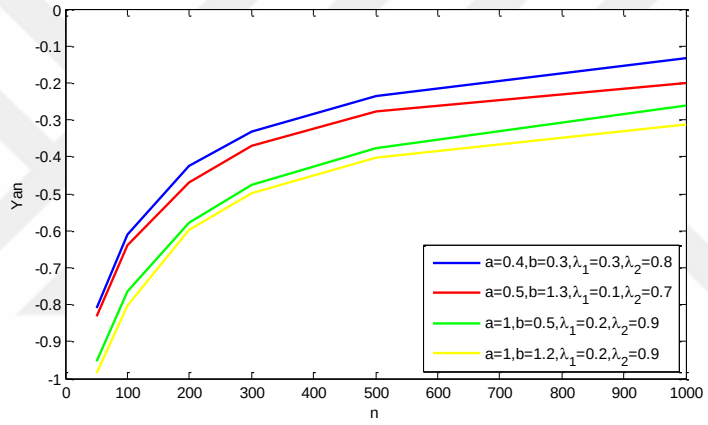
Şekil 4.24. Farklı parametre durumlarında b parametresi için HKO



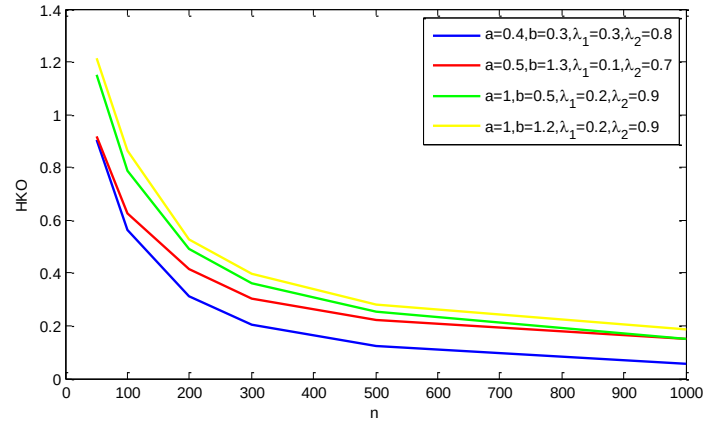
Şekil 4.25. Farklı parametre durumlarında λ_1 parametresi için yan



Şekil 4.26. Farklı parametre durumlarında λ_1 parametresi için HKO



Şekil 4.27. Farklı parametre durumlarında λ_2 parametresi için yan



Şekil 4.28. Farklı parametre durumlarında λ_2 parametresi için HKO

KSDKw $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametrelerinin EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO kriterlerine göre performanslarını değerlendirmek amacıyla yapılan Monte Carlo simülasyon çalışmaları sonuçlarına göre tüm parametre durumlarında EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerlerinin örnek büyüklüğü arttıkça beklenildiği gibi düzenli bir şekilde azaldığı ve sıfıra yaklaştığı söylenebilir. $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.3,0.3,0.8)$ olması durumunda tüm parametrelerin EÇO tahmin edicilerinin HKO değerleri diğer üç parametre durumuna göre daha küçüktür. λ_1 ve λ_2 parametrelerinin EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerleri genellikle a ve b parametrelerinin EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerlerine göre daha büyüktür. λ_2 parametresinin yan değerlerinin tümü sıfırdan küçüktür. λ_2 parametresinin EÇO tahmin edicisinin yan ve HKO değerleri diğer üç parametrenin EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerleri ile kıyaslandığında en büyüktür.

4.4. Gerçek Veri Uygulaması

Bu bölümde KSDKw dağılımının gerçek hayatta uygulanabilirliğini göstermek amacı ile iki gerçek veri uygulamasına yer verilmiştir. İlk olarak 107 birimden oluşan Brito (2009) tarafından elde edilen süt üretimi ile ilgili veri seti kullanılmıştır. Bu veri kümesi gerçekte $(0,1)$ aralığında değildir. Cordeiro ve dos Santos Brito (2012), Brito (2009)'nun verisinde $x_i=\left[y_i-\min(y_i)\right]/\left[\max(y_i)-\min(y_i)\right], i=1,...,107$ dönüşümü uygulayarak verileri $(0,1)$ aralığına çekmişlerdir. Ayrıca bu veri kümesi Yousof ve ark. (2017) tarafından da çalışılmıştır. Süt üretimi verisi aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.6. Süt Üretimi veri kümesi

0.4365	0.4260	0.5140	0.6907	0.7471	0.2605	0.6196	0.8781	0.4990	0.6058	0.6891
0.5770	0.5394	0.1479	0.2356	0.6012	0.1525	0.5483	0.6927	0.7261	0.3323	0.0671
0.2361	0.4800	0.5707	0.7131	0.5853	0.6768	0.5350	0.4151	0.6789	0.4576	0.3259
0.2303	0.7687	0.4371	0.3383	0.6114	0.3480	0.4564	0.7804	0.3406	0.4823	0.5912
0.5744	0.5481	0.1131	0.7290	0.0168	0.5529	0.4530	0.3891	0.4752	0.3134	0.3175
0.1167	0.6750	0.5113	0.5447	0.4143	0.5627	0.5150	0.0776	0.3945	0.4553	0.4470
0.5285	0.5232	0.6465	0.0650	0.8492	0.8147	0.3627	0.3906	0.4438	0.4612	0.3188
0.2160	0.6707	0.6220	0.5629	0.4675	0.6844	0.3413	0.4332	0.0854	0.3821	0.4694
0.3635	0.4111	0.5349	0.3751	0.1546	0.4517	0.2681	0.4049	0.5553	0.5878	0.4741
0.3598	0.7629	0.5941	0.6174	0.6860	0.0609	0.6488	0.2747			

Süt üretimi verisi KSDKw, Kw, DKw, ÜKw, Weibull, DÜÜ gibi istatistiksel dağılımlar ile analiz edilmiştir. Bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin EÇO

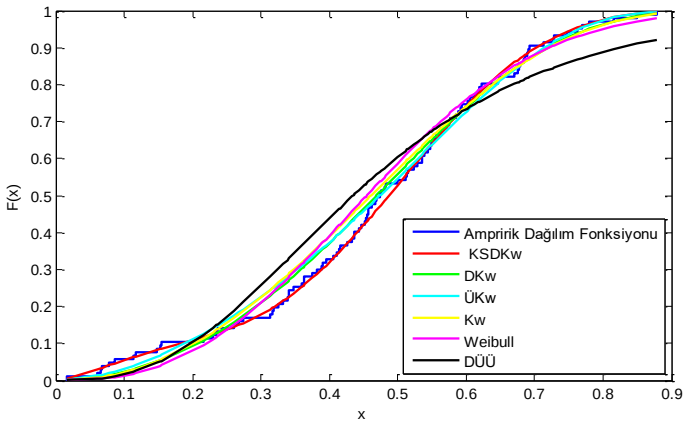
tahminleri ve bu değerlere ilişkin standart hatalar ve bu dağılımların süt üretimi verisine uyumunu karşılaştırmak için kullanılan istatistikler Çizelge 4.7-4.8' de verilmiştir. Ayrıca uydurulan df ve oyf grafikleri Şekil 4.29 ve Şekil 4.30' da sırası ile verilmiştir.

Çizelge 4.7. Süt üretimi verisi için en çok olabilirlik tahminleri (standart hata)

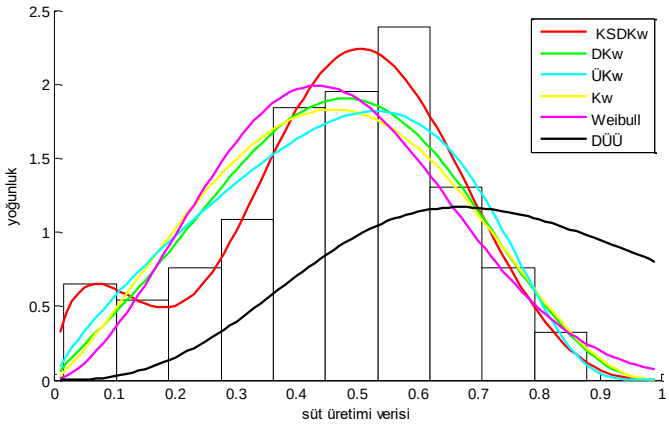
Dağılım	EÇO tahminleri (standart hata)
KSDKw	$\hat{a}=1.5349(0.1893), \hat{b}=3.9248(0.5645),$ $\hat{\lambda}_1=0.6342(0.2090), \hat{\lambda}_2=-0.8005(0.4753)$
DKw	$\hat{a}=1.8232(0.2735), \hat{b}=3.4362(0.5622)$ $\hat{\lambda}=-0.5608(0.2246)$
ÜKw	$\hat{a}=5.315(1.870), \hat{b}=7.140(3.092),$ $\hat{\theta}=0.3361(0.1446)$
Kw	$\hat{a}=2.1949(0.2224), \hat{b}=3.4363(0.5820)$
Weibull	$\hat{\mu}=2.6012(0.2098), \hat{\sigma}=0.5246(0.0202)$
DÜÜ	$\hat{\theta}=3.1199(0.5967), \hat{\alpha}=4.7498(0.4033),$ $\hat{\lambda}=-0.6874(0.1415)$

Çizelge 4.8. Süt üretimi verisi için karşılaştırma istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	AICc	BIC	A*	K-S	p-değeri
KSDKw	**-62.223**	**-54.223**	**-53.831**	**-43.532**	**0.1176**	**0.0427**	**0.9899**
DKw	-54.097	-48.097	-47.864	-40.079	0.6361	0.0600	0.8357
ÜKw	-27.557	-49.114	-48.881	-41.443	0.5950	0.0748	0.5868
Kw	-50.789	-46.789	-46.674	-41.443	1.0031	0.0763	0.5625
Weibull	-42.695	-38.695	-38.579	-33.349	1.4839	0.0832	0.4488
DÜÜ	-20.176	-14.176	-13.943	-6.157	3.4382	0.1232	0.0777



Şekil 4.29. Süt üretimi verisi için uydurulan df



Şekil 4.30. Süt üretimi verisi için uydurulan oyf

Çizelge 4.8 incelendiğinde tüm karşılaştırma kriterlerine göre süt üretimi verisine en iyi uyum sağlayan dağılımın KSDKw dağılımı olduğu görülmektedir.

İkinci gerçek veri seti 50 gözlemden oluşmaktadır. Bu veri seti Dasgupta (2011) tarafından elde edilmiştir. Bu veri seti, demir sacdan yapılan işler üzerine delik işleme ile ilgilidir. Çalışma ve ampirik veri seti aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.9. Çalışma ve ampirik veri kümesi

0.04	0.02	0.06	0.12	0.14	0.08	0.22	0.12	0.08	0.26
0.24	0.04	0.14	0.16	0.08	0.26	0.32	0.28	0.14	0.16
0.24	0.22	0.12	0.18	0.24	0.32	0.16	0.14	0.08	0.16
0.24	0.16	0.32	0.18	0.24	0.22	0.16	0.12	0.24	0.06
0.02	0.18	0.22	0.14	0.06	0.04	0.14	0.26	0.18	0.16

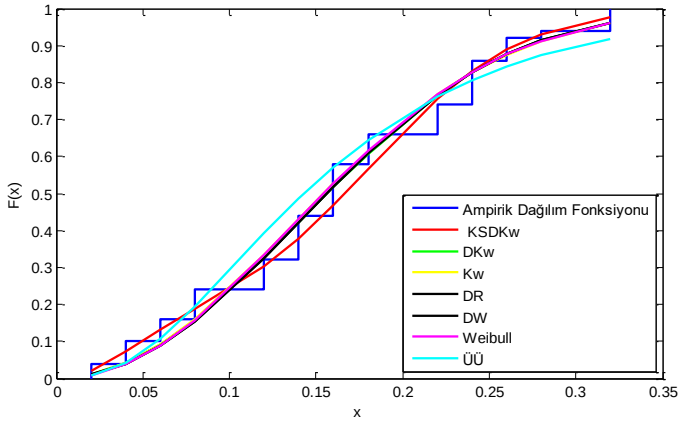
Çalışma ve ampirik verileri KSDKw, Kw, DKw, DR, ÜÜ, Weibull ve DW dağılımları ile uydurulmuştur. Bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin EÇO tahminleri ve bu değerlere ilişkin standart hatalar ve dağılımlar için hesaplanan karşılaştırma istatistikleri sırasıyla Çizelge 4.10-4.11' da verilmiştir. Ayrıca uydurulan df ve oyf grafikleri Şekil 4.31 ve Şekil 4.32' de sırası ile verilmiştir.

Çizelge 4.10. Çalışma ve ampirik veri için EÇO tahminleri (standart hata)

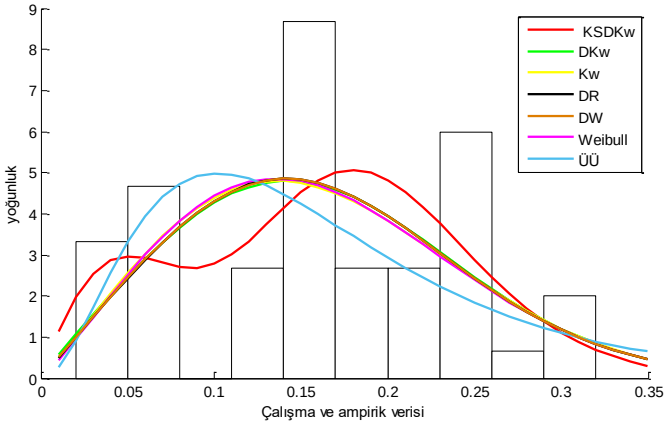
Dağılım	EÇO tahminleri (standart hata)
KSDKw	$\hat{a}=1.8977(0.2604), \hat{b}=38.2421(15.5797),$ $\hat{\lambda}_1=0.9964(0.3987), \hat{\lambda}_2=-0.5757(0.8442)$
DKw	$\hat{a}=1.9335(0.3524), \hat{b}=30.1864(13.7921),$ $\hat{\lambda}=-0.2911(0.4408)$
Kw	$\hat{a}=2.0774(0.2548), \hat{b}=33.1374(13.9216)$
ÜÜ	$\hat{\theta}=3.1719(0.7067), \hat{\alpha}=11.3602(1.5683)$
DW	$\hat{\mu}=1.9917(0.3310), \hat{\sigma}=0.1708(0.0236),$ $\hat{\lambda}=-0.2722(0.4308)$
Weibull	$\hat{\mu}=2.1195(0.2463), \hat{\sigma}=0.1837(0.0128)$
DR	$\hat{\sigma}=0.1211(0.0110), \hat{\lambda}=-0.2645(0.3086)$

Çizelge 4.11. Çalışma ve ampirik veri için karşılaştırma istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	AICc	BIC	A*	K-S	p-değeri
KSDKw	**-115.234**	-107.234	-97.457	-99.586	**0.473**	0.1139	0.5359
DKw	-112.502	-106.502	-105.980	-100.766	0.625	**0.1052**	**0.6375**
Kw	-112.137	**-108.137**	**-107.882**	**-104.313**	0.677	0.1103	0.5777
DR	-112.117	-108.117	-107.862	-104.293	2.004	0.1070	0.6159
DW	-112.117	-106.117	-105.596	-100.381	0.661	0.1070	0.6163
Weibull	-111.783	-107.783	-107.528	-103.959	0.708	0.1099	0.5815
ÜÜ	-104.572	-100.572	-100.317	-96.748	1.261	0.1653	0.1302



Şekil 4.31. Çalışma ve ampirik veri için uydurulan df



Şekil 4.32. Çalışma ve ampirik veri için uydurulan oyf

Çizelge 4.11 incelendiğinde, (A*) ve -2×log-olabilirlik değerine göre çalışma ve ampirik verilerine en iyi uyumu sağlayan dağılımın KSDKw dağılımı olduğu görülmektedir.

5. KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ GOMPERTZ DAĞILIMI

Bu bölümde, KSDY ile öznel dağılım Bölüm 3.4.5'de verilen GG dağılımı alınarak beş parametreli yeni bir istatistiksel dağılım önerilmiştir. Kübik sıralı dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz (KSDGG) ismindeki bu yeni dağılımın momentleri, moment üreten fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu gibi bazı matematiksel ve istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca KSDGG dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahminleri EÇO, EKK ve MÇA yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin yan ve HKO açısından performanslarını incelemek amacıyla Monte Carlo simülasyonları yapılmıştır. Bunlara ek olarak KSDGG dağılımının gerçek hayatta uygulanabilirliğini göstermek ve gerçek veriler ile olan uyumunu literatürdeki bazı bilinen dağılımlar ile karşılaştırmak amacıyla üç gerçek veri uygulaması yapılmıştır.

Bölüm 3.5.2 de yer alan KSDY ile $G(x)$ Bölüm 3.4.5'de verilen GG dağılımına ait df kullanılarak elde edilen KSDGG ismindeki yeni dağılıma ilişkin df ve oyf sırasıyla,

$$F(x)=\lambda_1\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{2\alpha}+\left(1-\lambda_2\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{3\alpha} \tag{5.1}$$

ve

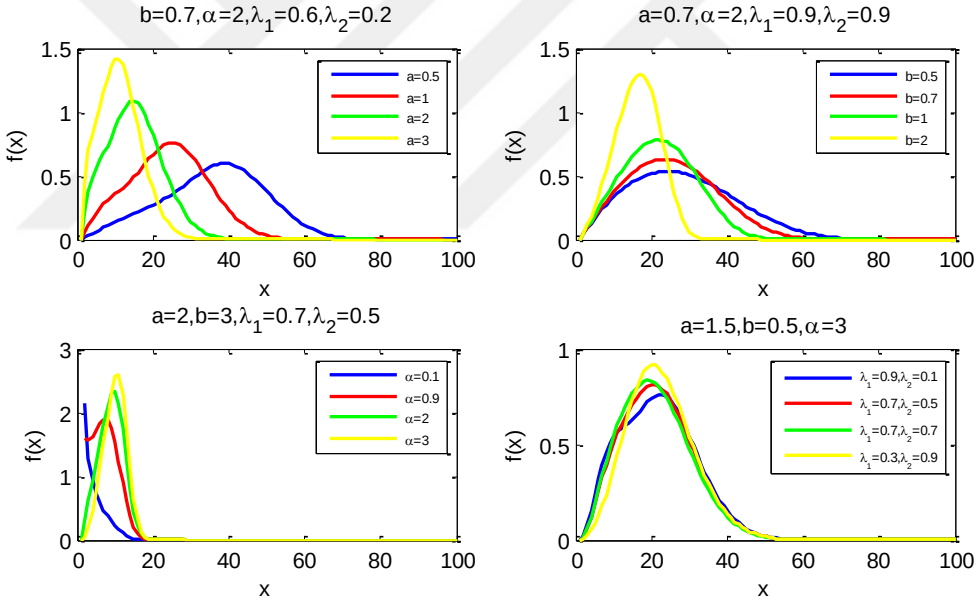
$$\begin{aligned} f(x)=\alpha a e^{bx} e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1} \\ \times\left[\lambda_1+2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}+3\left(1-\lambda_2\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{2\alpha}\right] I_{(0,\infty)}(x) \end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklindedir. Burada $a,b,\alpha>0, \lambda_1\in[0,1], \lambda_2\in[-1,1], \lambda_1+\lambda_2<2\sqrt{\lambda_1}$ 'dir. KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının bozulma oranı fonksiyonu

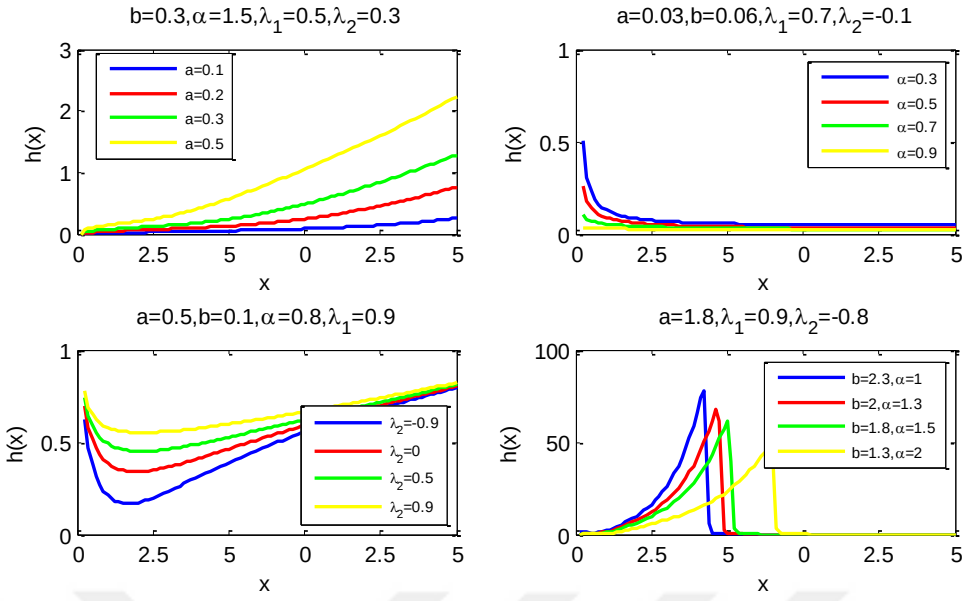
$$h(x)=\frac{\alpha a e^{bx} e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1}}{1-\left[\lambda_1\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{2\alpha}+\left(1-\lambda_2\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{3\alpha}\right]}$$
$$\times\frac{\left[\lambda_1+2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}+3\left(1-\lambda_2\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{2\alpha}\right]}{1-\left[\lambda_1\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{\alpha}+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{2\alpha}+\left(1-\lambda_2\right)\left(1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right)^{3\alpha}\right]}$$

(5.3)

şeklindedir. Belirli parametre değerleri için KSDKw dağılımına ilişkin oyf ve hf grafikleri sırasıyla Şekil 5.1-5.2' de verilmiştir.



