TÜBİTAK

Relativistik Parçacıkların Kuantum Mekaniksel Tünellemesi ve Hawking Işıması Üzerindeki Kuantum Kütleçekimsel Etkiler

Program Kodu: 1002

Proje No: 116F329

Proje Yürütücüsü:
Doç. Dr. Yusuf SUCU

Bursiyer:
Dr. Ganim GEÇİM

MAYIS 2018
ANTALYA

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından “1002-Hızlı Destek Programı” kapsamında 116F329 kodlu ve "Relativistik Parçacıkların Kuantum Mekaniksel Tünellemesi ve Hawking Işıması Üzerindeki Kuantum Kütleçekimsel Etkiler” başlıklı proje kapsamında desteklenmiştir. Proje kapsamında, 2+1 boyutlu yeni-tip statik karadeliğin, elektriksel olarak yüklü ve dönen BTZ karadeliğinin, dönen Dilaton karadeliğinin ve statik solucan deliğinin Hawking ışımaları, genelleştirilmiş Heisenberg ilkesi çerçevesinde relativistik kuantum mekaniksel tünelleme yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Proje çıktısı olarak, bir çalışma “**Advances in High Energy Physics**” uluslararası hakemli dergisinde kabul edilmiş, bir çalışma “**Physics Letters B**” uluslararası hakemli dergisinde “Hakem değerlendirme aşamasında” ve iki çalışma da yayına gönderilme aşamasında olmak üzere dört adet makale elde edilmiştir.

TÜBİTAK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
ŞEKİL LİSTESİ iii
ÖZET iv
ASTRACT v
1. GİRİŞ 1
2. LİTERATÜR ÖZETİ 2
3. GEREÇ VE YÖNTEM 7
4. BULGULAR 10
4.1 (2+1) boyutlu Yeni-tip Kara Deliğinden Spin-1 Vektör Parçacığının Tünellemesinin Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler 10
4.2 (2+1) boyutlu CR- BTZ Kara Deliği Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler 13
4.2.1 Spin-0 Skaler Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 13
4.2.2 Spin-1/2 Dirac Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 16
4.2.3 Spin-1 Vektör Bozon Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 18
4.3 (2+1) boyutlu Dönen Dilaton Kara Deliği Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler 20
4.3.1 Spin-0 Skaler Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 20
4.3.2 Spin-1/2 Dirac Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 22
4.3.3 Spin-1 Vektör Bozon Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 23
4.4 (2+1) boyutlu Solucan Deliği Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler 25
4.4.1 Spin-0 Skaler Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 25
4.4.2 Spin-1/2 Dirac Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 26
4.4.3 Spin-1 Vektör Bozon Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı 27
5. SONUÇ 29
6. KAYNAKLAR 31

TÜBİTAK

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. $C_{Q,J} - r_+$ grafiği. Mavi düz çizgi kuantum Kütleçekimsel etkiler altında ısı sığasını, kırmızı kesikli çizgi ise standart ısı sığasını temsil etmektedir. Burada, $E = 4, M_0 = 2, q = 3, Q = l = j = J = \hbar = 1$ olarak seçilmiştir .. ……..15

Şekil 2. $C_{Q,J} - r_+$ grafiği. Mavi düz çizgi kuantum Kütleçekimsel etkiler altında ısı sığasını, kırmızı kesikli çizgi ise standart ısı sığasını temsil etmektedir. Burada, $E = 4, M_0 = 2, q = 3, Q = l = j = \hbar = 1$ ve $J = -1$ olarak seçilmiştir ……..16

ÖZET

Projede, kuantum kütleçekim etkilerinin, 2+1 boyutlu yeni-tip statik kara deliğin, elektriksel olarak yüklü ve dönen BTZ kara deliğinin, dönen Dilaton karadeliğinin ve statik solucan deliğinin Hawking sıcaklıkları üzerindeki etkilerinin hesaplanması amaçlanmıştır. Bu amaç kapsamında; genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi çerçevesinde modifiye edilen Klein-Gordon, Dirac ve vektör bozon denklemleri kullanılarak söz konusu kara deliklerin ve solucan deliğinin modifiye Hawking sıcaklıkları, Hamilton-Jacobi yaklaşımı kapsamında, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik parçacıkların kuantum mekaniksel tünelleme yöntemi ile hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuçlar, modifiye Hawking sıcaklığının standart Hawking sıcaklığından daha düşük olduğunu göstermektedir. Ayrıca, modifiye Hawking sıcaklığının sadece kara deliğin/solucan deliğinin özelliklerine değil, aynı zamanda tünelleme yapan parçacıkların özelliklerine de bağlı olduğu gözlemlenmektedir. Bunun yanı sıra, kuantum kütleçekim etkilerin varlığında, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik parçacıkların karadelik ve solucan deliğinden farklı bir şekilde tünelleme yaptıkları ve dolayısıyla birbirinden farklı Hawking sıcaklıklarına neden oldukları görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Hawking sıcaklığı, karadelik, solucan deliği, kuantum kütleçekim, tünelleme.

ABSTRACT

In the project, it is aimed to calculate the quantum gravity effects on Hawking temperature of (2+1)-dimensional new-type black hole, charged rotating BTZ black hole, spinning Dilaton black hole, and static wormhole. For the purpose of the project, by using Klein-Gordon, Dirac and vector boson equations modified in the framework of generalized uncertainty Principle, and subsequently, Hawking temperature of the black holes and wormhole are calculated by the quantum mechanical tunneling method of spin-0, spin-1/2 and spin-1 relativistic particles in the context the Hamilton-Jacobi approach. The results show that the modified Hawking temperature is lower than the standard Hawking temperature. Also, it is observed that the modified Hawking temperature is related not only to the black hole/wormhole properties but also to the propersies of the tunneling particles. Moreover, in the presence of quantum gravitational effects, it has been seen that the spin-0, spin-1/2 and spin-1 relativistic particles were tunneling differently from the black holes and wormhole and hence they cause completely different Hawking temperature.

Key words: Hawking temperature, black hole, wormhole, quantum gravity, tunneling.

1. GİRİŞ

Klasik kütleçekim kuramlarının temel çözümlerinden olan karadelikler ve solucan delikleri, literatürde Hawking radyasyonu olarak bilinen ışımaları nedeniyle Planck ölçeğinde meydana gelen fiziksel süreçlerin anlaşılmasında önemli bir rol oynamaktadırlar. Klasik olarak ele alındığında, bir kara delik ışığın dahi kaçamayacağı, kütleçekimin çok güçlü olduğu uzay-zaman bölgesi olarak kabul edilir. Öte yandan, bir solucan deliği ise uzay-zamanın farklı iki bölgesine açılan iki ağızdan ve bu ağızları birleştiren bir boğazdan oluşur. Kütleçekimin kuantum mekaniksel etkilerinin önem kazanmaya başlaması, bu iki kozmik nesneyi modern fiziğin vazgeçilmez oyuncak modelleri haline getirmektedir. Kara deliğin olay ufku civarında önem kazanmaya başlayan kuantum mekaniksel etkiler vakum dalgalanmalarına neden olur. Hawking, kuantum vakum dalgalanmaları fikrini kullanarak, Schwarzchild kara deliği tarafından salınan kütlesiz skaler parçacıklar için bir spektrum elde etmiştir. Literatürde Hawking radyasyonu olarak bilinen kara delik ışıması modern bilimin en önemli keşiflerinden biridir. Bu keşif sayesinde; birbirinden ayrı olarak gözüken, genel görelilik, termodinamik ve kuantum mekaniği kuramları arasında tutarlı bir bağlantı kurulabileceğinin mümkün olduğu görülmüştür. Bu bağlamda, kara delikler ve solucan delikleri kütleçekimin kuantizasyonu hakkındaki bir fikrin test edilebileceği kozmik birer laboratuvar olarak kabul edilirler. Bu gelişmeler ışığında, Hawking ışımasını hesaplamak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Son zamanlarda, relativistik kuantum mekaniksel parçacıkların kara delikten tünelleme ilkesine dayanan Hamilton-Jacobi yöntemi kullanılarak birçok kara deliğin Hawking sıcaklığı hesaplanmıştır.

Öte yandan, sicim kuramı, ilmek (loop) kuantum kütleçekim kuramı, komutatif olmayan kuantum kütleçekim kuramı ve kuantum geometri gibi önemli kuantum kütleçekim kuramı adayları, Planck ölçeğinde ölçülebilir bir minimum uzunluğun olması gerektiğine işaret etmektedirler. Böyle bir minimum uzunluğun varlığı, standart Heisenberg belirsizlik ilkesinin genelleştirişmiş belirsizlik ilkesi (Generalized Uncertainty Principle, GUP) şeklinde modifiye edilmesine yol açar.

Proje çalışması kapsamında, 2+1 boyutlu yeni-tip statik karadelik, elektriksel olarak yüklü ve dönen Banados-Teitelboim-Zanelli (Rapor boyunca CR-BTZ kullanılacaktır) karadeliğinin, dönen Dilaton karadeliğinin ve statik solucan deliğinin Hawking ışımaları GUP çerçevesinde hesaplanmaktadır. Bunu yaparken, sırasıyla, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 temel parçacıklarını temsil eden GUP çerçevesinde modifiye edilen Klein-Gordon, Dirac ve vektör bozon denklemleri kullanılmaktadır. Bu çerçevede modifiye edilen Hawking sıcaklığının standart Hawking sıcaklığından daha düşük olduğu gözlemlenmektedir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Kuantum mekaniğini genel görelilik ile birleştirilerek, kendi içinde tutarlı kuantum kütleçekim kuramı oluşturma çabaları, 1930'larda başlayan ve günümüze kadar süregelen yoğun çalışmalara rağmen tam anlamıyla çözülememiş, modern kuramsal fiziğin en önemli problemlerinden biridir. Kuantum kütleçekim kuramı inşa etme çalışmalarında karşılaşılan önemli engel, genel görelilik kuramının alan denklemlerinin lineer olmayışlarıdır. Bu durum oluşturulacak kuantum kütleçekim kuramının renormalize olmasını zorlaştırmaktadır. Bir diğer önemli sorun ise genel görelilik kuramının uzay-zamanın geometrik bir kuramı olmasıdır. Bu durumda uzay-zaman dokusunun kuantizasyonun nasıl yapılacağı ve bunun ne anlama geleceği tam olarak bilinmemektedir. Öte yandan kuantum kuramı olasılıklar üzerine kurulu iken genel görelilik kuramı klasik fiziğin nedensellik ilkesi üzerine kuruludur.

Öte yandan, kuantum alan kuramının eğri uzay-zamana genellemesinin yapılması, Planck ölçeğinde hem temel parçacıkların hem de kütleçekimin davranışının araştırılabileceği bir çerçeve sağlamaktadır. Örneğin, karadeliklerin bir entropiye sahip olması, genişleyen evrenin ve karadeliğin parçacık yaratmaları, parçacık tünellemesi ve tuzaklanması gibi olaylar bu çerçeve kapsamında anlaşılmaktadır. Bu nedenle, spinli relativistik kuantum mekaniksel parçacıkları temsil eden dalga denklemlerinin eğri uzay-zamana genellemesi yapılarak, bu parçacıkların tünelleme, yaratılma-yok olma ve tuzaklanma gibi kuantum mekaniksel davranışlarının incelenmesi, bir kütleçekim kuramı oluşturulması açısından büyük bir öneme sahiptir.

