ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

STOKASTİK ANCOVA: İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

Pelin KASAP

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

STOKASTİK ANCOVA: İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

Pelin KASAP

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Birdal ŞENOĞLU

Bu çalışmada, ortak değişkenlerin stokastik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olmadığı ANCOVA modelleri ile ilgilenilmiştir.

Ortak değişken ve hata terimlerinin uzun kuyruklu simetrik (LTS) dağılıma sahip olduğu bir ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelindeki parametrelerin dayanıklı tahmin edicileri (uyarlanmış en çok olabilirlik-MML ve Huber'ın M) elde edilmiş ve bu tahmin edicilere dayanan yeni test istatistikleri önerilmiştir. Dayanıklı tahmin edicilerin geleneksel en küçük kareler (LS) tahmin edicilerinden daha etkin olduğu ve dayanıklı tahmin edicilere dayanan testlerin, LS tahmin edicilerine dayanan testlerden daha güçlü ve dayanıklı olduğu Monte-Carlo simülasyonu yardımıyla gösterilmiştir. Daha sonra, ortak değişkenlerin genelleştirilmiş lojistik (GL) ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu birden fazla ortak değişkenli ANCOVA modeli için, bir ortak değişkenli ANCOVA modelinde yapılan teorik ve simülasyon çalışmaları genelleştirilmiş, önerilen tahmin edicilerin (MML) etkinlikleri hesaplanmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Eylül 2011, 151 sayfa

Anahtar Kelimeler: Normal olmama, dayanıklılık, ANCOVA, uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi, M yöntemi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

STOCHASTIC ANCOVA: STATISTICAL INFERENCE

Pelin KASAP

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

İn this study, we focus on the ANCOVA models when the covariate terms are stochastic and the distribution of the error terms are nonnormal.

We obtain the robust estimators (modified maximum likelihood-MML and Huber's M) of the model parameters and the new test statistics based on them when there is only one covariate in the ANCOVA model and the distribution of the covariate and the error terms is long-tailed symmetric (LTS). Monte-Carlo simulation results show that robust estimators are more efficient than the traditional least squares (LS) estimators and the tests based on robust estimators are more powerful and robust than the normal theory test. We then generalize the theoretical and the simulation results to more than one covariate case when the distribution of covariate terms is generalized logistic (GL) and the distribution of the error terms is LTS. We obtain more or less the some efficiencies of the proposed estimators (MML) and the tests.

September 2011, 151 pages

Key Words: Nonnormality, robustness, ANCOVA, modified maximum likelihood method, M method.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında çok büyük emeği bulunan, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, sıcak tebessümü ve esprileriyle her zaman yanımda olan, bana hem bir dost, hem de bir abi olan, yaşamımın en önemli dönemeçlerinde aldığım kararları destekleyip bana güç veren değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na (Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı) en içten duygularımla teşekkür ederim.

ODTU'deki bir ziyaretimiz sırasında tezin 3.2 bölümünde yer alan konuyu bize önererek ufkumuzu genişleten Sayın hocam Prof. Dr. Moti L. TİKU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman sevecen kişiliğiyle ve güven veren tavrıyla tanıdığım, yardımlarını benden hiç esirgemeyen ve TİK toplantılarımdaki yardımları için Sayın hocam Doç. Dr. Barış SÜRÜCÜ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her gördüğünde nazik bir şekilde halimi hatırımı sorarak güler yüzünü esirgemeyen, TİK raporlarımı titizlikle okuyup beni yönlendiren Sayın hocam Yrd. Doç. Dr. İhsan KARABULUT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ankara Üniversitesine geldiğim ilk günden itibaren benden desteğini hiç esirgemeyen, her zorda kaldığımda kendimi yanında bulduğum Sayın hocam Prof. Dr. Fahrettin ARSLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ankara Üniversitesindeki son yılımda tanıştığım ve iyiki de tanıştığım, yardımsever kişiliğiyle beni kendisine hayran bırakan ve akademik çalışmalarıma olan katkılarından dolayı Sayın hocam Prof. Dr. Olcay ARSLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zor günlerimde benden moral desteğini esirgemeyen sevgili oda arkadaşım Arş. Gör. Çiğdem TOPÇU'ya ve tüm çalışma arkadaşlarıma bana gösterdikleri sevgi ve arkadaşlıkları için sonsuz teşekkür ederim.

Ankara-Samsun yolunu artık ezbere gidebilen, geçirdiğimiz bu uzun ayrılık sürecinde birçok fedakarlık göstererek beni her konuda destekleyen sevgili eşim Ersin KASAP'a en derin duygularımla teşekkür ederim. En sıkıntılı anlarımda sıcaklığıyla bana mutluluk kaynağı olan, yaşam kaynağım, güzel oğlum Arda KASAP'a sonsuz teşekkür ederim.

Eğitimim ve tez çalışmalarım süresince varlıklarıyla, maddi, manevi destekleriyle bugünlere gelmemde en büyük emeği harcayan, sabır ve metanetle her zaman yanımda olan ve daima da yanımda olacaklarını bildiğim vefakar annem Saliha ÖNAL, babam Atilla ÖNAL, kardeşim Orhan ÖNAL ve kardeşim Burçin ŞENGÜN ve ailesine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Pelin KASAP
Ankara, Eylül 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET……i
ABSTRACT……ii
TEŞEKKÜR……iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ……vii
ŞEKİLLER DİZİNİ……viii
ÇİZELGELER DİZİNİ……ix
1. GİRİŞ……1
2. ANCOVA: NORMAL TEORİ……9
2.1 Bir Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenin Deterministik Olduğu Durum……9
2.1.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli……9
2.1.2 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini……10
2.1.3 Hipotez testi……14
2.2 Bir Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenin Stokastik Olduğu Durum……19
2.2.1 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini……19
2.3 Birden Fazla Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenlerin Stokastik Olduğu Durum……23
2.3.1 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli……23
2.3.2 Parametrelerin LS yöntemi ile tahmini……25
3. ANCOVA: NORMAL OLMAYAN TEORİ……29
3.1 Bir Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenin ve Hata Terimlerinin Dağılımının LTS Olduğu Durum……29
3.1.1 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini……30
3.1.2 Parametrelerin MML yöntemi ile tahmini……33
3.1.3 LTS dağılımına dayalı ML tipi tahmin edici (M-Tahmin Edicisi)……42
3.1.4 Asimptotik varyans-kovaryans matrisi……45
3.1.5 Hipotez testi……47
3.1.6 Monte Carlo simülasyon çalışması……50
3.1.6.1 Tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması……50

3.1.6.2 Testlerin güçlerinin karşılaştırılması……...56
3.1.7 İstatistiki Dayanıklılık……...61
3.2 Birden Fazla Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenlerin GL ve Hata Terimlerinin LTS Dağılımına Sahip Olduğu Durum……...68
3.2.1 Parametrelerin LS yöntemi ile tahmini…….....69
3.2.2 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini……70
3.2.3 Parametrelerin MML yöntemi ile tahmini……..73
3.2.4 Hipotez testi……..……..82
3.2.5 Monte Carlo simülasyon çalışması……...83
3.2.5.1 Tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması……83
3.2.5.2 İstatistiki dayanıklılık……90
4. UYGULAMA…….……97
4.1 Uygulama 1: Kabloların Dayanıklılığı Deneyi ……97
4.2 Uygulama 2: Öğretici Başarısı Deneyi…….....102
5. SONUÇ……...……..107
KAYNAKLAR……109
EKLER……113
EK 1 Bir ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu}_{2MML}$ ve $\hat{\mu}_{2M}$'in Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, deneme sayısı $c=3$..…….....114
EK 2 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_{y,i}$ ve $\hat{\mu}_{y,i}$'nın Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, $p=2$, $\rho_{21}=0.5$ ve $c=3$…….116
EK 3 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin şekil parametreleri p_1 ve p_2 olan LTS dağılımına sahip olduğu durum için MATLAB dilinde yazılan program……..117

EK 4 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin GL ve Hata Terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için MATLAB dilinde yazılan program….....133
ÖZGEÇMİŞ…….....150

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ANOVA	Varyans analizi
ANCOVA	Kovaryans analizi
Ort	Ortalama
Var	Varyans
LTS	Uzun kuyruklu simetrik dağılım
GL	Genelleştirilmiş lojistik dağılım
LS	En küçük kareler
ML	En çok olabilirlik
MML	Uyarlanmış en çok olabilirlik
M	ML tipi tahmin edici
RE_{MML}	MML'in LS'e göre göreceli etkinliği
RE_M	M'in LS'e göre göreceli etkinliği
MSE	Hata kareler ortalaması
diag	Köşegen
t	LS için test istatistiği
t^*	MML için test istatistiği
t^{**}	M için test istatistiği
L	ML olabilirlik fonksiyonu
L^*	MML olabilirlik fonksiyonu
MVB	Minimum varyans sınırı
NID	Bağımsız normal dağılıma sahip
SSE_F	Tam modelin hata kareler toplamı
SSE_R	İndirgenmiş modelin hata kareler toplamı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 *x* ile *y* arasındaki saçılım grafiği……...97
Şekil 4.2 *x*'ler için Q-Q grafiği, $p_1 = 2$ ……..98
Şekil 4.3 *e*'ler için Q-Q grafiği $p_2 = 2$ ……...…….....98
Şekil 4.4 x_1 ile *y* arasındaki saçılım grafiği……...102
Şekil 4.5 x_2 ile *y* arasındaki saçılım grafiği……..102
Şekil 4.6 *y*'ler için LTS Q-Q grafiği, $p = 5$ …….103
Şekil 4.7 x_1 'ler için GL Q-Q grafiği, $b_1 = 0.5$ ……...103
Şekil 4.8 x_2 'ler için GL Q-Q grafiği, $b_2 = 0.5$ …….103

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA çizelgesi……19

Çizelge 3.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS, MML ve M tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve RE değerleri……..……52

Çizelge 3.2 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için t, t^{*} ve t^{**} testlerinin I. tip hataları, $c=3$, $\rho=0.5$……57

Çizelge 3.3 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için t, t^{*} ve t^{**} testlerinin güçlerinin karşılaştırılması $c=3$, $\rho=0.5$, $d=d_1=-2d_2=d_3$…….. 58

Çizelge 3.4 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda Model 1, 2,3 ve 4 için t, t^{*} ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçlerinin karşılaştırılması; $c=3$, $\rho=0.5$, $d=d_1=-2d_2=d_3$ ….....64

Çizelge 3.5 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda ortak değişkenlerin Model 5, Model 6 ve Model 7 durumlarına sahip olması halinde t, t^{*} ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçlerinin karşılaştırılması; $c=3$, $\rho=0.5$, $d=d_1=-2d_2=d_3$ ……...65

Çizelge 3.6 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için hata terimlerinin Model 8, Model 9 ve Model 10 durumlarına sahip olması halinde t, t^{*} ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçlerinin karşılaştırılması; $c=3$, $\rho=0.5$, $d=d_1=-2d_2=d_3$ ……....66

Çizelge 3.7 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS ve MML tahmin edicilerinin Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\rho_{21}=0.5$ ……..……...85

Çizelge 3.8 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda MMLtahmin edicilerine dayalı t^* istatistiği için Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen I.tip hatalar, $q=2$, $\rho_{21}=0.5$ …....…89

Çizelge 3.9 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (1) ve Model (2) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1$ $(1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0$ $(1\le i\le c)$, $\sigma=1$ ……..……...92

Çizelge 3.10 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (3) ve Model (4) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1$ $(1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0$ $(1\le i\le c)$, $\sigma=1$ ……..…...93

Çizelge 3.11 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (5) ve Model (6) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1$ $(1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0$ $(1\le i\le c)$, $\sigma=1$ ……..94

Çizelge 3.12 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (7) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1$ $(1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0$ $(1\le i\le c)$, $\sigma=1$ ……95

Çizelge 4.1 Kabloların dayanıklılığı veri seti……..97

Çizelge 4.2 Kabloların dayanıklılığı veri seti kullanılarak farklı şekil parametreleri için olabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler……..99

Çizelge 4.3 Kabloların dayanıklılığı veri seti kullanılarak farklı ρ parametre değerleri için olabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler…….…….....99

Çizelge 4.4 Kabloların dayanıklılığı veri seti için LS, M ve MML yöntemleriyle elde edilen tahmin değerleri…….……..100

Çizelge 4.5 Kabloların dayanıklılığı veri seti için t, t^* ve t^{**} test istatistiklerinin değerleri……..101

Çizelge 4.6 Kurslar veri seti…….……102

Çizelge 4.7 Kurslar veri seti kullanılarak farklı parametre değerleri için olabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler……104

Çizelge 4.8 Kurslar veri seti için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri……...105

Çizelge 4.9 Kurslar veri seti için t ve t^* test istatistiklerinin değerleri……106

1. GİRİŞ

Kovaryans Analizi (ANCOVA), üç veya üçten fazla grup ortalamaları arasındaki farkları belirlemek için kullanılan bir yöntemdir. Bu farkları belirlerken bağımlı değişkenler üzerinde etkisi olan ve kontrol edilemeyen ortak değişkenlerin etkisini de hesaba katar. Ortak değişkenlerin bağımlı değişken ile doğrusal olarak ilişkili olduğu varsayılır. Eğer ortak değişkenler modele dahil edilmezlerse çoğu kez gerçek bağımlı değişken etkilerini gizlerler (Silknitter vd. 1999). Ortak değişkenin etkilerinin hesaba katılması, genellikle hata kareler ortalamasının (MSE) azalmasını sağlar. Bu nedenle ANCOVA yönteminin kullanılması, istatistiksel gücün arttırılması ve deneydeki yanlılığı azaltması bakımından Varyans Analizi (ANOVA) yöntemine göre avantaj sağlar (Sahai ve Ageel 2000). Ayrıca, ANCOVA yöntemi uygulamalarda alışılmış olarak kullanılan bloklama yönteminin aksine hata terimlerinin kontrol edilemediği durumlarda kullanılır (Silknitter vd. 1999).

Bir-yönlü ANCOVA modeli, mevcut ortak değişken sayısına ve özel deneysel tasarımlara bağlıdır. Eğer sadece bir ortak değişken var ve bu değişken ile bağımlı değişken arasında doğrusal bir ilişki varsa, bağımlı değişken birinci dereceden doğrusal varsayılır ve bu analiz, bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA olarak adlandırılır. Eğer bağımlı değişken daha yüksek bir dereceden ise eğrisel (curvilinear) ANCOVA denir. Eğer deney, iki veya daha fazla ortak değişken içeriyorsa analiz birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA olarak adlandırılır (Weber ve Skillings 2000). Bu çalışmada bir ortak değişkene sahip ve birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelleri ele alınacaktır.

Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli,

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \theta x_{ij} + e_{ij} \quad , \quad i = 1,\ldots,c \,, \quad j = 1,\ldots,n \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır. Eğer bu modelde deneme etkileri yok ise yani $\tau_i = 0$ ise model basit doğrusal regresyon modeline; $\theta = 0$ ise bir-yönlü ANOVA modeline indirgenir.

Buradan da görülebileceği gibi ANCOVA, doğrusal regresyon analizi ve ANOVA'yı birleştiren istatistiksel bir yöntemdir (Yandell 1997).

Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli,

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d x_{dij} + e_{ij}, \quad i = 1,\ldots,c;\ j = 1,\ldots,n \tag{1.2}$$

veya denk olarak

$$y_{ij} = \mu_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d x_{dij} + e_{ij} \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilir.

Geleneksel ANCOVA'da normallik varsayımı altında parametrelerin tahmini, en küçük kareler (Least Squares-LS) yöntemi veya denk olarak en çok olabilirlik (Maximum Likelihood-ML) yöntemi kullanılarak yapılır. LS yönteminde tahmin ediciler, hataların karelerinin toplamının minimize edilmesi ile elde edilir. Normal dağılım altında bu tahmin ediciler en etkin tahmin edicilerdir.

ML yönteminde tahmin ediciler, olabilirlik denkleminin ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınarak elde edilir. Bu yöntemde olabilirlik denklemlerinin açık çözümleri her zaman bulunamamaktadır. Bu durumda denklemler iteratif yöntemler kullanılarak çözülebilir. Ancak iterasyonlarda, birden fazla kök olması, iterasyonların yakınsamaması veya yanlış değerlere yakınsaması gibi problemler olabilir. En yaygın olarak kullanılan iteratif yöntem ise Huber (1964)'ın M yöntemidir. Huber (1964)'ın öne sürdüğü M yönteminde tahmin ediciler yeniden ağırlıklandırılmış ardışık (iteratively reweighting) hesaplama kullanılarak elde edilir. Ancak, hiç iterayon kullanmadan doğrudan açık çözüme ulaşmak isteniyorsa Tiku (1967) tarafından ileri sürülen uyarlanmış en çok olabilirlik (Modified Maximum Likelihood-MML) yöntemi kullanılır.

MML yöntemi ile elde edilen tahmin ediciler, açık cebirsel formlara sahip tahmin edicilerdir ve hata terimlerinin çarpık dağılıma sahip olduğu durumlarda bile dikkate değer bir biçimde etkindirler. Bu yöntem, aykırı değerlerin etkisini kontrol etmek için ağırlıkları kullanır. Simetrik dağılımlar için MML metodundaki ağırlıklar şemsiye sıralamasına sahiptir. Yani en küçük ve en büyük gözleme en küçük ağırlığı verir. Pozitif çarpık dağılımlar için ise ağırlıklar yarı şemsiye sıralamasına sahiptir. Yani, kuyruğun olduğu taraftaki gözlemlere en küçük ağırlıkları verir.

ANCOVA'da ortak değişkenler, deterministik veya rasgele değişkenler olabilir. Ancak uygulamada büyük ölçüde rasgeledir. Deterministik ve rasgele ortak değişkenler için tahmin ediciler, tahmin edicilerin özellikleri ve testler farklı olmasına rağmen, tahmin edicileri elde etme ve test yöntemleri her iki durumda da aynıdır (Rencher ve Schaalje 2008).

Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu durum, literatürde birçok kaynakta yaygın olarak yer almaktadır. Lee (1975), Montgomery (2000), Kuehl (2000), Milliken ve Johnson (2002), Myers ve Well (2003), Sengupta ve Jammalamadaka (2003), Maxwell ve Delaney (2004), Rencher ve Schaalje (2008), Şenoğlu ve Acıtaş (2010) bu konuyu ele alan kaynaklardan sadece birkaçıdır.

Tezin ikinci bölümünde literatür bilgisine yer verilmiştir. Bu bölümde normallik varsayımı altında,

i. Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin deterministik olduğu
ii. Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin stokastik olduğu
iii. Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin stokastik olduğu

durumlar için parametre tahminleri ve hipotez testi yapılmıştır.

Ortak değişkenin deterministik olduğu ancak hata terimlerinin normal dağılıma sahip olmadığı durumların incelendiği çalışmalar da mevcuttur. Bu çalışmalardan aşağıda bahsedilmiştir.

İki grubun olduğu ve deterministik ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde hata terimlerinin Uzun Kuyruklu Simetrik (Long-tailed Symmetric-LTS) dağılıma sahip olduğu durum Birch ve Myers (1982) tarafından ele alındı. Aykırı değerlerin varlığı durumunda bu modelin parametreleri, geleneksel LS ve Huber (1964)'ın M tahmin yöntemleri kullanılarak tahmin edildi. İki grubun eğimini ve ortalamalarının eşitliğini karşılaştırmak için t test istatistiği geliştirildi. Monte Carlo simülasyonu kullanılarak Huber (1964)'ın ψ fonksiyonu ve Beaton ve Tukey (1974)'in bisquare ψ fonksiyonu, LS yöntemi ile karşılaştırıldı.

İslam vd. (2001), doğrusal regresyon modeli için bağımsız değişkenin deterministik, hata terimlerinin ise Weibull ve GL dağılımlarına sahip olduğu durumlar için parametrelerin MML tahmin edicilerini ayrı ayrı elde etmiştir. Bu tahmin edicilerin asimptotik olarak etkin olduklarını göstermiş ve etkinliklerini LS tahmin edicileri ile karşılaştırmıştır. Daha sonra regresyon için test istatistiği geliştirmiştir. Ayrıca hataların Weibull dağılımına sahip olduğu durumu, birden fazla bağımsız değişkene sahip regresyon modeli için genelleştirmiştir.

Tiku vd. (2001)'nin çalışması, İslam vd. (2001)'nin tamamlayıcısı niteliğinde bir çalışmadır. Bu çalışmada STS ve LTS dağılım aileleri kullanılarak İslam vd. (2001)'nin çalışması, simetrik dağılımlar için genelleştirilmiştir.

Şenoğlu (2007a), ortak değişkenin deterministik ve hata terimlerinin STS dağılımına sahip olduğu bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için model parametrelerinin MML tahmin edicilerini elde etmiştir. Elde edilen tahmin edicilerin etkinliklerini LS tahmin edicileriyle karşılaştırmak için Monte Carlo simülasyonunu kullanmıştır. Simülasyon sonuçları, önerilen MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden belirgin bir şekilde etkin olduğunu göstermiştir.

Şenoğlu ve Avcıoğlu (2009) makalesinde, ortak değişkenin deterministik olduğu bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için hata terimleri GL dağılımına sahip olduğunda MML tahmin edicilerini elde ederek bu tahmin edicilerin etkinliklerini LS tahmin edicileri ile karşılaştırmıştır. Ayrıca MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiği geliştirmiştir. Simülasyon sonuçları MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden daha etkin olduğunu ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiğinin LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiğinden daha güçlü ve dayanıklı olduğunu göstermiştir.

Acıtaş (2010) tezinde, ortak değişkenin deterministik olduğu faktöriyel ANCOVA tasarımında hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için MML tahmin edicilerini elde etmiş ve test istatistiği geliştirmiştir. MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden daha etkin olduğunu göstermiştir. Ayrıca eğimlerin homojenliği için de yeni test istatistiği geliştirmiştir. MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin klasik test istatistiklerinden daha güçlü ve dayanıklı olduğunu göstermiştir.

Ortak değişkenin deterministik olması koşulu uygulama çalışmalarını kısıtlamaktadır. Bu nedenle son yıllarda bağımsız değişkenlerin de hata terimleri gibi stokastik olduğu durum ile ilgili çalışmalar önem kazanmaya başlamıştır. Bu çalışmalar ise aşağıdaki gibidir:

Doğrusal regresyon modelinde hataların yanı sıra bağımsız değişkenin de stokastik olduğu durum Vaughan ve Tiku (2000) tarafından incelenmiştir. Burada X'in dağılımının uç değer (extreme value), hata terimlerinin dağılımının normal olduğu varsayılarak ilgili parametrelerin MML tahmin edicileri elde edilmiş ve test istatistiği geliştirilmiştir. Ayrıca MML tahmin edicilerinin asimptotik özellikleri incelenmiş ve bu tahmin edicilerin etkin oldukları gösterilmiştir.