Şekil 5.1. Farklı parametre değerleri için KSDGG dağılımının oyf



Şekil 5.2. Farklı parametre değerleri için KSDGG dağılımına ilişkin hf

Şekil 5.2 incelendiğinde KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının hazard fonksiyonunun artan, azalan, küvet eğrisi ve ters küvet eğrisi şeklinde olduğu görülmektedir. Bu durum KSDGG dağılımının esnek bir yapıya sahip olduğunu ve bozulma oranı bu yapılarda olan verileri modelleyebilme potansiyeli olduğunu göstermektedir.

5.1. Bazı Dağılımsal Özellikler

Bu bölümde KSDGG$(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının $r.$ momenti, moment üreten fonksiyonu ve sıra istatistiklerinin dağılımı verilecektir.

X , KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. X rasgele değişkeninin $r.$ momenti aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} E\left(X^r\right) &= \int_0^{\infty} x^r g\left(x\right)\left[\lambda_1 + 2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)G\left(x\right)+3\left(1-\lambda_2\right)G^2\left(x\right)\right]dx \\ &= \lambda_1 I_1 + 2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)I_2 + 3\left(1-\lambda_2\right)I_3 \end{aligned} \tag{5.4}$$

burada $G\left(x\right)$ve $g\left(x\right)$ Bölüm 3.4.5'de tanımlandığı gibidir.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} x^r g\left(x\right)dx \\ &= \int_0^{\infty} x^r \alpha a e^{bx} e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1} dx \end{aligned} \tag{5.5}$$

biçimindedir. Eşitlik 5.5' in sağında yer alan $\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1}$ ifadesi binom açılımı yardımı ile tekrar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{\alpha-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{j}(-1)^{j}\,e^{-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)j} \tag{5.6}$$

Eşitlik 5.6, Eşitlik 5.5' de yerine konulursa I_1 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_1=\alpha a\Gamma\left(r+1\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{j}\frac{(-1)^{j+k+r+1}\,e^{\frac{a}{b}(j+1)}\,b^{-(k+r+1)}}{\Gamma\left(k+1\right)\left[a\left(j+1\right)\right]^{-k}\left(k+1\right)^{r+1}},$$

burada $r=1,2,...$ ve $\Gamma(.)$ Gamma fonksiyonudur (El-Gohary ve ark., 2013). Benzer şekilde I_2 ve I_3 sırasıyla;

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\infty}x^{r}g\left(x\right)G\left(x\right)dx=\int_0^{\infty}x^{r}\alpha a e^{bx}e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{2\alpha-1}dx\\&=2\alpha a\Gamma\left(r+1\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2\alpha-1}{j}\frac{(-1)^{j+k+r+1}\,e^{\frac{a}{b}(j+1)}\,b^{-(k+r+1)}}{\Gamma\left(k+1\right)\left[a\left(j+1\right)\right]^{-k}\left(k+1\right)^{r+1}},\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{\infty}x^{r}g\left(x\right)G\left(x\right)^{2}dx=\int_0^{\infty}x^{r}\alpha a e^{bx}e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\left[1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}\right]^{3\alpha-1}dx\\&=3\alpha a\Gamma\left(r+1\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3\alpha-1}{j}\frac{(-1)^{j+k+r+1}\,e^{\frac{a}{b}(j+1)}\,b^{-(k+r+1)}}{\Gamma\left(k+1\right)\left[a\left(j+1\right)\right]^{-k}\left(k+1\right)^{r+1}},\end{aligned} \tag{5.9}$$

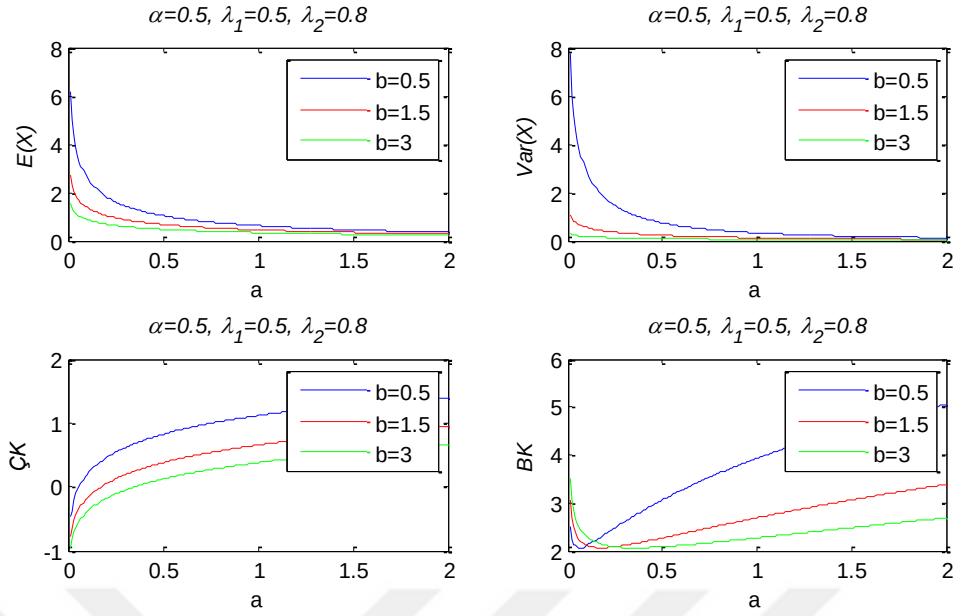
şeklindedir. Eşitlik 5.6, 5.7 ve 5.8, Eşitlik 5.5'de yerlerine konulursa *r*. moment aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E\left(X^{r}\right)=\lambda_1\omega_{j,k,r}\left(1,\alpha,a,b\right)+2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\omega_{j,k,r}\left(2,\alpha,a,b\right)+3\left(1-\lambda_2\right)\omega_{j,k,r}\left(3,\alpha,a,b\right) \tag{5.10}$$

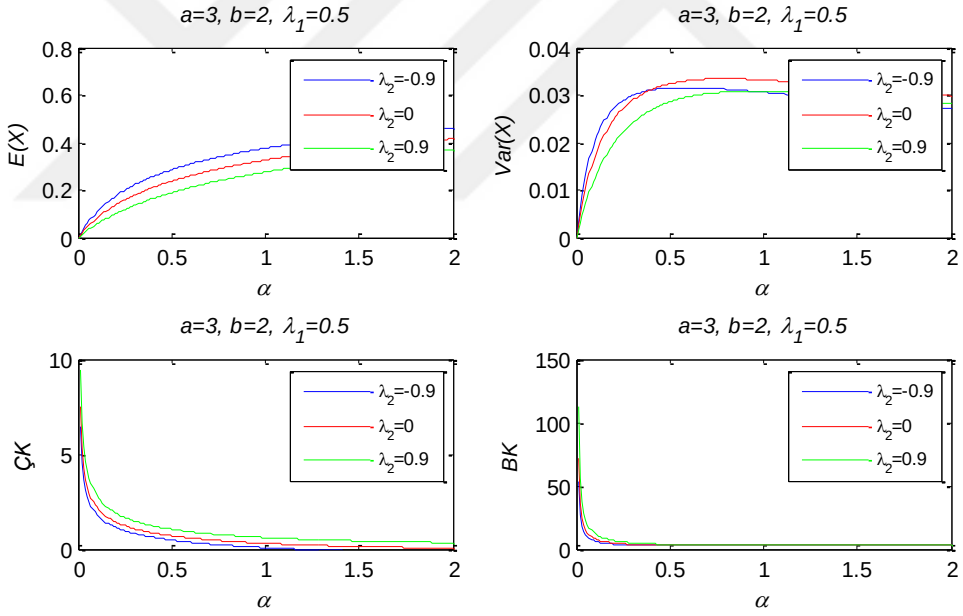
Burada $\omega_{j,k,r}\left(m,\alpha,a,b\right)=m\alpha a\Gamma\left(r+1\right)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m\alpha-1}{j}\frac{(-1)^{j+k+r+1}\,e^{\frac{a}{b}(j+1)}\,b^{-(k+r+1)}}{\Gamma\left(k+1\right)\left[a\left(j+1\right)\right]^{-k}\left(k+1\right)^{r+1}}$,

$m=1,2,3,\ r=1,2,...,$ ve $\Gamma(.),$ gamma fonksiyonudur.

Eşitlik 5.10 'da verilen *r*. moment yardımı ile elde edilen KSDGG dağılımının beklenen değer, varyans, ÇK ve BK 'na ilişkin grafikler Şekil 5.3-5.4'de verilmiştir.



Şekil 5.3 $a \in [0,2], b = 0.5, 1.5, 3, \alpha = 0.5, \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.8$ değerleri için KSDGG dağılımına ilişkin beklenen değer, varyans, ÇK, BK



Şekil 5.4. $a = 3, b = 2, 1.5, 3, \alpha \in [0,2], \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -0.9, 0, 0.9$ değerleri için KSDGG dağılımına ilişkin beklenen değer, varyans, ÇK, BK

Şekil 5.3-5.4'e göre a parametresi arttıkça beklenen değer ve varyans azalırken ÇK artmaktadır. Ayrıca α parametresinin değerindeki bir artış beklenen değer ve varyans değerinde bir artışa, ÇK ve BK'nın değerinde bir azalışa neden olmaktadır.

KSDGG$(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımına ilişkin moment üreten fonksiyonu $M_X(t)$ aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\int_0^\infty x^r f(x)dx \\ &= \lambda_1\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\omega_{j,k,r}(1,\alpha,a,b) + 2(\lambda_2-\lambda_1)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\omega_{j,k,r}(2,\alpha,a,b) \\ &\quad + 3(1-\lambda_2)\omega_{j,k,r}(3\alpha-1,a,b) \end{aligned} \tag{5.11}$$

$X_1, X_2, ..., X_n$, KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımından alınan rasgele bir örneklem olsun ve $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ bu rasgele örnekleme ait sıra istatistiklerini ifade etsin. Bu durumda $j.$ sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{X_{(j)}}$,

$$\begin{aligned} f_{X_{(j)}}(x) &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\alpha a e^{bx}(1-w(x,a,b))\left[w(x,a,b)\right]^{\alpha-1} \\ &\times\left[\lambda_1 + 2(\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{\alpha} + 3(1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{2\alpha}\right] \\ &\times\left[\lambda_1(w(x,a,b))^{\alpha} + (\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{2\alpha} + (1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{3\alpha}\right]^{j-1} \\ &\times\left[1-\left(\lambda_1(w(x,a,b))^{\alpha} + (\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{2\alpha} + (1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{3\alpha}\right)\right]^{n-j} \end{aligned} \tag{5.12}$$

şeklindedir. Burada $j = 1, ..., n$ 'dir. j 'nin 1 ve n değerlerini alması durumunda oluşan KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının minimum ve maksimum sıra istatistikleri $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda sırasıyla verilmiştir.

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= \alpha a e^{bx}(1-w(x,a,b))\left[w(x,a,b)\right]^{\alpha-1} \\ &\times\left[\lambda_1 + 2(\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{\alpha} + 3(1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{2\alpha}\right] \\ &\times\left[1-\left(\lambda_1(w(x,a,b))^{\alpha} + (\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{2\alpha} + (1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{3\alpha}\right)\right]^{n-1} \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(x) &= \alpha a e^{bx}(1-w(x,a,b))\left[w(x,a,b)\right]^{\alpha-1} \\ &\times\left[\lambda_1 + 2(\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{\alpha} + 3(1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{2\alpha}\right] \\ &\times\left[\lambda_1(w(x,a,b))^{\alpha} + (\lambda_2-\lambda_1)(w(x,a,b))^{2\alpha} + (1-\lambda_2)(w(x,a,b))^{3\alpha}\right]^{n-1} \end{aligned} \tag{5.14}$$

burada $w(x,a,b)=1-e^{\left(-\frac{a}{b}\left(e^{bx}-1\right)\right)}$ dir.

5.2. Nokta Tahmini

Bu bölümde KSDGG dağılımının bilinmeyen $a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2$ parametrelerinin EÇO, EKK ve MÇA tahmin edicileri verilecektir.

5.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1,X_2,...,X_n$, KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımından alınan rasgele bir örneklem olsun. Bu dağılıma ilişkin Log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 5.15'de verilmiştir.

$$\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})=n\log\alpha+n\log a+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{bx_i}-1\right)+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left[1-e^{-\frac{a}{b}\left(e^{bx_i}-1\right)}\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\log\left[\lambda_1+2(\lambda_2-\lambda_1)\left(1-e^{-\frac{a}{b}\left(e^{bx_i}-1\right)}\right)^{\alpha}+3(1-\lambda_2)\left(1-e^{-\frac{a}{b}\left(e^{bx_i}-1\right)}\right)^{2\alpha}\right] \tag{5.15}$$

$\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})$ fonksiyonunun a,b,α,λ_1 ve λ_2 parametrelerine göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenerek oluşturulan doğrusal olmayan olabilirlik denklemlerinin eş zamanlı çözümü ile a,b,α,λ_1 ve λ_2 parametrelerin EÇO tahmin edicileri elde edilir.

$$\frac{\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial a}=\frac{n}{a}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{bx_i}-1\right)}{b}+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(e^{bx_i}-1\right)e^{-\frac{a\left(e^{bx_i}-1\right)}{b}}}{bw(x_i,a,b)}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha w(x_i,a,b)^{\alpha-1}\left(e^{bx_i}-1\right)e^{-\frac{a\left(e^{bx_i}-1\right)}{b}}h(x_i,a,b,\lambda_1,\lambda_2)}{b\left(\lambda_1+k(x_i,a,b,\lambda_1,\lambda_2)\right)} \tag{5.16}$$

$$\frac{\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{a}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{bx_i}-1\right)-\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n}x_ie^{bx_i}$$
$$-(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{a}{b^2}\left(e^{x_i}-1\right)-\frac{a}{b}x_ie^{bx_i}\right)e^{-\frac{a\left(e^{bx_i}-1\right)}{b}}}{w(x_i,a,b)}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha w(x_i,a,b)^{\alpha-1}\left(\frac{a}{b^2}\left(e^{x_i}-1\right)-\frac{a}{b}x_ie^{bx_i}\right)e^{-\frac{a\left(e^{bx_i}-1\right)}{b}}h(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda_1+k(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)} \tag{5.17}$$

$$\frac{\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha\log\left(w(x_i,a,b)\right)w(x_i,a,b)^{\alpha}\,h(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda_1+k(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)} \tag{5.18}$$

$$\frac{\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial\lambda_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-2w(x_i,a,b)^{\alpha}}{\lambda_1+k(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)} \tag{5.19}$$

$$\frac{\ell(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\,|\,\mathbf{x})}{\partial\lambda_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2w(x_i,a,b)^{\alpha}-3(1-\lambda_2)w(x_i,a,b)^{2\alpha}}{\lambda_1+k(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)} \tag{5.20}$$

Burada

$$w(x_i,a,b)=\left(1-e^{-\frac{a\left(e^{bx_i}-1\right)}{b}}\right),$$

$$k(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=2(\lambda_2-\lambda_1)w(x_i,a,b)^{\alpha}+3(1-\lambda_2)w(x_i,a,b)^{2\alpha}$$

ve

$$h(x_i,a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=2(\lambda_2-\lambda_1)+6(1-\lambda_2)w(x_i,a,b)^{\alpha}$$

şeklindedir. Eşitlik 5.16-5.20' de yer alan olabilirlik denklemlerinin eş zamanlı çözümünü elde etmek için numerik yöntemlerden yararlanılır.

5.2.2. En Küçük Kareler Tahmini

$X_1,X_2,...,X_n$, KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımından alınan örneklem ve $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ bu örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. Bölüm 3.2.2 den a,b,α,λ_1 ve λ_2 parametrelerinin EKK tahmin edicileri, $\hat{a}_{EKK},\hat{b}_{EKK},\hat{\alpha}_{EKK},\hat{\lambda}_{1_{EKK}},\hat{\lambda}_{2_{EKK}}$, Eşitlik 5.21 minimize edilerek bulunur.

$$Z(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{n}\left[F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right]^2 \tag{5.21}$$

$\hat{a}_{EKK},\hat{b}_{EKK},\hat{\alpha}_{EKK},\hat{\lambda}_{1_{EKK}}$ ve $\hat{\lambda}_{2_{EKK}}$ Eşitlik 5.22-5.26'de yer alan denklem sisteminin eş zamanlı çözümü ile elde edilir.

$$\frac{\partial Z(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}F_a'\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial Z(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}F_b'\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial Z(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n}F_\alpha'\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial Z(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=\sum_{i=1}^{n}F_{\lambda_1}'\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial Z\left(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}{\partial\lambda_2}=\sum_{i=1}^{n}F'_{\lambda_2}\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \qquad (5.26)$$

Yukarıdaki doğrusal olmayan denklem sistemini eş zamanlı çözmek için nümerik yöntemler kullanılır.

5.2.3. Maksimum Çarpımsal Aralık Tahmini

Bölüm 3.2.3 den KSDGG dağılımının $a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2$ parametreleri için MÇA tahmin edicileri

$$LogGO=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\log\left[F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)\right] \qquad (5.27)$$

fonksiyonunun a,b,α,λ_1 ve λ_2 'ye göre minimize edilmesi ile elde edilir.

$$\frac{\partial LogGM}{\partial a}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{F'_a\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F'_a\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}{F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}\right]=0 \qquad (5.28)$$

$$\frac{\partial LogGM}{\partial b}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{F'_b\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F'_b\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}{F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}\right]=0 \qquad (5.29)$$

$$\frac{\partial LogGM}{\partial \alpha}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{F'_\alpha\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F'_\alpha\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}{F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}\right]=0 \qquad (5.30)$$

$$\frac{\partial LogGM}{\partial \lambda_1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{F'_{\lambda_1}\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F'_{\lambda_1}\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}{F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}\right]=0 \qquad (5.31)$$

$$\frac{\partial LogGM}{\partial \lambda_2}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{F'_{\lambda_2}\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F'_{\lambda_2}\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}{F\left(x_{(i)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)-F\left(x_{(i-1)},a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)}\right]=0 \qquad (5.32)$$

5.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, KSDGG $\left(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2\right)$ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin EÇO, EKK, MÇA tahmin edicilerinin HKO ve yan açısından performanslarını değerlendirebilmek amacı ile bir Monte-Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar alınmıştır. Örnek hacimleri 50,100,200,500,1000 şeklinde olup parametrelerin başlangıç değerleri; $\left(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8\right)$, $\left(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9\right)$, $\left(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95\right)$ olarak alınmıştır.

Çizelge 5.1. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumu için yan değerleri

Tahmin Edici	n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.0321	-0.0599	0.5430	0.2232	-1.0787
	100	0.0162	-0.0647	0.4844	0.1759	-1.0115
	200	-0.0231	-0.0536	0.4304	0.1374	-0.8210
	500	-0.0743	-0.0343	0.3652	0.0773	-0.5401
	1000	-0.1012	-0.0230	0.3252	0.0391	-0.3822
EKK	50	-0.0209	0.0033	0.4082	0.2334	-1.1105
	100	0.0366	-0.0588	0.5521	0.2272	-1.0719
	200	0.0282	-0.0693	0.5713	0.2064	-0.9282
	500	-0.0235	-0.0547	0.5102	0.1548	-0.6538
	1000	-0.0660	-0.0378	0.4225	0.0939	-0.4776
MÇA	50	0.0460	-0.0978	0.3181	0.2056	-1.3984
	100	0.0239	-0.0869	0.3334	0.1490	-1.2245
	200	-0.0189	-0.0671	0.3132	0.0961	-0.9864
	500	-0.0712	-0.0420	0.2779	0.0322	-0.6733
	1000	-0.0988	-0.0280	0.2556	-0.0028	-0.4917

Çizelge 5.2. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumu için HKO değerleri

Tahmin Edici	n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.0409	0.0163	0.5757	0.0973	1.2893
	100	0.0265	0.0114	0.4345	0.0789	1.1596
	200	0.0163	0.0073	0.3235	0.0666	0.7981
	500	0.0131	0.0035	0.2170	0.0438	0.3767
	1000	0.0144	0.0019	0.1612	0.0303	0.2026
EKK	50	0.0722	0.0365	0.7052	0.1137	1.5127
	100	0.0573	0.0216	0.7489	0.1113	1.3943
	200	0.0410	0.0158	0.6680	0.1058	1.0866
	500	0.0214	0.0090	0.4499	0.0811	0.5872
	1000	0.0172	0.0054	0.3067	0.0558	0.3483
MÇA	50	0.0462	0.0229	0.3198	0.0748	2.0247
	100	0.0294	0.0153	0.2933	0.0610	1.5884
	200	0.0176	0.0093	0.2381	0.0505	1.0598
	500	0.0133	0.0042	0.1693	0.0356	0.5177
	1000	0.0143	0.0022	0.1292	0.0277	0.2889

Çizelge 5.3. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumu için yan değerleri

Tahmin Edici	n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.2602	-0.1987	0.9641	0.3335	-1.2354
	100	0.2303	-0.2072	0.7794	0.2761	-1.1564
	200	0.1608	-0.1750	0.6140	0.2181	-0.9805
	500	0.0659	-0.1173	0.4259	0.1413	-0.6959
	1000	0.0159	-0.0820	0.3283	0.0958	-0.5322
EKK	50	0.1172	0.0874	0.6768	0.3256	-1.1893
	100	0.2418	-0.1362	0.9616	0.3289	-1.1746
	200	0.2638	-0.2070	0.9988	0.3173	-1.0751
	500	0.1667	-0.1727	0.7610	0.2387	-0.7911
	1000	0.0911	-0.1289	0.5804	0.1798	-0.5991
MÇA	50	0.2511	-0.2397	0.5417	0.3181	-1.5686
	100	0.2201	-0.2273	0.5088	0.2549	-1.3985
	200	0.1516	-0.1843	0.4213	0.1904	-1.1800
	500	0.0609	-0.1217	0.2910	0.1103	-0.8793
	1000	0.0133	-0.0848	0.2241	0.0678	-0.7003