Kuantum alan kuramının eğri uzay-zamandaki formalizminin en popüler sonuçlarından biri, literatürde Hawking ışıması olarak bilinen karadeliklerin ışıma yapabileceklerinin gösterilmiş olmasıdır. Karadelik olay ufku yakınında kütleçekim çok şiddetli olduğundan, olay ufku civarında kuantum mekaniksel etkiler önem kazanmaya başlar ve vakum dalgalanmalarına (quantum vacuum fluctuation) neden olur. Hawking (1974,1975), kuantum vakum dalgalanmaları fikrini kullanarak, Schwarzchild karadeliğinin olay ufku civarında parçacık-anti parçacık yaratılabileceğini ve dış uzaya kaçan parçacığın T_H sıcaklık değerine sahip bir spektrum oluşturabileceğini göstermiştir. Günümüzde, Hawking ışımasını hesaplamak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Relativistik kuantum mekaniksel parçacıkların karadelikten tünellemesi ilkesine dayanan Hamilton-Jacobi yaklaşımı en bilinen ve etkili yaklaşımdır. Bu yöntem, olay ufkunu gecen parçacığı temsil eden ve klasik olarak yasaklanmış eylem fonksiyonunun sanal kısmının hesaplanması ilkesine dayanır (Parikh ve Wilczek, 2000; Shankaranarayanan vd, 2001; Srinivasan ve Padmanabhan, 1999). Tünelleme yapan

parçacığın klasik olarak yasak olan yörüngesi, olay ufkunun iç kısmından dış uzaya doğru tünelleme olasılığı Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) yaklaşımı ile hesaplanır. Kara delikten parçacıkların tünellemesi fikrine dayanan Hamilton-Jacobi yaklaşımı çerçevesinde birçok karadeliğin Hawking sıcaklığı hesaplanmıştır (Gecim ve Sucu, 2013, 2015, 2017a; Kerner ve Mann, 2006, 2008; Kraus ve Wilczek, 1995; Li vd, 2016; Li ve Ren, 2008; Parikh ve Wilczek, 2000; Shankaranarayanan vd, 2001; Srinivasan ve Padmanabhan, 1999). Standart Heisenberg belirsizlik ilkesi bağlamında gerçekleştirilen tüm bu çalışmalarda, kara deliğin Hawking sıcaklığının sadece kara deliğin özelliklerine bağlı olduğu ve tünelleyen parçacığın özelliklerinden bağımsız olduğu görülmektedir.

Öte yandan, GUP çerçevesinde yapılan çalışmalarda hesaplanan modifiye Hawking sıcaklığının standart sıcaklıktan daha düşük olmasının yanı sıra, hem kara deliğin hem de tünelleme yapan parçacığın özelliklerine bağlı olduğu ortaya çıkmıştır (Chen vd, 2013a, 2013b, 2014a, 2014b; Gecim ve Sucu, 2017b, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d, 2018e, 2018f; Li ve Zu, 2015; Liu ve Ren, 2014). Bununla birlikte, yine GUP çerçevesinde, spin-0 skaler ve spin-1/2 parçacıklarının 2+1 boyutlu statik Martinez-Zanelli, yeni-tip ve Warped-AdS3 kara deliklerinden tünelleme olasılıklarının ve dolayısıyla sebep oldukları Hawking sıcaklıklarının birbirinden farklı olduğu gösterilmiştir (Gecim ve Sucu, 2017b, 2018a, 2018b).

Bu çalışmalar ışığında; proje çalışması kapsamında, 2+1 boyutta yeni-tip statik karadeliğin, CR-BTZ karadeliğinin, dönen Dilaton kara deliğinin ve statik solucan deliğinin modifiye Hawking sıcaklıkları ise, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik parçacıkların tünelleme yöntemi kullanılarak GUP çerçevesinde hesaplanacaktır (Yeni-tip statik kara deliğinin modifiye Hawking sıcaklığı spin-0 ve spin-1/2 relativistik parçacıklar için daha önce hesaplandığından (Gecim ve Sucu, 2018a), bu çalışmada, bu kara deliğin modifiye Hawking sıcaklığı hesabı sadece spin-1 için yapılmaktadır.).

2+1 boyutlu yeni-tip kara delik, yeni kütleli gravitasyon (New Massive Gravity) kuramının bir çözümüdür. Bu kuramda gravitasyonun taşıyıcı parçacığı olan graviton topolojik olarak bir kütleye sahiptir (Bergshoeff vd, 2009a, 2009b). Yeni-tip statik kara deliğin uzay-zaman metriği

$$ds^2 = L^2\left[f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2 d\phi^2\right] \tag{2.1}$$

ile verilir. Burada $L^2 = \frac{1}{2m^2} = \frac{1}{2\Lambda}$ gravitonun kütlesi, m, ve kozmolojik sabit cinsinden tanımlanan AdS_3 uzayının yarıçapıdır. $f(r) = (r - r_+)(r - r_-)$ olmak üzere, r_+ ve r_- sırasıyla dış ve iç olay ufku yarıçaplarıdır ve b ile c integrasyon sabitleri olmak üzere $r_\mp = \frac{1}{2}\left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4c}\right)$ şeklindedir. Yeni-tip kara delik b ve c integrasyon sabitlerinin işaretlerine göre çeşitli matematiksel ve fiziksel özelliklere sahip olur. Örneğin, $b^2 = 4c$ olması durumda kara deliğin iki olay ufku çakışır ve extremal olur. Öte yandan, $b = 0$ ve $c < 0$ olması durumunda statik BTZ kara deliğine indirgenmektedir (Kwon vd, 2011; Oliva vd, 2009). Ayrıca kara delik $r = 0$'da tekilliğe sahiptir.

CR-BTZ kara deliği, 2+1 boyutlu Einsten-Maxwell kütleçekim kuramının bir çözümüdür (Banados vd, 1992). Kara deliği temsil eden uzay-zaman metriği

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2\left[d\phi + N^\phi(r)dt\right]^2 \tag{2.2}$$

ile verilir. Burada, l kozmolojik sabit cinsinden $l^2 = -1/\Lambda$ şeklinde tanımlanan yarıçap, M, Q ve J sırasıyla karadeliğin kütlesi, elektriksel yükü ve açısal momentumu olmak üzere, $f(r)$ ve $N^\phi(r)$ aşağıdaki gibi verilir:

$$f(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \frac{Q^2}{2}ln\left(\frac{r}{l}\right),$$
$$N^\phi(r) = -\frac{J}{2r^2}.$$

Karadeliğin kütlesi ve dış olay ufkunun açısal hızı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$M = \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r_+^2} - \frac{Q^2}{2}ln\left(\frac{r_+}{l}\right),$$
$$\Omega_+ = \frac{J}{2r_+^2}.$$

Basitlik olması bakımından Denklem (2.2) $d\varphi = d\phi + N^\phi(r)dt$ dönüşümü yardımı ile aşağıdaki formda yazılabilir:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\varphi^2. \tag{2.3}$$

2+1 boyutlu dönen Dilaton karadeliği ise 2+1 boyutta standart Einstein kütleçekim kuramında gravitasyon eylem fonksiyonuna skaler Dilaton alanını temsil eden eylem

fonksiyonu eklenmesi ile elde edilen alan denklemlerinin bir çözümüdür (Chan ve Mann ,1996; Fernando, 2017). Bu çözümden ortaya çıkan kara deliğin uzay-zaman metriği,

$$ds^2 = F(r)dt^2 - \frac{1}{H(r)}dr^2 - R(r)^2\left[d\phi - \frac{2rJ}{R(r)^2}dt\right]^2 \quad (2.4)$$

şeklinde olur. Burada Λ kozmolojik sabit, M ve J, sırasıyla, karadeliğin kütlesi ve açısal momentumu olmak üzere, $F(r)$, $H(r)$ ve $R(r)$ fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$F(r) = \frac{16\Lambda r^2(4\Lambda r - M)}{8\Lambda r - M + \sqrt{M^2+32\Lambda J^2}}, \quad H(r) = \frac{4\Lambda r - M}{2r}, \quad R(r)^2 = r^2 + \frac{r\left(\sqrt{M^2+32\Lambda J^2} - M\right)}{8\Lambda}.$$

2+1 dönen Dilaton karadeliğinin $r = 0$'da bir tekilliği ve bu tekilliği saran $r_+ = \frac{M}{4\Lambda}$ yarıçaplı bir olay ufku bulunur ve olay ufkunun açısal hızı, Ω_+, aşağıdaki gibidir:

$$\Omega_+ = \frac{16\Lambda J}{M + \sqrt{M^2+32\Lambda J^2}}.$$

Denklem (2.4) $d\varphi = d\phi - \frac{2rJ}{R(r)^2}dt$ dönüşümü yardımı ile aşağıdaki formda yazılabilir:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\varphi^2. \quad (2.5)$$

2+1 boyutlu statik solucan uzay-zaman metriği aşağıdaki genel formda verilir:

$$ds^2 = e^{2\Phi(\mathrm{r})}dt^2 - \frac{1}{C(r)}dr^2 - r^2d\phi^2. \quad (2.6)$$

Burada $\Phi(\mathrm{r})$ "kızıla kayma" fonksiyonu ve $b(r)$ ise solucan deliğinin boğaz yarıçapını belirleyen "şekil" fonksiyonu olmak üzere $C(r) = 1 - \frac{b(r)}{r}$ (Kim vd, 2004; Jamil ve Farooq, 2010). $\Phi(\mathrm{r})$ "kızıla kayma" fonksiyonu, solucan deliğinin bir olay ufkuna sahip olmaması için r'in bütün değerleri için sonlu olmalıdır. Öte yandan, şekil fonksiyonu, $b(r)$, solucan deliğinin boğaz kısmında, yani solucan deliğinin boğaz yarıçapı r_0 olmak üzere, $b(r_0) = r_0$ ve $[rb'(r) - b(r)]_{r_0} < 0$ bağıntılarını sağlaması gerekir. Ayrıca, solucan deliği metriği asimptotik olarak düz olmalıdır, yani $|r| \to \infty$ limitinde $b(r)/r \to 0$ olmalıdır. Öte yandan, solucan deliği metriği farklı koordinat sistemlerinde yazılabilir. Örneğin, Eddington-Finkelstein koordinatlarındaki ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$ds^2 = e^{2\Phi}C(r)du^2 - 2e^{\Phi}dudr - r^2d\phi^2. \quad (2.7)$$

Solucan deliklerinin olay ufukları olmadığından, dinamik özelliklerini incelemek için tuzaklanma ufku (trapping horizon) tanımlanabilir (Hayward, 1998). Tuzaklanma olay ufku yarıçapını, r_h, belirlemek için (2.6) ile verilen uzay-zaman metriği

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b - r^2d\phi^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada h_{ab} iki boyutlu uzayın metriğidir. Buna göre, solucan deliği için tuzaklanma ufkunun yarıçapı, $h^{ab}\partial_a r\partial_b r = 0$ bağıntısı kullanılarak bulunur. Bu durumda, $\Phi = 0$ için, tuzaklanma ufkunun yarıçapı $r_h = b(r_h)$ olarak bulunur.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Kendi içinde tutarlı bir kuantum kütleçekim kuramı ile evrenin kökeni ve karadeliğin son aşaması gibi Planck ölçeğinde kütleçekimin temelindeki fiziksel problemlerin çözülmesini umuyoruz. Her ne kadar tutarlı bir kuantum kütleçekim kuramına sahip olmasak bile, şu anda, kuantum kütleçekim kuramından sezgisel olarak beklenen bazı özellikler sergileyen sicim kuramı, ilmek kuramı, komutatif olmayan kuantum kütleçekim kuramı gibi aday kuramlar inşa edilmiştir (Zwiebach, 2009; Aschieri vd, 2009; Gambini ve Pullin, 2011). Bu kuramların ortak özelliklerinden biri, Planck ölçeğinde ölçülebilir bir minimum uzunluğun var olabileceğine işaret etmeleridir (Amati vd, 1989; Konishi vd, 1990; Garay, 1995).