Oral (2006), lojistik regresyon modelinde bağımsız değişkenin stokastik olduğu ve dağılımının GL ve LTS olduğu durumları ayrı ayrı incelemiştir.

Sazak vd. (2006), basit doğrusal regresyon modeli için bağımsız değişkenin stokastik olduğunu varsayıp, bağımsız değişkenin ve hata terimlerinin GL dağılımına sahip olduğu durum için MML yöntemi ile tahmin ve hipotez testi problemlerini ele almıştır. Monte Carlo simülasyonu ile MML yöntemi ile geleneksel LS yöntemini karşılaştırmıştır. MML yöntemiyle elde edilen tahmin edicilerin LS yöntemiyle elde edilen tahmin edicilerden daha etkin olduğunu göstermiştir.

Şenoğlu (2007b), Sazak vd. (2006)'nın çalışmasını *c*-örneklem için genişleterek bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin her ikisinin de GL dağılıma sahip olduğu durumu ele almıştır. MML yöntemini kullanarak parametrelerin tahmin edicilerini elde etmiş ve elde edilen tahmin edicilerin etkinliklerini incelemiştir. Ayrıca test istatistiği olarak doğrusal bağıntılar ile ilgilenmiş, önerdiği test istatistiği ile normal teorideki test istatistiğinin güçlerini karşılaştırdığında önerdiği test istatistiğinin normal teorideki test istatistiğinden daha güçlü olduğunu göstermiştir.

Tiku vd. (2008), simetrik iki değişkenli STS dağılımları ve iki değişkenli Student t dağılımları için parametre tahminlerini MML yöntemiyle yapmış ve test istatistiği geliştirmiştir. Elde edilen tahmin edicilerin etkinliklerini incelemiş, MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden önemli ölçüde etkin olduğunu ve geliştirdikleri test istatistiğinin sağlam ve güçlü olduğunu göstermiştir.

Tezin ilk orjinal bölümünde bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde klasik normallik varsayımının aksine, ortak değişken ve hata terimlerinin dağılımının LTS olduğu varsayılarak, Şenoğlu (2007b)'de GL dağılımı için elde edilen tahmin ediciler ve test istatistikleri, simetrik dağılımlar ailesi için genelleştirilmiştir. Ayrıca Şenoğlu (2007b)'den farklı olarak Huber (1964)'ın M tahmin yöntemi kullanılarak da yeni parametre tahminleri ve yeni test istatistikleri önerilmiştir. Tiku (1967)'nun MML yöntemi ve Huber (1964)'ın M yöntemi kullanılarak önerilen tahmin edicilerin performansı, ortalama, varyans ve göreceli etkinliklerine (Relative Efficient-RE) göre LS tahmin edicileriyle karşılaştırılmıştır. Ayrıca MML ve M yöntemleri için önerilen test istatistikleri ile LS yöntemindeki klasik test istatistiğinin güçleri karşılaştırılmış ve

modellerde aykırı değerler olduğu durumlarda önerilen test istatistiklerinin dayanıklılıkları incelenmiştir.

Buraya kadar basit doğrusal regresyon ve bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelleri ile ilgili çalışmalardan bahsedildi. Ortak değişkenlerin sayısının birden fazla olması durumu ile ilgili yapılan son çalışmalar aşağıdaki gibidir:

İslam ve Tiku (2004), İslam vd. (2001) ve Tiku vd. (2001)'nin çalışmasını birden fazla bağımsız değişkene sahip doğrusal regresyon modeli için genişletmiştir. Burada, bağımsız değişkenler deterministik olarak alınmış ve modeldeki hata terimleri için LTS, GL ve STS dağılım aileleri kullanılarak MML tahmin edicileri elde edilmiş ve MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden belirgin şekilde etkin olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, MML tahmin edicileri simetrik dağılımlar için Huber (1964)'ın M tahmin edicileri ile karşılaştırılmıştır.

Akkaya ve Tiku (2008), bağımsız değişkenlerin deterministik olduğu birden fazla bağımsız değişkene sahip doğrusal regresyon modeli için bağımsız değişken gözlemlerinde aykırı değerler olduğunda LS tahmin edicilerinin bu duruma oldukça duyarlı olduğunu belirtmiş ve bu durumdan kaçınmak için yeniden parametrelendirilmiş bir model önermiştir. Ayrıca, hataların LTS ve GL dağılımlarına sahip olduğu durumları ele alarak hem çarpık hem de simetrik dağılımlar için ayrı ayrı parametre tahmini yapmış ve elde edilen tahmin edicilerin dayanıklılığını incelemiştir.

İslam ve Tiku (2010) birden fazla bağımsız değişkene sahip doğrusal regresyon modelini ele alarak, hata terimleri ile birlikte bağımsız değişkenlerin de stokastik olduğunu varsaymıştır. Burada bağımsız değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için parametre tahmini ve hipotez testi yapmışlardır. Elde edilen tahmin edicilerin etkinliklerini LS tahmin edicileriyle karşılaştırmışlardır. MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden daha etkin olduğunu göstermişlerdir.

Tezin diğer orijinal kısmında ise İslam ve Tiku (2010)'nun tek örneklem için yaptığı çalışma c-örneklem için genelleştirilmiştir. Bu amaçla q-ortak değişkenli bir-yönlü

ANCOVA modeli için, ortak değişkenlerin stokastik olduğu durum ele alınarak yeni parametre tahminleri elde edilmiş ve test istatistiği önerilmiştir. Burada, hem simetrik hem de çarpık dağılımın beraber kullanılması ile değişebilir durumlara uygun olan genel bir yöntem geliştirilmesi amacıyla İslam ve Tiku (2010)'daki gibi ortak değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımından geldiği varsayılmıştır. Burada karşılaştırma yapabilmek amacıyla öncelikli olarak Islam ve Tiku (2010)'nun GL ve LTS dağılımları için tercih ettiği parametre değerleri kullanılmıştır. Bu durum için parametrelerin tahmin edicileri MML yöntemi ile elde edilmiş ve bu tahmin edicilerin performansları, ortalamalarına, varyanslarına ve RE değerlerine göre değerlendirilmiştir. Ayrıca ortalamalar arasındaki farkı sınamak için test istatistiği önerilmiştir. Parametre tahminleri elde edilirken öncelikle $q = 2$ için tahmin ediciler bulunmuş, daha sonra bu tahmin ediciler q-örnekleme genişletilmiştir.

Bizim çalışmamızda da olduğu gibi literatürdeki çalışmaların çoğunda LTS ve GL dağılımları tercih edilmektedir. Bunun nedeni, LTS ve GL dağılımlarının geniş uygulama alanlarının olması ve bu dağılımların normal dağılımın makul birer alternatifleri olmalarıdır.

Tezin dördüncü bölümünde, çalışmada kullanılan modellere uygun olan gerçek yaşamdan uygulamalar verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, Monte Carlo simülasyonlarına göre elde edilen sonuçların yorumları yer almaktadır.

2. ANCOVA: NORMAL TEORİ

ANCOVA'da geleneksel olarak hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu bölümde, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında,

i. Literatürde en yaygın olan ortak değişkenin deterministik olduğu bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli
ii. Çoğu kaynakta sadece varlığından söz edilen ve ayrıntılarına çoğu zaman yer verilmeyen ortak değişkenin stokastik olduğu bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli
iii. Ortak değişkenin stokastik olduğu birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli

için parametre tahminleri ve hipotez testi yapılacaktır.

2.1 Bir Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenin Deterministik Olduğu Durum

Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu durum, literatürde birçok kaynakta yaygın olarak yer almaktadır. Lee (1975), Montgomery (2000), Kuehl (2000), Milliken ve Johnson (2002), Myers ve Well (2003), Sengupta ve Jammalamadaka (2003), Maxwell ve Delaney (2004), Rencher ve Schaalje (2008), Şenoğlu ve Acıtaş (2010) bu konuyu ele alan kaynaklardan sadece birkaçıdır. Aşağıdaki alt bölümde bu durum tekrar ele alınacaktır.

2.1.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli

Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli,

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \theta x_{ij} + e_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,c;\ j = 1,\ldots,n \tag{2.1}$$

olarak ifade edilir. Burada y_{ij}, i'nci denemedeki j'inci deney birimine ait bağımlı değişkenin değerini; μ, genel ortalamayı; τ_i, i'nci denemenin etkisini; x_{ij}, i'inci

denemedeki *j*'nci deney birimi için ortak değişkenin değerini; θ, bağımlı değişken ile ortak değişken arasındaki regresyon doğrusunun eğimini ve e_{ij}, *i*'nci denemedeki *j*'inci deney birimi için rasgele hataları gösterir. Bu çalışmada, sadece her düzeyde eşit sayıda gözlemin olduğu durum ile ilgilenilecektir.

ANOVA ile regresyonun birleştirilmiş hali olan ANCOVA yöntemi bazı varsayımlara dayanır. Bu varsayımlar aşağıdaki gibi sıralanır:

- Hata terimleri ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılıma sahiptir.
- Hata terimlerinin varyansları homojendir.
- Hata terimleri birbirinden bağımsızdır.
- Ortak değişken ile bağımlı değişken arasındaki ilişki doğrusaldır.
- Regresyon doğrularının eğimleri homojendir.

Yukarıdaki ilk üç varsayım kısaca $e_{ij} \sim NID\left(0,\sigma^2\right)$ şeklinde ifade edilir. Bu ifade hata terimlerinin bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu anlamına gelir.

Bu çalışmada sadece sabit etkili modellerle ilgilenilmesi nedeniyle, (2.1) modelinde $\sum_{i=1}^{c}\tau_i = 0$ olduğu varsayılır.

2.1.2 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini

(2.1) modelinde, normallik varsayımı altında parametrelerin ML tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur.

Hata terimleri sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip $e_{ij} \sim NID\left(0,\sigma^2\right)$ olduğundan $y_{ij} \sim NID\left(\mu+\tau_i+\theta x_{ij},\sigma^2\right)$ dır. Buradan, ML tahmin edicilerinin bulunması için gerekli olabilirlik fonksiyonu,

$$L=\prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\theta x_{ij}\right)^2\right\} \qquad (2.2)$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{cn/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\theta x_{ij}\right)^2\right\} \tag{2.3}$$

olarak elde edilir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındığında log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln L = -\frac{cn}{2}\cdot\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\theta x_{ij}\right)^2 \tag{2.4}$$

olur. Bu fonksiyonun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\theta x_{ij}\right) = 0\,, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\theta x_{ij}\right) = 0 \tag{2.6}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu-\tau_i-\theta x_{ij}\right)\cdot x_{ij} = 0 \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.5)-(2.7) denklemlerinin çözümleri, μ, τ_i ve θ parametrelerinin ML tahmin edicileridir ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{..} - \tilde{\theta}\bar{x}_{..} \quad , \quad \tilde{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} - \tilde{\theta}\left(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}\right) \quad \text{ve} \quad \tilde{\theta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}. \tag{2.8}$$

Burada,

$$\bar{x}_{i.} = \left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ , \ \bar{y}_{i.} = \left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \ , \ \bar{y}_{..} = \left(1/c\right)\sum_{i=1}^{c}\bar{y}_{i.} \ , \ \bar{x}_{..} = \left(1/c\right)\sum_{i=1}^{c}\bar{x}_{i.}$$

$$E_{xx} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)^2 \qquad \text{ve} \qquad E_{xy} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)\left(y_{ij} - \overline{y}_{i.}\right) \tag{2.9}$$

dir. Hatanın varyansı σ'nın ML tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \tilde{\theta}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)\right\}^2}{N}} \quad , \qquad \left(N = nc\right) \tag{2.10}$$

olarak elde edilir.

Yan Düzeltmesi: (2.10) eşitliğinde elde edilen $\tilde{\sigma}$ tahmin edicisi yanlıdır. Gerekli yan düzeltmesi yapıldığında $\tilde{\sigma}$ nin yansız tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \tilde{\theta}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)\right\}^2}{N - c - 1}} \tag{2.11}$$

olur.

Yukarıda bulunan tahmin ediciler, LS yöntemi kullanılarak da elde edilebilir. Ancak normallik varsayımı altında LS ve ML yöntemleri aynı sonucu verdiğinden, burada LS tahmin edicilerine ayrıca değinilmemiştir. Ancak örnek olması bakımından, çalışmanın (2.3.2) bölümündeki parametre tahminleri, LS yöntemi kullanılarak elde edilecektir.

Teorem 2.1. Olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f\left(x|\theta\right)$ olan *n*-birimlik bir örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ve bu örneklemin olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\theta|\underline{x}\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i|\theta\right)$$

olsun. $T(x)$ tahmin edicisinin beklenen değeri $\delta(\theta)$ ve varyansı $1/d(\theta)$ olan minimum varyans sınırına (Minimum Variance Bound-MVB) sahip bir tahmin edici olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametreye göre kısmi türevinin

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = d(\theta)\big(T(x) - \delta(\theta)\big) \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilmesidir. Teoremin ispatı için bakınız Kendall ve Stuart (1967).

Teorem 2.2.

- **i.** θ'nın bilinmesi koşulu altında $\tilde{\mu} = \overline{y}_{..} - \theta \overline{x}_{..}$ tahmin edicisi, μ parametresi için yansız ve varyansı σ^2/N olan MVB tahmin edicisidir.
- **ii.** θ'nın bilinmesi koşulu altında $\tilde{\tau}_i = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..} - \theta\big(\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..}\big)$ tahmin edicisi, τ_i parametresi için yansız ve varyansı σ^2/n olan MVB tahmin edicisidir.
- **iii.** $\tilde{\theta} = E_{xy}/E_{xx}$ tahmin edicisi, θ parametresi için yansız ve varyansı σ^2/M olan MVB tahmin edicisidir. Burada $M = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\big(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\big)^2$ dir.

İspat.

- **i.** Log-olabilirlik fonksiyonunun μ parametresine göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{N}{\sigma^2}\big(\tilde{\mu} - \mu\big) \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\mu}$ tahmin edicisi, μ parametresi için yansız ve varyansı $V(\tilde{\mu}) = \sigma^2/N$ olan MVB tahmin edicisidir.

- **ii.** Log-olabilirlik fonksiyonunun τ_i parametresine göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau_i} = \frac{n}{\sigma^2}\big(\tilde{\tau}_i - \tau_i\big) \tag{2.14}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\tau}_i$ tahmin edicisi, τ_i parametresi için yansız ve varyansı $V(\tilde{\mu}) = \sigma^2 / n$ olan MVB tahmin edicisidir.

iii. Log-olabilirlik fonksiyonunun θ parametresine göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{M}{\sigma^2}\left(\tilde{\theta} - \theta\right) \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\theta}$ tahmin edicisi, θ parametresi için yansız ve varyansı $V(\tilde{\theta}) = \sigma^2 / M$ olan MVB tahmin edicisidir. Burada $M = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)^2$ dir.

2.1.3 Hipotez testi

Deneme etkilerinin anlamlılığını sınamak için yokluk hipotezi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_c = 0 \tag{2.16}$$

Bu hipotez sınanırken gerekli olan test istatistikleri, indirgenmiş modelin hata kareler toplamı ile tam modelin hata kareler toplamı arasındaki farktan yararlanılarak elde edilir (Şenoğlu ve Acıtaş 2010).

(2.1) eşitliği ile ifade model "tam model" olarak isimlendirilir. Tam model için parametre tahminleri (2.8)'deki gibi elde edilmiştir. Tam modelin hata kareler toplamı SSE_F ile gösterilirse,

$$SSE_F = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \tilde{\mu} - \tilde{\tau}_i - \tilde{\theta}x_{ij}\right\}^2 \tag{2.17}$$

olur. (2.17) eşitliğinde tahmin edicilerin (2.8)'deki değerleri yerlerine yazıldığında

$$SSE_F = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \tilde{\theta}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)\right\}^2 \tag{2.18}$$

elde edilir. Kare ifade açılıp düzenlendiğinde,

$$SSE_F = E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} \tag{2.19}$$

olur. Burada, E_{xx} ve E_{xy} (2.9)'da ifade edildiği gibi ve $E_{yy} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}_{i.}\right)^2$ dir. Tam modelde, σ^2 'nin yan düzeltmesi yapılmış ML tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{SSE_F}{c(n-1)-1} \tag{2.20}$$

dir.

Teorem 2.3. Hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında

$$\frac{\left[c(n-1)-1\right]\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{SSE_F}{\sigma^2} \tag{2.21}$$

ifadesi $c(n-1)-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

H_0 hipotezi altında indirgenmiş model,

$$y_{ij} = \mu + \theta x_{ij} + e_{ij} \quad , \; i = 1,\ldots,c; \;\; j = 1,\ldots,n \tag{2.22}$$

olarak ifade edilir. Bu modelde, μ ve θ parametrelerinin ML tahmin edicileri

$$\tilde{\mu}_R = \overline{y}_{..} - \tilde{\theta}\overline{x}_{..} \text{ ve } \tilde{\theta}_R = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \tag{2.23}$$

elde edilir. Burada,

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_{..}\right)^2 \quad \text{ve} \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_{..}\right)\left(y_{ij} - \overline{y}_{..}\right) \tag{2.24}$$

dir. İndirgenmiş modelin hata kareler toplamı SSE_R ile gösterilirse,

$$SSE_R = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \tilde{\mu}_R - \tilde{\theta}x_{ij}\right\}^2$$

$$SSE_R = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \overline{y}_{..} - \tilde{\theta}_R\left(x_{ij} - \overline{x}_{..}\right)\right\}^2 \tag{2.25}$$

olur. Kare ifade açılıp düzenlendiğinde

$$SSE_R = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \tag{2.26}$$

elde edilir. Burada S_{xx} ve S_{xy}, (2.24)'de ifade edildiği gibi ve $S_{yy} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}_{..}\right)^2$ şeklindedir. İndirgenmiş modelde σ^2'nin yan düzeltmesi yapılmış ML tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}_R^2 = \frac{SSE_R}{N-2} \tag{2.27}$$

dir.

Teorem 2.4. Hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında

$$\frac{(N-2)\tilde{\sigma}_R^2}{\sigma^2} = \frac{SSE_R}{\sigma^2} \tag{2.28}$$

ifadesi $N-2$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir.

Tam model ile indirgenmiş model arasındaki tek fark, tam modelde τ_i parametresinin olması, indirgenmiş modelde ise bu parametrenin olmamasıdır. $SSE_R - SSE_F$ farkı, τ_i'ler arasındaki farklılıklardan kaynaklanan değişimin miktarını gösterir. Bu nedenle, $SSE_R - SSE_F$ farkı, (2.16)'da verilen yokluk hipotezini sınamak için $cn-2-\left[c\left(n-1\right)-1\right]=c-1$ serbestlik derecesiyle deneme kareler toplamını verir. Yani deneme kareler toplamı,

$$SS_{Deneme} = SSE_R - SSE_F \tag{2.29}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla yokluk hipotezini sınamak için test istatistiği,

$$F_{Deneme} = \frac{\left(SSE_R - SSE_F\right)/\left(c-1\right)}{SSE_F/\left[c\left(n-1\right)-1\right]} \tag{2.30}$$

ile verilir.

Teorem 2.5 (Cochran Teoremi). $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı standart normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. R_i'ler, X_i'lerin doğrusal birleşimlerinin kareler toplamlarını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = R_1 + R_2 + \cdots + R_k, \quad k \le n \tag{2.31}$$

eşitliği yazılabilsin ve r_i, R_i $(i=1,\ldots,k)$ rasgele değişkenlerinin serbestlik derecelerini göstersin. Bu durumda aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisinin doğru olması üçüncü ifadenin de doğru olmasını gerektirir:

i. $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$

ii. $R_1, R_2, \ldots, R_k$ rasgele değişkenleri bağımsızdır.

iii. R_i $(i=1,\ldots,k)$ rasgele değişkenleri r_i serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir (Şenoğlu ve Acıtaş 2010).

Teorem 2.6. (2.1) modelinde, H_0 hipotezi altında, F_{Deneme} test istatistiği $c-1$ ve $N-c-1$ serbestlik dereceleri ile merkezi F dağılımına sahiptir.

İspat. Teorem 2.3 ve Teorem 2.4'ün sonucu olarak ve ki-kare dağılımının toplanabilirlik özelliğinden $\left(SSE_R - SSE_F\right)/\sigma^2$ ifadesi $c-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Cochran teoremine göre $SSE_R - SSE_F/\sigma^2$ ve SSE_F/σ^2 ifadeleri birbirinden bağımsızdır. (2.30)'da pay ve payda ki-kare dağılımına sahip ve bağımsız olduğundan F_{Deneme} test istatistiği $c-1$ ve $N-c-1$ serbestlik derecesi ile F dağılımına sahiptir (Şenoğlu ve Acıtaş 2010).

Böylece, (2.30) eşitliği ile verilen F_{Deneme} istatistiği F tablo değerinden büyükse, yani $F_{Deneme} > F_{\alpha,c-1,c(n-1)-1}$ ise H_0 hipotezi red edilir.
(2.29) eşitliğinden,

$$SSE_R = SS_{Deneme} + SSE_F \tag{2.32}$$

yazılabilir. Böylece SSE_R, "toplam kareler toplamı" olarak kullanıldığından SSE_R ifadesi yerine SST_F kullanılırsa yukarıdaki ifade,

$$SST_F = SS_{Deneme} + SSE_F \tag{2.33}$$

olur. Buradan bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde, ortak değişken için düzeltilmiş kareler toplamları ve düzeltilmiş serbestlik dereceleri aşağıdaki çizelgedeki gibidir:

Çizelge 2.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA çizelgesi

Kaynak	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler Ortalaması	F
Denemeler	$c-1$	$SS_{Deneme} = SST_F - SSE_F$	$SS_{Deneme}/(c-1)$	F_T
Hata	$c(n-1)-1$	$SSE_F = E_{yy} - E_{xy}^2/E_{xx}$	$SSE_F/c(n-1)-1$	
Toplam	$cn-2$	$SST_F = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$		

bakınız Rencher ve Schaalje (2008).

2.2 Bir Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenin Stokastik Olduğu Durum

Bir-yönlü ANCOVA modelinde geleneksel olarak ortak değişkenin deterministik olduğu varsayılır. Ancak gerçek yaşam problemlerinde ortak değişkenin birçok durumda stokastik olduğu görülmüştür (Vaughan ve Tiku 2000, Sazak vd. 2006, Oral 2006, Şenoğlu 2007b, Tiku vd. 2008, Islam ve Tiku 2010). Bu bölümde hem ortak değişkenin hem de hata terimlerinin dağılımının normal olduğu varsayılarak parametre tahminleri elde edilmiştir.