Çizelge 5.4. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumu için HKO değerleri

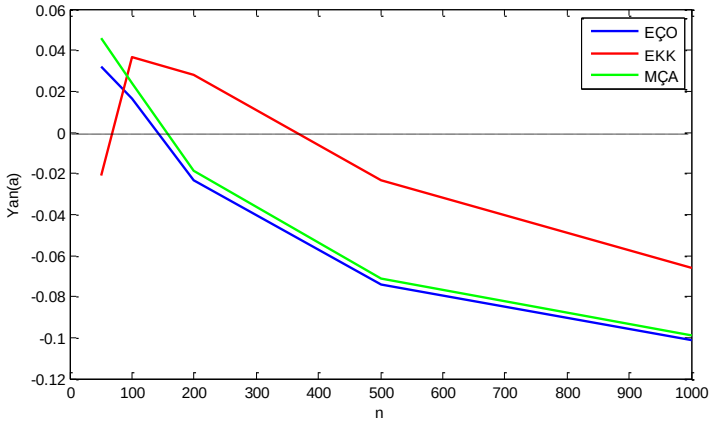
Tahmin Edici	n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.1657	0.0915	2.1528	0.1489	1.6457
	100	0.1190	0.0757	1.2497	0.1114	1.4731
	200	0.0670	0.0531	0.7672	0.0796	1.0936
	500	0.0229	0.0270	0.3812	0.0446	0.5915
	1000	0.0101	0.0148	0.2378	0.0296	0.3696
EKK	50	0.2007	0.3030	2.7224	0.1657	1.6814
	100	0.2176	0.1421	2.9003	0.1662	1.6324
	200	0.1794	0.1022	2.2656	0.1564	1.3828
	500	0.0851	0.0610	1.2040	0.1053	0.7987
	1000	0.0410	0.0376	0.7057	0.0719	0.4896
MÇA	50	0.1671	0.1138	1.0984	0.1220	2.5090
	100	0.1182	0.0878	0.7725	0.0900	2.0260
	200	0.0666	0.0588	0.5275	0.0616	1.4679
	500	0.0233	0.0290	0.2803	0.0317	0.8440
	1000	0.0106	0.0158	0.1828	0.0208	0.5623

Çizelge 5.5. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumu için yan değerleri

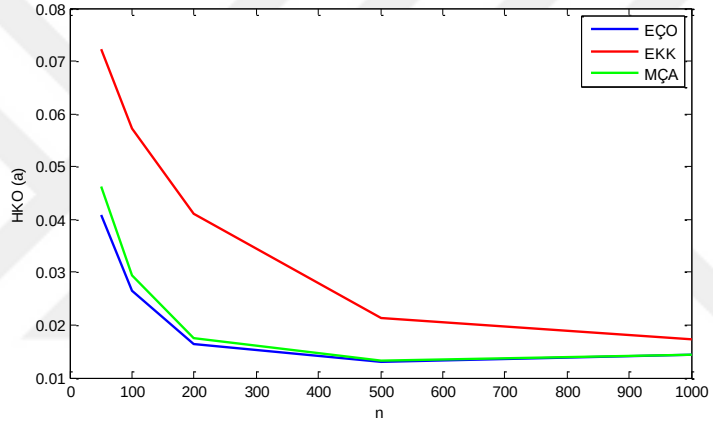
Tahmin Edici	n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.1635	-0.4916	0.7560	0.0093	-1.2796
	100	0.0728	-0.4879	0.6872	-0.0102	-1.1887
	200	-0.0588	-0.4254	0.6541	-0.0053	-1.0061
	500	-0.2457	-0.3019	0.6064	-0.0041	-0.7150
	1000	-0.3440	-0.2300	0.5666	-0.0198	-0.5398
EKK	50	-0.0832	-0.1309	0.5518	0.0143	-1.1592
	100	-0.0102	-0.3346	0.6266	0.0016	-1.0977
	200	-0.0746	-0.3590	0.6324	0.0060	-0.9767
	500	-0.2241	-0.2840	0.6077	0.0039	-0.7409
	1000	-0.3396	-0.2109	0.5352	-0.0460	-0.5682
MÇA	50	0.1883	-0.6191	0.5227	-0.0467	-1.5131
	100	0.0842	-0.5603	0.5315	-0.0719	-1.3355
	200	-0.0580	-0.4638	0.5354	-0.0789	-1.1006
	500	-0.2406	-0.3271	0.5291	-0.0751	-0.7699
	1000	-0.3347	-0.2516	0.5156	-0.0768	-0.5794

Çizelge 5.6. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumu için HKO değerleri

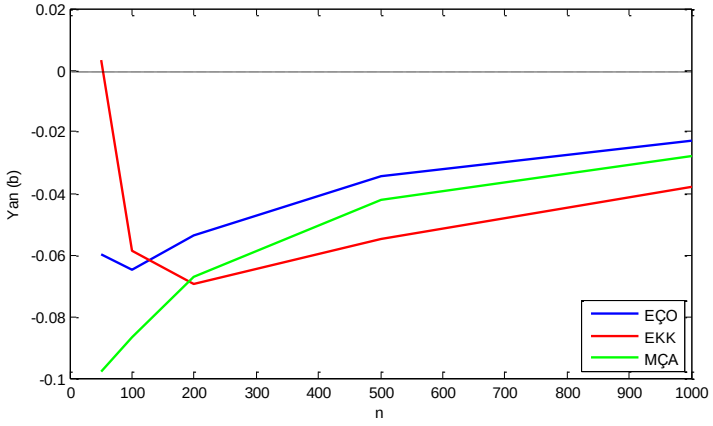
Tahmin Edici	n	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.3438	0.4715	0.8050	0.0540	1.1756
	100	0.2046	0.3706	0.6275	0.0577	1.5504
	200	0.1255	0.2656	0.5309	0.0547	1.1453
	500	0.1172	0.1380	0.4196	0.0440	0.5996
	1000	0.1494	0.0828	0.3500	0.0332	0.3497
EKK	50	0.5321	0.6306	0.5901	0.0523	1.6162
	100	0.3963	0.4467	0.6192	0.0539	1.4632
	200	0.2646	0.3299	0.5519	0.0552	1.1792
	500	0.1895	0.2012	0.4605	0.0526	0.7075
	1000	0.1924	0.1204	0.3482	0.0518	0.4328
MÇA	50	0.3763	0.6164	0.4642	0.0399	2.3755
	100	0.2224	0.4524	0.4334	0.0536	1.8915
	200	0.1375	0.3089	0.4049	0.0604	1.3241
	500	0.1188	0.1568	0.3489	0.0551	0.6708
	1000	0.1444	0.0937	0.3067	0.0446	0.3884



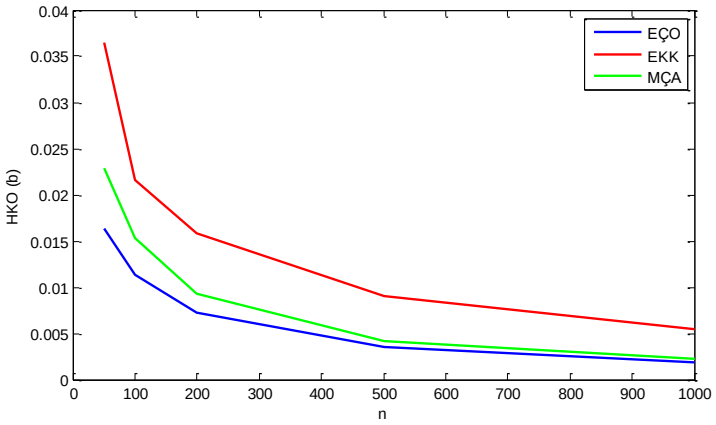
Şekil 5.3. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda a parametresi için yan



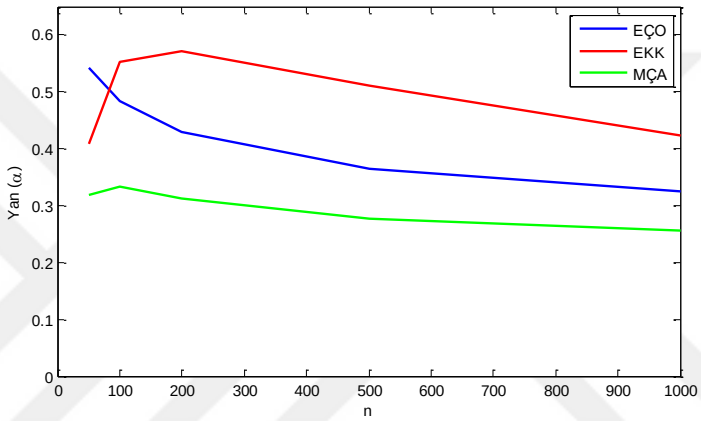
Şekil 5.4. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda a parametresi için HKO



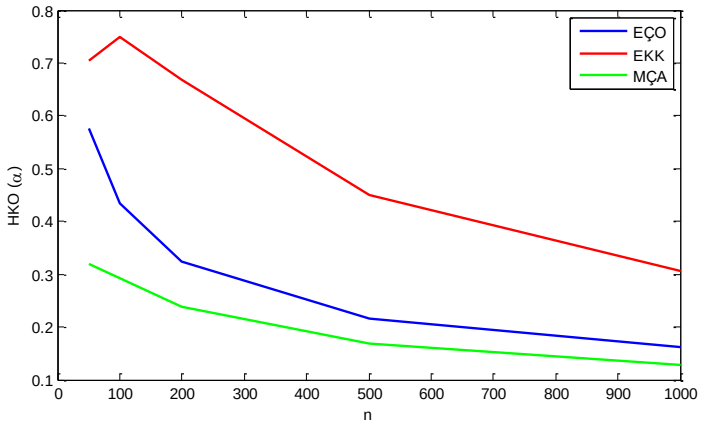
Şekil 5.5. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda b parametresi için yan



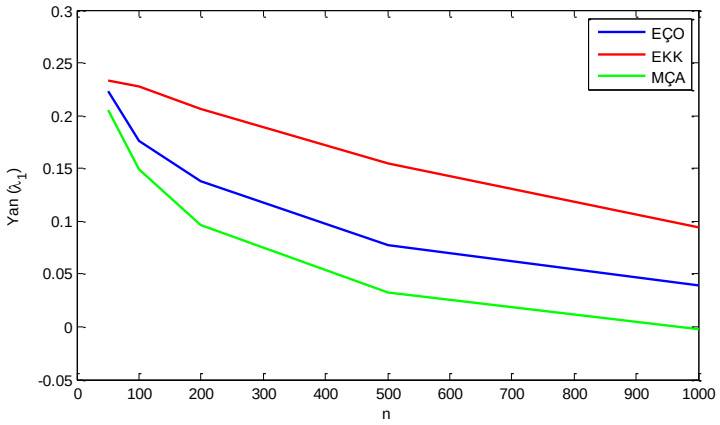
Şekil 5.6. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda b parametresi için HKO



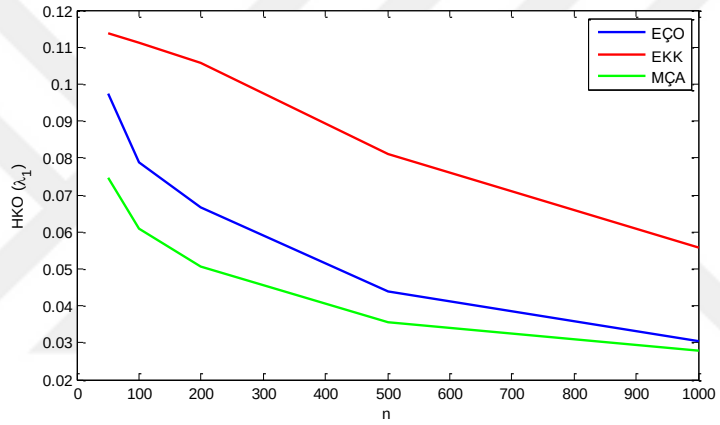
Şekil 5.7. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda α parametresi için yan



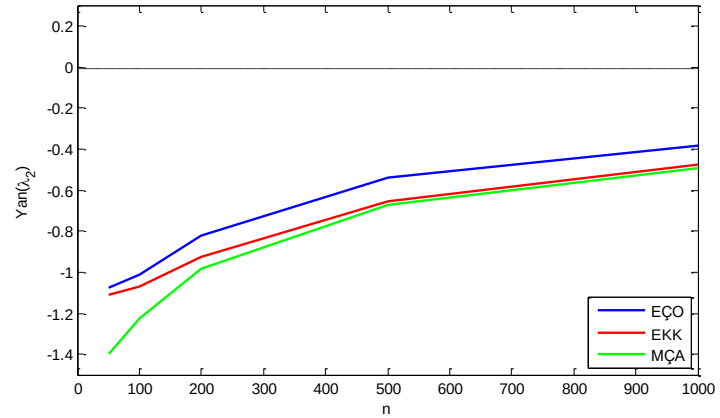
Şekil 5.8. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda α parametresi için HKO



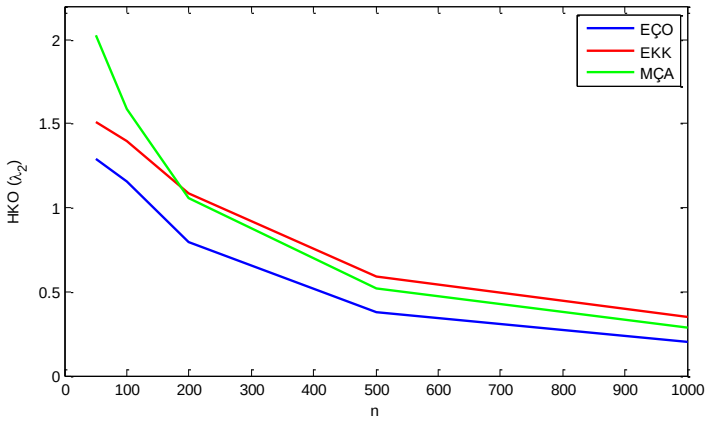
Şekil 5.9. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



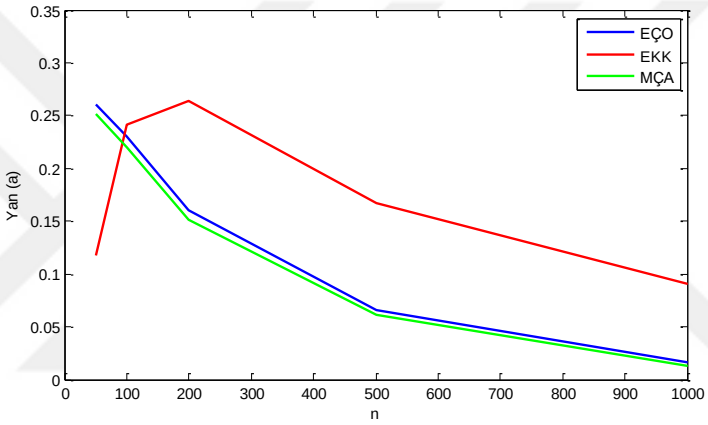
Şekil 5.10. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



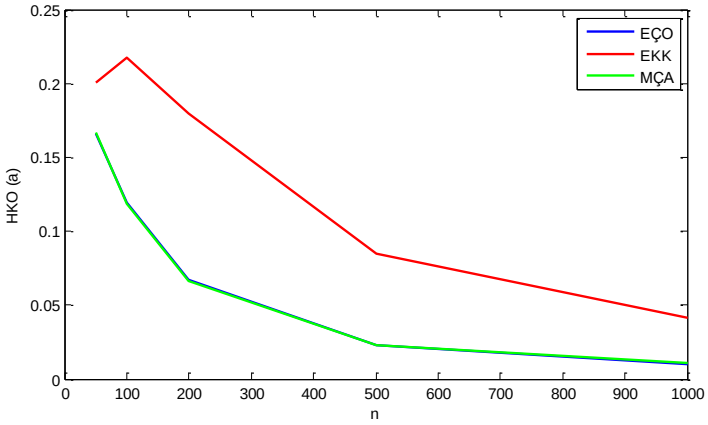
Şekil 5.11. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



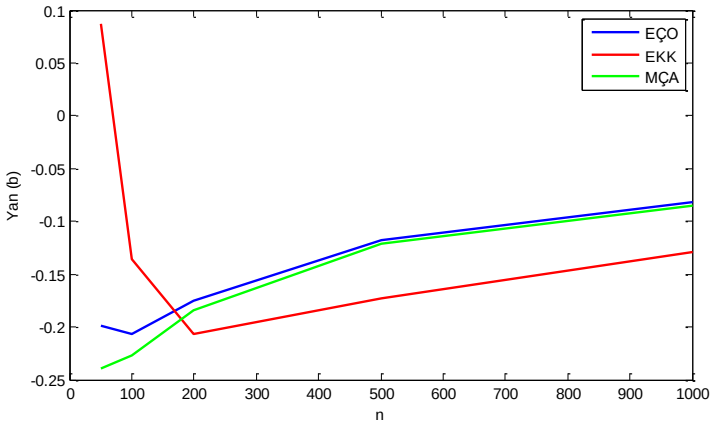
Şekil 5.12. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO



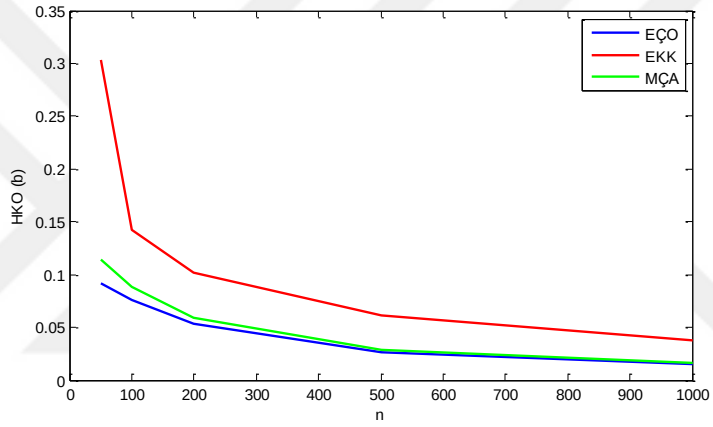
Şekil 5.13. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda a parametresi için yan



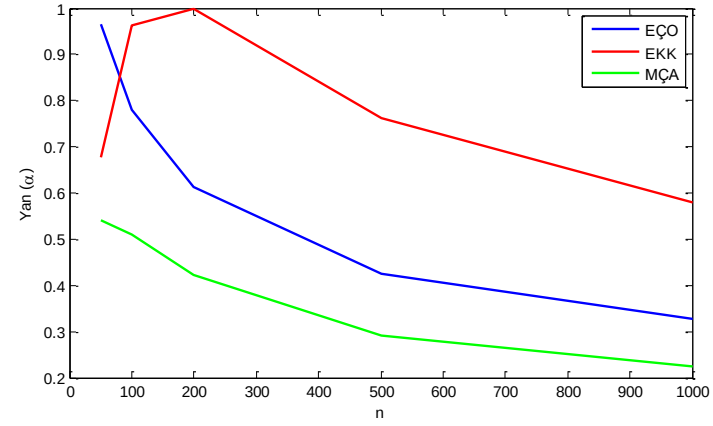
Şekil 5.14. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda a parametresi için HKO



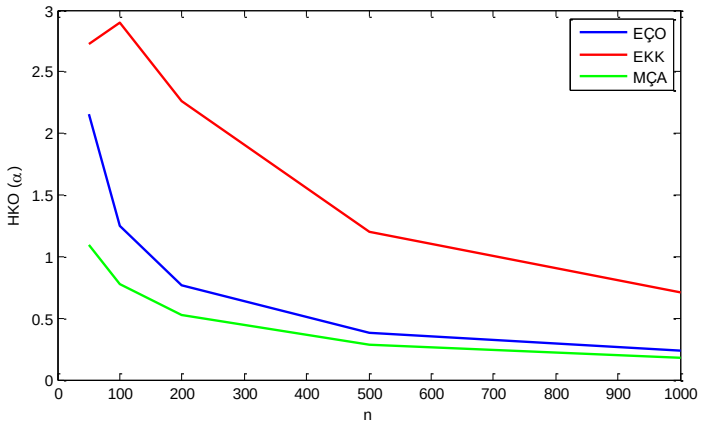
Şekil 5.15. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda b parametresi için yan



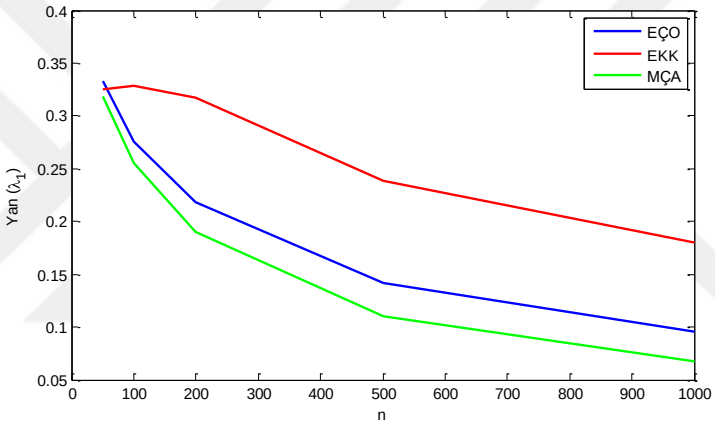
Şekil 5.16. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda b parametresi için HKO