Ölçülebilir bir minimum uzunluğun varlığı, standart Heisenberg belirsizlik ilkesinin modifiye olmasına yol acar (Hossenfelder vd, 2003; Hossenfelder, 2006; Kempf vd, 1995). Bu bağlamda, GUP bağıntısının en basit ve iyi bilinen şekli aşağıdaki gibidir:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}[1 + \alpha(\Delta p)^2]. \tag{3.1}$$

Burada, α, M_{Planck} Planck kütlesi ve α_0 boyutsuz bir sabit olmak üzere $\alpha = \alpha_0/M_{Planck}$ şeklindedir. Böyle bir belirsizlik bağıntısı (Nozari ve Karami, 2005; Scardigli, 1999; Scardigli vd, 2017)

$$[x_i, p_i] = i\hbar\delta_{ij}(1 + \alpha p^2) \tag{3.2}$$

ile verilen komutasyon bağıntısından türetilir. Burada x_i ve p_i sırasıyla genelleştirilmiş konum ve momentum operatörleridir ve bunlar, x_{0i} standart konum ile p_{0i} standart momentum operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanırlar (Tawfik ve Diab, 2014):

$$x_i = x_{0i}$$
$$p_i = p_{0i}\left(1 + \alpha p_{0i}^2\right). \tag{3.3}$$

Genelleştirilmiş enerji ($\tilde{E}$) ifadesi de

$$\tilde{E} = E(1 - \alpha E^2) \tag{3.4}$$

şeklinde olur ve ayrıca $E^2 = p^2 + m^2$ enerji-momentum bağıntısı denklemde yerine yazılırsa, genelleştirilmiş enerji ($\tilde{E}$),

$$\tilde{E} = E\left(1 - \alpha(p^2 + m^2)\right)$$

biçiminde olur. Burada $p^2 = p_i p^i \cong -\hbar^2\left(\partial_i\partial^i - 2\alpha\hbar^2\left(\partial_j\partial^j\right)\left(\partial_i\partial^i\right)\right)$ (Nozari ve Karami, 2005).

GUP kapsamında modifiye edilen bağıntılar kullanılarak, Klein-Gordon, Dirac ve vektör bozon denklemleri modifiye edilebilirler. Standart Klein-Gordon denklemi,

$$-(i\hbar)^2\partial_t\partial^t\Phi = \left[(i\hbar)^2\partial_i\partial^i - M_0^2\right]\Phi$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, GUP çerçevesinde modifiye Klein-Gordon denklemi

$$\hbar^2\partial_t\partial^t\tilde{\Phi} + \hbar^2\partial_i\partial^i\tilde{\Phi} + 2\alpha\hbar^4\partial_i\partial^i\left(\partial_i\partial^i\tilde{\Phi}\right) + M_0^2(1 - 2\alpha M_0^2)\tilde{\Phi} = 0 \qquad (3.5)$$

olur (Chen vd, 2014b; Gecim ve Sucu 2017b, 2018a). Burada, $\tilde{\Phi}$ modifiye dalga fonksiyonu ve M_0 parçacığın kütlesidir.

Benzer şekilde 2+1 boyutta

$$-\mathrm{i}\overline{\sigma}^0(x)\partial_t\Psi = \left(\mathrm{i}\overline{\sigma}^i(x)\partial_i - \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu(x)\Gamma_\mu - \frac{m_0}{\hbar}\right)\Psi$$

ile verilen standart Dirac denklemi GUP kapsamında

$$\mathrm{i}\overline{\sigma}^0(x)\partial_t\tilde{\Psi} + \mathrm{i}\overline{\sigma}^i(x)(1 - \alpha m_0^2)\partial_i\tilde{\Psi} + \mathrm{i}\alpha\hbar^2\overline{\sigma}^i(x)\partial_i\left(\partial_j\partial^j\tilde{\Psi}\right) - \frac{m_0}{\hbar}(1 - \alpha m_0^2)\tilde{\Psi} - \alpha m_0\hbar\partial_j\partial^j\tilde{\Psi} - \mathrm{i}\overline{\sigma}^\mu(x)\Gamma_\mu\left(1 + \alpha\hbar^2\partial_j\partial^j - \alpha m_0^2\right)\tilde{\Psi} = 0 \qquad (3.6)$$

şeklinde modifiye edilir (Chen vd, 2014b; Nozari ve Karami, 2005; Gecim ve Sucu 2017b, 2018a). Burada, $\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}$ ile verin Dirac spinörü, $\overline{\sigma}^\mu(x)$ uzay-zaman koordinatlarına bağlı 2x2 Dirac matrisleri, Γ_μ spin-1/2 için spin bağlantı katsayılarıdır. Spin bağlantı katsayıları (Sucu ve Unal, 2007)

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} g_{\lambda\nu}\left(e^i_{\nu,\mu} e^\alpha_i - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\right)\left[\overline{\sigma}^\lambda(x), \overline{\sigma}^\nu(x)\right]$$

İle hesaplanır. Burada, e^α_i triadlar ve $\Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ ise Christoffell sembolüdür.

Son olarak, 2+1 boyutlu standart vektör bozon denklemi (Dernek vd 2017),

$$-\mathrm{i}\beta^0(x)\partial_t\Psi = \left(\mathrm{i}\beta^i(x)\partial_i - \mathrm{i}\beta^\mu(x)\Sigma_\mu - \frac{\mu_0}{\hbar}\right)\Psi,$$

$$\mathrm{i}\beta^0(x)\partial_t\widetilde{\Psi} + \mathrm{i}\beta^i(x)(1-\alpha\mu_0^2)\partial_i\widetilde{\Psi} + \mathrm{i}\alpha\hbar^2\beta^i(x)\partial_i\left(\partial_j\partial^j\widetilde{\Psi}\right) - \frac{\mu_0}{\hbar}(1-\alpha\mu_0^2)\widetilde{\Psi} - \alpha\mu_0\hbar\partial_j\partial^j\widetilde{\Psi} -$$
$$\mathrm{i}\beta^\mu(x)\Sigma_\mu\left(1+\alpha\hbar^2\partial_j\partial^j - \alpha\mu_0^2\right)\widetilde{\Psi} = 0 \qquad (3.7)$$

olarak modifiye edilir (Gecim ve Sucu, 2018c). β^μ ve Σ^μ sırasıyla Kemmer matrisleri ve spin-1 için spin bağlantı katsayılarıdır (Sucu ve Unal, 2005):

$$\beta^\mu = \overline{\sigma}^\mu(x) \otimes I + I \otimes \overline{\sigma}^\mu(x),$$
$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu.$$

4. BULGULAR

4.1 (2+1) boyutlu Yeni-tip Kara Deliğinden Spin-1 Vektör Parçacığının Tünellemesi Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler

Spin-1 vektör parçacıklarının (2+1) boyutlu dalga fonksiyonu,

$$\Psi_{VB} = exp\left(i\frac{S(t,r,\phi)}{\hbar}\right)\begin{pmatrix} A(t,r,\phi) \\ B(t,r,\phi) \\ B(t,r,\phi) \\ D(t,r,\phi) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

ile verilir. Yeni-tip kara deliğinden spin-1 vektör parçacıklarının tünellemesini incelemek için dalga fonksiyonu modifiye vektör bozon denkleminde yerine yazılıp, $\hbar$ ifadesini içeren terimler ihmal edildikten sonra aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$B\left[i\frac{L^2}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi} + i\alpha\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3 - \alpha\frac{\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \alpha L^2\mu_0^2 f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - L^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\right] + B\left[i\alpha\frac{f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - i\alpha\frac{L^2\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3\right] + A\left[i\alpha\frac{L\mu_0}{2r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + i\alpha\frac{L\mu_0 f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + iL^3\frac{\mu_0(1-\alpha\mu_0^2)}{2} + i\frac{L^2}{\sqrt{f}}\frac{\partial S}{\partial t}\right] = 0,$$

$$A\left[-L^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\alpha\frac{f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + i\alpha\frac{L^2\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - i\alpha\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3 - \alpha\frac{\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \alpha L^2\mu_0^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\frac{L^2}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + D\left[i\frac{L^2}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi} - -i\alpha\frac{L^2\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) + i\alpha\frac{f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - L^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 + \alpha L^2\mu_0^2 f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + i\alpha\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3 - \alpha\frac{\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right] + B\left[iL^3\mu_0(1-\alpha\mu_0^2) + i\alpha L\mu_0 f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + i\alpha\frac{L\mu_0}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right] = 0,$$

$$B\left[-L^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\alpha\frac{f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + i\alpha\frac{L^2\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - i\alpha\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3 - \alpha\frac{\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \alpha L^2\mu_0^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\frac{L^2}{r}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right] + D\left[i\alpha\frac{L\mu_0}{2r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + i\alpha\frac{L\mu_0 f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + iL^3\frac{\mu_0(1-\alpha\mu_0^2)}{2} - i\frac{L^2}{\sqrt{f}}\frac{\partial S}{\partial t}\right] = 0. \tag{4.2}$$

A, B ve D fonksiyonlarının katsayılar determinantından, modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{1}{f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{L^2\mu_0^2}{4} + \alpha\left[\frac{9f\mu_0^2}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{6f}{r^2L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{9\mu_0^2}{4r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{3L^2\mu_0^4}{4} - \frac{3f^2}{L^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4 - \frac{3}{L^2r^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4 + \frac{1}{r^2L^2f}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{\mu_0^2}{f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right] = 0\,. \tag{4.3}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemi çözmek için, klasik eylem fonksiyonunu, $S(t,r,\phi)$, çarpanlara ayırma yöntemi kullanılarak $S(t,r,\phi) = -Et + j\phi + (K_0(r) + \alpha K_1(r))$ şeklindeki ifadeyi Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazdıktan sonra aşağıdaki integral ifadesi elde edilir:

$$K_{\mp}(r) = \mp \int \frac{\sqrt{E^2 - f\left(\frac{\mu_0^2}{4} + \frac{j^2}{r^2}\right)}}{f}\left[1 + \frac{\alpha}{4L^2 f}\left(\frac{5fE^2L^2\mu_0^2 - 4E^4}{E^2 - f\left(\frac{\mu_0^2}{4} + \frac{j^2}{r^2}\right)}\right)\right]dr.$$

Burada, $K_+(r)$ karadelik olay ufkundan çıkan ve $K_-(r)$ ise içeri giren parçacıkların radyal yörüngelerini temsil etmektedir. Yukarıdaki integrali hesaplarsak aşağıdaki sonuç bulunur:

$$K_{\mp}(r_+) = \mp i\frac{\pi E}{(r_+ - r_-)}[1 + \alpha\Theta]. \tag{4.4}$$

Burada Θ kısaltması kullanılmıştır;

$$\Theta = \frac{(r_+ - r_-)^2\left(9L^2\mu_0^2 r_+^2 - 4j^2\right) + 16E^2 r_+^2}{8L^2 r_+^2 (r_+ - r_-)^2}.$$

Buna göre, karadeliğin olay ufkunda içeri giren ve dışarı çıkan kütleli vektör bozon parçacıklarının tünelleme olasılıkları sırasıyla şöyledir:

$$P_{\text{çıkan}} = exp\left[-\frac{2}{\hbar} ImK_+(r_+)\right],$$
$$P_{giren} = exp\left[-\frac{2}{\hbar} ImK_-(r_-)\right]. \tag{4.5}$$

Dolayısıyla, toplam tünelleme olasılığı,

$$\Gamma = exp\left[-\frac{2}{\hbar} ImS\right] = \frac{P_{\text{çıkan}}}{P_{giren}} \tag{4.6}$$

ile verilir. Öte yandan, tünelleme olasılığı, Boltzmann faktörü cinsinden,

$$\Gamma = exp[-\beta E] \tag{4.7}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, karadeliğin modifiye Hawking sıcaklığı,

$$T_H^{VB} = \frac{T_0}{[1+\alpha\Theta]} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Burada, $T_0 = \hbar\frac{(r_+ - r_-)}{4\pi}$ karadeliğin standart Hawking sıcaklığıdır.