2.2.1 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini

(2.1) modelinde, X ortak değişkeninin, μ_1 ortalamalı ve σ_1^2 varyanslı normal dağılıma sahip $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\right\} \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{2.34}$$

şeklinde ifade edilir. $X = x$ verildiğinde, Y'nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2.1}^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{2.1}^2}(y-\mu_{2.1}-\theta x)^2\right\} \tag{2.35}$$

dir. Burada, $\sigma_{2.1}^2 = \sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)$, $\mu_{2.1} = \mu_2 - \theta\mu_1$, $\theta = \rho\left(\sigma_2/\sigma_1\right)$ olarak tanımlanır. İki değişkenli dağılımlar, marjinal ve koşullu dağılımların çarpımı olarak, yani $f\left(x,y\right) = h\left(y|x\right)g\left(x\right)$ şeklinde yazılabildiğinden $\left(x_{ij}, y_{ij}\right)$ örneklemi için olabilirlik fonksiyonu $L = L_X \cdot L_{Y|X}$'e eşit olacaktır (Tiku ve Kambo 1992). x_{ij} rasgele örneklemi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L_X = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{N/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\mu_{1i}\right)^2\right\} \tag{2.36}$$

ve x_{ij} verildiğinde y_{ij}'nin koşullu olabilirlik fonksiyonu,

$$L_{Y/X} = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_{2.1}^2\right)^{N/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{2.1}^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu_{2.1i}-\theta x_{ij}\right)^2\right\} \tag{2.37}$$

olur. Buradan, $\left(x_{ij}, y_{ij}\right)$ örneklemi için olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L &= L_X L_{Y/X} \\ &= \frac{1}{\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{N/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\mu_{1i}\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{\left(2\pi\sigma_{2.1}^2\right)^{N/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{2.1}^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu_{2.1i}-\theta x_{ij}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklindedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln L = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma_1^2\right) - \frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\mu_{1i}\right)^2 - \frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma_{2.1}^2\right) - \frac{1}{2\sigma_{2.1}^2}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\mu_{2.1i}-\theta x_{ij}\right)^2 \tag{2.39}$$

olacaktır. Bu fonksiyonun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} = \frac{1}{\sigma_1^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \mu_{1i} \right) = 0 , \qquad i = 1, \ldots, c \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{1}{\sigma_{2.1}^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij} \right) = 0 , \quad i = 1, \ldots, c \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1^3} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \mu_{1i} \right)^2 = 0 , \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma_{2.1}^2} \cdot \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij} \right) \left(x_{ij} \right) = 0 , \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{1}{\sigma_{2.1}^3} \cdot \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij} \right)^2 = 0 , \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2i}} = \frac{1}{\sigma_2^2 \left(1 - \rho^2 \right)} \sum_{j=1}^{n} \left\{ y_{ij} - \mu_{2i} - \theta \left(x_{ij} - \mu_{1i} \right) \right\} = 0 , \qquad i = 1, \ldots, c \tag{2.45}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} = -\frac{N}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^3 \left(1 - \rho^2 \right)} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left\{ y_{ij} - \mu_{2i} - \theta \left(x_{ij} - \mu_{1i} \right) \right\}^2 = 0 \tag{2.46}$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri ML tahmin edicileridir:

$$\tilde{\mu}_{1i} = \overline{x}_{i.} \quad , \quad \tilde{\mu}_{2i} = \overline{y}_{i.} \quad , \quad \tilde{\mu}_{2.1i} = \overline{y}_{i.} - \tilde{\theta} \overline{x}_{i.} \quad , \quad \tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(y_{ij} - \overline{y}_{i.} \right) \left(x_{ij} - \overline{x}_{i.} \right)}{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \overline{x}_{i.} \right)^2} \tag{2.47}$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \overline{x}_{i.} \right)^2}{N}} , \quad \tilde{\sigma}_{2.1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left\{ y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \tilde{\theta} \left(x_{ij} - \overline{x}_{i.} \right) \right\}^2}{N}} , \quad \tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_{2.1}^2 + \tilde{\theta}^2 \tilde{\sigma}_1^2}$$

ve $\tilde{\rho} = \tilde{\theta}\left(\tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_2\right)$ dir.

Yan Düzeltmesi: Burada, $\tilde{\sigma}_1$ ve $\tilde{\sigma}_{2.1}$ tahmin edicileri yanlıdır. Bu tahmin ediciler için yan düzeltmesi yapıldığında

$$\tilde{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)^2}{N-c}} \quad \text{ve} \quad \tilde{\sigma}_{2.1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \tilde{\theta}\left(x_{ij} - \overline{x}_{i.}\right)\right\}^2}{N-c-1}} \tag{2.48}$$

tahmin edicileri yansız, yani $E\left(\tilde{\sigma}_1\right) = \sigma_1$ ve $E\left(\tilde{\sigma}_{2.1}\right) = \sigma_{2.1}$ olacaktır.

Teorem 2.7.

i. $\tilde{\mu}_{1i}$ tahmin edicisi, μ_{1i} parametresi için yansız ve varyansı σ_1^2 / n olan MVB tahmin edicisidir.

ii. $\tilde{\mu}_{2i}$ tahmin edicisi, μ_{2i} parametresi için yansız ve varyansı $\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)/n$ olan MVB tahmin edicisidir.

iii. $\tilde{\theta}$ tahmin edicisi, θ parametresi için yansız ve varyansı $\sigma_{2.1}^2$ olan MVB tahmin edicisidir.

İspat.

i. Log-olabilirlik fonksiyonunun μ_{1i} parametresine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} = \frac{n}{\sigma_1^2}\left[\tilde{\mu}_{1i} - \mu_{1i}\right] \tag{2.49}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\mu}_{1i} = \overline{x}_{i.}$ tahmin edicisi, μ_{1i} parametresi için yansız ve varyansı σ_1^2 / n olan MVB tahmin edicisidir.

ii. Log-olabilirlik fonksiyonunun μ_{2i} parametresine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2i}} = \frac{n}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\left[\tilde{\mu}_{2i} - \mu_{2i}\right] \tag{2.50}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\mu}_{2i} = \overline{y}_{i.}$ tahmin edicisi, μ_{2i} parametresi için yansız ve varyansı $\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\big/n$ olan MVB tahmin edicisidir.

iii. Log-olabilirlik fonksiyonunun θ parametresine göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma_{2.1}^2}\left[\tilde{\theta} - \theta\right] \tag{2.51}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\tilde{\theta}$ tahmin edicisi, θ parametresi için yansız ve varyansı $\sigma_{2.1}^2$ olan MVB tahmin edicisidir.

ML tahmin edicilerinin özellikleri:

i. ML tahmin edicileri asimptotik olarak normal dağılıma sahiptir.
ii. Düzgünlük koşulları altında tutarlıdır.
iii. Asimptotik olarak tam etkin tahmin edicilerdir. Yani yansız ve varyansı MVB sınırına eşittir.
iv. Bu tahmin ediciler değişmezlik özelliğine sahiptir.

Detaylı bilgi için bakınız Rohatgi 1976, Bain ve Engelhardt 1992, Casella ve Berger 2002.

2.3 Birden Fazla Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenlerin Stokastik Olduğu Durum

2.3.1 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli

q -ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modeli,

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d x_{dij} + e_{ij}, \quad i = 1,\ldots,c;\ j = 1,\ldots,n \tag{2.52}$$

veya denk olarak

$$y_{ij} = \mu_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d x_{dij} + e_{ij} \tag{2.53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada y_{ij}, i'nci denemedeki j'inci deney birimine ait bağımlı değişkenin değerini; μ, genel ortalamayı; τ_i, i'nci denemenin etkisini; x_{dij}, d'inci ortak değişken için i'inci denemedeki j'nci deney birimine karşılık gelen ortak değişkenin değerini; γ_d, d'inci ortak değişken için regresyon katsayısını; e_{ij}, i 'nci denemedeki j'inci deney birimine ait rasgele hata terimlerini gösterir.

Önemle belirtilmelidir ki, LS tahmin edicilerinin varyansları, ortak değişkenlerdeki aykırı değerlerden büyük ölçüde etkilenir ve bu durum LS tahmin edicileri için önemli bir problemdir. Çünkü, ortak değişkenlerde aykırı değerler uçlarda ise regresyon katsayılarının LS tahmin edicileri etkin gibi görünecektir. Eğer ortak değişkenlerde aykırı değerler iç kısımlarda ise regresyon katsayılarının LS tahmin edicileri etkin değil gibi görünecektir. Bu problemin çözümü için yeniden parametrelendirilmiş bir model önerilir ve bu yeni model için LS tahmin edicileri, ortak değişkenlerdeki aykırı değerlere karşı hassas olmayacaktır (Akkaya ve Tiku 2008, İslam ve Tiku 2010, Tiku ve Akkaya 2010). Bu nedenle bu bölümde yeniden parametrelendirme yapılarak elde edilen

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d u_{dij} + e_{ij}, \quad i = 1,\ldots,c, \; j = 1,\ldots,n \tag{2.54}$$

modeli veya denk olarak

$$y_{ij} = \mu_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d u_{dij} + e_{ij} \tag{2.55}$$

modeli kullanılmıştır. Burada, $u_{dij} = \left(x_{dij} - \mu_{di}\right) \big/ \sigma_d$ olarak tanımlanır.

2.3.2 Parametrelerin LS yöntemi ile tahmini

Önceki bölümlerde parametre tahminleri ML yöntemi kullanılarak elde edilmişti. Normallik varsayımı altında LS ve ML yöntemleri aynı sonucu verdiğinden bu bölümde örnek olması bakımından tahmin ediciler LS yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Ortak değişken sayısı $q = 2$ olarak alındığında (2.55) modeli,

$$y_{ij} = \mu_i + \gamma_1 u_{1ij} + \gamma_2 u_{2ij} + e_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,c;\ j = 1,\ldots,n \tag{2.56}$$

olarak yazılır. Burada,

$$e_{ij} = y_{ij} - \mu_i - \gamma_1 u_{1ij} - \gamma_2 u_{2ij} \tag{2.57}$$

$$w_{1ij} = x_{1ij} - \mu_{1i} \tag{2.58}$$

ve

$$w_{2ij} = x_{2ij} - \mu_{2.1i} - \theta_{21} x_{1ij} \tag{2.59}$$

olarak tanımlandığında (2.57)-(2.59) eşitliklerinin karelerinin toplamlarının minimize edilmesiyle LS tahmin edicileri elde edilir. Buna göre model parametrelerinin LS tahmin edicileri

$$\tilde{\mu}_i = \bar{y}_{i.} - \tilde{\gamma}_1 \bar{u}_{1i.} - \tilde{\gamma}_2 \bar{u}_{2i.} \tag{2.60}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{S_{U_2} S_{U_1 Y} - S_{U_1 U_2} S_{U_2 Y}}{S_{U_1} S_{U_2} - \left(S_{U_1 U_2}\right)^2} \quad \text{ve} \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{S_{U_1} S_{U_2 Y} - S_{U_1 U_2} S_{U_1 Y}}{S_{U_1} S_{U_2} - \left(S_{U_1 U_2}\right)^2} \tag{2.61}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$\bar{y}_{i.} = (1/n)\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\ ,\ \bar{u}_{1i.} = (1/n)\sum_{j=1}^{n} \tilde{u}_{1ij}\ ,\ \bar{u}_{2i.} = (1/n)\sum_{j=1}^{n} \tilde{u}_{2ij} \tag{2.62}$$

$$S_{U_1}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}U_{1ij}^2 \quad , \quad S_{U_2}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}U_{2ij}^2 \quad , \quad S_{U_1Y}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}U_{1ij} \, , \quad S_{U_2Y}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}U_{2ij}$$

$$S_{U_1U_2}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}U_{1ij}U_{2ij} \, , \;\; \tilde{u}_{1ij}=\left(x_{1ij}-\tilde{\mu}_1\right)\big/\tilde{\sigma}_1 \, , \;\; \tilde{u}_{2ij}=\left(x_{2ij}-\tilde{\mu}_2\right)\big/\tilde{\sigma}_2$$

ve

$$U_{1ij}=u_{1ij}-\overline{u}_{1i.}, \quad U_{2ij}=u_{2ij}-\overline{u}_{2i.}, \quad Y_{ij}=y_{ij}-\overline{y}_{i.}, \quad N=cn$$

dir. Gerekli yan düzeltmesi yapıldığında σ 'nın LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\tilde{\gamma}_1U_{1ij}-\tilde{\gamma}_2U_{2ij}\right)^2}{N-3}} \tag{2.63}$$

olur. Ayrıca gerekli olan diğer parametrelerin tahmin edicileri

$$\tilde{\mu}_{1i}=\overline{x}_{1i.}\,, \;\; \tilde{\mu}_{2.1i}=\overline{x}_{2i.}-\tilde{\theta}_{21}\overline{x}_{1i.} \;\text{ ve }\; \tilde{\theta}_{21}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}X_{1ij}X_{2ij}\Big/\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}X_{1ij}^2 \tag{2.64}$$

olarak bulunur. Burada,

$$X_{1ij}=x_{1ij}-\overline{x}_{1i.}, \quad X_{2ij}=x_{2ij}-\overline{x}_{2i.} \, , \quad \overline{x}_{1i.}=\left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n}x_{1ij} \;\text{ ve }\; \overline{x}_{2i.}=\left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n}x_{2ij} \tag{2.65}$$

dir. Gerekli yan düzeltmesi yapıldığında σ_1 parametresinin LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}X_{1ij}^2}{N-1}} \tag{2.66}$$

olur. Benzer şekilde, $\sigma_{2.1}$ 'in yan düzeltmesi yapılmış LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}_{2.1}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left[X_{2ij}-\tilde{\theta}_{21}X_{1ij}\right]^2}{N-2}} \tag{2.67}$$

dir. Ayrıca, $\tilde{\mu}_{2i}$ ve $\tilde{\sigma}_2$ tahmin edicileri sırasıyla $\tilde{\mu}_{2i}=\tilde{\mu}_{2.1i}+\tilde{\theta}_{21}\tilde{\mu}_{1i}$ ve $\tilde{\sigma}_2=\sqrt{\tilde{\sigma}_{2.1}^2+\tilde{\theta}_{21}^2\tilde{\sigma}_1^2}$ eşitliklerinden elde edilir.

Genelleştirme: Tahmin ediciler, q -ortak değişken için genelleştirilirse;

$$\tilde{\mu}_i=\overline{y}_{i.}-\sum_{d=1}^{q}\tilde{\gamma}_d\overline{u}_{di.}\ ,\ \tilde{\gamma}=\left(\tilde{\gamma}_d\right)=\left(U'U\right)^{-1}\left(U'Y\right) \tag{2.68}$$

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\sum_{d=1}^{q}\tilde{\gamma}_d\tilde{U}_{dij}\right)^2}{N-q-1}}\ ,\ Y_{ij}=y_{ij}-\overline{y}_{i.}\ ,\ \tilde{U}_{dij}=\tilde{u}_{dij}-\overline{u}_{di.}\ ,\ X_{dij}=x_{dij}-\overline{x}_{di.}$$

$$\overline{y}_{i.}=\left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\ ,\ \overline{x}_{di.}=\left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n}x_{dij}\ ,\ \overline{u}_{di.}=\left(1/n\right)\sum_{j=1}^{n}u_{dij}\ ,\ \tilde{u}_{dij}=\frac{\left(x_{dij}-\tilde{\mu}_d\right)}{\tilde{\sigma}_d}$$

$$U_{(N\times q)}=\left(\tilde{U}_{dij}\right),\quad Y_{(N\times 1)}=\left(Y_{ij}\right)$$

$$\tilde{\mu}_{di}=\tilde{\mu}_{d.I_d i}+\sum_{l=1}^{d-1}\tilde{\theta}_{dl}\tilde{\mu}_{l.I_l i}\ ,\tilde{\mu}_{1i}=\tilde{\mu}_{1.I_1 i}\ ,\quad \tilde{\sigma}_d=\sqrt{\tilde{\sigma}_{d.I_d}^2+\sum_{l=1}^{d-1}\tilde{\theta}_{dl}^2\tilde{\sigma}_{l.I_l}^2}\ ,\ \tilde{\sigma}_1=\tilde{\sigma}_{1.I_1}$$

$$\tilde{\rho}_{dl.I_l}=\tilde{\theta}_{dl}\left(\tilde{\sigma}_l/\tilde{\sigma}_d\right),\tilde{\rho}_{21.I_l}=\tilde{\rho}_{21}\ ,\qquad \tilde{\mu}_{d.I_d i}=\overline{x}_{di.}-\sum_{l=1}^{d-1}\tilde{\theta}_{dl}\overline{x}_{li.}$$

$$\tilde{\sigma}_{d.I_d}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{dij}-\sum_{l=1}^{d-1}\tilde{\theta}_{dl}X_{lij}\right)^2}{N-d}}\ ,\ \tilde{\theta}_{d-1}=\left(\tilde{\theta}_{dl}\right)=\left(X'_{d-1}X_{d-1}\right)^{-1}\left(X'_{d-1}Z_d\right)$$

olur. Burada,

$$X_{d-1}=\begin{bmatrix} X_{111} & X_{211} & \cdots & X_{d-111} \\ X_{112} & X_{212} & \cdots & X_{d-112} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{11n} & X_{21n} & \cdots & X_{d-11n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1c1} & X_{2c1} & \cdots & X_{d-1c1} \\ X_{1c2} & X_{2c2} & \cdots & X_{d-1c2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1cn} & X_{2cn} & \cdots & X_{d-1cn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\theta}_{d-1}=\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{d1} \\ \tilde{\theta}_{d2} \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{dd-1} \end{bmatrix}, \quad Z_d=\begin{bmatrix} X_{d11} \\ X_{d12} \\ \vdots \\ X_{d1n} \\ \ddots \\ X_{dc1} \\ X_{dc2} \\ \vdots \\ X_{dcn} \end{bmatrix}$$

dır ve $I_d \ \{1,2,\ldots,d-1\}, d>1$ tamsayılar kümesini yani, $I_2\{1\}$, $I_3\{1,2\}$, $I_4\{1,2,3\}$ vb. gösterir.

3. ANCOVA: NORMAL OLMAYAN TEORİ

3.1 Bir Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenin ve Hata Terimlerinin Dağılımının LTS Olduğu Durum

Ortak değişkenin deterministik olduğu ve hata terimlerinin dağılımının normal olmadığı durum ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar, giriş bölümünde detaylı olarak verildiği gibi Birch ve Myers (1982), İslam vd. (2001), Tiku vd. (2001), Şenoğlu (2007a), Şenoğlu ve Avcıoğlu (2009), Acıtaş (2010)'ın çalışmalarıdır.

Ortak değişkenin deterministik olması koşulu uygulama çalışmalarını kısıtladığından son yıllarda ortak değişkenin stokastik olduğu çalışmalar önem kazanmaya başlamıştır. Ortak değişkenin stokastik olduğu durum ile ilgili çalışmalar ise Vaughan ve Tiku (2000), Oral (2006), Sazak vd. (2006), Şenoğlu (2007b), Tiku vd. (2008)'nin çalışmalarıdır.

Bu bölümde (2.1) modelinde klasik normallik varsayımının aksine, ortak değişken ve hata terimlerinin dağılımının LTS olduğu varsayılarak, Şenoğlu (2007b)'de GL dağılımı için elde edilen tahmin ediciler ve test istatistiği, simetrik dağılımlar ailesi için genelleştirilecektir. Ayrıca Huber (1964)'ın M tahmin yöntemi kullanılarak da parametrelerin yeni tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiği önerilecektir. Geleneksel LS tahmin edicileri ile Tiku (1967)'nun MML yöntemi ve Huber (1964)'ın M yöntemi kullanılarak önerilen yeni tahmin edicilerin etkinlikleri ve önerilen test istatistiklerinin güçleri karşılaştırılacaktır.

LTS dağılımlar ailesinin özelliklerinden aşağıda kısaca bahsedilmiştir:
X rasgele değişkeni şekil parametresi p olan LTS dağılımına sahip ise X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{k}B(1/2,\,p-1/2)\sigma}\left\{1+\frac{(x-\mu)^2}{k\sigma^2}\right\}^{-p},\ k=2p-3,\ p\geq 2,\ -\infty<x<\infty \qquad (3.1)$$

ile verilir. Burada $E(X)=\mu$ ve $Var(X)=\sigma^2$ dir. $t=\sqrt{(v/k)}\,(X/\sigma)$ şeklinde tanımlanan rasgele değişken, $v=2p-1$ serbestlik dereceli Student *t* dağılımına sahiptir. LTS dağılımı simetrik bir dağılımdır. Basıklığı, $\beta_2=3(p-3/2)/(p-5/2)$ olarak tanımlanır ve basıklık her zaman 3'den daha büyük ya da 3'e eşittir. Şekil parametresi p'nin farklı değerleri için dağılımın şekli farklı olur. LTS dağılımı $p=1$ olduğunda Cauchy dağılımı, $p=\infty$ olduğunda ise normal dağılıma dönüşür. Şekil parametresinin birkaç farklı değeri için LTS dağılımının basıklık değerleri aşağıdaki gibidir:

p	2.5	3.5	5	10	∞
β_2	∞	9	4.2	3.4	3

(3.1) ailesi, özellikle aykırı değerler içeren örnekleri modellemek için kullanıldığından, normal dağılıma alternatif olan bir dağılım kullanılmak istenildiğinde sıklıkla tercih edilen bir dağılımdır (Tiku ve Akkaya 2004).