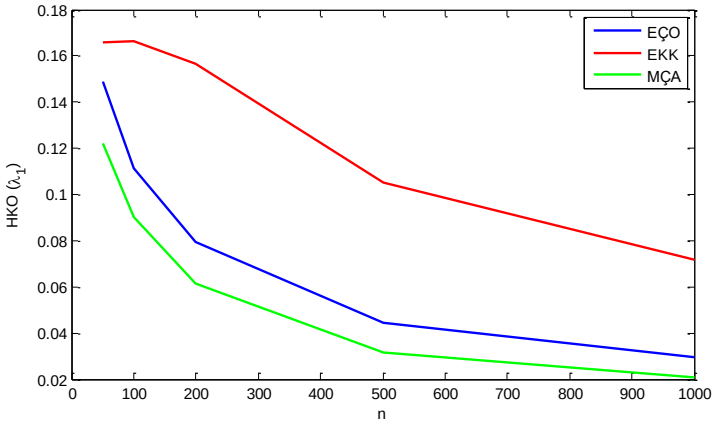
Şekil 5.17. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda α parametresi için yan



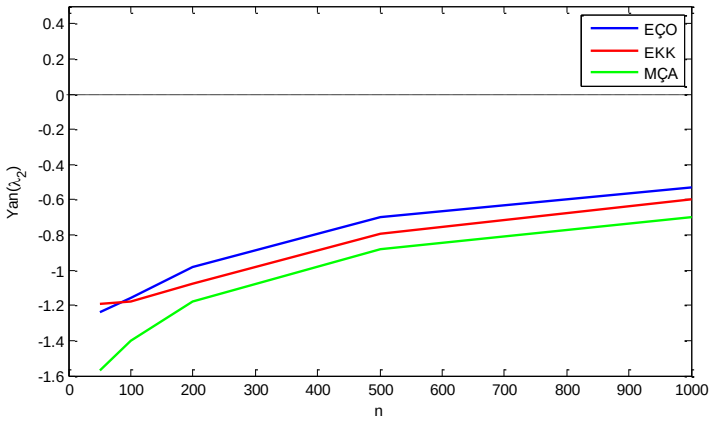
Şekil 5.18. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda α parametresi için HKO



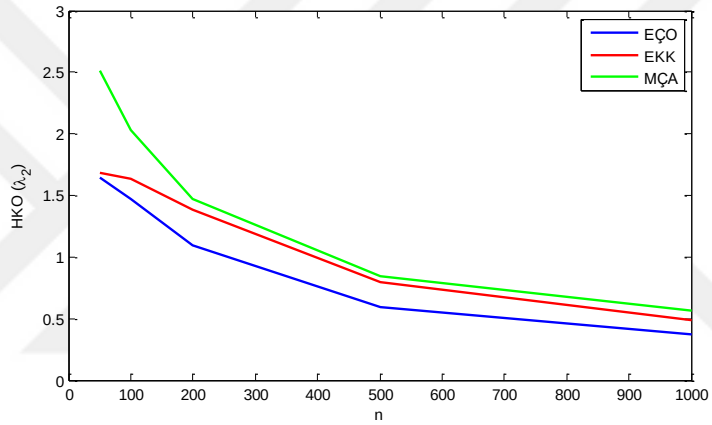
Şekil 5.19. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



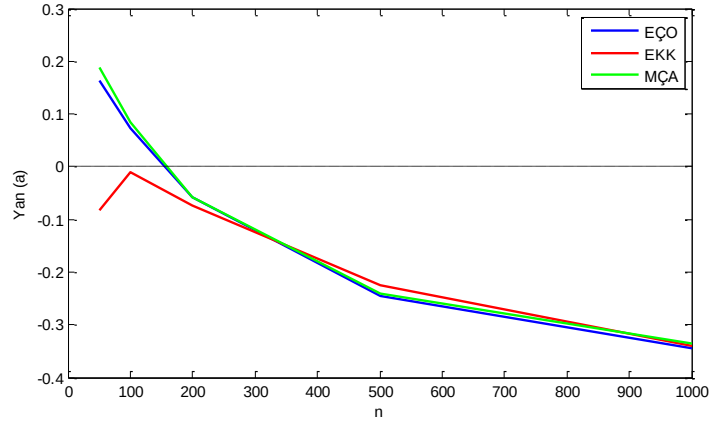
Şekil 5.20. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



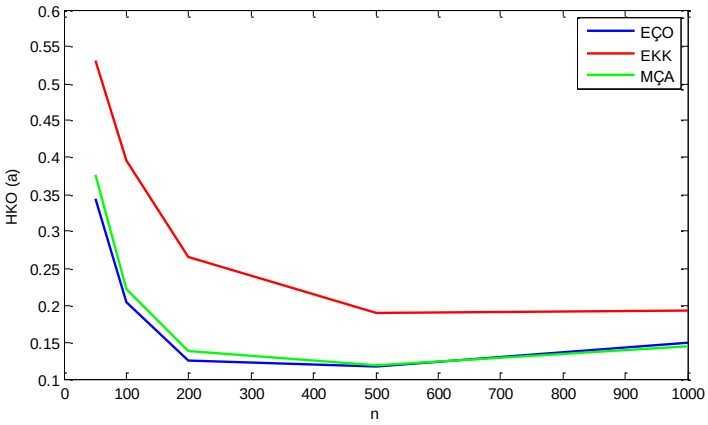
Şekil 5.21. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



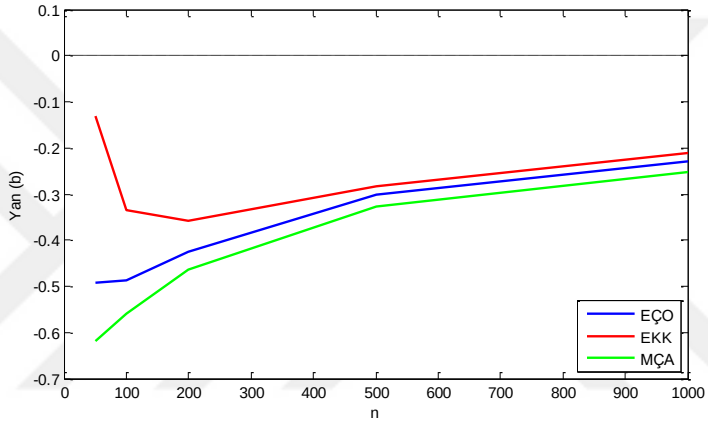
Şekil 5.22. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO



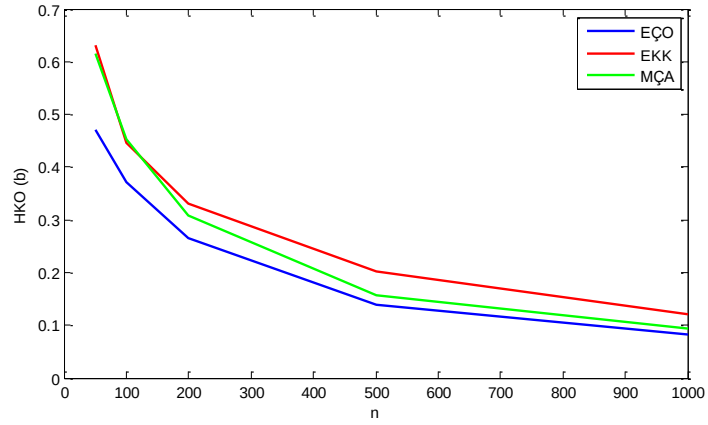
Şekil 5.23. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda a parametresi için yan



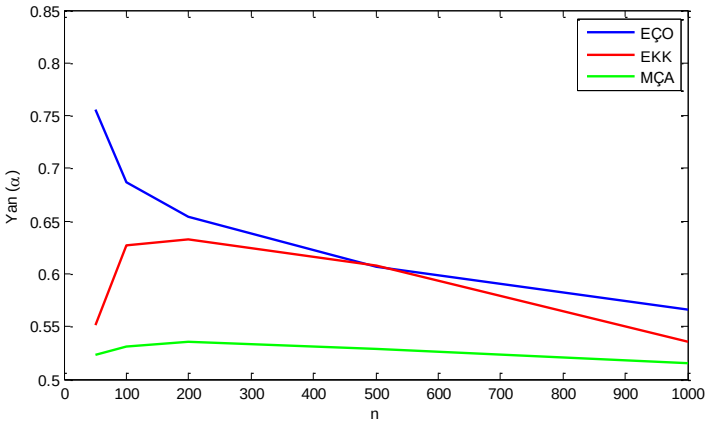
Şekil 5.24. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda a parametresi için HKO



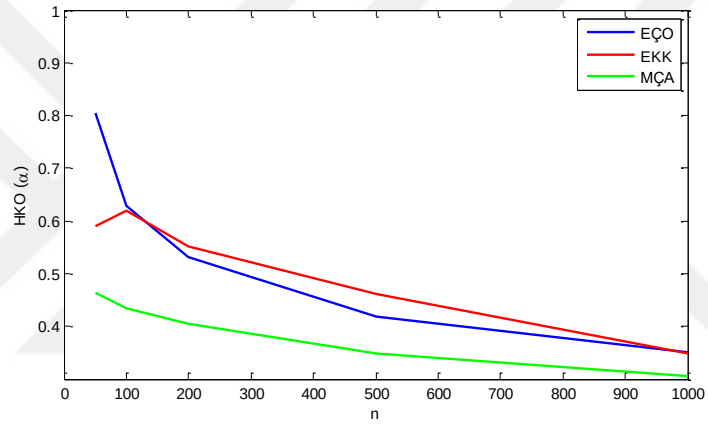
Şekil 5.25. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda b parametresi için yan



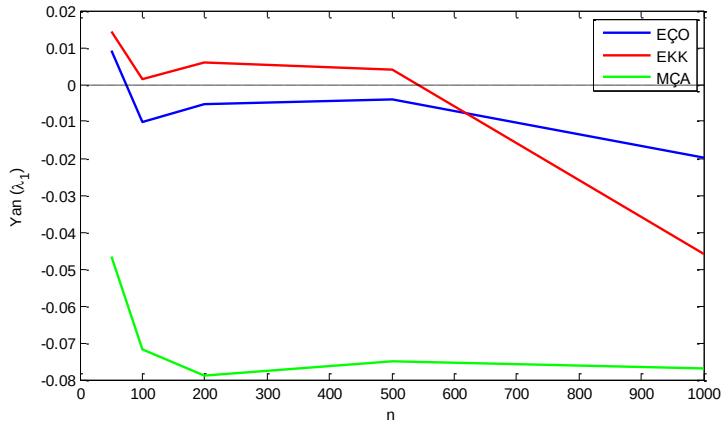
Şekil 5.26. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda b parametresi için HKO



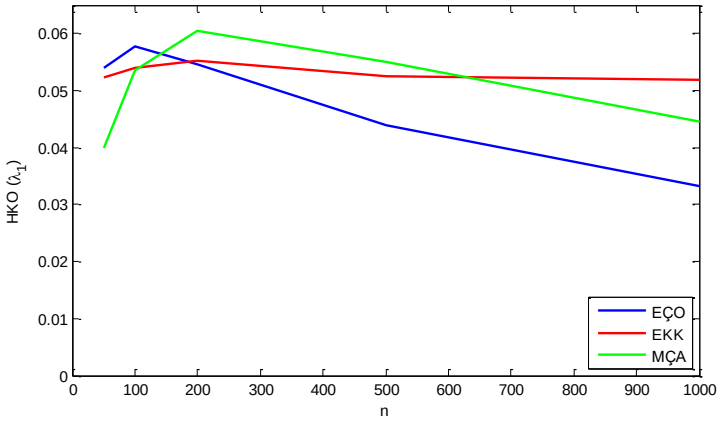
Şekil 5.27. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda α parametresi için yan



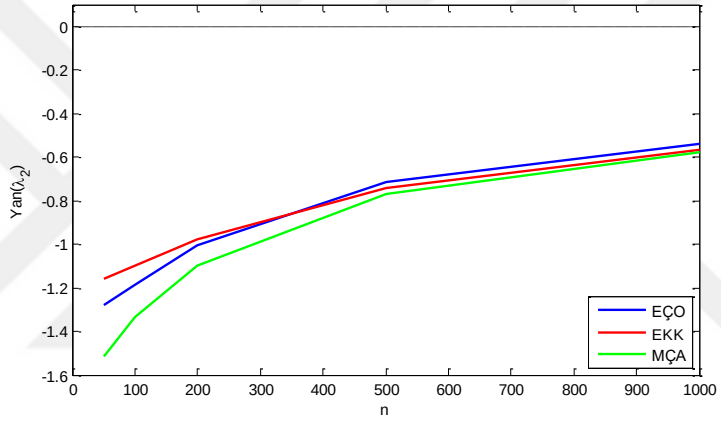
Şekil 5.28. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda α parametresi için HKO



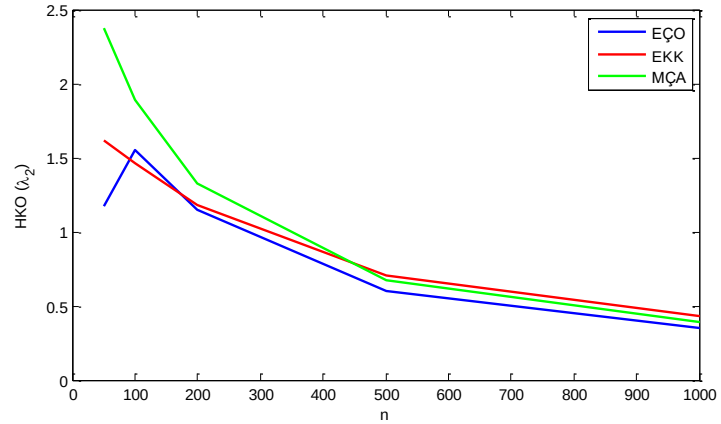
Şekil 5.29. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



Şekil 5.30. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



Şekil 5.31. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



Şekil 5.32. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO

KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametrelerinin EÇO, EKK ve MÇA tahmin edicilerinin yan ve HKO kriterlerine göre performanslarını karşılaştırmak için yapılan Monte Carlo simülasyon çalışmaları sonuçlarına göre $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.7,0.3,0.8)$ durumunda; HKO ve yan değerlerinin örnek büyüklüğü arttıkça beklenildiği gibi azaldığı görülmüştür. Örnek büyüklüğü arttıkça tahmin edicilerinin HKO değerlerinin sıfıra ve birbirine yaklaştığı görülmüştür. a,b ve λ_2 parametreleri için EÇO, α ve λ_1 parametreleri için ise MÇA tahmin edicilerinin HKO değerleri en küçüktür. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(0.4,0.7,0.8,0.1,0.9)$ durumunda; örnek sayısı arttıkça tüm parametrelerin tüm tahmin edicilerinin HKO ve yan değerlerinin düzenli bir şekilde azaldığı ve sıfıra yaklaştığı söylenebilir. Bu parametre durumu diğer iki farklı parametre durumu ile kıyaslandığında daha tutarlı sonuçlar vermiştir. $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda; tüm tahmin edicilerin HKO değerlerinin örnek büyüklüğü 50-500 arasında iken arttıkça düzenli olarak azaldığı ancak örneklem sayısı 1000 iken 500 birimlik örneğe göre yapılan tahminlere göre daha yüksek HKO değerine sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum özellikle a parametresi için yapılan tahminlerde belirgin bir şekilde görülmektedir. Bu beklenmedik sonuç simülasyondan kaynaklı bir problem olarak yorumlanacağı gibi tahmin yapılırken büyük örnek sayılarında parametreye bağlı olarak yapılan hesaplamalardaki güçlük nedeniyle de meydana gelebilmektedir. α parametresi için MÇA, diğer parametreler için ise EÇO yöntemi ile yapılan tahminler daha tutarlı sonuçlar vermiştir.

5.4. Gerçek Veri Uygulaması

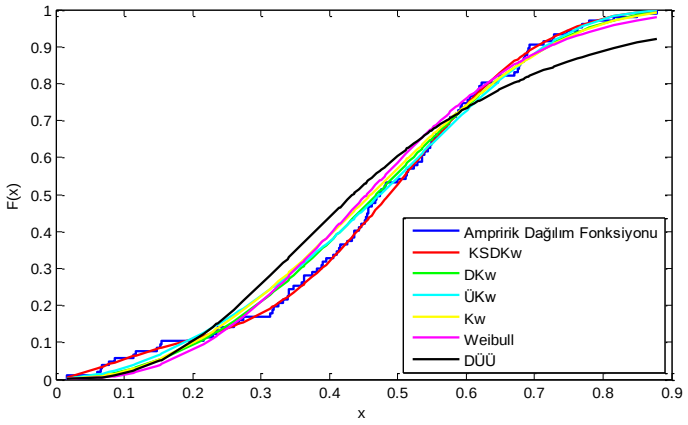
Bu bölümde KSDGG$(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının gerçek hayatta uygulanabilirliğini göstermek amacı ile iki gerçek veri uygulamasına yer verilmiştir. İlk olarak Çizelge 4.6' da verilen süt üretimi verisi kullanılmıştır. Süt üretimi verisi KSDGG, DGG, GG, G, DW, Weibull, DÜÜ gibi bazı istatistiksel dağılımlar ile analiz edilmiştir. Bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin EÇO tahminleri ve bu değerlere ilişkin standart hatalar ve bu dağılımların süt üretimi verisine uyumunu karşılaştırmak için kullanılan istatistikler Çizelge 5.7-5.8' de sırasıyla verilmiştir. Ayrıca uydurulan df ve oyf grafikleri Şekil 5.33 ve Şekil 5.34' de sırası ile verilmiştir.

Çizelge 5.7. Süt üretimi verisi için EÇO tahminleri (standart hata)

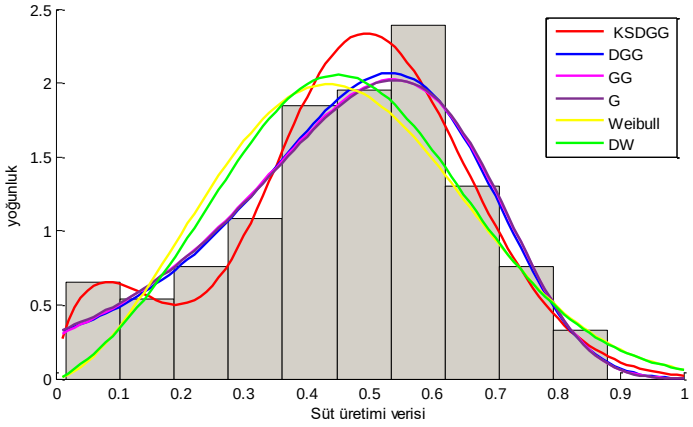
Dağılımlar	EÇO tahminleri (standart hata)
KSDGG	$\hat{a}=2.2942(0.9882), \hat{b}=2.2312(0.7985), \hat{\alpha}=1.5817(0.5008)$ $\hat{\lambda}_1=0.6784(0.2302), \hat{\lambda}_2=-0.8546(0.5804)$
DGG	$\hat{a}=0.5567(0.3235), \hat{b}=4.3757(0.9574), \hat{\alpha}=0.9788(0.3472)$ $\hat{\lambda}=-0.4864(0.5070)$
GG	$\hat{a}=0.3426(0.2074), \hat{b}=5.0464(0.9755), \hat{\alpha}=1.0365(0.2618)$
G	$\hat{a}=0.3165(0.0800), \hat{b}=5.1670(0.4985)$
DW	$\hat{\mu}=2.3230(0.2388), \hat{\sigma}=0.4717(0.0290), \hat{\lambda}=-0.4801(0.2084)$
Weibull	$\hat{\mu}=2.6012(0.2098), \hat{\sigma}=0.5236(0.0202)$
DÜÜ	$\hat{\theta}=3.1199(0.5967), \hat{\alpha}=4.7498(0.4033), \hat{\lambda}=-0.6874(0.1415)$

Çizelge 5.8. Süt üretimi verisi için karşılaştırma istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	A*	W*	K-S	p-değeri
KSDGG	**-61.3198**	-51.3198	**0.1324**	**0.0192**	**0.0441**	**0.9851**
DGG	-58.5449	-50.5449	0.2036	0.0282	0.0458	0.9780
GG	-58.2714	-52.2715	0.2376	0.0345	0.0504	0.9483
G	-58.2514	**-54.2514**	0.2398	0.0361	0.0514	0.9393
DW	-45.8377	-39.8377	1.1366	0.1201	0.0676	0.7121
Weibull	-42.695	-38.695	1.4840	0.1894	0.0832	0.4486
DÜÜ	-20.1764	-14.1764	3.4382	0.5414	0.1231	0.0776



Şekil 4.29. Süt üretimi verisi için uydurulan df



Şekil 5.34. Süt üretimi verisi için uydurulan oyf

İkinci olarak Nichols ve Padgett (2006) tarafından elde edilen veri seti kullanılmıştır. 100 gözlemden oluşan bu veri seti, demir sacdan yapılan işler üzerine delik işleme ile ilgilidir. Karbon lifleri verisi daha önce Afify ve ark. (2014), Afify ve ark. (2016), Cordeiro ve ark. (2017) tarafından kullanılmıştır. Karbon lifi verisi Çizelge 5.9'da verilmiştir.