Öte yandan, karadeliğin termal olarak yerel kararlılığı, sahip olduğu ısı sığası vasıtasıyla incelenebilir. Pozitif ısı sığası, karadeliğin yerel olarak kararlı olduğunu, negatif ısı sığası ise kararsız olduğunu söyler. Kararsız bir karadelik "faz geçişi" evresinden geçerek kararlı hale gelir. İki tür faz geçişi vardır: ısı sığasını sıfır yapan r_+ değerlerinin karşılık geldiği **birinci-tip** faz geçişi ile ısı sığasını tanımsız yapan r_+değerlerinin karşılık geldiği **ikinci-tip** faz geçişi. Bir karadeliğin ısı sığası,

$$C = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) \tag{4.9}$$

formülü ile hesaplanır. Burada M karadeliğin kütlesini ve T ise Hawking sıcaklığını temsil eder. Buna göre, Yeni-tip karadeliğin kütlesi $M = \frac{(r_+ - r_-)^2}{16G}$ olmak üzere, modifiye ısı sığası Denklem-(4.8) ve (4.9) kullanılarak hesaplanır;

$$C = \frac{\pi(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{16G\,\hbar L^2 r_+^3 (r_+ - r_-)}\ . \tag{4.10}$$

Burada A ve B kısaltmaları kullanılmıştır:

$$\mathrm{A} = 8L^2 r_+^5 + 8L^2 r_+^3 r_-^2 + 9\alpha L^2 \mu_0^2 r_+^5 + 4\alpha j^2 r_+^3 + 9\alpha L^2 \mu_0^2 r_+^3 r_-^2 + 20\alpha j^2 r_+ r_-^2\ ,$$
$$\mathrm{B} = 16L^2 r_+^4 r_- + 18\alpha L^2 \mu_0^2 r_+^4 r_- + 16\alpha j^2 r_+^2 r_- + 16E^2 r_+^3 + 8\alpha j^2 r_-^3\ .$$

Denklem-(10)'dan görüleceği üzere, yeni-tip karadeliğin modifiye ısı sığası $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ durumunda pozitif, $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ durumunda negatif ve $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ için ise sıfır olur. Buna göre, yeni-tip karadelik kararlı duruma gelmek için **birinci-tip** faz geçişi yapar. Öte yandan, $r_+ = r_-$ için modifiye ısı sığası ıraksar. Bu durumda karadelik kararlı hale gelmek için **ikinci-tip** faz geçişi yapar. Kuantum kütleçekim etkilerinin ihmal edildiği durumda ise standart ısı sığası

$$C_0 = \frac{\pi(r_+ - r_-)}{2G\,\hbar}$$

şeklindedir. Buna göre, ısı sığası , $r_+ = r_-$'da sıfır olur. Bu da, karadeliğin kararlı hale gelmesi için sadece **birinci-tip** faz geçişi yapması gerektiğini gösterir.

4.2 (2+1) Boyutlu CR- BTZ Kara Deliği Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler

4.2.1 Spin-0 Skaler Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

(2+1) boyutlu CR- BTZ karadeliği uzay-zaman metriği için modifiye Klein-Gordon denklemi

$$\frac{\hbar^2}{f}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial t^2} - \hbar^2 f\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\phi^2} + 2\alpha\hbar^4 f\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(f\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2}\right) + \frac{2\alpha\hbar^4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\phi^2}\right) - \left(\frac{qA_0^2}{f} - M_0^2\right)(1-2\alpha M_0^2)\tilde{\Phi} +$$
$$\frac{2iqA_0}{f}(1-2\alpha M_0^2)\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{4iq\alpha\hbar^3A_0}{f}\frac{\partial}{\partial t}\left(f\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\phi^2}\right) + \frac{2\alpha q^2\hbar^2A_0^2}{f}\frac{\partial}{\partial t}\left(f\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\phi^2}\right)=0 \qquad (4.2.1)$$

şeklinde yazılır. Skaler parçacığı temsil eden modifiye olmuş dalga fonksiyonu, $\tilde{\Phi}$, Φ_0 sabit olmak üzere,

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 exp\left(i\frac{S(t,r,\phi)}{\hbar}\right) \qquad (4.2.1)$$

ile verilen ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa, skaler parçacık için modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{f}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 - f^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + q^2A_0^2 - M_0^2 f - \frac{2\alpha f}{r^4}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^4 - 2\alpha f^3\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4 + 2qA_0(1-2\alpha M_0^2)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) +$$
$$2\alpha\left[fq^2A_0^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + 2qfA_0\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + \frac{q^2A_0^2}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 + \frac{2qA_0}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) - M_0^2\left((q^2A_0^2 - M_0^2 f)\right)\right] = 0. \qquad (4.2.2)$$

olarak elde edilir. Eylem fonksiyonu, $S(t,r,\phi)$, $S(t,r,\phi) = -(E - j\Omega_+)t + j\phi + (W_0(r) + \alpha W_1(r))$ şeklindeki ifadesini Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazdıktan sonra parçacığın radyal yörüngesi için aşağıdaki integral ifadesi elde edilir.

$$W_\mp(r) = \mp\int\frac{\sqrt{(E-j\Omega_+-qA_0)^2 - f\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{f}[1+\alpha\Delta]dr. \qquad (4.2.3)$$

Burada, Δ,

$$\Delta = \frac{f^2\left(M_0^4-\frac{j^4}{r^4}\right)+qfA_0\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)[2(E-j\Omega_+)-qA_0]}{f\left[(E-j\Omega_+-qA_0)^2-f\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]} - \frac{\left[(E-j\Omega_+)^2-f\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]}{f}\,.$$

Denklem (4.2.1) integralini hesaplarsak,

$$W_{\mp}(r_+) = \mp i\frac{\pi\left(E-j\Omega_++qQln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right)}{H}[1+\alpha\chi]$$

buluruz. Burada χ ve *H* kısaltmaları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\chi = \frac{4\mathrm{jqQH}ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\left[2(E-j\Omega_+)+\mathrm{qQH}ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right]+3Hr_+^2(E-j\Omega_+)^2\left(M_0^2+\frac{j^2}{r_+^2}\right)}{2Hr_+^2\left[E-j\Omega_++\mathrm{qQH}ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right]^2} - \frac{qQ(E-j\Omega_+)^2}{Hr_+\left[E-j\Omega_++\mathrm{qQH}ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right]}\,,$$

$$H = \frac{2r_+}{l^2}-\frac{J^2}{2r_+^3}-\frac{Q^2}{2r_+}.$$

Denklem (4.5), (4.6) ve (4.7) kullanılarak, dönen yüklü BTZ karadeliğinin, elektriksel yüklü ve kütleli skaler parçacığın tünellemesi sonucu hesaplanan sıcaklığı,

$$\mathrm{T}_H^{KG} = \frac{T_0}{[1+\alpha\chi]} \qquad (4.2.4)$$

olarak hesaplanır. Burada, T_0 karadeliğin standart Hawking sıcaklığı

$$T_0 = \frac{\hbar}{4\pi}\left(\frac{2r_+}{l^2}-\frac{J^2}{2r_+^3}-\frac{Q^2}{2r_+}\right) \qquad (4.2.5)$$

şeklindedir. Bu sonuç, kuantum kütleçekim etkileri altında, karadeliğin Hawking sıcaklığının sadece karadeliğin özelliklerine değil aynı zamanda, tünelleyen parçacığın özelliklerine de bağlı olduğunu göstermektedir. $\alpha = 0$ durumunda, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

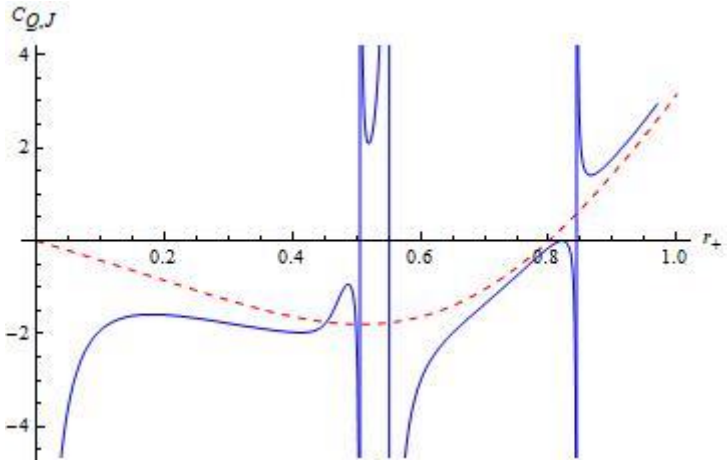
Öte yandan, karadeliğin termal olarak yerel kararlılığı, Denklem (4.9) ile verilen ısı sığası denklemi vasıtasıyla incelenebilir. Karadeliğin kütlesi, M,

$$M = \frac{r_+^2}{l^2}+\frac{J^2}{4r_+^4}-\frac{Q^2}{2}ln\left(\frac{r_+}{l}\right),$$

ve Denklem (4.2.4) kullanılarak karadeliğin modifiye ısı kapasitesi,

$$C = \frac{2\pi}{\hbar r_+\left(E-j\Omega_++\mathrm{qQ}ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right)}\frac{(X-Y)^2}{(A-B)} \qquad (4.2.6)$$

olarak hesaplanır. Burada X, Y, A ve B sabitleri, $E, j, q, Q, l, J, M_0, r_+$ sabitlerinin oldukça karmaşık birer fonksiyonlarıdır. Denklem (4.2.6)'ki modifiye ısı sığasının r_+'ya göre grafiği çizildiğinde bu faz geçişleri açık bir şekilde ortay çıkmaktadır.

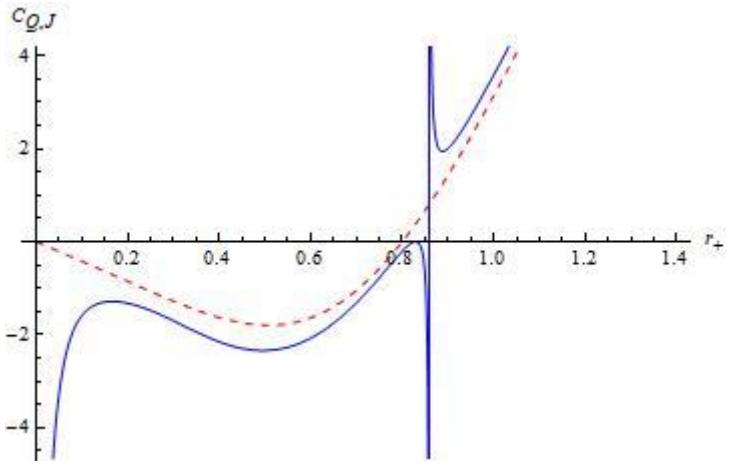


Şekil 1. $C_{Q,J} - r_+$ grafiği. Mavi düz çizgi kuantum Kütleçekimsel etkiler altında ısı sığasını, kırmızı kesikli çizgi ise standart ısı sığasını temsil etmektedir. Burada, $E = 4, M_0 = 2, q = 3, Q = l = j = J = \hbar = 1$ olarak seçilmiştir.

Şekil 1'de görüldüğü gibi, kuantum kütleçekimsel etkilerin olmadığı durumda karadeliğin ısı sığası, $0 < r_+ < 0.8$ aralığında negatif, $0 < r_+$ aralığında ise pozitiftir. Bu durumda, kara delik, $0 < r_+ < 0.8$ aralığında termal bakımından yerel olarak kararsız ve $0 < r_+$ aralığında ise kararlıdır. $r_+ = 0$ noktasında ısı sığası sıfırdır. Dolayısıyla, kuantum kütleçekimsel etkiler ihmal edildiğinde, karadelik birinci- tip faz geçişine uğrayarak kararlı duruma gelir.

Kuantum kütleçekimsel etkiler baskın olduğu durumda ise, karadelik $0 < r_+ < 0.51$ ve $0.55 < r_+ < 0.84$ aralıklarında karadelik termal bakımından yerel olarak kararsız ve $0.51 < r_+ < 0.55$ ile $0.84 < r_+$ aralıklarında kararlı olduğu görülmektedir. Kuantum kütleçekimsel etkiler altında karadelik ikinci-tip faz geçişi yaparak kararlı hale gelir. Özellikle, standart durumda $0.51 < r_+ < 0.55$ aralığında karadelik kararsız iken, Kuantum kütleçekimsel etkiler nedeniyle kararlı olduğunu vurgulamak önemlidir.