3.1.1 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini

(2.1) modelinde ortak değişkenin bağımsız ve aynı $LTS(p_1,\sigma_1)$ dağılımlı olduğu varsayıldığında X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{k_1}\,\beta\left(\frac{1}{2},p_1-\frac{1}{2}\right)\cdot\sigma_1}\left[1+\frac{1}{k_1}\cdot\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right]^{-p_1},\ -\infty<x<\infty \qquad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $k_1=2p_1-3$, $p_1\geq 2$'dir. $X=x$ verildiğinde Y'nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(y|x)=\frac{1}{\sqrt{k_2}\beta\left(\frac{1}{2},p_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\left[1+\frac{1}{k_2}\cdot\frac{\left(y-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\right]^{-p_2} \tag{3.3}$$

dir ve $\sigma_{2.1}=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$ ve $\theta=\rho(\sigma_2/\sigma_1)$ olduğundan (3.3) eşitliği,

$$h(y|x)=\frac{1}{\sqrt{k_2}\beta\left(\frac{1}{2},p_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\sigma_{2.1}}\left[1+\frac{1}{k_2}\cdot\frac{\left(y-\mu_2-\theta(x-\mu_1)\right)^2}{\sigma_{2.1}^2}\right]^{-p_2},-\infty<y<\infty \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir. Bölüm 2'dekine benzer olarak, x_{ij} rasgele örneklemi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L_X=\frac{1}{(k_1)^{N/2}\left[\beta\left(\frac{1}{2},p_1-\frac{1}{2}\right)\right]^N\cdot\sigma_1^N}\prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\left[1+\frac{1}{k_1}\cdot\frac{\left(x_{ij}-\mu_{1i}\right)^2}{\sigma_1^2}\right]^{-p_1} \tag{3.5}$$

ve x_{ij} rasgele örneklemi verildiğinde y_{ij}'nin olabilirlik fonksiyonu,

$$L_{Y|X}=\frac{1}{(k_2)^{N/2}\left[\beta\left(\frac{1}{2},p_2-\frac{1}{2}\right)\right]^N\cdot(\sigma_{2.1})^N}\prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\left[1+\frac{1}{k_2}\cdot\frac{\left(y_{ij}-\mu_{2i}-\theta\left(x_{ij}-\mu_{1i}\right)\right)^2}{\sigma_{2.1}^2}\right]^{-p_2} \tag{3.6}$$

olarak bulunur. Burada, $\mu_{2.1i}=\mu_{2i}-\theta\mu_{1i}$ olduğundan x_{ij} verildiğinde y_{ij}'nin olabilirlik fonksiyonu,

$$L_{Y|X} = \frac{1}{\left(k_2\right)^{N/2}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^N \cdot \left(\sigma_{2.1}\right)^N} \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{\left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij}\right)^2}{\sigma_{2.1}^2}\right]^{-p_2} \tag{3.7}$$

olarak düzenlenebilir. Buradan $\left(x_{ij}, y_{ij}\right)$ örneklemi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L = L_X \cdot L_{Y|X}$$

$$= \frac{1}{\left(k_1\right)^{N/2}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{2}\right)\right]^N \cdot \sigma_1^N} \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\left(x_{ij} - \mu_{1i}\right)^2}{\sigma_1^2}\right]^{-p_1} \cdot$$

$$\frac{1}{\left(k_2\right)^{N/2}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^N \cdot \left(\sigma_{2.1}\right)^N} \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{\left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij}\right)^2}{\sigma_{2.1}^2}\right]^{-p_2} \tag{3.8}$$

şeklinde elde edilir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln L = -\frac{N}{2}\ln k_1 - N\ln\beta\left(\frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{2}\right) - N\ln\sigma_1 - p_1\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\ln\left[1 + \frac{1}{k_1} \cdot \frac{\left(x_{ij} - \mu_{1i}\right)^2}{\sigma_1^2}\right] - \frac{N}{2}\ln k_2$$

$$-N\ln\beta\left(\frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2}\right) - N\ln\sigma_{2.1} - p_2\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\ln\left[1 + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{\left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij}\right)^2}{\sigma_{2.1}^2}\right] \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} = \frac{2p_1}{k_1\sigma_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{z_{ij}}{\left(1+\frac{1}{k_1}z_{ij}^2\right)} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,c \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{2p_1}{k_1\sigma_1}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\frac{z_{ij}}{\left(1+\frac{1}{k_1}z_{ij}^2\right)} = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\left(1+\frac{1}{k_2}a_{ij}^2\right)} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,c \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\frac{a_{ij}}{\left(1+\frac{1}{k_2}a_{ij}^2\right)} = 0 \tag{3.13}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{a_{ij}}{\left(1+\frac{1}{k_2}a_{ij}^2\right)} = 0 \tag{3.14}$$

denklemleri elde edilir. Burada $z_{ij} = \left(x_{ij} - \mu_{1i}\right)\big/\sigma_1$ ve $a_{ij} = e_{ij}\big/\sigma_{2.1} = \left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij}\right)\big/\sigma_{2.1}$ dir. (3.10)-(3.14) denklemlerinin ML yöntemiyle açık çözümleri bulunamamaktadır ve denklemlerin iteratif yöntemlerle çözülmesi, birden fazla kök bulunması, iterasyonların yakınsamaması veya yanlış değerlere yakınsaması gibi nedenlerle problemlidir (Barnett 1966, Tiku vd. 1986, Puthenpura ve Sinha 1986, Vaughan 1992). Bu nedenle (3.10)-(3.14) denklemlerini çözmek için Tiku (1967) ve Tiku & Suresh (1992) tarafından önerilen MML yöntemi kullanılacaktır.

3.1.2 Parametrelerin MML yöntemi ile tahmini

Tiku (1967) tarafından önerilen MML yönteminde, MML denklemlerini elde etmek için ilk olarak,

$$z_{i(1)} \le z_{i(2)} \le \cdots \le z_{i(n)} \quad , \quad a_{i(1)} \le a_{i(2)} \le \cdots \le a_{i(n)} \tag{3.15}$$

sıralı istatistiklerinden yararlanılır. z_{ij} ve a_{ij} değerleri sıralı istatistikler cinsinden, yani

$$z_{i(j)} = \left(x_{i(j)} - \mu_{1i}\right) \Big/ \sigma_1 \quad \text{ve} \quad a_{i(j)} = e_{i(j)} \big/ \sigma_{2.1} = \left(y_{i[j]} - \mu_{2.1i} - \theta x_{i[j]}\right) \Big/ \sigma_{2.1} \tag{3.16}$$

şeklinde ifade edilir. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli durum, $z_{i(j)}$ sıralı istatistiklerinde kullanılan $x_{i(j)}$'ler, x'lerin sıralanmış biçimi olmasına rağmen, $a_{i(j)}$ sıralı istatistiklerinde kullanılan $\left(y_{i[j]}, x_{i[j]}\right)$ ise $e_{i(j)}$'ye karşılık gelen $\left(y_{ij}, x_{ij}\right)$ gözlemleridir ve $e_{i(j)}$'nin eşleniği (concomitant) olarak adlandırılırlar. Buna göre (3.10)-(3.14) eşitlikleri sıralı istatistikler cinsinden,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} = \frac{2p_1}{k_1\sigma_1} \sum_{j=1}^{n} \frac{z_{i(j)}}{\left(1 + \frac{1}{k_1} z_{i(j)}^2\right)} = 0 \, , \quad i = 1, \ldots, c \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{2p_1}{k_1\sigma_1} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} z_{i(j)} \frac{z_{i(j)}}{\left(1 + \frac{1}{k_1} z_{i(j)}^2\right)} = 0 \, , \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{i(j)}}{\left(1 + \frac{1}{k_2} a_{i(j)}^2\right)} = 0 \, , \quad i = 1, \ldots, c \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} a_{i(j)} \frac{a_{i(j)}}{\left(1 + \frac{1}{k_2} \cdot a_{i(j)}^2\right)} = 0 \tag{3.20}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2p_2}{k_2 \sigma_{2.1}} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} x_{i(j)} \frac{a_{i(j)}}{\left(1 + \frac{1}{k_2} a_{i(j)}^2\right)} = 0 \qquad (3.21)$$

şeklinde yazılır. Çünkü, $\sum$ sembolü kullanıldığından gözlemlerin sıralı istatistikler cinsinden yazılması ile orjinal haliyle yazılması arasında bir fark yoktur.

Teorem 3.1. $z_{i(1)} \le z_{i(2)} \le \cdots \le z_{i(n)}$ ve $a_{i(1)} \le a_{i(2)} \le \cdots \le a_{i(n)}$, z_{ij} ve a_{ij} ($i = 1,\ldots,c$; $j = 1,\ldots,n$)'lerin sıralanmış değerlerini ve sırasıyla $t_{1(j)} = E\left(z_{i(j)}\right)$ ve $t_{2(j)} = E\left(a_{i(j)}\right)$ ise sıralanmış değerlerin beklenen değerlerini göstersin. Her $p \ge 2$ için $g_1\left(z_{i(j)}\right)$ ile $\left(\alpha_{1ij} + \beta_{1ij} z_{i(j)}\right)$ arasındaki ve $g_2\left(a_{i(j)}\right)$ ile $\left(\alpha_{2ij} + \beta_{2ij} a_{i(j)}\right)$ arasındaki fark, *n* sonsuza giderken sıfıra yaklaşır. Yani;

i. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_{1i}} \right| = 0$$

ii. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2i}} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_{2i}} \right| = 0$$

iii. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta} \right| = 0$$

iv. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma_1} \right| = 0$$

v. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma_2} \right| = 0$$

dir. Bu durum MML tahmin edicilerinin asimptotik olarak ML tahmin edicilerine eşit olduğunu göstermektedir. Teoremin ispatı için bakınız Hoeffding (1953), Tiku ve Akkaya (2004).

Burada, $g_1\left(z_{i(j)}\right)=z_{i(j)}\Big/\left(1+\frac{1}{k_1}z_{i(j)}^2\right)$ ile ifade edilirse (3.17) ve (3.18) eşitlikleri,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}}=\frac{2p_1}{k_1\sigma_1}\sum_{j=1}^{n} g_1\left(z_{i(j)}\right)=0, \quad i=1,\ldots,c \tag{3.22}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1}=-\frac{N}{\sigma_1}+\frac{2p_1}{k_1\sigma_1}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} z_{i(j)}g_1\left(z_{i(j)}\right)=0 \tag{3.23}$$

olarak ve $g_2\left(a_{i(j)}\right)=a_{i(j)}\Big/\left(1+\frac{1}{k_2}\cdot a_{i(j)}^2\right)$ ile gösterilirse (3.19)-(3.21) eşitlikleri,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}}=\frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{j=1}^{n} g_2\left(a_{i(j)}\right)=0, \quad i=1,\ldots,c \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}}=-\frac{N}{\sigma_{2.1}}+\frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} a_{i(j)}g_2\left(a_{i(j)}\right)=0 \tag{3.25}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}=\frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} x_{i(j)}g_2\left(a_{i(j)}\right)=0 \tag{3.26}$$

olarak yazılabilir. (3.22)-(3.26) denklemlerinin $g_1\left(z_{i(j)}\right)$ ve $g_2\left(a_{i(j)}\right)$ doğrusal olmayan fonksiyonları nedeniyle açık çözümleri bulunamamaktadır. MML denklemlerini elde etmek için ikinci işlem doğrusallaştırma işlemidir. Bunun için $g_1\left(z_{i(j)}\right)$ fonksiyonu $t_{1(j)}=E\left(z_{i(j)}\right)$ etrafında, $g_2\left(a_{i(j)}\right)$ fonksiyonu $t_{2(j)}=E\left(a_{i(j)}\right)$ etrafında Taylor serisinin ilk iki terimi için açılarak doğrusal olmayan bu fonksiyonlar doğrusal hale getirilir. $g_1\left(z_{i(j)}\right)$ fonksiyonu, Taylor serisinin ilk iki terimi için $t_{1(j)}=E\left(z_{i(j)}\right)$ etrafında açılırsa,

$$g_1\left(z_{i(j)}\right)\cong g_1\left(t_{1(j)}\right)+\left(z_{i(j)}-t_{1(j)}\right)g_1'\left(t_{1(j)}\right)$$

$$g_1\left(z_{i(j)}\right) \cong g_1\left(t_{1(j)}\right) + z_{i(j)} g_1'\left(t_{1(j)}\right) - t_{1(j)} g_1'\left(t_{1(j)}\right)$$

$$g_1\left(z_{i(j)}\right) \cong \alpha_{1ij} + \beta_{1ij} z_{i(j)} \tag{3.27}$$

olur. Burada, $\alpha_{1ij} = g_1\left(t_{1(j)}\right) - t_{1(j)} g_1'\left(t_{1(j)}\right)$ ve $\beta_{1ij} = g_1'\left(t_{1(j)}\right)$ dir. Buna göre,

$$g_1\left(t_{1(j)}\right) = \frac{t_{1(j)}}{\left(1 + \frac{1}{k_1} t_{1(j)}^2\right)} \qquad \text{ise} \qquad g_1'\left(t_{1(j)}\right) = \frac{1 - \frac{t_{1(j)}^2}{k_1}}{\left(1 + \frac{t_{1(j)}^2}{k_1}\right)^2} \tag{3.28}$$

dir. Buradan,

$$\beta_{1ij} = g_1'\left(t_{1(j)}\right) = \frac{1 - \frac{t_{1(j)}^2}{k_1}}{\left(1 + \frac{t_{1(j)}^2}{k_1}\right)^2} \quad \text{ve} \quad \alpha_{1ij} = \frac{2t_{1(j)}^3 / k_1}{\left(1 + \frac{t_{1(j)}^2}{k_1}\right)^2}, \quad i = 1,\ldots,c\,;\, j = 1,\ldots,n \tag{3.29}$$

şeklinde elde edilir. $g_2\left(a_{i(j)}\right)$, Taylor serisinin ilk iki terimi için $t_{2(j)} = E\left(a_{i(j)}\right)$ etrafında açılırsa,

$$g_2\left(a_{i(j)}\right) \cong g_2\left(t_{2(j)}\right) + \left(a_{i(j)} - t_{2(j)}\right) g_2'\left(t_{2(j)}\right)$$

$$g_2\left(a_{i(j)}\right) \cong g_2\left(t_{2(j)}\right) + a_{i(j)} g_2'\left(t_{2(j)}\right) - t_{2(j)} g_2'\left(t_{2(j)}\right)$$

$$g_2\left(a_{i(j)}\right) \cong \alpha_{2ij} + \beta_{2ij} a_{i(j)} \tag{3.30}$$

olur. Burada $\alpha_{2ij} = g_2\left(t_{2(j)}\right) - t_{2(j)} g_2'\left(t_{2(j)}\right)$ ve $\beta_{2ij} = g_2'\left(t_{2(j)}\right)$ dir. Buna göre,

$$g_2\left(t_{2(j)}\right)=\frac{t_{2(j)}}{1+\frac{1}{k_2}t_{2(j)}^2} \qquad \text{ise} \qquad g_2'\left(t_{2(j)}\right)=\frac{1-\frac{t_{2(j)}^2}{k_2}}{\left[1+\frac{1}{k_2}t_{2(j)}^2\right]^2} \tag{3.31}$$

dir. Buradan,

$$\beta_{2ij}=g_2'\left(t_{2(j)}\right)=\frac{1-\frac{t_{2(j)}^2}{k_2}}{\left[1+\frac{1}{k_2}t_{2(j)}^2\right]^2} \qquad \text{ve} \qquad \alpha_{2ij}=\frac{2t_{2(j)}^3/k_2}{\left[1+\frac{t_{2(j)}^2}{k_2}\right]^2} \tag{3.32}$$

şeklinde elde edilir.

α_{1ij} ve β_{1ij}'deki $t_{1(j)}$'lerin tam değerleri Tiku ve Kumra (1985)'da çizelgeler halinde bulunmaktadır. Kolaylık olması bakımından $t_{1(j)}$'lerin tam değerleri değil, yaklaşık değerleri kullanılmak istenirse,

$$F\left(t_{1(j)}\right)=\int_{-\infty}^{t_{1(j)}} f\left(z\right)dz=\frac{j}{n+1}, \quad j=1,\ldots,n \tag{3.33}$$

eşitliği kullanılabilir. Burada $f\left(\cdot\right)$, LTS dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $F\left(\cdot\right)$ ise LTS dağılımının dağılım fonksiyonunu gösterir. $t_{2(j)}$'lerin yaklaşık değerleri de aynı şekilde elde edilebilir. Ancak bu bölümde yapılan işlemlerde $t_{1(j)}$ ve $t_{2(j)}$'lerin çizelgeden elde edilen tam değerleri kullanılmıştır. Ayrıca küçük p (özellikle $p<3$) ve büyük n değerleri için uçlardaki β_{1ij} ve β_{2ij} katsayılarının bazıları negatif olabilir. Dolayısıyla $\beta_{1i1}<0$ ve $\beta_{2i1}<0$ olduğunda (3.29) ve (3.32) katsayıları yerine aşağıdaki katsayılar kullanılır (Vaughan 1992, Tiku ve Suresh 1992, Tiku vd 2001):

$$\beta_{1ij}^{*}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k_1}t_{1(j)}^{2}\right)^{2}},\quad \alpha_{1ij}^{*}=\frac{t_{1(j)}^{3}/k_1}{\left(1+\frac{1}{k_1}t_{1(j)}^{2}\right)^{2}},\quad \beta_{2ij}^{*}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k_2}t_{2(j)}^{2}\right)^{2}},\quad \alpha_{2ij}^{*}=\frac{t_{2(j)}^{3}/k_2}{\left(1+\frac{1}{k_2}t_{2(j)}^{2}\right)^{2}}.$$

(3.22)-(3.26) eşitliklerinde $g_1\left(z_{i(j)}\right)$ ve $g_2\left(a_{i(j)}\right)$ fonksiyonları yerine sırasıyla (3.27) ve (3.30) ile verilen doğrusal yaklaşımları yazılırsa,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}}\cong\frac{\partial \ln L^{*}}{\partial \mu_{1i}}=\frac{2p_1}{k_1\sigma_1}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{1ij}+\beta_{1ij}z_{i(j)}\right)=0,\quad i=1,\ldots,c \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1}\cong\frac{\partial \ln L^{*}}{\partial \sigma_1}=-\frac{N}{\sigma_1}+\frac{2p_1}{k_1\sigma_1}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}z_{i(j)}\left(\alpha_{1ij}+\beta_{1ij}z_{i(j)}\right)=0, \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}}\cong\frac{\partial \ln L^{*}}{\partial \mu_{2.1i}}=\frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{2ij}+\beta_{2ij}a_{i(j)}\right)=0,\quad i=1,\ldots,c \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}}\cong\frac{\partial \ln L^{*}}{\partial \sigma_{2.1}}=-\frac{N}{\sigma_{2.1}}+\frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}a_{i(j)}\left(\alpha_{2ij}+\beta_{2ij}a_{i(j)}\right)=0 \tag{3.37}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\cong\frac{\partial \ln L^{*}}{\partial \theta}=\frac{2p_2}{k_2\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}x_{i[j]}\left(\alpha_{2ij}+\beta_{2ij}a_{i(j)}\right)=0 \tag{3.38}$$

elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu}_{1iMML}=K_{1i}\quad,\quad \hat{\sigma}_{1MML}=\frac{B_1+\sqrt{B_1^{2}+4NC_1}}{2N}\quad,\quad \hat{\mu}_{2.1iMML}=\overline{y}_{i[.]}-\hat{\theta}_{MML}K_{2i}$$

$$\hat{\sigma}_{2.1MML}=\frac{B_2+\sqrt{B_2^{2}+4NC_2}}{2N}\qquad\text{ve}\qquad\hat{\theta}_{MML}=K+D\hat{\sigma}_{2.1MML} \tag{3.39}$$

olarak elde edilir. μ_{2i} parametresinin MML tahmin edicisi ise $\hat{\mu}_{2iMML} = \hat{\mu}_{2.1iMML} + \hat{\theta}_{MML}\hat{\mu}_{1iMML}$ eşitliğinden yararlanılarak bulunur. Burada,

$$K_{1i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{1ij} x_{i(j)}}{m_{1i}} \quad , \quad B_1 = \frac{2p_1}{k_1} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1ij} x_{i(j)} \quad , \quad C_1 = \frac{2p_1}{k_1} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{1ij} \left(x_{i(j)} - K_{1i} \right)^2$$

$$\overline{y}_{i[.]} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} y_{i[j]}}{m_{2i}} \quad , \quad K_{2i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} x_{i[j]}}{m_{2i}} \quad , \quad m_{1i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{1ij} \quad , \quad m_{2i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij}$$

$$B_2 = \frac{2p_2}{k_2} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2ij} \left[\left(y_{i[j]} - \overline{y}_{i[.]} \right) - K \left(x_{i[j]} - K_{2i} \right) \right],$$

$$C_2 = \frac{2p_2}{k_2} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} \left[\left(y_{i[j]} - \overline{y}_{i[.]} \right) - K \left(x_{i[j]} - K_{2i} \right) \right]^2 ,$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} \left(x_{i[j]} - K_{2i} \right) \left(y_{i[j]} - \overline{y}_{i[.]} \right)}{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} \left(x_{i[j]} - K_{2i} \right)^2} \text{ ve } D = \frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2ij} \left(x_{i[j]} - K_{2i} \right)}{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} \left(x_{i[j]} - K_{2i} \right)^2} \tag{3.40}$$

dir. Bir örneklem durumu için bakınız Sazak (2003) ve Sazak vd. (2006), c-örneklemde çarpık durum için bakınız Şenoğlu (2007b).

Yan Düzeltmesi: Yan düzeltmesi yapıldığında $\hat{\sigma}_{1MML}$ ve $\hat{\sigma}_{2.1MML}$ tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\sigma}_{1MML} = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4NC_1}}{2\sqrt{N(N-c)}} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma}_{2.1MML} = \frac{B_2 + \sqrt{B_2^2 + 4NC_2}}{2\sqrt{N(N-c-1)}} \tag{3.41}$$

olur.

Teorem 3.2.

i. $\hat{\mu}_{1iMML}$ tahmin edicisi, μ_{1i} parametresinin yansız ve varyansı $k_1\sigma_1^2/2p_1m_{1i}$ olan MVB tahmin edicisidir.

ii. θ'nın bilinmesi koşulu altında $\hat{\mu}_{2iMML}$ tahmin edicisi, μ_{2i} parametresinin yansız ve varyansı $k_2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)/2p_2m_{2i}$ olan MVB tahmin edicisidir.

iii. $\sigma_{2.1}$'in bilinmesi koşulu altında $\hat{\theta}_{MML}$ tahmin edicisi, θ parametresinin yansız ve varyansı $k_2/2p_2$ olan MVB tahmin edicisidir.

İspat.

i. Log-olabilirlik fonksiyonunun μ_{1i} parametresine göre kısmi türevi $E\left(\partial^r \ln L^*/\partial\mu_{2i}^r\right)=0 \quad (r\geq 3)$ ile (Bartlett 1953)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} \cong \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_{1i}} = \frac{2p_1m_{1i}}{k_1\sigma_1^2}\left[\hat{\mu}_{1iMML}-\mu_{1i}\right] \tag{3.42}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\hat{\mu}_{1iMML}=K_{1i}$ tahmin edicisi, μ_{1i} parametresi için yansız ve varyansı $k_1\sigma_1^2/2p_1m_{1i}$ olan MVB tahmin edicisidir.

ii. Log-olabilirlik fonksiyonunun μ_{2i} parametresine göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2i}} \cong \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_{2i}} = \frac{2p_2m_{2i}}{k_2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\left[\hat{\mu}_{2iMML}-\mu_{2i}\right] \tag{3.43}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\hat{\mu}_{2iMML}=\overline{y}_{i[\cdot]}+\theta\left(K_{1i}-K_{2i}\right)$ tahmin edicisi, μ_{2i} parametresi için yansız ve varyansı $k_2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)/2p_2m_{2i}$ olan MVB tahmin edicisidir.

iii. Log-olabilirlik fonksiyonunun θ parametresine göre kısmi türevi

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \cong \frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta} = \frac{2p_2}{k_2}\left[\hat{\theta}_{MML}-\theta\right] \tag{3.44}$$

şeklinde yazılabildiğinden $\hat{\theta}_{MML} = K + D\sigma_{2.1}$ tahmin edicisi, θ parametresi için yansız ve varyansı $k_2/2p_2$ olan MVB tahmin edicisidir (Kendall ve Stuart 1967).