Çizelge 5.9. Karbon lifi veri kümesi

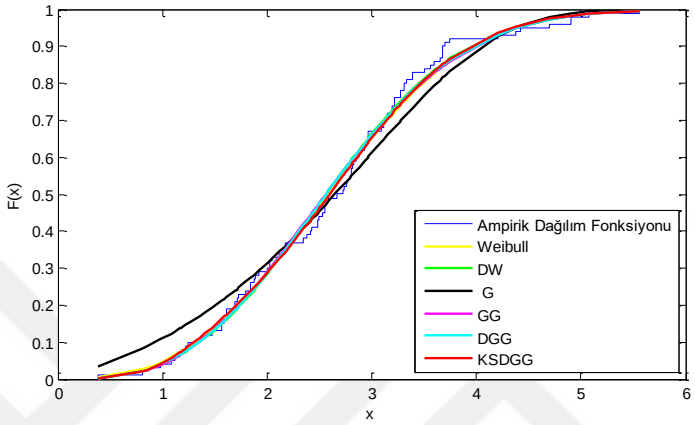
3.70	2.74	2.73	2.50	3.60	3.11	3.27	2.87	1.47	3.11
4.42	2.41	3.19	3.22	1.69	3.28	3.09	1.87	3.15	4.90
3.75	2.43	2.95	2.97	3.39	2.96	2.53	2.67	2.93	3.22
3.39	2.81	4.20	3.33	2.55	3.31	3.31	2.85	2.56	3.56
3.15	2.35	2.55	2.59	2.38	2.81	2.77	2.17	2.83	1.92
1.41	3.68	2.97	1.36	0.98	2.76	4.91	3.68	1.84	1.59
3.19	1.57	0.81	5.56	1.73	1.59	2.00	1.22	1.12	1.71
2.17	1.17	5.08	2.48	1.18	3.51	2.17	1.69	1.25	4.38
1.84	0.39	3.68	2.48	0.85	1.61	2.79	4.70	2.03	1.80
1.57	1.08	2.03	1.61	2.12	1.89	2.88	2.82	2.05	3.65

Çizelge 5.10. Karbon lifi verisi için EÇO tahminleri (standart hata)

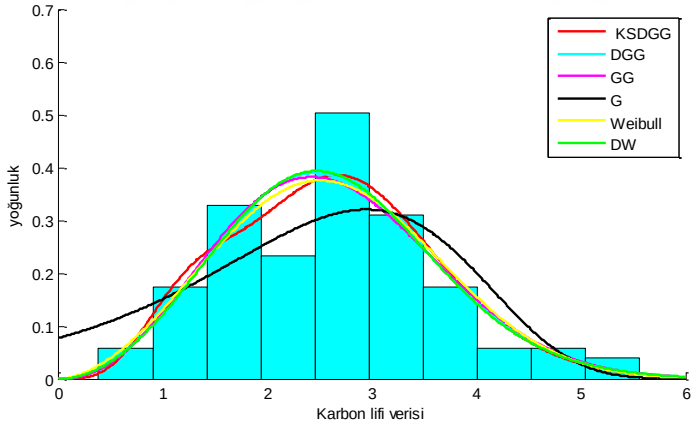
Dağılımlar	EÇO tahminleri (standart hata)
KSDGG	$\hat{a} = 0.7383(0.2932), \hat{b} = 0.2159(0.1218), \hat{\alpha} = 5.0388(2.5398)$ $\hat{\lambda}_1 = 0.8268(0.5164), \hat{\lambda}_2 = 0.1046(0.8863)$
DGG	$\hat{a} = 0.5200(0.2180), \hat{b} = 0.2851(0.1339), \hat{\alpha} = 3.3505(1.4039)$ $\hat{\lambda} = -0.4303(0.7646)$
GG	$\hat{a} = 0.4093(0.1463), \hat{b} = 0.3432(0.1172), \hat{\alpha} = 3.3573(1.0653)$
G	$\hat{a} = 0.0769(0.0174), \hat{b} = 0.7910(0.0776)$
DW	$\hat{\mu} = 2.9934(0.2413), \hat{\sigma} = 3.4125(0.3377), \hat{\lambda} = 0.6789(0.3798)$
Weibull	$\hat{\mu} = 2.7928(0.2140), \hat{\sigma} = 2.9436(0.1111)$
DÜÜ	$\hat{\theta} = 6.1873(1.9282), \hat{\alpha} = 1.1019(0.0964), \hat{\lambda} = -0.6837(0.2792)$

Çizelge 5.11. Karbon lifi verisi için karşılaştırma istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	A*	W*	K-S	p-değeri
KSDGG	**282.0365**	292.0365	**0.3331**	**0.0478**	**0.0537**	**0.9348**
DGG	282.5691	290.5691	0.3988	0.0672	0.0634	0.8161
GG	282.7799	288.7799	0.4197	0.0708	0.0637	0.8163
G	298.2500	302.500	1.7537	0.2280	0.0962	0.3129
DW	282.2698	288.2698	0.3813	0.0650	0.0642	0.8038
Weibull	283.0586	**287.0586**	0.4176	0.0633	0.0604	0.8578
DÜÜ	288.8303	294.8303	0.9273	0.1748	0.0966	0.3078



Şekil 5.35. Karbon lifi verisi için uydurulan df



Şekil 5.36. Karbon lifi verisi için uydurulan oyf

Çizelge 5.11 incelendiğinde, -2×log-olabilirlik, A*, W*, K-S değerine göre karbon lifi verisine en iyi uyumu sağlayan dağılımın KSDGG dağılımı olduğu görülmektedir.

6. KÜBİK SIRALI DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ TERS RAYLEIGH DAĞILIMI

Bu bölümde, KSDY ile öznel dağılım Bölüm 3.4.10'da verilen TR dağılımı alınarak Kübik sıralı dönüştürülmüş ters Rayleigh (KSDTR) isminde yeni bir istatistiksel dağılım tanıtılmıştır. KSDTR dağılımının bekelenen değeri, tam olmayan momenti, Bonferroni ve Lorenz eğrileri, ortalama kalan ömür ve medyan gibi bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Bu yeni dağılımın bilinmeyen parametrelerinin EÇO, EKK, AEKK, AD ve CVM tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin HKO ve yan değerleri Monte Carlo simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır. Son olarak KSDTR dağılımının gerçek hayatta yeri olduğunu göstermek amacıyla bir gerçek veri uygulamasına yer verilmiştir

Bölüm 3.5.2 de yer alan KSDY'de $G(x)$ Bölüm 3.4.10'da verilen TR dağılımına ilişkin df alınarak elde edilen KSDTR ismindeki yeni dağılıma ilişkin df ve oyf sırasıyla,

$$F(x)=\lambda_1\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]+(\lambda_2-\lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{x^2}\right)\right]+(1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{3\theta}{x^2}\right)\right] \tag{6.1}$$

ve

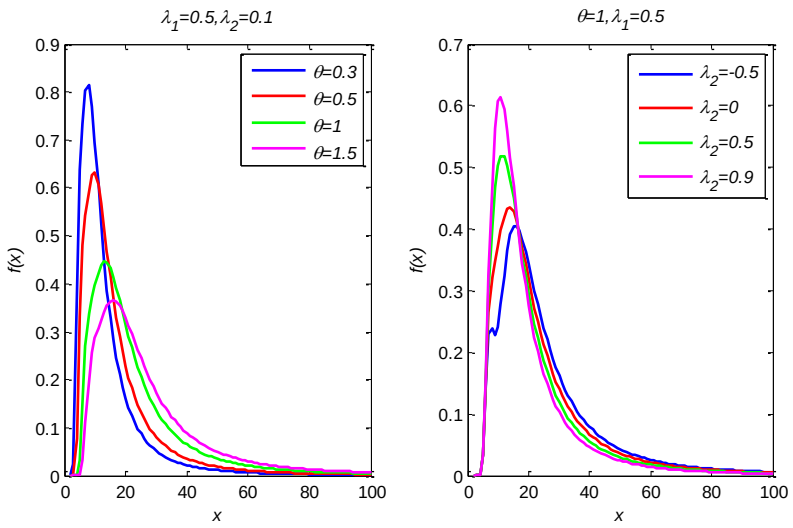
$$f(x)=\frac{2\theta}{x^3}\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]\left[\lambda_1+2(\lambda_2-\lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]+3(1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{x^2}\right)\right]\right]I_{(0,\infty)}(x) \tag{6.2}$$

biçimindedir. Burada $\theta>0, \lambda_1\in[0,1], \lambda_2[-1,1], \lambda_1+\lambda_2<2\sqrt{\lambda_1}$ 'dir. Eşitlik 6.1'de $\lambda_1=\lambda_2=1$ alındığında TR dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonu elde edilmektedir.

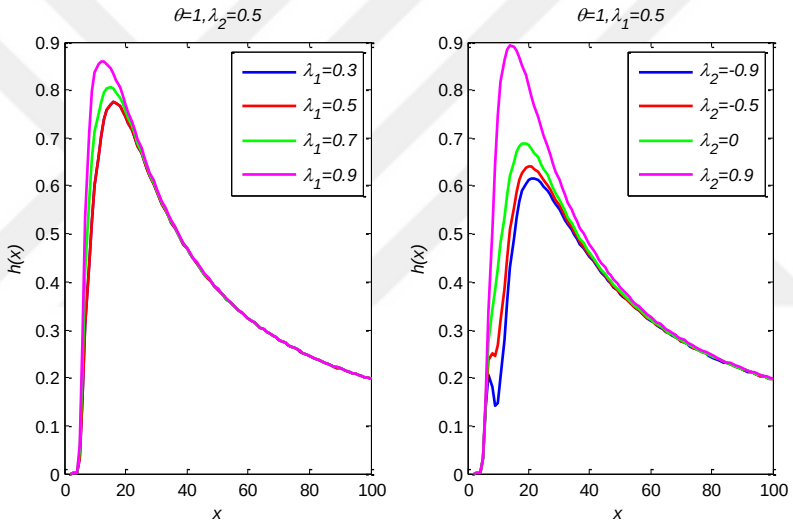
KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının bozulma oranı fonksiyonu

$$h(x)=\frac{\left[\lambda_1+2(\lambda_2-\lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]+3(1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{x^2}\right)\right]\right]}{1-\left[\lambda_1\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]+(\lambda_2-\lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{x^2}\right)\right]+(1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{3\theta}{x^2}\right)\right]\right]} \times\frac{\frac{2\theta}{x^3}\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]}{1-\left[\lambda_1\exp\left[-\left(\frac{\theta}{x^2}\right)\right]+(\lambda_2-\lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{x^2}\right)\right]+(1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{3\theta}{x^2}\right)\right]\right]} \tag{6.3}$$

biçiminde olup KSDTR$(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının oyf ve hf grafikleri Şekil 6.1-6.2'de sırasıyla verilmiştir.



Şekil 6.1. Farklı parametre değerleri için KSDTR dağılımının oyf



Şekil 6.2. Farklı parametre değerleri için KSDTR dağılımına ilişkin hf

Şekil 5.2 incelendiğinde KSDTR$(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının hazard fonksiyonunun ters küvet eğrisi şeklinde olduğu görülmektedir.

6.1. Bazı Dağılımsal Özellikler

Bu bölümde KSDTR$(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$dağılımının kuantil fonksiyon, medyan, r. moment, moment üreten fonksiyon, tam olmayan momentler, Bonferroni ve Lorenz eğrileri, ortalama kalan ömür ve sıra istatistiklerinin dağılımı gibi bazı dağılımsal özellikleri verilecektir.

KSDTR$(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının p. kuantil fonksiyonu $Q(p)$ aşağıda verilmiştir.

$$Q(p)=-\frac{\sqrt{-\theta\log(h)}}{\log(h)} \tag{6.4}$$

burada

$$h=\left(a+\sqrt{b+c}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(a-\sqrt{b+c}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{3-3\lambda_2}$$

$$a=\frac{9(1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_1+27(1-\lambda_2)^2\,p-2(\lambda_2-\lambda_1)^3}{54(1-\lambda_2)^3}$$

$$b=\frac{3(1-\lambda_2)\lambda_1-(\lambda_2-\lambda_1)^2}{(729)^{\frac{1}{3}}(1-\lambda_2)^2}$$

$$c=\frac{9(1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_1+27(1-\lambda_2)^2\,p-2(\lambda_2-\lambda_1)^3}{\sqrt{2916}(1-\lambda_2)^3}$$

ve $p\in[0,1]$ 'dir. KSDTR$(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının medyanı Eşitlik 6.4' de $p=\frac{1}{2}$ alınarak elde edilir. KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının beklenen değeri

$$E(X)=\sqrt{\theta}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\lambda_1+\sqrt{2}(\lambda_2-\lambda_1)+\sqrt{3}(1-\lambda_2)\right] \tag{6.5}$$

şeklinde elde edilir.

X, KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. X rasgele değişkeninin birinci tam olmayan momenti

$$\begin{aligned} m(y)&=\int_0^y xf(x;\theta,\lambda_1,\lambda_2)\,dx \\ &=\sqrt{\theta}\lambda_1\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\theta}{y^2}\right)+\sqrt{2\theta}(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{2\theta}{y^2}\right) \\ &\quad+\sqrt{3\theta}(1-\lambda_2)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{3\theta}{y^2}\right) \end{aligned} \tag{6.6}$$

şeklinde olup burada $\Gamma(a,t)$, tam olmayan Gamma fonksiyonunu temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

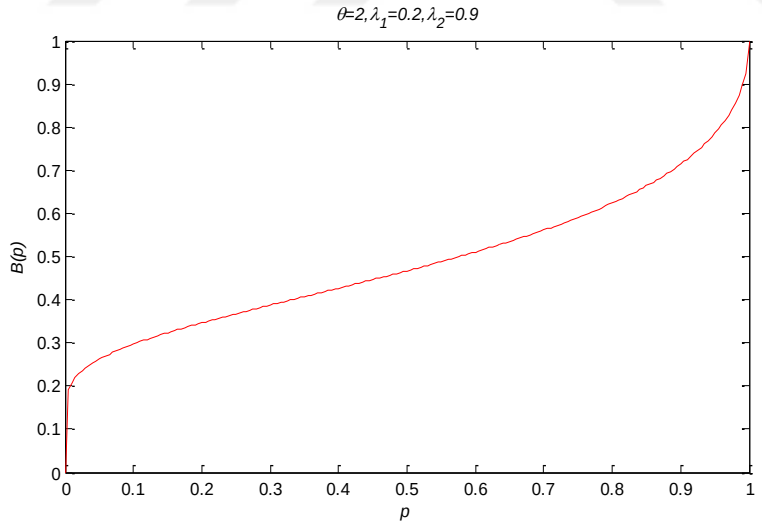
$$\Gamma(a,t)=\int_t^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının Bonferroni ve Lorenz eğrileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

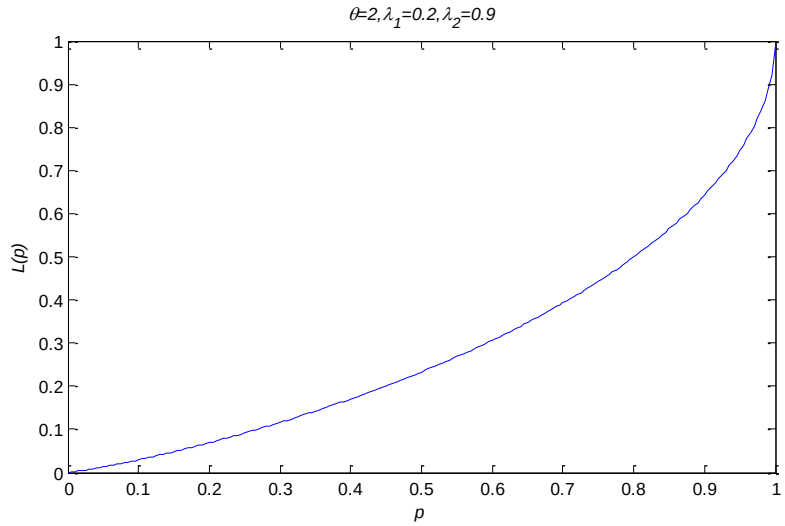
$$B(p)=\frac{1}{p\mu}\int_0^q xf(x)dx$$
$$=\frac{\lambda_1\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\theta}{q^2}\right)+\sqrt{2}(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{2\theta}{q^2}\right)+\sqrt{3}(1-\lambda_2)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{3\theta}{q^2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\lambda_1+\sqrt{2}(\lambda_2-\lambda_1)+\sqrt{3}(1-\lambda_2)\right]} \quad , \qquad (6.7)$$

$$L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^q xf(x)dx$$
$$=\frac{\lambda_1\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha}{q^2}\right)+\sqrt{2}(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{2\alpha}{q^2}\right)+\sqrt{3}(1-\lambda_2)\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{3\alpha}{q^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\lambda_1+\sqrt{2}(\lambda_2-\lambda_1)+\sqrt{3}(1-\lambda_2)\right]} \qquad (6.8)$$

Burada μ birinci moment, $q=Q(p)$ ise Eşitlik 6.4 kullanılarak p olasılıkla hesaplanabilir. Şekil 6.3-6.4 sırasıyla KSDTR dağılımının Bonferroni ve Lorenz eğrilerinin seçilen parametre değerlerine göre grafiklerini göstermektedir.



Şekil 6.3. $\theta=2,\lambda_1=0.2,\lambda_2=0.9$ durumunda Bonferroni eğrisi



Şekil 6.4. $\theta = 2, \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.9$ durumunda Lorenz eğrisi

KSDTR$(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımının ortalama kalan ömür fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\mu(t) = E(T - t \mid T > t)$$

$$= \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{\infty} (1 - F(x))\, dx$$

$$= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{2\theta\pi}\, erf\left(\sqrt{2\theta}/t\right) - (1-\lambda_2)\left[\sqrt{3\theta\pi}\, erf\left(\sqrt{3\theta}/t\right) + t\exp\left[-\left(\frac{3\theta}{t^2}\right)\right]\right]}{1 - \lambda_1 \exp\left[-\left(\frac{\theta}{t^2}\right)\right] - (\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{t^2}\right)\right] - (1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{3\theta}{t^2}\right)\right]}$$

$$+ \frac{t\left[1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{t^2}\right)\right] - \lambda_1 \exp\left[-\left(\frac{\theta}{t^2}\right)\right]\right] - \lambda_1\sqrt{\theta\pi}\, erf\left(\sqrt{\theta}/t\right)}{1 - \lambda_1 \exp\left[-\left(\frac{\theta}{t^2}\right)\right] - (\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left[-\left(\frac{2\theta}{t^2}\right)\right] - (1-\lambda_2)\exp\left[-\left(\frac{3\theta}{t^2}\right)\right]} \tag{6.9}$$

Burada $erf(t)$, hata fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{x^2}\, dx$$

6.2. Nokta Tahmini

Bu bölümde KSDTR dağılımının bilinmeyen $\theta, \lambda_1, \lambda_2$ parametrelerinin EÇO, EKK, AEKK, AD, CVM ve MÇA tahmin edicileri verilecektir.

6.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2, ..., X_n$, KSDTR $(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımından alınan rasgele bir örneklem olsun. Bu dağılıma ilişkin Log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 6.10'da verilmiştir.

$$\ell(\theta, \lambda_1, \lambda_2 \mid \mathbf{x}) = n\log(2\theta) + (2\theta - 3)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\log\left[\lambda_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left(-\frac{\theta}{x_i^2}\right) + 3(1-\lambda_2)\exp\left(-\frac{2\theta}{x_i^2}\right)\right] \tag{6.10}$$

$\ell(a, b, \alpha, \lambda_1, \lambda_2 \mid \mathbf{x})$ fonksiyonunun θ, λ_1 ve λ_2 parametrelerine göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenerek oluşturulan doğrusal olmayan olabilirlik denklemlerinin eş zamanlı çözümü ile θ, λ_1 ve λ_2 parametrelerin EÇO tahmin edicileri elde edilir.

$$\frac{\ell(\theta, \lambda_1, \lambda_2 \mid x)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + 2\sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left(\frac{-\theta}{x_i^2}\right) + 6(1-\lambda_2)\exp\left(\frac{-2\theta}{x_i^2}\right)}{x_i^2\left(\lambda_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left(\frac{-\theta}{x_i^2}\right) + 3(1-\lambda_2)\exp\left(\frac{-2\theta}{x_i^2}\right)\right)} \tag{6.11}$$

$$\frac{\ell(\theta, \lambda_1, \lambda_2 \mid x)}{\partial\lambda_1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1 - 2\exp\left(\frac{-\theta}{x_i^2}\right)}{\lambda_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left(\frac{-\theta}{x_i^2}\right) + 3(1-\lambda_2)\exp\left(\frac{-2\theta}{x_i^2}\right)} \tag{6.12}$$

$$\frac{\ell(\theta, \lambda_1, \lambda_2 \mid x)}{\partial\lambda_2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2\exp\left(\frac{-\theta}{x_i^2}\right) - 3\exp\left(\frac{-2\theta}{x_i^2}\right)}{\lambda_1 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)\exp\left(\frac{-\theta}{x_i^2}\right) + 3(1-\lambda_2)\exp\left(\frac{-2\theta}{x_i^2}\right)} \tag{6.13}$$

Eşitlik 6.11-6.13 'de yer alan olabilirlik denklemlerinin eş zamanlı çözümünü elde etmek için numerik yöntemlerden yararlanılır.

6.2.2. En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmini

$X_1, X_2, ..., X_n$, KSDTR $(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımından alınan örneklem ve $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$ bu örnekleme ait sıra istatistikleri olsun. Bölüm 3.2.2 den $\theta, \lambda_1 \text{ve } \lambda_2$ parametrelerinin EKK tahmin edicileri, $\hat{\theta}_{EKK}, \hat{\lambda}_{1_{EKK}}, \hat{\lambda}_{2_{EKK}}$, Eşitlik 6.14 'ün θ, λ_1 ve λ_2 ' ye göre minimize edilmesi ile bulunur.

$$Z(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{n}\left[F\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right]^2 \tag{6.14}$$

Dolayısıyla, $\hat{\theta}_{EKK},\hat{\lambda}_{1_{EKK}}$ ve $\hat{\lambda}_{2_{EKK}}$ tahminleri Eşitlik 6.15-6.17 'de yer alan denklem sisteminin eş zamanlı çözümü ile elde edilir.

$$\frac{\partial Z(\theta,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}F'_{\theta}\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial Z(\theta,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_1}=\sum_{i=1}^{n}F'_{\lambda_1}\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial Z(\theta,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_2}=\sum_{i=1}^{n}F'_{\lambda_2}\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)\left(F\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right)=0 \tag{6.17}$$

Yukarıdaki doğrusal olmayan denklem sistemini eş zamanlı çözmek için nümerik yöntemler kullanılır.