Öte yandan, karadeliğin açısal momentumu negatif ise, kuantum kütleçekimsel etkiler altında, karadelik $0 < r_+ < 0.51$ aralığında kararsız ve $0.84 < r_+$ aralığında ise kararlı olur. Kararlı duruma geçmek için ikinci-tip faz geçişine uğrar. Kuantum kütleçekimsel etkilerin ihmal edildiği durumda ise herhangi bir değişiklik gözlenmez (Şekil 2).



Şekil 2. $C_{Q,J} - r_+$ grafiği. Mavi düz çizgi kuantum Kütleçekimsel etkiler altında ısı sığasını, kırmızı kesikli çizgi ise standart ısı sığasını temsil etmektedir. Burada, $E = 4, M_0 = 2, q = 3, Q = l = j = \hbar = 1$ ve $J = -1$ olarak seçilmiştir.

4.2.2 Spin-1/2 Dirac Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

(2+1) boyutlu CR-BTZ karadeliği uzay-zaman metriği için spin bağlantı katsayıları, Pauli matrisleri cinsinden,

$$\Gamma_0 = -\frac{i}{4}\frac{df}{dr}\sigma^3\sigma^1,\ \Gamma_1 = 0,\ \Gamma_2 = \frac{1}{2}\sqrt{f}\sigma^1\sigma^2$$

olarak bulunur. Dirac parçacığının kuantum kütleçekim etkiler altında CR-BTZ karadeliğinden tünellemesini incelemek için, parçacığı temsil eden dalga fonksiyonu için

$$\Psi_D = exp\left(i\frac{S(t,r,\phi)}{\hbar}\right)\begin{pmatrix}A(t,r,\phi)\\B(t,r,\phi)\end{pmatrix} \tag{4.2.6}$$

şeklinde bir çözüm önerisi yapılır. Buna göre modifiye Dirac denklemi aşağıdaki diferansiyel denklem sistemine indirgenir:

$$A\left[\frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + m_0(1-\alpha m_0^2) + \frac{\alpha m_0}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \alpha m_0 f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{qA_0}{\sqrt{f}} + \alpha q A_0\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{\alpha q A_0}{r^2\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{\alpha q A_0 m_0^2}{\sqrt{f}}\right] + B\left[i\sqrt{f}(1-\alpha m_0^2)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{(1-\alpha m_0^2)}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) + i\alpha f^{3/2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 + \frac{i\alpha\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\alpha f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha}{r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3\right] = 0,$$

$$A\left[-i\sqrt{f}(1-\alpha m_0^2)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)+\frac{(1-\alpha m_0^2)}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)-i\alpha f^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3-\frac{i\alpha\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{\alpha f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha}{r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3\right]+B\left[\frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)-m_0(1-\alpha m_0^2)-\frac{\alpha m_0}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\alpha m_0 f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{qA_0}{\sqrt{f}}+\alpha qA_0\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha qA_0}{r^2\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\frac{\alpha qA_0 m_0^2}{\sqrt{f}}\right]=0.$$

Bu denklem sisteminin katsayılar determinantından, modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{f}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-f^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+q^2A_0^2-m_0^2 f-\frac{2\alpha}{r^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4-2\alpha f^3\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4+2qA_0(1-\alpha m_0^2)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)+2\alpha\left[fq^2A_0^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+qfA_0\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)+\frac{q^2A_0^2}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{qA_0}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)-m_0^2(q^2A_0^2-m_0^2 f)-\frac{4f^2}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right]=0.$$

olarak yazılır. $S(t,r,\phi)$, $S(t,r,\phi)=-(E-j\Omega_+)t+j\phi+(R_0(r)+\alpha R_1(r))$ çözüm önerisini Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazdıktan sonra Dirac parçacığın radyal yörüngesi için aşağıdaki integral elde edilir.

$$R_{\mp}(r)=\mp\int\frac{\sqrt{(E-j\Omega_+-qA_0)^2-f\left(m_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{f}[1+\alpha\Upsilon]dr. \qquad (4.2.7)$$

Burada, Υ kısaltması aşağıdaki gibidir:

$$\Upsilon=\frac{(E-j\Omega_+)(E-j\Omega_+-qA_0)\left[2m_0^2f-(E-j\Omega_+-qA_0)^2\right]}{f\left[(E-j\Omega_+-qA_0)^2-f\left(m_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]}.$$

Denklem (4.2.5) integrali hesaplanırsa,

$$\Pi=\frac{3Hr_+^2m_0^2(E-j\Omega_+)-\left[(E-j\Omega_+)\left(Hj^2+4q^2Q^2r_+ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right)+4qQr_+(E-j\Omega_+)^2\right]}{2Hr_+^2\left[E-j\Omega_++qQHln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right]}$$

olmak üzere, radyal yörünge

$$R_{\mp}(r_+)=\mp i\frac{\pi\left(E-j\Omega_++qQln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right)}{H}[1+\alpha\Pi]$$

olarak bulunur. Denklem (4.5), (4.6) ve (4.7) kullanılarak, dönen yüklü BTZ karadeliğin, elektriksel yüklü ve kütleli Dirac parçacığın tünellemesi sonucu hesaplanan sıcaklığı,

$$\mathrm{T}_H^D = \frac{T_0}{[1+\alpha\Pi]} \tag{4.2.8}$$

olarak hesaplanır. Burada, T_0 Denklem (4.2.5) ile verilen, karadeliğin standart Hawking sıcaklığıdır. Sonuç olarak, kuantum kütleçekim etkileri altında, karadeliğin Hawking sıcaklığının sadece karadeliğin özelliklerine değil aynı zamanda, tünelleme yapan Dirac parçacığının özelliklerine de bağlı olduğunu görülmektedir. Ayrıca, Denklem (4.2.4) ile Denklem (4.2.8) karşılaştırıldığında, skaler parçacık ile Dirac parçacığının karadelikten tünelleme olasılıklarının ve dolayısıyla Hawking sıcaklıklarının farklı olduğu görülmektedir. $\alpha = 0$ durumunda, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

4.2.3 Spin-1 Vektör Bozon Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

Spin-1 vektör parçacığının kuantum kütleçekim etkiler altında CR-BTZ karadeliğinden tünellemesini incelemek için, Denklem (4.1) ile verilen parçacığı temsil eden dalga fonksiyonu kullanılacaktır. Bu durumda, modifiye vektör bozon denklemi aşağıda verilen çiftlenimli diferansiyel denklem sistemine indirgenir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\left[i\alpha\frac{\mu_0}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 + i\alpha\frac{\mu_0 f}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + i\frac{\mu_0(1-\alpha\mu_0^2)}{2} + i\frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + i\frac{qA_0}{\sqrt{f}} + i\frac{\alpha qA_0}{r^2\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 + i\alpha qA_0\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \right.\\
&\left. i\frac{\alpha q\mu_0^2A_0}{\sqrt{f}}\right] + B\left[\frac{i}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) + \frac{i\alpha}{r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - \frac{\alpha\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \alpha\mu_0^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{i\alpha f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \right.\\
&\left.\alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - \frac{i\alpha\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] = 0,\\
&A\left[-\frac{i}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \frac{i\alpha}{r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - \frac{\alpha\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \alpha\mu_0^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \frac{i\alpha f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \right.\\
&\left.\alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 + \frac{i\alpha\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] + B\left[i\mu_0(1-\alpha\mu_0^2) + i\alpha f\mu_0\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{i\alpha\mu_0}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right] + D\left[\frac{i}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) + \frac{i\alpha}{r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - \right.\\
&\left.\frac{\alpha\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \alpha\mu_0^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{i\alpha f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - \frac{i\alpha\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B\left[-\frac{i}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \frac{i\alpha}{r^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - \frac{\alpha\sqrt{f}}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \alpha\mu_0^2\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \frac{i\alpha f}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \right.\\
&\left.\alpha f\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 + \frac{i\alpha\mu_0^2}{r}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] + D\left[-i\frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + i\alpha\frac{\mu_0}{2r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 + i\alpha\frac{\mu_0 f}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + i\frac{\mu_0(1-\alpha\mu_0^2)}{2} - i\frac{qA_0}{\sqrt{f}} - \right.\\
&\left. i\frac{\alpha qA_0}{r^2\sqrt{f}}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 - i\alpha qA_0\sqrt{f}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + i\frac{\alpha q\mu_0^2A_0}{\sqrt{f}}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

A, B ve D fonksiyonlarının katsayılar determinantından, vektör bozon parçacığı için modifiye olmuş Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{1}{f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-f\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+q^2A_0^2-\frac{\mu_0^2}{4}+\alpha\left[\frac{3\mu_0^2}{4}+\frac{9f\mu_0^2}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{r^2f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\frac{\mu_0^2}{f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{6f}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{9\mu_0^2}{4r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-3f^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4-\frac{3}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+4qA_0\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)-\frac{4qA_0\mu_0^2}{f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)+\frac{3q^2A_0^2}{r^2f}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{4qA_0}{f}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+3q^2A_0^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{3q^2A_0^2\mu_0^2}{f}\right]=0 \quad (4.2.10)$$

olarak bulunur. Burada, $S(t,r,\phi)$, $S(t,r,\phi)=-(E-j\Omega_+)t+j\phi+(R_0(r)+\alpha R_1(r))$ şeklindeki çözüm önerisi için,

$$\tilde{\Upsilon}=\frac{(E-j\Omega_+)(E-j\Omega_+-qA_0)\left[5\mu_0^2f-4(E-j\Omega_+-qA_0)^2\right]}{4f\left[(E-j\Omega_+-qA_0)^2-f\left(\frac{\mu_0^2}{4}+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]}$$

olmak üzere aşağıdaki integral ifadesi bulunur:

$$R_{\mp}(r)=\mp\int\frac{\sqrt{(E-j\Omega_+-qA_0)^2-f\left(\frac{\mu_0^2}{4}+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{f}\left[1+\alpha\tilde{\Upsilon}\right]dr.$$

Olay ufku civarında bu integrali hesaplarsak,

$$R_{\mp}(r_+)=\mp i\frac{\pi\left(E-j\Omega_++qQln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right)}{H}\left[1+\alpha\tilde{\Pi}\right]$$

sonucunu buluruz. Burada, $\tilde{\Pi}$ kısaltması şu şekildedir:

$$\tilde{\Pi}=\frac{(E-j\Omega_+)\left[9H\mu_0^2r_+^2-4\left(4\mathrm{qQ}r_+(E-j\Omega_+)+Hj^2+4\mathrm{q}^2\mathrm{Q}^2r_+ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right)\right]}{8Hr_+^2\left[E-j\Omega_++\mathrm{qQH}ln\left(\frac{r_+}{l}\right)\right]}.$$

Bu bağlamda, (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılarak, CR-BTZ karadeliğin, elektriksel olarak yüklü ve kütleli vektör bozon parçacığın tünellemesinden hesaplanan modifiye Hawking sıcaklığı,

$$\mathrm{T}_H^{VB}=\frac{T_0}{\left[1+\alpha\tilde{\Pi}\right]} \quad (4.2.11)$$

olarak bulunur. Burada, T_0 Denklem (4.2.5) ile verilen, karadeliğin standart Hawking sıcaklığıdır. Sonuç olarak, kuantum kütleçekim etkileri altında, karadeliğin Hawking sıcaklığının sadece karadeliğin özelliklerine değil aynı zamanda, tünelleme yapan vektör bozon parçacığının özelliklerine de bağlı olduğunu görülmektedir. Ayrıca, Denklem (4.2.4), (4.2.8) ve (4.2.11) karşılaştırıldığında, skaler, Dirac ve vektör bozon parçacıklarının Hawking sıcaklıklarının ve dolayısıyla karadelikten tünelleme olasılıklarının farklı olduğu görülmektedir. $\alpha = 0$ durumunda, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

Dolayısıyla, kuantum Kütleçekimsel etkilerin varlığında, farklı spinli relativistik parçacıkların karadelik ile farklı bir şekilde etkileştikleri ortaya çıkmaktadır.