MML tahmin edicilerinin özellikleri:

MML tahmin edicileri düzgünlük koşulları altında aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. Asimptotik olarak tam etkin tahmin edicilerdir. Yani bu tahmin ediciler asimptotik olarak yansızdır ve varyansları MVB'ye eşittir.
ii. Asimptotik olarak normal dağılıma sahiptir.
iii. Küçük örnekler için de hemen hemen tam olarak etkindirler. Yani yansız ya da göz ardı edilebilir bir şekilde yanlıdır ve varyansları MVB sınırından çok az miktarda büyüktür.
iv. MML tahmin edicileri kolay hesaplanır.
v. Büyük *n* değerleri için ML tahmin edicilerine yakınsar.
vi. MML yöntemi, aykırı değerlerin etkisini kontrol etmek için ağırlıkları kullanır. Simetrik dağılımlar için MML yöntemindeki ağırlıklar şemsiye sıralamasına sahiptir. Yani en küçük ve en büyük gözleme en küçük ağırlığı verir. Pozitif çarpık dağılımlar için ise ağırlıklar yarı şemsiye sıralamasına sahiptir. Yani en büyük gözlemlere küçük ağırlıklar verir (Vaughan ve Tiku 2000).

3.1.3 LTS dağılımına dayalı ML tipi tahmin edici (M-Tahmin Edicisi)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f\left(x;T_n\right)$ olan rasgele bir örneklem olsun. ML tahmin edicisi,

$$\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;T_n\right) \tag{3.45}$$

fonksiyonunu maksimum yapan T_n değeri olarak yada (3.45) ifadesine eşdeğer olan

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln f\left(x_i;T_n\right)\right]=\min_{T_n} \tag{3.46}$$

formunda bir minimum probleminin çözümü olan T_n değeri ile tanımlanır. Huber (1964), bu formu keyfi bir ρ fonksiyonu kullanarak

$$\sum_{i=1}^{n}\rho\left(x_i;T_n\right)=\min_{T_n} \tag{3.47}$$

şeklinde genelleştirdi. $\rho\left(x;\theta\right)$ fonksiyonunun θ parametresine göre kısmi türevi

$$\psi\left(x;\theta\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\rho\left(x;\theta\right) \tag{3.48}$$

ise, böyle bir T_n tahmin edicisi

$$\sum_{i=1}^{n}\psi\left(x_i;T_n\right)=0 \tag{3.49}$$

kapalı denklemini sağlar. (3.47) veya (3.49) ile tanımlanan bir tahmin edici, "M-tahmin edicisi" veya "ML tipi tahmin edici" olarak adlandırılır. Bu tahmin ediciler ilk olarak Huber (1964) tarafından önerildi. "M-tahmin edicisi" adı, "genelleştirilmiş ML" den gelir. Yani, ML tahmin edicisi de aslında bir M-tahmin edicisidir (Hampel vd. 1986; Huber ve Ronchetti 2009).

Bu bölümde, (2.1) modelinde ortak değişkenin ve hataların dağılımının LTS olduğu durum için M-tahmin edicileri elde edilmiştir. (3.9)'daki gibi elde edilen log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}}=\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\,\frac{2\,p_1}{k_1+z_{ij}^2}=0\,,\quad i=1,\ldots,c \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2 \frac{2p_1}{k_1 + z_{ij}^2} = 0 \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{1}{\sigma_{2.1}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{2p_2}{k_2 + a_{ij}^2} = 0, \quad i = 1, \ldots, c \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \frac{2p_2}{k_2 + a_{ij}^2} = 0 \tag{3.53}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{1}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \frac{2p_2}{k_2 + a_{ij}^{\ 2}} = 0 \tag{3.54}$$

elde edilir. Burada, $z_{ij} = \left(x_{ij} - \mu_{1i}\right)/\sigma_1$ ve $a_{ij} = e_{ij}/\sigma_{2.1} = \left(y_{ij} - \mu_{2.1i} - \theta x_{ij}\right)/\sigma_{2.1}$ dir. Parametrelerin bir fonksiyonu olan ağırlıklar,

$$w_{ij} = \frac{2p_1}{k_1 + z_{ij}^2} \quad , \qquad \gamma_{ij} = \frac{2p_2}{k_2 + a_{ij}^2} \tag{3.55}$$

olarak ortaya çıktığında, M-tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\hat{\mu}_{1iM} = \overline{x}_{wi}, \qquad \hat{\sigma}_{1M} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\left(x_{ij} - \overline{x}_{wi}\right)^2}{N}} \quad , \qquad \hat{\mu}_{2.1iM} = \overline{y}_{\gamma i} - \hat{\theta}_M \overline{x}_{\gamma i}, \tag{3.56}$$

$$\hat{\theta}_M = \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\gamma i}\right)\left(y_{ij} - \overline{y}_{\gamma i}\right)}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\left(x_{ij} - \overline{x}_{\gamma i}\right)^2}, \quad \hat{\sigma}_{2.1M} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\left[\left(y_{ij} - \overline{y}_{\gamma i}\right) - \hat{\theta}_M\left(x_{ij} - \overline{x}_{\gamma i}\right)\right]^2}{N}}$$

$$\hat{\sigma}_{2M} = \sqrt{\hat{\sigma}_{2.1M}^2 + \hat{\theta}_M^{\ 2}\hat{\sigma}_{1M}^2} \quad , \quad \hat{\mu}_{2iM} = \overline{y}_{wi}.$$

Burada,

$$\overline{x}_{wi}=\frac{\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}w_{ij}},\quad \overline{y}_{wi}=\frac{\sum_{j=1}^{n}w_{ij}y_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}w_{ij}},\overline{x}_{\gamma i}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}},\quad \overline{y}_{\gamma i}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}y_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}} \tag{3.57}$$

dir.

Yan düzeltmesi: Yan düzeltmesi yapıldığında $\hat{\sigma}_{1M}$ ve $\hat{\sigma}_{2.1M}$ tahmin edicileri sırasıyla

$$\hat{\sigma}_{1M}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\left(x_{ij}-\overline{x}_{wi}\right)^2}{N-c}},\hat{\sigma}_{2.1M}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\left[\left(y_{ij}-\overline{y}_{\gamma i}\right)-\hat{\theta}_M\left(x_{ij}-\overline{x}_{\gamma i}\right)\right]^2}{N-c-1}} \tag{3.58}$$

olur.

3.1.4 Asimptotik varyans-kovaryans matrisi

Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hataların LTS dağılımına sahip olduğu durumda asimptotik varyans-kovaryans matrisi $I^{-1}\left(\mu_{1i},\sigma_1,\mu_{2i},\sigma_2,\rho\right)$ ile gösterilsin. Burada, I Fisher bilgi matrisini gösterir. Fisher bilgi matrisinin elemanları aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$I_{11}=-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial {\mu_{1i}}^2}\right)=n\left[\frac{2p_1}{k_1\sigma_1^2}\cdot\frac{\left(p_1-1/2\right)}{\left(p_1+1\right)}+\frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{\rho^2}{\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)}\cdot\frac{\left(p_2-1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.59}$$

$$I_{12}=-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu_{1i}\partial\sigma_1}\right)=0,\quad I_{14}=-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu_{1i}\partial\sigma_2}\right)=0,\quad I_{15}=-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu_{1i}\partial\rho}\right)=0 \tag{3.60}$$

$$I_{13} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{1i} \partial \mu_{2i}}\right) = n\left[-\frac{2p_2}{k_2} \cdot \frac{\rho}{\sigma_1 \sigma_2 \left(1-\rho^2\right)} \cdot \frac{\left(p_2 - 1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.61}$$

$$I_{22} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1^2}\right) = N\left[-\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{4p_1}{k_1 \sigma_1^2} \cdot \frac{\left(p_1 - 3/2\right)}{p_1} + \frac{2p_1}{k_1 \sigma_1^2} \cdot \frac{\left(p_1 - 2\right)\left(p_1 - 3/2\right)}{p_1\left(p_1+1\right)} + \frac{2p_2}{k_2} \cdot \frac{\rho^2}{\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)} \cdot \frac{\left(p_2 - 1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.62}$$

$$I_{23} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \mu_{2i}}\right) = 0 \,, I_{34} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{2i} \partial \sigma_2}\right) = 0 \,, I_{35} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{2i} \partial \rho}\right) = 0 \tag{3.63}$$

$$I_{24} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\right) = N\left[-\frac{2p_2}{k_2} \cdot \frac{\rho^2}{\sigma_1 \sigma_2 \left(1-\rho^2\right)} \cdot \frac{\left(p_2 - 1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.64}$$

$$I_{25} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_1 \partial \rho}\right) = N\left[-\frac{2p_2}{k_2} \cdot \frac{\rho}{\sigma_1 \left(1-\rho^2\right)} \cdot \frac{\left(p_2 - 1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.65}$$

$$I_{33} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{2i}^2}\right) = n\left[\frac{2p_2}{k_2} \cdot \frac{1}{\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)} \cdot \frac{\left(p_2 - 1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.66}$$

$$I_{44} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_2^2}\right) = N\left[-\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{2p_2\rho^2}{k_2\left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2} \cdot \frac{\left(p_2 - 1/2\right)}{\left(p_2+1\right)} + \frac{4p_2}{k_2\sigma_2^2} \cdot \frac{\left(p_2 - 3/2\right)}{p_2} + \frac{2p_2}{k_2\sigma_2^2} \cdot \frac{\left(p_2 - 3/2\right)\left(p_2 - 2\right)}{p_2\left(p_2+1\right)}\right] \tag{3.67}$$

$$I_{45} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_2\partial\rho}\right) = N\left[-\frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{\rho}{\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\cdot\frac{\left(p_2-3/2\right)}{p_2} - \frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{\rho}{\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\cdot\frac{\left(p_2-2\right)\left(p_2-3/2\right)}{p_2\left(p_2+1\right)}\right.$$
$$\left. + \frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{\rho}{\sigma_2\left(1-\rho^2\right)}\cdot\frac{\left(p_2-1/2\right)}{\left(p_2+1\right)}\right] \qquad (3.68)$$

$$I_{55} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\rho^2}\right) = N\left[-\frac{\left(1+\rho^2\right)}{\left(1-\rho^2\right)^2} + \frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)}\cdot\frac{\left(p_2-1/2\right)}{\left(p_2+1\right)} + \frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{\left(1+2\rho^2\right)}{\left(1-\rho^2\right)^2}\cdot\frac{\left(p_2-3/2\right)}{p_2}\right.$$
$$\left. + \frac{2p_2}{k_2}\cdot\frac{\rho^2}{\left(1-\rho^2\right)^2}\cdot\frac{\left(p_2-2\right)\left(p_2-3/2\right)}{p_2\left(p_2+1\right)}\right] \qquad (3.69)$$

LTS dağılımı simetrik bir dağılım olduğundan $I_{12} = I_{21}$, $I_{13} = I_{31}$, $I_{23} = I_{32}$, $I_{14} = I_{41}$, $I_{24} = I_{42}$, $I_{34} = I_{43}$, $I_{15} = I_{51}$, $I_{25} = I_{52}$, $I_{35} = I_{53}$ ve $I_{45} = I_{54}$ dır. Bu nedenle I_{21}, I_{31}, I_{32}, I_{41}, I_{42}, I_{43}, I_{51}, I_{52}, I_{53} ve I_{54} değerleri ayrıca hesaplanmamıştır. Böylece Fisher bilgi matrisi

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 & I_{24} & I_{25} \\ I_{31} & 0 & I_{33} & 0 & 0 \\ 0 & I_{42} & 0 & I_{44} & I_{45} \\ 0 & I_{52} & 0 & I_{54} & I_{55} \end{bmatrix} \qquad (3.70)$$

şeklinde elde edilir.

3.1.5 Hipotez testi

Tanım: Doğrusal bağıntılar, ilgilenilen parametrelerin doğrusal birleşimleridir ve ilgilenilen parametre μ_i ile gösterildiğinde bir doğrusal bağıntı

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{c} l_i\mu_i \qquad (3.71)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca Γ'nın bir doğrusal bağıntı olması için $\sum_{i=1}^{c} l_i = 0$ olması gerekir. Burada, l_i'ler önceden belirlenmiş sabitlerdir. Örneğin; deneme sayısı 2 olduğunda $l_1 = 1$ ve $l_2 = -1$ alınarak μ_1 ve μ_2 ortalamaları karşılaştırılabilir. Ya da deneme sayısı 3 olduğunda $l_1 = 2$, $l_2 = -1$ ve $l_3 = -1$ alınarak μ_1'in, μ_2 ve μ_3 ile karşılaştırılması sağlanabilir. Doğrusal bağıntılar yönteminin en önemli avantajı, deneme ortalamaları arasındaki tüm olası karşılaştırmaları yapabilmesidir (Montgomery 2000).

$H_0 : \sum_{i=1}^{c} l_i \mu_{2i} = 0$ yokluk hipotezine karşı $H_1 : \sum_{i=1}^{c} l_i \mu_{2i} \neq 0$ alternatif hipotezini sınamak için;

i. (2.1) modelinde ortak değişkenin ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu durum için (2.47) eşitliğinde verilen $\tilde{\mu}_{2i}$ tahmin edicisine dayanan

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{c} l_i \tilde{\mu}_{2i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{c} l_i^2 V\left(\tilde{\mu}_{2i}\right)}} \tag{3.72}$$

test istatistiği kullanılır. Eğer $|t| > z_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi α anlamlılık düzeyinde red edilebilir.

ii. (2.1) modelinde ortak değişkenin ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için (3.39) eşitliğinde elde edilen $\hat{\mu}_{2iMML}$ tahmin edicisine dayanan,

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^{c} l_i \hat{\mu}_{2iMML}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{c} l_i^2 V\left(\hat{\mu}_{2iMML}\right)}} \tag{3.73}$$

test istatistiğini öneririz. Eğer $\left|t^{*}\right| > z_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi red edilir.

iii. (2.1) modelinde ortak değişkenin ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için (3.56) eşitliğinde elde edilen $\hat{\mu}_{2iM}$ tahmin edicisine dayanan,

$$t^{**} = \frac{\sum_{i=1}^{c} l_i \hat{\mu}_{2iM}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{c} l_i^2 V\left(\hat{\mu}_{2iM}\right)}} \tag{3.74}$$

test istatistiğini öneririz. Eğer $\left|t^{**}\right| > z_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi red edilir.

Sonuç. Teorem 3.2 (ii)'de θ parametresinin bilinmesi koşulu altında $\hat{\mu}_{2iMML} = \overline{y}_{i[\cdot]} + \theta\left(K_{1i} - K_{2i}\right)$ tahmin edicisinin μ_{2i} parametresi için yansız ve varyansı $k_2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\big/2\,p_2 m_{2i}$ olan MVB tahmin edicisi olduğu gösterildi. MML tahmin edicileri asimptotik olarak ML tahmin edicilerine eşit olduğundan ve ML tahmin edicileri ise asimptotik olarak normal dağılıma sahip olduğundan $\hat{\mu}_{2iMML}$ ve $\hat{\mu}_{2iM}$ tahmin edicileri asimptotik olarak normal dağılıma sahiptir. Ayrıca $\hat{\sigma}_{2MML}$ ve $\hat{\sigma}_{2M}$ tahmin edicileri büyük *n* değerleri için σ_2'ye yakınsar (Sazak vd. 2006, Şenoğlu 2007b).

Önerilen t^{*} ve t^{**} istatistiklerinin normal dağılıma uygunluğunu göstermek için $P\left(\left|t^{*}\right| > z_{\alpha/2}\,\middle|\,H_0\right)$ ve $P\left(\left|t^{**}\right| > z_{\alpha/2}\,\middle|\,H_0\right)$ olasılıklarının simülasyon değerleri $\left[100{,}000/n\right]$ Monte Carlo adımı ile elde edildi. Elde edilen değerler çizelge 3.2'deki gibidir. Çizelge 3.2'den t^{*} ve t^{**} istatistiklerinin asimptotik olarak normal dağılıma sahip olabileceği makul görülmektedir.

(3.73) ve (3.74) test istatistiklerinde büyük *n* değerleri için $\hat{\mu}_{2iMML}$ tahmin edicisinin asimptotik varyansı (3.66) eşitliğindeki gibi $V\left(\hat{\mu}_{2i}\right) \cong \left(I_{33}^{-1}\right) = k_2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\left(p_2+1\right)\big/2np_2\left(p_2-1/2\right)$'dır. Küçük *n* değerleri için ise

$V\left(\hat{\mu}_{2iMML}\right)$ ve $V\left(\hat{\mu}_{2iM}\right)$ için simülasyonla elde edilen değerler kullanılır. Burada t^{*} ve t^{**} istatistiklerini elde ederken $V\left(\hat{\mu}_{2iMML}\right)$ ve $V\left(\hat{\mu}_{2iM}\right)$ için simülasyonla elde edilen EK 1'deki değerler kullanıldı.

3.1.6 Monte Carlo simülasyon çalışması

3.1.6.1 Tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

Bu bölümde, bir ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için Monte Carlo simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin etkinlikleri incelenmektedir. Simülasyon çalışmasında, $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \rho, \mu_{2.1}, \sigma_{2.1}$ ve θ parametrelerinin LS, MML ve M tahmin edicilerinin ortalamaları ve varyansları bulunmuş, MML ve M tahmin edicilerinin LS tahmin edicisine göre RE değerleri

$$RE_{MML} = \frac{MSE\left(\hat{\mu}_{2MML}\right)}{MSE\left(\tilde{\mu}_2\right)} \times 100 \ , \qquad RE_{M} = \frac{MSE\left(\hat{\mu}_{2M}\right)}{MSE\left(\tilde{\mu}_2\right)} \times 100 \tag{3.76}$$

hesaplanmaktadır. Buradaki hata kareler ortalaması (Mean Square Error-MSE) değerleri

$$MSE\left(\cdot\right) = yan^2\left(\cdot\right) + varyans\left(\cdot\right) \tag{3.77}$$

ile elde edilir. Tüm hesaplamalar örneklem genişliğinin n=10, 15 ve 20 değerleri, deneme sayısının $c = 3$ olduğu durum ve farklı şekil parametreleri için yapılmıştır.

Simülasyonlar $\mu_1 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_2 = 1$, $\rho = 0.2, 0.5, 0.8$ alınarak 10.000 iterasyonda yapılmaktadır. Sonuçlar, MATLAB dili kullanılarak yazılan programlarla çizelge 3.1'deki gibi elde edilmektedir. Burada sadece $\rho = 0,5$ olduğu durum için sonuçlar verilmiştir. Deneme sayısının $c = 5$ ve 7 olduğu durumlar için de simülasyon yapılmış, fakat sonuçlar benzer çıktığı için çalışmada tekrar yapılmaması açısından bu çizelgelere yer verilmemiştir.

MML tahmin edicileri, (3.39) eşitliğinde verilen formüller yardımıyla açık olarak hesaplanır. MML tahmin edicilerinin aksine M tahmin edicilerinin açık çözümleri yoktur. Bu nedenle bu tahmin ediciler hesaplanırken yeniden ağırlıklandırılmış ardışık hesaplama kullanılmıştır. M tahmin edicileri elde edilirken izlenen adımlar aşağıdaki gibidir:

i. $\mu_{1i}^{(0)}$, $\sigma_1^{(0)}$, $\mu_{2.1i}^{(0)}$, $\theta^{(0)}$, $\sigma_{2.1}^{(0)}$ başlangıç değerleri seçilir. Burada başlangıç değerleri olarak LS tahmin edicileri kullanılmıştır.

ii. z_{ij} ve a_{ij} değerleri hesaplanır.

iii. w_{ij} ve γ_{ij} ağırlıkları hesaplanır.

iv. (3.56) eşitliği ile verilen M-tahmin edicileri hesaplanır.

v. $\mu_{1i}^{(0)}$, $\sigma_1^{(0)}$, $\mu_{2.1i}^{(0)}$, $\theta^{(0)}$, $\sigma_{2.1}^{(0)}$ değerleri yerine yeni elde edilen $\mu_{1i}^{(1)}$, $\sigma_1^{(1)}$, $\mu_{2.1i}^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $\sigma_{2.1}^{(1)}$ değerleri kullanılarak (ii), (iii) ve (iv) işlemleri tekrar edilir.

vi. İterasyonlara $\left|\mu_{1i}^{(i)} - \mu_{1i}^{(i-1)}\right|$, $\left|\sigma_1^{(i)} - \sigma_1^{(i-1)}\right|$, $\left|\mu_{2.1i}^{(i)} - \mu_{2.1i}^{(i-1)}\right|$, $\left|\theta^{(i)} - \theta^{(i-1)}\right|$ ve $\left|\sigma_{2.1}^{(i)} - \sigma_{2.1}^{(i-1)}\right|$ farkları 0.001 den küçük olana kadar devam edilir.