Bölüm 3.2.2 den θ,λ_1 ve λ_2 parametrelerinin AEKK tahmin edicileri, $\hat{\theta}_{AEKK},\hat{\lambda}_{1_{AEKK}},\hat{\lambda}_{2_{AEKK}}$, Eşitlik 6.18 'in θ,λ_1 ve λ_2 ' ye göre minimize edilmesi ile bulunur.

$$\varpi(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i\left[F\left(x_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{i}{n+1}\right]^2 \tag{6.18}$$

Burada

$$\tau_i=\frac{1}{Var\left[F\left(X_{i:n}\right)\right]}=\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}$$

şeklindedir.

6.2.3. Anderson Darling Tahmini

Bölüm 3.2.4'den KSDTR dağılımının $\theta,\lambda_1,\lambda_2$ parametreleri için AD tahmin edicileri

$$A(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=-n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left(\log F\left(X_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)+\log\left(1-F\left(X_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)\right)\right) \tag{6.19}$$

fonksiyonunun θ,λ_1 ve λ_2 'ye göre minimize edilmesi ile elde edilir.

6.2.4. Cramér -von Mises Tahmini

Bölüm 3.2.5'den KSDTR dağılımının $\theta,\lambda_1,\lambda_2$ parametreleri için CVM tahmin edicileri

$$C(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(X_{(i)},\theta,\lambda_1,\lambda_2\right)-\frac{2i-1}{2n}\right)^2 \tag{6.20}$$

fonksiyonunun θ,λ_1 ve λ_2 'ye göre minimize edilmesi ile elde edilir.

6.3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin EÇO, EKK, AEKK, AD ve CVM tahmin edicilerinin HKO ve yan açısından performanslarını değerlendirebilmek amacı ile bir Monte Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasında 5000 tekrar alınmıştır. Örnek hacimleri 50,100,200,500 şeklinde alınmıştır. Parametrelerin başlangıç değerleri ise;

$Durum\ 1=(0.5,0.2,0.9)$,

$Durum\ 2=(0.9,0.1,0.6)$

$Durum\ 3=(1,0.3,0.8)$

$Durum\ 4=(2,0.25,-0.5)$

şeklinde alınmıştır. Simülasyon çalışması sonuçları Çizelge 6.1-6-4' de verilmiştir.

Çizelge 6.1. $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.9)$ durumu için yan ve HKO değerleri

		yan			HKO		
Tahmin Edici	n	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.0516	0.3106	-0.7902	0.0353	0.1520	0.8872
	100	0.0240	0.2183	-0.6309	0.0259	0.1087	0.6167
	200	0.0202	0.1749	-0.4882	0.0260	0.0972	0.4099
	500	0.0079	0.1058	-0.3378	0.0197	0.0703	0.2351
EKK	50	0.1486	0.5083	-0.8080	0.1083	0.4695	1.2262
	100	0.1500	0.4539	-0.5831	0.0877	0.3883	0.7277
	200	0.1406	0.3783	-0.3566	0.0654	0.2912	0.3776
	500	0.1247	0.3165	-0.2212	0.0503	0.2265	0.1886
AEKK	50	0.0564	0.4044	-0.9696	0.0694	0.3143	1.3692
	100	0.0909	0.3515	-0.6130	0.0606	0.2680	0.6682
	200	0.1015	0.3063	-0.3701	0.0490	0.2148	0.3346
	500	0.0767	0.2201	-0.2299	0.0319	0.1436	0.1582
AD	50	0.0493	0.3257	-0.8341	0.0499	0.2161	1.0881
	100	0.0641	0.2932	-0.6058	0.0456	0.2014	0.6526
	200	0.0733	0.2552	-0.3936	0.0388	0.1693	0.3553
	500	0.0644	0.2004	-0.2504	0.0293	0.1295	0.1786
CVM	50	0.1824	0.4379	-0.5447	0.1162	0.3969	0.8881
	100	0.1691	0.4225	-0.4428	0.0899	0.3511	0.5802
	200	0.1487	0.3637	-0.2939	0.0661	0.2771	0.3317
	500	0.1257	0.3056	-0.1939	0.0492	0.2166	0.1726

Çizelge 6.2. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumu için yan ve HKO değerleri

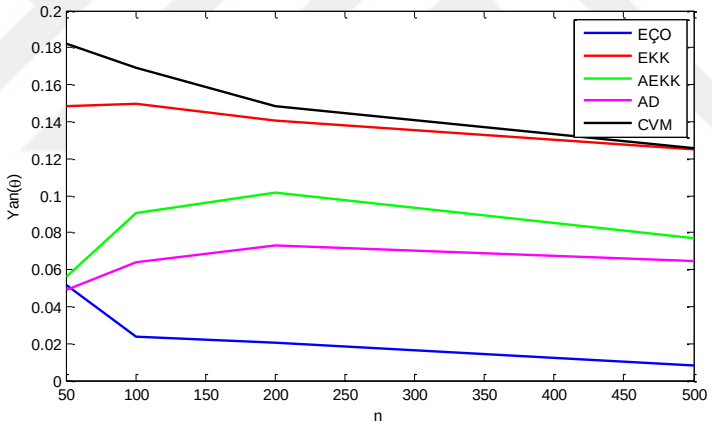
		yan			HKO		
Tahmin Edici	n	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.1454	0.2957	-0.6144	0.1361	0.1440	1.3237
	100	0.1275	0.2418	-0.4679	0.1427	0.1167	0.7762
	200	0.0857	0.1639	-0.3361	0.1097	0.0776	0.4761
	500	0.0823	0.1167	-0.1657	0.0857	0.0549	0.3041
EKK	50	0.4128	0.5565	-0.6204	0.6151	0.5567	1.2191
	100	0.3997	0.4655	-0.3463	0.4803	0.4032	0.7468
	200	0.3914	0.4049	-0.1705	0.4251	0.3272	0.4719
	500	0.3208	0.3398	-0.1096	0.3206	0.2482	0.2307
AEKK	50	0.2736	0.4631	-0.6895	0.4118	0.3742	1.2348
	100	0.2521	0.3868	-0.5030	0.3371	0.2936	0.7475
	200	0.1986	0.2937	-0.3719	0.2581	0.2072	0.4799
	500	0.1960	0.2353	-0.1683	0.2003	0.1532	0.2433
AD	50	0.1612	0.3854	-0.7840	0.2677	0.2657	1.1745
	100	0.2134	0.3447	-0.5000	0.2754	0.2371	0.7321
	200	0.1901	0.2766	-0.3514	0.2354	0.1831	0.4574
	500	0.1876	0.2256	-0.1643	0.1865	0.1400	0.3029
CVM	50	0.4483	0.4750	-0.4132	0.6477	0.4709	1.3237
	100	0.4105	0.4226	-0.2491	0.4861	0.3621	0.7762
	200	0.4010	0.3839	-0.1128	0.4300	0.3085	0.4761
	500	0.3168	0.3265	-0.0932	0.3152	0.2370	0.3041

Çizelge 6.3. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumu için yan ve HKO değerleri

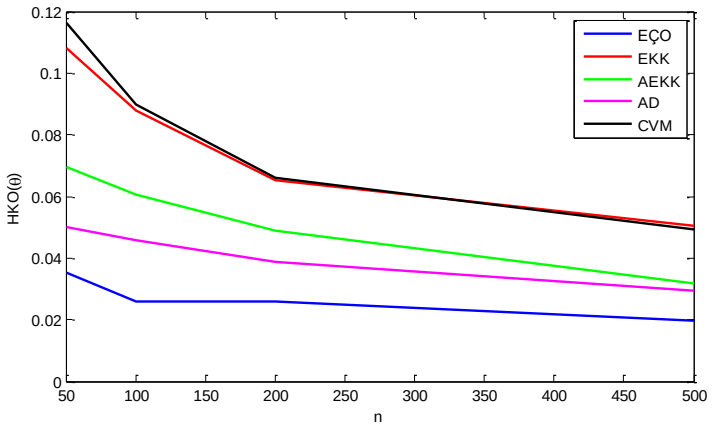
		yan			HKO		
Tahmin Edici	n	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.0263	0.2149	-0.7445	0.0947	0.1027	0.7991
	100	0.0211	0.1628	-0.5655	0.0944	0.0892	0.5182
	200	0.0243	0.1236	-0.4082	0.0828	0.0769	0.3059
	500	0.0197	0.0774	-0.2530	0.0591	0.0555	0.1450
EKK	50	0.2347	0.4304	-0.7652	0.3797	0.3909	1.2035
	100	0.2000	0.3427	-0.5449	0.2638	0.2851	0.6953
	200	0.1926	0.2861	-0.3615	0.1984	0.2139	0.3771
	500	0.1382	0.2041	-0.2472	0.1362	0.1408	0.2171
AEKK	50	0.0691	0.3153	-0.8591	0.2257	0.2399	1.2084
	100	0.0894	0.2467	-0.5768	0.1713	0.1842	0.6324
	200	0.0932	0.1959	-0.3913	0.1284	0.1402	0.3325
	500	0.0685	0.1319	-0.2509	0.0888	0.0922	0.1672
AD	50	0.0466	0.2476	-0.7755	0.1706	0.1731	1.0175
	100	0.0632	0.2065	-0.5569	0.1403	0.1438	0.5950
	200	0.0774	0.1727	-0.3803	0.1121	0.1175	0.3240
	500	0.0551	0.1181	-0.2557	0.0819	0.0824	0.1744
CVM	50	0.2932	0.3615	-0.5253	0.4089	0.3323	0.9274
	100	0.2262	0.3062	-0.4191	0.2653	0.2554	0.5822
	200	0.2079	0.2715	-0.3005	0.2001	0.2039	0.3348
	500	0.1460	0.2000	-0.2220	0.1372	0.1386	0.2049

Çizelge 6.4. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0.3, 0.8)$ durumu için yan ve HKO değerleri

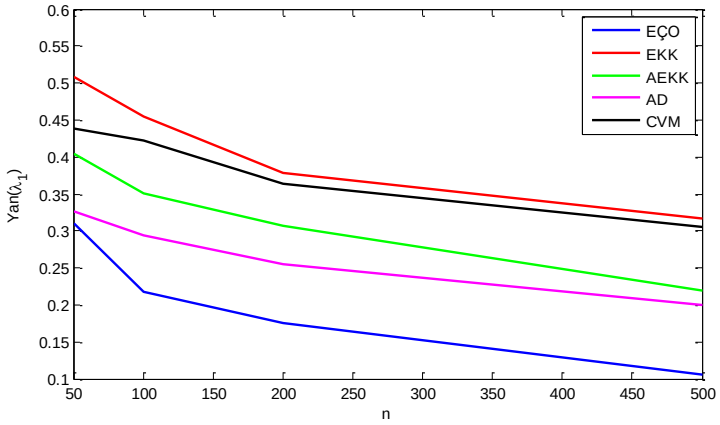
		yan			HKO		
Tahmin Edici	n	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$
EÇO	50	0.6080	0.1169	0.1841	1.0308	0.0503	0.2509
	100	0.3567	0.0484	0.1053	0.5717	0.0233	0.1930
	200	0.1532	0.0147	0.0209	0.1957	0.0103	0.1178
	500	0.0568	0.0084	-0.0222	0.0417	0.0041	0.0477
EKK	50	0.8443	0.4555	-0.3943	3.6576	0.3837	1.3042
	100	0.7374	0.2974	-0.1712	2.9431	0.2043	0.9303
	200	0.6806	0.2175	-0.0401	2.7434	0.1410	0.7412
	500	0.5088	0.1234	0.0690	1.7555	0.0668	0.5020
AEKK	50	0.7596	0.3669	-0.2865	3.4343	0.2813	0.6131
	100	0.6925	0.2272	-0.0683	2.8400	0.1601	0.3981
	200	0.4636	0.1161	0.0229	1.6693	0.0709	0.3369
	500	0.1930	0.0410	0.0135	0.5105	0.0185	0.1566
AD	50	0.6447	0.2630	-0.1511	2.3614	0.1811	0.5321
	100	0.5072	0.1592	-0.0490	1.7457	0.0954	0.3748
	200	0.2576	0.0710	-0.0278	0.7327	0.0312	0.2684
	500	0.1021	0.0253	-0.0218	0.1776	0.0067	0.1190
CVM	50	0.7083	0.3814	-0.3965	3.1821	0.3300	1.4664
	100	0.6590	0.2593	-0.1820	2.7157	0.1810	0.9733
	200	0.6185	0.1923	-0.0479	2.5014	0.1239	0.7577
	500	0.4871	0.1150	0.0629	1.6989	0.0636	0.5018



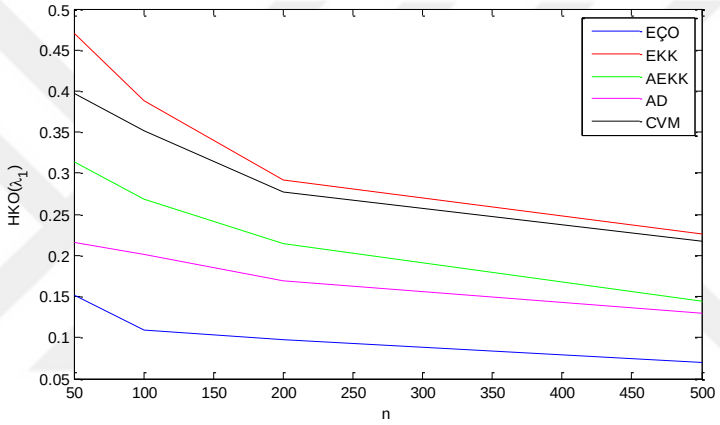
Şekil 6.5. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.2, 0.9)$ durumunda θ parametresi için yan



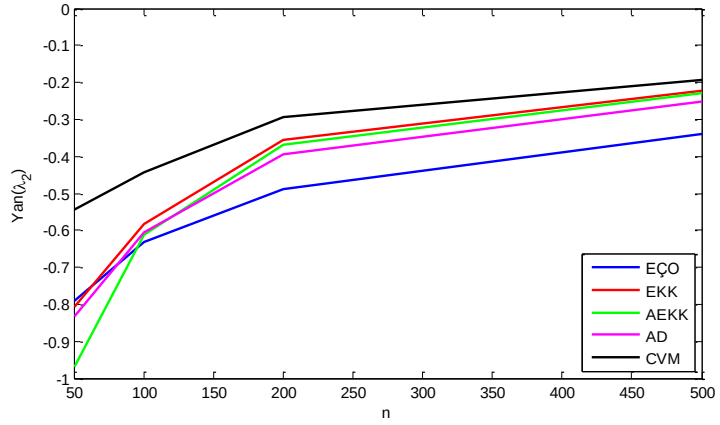
Şekil 6.6. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.2, 0.9)$ durumunda θ parametresi için HKO



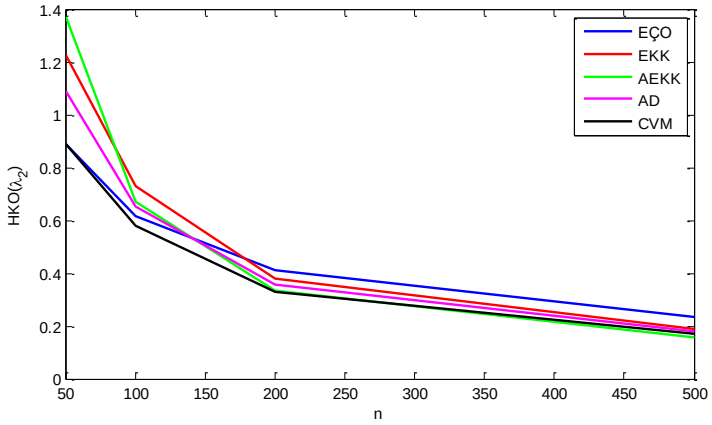
Şekil 6.7. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.2, 0.9)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



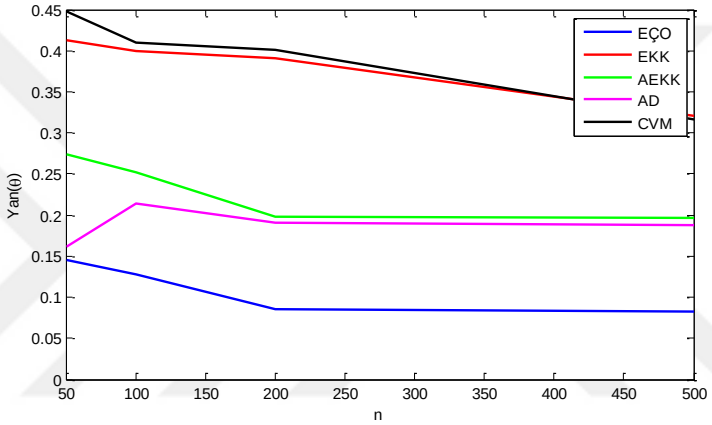
Şekil 6.8. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.2, 0.9)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



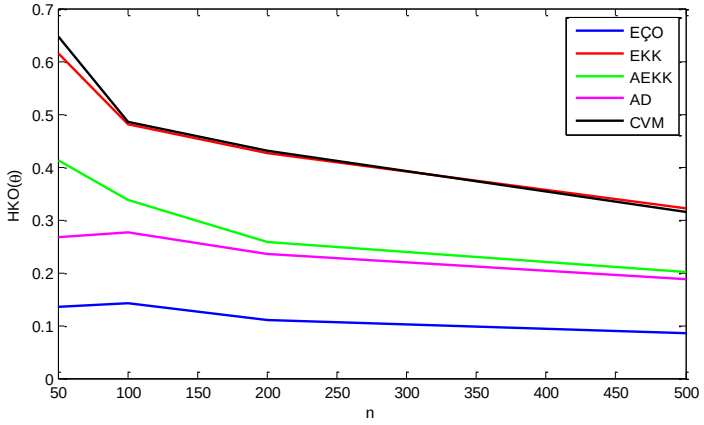
Şekil 6.9. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.2, 0.9)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



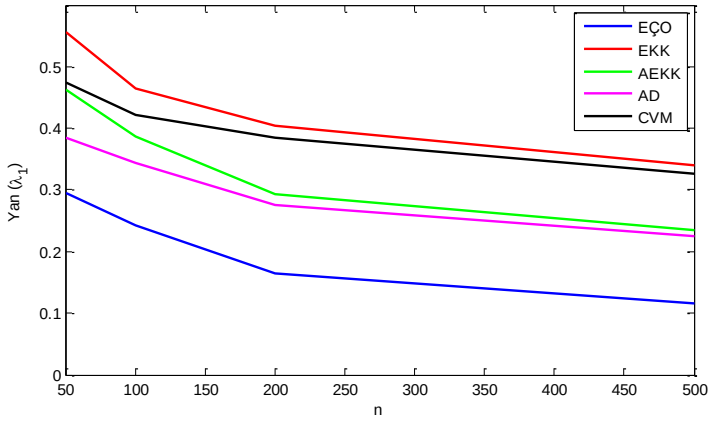
Şekil 6.10. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.5, 0.2, 0.9)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO



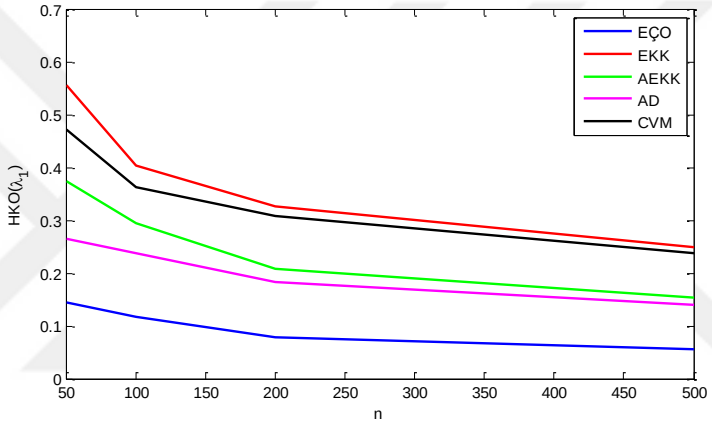
Şekil 6.11. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumunda θ parametresi için yan



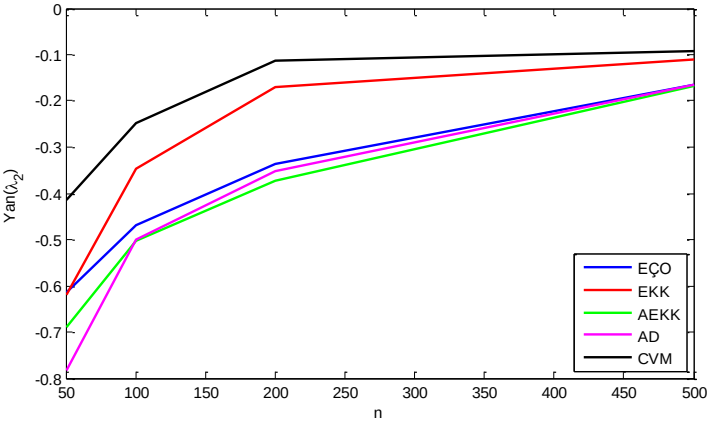
Şekil 6.12. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumunda θ parametresi için HKO



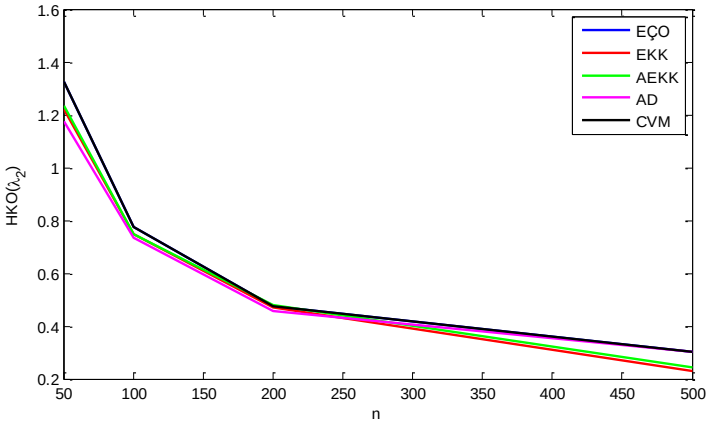
Şekil 6.13. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