4.3 (2+1) Boyutlu Dönen Dilaton Kara Deliği Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler

4.3.1 Spin-0 Skaler Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

(2+1) boyutlu dönen Dilaton karadeliği uzay-zaman zemininde modifiye Klein-Gordon denklemi

$$\frac{\hbar^2}{F}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial t^2} - \hbar^2 H\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{R^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial \phi^2} + 2\alpha\hbar^4 H\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(H\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2}\right) + \frac{2\alpha\hbar^4}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial \phi^2}\right) + M_0^2(1-2\alpha M_0^2)\tilde{\Phi} = 0 \tag{4.3.1}$$

olarak indirgenir. Denklem (4.2.1) ile verilen çözüm önerisini (4.3.1)'de yerine yazılıp $\hbar^2$ içeren terimler ihmal edildikten sonra, skaler parçacık için modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - M_0^2(1-2M_0^2) - \frac{2\alpha}{R^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4 - 2\alpha H^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4 = 0 \tag{4.3.2}$$

şeklinde olur. Eylem fonksiyonu, $S(t,r,\phi)$, değişkenleri cinsinden $S(t,r,\phi) = -(E - j\Omega_+)t + j\phi + (W_0(r) + \alpha W_1(r))$ şeklindeki ifadesini Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazılırsa, parçacığın radyal yörüngesi için aşağıdaki integral elde edilir:

$$W_{\mp}(r) = \mp\int \frac{\sqrt{(E-j\Omega_+)^2 - F\left(M_0^2 + \frac{j^2}{R^2}\right)}}{\sqrt{HF}}\left[1 + \alpha\frac{F^2\left(M_0^4 - \frac{j^4}{R^4}\right) - \left[(E-j\Omega_+)^2 - F\left(M_0^2 + \frac{j^2}{R^2}\right)\right]^2}{F\left[(E-j\Omega_+)^2 - F\left(M_0^2 + \frac{j^2}{R^2}\right)\right]}\right]dr. \tag{4.3.3}$$

Denklem (4.3.3) integralini karadeliğin olay ufku civarında hesaplanırsa, o zaman, radyal yörünge

$$W_{\mp}(r_+) = \mp i \frac{\pi(E - j\Omega_+)}{4\sqrt{\frac{2M\Lambda^2}{M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}}}}[1 + \alpha\tilde{\chi}]$$

olarak bulunur. Burada, $\tilde{\chi}$ kısaltması kullanılmıştır:

$$\tilde{\chi} = \frac{96j^2\Lambda^2 + 3M_0^2 M\left(M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}\right)}{2M\left(M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}\right)}.$$

Denklem (4.5), (4.6) ve (4.7) kullanılarak, dönen Dilaton karadeliğin, kütleli skaler parçacığın tünellemesinden kaynaklanan Hawking sıcaklığı,

$$\mathrm{T}_H^{KG} = \frac{T_0}{[1+\alpha\tilde{\chi}]} \tag{4.3.4}$$

olarak hesaplanır. Burada, T_0 karadeliğin standart Hawking sıcaklığıdır ve ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$T_0 = \frac{\hbar}{\pi}\sqrt{\frac{2M\Lambda^2}{M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}}}. \tag{4.3.5}$$

Kuantum kütleçekim etkilerin ihmal edilemediği ölçeklerde, karadeliğin Hawking sıcaklığı sadece karadeliğin özelliklerine değil aynı zamanda, tünelleyen skaler parçacığın özelliklerine de bağlıdır. $\alpha = 0$ için modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

4.3.2 Spin-1/2 Dirac Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

Dönen Dilaton karadeliği uzay-zaman metriği kullanılarak Dirac parçacığı için spin bağlantı katsayıları, Pauli matrisleri cinsinden

$$\Gamma_0 = -\frac{i}{4}\sqrt{\frac{H}{F}}\frac{dF}{dr}\sigma^3\sigma^1,\ \Gamma_1 = 0,\ \Gamma_2 = \frac{1}{2}\sqrt{H}\sigma^1\sigma^2.$$

olarak hesaplanır. Bu bağlamda, Denklem (4.2.6) ile verilen dalga fonksiyonu çözüm önerisi modifiye edilmiş Dirac denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki çiftlenimli diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$A\left[\frac{1}{\sqrt{F}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)+m_0(1-\alpha m_0^2)+\frac{\alpha m_0}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\alpha m_0 H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right]+B\left[i\sqrt{H}(1-\alpha m_0^2)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{(1-\alpha m_0^2)}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)+i\alpha H^{3/2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3+\frac{i\alpha\sqrt{F}}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{\alpha H}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha}{R^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3\right]=0,$$

$$A\left[-i\sqrt{H}(1-\alpha m_0^2)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)+\frac{(1-\alpha m_0^2)}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)-i\alpha H^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3-\frac{i\alpha\sqrt{H}}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{\alpha H}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\right.$$
$$\left.\frac{\alpha}{R^3}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^3\right]+B\left[\frac{1}{\sqrt{F}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)-m_0(1-\alpha m_0^2)-\frac{\alpha m_0}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\alpha m_0 H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\right]=0. \quad (4.3.6)$$

Katsayılar determinantından ise modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-m_0^2+2\alpha\left[m_0^4-\frac{2H}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{R^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4-H^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4\right]=0$$

olarak bulunur. $S(t,r,\phi)$, $S(t,r,\phi)=-(E-j\Omega_+)t+j\phi+(R_0(r)+\alpha R_1(r))$ çözüm önerisini de Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazdığımızda, Dirac parçacığın radyal yörüngesi,

$$R_{\mp}(r)=\mp\int\frac{\sqrt{(E-j\Omega_+)^2-F\left(m_0^2+\frac{j^2}{R^2}\right)}}{\sqrt{HF}}\left[1+\alpha\frac{(E-j\Omega_+)^2\left[2m_0^2F-(E-j\Omega_+)^2\right]}{F\left[(E-j\Omega_+)^2-F\left(m_0^2+\frac{j^2}{R^2}\right)\right]}\right]dr \quad (4.3.7)$$

olarak elde edilir. Denklem (4.3.7) integrali hesaplanırsa, o zaman

$$\widetilde{\Pi}=\frac{-32j^2\Lambda^2+3M_0^2M\left(M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}\right)}{2M\left(M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}\right)}$$

olmak üzere, radyal yörünge

$$R_{\mp}(r_+)=\mp i\frac{\pi(E-j\Omega_+)}{\sqrt[4]{\frac{2M\Lambda^2}{M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}}}}\left[1+\alpha\widetilde{\Pi}\right]$$

olarak bulunur. Bu bağlamda, karadeliğin modifiye Hawking sıcaklığı,

$$\mathrm{T}_H^D = \frac{T_0}{[1+\alpha\widetilde{\Pi}]} \tag{4.3.8}$$

olarak hesaplanır. Burada, T_0 Denklem (4.3.5) ile verilen, karadeliğin standart Hawking sıcaklığıdır. Sonuç olarak, kuantum kütleçekim etkilerin varlığında, karadeliğin Hawking sıcaklığının hem karadeliğin özelliklerine hem de tünelleme yapan Dirac parçacığının özelliklerine bağlı olduğu görülmektedir.

Öte yandan, Denklem (4.3.4) ile Denklem (4.8.8) karşılaştırıldığında, skaler parçacık ile Dirac parçacığının karadelikten tünelleme olasılıklarının ve dolayısıyla Hawking sıcaklıklarının farklı olduğu görülmektedir. $\alpha = 0$ durumunda ise, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

4.3.3 Spin-1 Vektör Bozon Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

Denklem (4.1) ile verilen dalga fonksiyonu, modifiye vektör bozon denkleminde yerine yazılıp $\hbar$ içeren terimler ihmal edildikten sonra aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\left[\frac{\mu_0(1-\alpha\mu_0^2)}{2} + \alpha\frac{\mu_0}{2R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 + \alpha\frac{\mu_0 H}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{F}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\right] + B\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) + \frac{\alpha}{R^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 + \frac{\alpha\sqrt{H}}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \right.\\
&\left. i\alpha\mu_0^2\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + i\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{\alpha H}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) + i\alpha H\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - \frac{\alpha\mu_0^2}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] = 0,\\
&A\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) + \frac{\alpha}{R^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - i\frac{\alpha\sqrt{H}}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + i\alpha\mu_0^2\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{\alpha H}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \right.\\
&\left. i\alpha H\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - \frac{\alpha\mu_0^2}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] + B\left[-\mu_0(1-\alpha\mu_0^2) - \alpha\mu_0 H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{\alpha\mu_0}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right] + D\left[-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \right.\\
&\left. \frac{\alpha}{R^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - i\frac{\alpha\sqrt{H}}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + i\alpha\mu_0^2\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \frac{\alpha H}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - i\alpha H\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 + \right.\\
&\left. \frac{\alpha\mu_0^2}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] = 0,\\
&B\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) + \frac{\alpha}{R^3}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^3 - i\frac{\alpha\sqrt{H}}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + i\alpha\mu_0^2\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) - i\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{\alpha H}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right) - \right.\\
&\left. i\alpha H\sqrt{H}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^3 - \frac{\alpha\mu_0^2}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)\right] + D\left[\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) - \alpha\frac{\mu_0}{2R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2 - \alpha\frac{\mu_0 H}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{\mu_0(1-\alpha\mu_0^2)}{2}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

A, B ve D fonksiyonlarının katsayılar determinantından, vektör bozon parçacığı için modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{\mu_0^2}{4}+\alpha\left[\frac{3\mu_0^2}{4}-\frac{3}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\frac{\mu_0^2}{F}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{R^2F}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{9\mu_0^2}{4R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-3H\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4-\frac{6H}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{9H\mu_0^2}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{H}{F}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]=0. \quad (4.3.10)$$

şeklinde bulunur. Burada, $S(t,r,\phi)$, $S(t,r,\phi)=-(E-j\Omega_+)t+j\phi+(R_0(r)+\alpha R_1(r))$ çözüm önerisi kullanılarak

$$R_{\mp}(r)=\mp\int\frac{\sqrt{(E-j\Omega_+)^2-F\left(\frac{\mu_0^2}{4}+\frac{j^2}{R^2}\right)}}{\sqrt{HF}}\left[1+\alpha\frac{(E-j\Omega_+)^2\left[5\mu_0^2F-4(E-j\Omega_+)^2\right]}{4F\left[(E-j\Omega_+)^2-F\left(\frac{\mu_0^2}{4}+\frac{j^2}{R^2}\right)\right]}\right]dr$$

integral ifadesi elde edilir. Olay ufku civarında bu integrali hesaplarsak,

$$R_{\mp}(r_+)=\mp i\frac{\pi(E-j\Omega_+)}{4\sqrt{\frac{2M\Lambda^2}{M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}}}}[1+\alpha\tilde{\Xi}]$$

sonucunu buluruz. Burada, $\tilde{\Xi}$ kısaltması şu şekildedir:

$$\tilde{\Xi}=\frac{-128j^2\Lambda^2+3M_0^2M\left(M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}\right)}{2M\left(M+\sqrt{M^2+32\Lambda J^2}\right)}.$$

Bu bağlamda, karadeliğin modifiye Hawking sıcaklığı,

$$\mathrm{T}_H^{VB}=\frac{T_0}{[1+\alpha\tilde{\Xi}]} \quad (4.3.11)$$

şeklinde olur. Burada, T_0 Denklem (4.3.5) ile verilen, karadeliğin standart Hawking sıcaklığıdır. Buna göre, kuantum kütleçekim etkiler, karadeliğin Hawking sıcaklığının sadece karadeliğin özelliklerine değil aynı zamanda, tünelleme yapan vektör bozon parçacığının özelliklerine de bağlı olduğunu ortaya koymaktadır. $\alpha=0$ durumunda, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

Öte yandan, (4.3.4), (4.3.8) ve (4.3.11) denklemleri mukayese edildiğinde, üç farklı parçacığın neden olduğu Hawking sıcaklıkları birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, kuantum Kütleçekimsel etkilerin varlığında, farklı spinli relativistik parçacıkların karadelik ile tamamen farklı bir şekilde etkileştikleri ortaya çıkmaktadır.