Çizelge 3.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS, MML ve M tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve RE değerleri

		$p_1 = p_2 = 2$			$p_1 = p_2 = 3.5$			$p_1 = p_2 = 5$		
	n	**10**	**15**	**20**	**10**	**15**	**20**	**10**	**15**	**20**
	$\tilde{\mu}_1$	-0,0021	-0,0017	0,0011	-0,0001	0,0003	0,0007	0,0021	-0,0023	0,0039
ort	$\hat{\mu}_{1MML}$	-0,0009	-0,0029	0,0002	-0,0010	0.0000	0.0020	0.0019	-0.0019	0.0038
	$\hat{\mu}_{1M}$	-0,0008	-0,0035	-0,0003	-0,0008	-0.0000	0.0020	0.0019	-0.0019	0.0039
	$\tilde{\mu}_1$	0,9732	0,9248	0,9700	0,9919	1,0025	1,0061	1,0101	1,0262	1,0073
$n \times$ **var**	$\hat{\mu}_{1MML}$	0,5911	0,5390	0,5484	0,8984	0,8851	0,8678	0,9615	0,9704	0,9498
	$\hat{\mu}_{1M}$	0,5405	0,5019	0,5172	0,8887	0,8801	0,8634	0,9536	0,9638	0,9455
RE$_{MML}$		**61**	**58**	**57**	**91**	**88**	**86**	**95**	**95**	**94**
RE$_M$		**56**	**54**	**53**	**90**	**88**	**86**	**94**	**94**	**94**
	$\tilde{\sigma}_1$	0,9239	0,9338	0,9488	0,9817	0,9873	0,9907	0,9865	0,9907	0,9941
ort	$\hat{\sigma}_{1MML}$	1,1692	1,1187	1,0956	1,0564	1,0405	1,0314	1,0358	1,0272	1,0229
	$\hat{\sigma}_{1M}$	1,0506	1,0317	1,0244	1,0234	1,0151	1,0112	1,0127	1,0080	1,0066
	$\tilde{\sigma}_1$	1,2173	1,4626	1,6845	0,3447	0,3655	0,3678	0,2690	0,2623	0,2599
$n \times$ **var**	$\hat{\sigma}_{1MML}$	1,0163	0,8131	0,7079	0,3296	0,3074	0,2867	0,2766	0,2558	0,2462
	$\hat{\sigma}_{1M}$	0,4241	0,3885	0,3731	0,2889	0,2779	0,2679	0,2539	0,2386	0,2331
RE$_{MML}$		**102**	**67**	**51**	**104**	**90**	**83**	**107**	**101**	**98**
RE$_M$		**35**	**26**	**22**	**85**	**76**	**73**	**94**	**91**	**90**
	$\tilde{\mu}_2$	0,0024	0,0004	0.0000	0.0048	-0.0013	0.0054	-0.0021	0.0010	-0.0000
ort	$\hat{\mu}_{2MML}$	0,0028	0,0009	-0,0009	0,0044	-0,0009	0,0047	-0,0022	0,0017	0.0001
	$\hat{\mu}_{2M}$	0,0041	-0,0011	-0,0010	0,0041	-0,0012	0,0063	-0,0022	0,0017	0,0005
	$\tilde{\mu}_2$	0,9495	0,9730	0,9602	1,0168	0,9975	0,9814	1,0022	1,0147	0,9866
$n \times$ **var**	$\hat{\mu}_{2MML}$	0,5853	0,5671	0,5569	0,9109	0,8777	0,8624	0,9595	0,9601	0,9296
	$\hat{\mu}_{2M}$	0,9147	0,9462	0,9321	1,0114	0,9882	0,9737	0,9986	1,0145	0,9893
RE$_{MML}$		**62**	**58**	**58**	**90**	**88**	**88**	**96**	**95**	**94**
RE$_M$		**96**	**97**	**97**	**99**	**99**	**99**	**100**	**100**	**100**
	$\tilde{\sigma}_2$	0,9475	0,9538	0,9600	0,9974	0,9994	0,9987	1,0026	1,0027	1,0016
ort	$\hat{\sigma}_{2MML}$	1,1898	1,1320	1,1019	1,0702	1,0511	1,0380	1,0516	1,0387	1,0302
	$\hat{\sigma}_{2M}$	1,0972	1,0631	1,0462	1,0459	1,0324	1,0230	1,0336	1,0232	1,0166
	$\tilde{\sigma}_2$	0,9193	1,1237	1,3552	0,2907	0,3023	0,3120	0,2479	0,2378	0,2352
$n \times$ **var**	$\hat{\sigma}_{2MML}$	0,7764	0,6143	0,5405	0,2793	0,2646	0,2497	0,2552	0,2343	0,2276
	$\hat{\sigma}_{2M}$	0,4166	0,3692	0,3444	0,2615	0,2560	0,2458	0,2409	0,2265	0,2192
RE$_{MML}$		**120**	**76**	**54**	**113**	**100**	**89**	**114**	**108**	**104**
RE$_M$		**54**	**37**	**28**	**97**	**90**	**82**	**102**	**99**	**96**

Çizelge 3.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS, MML ve M tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve RE değerleri (devam)

		$p_1 = p_2 = 2$			$p_1 = p_2 = 3.5$			$p_1 = p_2 = 5$		
	n	**10**	**15**	**20**	**10**	**15**	**20**	**10**	**15**	**20**
ort	$\tilde{\rho}$	0,4903	0,4935	0,4989	0,4878	0,4915	0,4928	0,4872	0,4933	0,4942
	$\hat{\rho}_{MML}$	0,4919	0,4947	0,4987	0,4894	0,4923	0,4937	0,4875	0,4935	0,4945
	$\hat{\rho}_{M}$	0,4747	0,4824	0,4876	0,4839	0,4884	0,4901	0,4851	0,4916	0,4927
$n \times$ **var**	$\tilde{\rho}$	0,3590	0,3900	0,4232	0,2506	0,2482	0,2494	0,2286	0,2235	0,2223
	$\hat{\rho}_{MML}$	0,2670	0,2479	0,2367	0,2281	0,2172	0,2083	0,2196	0,2125	0,2089
	$\hat{\rho}_{M}$	0,2864	0,2794	0,2694	0,2374	0,2292	0,2264	0,2239	0,2168	0,2130
RE$_{MML}$		**74**	**64**	**56**	**91**	**87**	**83**	**96**	**95**	**94**
RE$_{M}$		**81**	**73**	**64**	**95**	**93**	**91**	**98**	**97**	**96**
ort	$\tilde{\mu}_{2.1}$	0,0038	0,0013	-0,0007	0,004	-0,0014	0,0047	-0,0023	0,0021	-0,0015
	$\hat{\mu}_{2.1MML}$	0,0028	0,0024	-0,0012	0,0044	-0,0010	0,0034	-0,0024	0,0026	-0,0014
	$\hat{\mu}_{2.1M}$	0,0034	0,0019	-0,0016	0,0035	-0,0009	0,0034	-0,0023	0,0025	-0,0012
$n \times$ **var**	$\tilde{\mu}_{2.1}$	0,7383	0,7571	0,7410	0,7907	0,7667	0,7598	0,7698	0,7737	0,7561
	$\hat{\mu}_{2.1MML}$	0,4563	0,4392	0,4247	0,7083	0,6755	0,6727	0,7389	0,7372	0,7093
	$\hat{\mu}_{2.1M}$	0,4318	0,4160	0,4038	0,7045	0,6745	0,6713	0,7365	0,7349	0,7057
RE$_{MML}$		**62**	**58**	**57**	**90**	**88**	**89**	**96**	**95**	**94**
RE$_{M}$		**58**	**55**	**55**	**89**	**88**	**88**	**96**	**95**	**93**
ort	$\tilde{\sigma}_{2.1}$	0,7979	0,8099	0,8159	0,8498	0,8563	0,8587	0,8556	0,859	0,8609
	$\hat{\sigma}_{2.1MML}$	1,0111	0,9697	0,9454	0,9125	0,9017	0,8934	0,8979	0,8903	0,8858
	$\hat{\sigma}_{2.1M}$	0,9411	0,9154	0,9019	0,8941	0,8871	0,8816	0,8836	0,8778	0,8750
$n \times$ **var**	$\tilde{\sigma}_{2.1}$	0,8365	1,0626	1,3017	0,2607	0,2723	0,2892	0,2101	0,2002	0,2033
	$\hat{\sigma}_{2.1MML}$	0,7387	0,6062	0,5370	0,2475	0,2318	0,2205	0,2157	0,1954	0,1912
	$\hat{\sigma}_{2.1M}$	0,3672	0,3289	0,3017	0,2237	0,2158	0,2085	0,1998	0,1847	0,1814
RE$_{MML}$		**108**	**70**	**50**	**102**	**92**	**81**	**107**	**102**	**98**
RE$_{M}$		**48**	**33**	**24**	**88**	**81**	**74**	**96**	**93**	**90**
ort	$\tilde{\theta}$	0,4979	0,4988	0,4995	0,4991	0,4999	0,4981	0,5003	0,5026	0,5002
	$\hat{\theta}_{MML}$	0,4990	0,4990	0,5006	0,4997	0,4999	0,4988	0,5001	0,5023	0,5004
	$\hat{\theta}_{M}$	0,4980	0,4988	0,4995	0,4991	0,5000	0,4981	0,5004	0,5026	0,5002
$n \times$ **var**	$\tilde{\theta}$	0,3915	0,3582	0,3335	0,3115	0,2965	0,2843	0,3012	0,2850	0,2738
	$\hat{\theta}_{MML}$	0,2736	0,2351	0,2133	0,2863	0,2652	0,2501	0,2888	0,2714	0,2623
	$\hat{\theta}_{M}$	0,4003	0,3644	0,3404	0,3126	0,2972	0,2852	0,3011	0,2852	0,2735
RE$_{MML}$		**69**	**63**	**64**	**92**	**89**	**88**	**96**	**95**	**96**
RE$_{M}$		**102**	**102**	**102**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Çizelge 3.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS, MML ve M tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve RE değerleri (devam)

		$p_1 = 3.5$, $p_2 = 5$			$p_1 = 5$, $p_2 = 2$		
	n	**10**	**15**	**20**	**10**	**15**	**20**
	$\tilde{\mu}_1$	-0,0006	-0,0041	-0,0014	0,0029	0,0020	-0,0026
ort	$\hat{\mu}_{1MML}$	-0.0005	-0.0037	-0.0012	0.0019	0,0024	-0,0028
	$\hat{\mu}_{1M}$	0.0000	-0.0037	-0.0012	0.0017	0,0027	-0,0028
	$\tilde{\mu}_1$	0,9950	0,9815	0,9912	1,0010	0,9804	1,0171
n × **var**	$\hat{\mu}_{1MML}$	0,8865	0,8580	0,8702	0,9486	0,9259	0,9597
	$\hat{\mu}_{1M}$	0,8790	0,8532	0,8700	0,9418	0,9213	0,9550
RE$_{MML}$		**89**	**87**	**88**	**95**	**94**	**94**
RE$_{M}$		**88**	**87**	**88**	**94**	**94**	**94**
	$\tilde{\sigma}_1$	0,9856	0,9869	0,9897	0,9876	0,9913	0,9948
ort	$\hat{\sigma}_{1MML}$	1,0587	1,0394	1,0307	1,0369	1,0279	1,0237
	$\hat{\sigma}_{1M}$	1,0235	1,0139	1,0106	1,0139	1,0088	1,0073
	$\tilde{\sigma}_1$	0,3700	0,3686	0,3615	0,2682	0,2623	0,2614
n × **var**	$\hat{\sigma}_{1MML}$	0,3430	0,3044	0,2857	0,2767	0,2551	0,2455
	$\hat{\sigma}_{1M}$	0,2921	0,2748	0,2672	0,2547	0,2394	0,2314
RE$_{MML}$		**101**	**88**	**84**	**108**	**101**	**98**
RE$_{M}$		**80**	**75**	**74**	**95**	**91**	**89**
ort	$\tilde{\mu}_2$	0.0007	0.0039	-0.0014	-0.0006	0,0026	-0,0030
	$\hat{\mu}_{2MML}$	-0.0001	0.0033	-0.0013	0.0002	0,0017	-0,0033
	$\hat{\mu}_{2M}$	0,0006	0,0036	-0,0012	-0,0010	0,0023	-0,0030
n × **var**	$\tilde{\mu}_2$	0,9896	1,0024	1,0038	0,9904	0,9903	0,9916
	$\hat{\mu}_{2MML}$	0,9349	0,9358	0,9271	0,6697	0,6504	0,6482
	$\hat{\mu}_{2M}$	0,9814	1,0112	0,9959	0,9929	0,9882	0,9948
RE$_{MML}$		**94**	**93**	**92**	**68**	**66**	**65**
RE$_{M}$		**99**	**101**	**99**	**100**	**100**	**100**
ort	$\tilde{\sigma}_2$	1,0062	0,9999	1,0003	0,9540	0,9660	0,9704
	$\hat{\sigma}_{2MML}$	1,0621	1,0402	1,0318	1,1450	1,1063	1,0825
	$\hat{\sigma}_{2M}$	1,0406	1,0235	1,0175	1,0804	1,0547	1,0404
n × **var**	$\tilde{\sigma}_2$	0,2523	0,2445	0,2413	0,9350	1,2025	1,3363
	$\hat{\sigma}_{2MML}$	0,2638	0,2390	0,2293	0,7602	0,6254	0,5251
	$\hat{\sigma}_{2M}$	0,2469	0,2280	0,2217	0,3787	0,3601	0,3281
RE$_{MML}$		**120**	**108**	**103**	**101**	**65**	**49**
RE$_{M}$		**104**	**97**	**94**	**46**	**33**	**27**

Çizelge 3.1 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS, MML ve M tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve RE değerleri (devam)

		$p_1 = 3.5$, $p_2 = 5$			$p_1 = 5$, $p_2 = 2$		
	n	**10**	**15**	**20**	**10**	**15**	**20**
ort	$\tilde{\rho}$	0,4898	0,4902	0,4900	0,5324	0,5255	0,5241
	$\hat{\rho}_{MML}$	0,4984	0,4961	0,4949	0,4638	0,4705	0,4766
	$\hat{\rho}_{M}$	0,4919	0,4920	0,4918	0,4720	0,4772	0,4830
n × **var**	$\tilde{\rho}$	0,2454	0,2398	0,2404	0,2768	0,3086	0,3195
	$\hat{\rho}_{MML}$	0,2378	0,2245	0,2200	0,1869	0,1837	0,1773
	$\hat{\rho}_{M}$	0,2381	0,2277	0,2255	0,2208	0,2365	0,2262
RE_{MML}		**96**	**93**	**91**	**70**	**62**	**57**
RE_{M}		**97**	**95**	**94**	**80**	**77**	**70**
ort	$\tilde{\mu}_{2.1}$	0,0002	0,0054	-0.0006	-0,0025	0,0012	-0,0022
	$\hat{\mu}_{2.1MML}$	-0,0004	0,0049	-0.0006	-0.0010	0,0004	-0,0022
	$\hat{\mu}_{2.1M}$	-0,0006	0,0050	-0.0006	-0.0009	0,0002	-0,0026
n × **var**	$\tilde{\mu}_{2.1}$	0,7736	0,7762	0,7781	0,7888	0,7596	0,7506
	$\hat{\mu}_{2.1MML}$	0,7401	0,7334	0,7321	0,4617	0,4253	0,4197
	$\hat{\mu}_{2.1M}$	0,7364	0,7314	0,7297	0,4436	0,4121	0,3985
RE_{MML}		**96**	**94**	**94**	**59**	**56**	**56**
RE_{M}		**95**	**94**	**94**	**56**	**54**	**53**
ort	$\tilde{\sigma}_{2.1}$	0,8548	0,8573	0,8613	0,7920	0,8124	0,8201
	$\hat{\sigma}_{2.1MML}$	0,8975	0,8892	0,8864	1,0038	0,9696	0,9469
	$\hat{\sigma}_{2.1M}$	0,8835	0,8772	0,8757	0,9358	0,9149	0,9023
n × **var**	$\tilde{\sigma}_{2.1}$	0,2025	0,2016	0,2055	0,9897	1,2994	1,4715
	$\hat{\sigma}_{2.1MML}$	0,2102	0,1971	0,1944	0,8190	0,6927	0,5828
	$\hat{\sigma}_{2.1M}$	0,1973	0,1864	0,1857	0,3669	0,3432	0,3106
RE_{MML}		**108**	**101**	**98**	**97**	**65**	**48**
RE_{M}		**98**	**93**	**91**	**40**	**28**	**22**
ort	$\tilde{\theta}$	0,5063	0,5006	0,4979	0,5011	0,4977	0,4985
	$\hat{\theta}_{MML}$	0,5062	0,5003	0,4980	0,5017	0,4995	0,4994
	$\hat{\theta}_{M}$	0,5062	0,5006	0,4978	0,5011	0,4976	0,4987
n × **var**	$\tilde{\theta}$	0,3197	0,2950	0,2833	0,2876	0,2977	0,2745
	$\hat{\theta}_{MML}$	0,3092	0,2810	0,2695	0,1967	0,1680	0,1564
	$\hat{\theta}_{M}$	0,3196	0,2947	0,2830	0,2971	0,3068	0,2820
RE_{MML}		**97**	**95**	**95**	**66**	**57**	**58**
RE_{M}		**100**	**100**	**100**	**103**	**103**	**103**

Çizelge 3.1'de bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimleri için şekil parametrelerinin farklı değerleri kullanılarak elde edilen LS, MML ve M tahmin edicilerinin 10.000 adımda Monte Carlo simülasyonu ile elde edilen ortalama, varyans ve M ile MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicisine göre RE (RE_{MML} ve RE_M) değerleri verilmektedir. Bu çizelgeden μ_{1i} parametresinin M ve MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin hemen hemen birbirine eşit olduğu ve bu tahmin edicilerin etkinliklerinin LS tahmin edicisinden daha fazla olduğu görülmektedir. μ_{2i} parametresi için üç tahmin edici de yansız iken, MML tahmin edicilerinin varyansının M ve LS tahmin edicilerinden daha küçük olduğu görülür. Dolayısıyla μ_{2i} için tahmin ediciler RE kriterine göre değerlendirildiğinde, MML tahmin edicisinin M ve LS tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu söylenebilir. Ayrıca σ_1 ve σ_2 parametreleri için ise M tahmin edicisi, LS ve MML tahmin edicilerinden daha etkindir.

Şekil parametresinin $p_1 = p_2 = 3.5$ ve $p_1 = p_2 = 5$ olduğu durumlarda LTS dağılımı normal dağılıma çok benzemesine rağmen, M ile MML tahmin edicileri büyük örneklem genişlikleri için LS tahmin edicilerine göre daha etkindirler. Dolayısıyla çizelge 3.1'den çoğu şekil parametresi için M ile MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden daha etkin olduğu görülmektedir. Ayrıca örneklem genişliği arttıkça MML ve M tahmin edicilerinin etkinliklerinin LS tahmin edicilerine göre daha da arttığı görülmektedir.

3.1.6.2 Testlerin güçlerinin karşılaştırılması

Bu bölümde (2.1) modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda elde edilen LS, M ve MML tahmin edicilerine dayanan t, t^* ve t^{**} testlerinin güçleri incelenecektir. Bilindiği gibi H_0 yokluk hipotezi ve H_1 alternatif hipotezi göstermek üzere bir testin I.tip hatası $P\left(H_0 \text{ red} \middle| H_0\right)$ ve testin gücü $P\left(H_0 \text{ red} \middle| H_1\right)$ olarak tanımlanır. Testin gücünü hesaplamak için her bir denemeye sonucu etkilemeyecek şekilde *d* sabiti ekleyip çıkararak H_0 hipotezinin reddedilmesi

olasılığı hesaplanmıştır. d sabiti değerleri, $n=10$ için $d=0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4$ ve 0.5; $n=15$ için $d=0.08,\ 0.16,\ 0.24,\ 0.32$ ve 0.40; $n=20$ için $d=0.07,\ 0.14,\ 0.21,\ 0.28$ ve 0.35 olarak alınmıştır. Açıktır ki, $d=0$ olduğu durum testin I.tip hatasını verir.

Çizelge 3.2'de t, t^* ve t^{**} testlerinin asimptotik dağılımının normal olduğunu göstermek için, bu testlerin I. tip hataları, önceden belirlenen %5 anlam düzeyinde elde edilmiştir. Test istatistiklerinde kullanılan $V(\tilde{\mu}_2)$, $V(\hat{\mu}_{2M})$ ve $V(\hat{\mu}_{2MML})$ değerleri simülasyonla elde edilen değerlerdir. Bu değerler EK 1'de verilmektedir.

Çizelge 3.3'de bu testlerin güçleri karşılaştırılmıştır. Güçler hesaplanırken kullanılan değerler, ilk ve üçüncü denemeye d sabiti ilave edilerek ve ikinci denemeden $2d$ sabiti çıkarılarak elde edilmiştir.

Çizelge 3.2 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hataları, $c=3$, $\rho=0.5$

	$p_1=p_2=2$			$p_1=p_2=3.5$			$p_1=p_2=5$		
n	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****
10	0.044	0.048	0.041	0.049	0.050	0.050	0.050	0.050	0.049
15	0.048	0.050	0.051	0.053	0.050	0.052	0.049	0.050	0.049
20	0.047	0.050	0.046	0.048	0.049	0.048	0.053	0.052	0.051
	$p_1=2, p_2=3.5$			$p_1=3.5, p_2=2$			$p_1=2, p_2=5$		
10	0.052	0.051	0.053	0.047	0.052	0.052	0.050	0.051	0.049
15	0.051	0.047	0.051	0.051	0.050	0.051	0.049	0.050	0.050
20	0.051	0.048	0.052	0.052	0.052	0.053	0.046	0.050	0.049
	$p_1=5, p_2=2$			$p_1=3.5, p_2=5$			$p_1=5, p_2=3.5$		
10	0.046	0.050	0.044	0.049	0.050	0.052	0.051	0.049	0.050
15	0.055	0.052	0.054	0.052	0.053	0.053	0.048	0.048	0.049
20	0.053	0.054	0.053	0.051	0.052	0.049	0.051	0.053	0.050

Çizelge 3.3 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için t, t^{*} ve t^{**} testlerinin güçlerinin karşılaştırılması $c = 3$, $\rho = 0.5$, $d = d_1 = -2d_2 = d_3$

	$p_1 = p_2 = 2$			$p_1 = p_2 = 3.5$			$p_1 = p_2 = 5$		
				$n = 10$					
d	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}
0.0	0.044	0.048	0.041	0.049	0.050	0.050	0.050	0.050	0.049
0.1	0.11	0.17	0.11	0.12	0.12	0.11	0.12	0.13	0.12
0.2	0.32	0.52	0.33	0.35	0.37	0.35	0.34	0.35	0.34
0.3	0.65	0.85	0.67	0.65	0.69	0.65	0.64	0.66	0.65
0.4	0.89	0.98	0.90	0.88	0.91	0.88	0.87	0.89	0.87
0.5	0.98	1.00	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.98
				$n = 15$					
d	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}
0.0	0.048	0.050	0.051	0.053	0.050	0.052	0.049	0.050	0.049
0.08	0.11	0.16	0.12	0.12	0.13	0.12	0.11	0.11	0.11
0.16	0.33	0.51	0.35	0.34	0.38	0.34	0.32	0.34	0.33
0.24	0.65	0.85	0.68	0.62	0.67	0.62	0.62	0.65	0.62
0.32	0.88	0.98	0.90	0.87	0.90	0.87	0.86	0.88	0.86
0.40	0.98	1.00	0.98	0.97	0.98	0.97	0.96	0.97	0.96
				$n = 20$					
d	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}
0.0	0.047	0.050	0.046	0.048	0.049	0.048	0.053	0.052	0.051
0.07	0.11	0.18	0.11	0.12	0.13	0.12	0.12	0.12	0.12
0.14	0.32	0.53	0.33	0.33	0.38	0.34	0.35	0.37	0.35
0.21	0.63	0.87	0.66	0.63	0.69	0.63	0.64	0.66	0.64
0.28	0.88	0.98	0.89	0.86	0.90	0.87	0.86	0.88	0.86
0.35	0.97	1.00	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97

Çizelge 3.3 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için t, t^{*} ve t^{**} testlerinin güçlerinin karşılaştırılması $c=3$, $\rho=0.5$, $d=d_1=-2d_2=d_3$ (devam)