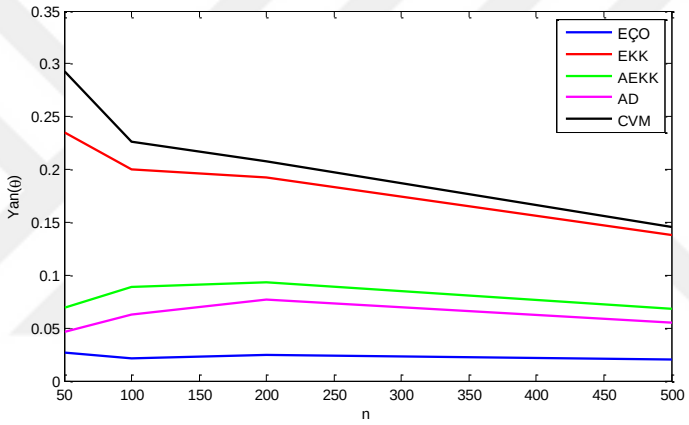
Şekil 6.14. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



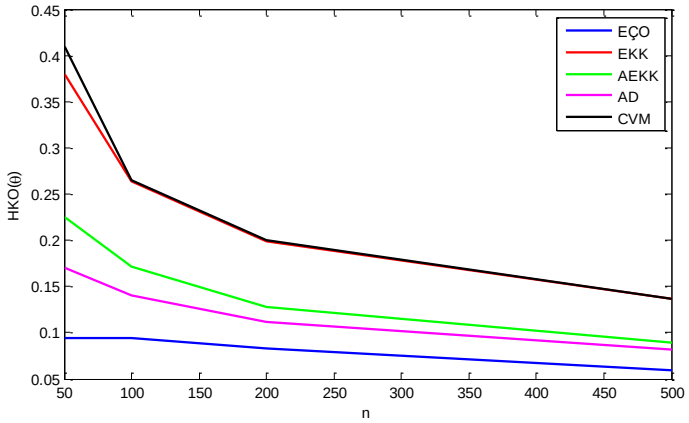
Şekil 6.15. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



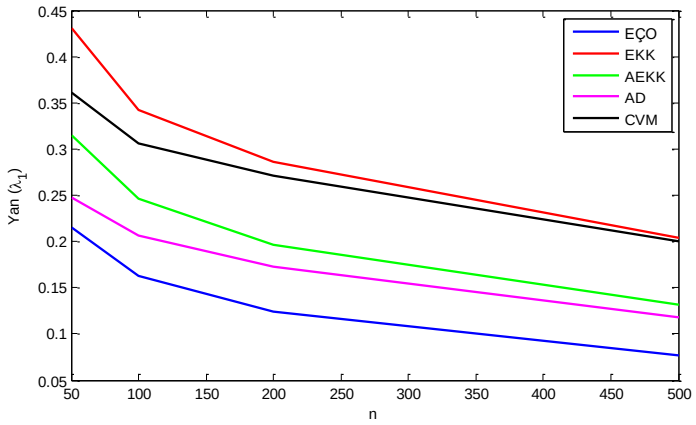
Şekil 6.16. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (0.9, 0.1, 0.6)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO



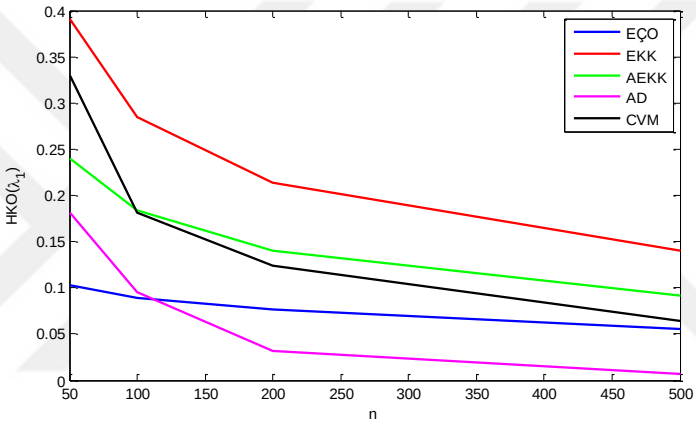
Şekil 6.17. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumunda θ parametresi için yan



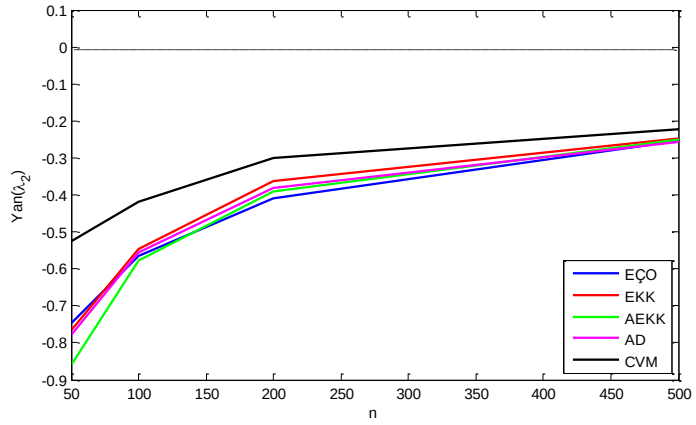
Şekil 6.18. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumunda θ parametresi için HKO



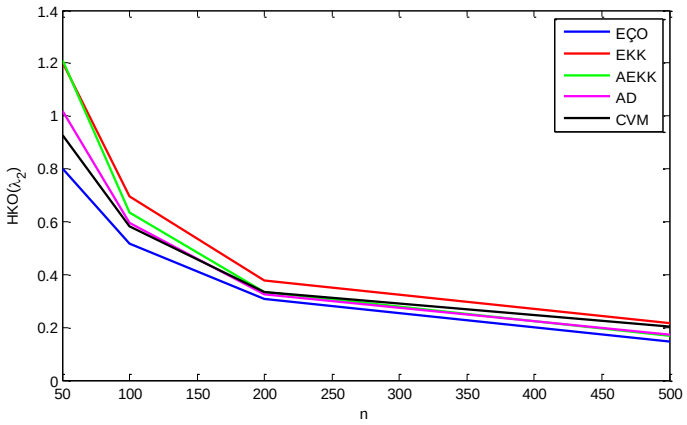
Şekil 6.19. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



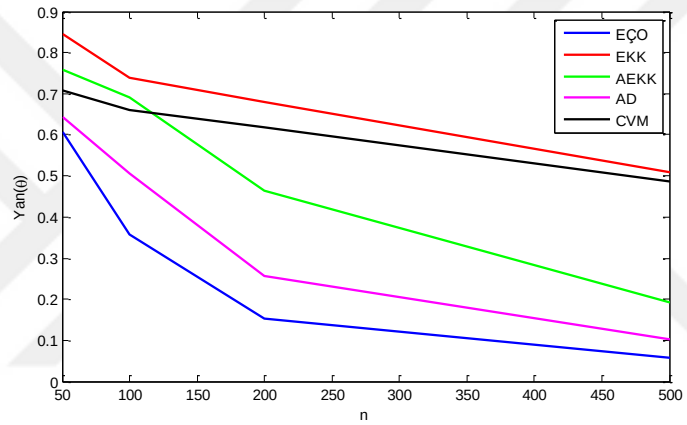
Şekil 6.20. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



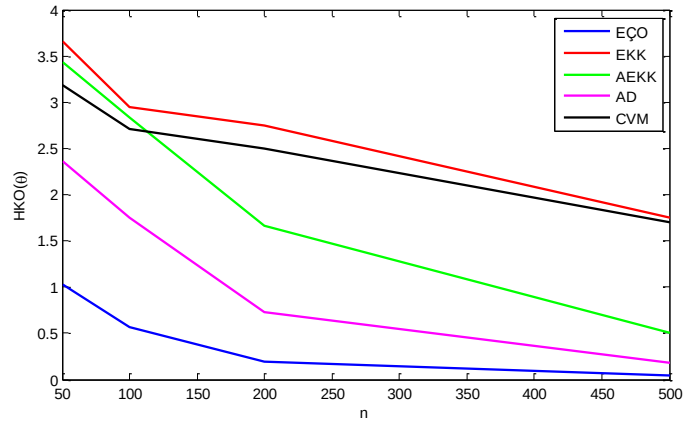
Şekil 6.21. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



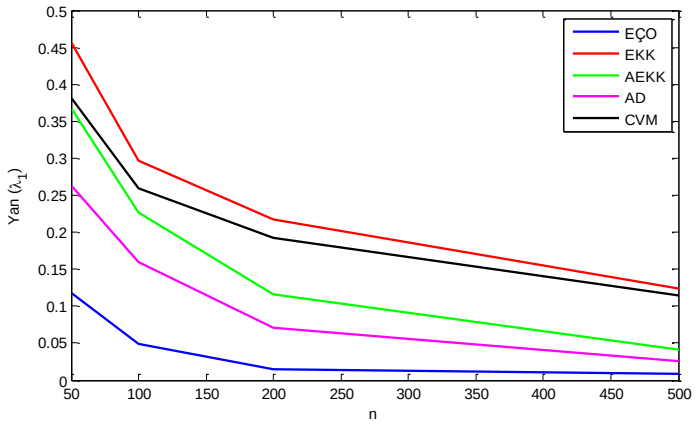
Şekil 6.22. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 0.25, -0.5)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO



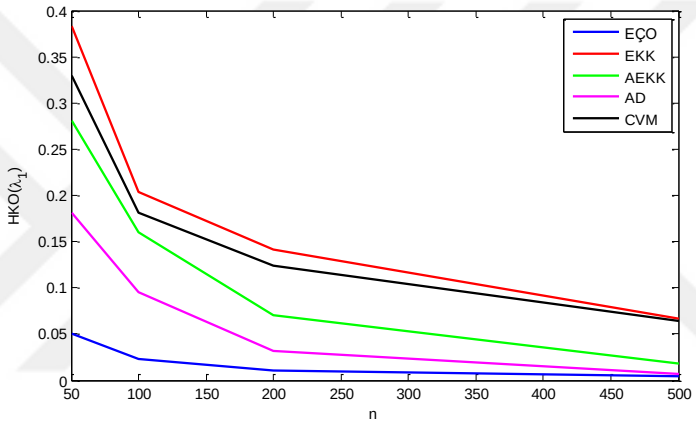
Şekil 6.23. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0.3, 0.8)$ durumunda θ parametresi için yan



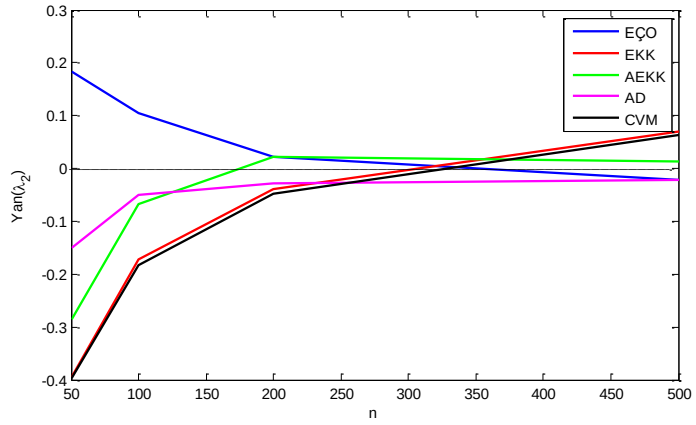
Şekil 6.24. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0.3, 0.8)$ durumunda θ parametresi için HKO



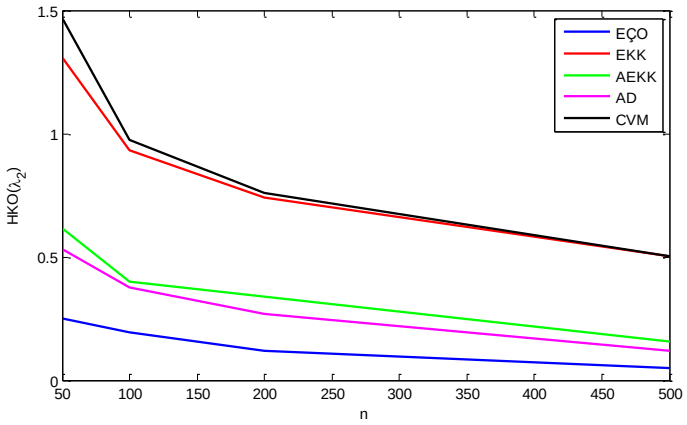
Şekil 6.25. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0.3, 0.8)$ durumunda λ_1 parametresi için yan



Şekil 6.26. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0.3, 0.8)$ durumunda λ_1 parametresi için HKO



Şekil 6.27. $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = (1, 0.3, 0.8)$ durumunda λ_2 parametresi için yan



Şekil 6.28. $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(1,0.3,0.8)$ durumunda λ_2 parametresi için HKO

Yukarıdaki çizelgeler ve şekiller dikkate alındığında simülasyon sonuçları aşağıdaki gibi yorumlanabilir. KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametrelerinin EÇO, EKK, AEKK, AD ve CVM tahmin edicilerinin yan ve HKO kriterlerine göre performanslarını karşılaştırmak için yapılan Monte Carlo simülasyon çalışmaları sonuçlarına göre $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(0.5,0.2,0.9)$ durumunda; θ ve λ_1 parametreleri için EÇO, λ_2 parametresi için ise AEKK tahmin edicilerinin HKO değerleri en küçüktür. θ ve λ_1 parametreleri için EÇO, λ_2 parametresi için ise CVM tahmin edicilerinin yan değerleri en küçüktür. Örnek büyüklüğü arttıkça tüm parametrelerin tahmin edicilerinin HKO değerlerinin azaldığı görülmüştür. $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(0.9,0.1,0.6)$ durumunda; örnek sayısı arttıkça tüm parametrelerin tüm tahmin edicilerinin HKO ve yan değerlerinin düzenli bir şekilde azaldığı ve sıfıra yaklaştığı söylenebilir. θ ve λ_1 parametreleri için EÇO, λ_2 parametresi için ise EKK tahmin edicilerinin HKO değerleri en küçüktür. θ ve λ_1 parametreleri için EÇO, λ_2 parametresi için ise CVM tahmin edicilerinin yan değerleri en küçüktür. $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(2,0.25,-0.5)$ durumunda; EÇO tahmin edicisi tüm örnek durumlarında en küçük HKO ve yan değerine sahiptir. Tüm tahmin edicilerin HKO ve yan değerlerinin örnek büyüklüğü arttıkça düzenli bir şekilde azaldığı görülmektedir. $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(1,0.3,0.8)$ durumunda; EÇO tahmin edicisi tüm parametre durumları içinde en küçük HKO ve yan değerine sahiptir. Tüm tahmin edicilerin HKO ve yan değerlerinin örnek büyüklüğü arttıkça düzenli bir şekilde azaldığı görülmektedir. Tüm tahmin edicilerin λ_1 parametresi için HKO θ ve λ_2 parametrelerine göre daha küçüktür.

6.4. Gerçek Veri Uygulaması

Bu bölümde KSDTR $(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımının gerçek hayatta uygulanabilirliğini göstermek amacı ile bir gerçek veri uygulamasına yer verilmiştir.

Gerçek veri kümesi olarak Minneapolis/St Paul'da mart ayında meydana gelen yağış miktarlarından (inç) oluşan veri kullanılmıştır. Bu veriler Hinkley (1977) tarafından elde edilmiştir. Yağış verisi daha önce ul Haq (2016), Usman ve ark. (2017), Elgarhy ve ark. (2018) tarafından kullanılmıştır. Yağış verisi Çizelge 6.5'de verilmiştir.

Çizelge 6.5. Yağış veri kümesi

0.77	1.74	0.81	1.20	1.95	1.20	0.47	1.43	3.37	2.20
3.00	3.09	1.51	2.10	0.52	1.62	1.31	0.32	0.59	0.81
2.81	1.87	1.18	1.35	4.75	2.48	0.96	1.89	0.90	2.05

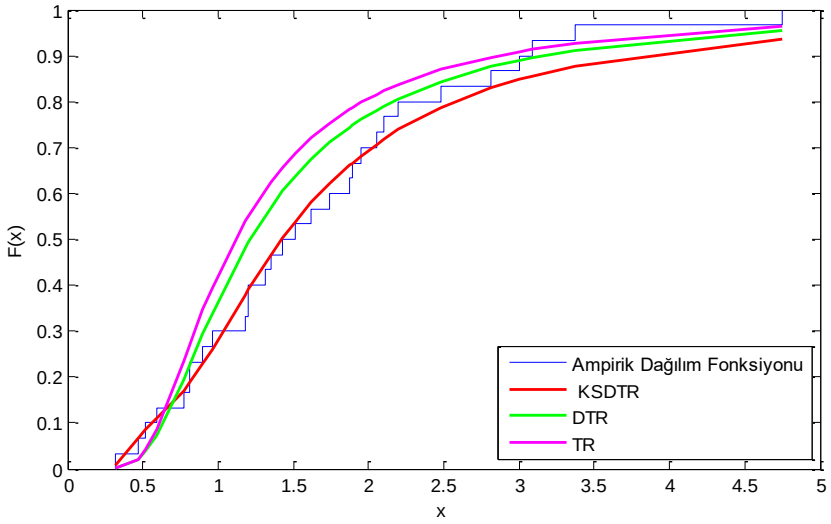
Bu gerçek yaşam verisi uygulamasında ele alınan dağılımların DÜTR, DTR, TR, Lindley (L), Fréchet (F) verilere olan uyumlarını karşılaştırmak için -2×log-olabilirlik değeri, AIC, BIC, A*, W*, K-S istatistiği ve bu istatistiğe ilişkin p değeri kullanılmıştır. Bu dağılımların bilinmeyen parametrelerinin EÇO tahminleri ve bu değerlere ilişkin standart hatalar ve bu dağılımların Çizelge 6.5'de verilen yağış verisine uyumunu karşılaştırmak için kullanılan istatistikler Çizelge 6.6-6.7' de sırasıyla verilmiştir. Ayrıca uydurulan df ve oyf grafikleri Şekil 6.29 ve Şekil 6.30' de sırası ile verilmiştir.

Çizelge 6.6. Yağış verisi için EÇO tahminleri (standart hata)

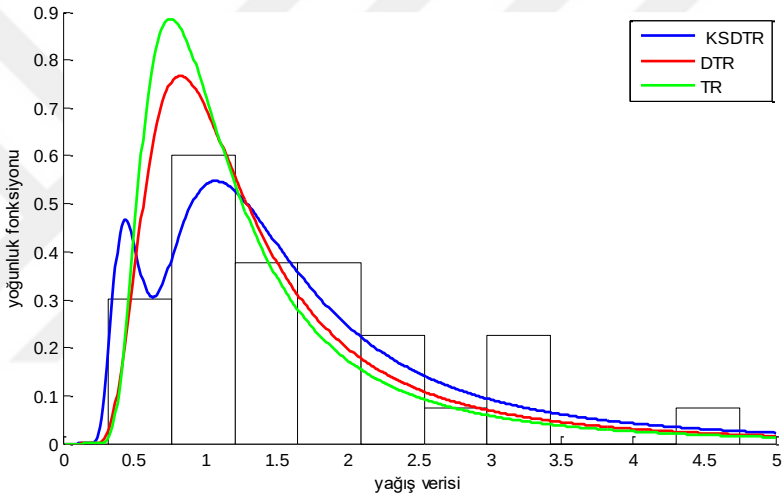
Dağılımlar	EÇO (standart hata)
KSDTR	$\hat{\theta} = 0.4722(0.1121), \hat{\lambda}_1 = 0.7214(0.3988), \hat{\lambda}_2 = -0.8903(0.7762)$
DÜTR	$\hat{\theta} = 9.8817(109.8935), \hat{\alpha} = 0.0636(0.7071), \hat{\lambda} = -0.6697(0.2661)$
DTR	$\hat{\theta} = 0.6285(0.1582), \hat{\lambda} = -0.6700(0.2661)$
TR	$\hat{\theta} = 0.8587(0.1567)$
L	$\hat{\theta} = 0.9096(0.1247)$
F	$\hat{\mu} = 1.5496(0.2026), \hat{\sigma} = 1.0162(0.1272)$

Çizelge 6.7. Yağış verisi için karşılaştırma istatistikleri

Dağılımlar	-2log	AIC	BIC	A*	W*	K-S	p-değeri
KSDTR	**78.9324**	**84.9324**	**89.1360**	**0.2932**	**0.0341**	**0.0891**	**0.9709**
DÜTR	84.2022	90.2022	94.4058	1.1356	0.2116	0.1817	0.2750
DTR	84.2022	88.2022	91.0046	1.1316	0.2117	0.1817	0.2748
TR	88.2730	90.2730	91.6742	2.1823	0.4308	0.2396	0.0636
L	86.2874	88.2874	89.6886	1.5910	0.2618	0.1882	0.2382
F	83.8340	87.8340	90.6364	0.7596	0.1201	0.1523	0.4892



Şekil 6.29. Yağış verisi için uydurulan df



Şekil 6.30. Yağış verisi için uydurulan oyf

Gerçek veri analizi sonuçlarına göre, tüm karşılaştırma kriterlerine göre KSDTR $(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$ dağılımının analiz edilen diğer dağılımlar arasında en iyi uyuma sahip olduğu belirlenmiştir (Çizelge 6.7).

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

7.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, Granzotto ve ark. (2017) tarafından önerilen kübik sıralı dönüştürme yöntemi kullanılarak kübik sıralı dönüştürülmüş Kumaraswamy, kübik sıralı dönüştürülmüş genelleştirilmiş Gompertz ve kübik sıralı dönüştürülmüş ters Rayleigh isminde üç sürekli dağılım önerilmiştir. Bu üç yeni dağılım için oyf, df, r.

moment, moment üreten fonksiyonu, tam olmayan momentler, basıklık çarpıklık katsayısı, ortalama kalan ömür, Lorenz ve Bonferroni eğrileri gibi bazı istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Önerilen istatistiksel dağılımların bilinmeyen parametreleri farklı parametre tahmin yöntemleri ile tahmin edilmiştir.