4.4 (2+1) boyutlu Solucan Deliği Hawking Sıcaklığı Üzerine Kuantum Kütleçekimsel Etkiler

4.4.1 Spin-0 Skaler Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

(2+1) boyutlu statik solucan deliğinin (2.7) denklemi ile verilen Eddington-Finkelstein uzay-zaman metriğinde modifiye Klein-Gordon denkleminin indirgenmiş formu aşağıdaki gibidir:

$$2\hbar^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial r}\right)+\hbar^2C\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\phi^2}-2\alpha\hbar^4C\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(C\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2}\right)-\frac{2\alpha\hbar^4}{r^4}\frac{\partial^4\tilde{\Phi}}{\partial\phi^4}-M_0^2(1-2\alpha M_0^2)\tilde{\Phi}=0. \quad (4.4.1)$$

Denklem (4.2.1) ile verilen çözüm önerisi (4.4.1)'de yerine yazılırsa modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)+C\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2+M_0^2(1-2M_0^2)-\frac{2\alpha f}{r^4}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^4+2\alpha C^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4=0 \quad (4.4.2)$$

şeklinde bulunur. Eylem fonksiyonu, $S(t,r,\phi)$, $S(t,r,\phi)=-Et+j\phi+(W_0(r)+\alpha W_1(r))$ şeklinde değişkenlerine ayırdıktan sonra modifiye Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazılırsa, skaler parçacığın radyal yörüngesi

$$W_{\mp}(r)=\mp\int\frac{E}{C}dr\mp\int\frac{\sqrt{E^2-C\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{C}\left[1+\alpha\frac{C^2\left(M_0^4-\frac{j^4}{r^4}\right)-\left[E\mp\sqrt{E^2-C\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)}\right]^4}{C\left[E^2-C\left(M_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]}\right]dr \quad (4.4.3)$$

ile bunulur. Solucan deliğinin tuzaklanma olay ufku (trapped horizon) yarıçapı civarında integral alınırsa, o zaman radyal yörünge,

$$W_{\mp}(r_h)=\mp i\frac{\pi(E\mp E)}{a_0}\left[1+4\alpha\left(M_0^2+\frac{j^2}{r_h^2}\right)\right]$$

olarak bulunur. Burada, a_0 sabiti

$$a_0=\frac{b(r_h)}{r_h^2}-\frac{b'(r_h)}{r_h} \quad (4.4.4)$$

şeklindedir. (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılarak, solucan deliğinin Hawking sıcaklığının

$$\mathrm{T}_H^{KG} = \frac{T_0}{\left[1+4\alpha\left(M_0^2+\frac{j^2}{r_h^2}\right)\right]} \tag{4.4.5}$$

olduğu görülür. Burada, T_0 solucan deliğinin standart Hawking sıcaklığıdır. Açık ifadesi

$$T_0 = \frac{\hbar}{4\pi}\left(\frac{b(r_h)}{r_h^2} - \frac{b'(r_h)}{r_h}\right) \tag{4.4.6}$$

şeklindedir. Kuantum kütleçekim etkilerin ihmal edilemediği ölçeklerde, solucan deliğinin Hawking sıcaklığının sadece tuzaklanma yüzeyinin özelliklerine değil aynı zamanda tünelleyen skaler parçacığın kütlesine ve açısal momentumuna da bağlı olduğu görülmektedir. $\alpha = 0$ için, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

4.4.2 Spin-1/2 Dirac Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

Basitlik bakımından, Dirac parçacığının tünellemesini incelemek için Denklem (2.6) ile verilen uzay-zaman metriği kullanılacaktır. Denklem (4.2.6) ile verilen dalga fonksiyonu çözüm önerisi modifiye Dirac denkleminde yerine yazıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra modifiye Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - C\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - m_0^2 + 2\alpha\left[m_0^4 - \frac{2C}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^4}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^4 - C^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4\right] = 0 \tag{4.4.7}$$

olarak yazılır. Statik solucan deliği metriği için Kodama vektörü $\vec{K} = \left(1/\sqrt{C(r)}, 0, 0\right)$ şeklindedir. Kodama vektörü kullanılarak eylem fonksiyonu, $S(t, r, \phi)$,

$$S(t, r, \phi) = -\int \frac{E}{\sqrt{C(r)}}dt + j\phi + (R_0(r) + \alpha R_1(r)) \tag{4.4.8}$$

şeklinde değişkenlerine ayırdıktan sonra modifiye Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazdığımızda, Dirac parçacığın radyal yörüngesi

$$R_{\mp}(r) = \mp\int \frac{\sqrt{E^2 - C\left(m_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{C}\left[1 + \alpha\frac{E^2\left[2m_0^2C - E^2\right]}{C\left[E^2 - C\left(m_0^2+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]}\right]dr \tag{4.4.9}$$

şeklinde bulunur. Denklem (4.4.9) integrali hesaplanırsa, o zaman, parçacığın radyal yörüngesi

$$R_{\mp}(r_h) = \mp i\frac{\pi E}{a_0}\left[1+\frac{\alpha}{2}\left(3m_0^2-\frac{j^2}{r_h^2}\right)\right]$$

olarak bulunur. (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılarak, solucan deliğinin, Dirac parçacığının tünellemesi sonucu oluşan Hawking sıcaklığı

$$\mathrm{T}_H^D = \frac{T_0}{\left[1+\frac{\alpha}{2}\left(3m_0^2-\frac{j^2}{r_h^2}\right)\right]}$$

olarak hesaplanır. Görüldüğü üzere, Kuantum kütleçekim etkiler hesaba katıldığında, solucan deliğinin Hawking sıcaklığının hem tuzaklanma yüzeyinin özelliklerine hem de tünelleyen Dirac parçacığın kütlesine ve açısal momentumuna bağlıdır. Bunun yanı sıra, Dirac parçacığının tünellemesinden kaynaklanan sıcaklık ile skaler parçacığının tünellemesinden kaynaklanan sıcaklık birbirinden tamamen farklıdır. $\alpha = 0$ için, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

4.4.3 Spin-1 Vektör Bozon Parçacığının Tünellemesi ve Hawking Sıcaklığı

Denklem (2.6) ile verilen solucan deliği uzay-zamanında hareket eden kütleli vektör bozon parçacığı için modifiye Hamilton-Jacobi denklemi, Denklem (4.2.6) ile verilen dalga fonksiyonu çözüm önerisinin modifiye vektör bozon denkleminde kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-C\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{\mu_0^2}{4}+\alpha\left[\frac{3\mu_0^2}{4}-\frac{3}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\mu_0^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{9\mu_0^2}{4r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\right.$$
$$\left.3C\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^4-\frac{6C}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+\frac{9C\mu_0^2}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+C\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]=0 \qquad (4.4.10)$$

şeklinde olur. Kodama vektörü kullanılarak yazılan ve Denklem (4.4.8) ile verilen eylem fonksiyonu modifiye Hamilton-Jacobi denkleminde yerine yazıldıktan sonra, parçacığın radyal yörüngesi,

$$R_{\mp}(r) = \mp\int\frac{\sqrt{E^2-C\left(\frac{\mu_0^2}{4}+\frac{j^2}{r^2}\right)}}{C}\left[1+\alpha\frac{E^2\left[5\mu_0^2C-4E^2\right]}{4C\left[E^2-C\left(\frac{\mu_0^2}{4}+\frac{j^2}{r^2}\right)\right]}\right]dr \qquad (4.4.11)$$

olarak bulunur. Denklem (4.4.11) integrali hesaplanırsa, o zaman radyal yörünge,

$$R_{\mp}(r_h) = \mp i\frac{\pi E}{a_0}\left[1+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{9m_0^2}{4}-\frac{j^2}{r_h^2}\right)\right]$$

şeklinde bulunur. (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemleri kullanılarak, solucan deliğinin, vektör bozon parçacığının tünellemesinden oluşan Hawking sıcaklığı

$$\mathrm{T}_H^{VB} = \frac{T_0}{\left[1+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{9m_0^2}{4}-\frac{j^2}{r_h^2}\right)\right]} \qquad (4.4.10)$$

olarak hesaplanır. Bu sonuç, Kuantum kütleçekim etkiler hesaba katıldığında, solucan deliğinin Hawking sıcaklığının hem tuzaklanma yüzeyinin özelliklerine hem de tünelleyen vektör bozon parçacığın kütlesine ve açısal momentumuna bağlıdır. Öte yandan, vektör bozon parçacığının tünellemesinden kaynaklanan sıcaklık, hem skaler parçacığının hem de Dirac parçacıklarının tünellemesinden kaynaklanan sıcaklıklardan farklıdır. $\alpha = 0$ için, modifiye Hawking sıcaklığı standart sıcaklığa inmektedir.

(2+1)-boyutlu karadeliklerde olduğu gibi, Kuantum kütleçekimsel etkilerin önem kazanmaya başladığı ölçeklerde, Hawking sıcaklığı tünelleme yapan parçacığın özelliklerine bağlı olmaya başlamaktadır. Ayrıca her parçacık sahip olduğu özellikler (kütle, spin gibi) nedeniyle farklı olasılık oranlarında tünelleme yaparak farklı Hawking sıcaklıklarına neden olmaktadırlar.

5. SONUÇ

Bu proje kapsamında, 2+1 boyutlu gravitasyon kuramları çerçevesinde elde edilen elektriksel olarak yüklü ve yüksüz kara deliklerin ve solucan deliğinin Hawking sıcaklıkları, sırasıyla, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik kuantum mekaniksel parçacıkların GUP çerçevesinde tünelleme yöntemi kullanılarak hesaplanması amaçlanmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi listeleyebiliriz:

- Yeni-tip karadeliğin Hawking sıcaklığı üzerindeki kuantum kütleçekim etkiler hesaplamak için GUP kapsamında modifiye edilen vektör bozon denklemi kullanıldı. Hamilton-Jacobi yaklaşımı kullanılarak vektör bozon parçacığın karadelikten tünelleme olasılığı ve buna dayanarak karadeliğin Hawking sıcaklığı hesaplandı. Bu bağlamda, Denklem (4.8) incelendiğinde, modifiye Hawking sıcaklığının standart Hawking sıcaklığından daha düşük olduğu görülmektedir. Ayrıca modifiye Hawking sıcaklığı sadece karadeliğin değil aynı zamanda tünelleme yapan vektör bozon parçacığının özelliklerine de bağlı olduğu görülmektedir. Bir diğer önemli sonuç ise vektör bozon parçacığının tünellemesi sonucu oluşan modifiye Hawking sıcaklığının, hem skaler hem de Dirac parçacıklarınkinden farklı olmasıdır (Gecim ve Sucu, 2018b). Öte yandan, kuantum kütleçekim etkilerinin ihmal edildiği durumda ise bu üç farklı parçacığın oluşturduğu Hawking sıcaklıkları birbirine eşit olmaktadır.

  Ayrıca, yeni-tip kara deliğinin termal bakımdan yerel kararlılığı tartışılmıştır. Kuantum kütleçekim etkisinin yokluğunda, karadeliğin yalnızca birinci-tip faz geçişi yaptığı, ancak kuantum kütleçekim etkisinin varlığında, hem birinci hem de ikinci-tip faz geçişlerini yaptığı görülmektedir.

  Bu kısımda elde edilen sonuçlar “**Advances in High Energy Physics**” uluslararası hakemli dergisinde basılmak üzere kabul edilmiştir (Gecim ve Sucu, 2018c).

- Projenin bu kısmında kuantum kütleçekim etkisinin varlığında CR-BTZ karadeliğinin modifiye Hawking sıcaklığı, sırasıyla, spin-0 skaler parçacığının, spin-1/2 Dirac parçacığının ve spin-1 vektör bozon parçacığının tünellemesi yöntemi kullanılarak hesaplandı. Denklem (4.2.4), (4.2.8) ve (4.2.11) karşılaştırıldığında, skaler, Dirac ve vektör bozon parçacıklarının sebep olduğu modifiye Hawking sıcaklıklarının farklı olduğu görülmektedir. Bu kısımda elde edilen sonuçlar “**Physics Letters B**” dergisine gönderilmiş olup hakem değerlendirmesi aşamasındadır (Gecim ve Sucu, 2018d).