	$p_1=2, p_2=3.5$			$p_1=3.5, p_2=2$			$p_1=2, p_2=5$		
				$n=10$					
d	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****
0.0	0.052	0.051	0.053	0.047	0.052	0.052	0.050	0.051	0.049
0.1	0.12	0.13	0.12	0.11	0.16	0.12	0.12	0.13	0.12
0.2	0.35	0.40	0.36	0.33	0.47	0.34	0.34	0.38	0.35
0.3	0.65	0.73	0.67	0.65	0.82	0.66	0.65	0.70	0.67
0.4	0.88	0.93	0.89	0.89	0.97	0.90	0.88	0.92	0.89
0.5	0.97	0.99	0.98	0.97	1.00	0.98	0.98	0.99	0.98
				$n=15$					
d	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****
0.0	0.051	0.047	0.051	0.051	0.050	0.051	0.049	0.050	0.050
0.08	0.12	0.13	0.12	0.12	0.15	0.11	0.12	0.13	0.12
0.16	0.33	0.39	0.34	0.33	0.47	0.33	0.33	0.37	0.34
0.24	0.62	0.71	0.64	0.64	0.81	0.64	0.62	0.69	0.64
0.32	0.86	0.92	0.87	0.88	0.96	0.88	0.86	0.90	0.87
0.40	0.96	0.99	0.97	0.97	1.00	0.97	0.97	0.99	0.97
				$n=20$					
d	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****	**t**	**t***	**t****
0.0	0.051	0.048	0.052	0.052	0.052	0.053	0.046	0.050	0.049
0.07	0.13	0.14	0.13	0.11	0.16	0.11	0.11	0.13	0.12
0.14	0.35	0.42	0.36	0.35	0.49	0.36	0.32	0.38	0.35
0.21	0.64	0.73	0.66	0.66	0.83	0.67	0.62	0.70	0.65
0.28	0.87	0.93	0.88	0.88	0.97	0.89	0.86	0.92	0.88
0.35	0.97	0.99	0.97	0.97	1.00	0.97	0.97	0.99	0.98

Çizelge 3.3 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için t, t^{*} ve t^{**} testlerinin güçlerinin karşılaştırılması $c=3$, $\rho=0.5$, $d=d_1=-2d_2=d_3$ (devam)

	$p_1=5, p_2=2$			$p_1=3.5, p_2=5$			$p_1=5, p_2=3.5$		
				$n=10$					
d	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}
0.0	0.046	0.050	0.044	0.049	0.050	0.052	0.051	0.049	0.050
0.1	0.11	0.15	0.12	0.12	0.12	0.11	0.12	0.13	0.12
0.2	0.34	0.47	0.34	0.34	0.36	0.34	0.35	0.37	0.35
0.3	0.66	0.81	0.66	0.64	0.66	0.64	0.65	0.69	0.65
0.4	0.89	0.97	0.89	0.86	0.89	0.87	0.88	0.91	0.88
0.5	0.98	1.00	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
				$n=15$					
d	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}
0.00	0.055	0.052	0.054	0.052	0.053	0.053	0.048	0.048	0.049
0.08	0.13	0.16	0.13	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.12
0.16	0.34	0.47	0.35	0.33	0.35	0.33	0.34	0.37	0.34
0.24	0.65	0.81	0.66	0.63	0.65	0.63	0.63	0.68	0.63
0.32	0.88	0.96	0.88	0.85	0.88	0.86	0.86	0.89	0.86
0.40	0.97	1.00	0.97	0.96	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
				$n=20$					
d	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}	t	t^{*}	t^{**}
0.00	0.053	0.054	0.053	0.051	0.052	0.049	0.051	0.053	0.050
0.07	0.12	0.16	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.12
0.14	0.35	0.49	0.35	0.34	0.37	0.35	0.34	0.37	0.34
0.21	0.65	0.81	0.65	0.63	0.66	0.63	0.63	0.69	0.63
0.28	0.89	0.97	0.89	0.86	0.89	0.86	0.86	0.90	0.87
0.35	0.98	1.00	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97

Çizelge 3.2'deki Monte Carlo simülasyonundan görüldüğü gibi farklı şekil parametreleri için LS, MML ve M yöntemlerine göre elde edilen t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hatalarının, önceden belirlenen 0.05 değerine yeterli bir yaklaşım sağladığı ve dolayısıyla üç testin de asimptotik olarak normal dağılıma sahip olabileceği makul görülmektedir. Çizelge 3.3'den testlerin güçlerine bakıldığında, tüm şekil parametreleri için MML tahmin edicisine dayalı t^* test istatistiğinin gücünün t ve t^{**} testlerinin gücünden daha fazla olduğu görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü, μ_{2i} parametresinin MML tahmin edicisinin, LS ve M tahmin edicilerinden daha etkin olduğu çizelge 3.1'den görülmektedir.

3.1.7 İstatistiki dayanıklılık

İstatistiki çalışmalarda kullanılan testlerin dayanıklı olup olmadığının incelenmesinde dayanıklılığın iki tanımından faydalanılır. Bu tanımlar aşağıda verilmiştir:

I. tip hata bakımından dayanıklılık: Testin I. tip hatası, varsayılan modelin makul alternatifleri altında da, varsayılan model altında elde edilen I. tip hatadan çok büyük değilse, test I. tip hata bakımından dayanıklıdır denir.

Etkinlik bakımından dayanıklılık: Testin gücü varsayılan model altında yüksek olup, varsayılan modelin tüm makul alternatifleri için de yüksek kalırsa, test etkinlik bakımından dayanıklıdır denir (Box 1953).

Uygulamada elde edilen verilerin dağılımının tam anlamıyla doğru olarak belirlenmesi her zaman mümkün değildir. Çünkü LTS dağılımı gibi normal dağılımın alternatifi olabilecek birçok dağılım vardır ve bu dağılımların Q-Q grafiklerine bakıldığında verinin normal dağılıma mı yoksa LTS dağılımına mı sahip olduğunu anlamak çoğu zaman zordur. Bu durum dayanıklılığın çıkış noktasıdır.

Uygulama çalışmalarında çoğu zaman dikkate alınmayan, ancak dikkate alınmaması sonuçların güvenilirliğinin azalmasına yol açabilen durumlar olabilir. Bu durumlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

- Kullanılan verilerin dağılımı bilinebilir. Fakat dağılımın şekil parametre değerlerinin yanlış belirlendiği durumlar olabilir.

- Kullanılan verilerin % 90'ının dağılımı ile % 10'unun dağılımı farklı olabilir.

- Kullanılan verilerin % 90'ı bir dağılımdan gelirken % 10'u aynı dağılımın şekil parametresinin farklı olduğu bir durumdan gelebilir.

- Kullanılan verilerin $(n-r)$ tanesi bir dağılımdan gelirken, r tanesi ise aynı dağılımın şekil parametresinin farklı olduğu bir durumdan gelebilir.

Böyle durumlarda istatistiki olarak güçlü ve dayanıklı tahmin edicileri ve dayanıklı testleri tercih etmek daha güvenilir sonuçlar elde etmeyi sağlamaktadır. Bu nedenle, burada, yukarıda sözü edilen durumlar için önerilen testlerin dayanıklı olup olmadığı incelenecektir. Bunun için testlerin I.tip hatalarına $(d=0)$ ve güçlerine $(d\neq 0)$ bakılacaktır.

Çalışmanın bu bölümünde on farklı model incelenecektir. Bu modeller aşağıdaki gibidir:

Kullanılan veriler için varsayılan ortak değişken ve hata terimlerinin dağılımı sırasıyla $LTS(3.5,\sigma_1)$ ve $LTS(3.5,\sigma_{2.1})$ olsun. Ancak ortak değişken ve hata terimleri için şekil parametreleri;

Model 1: $p_1=p_2=2$

Model 2: $p_1=p_2=5$

Model 3: $p_1=2$, $p_2=5$

Model 4: $p_1=5$, $p_2=2$

şeklinde yanlış belirlensin. Yani ortak değişken ve hata terimlerinin parametre değerleri aslında yukarıdaki alternatif modellerdeki (Model 1, Model 2, Model 3 ve Model 4) gibidir. Ancak şekil parametreleri $p_1=p_2=3.5$ olan LTS dağılımdan geldiği

zannedildiğinden işlemler bu parametre değerleri kullanılarak yapıldığında testlerin I.tip hataları ve güçleri nasıl etkilenir?

Ayrıca yukarıda bahsedildiği gibi ortak değişken için Model 5, Model 6, Model 7 ve hata terimleri için de Model 8, Model 9 ve Model 10 da ifade edilen durumlar da söz konusu olabilir:

Model 5: Dixon Aykırı değer modeli: $(n-r)LTS(3.5,\sigma_1)+rLTS(3.5,4\sigma_1)$ (x ler için)

Model 6: Karma model: $0.90LTS(3.5,\sigma_1)+0.10LTS(3.5,4\sigma_1)$ (x ler için)

Model 7: Bulaşık model: $0.90LTS(3.5,\sigma_1)+0.10Uniform(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ (x ler için)

*Model 8:*Dixon Aykırı değer modeli: $(n-r)LTS(3.5,\sigma_{2.1})+rLTS(3.5,2\sigma_{2.1})$ (e ler için)

Model 9: Karma model: $0.90LTS(3.5,\sigma_{2.1})+0.10LTS(3.5,2\sigma_{2.1})$ (e ler için)

Model 10: Bulaşık model: $0.90LTS(3.5,\sigma_{2.1})+0.10Uniform(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ (e ler için)

Model 5 ve Model 8 de $r=[0.5+0.1n]$ olarak tanımlanır. Burada, Model 5'de ortak değişken için, $(n-r)$ gözlem $LTS(3.5,\sigma_1)$'den ve r gözlem ise $LTS(3.5,4\sigma_1)$'den gelmektedir. Model 6'da ortak değişken için gözlemlerin % 90'ı $LTS(3.5,\sigma_1)$'den ve % 10'u ise $LTS(3.5,4\sigma_1)$'den gelmektedir. Model 7'de ortak değişken için gözlemlerin % 90'ı $LTS(3.5,\sigma_1)$'den ve % 10'u ise $Uniform(-\sqrt{3},\sqrt{3})$'den gelmektedir. Model 8, Model 9 ve Model 10'da ise hata terimleri için benzer modeller görülmektedir.

Yukarıda bahsedilen durumlar için elde edilen simülasyon sonuçları çizelge 3.4-3.6'da verilmiştir.

Çizelge 3.4 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda Model 1, 2, 3 ve 4 için t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçlerinin karşılaştırılması; $c = 3$, $\rho = 0.5$, $d = d_1 = -2d_2 = d_3$

	Model 1			***Model 2***			***Model 3***			***Model 4***		
						$n = 10$						
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.0	0.044	0.017	0.039	0.046	0.052	0.046	0.049	0.044	0.037	0.045	0.027	0.045
0.1	0.11	0.08	0.10	0.12	0.13	0.12	0.12	0.13	0.11	0.10	0.09	0.11
0.2	0.34	0.35	0.33	0.35	0.38	0.35	0.33	0.37	0.33	0.34	0.36	0.35
0.3	0.67	0.73	0.68	0.65	0.69	0.65	0.64	0.68	0.65	0.66	0.71	0.66
0.4	0.89	0.94	0.90	0.87	0.89	0.87	0.88	0.91	0.89	0.89	0.93	0.89
0.5	0.98	0.99	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.99	0.98	0.98	0.99	0.98
						$n = 15$						
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.00	0.043	0.015	0.038	0.048	0.059	0.050	0.053	0.049	0.041	0.049	0.026	0.050
0.08	0.11	0.08	0.10	0.12	0.13	0.12	0.12	0.13	0.11	0.12	0.10	0.12
0.16	0.33	0.33	0.32	0.34	0.38	0.34	0.32	0.36	0.32	0.33	0.35	0.33
0.24	0.64	0.72	0.65	0.63	0.67	0.63	0.63	0.69	0.64	0.65	0.72	0.65
0.32	0.88	0.94	0.88	0.86	0.89	0.86	0.86	0.90	0.87	0.88	0.93	0.87
0.40	0.97	0.99	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.99	0.97
						$n = 20$						
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.00	0.047	0.016	0.038	0.048	0.059	0.051	0.049	0.049	0.043	0.045	0.024	0.048
0.07	0.11	0.08	0.10	0.11	0.13	0.12	0.11	0.12	0.10	0.11	0.09	0.11
0.14	0.32	0.33	0.32	0.33	0.37	0.33	0.32	0.37	0.32	0.32	0.35	0.32
0.21	0.63	0.73	0.64	0.63	0.68	0.64	0.62	0.69	0.63	0.64	0.72	0.64
0.28	0.87	0.95	0.88	0.86	0.90	0.86	0.87	0.91	0.88	0.87	0.94	0.87
0.35	0.97	1.00	0.98	0.97	0.98	0.97	0.97	0.99	0.98	0.97	0.99	0.97

Çizelge 3.5 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda ortak değişkenlerin Model 5, Model 6 ve Model 7 durumlarına sahip olması halinde t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçlerinin karşılaştırılması; $c = 3$, $\rho = 0.5$, $d = d_1 = -2d_2 = d_3$

	Model 5			***Model 6***			***Model 7***		
				$n = 10$					
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.0	0.050	0.050	0.050	0.048	0.050	0.049	0.051	0.048	0.049
0.1	0.12	0.13	0.12	0.13	0.13	0.12	0.12	0.13	0.12
0.2	0.34	0.37	0.35	0.35	0.37	0.35	0.35	0.37	0.34
0.3	0.65	0.68	0.65	0.65	0.68	0.65	0.65	0.69	0.64
0.4	0.88	0.90	0.88	0.88	0.90	0.88	0.87	0.90	0.87
0.5	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
				$n = 15$					
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.00	0.052	0.051	0.054	0.050	0.050	0.051	0.049	0.052	0.049
0.08	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.12	0.12	0.13	0.12
0.16	0.33	0.36	0.33	0.34	0.37	0.34	0.34	0.37	0.33
0.24	0.63	0.67	0.63	0.63	0.67	0.62	0.63	0.68	0.62
0.32	0.87	0.89	0.86	0.86	0.89	0.86	0.86	0.90	0.86
0.40	0.96	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
				$n = 20$					
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.00	0.047	0.047	0.044	0.047	0.048	0.045	0.053	0.054	0.050
0.07	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.12	0.12	0.13	0.12
0.14	0.33	0.36	0.33	0.33	0.36	0.33	0.33	0.36	0.33
0.21	0.63	0.68	0.63	0.63	0.68	0.63	0.63	0.69	0.63
0.28	0.86	0.90	0.86	0.86	0.90	0.86	0.86	0.90	0.86
0.35	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97

Çizelge 3.6 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için hata terimlerinin Model 8, Model 9 ve Model 10 durumlarına sahip olması halinde t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçlerinin karşılaştırılması; $c = 3$, $\rho = 0.5$, $d = d_1 = -2d_2 = d_3$

	Model 8			***Model 9***			***Model 10***		
				$n = 10$					
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.0	0.060	0.055	0.059	0.058	0.056	0.057	0.054	0.054	0.053
0.1	0.13	0.14	0.13	0.14	0.14	0.13	0.13	0.14	0.13
0.2	0.35	0.37	0.35	0.36	0.38	0.36	0.34	0.37	0.34
0.3	0.64	0.69	0.65	0.64	0.69	0.65	0.64	0.68	0.65
0.4	0.87	0.90	0.87	0.87	0.90	0.87	0.87	0.90	0.87
0.5	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
0.6	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99
				$n = 15$					
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.00	0.064	0.058	0.067	0.058	0.056	0.058	0.054	0.058	0.054
0.08	0.13	0.14	0.13	0.13	0.14	0.13	0.12	0.14	0.12
0.16	0.33	0.37	0.34	0.34	0.37	0.34	0.34	0.38	0.34
0.24	0.62	0.68	0.62	0.62	0.67	0.64	0.63	0.67	0.63
0.32	0.85	0.89	0.85	0.85	0.90	0.85	0.85	0.89	0.86
0.40	0.96	0.98	0.96	0.96	0.98	0.96	0.97	0.98	0.97
0.48	0.99	1.00	0.99	0.99	1.00	0.99	0.99	1.00	0.99
				$n = 20$					
d	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****	***t***	***t****	***t****
0.00	0.054	0.053	0.054	0.055	0.054	0.055	0.052	0.057	0.053
0.07	0.12	0.13	0.12	0.13	0.14	0.13	0.12	0.14	0.12
0.14	0.34	0.37	0.34	0.33	0.37	0.33	0.33	0.38	0.33
0.21	0.63	0.69	0.63	0.62	0.68	0.62	0.62	0.68	0.63
0.28	0.85	0.90	0.86	0.85	0.90	0.85	0.85	0.89	0.86
0.35	0.96	0.98	0.97	0.96	0.98	0.97	0.97	0.98	0.97
0.42	0.99	1.00	0.99	1.00	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00

Çizelge 3.4 - 3.6'da $p_1 = p_2 = 3.5$ ve örneklem genişliğinin $n = 10, 15$ ve 20 değerleri için I. tip hatalar ve testlerin güçleri elde edilmiştir. Çizelge 3.4'de Model 1, 2, 3 ve 4 için t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hataları ve güçleri elde edilmiştir. Bu çizelgeden Model 1 ve Model 4'e bakıldığında örneklem genişliğinin $n = 10, 15$ ve 20 değerleri için t^* testinin I. tip hatasının t ve t^{**} testlerinin I. tip hatalarından oldukça küçük olmasına rağmen, t^* testinin diğer testlerden daha güçlü olduğu görülmektedir. Model 2 ve Model 3 de ise üç test için de I. tip hataların birbirlerine yakın ve 0.05 civarlarında olduğu ve t^* testinin diğer testlerden daha güçlü olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Çizelge 3.5'de (2.1) modelindeki ortak değişken için Dixon aykırı değer modeli, karma model ve bulaşık model olduğu durumlarda testlerin I.tip hataları ve güçleri elde edilmiştir. Buradan Model 5, 6 ve 7 için t, t^* ve t^{**} testlerinin I. tip hatalarının 0.05 değerine çok yakın olduğu görülmüştür. Ayrıca bu modeller için t^* testinin gücünün t ve t^{**} testlerinden daha fazla olduğu da görülmektedir. Benzer şekilde çizelge 3.6'da ise (2.1) modelinde hata terimlerinin Dixon aykırı değer modeli, karma model ve bulaşık model olduğu durumlarda testlerin I.tip hataları ve güçleri elde edilmiştir. Çizelge 3.6'da sadece Model 8'de elde edilen I. tip hata değerleri örneklem genişliğinin küçük değerleri için 0.05'den az miktarda büyük olmasına rağmen, örneklem genişliği arttıkça 0.05 değerine yaklaştığı görülmüştür. Model 8, 9 ve 10'da t^* testi için elde edilen I.tip hatalar çoğu durumda diğer testlerinkinden daha düşük, testin gücünün ise daha fazla olduğu söylenebilir. Dolayısıyla veride aykırı değer olduğu durumlara karşı, önerdiğimiz MML ve M tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin, LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiğinden daha dayanıklı olduğu söylenebilir.

3.2 Birden Fazla Ortak Değişkene Sahip Bir-Yönlü ANCOVA: Ortak Değişkenlerin GL ve Hata Terimlerinin LTS Dağılımına Sahip Olduğu Durum

Bölüm 3.1'de ortak değişkenin stokastik olduğu bir-yönlü ANCOVA modeli için, ortak değişken ve hata terimlerinin normal olmadığı, ancak simetrik dağılıma sahip olduğu durum incelenmişti. Tezin bu bölümünde ise İslam ve Tiku (2010)'nun tek örneklem için yaptığı çalışma *c*-örneklem için genelleştirilmiştir. Bu amaçla q ortak değişken sayısını göstermek üzere, q-ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modeli için, ortak değişkenlerin stokastik olduğu durum ele alınarak parametre tahminleri elde edilmiş ve hipotez testi yapılmıştır. Burada, hem simetrik hem de çarpık dağılımın beraber kullanılması ile değişebilir durumlara uygun olabilecek genel bir yöntem geliştirilmesi amacıyla İslam ve Tiku (2010)'daki gibi ortak değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımından geldiği varsayılmıştır. Parametre tahminleri elde edilirken öncelikle $q=2$ için tahmin ediciler bulunmuş, daha sonra bu tahmin ediciler q-ortak değişkene genişletilmiştir.

LTS dağılımlar ailesinin özelliklerine Bölüm 3.1 de değinilmişti. Burada GL dağılımlar ailesinin özelliklerinden bahsedilecektir. x rasgele değişkeni GL dağılımına sahip olduğunda X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $(b>0)$,

$$f(x)=\frac{b}{\sigma}\frac{\exp\{-(x-\mu)/\sigma\}}{\left[1+\exp\{-(x-\mu)/\sigma\}\right]^{b+1}}, \qquad -\infty<x<\infty \tag{3.78}$$

ile verilir. (3.78) ailesi $b<1$ için negatif (sola) çarpık, $b=1$ için simetrik ve $b>1$ için pozitif (sağa) çarpıktır. GL dağılımı, $b=1$ olduğunda geniş uygulama alanına sahip olan lojistik dağılıma indirgenir. Lojistik dağılımın şekli ise normal dağılımın şekline benzer. Dolayısıyla, lojistik dağılım normal dağılımın makul bir alternatifidir (Tiku ve Akkaya 2004).

3.2.1 Parametrelerin LS yöntemi ile tahmini

$q=2$ ortak değişken için ortak değişkenlerin dağılımı GL ve hata terimlerinin dağılımı LTS olduğunda parametrelerin LS tahmin edicileri

$$\tilde{\mu}_{1i}=\overline{x}_{1i.}-\left\{\psi\left(b_1\right)-\psi\left(1\right)\right\}\tilde{\sigma}_1 \quad , \quad \tilde{\mu}_{2.1i}=\overline{x}_{2i.}-\tilde{\theta}_{21}\overline{x}_{1i.}-\left\{\psi\left(b_2\right)-\psi\left(1\right)\right\}\tilde{\sigma}_{2.1} \tag{3.79}$$

$$\tilde{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}X_{1ij}^2}{\left(N-1\right)\left\{\psi'\left(b_1\right)+\psi'\left(1\right)\right\}}} \quad , \quad \tilde{\sigma}_{2.1}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left[X_{2ij}-\tilde{\theta}_{21}X_{1ij}\right]^2}{\left(N-2\right)\left\{\psi'\left(b_2\right)+\psi'\left(1\right)\right\}}}$$

şeklindedir. Buradaki, $\tilde{\sigma}_1$ ve $\tilde{\sigma}_{2.1}$ tahmin edicileri yan düzeltmesi yapılmış tahmin edicilerdir. Diğer parametrelerin LS tahmin edicileri ortak değişkenlerin ve hata terimlerinin dağılımının normal olduğu Bölüm 2.3'de verildiği gibidir. Burada sadece GL dağılımı için yapılan düzeltmeler ilave edilmiştir. Ayrıca b_1, X_1 ortak değişkeni için şekil parametresini, b_2 ise, X_2 ortak değişkeni için şekil parametresini gösterir.