KSDKw dağılımı için EÇO, KSDGG dağılımı için EÇO, EKK ve MÇA, KSDTR dağılımı için de EÇO, EKK, AEKK, AD ve CVM tahmin yöntemleri kullanılmıştır. Yapılan Monte Carlo simülasyonları sonucunda;

KSDKw $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametreleri için;

- tüm parametre durumlarında EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerlerinin örnek büyüklüğü arttıkça beklenildiği gibi düzenli bir şekilde azaldığı ve sıfıra yaklaştığı söylenebilir.
- λ_2 parametresinin EÇO tahmin edicisinin yan değerinin diğer parametrelere göre büyük olduğu görülmüştür.
- b parametresinin EÇO tahmin edicisinin yan ve HKO değerleri diğer üç parametrenin EÇO tahmin edicilerinin yan ve HKO değerlerine göre daha küçüktür

KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametreleri için;

- a,b ve λ_2 parametreleri için EÇO, α ve λ_1 parametreleri için ise MÇA tahmin edicilerinin HKO değerleri en küçüktür.
- $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda örnek büyüklüğü 1000 iken örnek büyüklüğü 500 olduğundaki sonuçlara göre daha büyük HKO ve yan değerleri elde edilmiştir. Bu beklenmedik durum a parametresi için yapılan tahminlerde daha net görülmektedir. Bu problem yapılan simülasyondan kaynaklanabileceği gibi tahmin yapılırken büyük örnek sayılarında parametreye bağlı olarak yapılan hesaplamalardaki güçlüklerden de kaynaklanabilmektedir.
- a,b ve λ_2 parametreleri için EÇO, α ve λ_1 parametreleri için ise MÇA tahmin edicilerinin HKO değerleri en küçüktür.
- $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)=(1.2,1.5,0.5,0.6,0.95)$ durumunda örnek büyüklüğü 1000 iken örnek büyüklüğü 500 olduğundaki sonuçlara göre daha büyük HKO ve yan değerleri elde edilmiştir. Bu beklenmedik durum a parametresi için yapılan tahminlerde daha net görülmektedir. Bu problem yapılan simülasyondan

kaynaklanabileceği gibi tahmin yapılırken büyük örnek sayılarında parametreye bağlı olarak yapılan hesaplamalardaki güçlüklerden de kaynaklanabilmektedir.

KSDTR$(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametreleri için;

EÇO tahmin edicilerinin KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametrelerinin tahmininde diğer tahmin edicilere göre HKO ve yan açısından daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Bazı parametre durumlarında CVM tahmin edicisinin λ_2 parametresi için EÇO tahmin edicisinden daha küçük HKO ve yan değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Bu durumda KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının parametrelerinin tahmini için EÇO ve CVM tahmin edicileri önerilebilir. Farklı parametre değerleri denenerek bu tahmin edicilerin performansları detaylı incelenebilir.

Tanıtılan üç yeni istatistiksel dağılımın gerçek yaşamda yeri olduğunu gösterebilmek ve literatürde yer alan bazı bilinen dağılımlar ile gerçek yaşam verilerine olan uyumlarını kıyaslamak için gerçek veri uygulamalarına yer verilmiştir.

Gerçek veri analizi sonuçlarına göre;

KSDKw $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının Brito (2009) tarafından elde edilen süt üretimi ile ilgili veriye ve Dasgupta (2011) tarafından elde edilen demir saçtan yapılan delik işlemeler ile ilgili olan çalışma ve ampirik veri kümesine uyum gösterdiği belirlenmiştir. Bu önerilen istatistiksel dağılımın süt üretimi ve demir işleme gibi gerçek yaşam alanlarında değerlendirilebileceği öngörülmüştür. Ayrıca KSDKw $(a,b,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımına sahip X rasgele değişkeninin $(0,1)$ aralığında tanımlı olması literatürdeki az sayıdaki $(0,1)$ aralığında tanımlı dağılıma alternatif olması yönünden literatüre sağladığı katkı bakımından oldukça büyük bir öneme sahiptir.

KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının Brito (2009) tarafından elde edilen süt üretimi ile ilgili veriye ve Nichols ve Padgett (2006) tarafından elde edilen demir saçtan yapılan delik işlemeler ile ilgili olan karbon lifi veri kümesine uyum gösterdiği belirlenmiştir. Bu önerilen istatistiksel dağılımın süt üretimi ve demir işleme gibi gerçek yaşam alanlarında değerlendirilebileceği öngörülmüştür. Ayrıca iki veri uygulamasında elde edilen sonuçlara göre KSDGG $(a,b,\alpha,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının DGG, GG ve Gompertz dağılımlarına bir alternatif olduğu görülmüştür.

KSDTR $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ dağılımının Hinkley (1977) tarafından elde edilen yağış miktarı ile ilgili veri kümesine uyum gösterdiği belirlenmiştir. Bu önerilen istatistiksel

dağılımın yağış miktarı tahmininde değerlendirilebileceği öngörülmüştür. Buna ek olarak önerilen bu yeni dağılımın bu veri setinde literatürde daha önce TR dağılımı kullanılarak elde edilen DTR ve DÜTR dağılımlarına göre daha iyi uyum göstererek bu dağılımlara ve TR dağılımına iyi bir alternatif olduğu görülmüştür.

7.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında KSDY kullanılarak KSDKw, KSDGG ve KSDTR isminde üç yeni dağılım önerilmiştir. KSDY kullanılabilirliğini göstermek için bu dağılımlar ailesi genişletilebilir. Kübik sıralı dönüştürülmüş dağılımlar ailesi üzerinde daha önce literatürde yer alan genelleştirme yöntemleri kullanılarak yeni dağılım aileleri önerilebilir. Sıra istatistikleri yardımı ile oluşturulan ve yeni dağılım elde etmeye yönelik olan KSDY'den ilham alarak yeni dağılım elde etme yöntemi geliştirilebilir. Ayrıca elde edilen yeni dağılımların gerçek yaşamdaki kullanım alanlarını daha fazla yaşam veri analizi yaparak genişletilebilir. Parametre tahminlerinde ise simülasyon çalışmaları sonuçlarından yola çıkarak EÇO tahmin edicisi önerilebilir. EÇO tahmin edicisinin yanında alternatif tahmin ediciler kullanılarak daha geniş simülasyon çalışmalarında bu tahmin edicilerin parametrelere göre performansları incelenebilir. Bu tahmin edicilere ilişkin güven aralıkları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Abdul-Moniem, I. ve Seham, M., 2015, Transmuted gompertz distribution, *Comput Appl Math J*, 1 (3), 88-96.

Afify, A. Z., Hamedani, G., Ghosh, I. ve Mead, M., 2014, The transmuted Marshall-Olkin Fréchet distribution: properties and applications, *International Journal of Statistics and Probability*.

Afify, A. Z., Cordeiro, G. M., Yousof, H. M., Alzaatreh, A. ve Nofal, Z. M., 2016, The Kumaraswamy transmuted-G family of distributions: properties and applications, *Journal of Data Science*, 14 (2), 245-270.

Ahmad, A., Ahmad, S. ve Ahmed, A., 2014, Transmuted Inverse Rayleigh distribution: a generalization of the Inverse Rayleigh distribution, *Mathematical Theory and Modeling*, 4 (7), 90-98.

Akaike, H., 1998, Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, In: Selected papers of hirotugu akaike, Eds: Springer, p. 199-213.

Alizadeh, M., Merovci, F. ve Hamedani, G. G., 2017, Generalized transmuted family of distributions: properties and applications, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46 (4), 645-667.

Anderson, T. W. ve Darling, D. A., 1952, Asymptotic theory of certain" goodness of fit" criteria based on stochastic processes, *The annals of mathematical statistics*, 23 (2), 193-212.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. ve Nagaraja, H. N., 1992, A first course in order statistics, Siam, p.

Aryal, G. R. ve Tsokos, C. P., 2011, Transmuted Weibull distribution: A generalization of theWeibull probability distribution, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (2), 89-102.

Aslam, M., Hussain, Z. ve Asghar, Z., 2018, Cubic transmuted-g family of distributions and its properties, *Stochastics and Quality Control*, 33 (2), 103-112.

Bakouch, H., Jamal, F., Chesneau, C. ve Nasir, A., 2017, A new transmuted family of distributions: Properties and estimation with applications.

Brito, R., 2009, Estudo de expansoes assintóticas, avaliaçao numérica de momentos das distribuiçoes beta generalizadas, aplicaçoes em modelos de regressao e análise discriminante, *Master's thesis, Universidade Federal Rural de Pernambuco*.

Bumham, K. P. ve Anderson, D. R., 2002, Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach, *Spnnger-Veflag, New York, New York*.

Casella, G. ve Berger, R. L., 2002, Statistical inference, Duxbury Pacific Grove, CA, p.

Chen, G. ve Balakrishnan, N., 1995, A general purpose approximate goodness-of-fit test, *Journal of Quality Technology*, 27 (2), 154-161.

Cheng, R. ve Amin, N., 1983, Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 45 (3), 394-403.

Clark, A., 1984, Elements of abstract algebra, Courier Corporation, p.

Cordeiro, G. M. ve dos Santos Brito, R., 2012, The beta power distribution, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 26 (1), 88-112.

Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M., Pescim, R. R. ve Aryal, G. R., 2017, The exponentiated Weibull-H family of distributions: Theory and Applications, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14 (4), 155.

Dasgupta, R., 2011, On the distribution of burr with applications, *Sankhya B*, 73 (1), 1-19.

El-Gohary, A., Alshamrani, A. ve Al-Otaibi, A. N., 2013, The generalized Gompertz distribution, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (1-2), 13-24.

Elgarhy, M., Elbatal, I., ul Haq, M. A. ve Hassan, A. S., 2018, Transmuted Kumaraswamy quasi Lindley distribution with applications, *Annals of Data Science*, 5 (4), 565-581.

Gamgam, H. ve Altunkaynak, B., 2012, Parametrik olmayan yöntemler: SPSS uygulamalı, Seçkin Yayıncılık, p.

Giesbrecht, F. ve Kempthorne, O., 1976, Maximum likelihood estimation in the three-parameter lognormal distribution, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 38 (3), 257-264.

Gompertz, B., 1825, XXIV. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c, *Philosophical transactions of the Royal Society of London* (115), 513-583.

Granzotto, D., Louzada, F. ve Balakrishnan, N., 2017, Cubic rank transmuted distributions: inferential issues and applications, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87 (14), 2760-2778.

Granzotto, D. C. T. ve Louzada, F., 2015, The transmuted log-logistic distribution: Modeling, inference, and an application to a polled tabapua race time up to first calving data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 44 (16), 3387-3402.

Granzotto, D. C. T., 2017, Transmutation maps: modeling, structural properties, estimation and applications, *Universidade de São Paulo*.

Griffiths, D. A., 1980, Interval estimation for the three-parameter lognormal distribution via the likelihood function, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 29 (1), 58-68.

Gupta, A. K. ve Chen, J. T., 2004, A class of multivariate skew-normal models, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56 (2), 305.

Gupta, R. D. ve Kundu, D., 2001, Generalized exponential distribution: different method of estimations, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 69 (4), 315-337.

Harter, H. L. ve Moore, A. H., 1965, Maximum-likelihood estimation of the parameters of gamma and Weibull populations from complete and from censored samples, *Technometrics*, 7 (4), 639-643.

Hinkley, D., 1977, On quick choice of power transformation, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 26 (1), 67-69.

Hurvich, C. M. ve Tsai, C.-L., 1989, Regression and time series model selection in small samples, *Biometrika*, 76 (2), 297-307.

Khan, M. S., King, R. ve Hudson, I., 2014, Transmuted Gompertz distribution with application, *8th Australia–New Zealand Mathematics Convention, held at Melbourne at Parkville Campus the University of Melbourne, from December*, 8-12.

Khan, M. S., King, R. ve Hudson, I. L., 2016, Transmuted kumaraswamy distribution, *Statistics in Transition new series*, 17 (2), 183-210.

Khan, M. S., King, R. ve Hudson, I. L., 2017a, Transmuted Generalized Gompertz distribution with application, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 16 (1), 65-80.

Khan, M. S., King, R. ve Hudson, I. L., 2017b, Transmuted generalized exponential distribution: A generalization of the exponential distribution with applications to survival data, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46 (6), 4377-4398.

Kozubowski, T. J. ve Podgórski, K., 2016, Transmuted distributions and random extrema, *Statistics & Probability Letters*, 116, 6-8.

Kumaraswamy, P., 1980, A generalized probability density function for double-bounded random processes, *Journal of Hydrology*, 46 (1-2), 79-88.

Lambert, J., 1964, ESTIMATION OF PARAMETERS IN THE THREE-PARAMETER LOGNORMAL DISTRIBUTION 1, *Australian Journal of Statistics*, 6 (2), 29-32.

Lemonte, A. J., Barreto-Souza, W. ve Cordeiro, G. M., 2013, The exponentiated Kumaraswamy distribution and its log-transform, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 27 (1), 31-53.

Lindley, D. V., 1958, Fiducial distributions and Bayes' theorem, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 102-107.

Macdonald, P., 1971, Comments and Queries Comment on "An Estimation Procedure for Mixtures of Distributions" by Choi and Bulgren, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 33 (2), 326-329.

Mahmoud, H. M., 2011, Sorting: A distribution theory, John Wiley & Sons, p.

Merovci, F., 2013a, Transmuted exponentiated exponential distribution, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 1 (2), 112-122.

Merovci, F., 2013b, Transmuted rayleigh distribution, *Austrian Journal of Statistics*, 42 (1), 21-31.

Merovci, F., Alizadeh, M. ve Hamedani, G., 2016, Another generalized transmuted family of distributions: properties and applications, *Austrian Journal of Statistics*, 45 (3), 71-93.

Nichols, M. D. ve Padgett, W., 2006, A bootstrap control chart for Weibull percentiles, *Quality and reliability engineering international*, 22 (2), 141-151.

Nofal, Z. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M. ve Cordeiro, G. M., 2017, The generalized transmuted-G family of distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46 (8), 4119-4136.

Rahman, M. M., Al-Zahrani, B. ve Shahbaz, M. Q., 2018, A general transmuted family of distributions, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 14 (2), 451-469.

Roberts, C. ve Geisser, S., 1966, A necessary and sufficient condition for the square of a random variable to be gamma, *Biometrika*, 53 (1/2), 275-278.

Schwarz, G., 1978, Estimating the dimension of a model, *The annals of statistics*, 6 (2), 461-464.

Shaw, W. T. ve Buckley, I. R., 2009, The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic-normal distribution from a rank transmutation map, *arXiv preprint arXiv:0901.0434*.

Snipes, M. ve Taylor, D. C., 2014, Model selection and Akaike Information Criteria: An example from wine ratings and prices, *Wine Economics and Policy*, 3 (1), 3-9.

Swain, J. J., Venkatraman, S. ve Wilson, J. R., 1988, Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29 (4), 271-297.

Tian, Y., Tian, M. ve Zhu, Q., 2014, Transmuted linear exponential distribution: A new generalization of the linear exponential distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 43 (10), 2661-2677.

ul Haq, M. A., 2016, Transmuted exponentiated inverse Rayleigh distribution, *J. Stat. Appl. Prob*, 5 (2), 337-343.

Usman, R. M., Haq, M. ve Talib, J., 2017, Kumaraswamy half-logistic distribution: properties and applications, *J Stat Appl Probab*, 6, 597-609.

Vicari, D. ve Kotz, S., 2005, Survey of developments in the theory of continuous skewed distributions, *Metron*, 63 (2), 225-261.

Wang, J., Boyer, J. ve Genton, M. M. G., 2004, A note on an equivalence between chi-square and generalized skew-normal distributions, *Statistics & Probability Letters*, 66 (4), 395-398.

Wilson, E. B. ve Worcester, J., 1945, The normal logarithmic transform, *The Review of Economic Statistics*, 17-22.

Wingo, D. R., 1972, Maximum likelihood estimation of the parameters of the Weibull distribution by modified quasilinearization, *IEEE Transactions on reliability*, 21 (2), 89-93.

Wingo, D. R., 1975, The use of interior penalty functions to overcome lognormal distribution parameter estimation anomalies, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 4 (1), 49-61.

Wingo, D. R., 1976, Moving truncations barrier-function methos for estimation in three-parameter lognormal models, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, 5 (1), 65-80.

Yousof, H. M., Alizadeh, M., Jahanshahiand, S., Ramires, T. G., Ghosh, I. ve Hamedani, G., 2017, The transmuted Topp-Leone G family of distributions: theory, characterizations and applications, *Journal of Data Science*, 15 (4), 723-740.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Caner TANIŞ
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Kastamonu /28.07.1989
Telefon	**:**	0530 016 25 67
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	ctanis@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Kuzeykent Lisesi, Merkez, Kastamonu	2007
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü, Selçuklu, Konya	2012
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, Selçuklu, Konya	2016
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-	Selçuk Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI

Uygulamalı İstatistik, İstatistik Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce (2014 YDS Sonbahar: 70, 2017 Mart YÖKDİL: 68.75)

YAYINLAR

Ulusal ve Uluslararası Hakemli dergilerde Yayınlanan Makaleler

1. Tanış, C., Saraçoğlu, B. (2017) Statistical Inference Based on Upper Record Values for the Transmuted Weibull Distribution. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI),* 5(9), 18-23.

2. Danışman, F., **Tanış, C.** (2018). Gürsel, M. Diş hekimliğinde ekip çalışması etkinliğinin iş tatmini ve hasta güvenliği kültürü üzerine etkisinin incelenmesi. *Selcuk Dental Journal, 5*(1), 59-66.

3. Saraçoğlu, B., **Tanış, C.** (2018). A new statistical distribution: cubic rank transmuted Kumaraswamy distribution and its properties. *Journal of the National Science Foundation of Sri Lanka,* 46(4), 505-518 (Doktora Tezinden yapılmıştır).

4. Tanış, C., Çokbarlı, M., Saraçoğlu, B. Approximate Bayes Estimation for Log-Dagum Distribution. *Cumhuriyet Science Journal*, *40*(2), 477-486.

5. Tanış, C., Saraçoğlu, B. Comparisons of six different estimation methods for log-Kumaraswamy distribution. *Thermal Science,* 23(6), 1839-1847.

Uluslararası Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler

1. Tanış, C., Genç A., "Investigation of Effecting Factors on Academic Achievement with Logistic Regression Analysis: Sample of Selcuk University", *2 nd International Researchers, Statisticians And Young Statisticians Congress, 2016,* Ankara, syf:43 (Yüksek Lisans Tezinden yapılmıştır).

2. Tanış, C., Saraçoğlu, B., Estimation of Stress-Strength Reliability Based on Upper Record Values for the Exponential Power Distribution, *3 rd International Researchers, Statisticians And Young Statisticians Congress 24-26 May 2017,* Konya, syf:288.

3. Tanış, C., Saraçoğlu, B., "Estimation of Parameters Based on Record Values for The Transmuted Weibull Distribution", *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences, COSTAS-(2017),*syf:82.

4. Saraçoğlu, B., **Tanış, C.**,"Cubic Rank Transmuted Kumaraswamy Distribution" *International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences,, COSTAS-(2017),*syf:84 (Doktora Tezinden yapılmıştır).

5. Saraçoğlu, B., **Tanış, C.**, "Transmuted Complementary Exponential Power Distribution", *10. International Statistics Congress, ISC-(2017),*syf:162.

6. Tanış, C., Saraçoğlu, B., " Cubic Rank Transmuted Exponentiated Exponential Distribution" *10. International Statistics Congress, ISC-(2017),*syf:170.

7. Çokbarlı M., **Tanış, C.**, Saraçoğlu, B., "Power Dagum Distribution: Properties and Applications" *4. Researchers Statisticians and Young Statisticians Congress, IRSYSC-2018,*syf:151.

8. Tanış, C., Saraçoğlu, B., "Generalized Cubic Transmuted Family of Distributions and Its Statistical Properties" *4. Researchers Statisticians and Young Statisticians Congress, IRSYSC-2018,*syf:158.

9. Tanış, C., Saraçoğlu, B.,"Cubic Rank Transmuted Generalized Gompertz Distribution" *7. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, IECMSA-2018, Kyiv-Ukraine,*syf:260 (Doktora Tezinden yapılmıştır).

10. Tanış, C., Çokbarlı, M., Saraçoğlu, B.,"Comparison of Some Estimators for Parameters of log-Dagum Distribution" *11. International Statistics Days Conference, ISDC-2018, Bodrum-Muğla,* syf:106.

11. Tanış, C., Saraçoğlu, B., "Comparisons of Some Estimation Methods for the parameters of Log-Kumaraswamy distribution", *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, ICAAMM-2019, İstanbul,* syf:216.

12. Akdoğan, Y., Özkan, E., Karakaya, K., **Tanış, C.**, "Estimation via Em Algorithm in Inverse Rayleigh Distribution Based On Type-I Hybrid Censored Sample", *5. International Academic Research Congress, April 17-21, 2019, Alanya,* syf:22.

13. Tanış, C., Saraçoğlu, B., "Cubic Rank Transmuted Inverse Rayleigh Distribution", *5. International Academic Research Congress, April 17-21, 2019, Alanya,* syf:23 (Doktora Tezinden yapılmıştır).

14. Tanış, C., Özkan, E., Akdoğan, Y., Karakaya, K., "Comparison Of Some Transmuted Distribution Family Based On Exponential Distribution", *5. International Academic Research Congress, April 17-21, 2019, Alanya,* syf:23.

15. Özkan, E., Saraçoğlu, B., Kuş, C., Kınacı, İ., **Tanış, C.**, "Parameter Estimation For Exponentiated Exponential-Poisson Distribution Under Progressive Hybrid Censoring", *5. International Academic Research Congress, April 17-21, 2019, Alanya,* syf:23.