Ayrıca, CR-BTZ kara deliğinin termal bakımdan yerel kararlılığı, spin-0 parçacığının GUP çerçevesinde hesaplanan modifiye Hawking sıcaklığı kullanılarak tartışılmıştır (spin-1/2 ve spin-1 parçacıklarının GUP çerçevesinde hesaplanan modifiye Hawking sıcaklık değerleri için benzer bir tartışma yapılabilir. Bu üç parçacığın modifiye Hawking sıcaklıkları farklı olduğundan, kara deliğin termal bakımdan yerel kararlılığı hakkında farklı bilgi vereceklerdir.). Kuantum kütleçekim etkisinin yokluğunda, karadeliğin yalnızca birinci-tip faz geçişi yaptığı, ancak kuantum kütleçekim etkisinin varlığında, ikinci-tip faz geçişlerini yaptığı görülmektedir (Şekil-1 ve Şekil-2).

- Dönen Dilaton ve statik solucan deliği zeminlerinin modifiye Hawking sıcaklıkları için de benzer sonuçlara ulaşılmış olup, bu sonuçlar ayrı birer makale haline getirilerek uluslararası prestije sahip dergilere gönderilme aşamasındadır (Gecim ve Sucu, 2018e, 2018f).

6. KAYNAKLAR

Amati, D., Ciafaloni, M., Veneziano, G., 1989. “Can spacetime be probed below the string size?”, Physics Letters B, 216 (1,2), 41-47.

Aschieri P., Dimitrijevic M., Kulish P., Lizzi F., Wess J. 2009. Noncommutative Spacetimes: Symmetries in Noncommutative (1. Edition). Berlin: Springer.

Banados, M., Teitelboim, C., Zanelli, J., 1992. “Black Hole in Three-Dimensional Spacetime”, Physical Review Letters, 69 (13) 1849-1851.

Bergshoeff, E.A., Hohm, O., Templeton, S., 2009a. “Massive Gravity in Three Dimensions”, Physical Review Letters, 102, 201301.

Bergshoeff, E.A., Hohm, O., Templeton, S., 2009b. “More on Massive 3D Gravity”, Physical Review D, 79, 124042.

Chan, K.C.K., Mann, R.B., 1996. “Spinning black holes in (2+1)-dimensional string and dilaton Gravity”, Physics Letters B, 371, 199-205.

Chen D., Wu H., Yang H., 2013a. “Fermion's tunnelling with effects of quantum Gravity”, Advances in High Energy Physics, 2013, 432412.

Chen D., Jiang Q.Q., Wang P., Yang H., 2013b. “Remnants, fermions' tunnelling and effects of quantum Gravity”, Journal of High Energy Physics, 11, 176.

Chen D., Wu H., Yang H., 2014a. “Observing remnants by fermions' tunneling”, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 03, 036.

Chen D., Wu H., Yang H., Yang S., 2014b. “Effects of guantum gravity on black holes”, International Journal of Modern Physics A, 29, 1430054.

Dernek, M., Gurtas Dogan, S., Sucu, Y., Unal, N., 2017. “Relativistic quantum mechanical spin-1 wave equation in 2+1 dimensional spacetime”, arxiv:1606.03296v2.

Fernando, S., 2017. “Spinning dilaton black hole in 2+1 dimensions as a particle accelerator”, Modern Physics Letters A, 32 (13), 1750074.

Gambini, R., Pullin J. 2011. A First Course in Loop Quantum Gravity (1. Edition). New York: Oxford University Press.

Garay, L.J., 1995. “Quantum gravity and minimum length”, International Journal of Modern Physics A, 10 (2), 145-165.

Gecim, G., Sucu, Y., 2013. “Tunnelling of relativistic particles from new type black hole in new massive Gravity”, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 02, 023.

Gecim, G., Sucu, Y., 2015. “Dirac and scalar particles tunnelling from topological massive warped-AdS3 black hole”, Astrophysics and Space Science, 357,105.

Gecim, G., Sucu, Y., 2017a. “Massive vector bosons tunnelled from the (2+1)-dimensional black holes”, The European Physical Journal Plus, 132, 105.

Gecim, G., Sucu, Y., 2017b. “The GUP effect on Hawking radiation of the 2+1 dimensional black hole”, Physics Letters B, 773, 391-394.

Gecim, G., Sucu, Y., 2018a. “Quantum Gravity Effect on the Tunneling Particles from 2+1 dimensional New-type Black Hole”, Advances in High Energy Physics, 2018, 8728564.

Gecim, G., Sucu, Y., 2018b. “Quantum Gravity Effect on the Tunneling Particles from Warped-AdS3 Black Hole”, Modern Physics Letters A dergisinde kabul edildi, basım aşamasında.

Gecim, G., Sucu, Y., 2018c. “The GUP effect on tunneling of massive vector bosons from the 2+1 dimensional black hole”, arXiv:1704.03537v2 [gr-qc], Advances in High Energy Physics dergisinde kabul edildi, basım aşamasında.

Gecim, G., Sucu, Y., 2018d. “Quantum Gravity Effect on the Hawking radiation of the charged rotating BTZ Black Hole”, arXiv:1804.10551v1 [gr-qc], Physics Letters B dergisinde Hakem değerlendirmesi aşamasında.

Gecim, G., Sucu, Y., 2018e. “Quantum Gravity Effect on the Hawking radiation of 2+1 dimensional spinning dilaton black hole”, Hazırlık aşamasında.

Gecim, G., Sucu, Y., 2018f. “Quantum Gravity Effect on the Hawking radiation of 2+1 dimensional wormholes”, Hazırlık aşamasında.

Hayward, S.A., 1998. “Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics”, Classical and Quantum Gravity, 15, 3147-3162.

Hawking, S.W., 1974. “Black hole explosions”, Nature, 248 (5443), 30-31.

Hawking, S.W., 1975. “Particle creation by black holes”, Communications in Mathematical Physics, 43 (3), 199-220.

Hossenfelder, S., 2006, “A note on theories with a minimal length”, Classical and Quantum Gravity, 23, 1815-1821.

Hossenfelder, S., Bleicher, M., Hofmann, S., Ruppert, J., Scherer, S:, Stöcker, H., 2003. “Signatures in the Planck Regime”, Physics Letters B, 575, 85-99.

Jamil, M., Farooq, M.U., 2010. “Phantom wormholes in (2+1)-dimensions”, International Jornal of Theoretical Physics, 49, 835-841.

Kempf, A., Mangano, G.,, Mann, R.B., 1995. “Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation”, Physical Review D, 52 (2), 1108-1118.

Kerner R., Mann R.B., 2006. “Tunnelling, temperature, and Taub-NUT black holes”, Physical Review D, 73, 104010.

Kerner, R., Mann, R.B., 2008. “Fermions tunnelling from black hole” Classical and Quantum Gravity, 25 (9), 095014.

Kim, W.T., Oh, J.J., Yoon, M.S., 2004, “Traversable wormhole construction in 2+1 dimensions”, Physical Review D, 70, 044006.

Konishi, K., Paffuti, G., Provero, P., 1990. “Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory”, Physics Letters B, 234 (3), 276-284.

Kraus, P., Wilczek, F., 1995. “Self-Interaction Correction to Black Hole Radiance”, Nuclear Physics B, 433, 403.

Kwon, Y., Nam, S., Park, J., Yi, S., 2011. “Quasinormal modes for new type black holes in new Massive Gravity”, Classical and Quantum Gravity, 28, 145006.

Li H.L., Feng Z.W., Zu X.T., 2016. “Quantum tunneling from high dimensional Gödel black hole”, General Relativity and Gravitation, 48, 18.

Li R., Ren J.R., 2008. “Dirac particles tunneling from BTZ black hole”, Physics Letters B, 661, 370.

Li, H-L., Zu, X-T., 2015. “Black hole remnant and quantum tunnelling in three-dimensional Gödel spacetime”, Astrophysics and Space Science, 357, 6.

Liu Z.Y., Ren J.R., 2014. “Fermions tunnelling with quantum gravity correction”, Communications in Theoretical Physics, 62, 819-823.

Nozari, K., Karami, M., 2005. “Minimal length and Generalized Dirac equation”, Modern Physics Letters A, 20 (40), 3095-3103.

Oliva, J., Tempo, D., Troncoso, R., 2009. “Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT Massive Gravity”, Journal of High Energy Physics, 07, 011.

Parikh M. K., Wilczek F., 2000. “Hawking radiation as tunnelling”, Physical Review Letters, 85, 5042.

Scardigli, F., 1999. “Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment”, Physics Letters B, 452, 39-44.

Scardigli, F., Lambiase G., Vagenas, E.C., 2017. “GUP parameter from quantum corrections to Newtonian potential”, Physics Letters B, 767, 242-246.

Shankaranarayanan S., Srinivasan K., Padmanabhan T., 2001. “Method of complex paths and general covariance of Hawking Radiation”, Modern Physics Letters A, 16, 571-578.

Srinivasan K., Padmanabhan T., 1999. “Particle production and complex path analysis”, Physical Review D, 60, 024007.

Sucu, Y., Unal, N., 2007. “Exact solution of Dirac equation in 2+1 dimensional Gravity”, Journal of Mathematical Physics, 48, 052503.
Sucu, Y., Unal, N.,2005. “Vector boson in the expanding universe”, European Physical Journal C, 44, 287-291.

Tawfik, A, Diab, A., 2014. “Generalized Uncertainty Principle: Approaches and applications”, International Journal of Modern Physics D, 23 (12), 1430025.

Zwiebach, B., 2009. A First Course in String Theory (2. Edition). New York: Cambridge University Press.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Doç. Dr. YUSUF SUCU
Proje No:	116F329
Proje Başlığı:	Relativistik Parçacıkların Kuantum Mekaniksel Tünellemesi ve Hawking Işıması Üzerindeki Kuantum Kütleçekimsel Etkiler
Proje Türü:	1002 - Hızlı Destek
Proje Süresi:	12
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	AKDENİZ Ü. FEN F. FİZİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/05/2017 - 15/05/2018
Onaylanan Bütçe:	30000.0
Harcanan Bütçe:	28500.0
Öz:	Projede, kuantum kütleçekim etkilerinin, 2+1 boyutlu yeni-tip statik kara deliğin, elektriksel olarak yüklü ve dönen BTZ kara deliğinin, dönen Dilaton karadeliğinin ve statik solucan deliğinin Hawking sıcaklıkları üzerindeki etkilerinin hesaplanması amaçlanmıştır. Bu amaç kapsamında; genelleştirilmiş belirsizlik ilkesi çerçevesinde modifiye edilen Klein-Gordon, Dirac ve vektör bozon denklemleri kullanılarak söz konusu kara deliklerin ve solucan deliğinin modifiye Hawking sıcaklıkları, Hamilton-Jacobi yaklaşımı kapsamında, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik parçacıkların kuantum mekaniksel tünelleme yöntemi ile hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuçlar, modifiye Hawking sıcaklığının standart Hawking sıcaklığından daha düşük olduğunu göstermektedir. Ayrıca, modifiye Hawking sıcaklığının sadece kara deliğin/solucan deliğinin özelliklerine değil, aynı zamanda tünelleme yapan parçacıkların özelliklerine de bağlı olduğu gözlemlenmektedir. Bunun yanı sıra, kuantum kütleçekim etkilerin varlığında, spin-0, spin-1/2 ve spin-1 relativistik parçacıkların karadelik ve solucan deliğinden farklı bir şekilde tünelleme yaptıkları ve dolayısıyla birbirinden farklı Hawking sıcaklıklarına neden oldukları görülmektedir.
Anahtar Kelimeler:	Hawking sıcaklığı, karadelik, solucan deliği, kuantum kütleçekim, tünelleme.
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır

TÜBİTAK