Genelleştirme: Bu tahmin ediciler q-ortak değişken için Bölüm 2.3.2'deki gibi genelleştirilirken sadece GL dağılımı için düzeltme yapmak gerekir. Bu nedenle sadece $\tilde{\mu}_{d.I_di}$ ve $\tilde{\sigma}_{d.I_d}$ tahmin edicileri verilir. Diğer tahmin ediciler normal teorideki ile aynıdır. $\tilde{\mu}_{d.I_di}$ ve $\tilde{\sigma}_{d.I_d}$ tahmin edicileri

$$\tilde{\mu}_{d.I_di}=\overline{x}_{di.}-\sum_{l=1}^{d-1}\tilde{\theta}_{dl}\overline{x}_{li.}-\left\{\psi\left(b_d\right)-\psi\left(1\right)\right\}\tilde{\sigma}_{d.I_d} \tag{3.80}$$

$$\tilde{\sigma}_{d.I_d}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{dij}-\sum_{l=1}^{d-1}\tilde{\theta}_{dl}X_{lij}\right)^2}{\left(N-d\right)\left\{\psi'\left(b_d\right)+\psi'\left(1\right)\right\}}} \tag{3.81}$$

şeklinde olur. Burada I_d, Bölüm (2.3) deki gibi $I_d\{1,2,\ldots,d-1\}, d>1$ şeklinde tanımlanır. Birden fazla bağımsız değişkene sahip doğrusal regresyon modeli için bakınız İslam ve Tiku (2010).

3.2.2 Parametrelerin ML yöntemi ile tahmini

Normal teoride ele alınan yeniden parametrelendirilmiş q-ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelini yeniden hatırlayalım.

$$y_{ij} = \mu_i + \sum_{d=1}^{q} \gamma_d u_{dij} + e_{ij},\ i=1,\ldots,c,\ j=1,\ldots,n \tag{3.82}$$

Kolaylık olması bakımından $q=2$ alındığında yukarıdaki model,

$$y_{ij} = \mu_i + \gamma_1 u_{1ij} + \gamma_2 u_{2ij} + e_{ij} \tag{3.83}$$

şeklinde olur.

Y bağımlı değişken ve $X_1, X_2, \ldots, X_q$ ortak değişkenler olmak üzere $\left(X_1, X_2, \ldots, X_q, Y\right)$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_q, y\right) = f_1\left(x_1\right) f_2\left(x_2 \middle| x_1\right) \ldots f_{q+1}\left(y \middle| x_1, x_2, \ldots, x_q\right) \tag{3.84}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $f_1\left(x_1\right)$, X_1'in marjinal dağılımı ve $f_{q+1}\left(y \middle| x_1, x_2, \ldots, x_q\right)$ ise $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_q = x_q$ verildiğinde Y'nin koşullu dağılımıdır (Tiku vd. 2008).

$q=2$ alındığında $\left(y_{ij}, x_{1ij}, x_{2ij}\right)$ $\left(1 \le i \le c, 1 \le j \le n\right)$ için olabilirlik fonksiyonu,

$$L = L\left(z\right) L\left(x_1\right) L\left(x_2 / x_1\right) \tag{3.85}$$

$$L \propto \left\{ \left(\frac{1}{\sigma}\right)^N \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}z_{ij}^2\right)^{-p} \right\} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^N \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-w_{1ij}}}{\left\{1+e^{-w_{1ij}}\right\}^{b_1+1}} \right] \left[\left(\frac{1}{\sigma_{2.1}}\right)^N \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-w_{2ij}}}{\left\{1+e^{-w_{2ij}}\right\}^{b_2+1}} \right]$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$z_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\left\{ y_{ij} - \mu_i - \gamma_1 u_{1ij} - \gamma_2 u_{2ij} \right\},$$

$$w_{1ij} = \frac{1}{\sigma_1}\left\{ x_{1ij} - \mu_{1i} \right\},$$

$$w_{2ij} = \frac{1}{\sigma_{2.1}}\left\{ x_{2ij} - \mu_{2.1i} - \theta_{21} x_{1ij} \right\} \tag{3.86}$$

ve $N = nc$ dir. Bu ifadeler yerlerine yazılıp olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındığında,

$$\ln L = -N\ln\sigma - p\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}z_{ij}^2\right) - N\ln\sigma_1 - \frac{1}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{1ij}-\mu_{1i}\right) - \left(b_1+1\right)\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\ln\left\{1+e^{-\frac{1}{\sigma_1}\left(x_{1ij}-\mu_{1i}\right)}\right\}$$

$$-N\ln\sigma_{2.1} - \frac{1}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{x_{2ij}-\mu_{2.1i}-\theta_{21}x_{1ij}\right\} - \left(b_2+1\right)\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\ln\left\{1+e^{-\frac{1}{\sigma_{2.1}}\left\{x_{2ij}-\mu_{2.1i}-\theta_{21}x_{1ij}\right\}}\right\} \tag{3.87}$$

elde edilir. Bu fonksiyonun ilgili parametrelere göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} = \frac{n}{\sigma_1} - \frac{\left(b_1+1\right)}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{-w_{1ij}}}{\left\{1+e^{-w_{1ij}}\right\}} = 0, \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{n}{\sigma_{2.1}} - \frac{\left(b_2+1\right)}{\sigma_{2.1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{-w_{2ij}}}{\left\{1+e^{-w_{2ij}}\right\}} = 0, \tag{3.89}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{1ij} - \mu_{1i}\right)}{\sigma_1^2} - \frac{\left(b_1+1\right)}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} w_{1ij}\frac{e^{-w_{1ij}}}{\left\{1+e^{-w_{1ij}}\right\}} = 0, \tag{3.90}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{x_{2ij} - \mu_{2.1i} - \theta_{21}x_{1ij}\right\}}{\sigma_{2.1}^2} - \frac{\left(b_2+1\right)}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} w_{2ij}\frac{e^{-w_{2ij}}}{\left\{1+e^{-w_{2ij}}\right\}} = 0, \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_{21}} = \frac{1}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} x_{1ij} - \frac{\left(b_2+1\right)}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} x_{1ij}\frac{e^{-w_{2ij}}}{\left\{1+e^{-w_{2ij}}\right\}} = 0, \tag{3.92}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_i} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{j=1}^{n}\frac{z_{ij}}{\left\{1+\frac{1}{k}z_{ij}^2\right\}} = 0, \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_1} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{1ij}\frac{z_{ij}}{\left\{1+\frac{1}{k}z_{ij}^2\right\}} = 0, \tag{3.94}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_2} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{2ij}\frac{z_{ij}}{\left\{1+\frac{1}{k}z_{ij}^2\right\}} = 0 \tag{3.95}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\frac{z_{ij}}{\left\{1+\frac{1}{k}z_{ij}^2\right\}} = 0 \tag{3.96}$$

olarak elde edilir. (3.88)-(3.96) denklemlerinin ML yöntemiyle açık çözümleri bulunamamaktadır. Bu denklemleri çözmek için MML yöntemi kullanılabilir.

3.2.3 Parametrelerin MML yöntemi ile tahmini

MML denklemlerini elde etmek için ilk olarak,

$$z_{i(1)} \le z_{i(2)} \le \cdots \le z_{i(n)}, \quad w_{1i(1)} \le w_{1i(2)} \le \cdots \le w_{1i(n)}, \quad w_{2i(1)} \le w_{2i(2)} \le \cdots \le w_{2i(n)} \tag{3.97}$$

sıralı istatistikleri kullanılır. Bu değerler sıralı istatistikler cinsinden,

$$z_{i(j)} = e_{i(j)} \big/ \sigma = \left\{ y_{i[j]} - \mu_i - \gamma_1 u_{1i[j]} - \gamma_2 u_{2i[j]} \right\} \big/ \sigma , \tag{3.98}$$

$$w_{1i(j)} = \left\{ x_{1i(j)} - \mu_{1i} \right\} \big/ \sigma_1 \tag{3.99}$$

ve

$$w_{2i(j)} = \left\{ x_{2i[j]} - \mu_{2.1i} - \theta_{21} x_{1i[j]} \right\} \big/ \sigma_{2.1} \tag{3.100}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\left(y_{i[j]}, u_{1i[j]}, u_{2i[j]} \right)$ ve $\left(x_{1i[j]}, x_{2i[j]} \right)$ gözlemleri, sırasıyla $z_{i(j)}$ ve $w_{2i(j)}$'ye karşılık gelen gözlemlerdir ve $z_{i(j)}$ ve $w_{2i(j)}$'nin eşlenikleri olarak adlandırılırlar. Ayrıca $w_{1i(j)}$'ler bulunurken kullanılan $x_{1i(j)}$'ler, x_{1ij}'lerin eşlenikleri değil, sıralı değerleridir. Çünkü (3.99) eşitliğindeki μ_{1i} sabit ve σ ise pozitiftir. Buna göre yukarıdaki denklemler,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{1i}} = \frac{n}{\sigma_1} - \frac{(b_1 + 1)}{\sigma_1} \sum_{j=1}^{n} h\left(w_{1i(j)} \right) = 0 , \tag{3.101}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{n}{\sigma_{2.1}} - \frac{(b_2 + 1)}{\sigma_{2.1}} \sum_{j=1}^{n} h\left(w_{2i(j)} \right) = 0 , \tag{3.102}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{1i[j]} - \mu_{1i} \right)}{\sigma_1^2} - \frac{(b_1 + 1)}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} w_{1i(j)} h\left(w_{1i(j)} \right) = 0 , \tag{3.103}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left\{x_{2i[j]} - \mu_{2.1i} - \theta_{21}x_{1i[j]}\right\}}{\sigma_{2.1}^2} - \frac{(b_2+1)}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} w_{2i(j)}h\left(w_{2i(j)}\right) = 0\,, \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_{21}} = \frac{1}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} x_{1i[j]} - \frac{(b_2+1)}{\sigma_{2.1}}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} x_{1i[j]}h\left(w_{2i(j)}\right) = 0\,, \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_i} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{j=1}^{n} g\left(z_{i(j)}\right) = 0\,, \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_1} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{1i[j]}g\left(z_{i(j)}\right) = 0\,, \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_2} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{2i[j]}g\left(z_{i(j)}\right) = 0 \quad (3.108)$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} z_{i(j)}g\left(z_{i(j)}\right) = 0 \quad (3.109)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$g\left(z_{i(j)}\right) = \frac{z_{i(j)}}{1+\frac{1}{k}z_{i(j)}^2}\,, \quad h\left(w_{1i(j)}\right) = \frac{e^{-w_{1i(j)}}}{\left\{1+e^{-w_{1i(j)}}\right\}} \quad \text{ve} \quad h\left(w_{2i(j)}\right) = \frac{e^{-w_{2i(j)}}}{\left\{1+e^{-w_{2i(j)}}\right\}} \quad (3.110)$$

dir. Önceki bölümden de bilindiği gibi (3.101)-(3.109) eşitlikleri (3.110)'da verilen eşitlikler nedeniyle çözülemediğinden, MML denklemlerini elde etmek için doğrusallaştırma işlemi yapılır. Bunun için $g\left(z_{i(j)}\right)$, $t_{i(j)} = E\left(z_{i(j)}\right)$ etrafında, $h\left(w_{1i(j)}\right)$, $t_{1i(j)} = E\left(w_{1i(j)}\right)$ etrafında ve $h\left(w_{2i(j)}\right)$ ise $t_{2i(j)} = E\left(w_{2i(j)}\right)$ etrafında Taylor serisinin ilk iki terimi için açılarak bu fonksiyonların doğrusal yaklaşımları elde edilir.

$g\left(z_{i(j)}\right)$ fonksiyonu, Taylor serisinin ilk iki terimi için $t_{i(j)} = E\left(z_{i(j)}\right)$ etrafında açılırsa,

$$g\left(z_{i(j)}\right) \cong \alpha_{ij} + \beta_{ij} z_{i(j)} \ , \qquad 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.111}$$

olur. Burada,

$$\alpha_{ij} = \frac{2t_{i(j)}^3 / k}{\left(1 + \frac{t_{i(j)}^2}{k}\right)^2}, \ \beta_{ij} = \frac{1 - \frac{t_{i(j)}^2}{k}}{\left(1 + \frac{t_{i(j)}^2}{k}\right)^2}, \ k = 2p - 3, \ 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.112}$$

şeklinde elde edilir. Eğer β_{ij} katsayılarının ilk elemanı $\beta_{i1} > 0$ ise tüm β_{ij} katsayıları pozitiftir. Dolayısıyla $\hat{\sigma}$ gerçel ve pozitiftir. Ancak küçük p ve büyük n değerleri için β_{i1} negatif olabilir. O zaman $\hat{\sigma}$ gerçel ve pozitif olmayabilir. Bu durumdan kaçınmak için eğer $\beta_{i1} < 0$ ise α_{ij} ve β_{ij} katsayıları yerine,

$$\alpha_{ij}^* = \frac{t_{i(j)}^3 / k}{\left(1 + \frac{t_{i(j)}^2}{k}\right)^2}, \quad \beta_{ij}^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{t_{i(j)}^2}{k}\right)^2} \ , \qquad 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.113}$$

katsayıları kullanılır.

$h\left(w_{1i(j)}\right)$ fonksiyonu, Taylor serisinin ilk iki terimi için $t_{1i(j)} = E\left(w_{1i(j)}\right)$ etrafında açılırsa,

$$h\left(w_{1i(j)}\right) \cong \alpha_{1ij} - \beta_{1ij} w_{1i(j)} \quad , \quad 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.114}$$

olur. Burada,

$$\alpha_{1ij} = \frac{1 + e^{t_{1i(j)}} + t_{1i(j)} e^{t_{1i(j)}}}{\left(1 + e^{t_{1i(j)}}\right)^2} \quad , \quad \beta_{1ij} = \frac{e^{t_{1i(j)}}}{\left(1 + e^{t_{1i(j)}}\right)^2} \ , \ 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.115}$$

dir. Benzer şekilde $h\left(w_{2i(j)}\right)$ fonksiyonu Taylor serisinin ilk iki terimi için $t_{2i(j)} = E\left(w_{2i(j)}\right)$ etrafında açılırsa,

$$h\left(w_{2i(j)}\right) \cong \alpha_{2ij} - \beta_{2ij} w_{2i(j)} \quad , \quad 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.116}$$

olmaktadır. Burada,

$$\alpha_{2ij} = \frac{1 + e^{t_{2i(j)}} + t_{2i(j)} e^{t_{2i(j)}}}{\left(1 + e^{t_{2i(j)}}\right)^2} \quad , \quad \beta_{2ij} = \frac{e^{t_{2i(j)}}}{\left(1 + e^{t_{2i(j)}}\right)^2} \quad , \quad 1 \le i \le c, 1 \le j \le n \tag{3.117}$$

şeklinde elde edilir. $g(.)$ ve $h(.)$ fonksiyonlarının yerine, bu fonksiyonların doğrusal yaklaşımları yazıldığında doğrusal hale getirilmiş denklemler,

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_{1i}} = \frac{n}{\sigma_1} - \frac{\left(b_1 + 1\right)}{\sigma_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{1ij} - \beta_{1ij} w_{1i(j)}\right) = 0 , \tag{3.118}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_{2.1i}} = \frac{n}{\sigma_{2.1}} - \frac{\left(b_2 + 1\right)}{\sigma_{2.1}} \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{2ij} - \beta_{2ij} w_{2i(j)}\right) = 0 , \tag{3.119}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma_1} = -\frac{N}{\sigma_1} + \frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{1ij} - \mu_{1i}\right)}{\sigma_1^2} - \frac{\left(b_1 + 1\right)}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} w_{1ij} \left(\alpha_{1ij} - \beta_{1ij} w_{1i(j)}\right) = 0 , \tag{3.120}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma_{2.1}} = -\frac{N}{\sigma_{2.1}} + \frac{\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \left\{x_{2ij} - \mu_{2.1i} - \theta_{21} x_{1ij}\right\}}{\sigma_{2.1}^2} - \frac{\left(b_2 + 1\right)}{\sigma_{2.1}} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} w_{2ij} \left(\alpha_{2ij} - \beta_{2ij} w_{2i(j)}\right) = 0 \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta_{21}} = \frac{1}{\sigma_{2.1}} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} x_{1ij} - \frac{\left(b_2 + 1\right)}{\sigma_{2.1}} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} x_{1ij} \left(\alpha_{2ij} - \beta_{2ij} w_{2i(j)}\right) = 0 , \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu_i} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{ij} + \beta_{ij} z_{i(j)}\right) = 0\,, \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_1} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{1ij}\left(\alpha_{ij} + \beta_{ij} z_{i(j)}\right) = 0\,, \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \gamma_2} = \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{2ij}\left(\alpha_{ij} + \beta_{ij} z_{i(j)}\right) = 0 \tag{3.125}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{2p}{k\sigma}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\left(\alpha_{ij} + \beta_{ij} z_{i(j)}\right) = 0 \tag{3.126}$$

şeklinde olur. Bu denklemler çözüldüğünde MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu}_{1i} = \overline{x}_{11i(.)} - \frac{\Delta_{1i}}{m_{1i}}\hat{\sigma}_1 \quad , \quad \mu_{2.1i} = \overline{x}_{22i[.]} - \hat{\theta}_{21}\overline{x}_{12i[.]} - \frac{\Delta_{2i}}{m_{2i}}\hat{\sigma}_{2.1}\,, \tag{3.127}$$

$$\mu_{2i} = \hat{\mu}_{2.1i} + \hat{\theta}_{21}\hat{\mu}_{1i} \quad , \quad \hat{\sigma}_1 = \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 + 4NC_1}}{2N}\,,$$

$$B_1 = \left(b_1 + 1\right)\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\delta_{1ij} X_{1i(j)} \quad , \quad X_{1i(j)} = x_{1i(j)} - \overline{x}_{11i(.)}\,,$$

$$C_1 = \left(b_1 + 1\right)\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{1ij} X_{1i(j)}^2\,, \quad \hat{\sigma}_{2.1} = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 + 4NC_2}}{2N}\,,$$

$$B_2 = \left(b_2 + 1\right)\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\delta_{2ij}\left(X_{2i[j]} - K_{21}X_{1i[j]}\right),\; X_{2i[j]} = x_{2i(j)} - \overline{x}_{22i[.]}, X_{1i[j]} = x_{1i(j)} - \overline{x}_{12i[.]}\,,$$

$$C_2 = \left(b_2 + 1\right)\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij}\left(X_{2i[j]} - K_{21}X_{1i[j]}\right)^2\,,\; \hat{\theta}_{21} = K_{21} - D_{21}\hat{\sigma}_{2.1}$$

$$K_{21}=\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij}X_{1i[j]}X_{2i[j]}}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij}X_{1i[j]}^{2}},\quad D_{21}=\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\delta_{2ij}X_{1i[j]}}{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij}X_{1i[j]}^{2}}$$

olarak bulunur. Model parametrelerinin MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu}_i=\bar{y}_{i[.]}-\hat{\gamma}_1\bar{u}_{1i[.]}-\hat{\gamma}_2\bar{u}_{2i[.]},\ \bar{y}_{i[.]}=\left(1/m_i\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}y_{i[j]},\ \bar{u}_{1i[.]}=\left(1/m_{1i}\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{u}_{1i[j]} \tag{3.128}$$

$$\bar{u}_{2i[.]}=\left(1/m_{2i}\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{u}_{2i[j]},\quad \hat{u}_{1i[j]}=\left(x_{1i[j]}-\hat{\mu}_{1i}\right)\Big/\hat{\sigma}_1,\quad \hat{u}_{2i[j]}=\left(x_{2i[j]}-\hat{\mu}_{2i}\right)\Big/\hat{\sigma}_2$$

$$\hat{\gamma}_1=K_1+D_1\hat{\sigma},\quad K_1=\frac{E_{U_1Y}E_{U_2^2}-E_{U_1U_2}E_{U_2Y}}{E_{U_1^2}E_{U_2^2}-\left(E_{U_1U_2}\right)^2},\ D_1=\frac{A_{U_1}E_{U_2^2}-A_{U_2}E_{U_1U_2}}{E_{U_1^2}E_{U_2^2}-\left(E_{U_1U_2}\right)^2}$$

$$\hat{\gamma}_2=K_2+D_2\hat{\sigma},\quad K_2=\frac{E_{U_1^2}E_{U_2Y}-E_{U_1U_2}E_{U_1Y}}{E_{U_1^2}E_{U_2^2}-\left(E_{U_1U_2}\right)^2},\ D_2=\frac{A_{U_2}E_{U_1^2}-A_{U_1}E_{U_1U_2}}{E_{U_1^2}E_{U_2^2}-\left(E_{U_1U_2}\right)^2}$$

$$E_{U_1^2}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{U}_{1i[j]}^{2},\ E_{U_2^2}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{U}_{2i[j]}^{2},\ E_{U_1U_2}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{U}_{1i[j]}\hat{U}_{2i[j]}$$

$$A_{U_1}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\hat{u}_{1i[j]}\alpha_{ij},\ A_{U_2}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\hat{u}_{2i[j]}\alpha_{ij},\ E_{U_1Y}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{U}_{1i[j]}Y_{i[j]}$$

$$E_{U_2Y}=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{U}_{2i[j]}Y_{i[j]},\quad \hat{U}_{1i[j]}=\hat{u}_{1i[j]}-\bar{u}_{1i[.]},\quad \hat{U}_{2i[j]}=\hat{u}_{2i[j]}-\bar{u}_{2i[.]}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{B+\sqrt{B^2+4NC}}{2N}$$

$$B=\frac{2p}{k}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\left(Y_{i[j]}-K_1\hat{U}_{1i[j]}-K_2\hat{U}_{2i[j]}\right) \quad , \quad Y_{i[j]}=y_{i(j)}-\overline{y}_{i[.]}$$

$$C=\frac{2p}{k}\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\left(Y_{i[j]}-K_1\hat{U}_{1i[j]}-K_2\hat{U}_{2i[j]}\right)^2$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\overline{x}_{11i(.)}=\frac{1}{m_{1i}}\sum_{j=1}^{n}\beta_{1ij}x_{1i(j)} \ , \ \overline{x}_{22i[.]}=\frac{1}{m_{2i}}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij}x_{2i[j]} \quad , \quad \overline{x}_{12i[.]}=\frac{1}{m_{2i}}\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij}x_{1i[j]} \tag{3.129}$$

$$m_{1i}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{1ij} \ , \ m_{2i}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{2ij} \ , \ \Delta_{1i}=\sum_{j=1}^{n}\delta_{1ij} \quad , \quad \delta_{1ij}=\alpha_{1ij}-\frac{1}{b_1+1}$$

$$\Delta_{2i}=\sum_{j=1}^{n}\delta_{2ij} \quad , \quad \delta_{2ij}=\alpha_{2ij}-\frac{1}{b_2+1}, \ m_i=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}$$

dir.

Yan Düzeltmesi: Yan düzeltmesi yapıldığında $\hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}_{2.1}$ ve $\hat{\sigma}_1$ tahmin edicileri,

$$\hat{\sigma}=\frac{B+\sqrt{B^2+4NC}}{2\sqrt{N\left(N-c-2\right)}} \ , \ \hat{\sigma}_{2.1}=\frac{-B_2+\sqrt{B_2^2+4NC_2}}{2\sqrt{N\left(N-c-1\right)}} \ , \ \hat{\sigma}_1=\frac{-B_1+\sqrt{B_1^2+4NC_1}}{2\sqrt{N\left(N-c\right)}} \tag{3.130}$$

şeklinde olacaktır.

Genelleştirme: Yukarıdaki tahmin ediciler q-ortak değişken için genelleştirilirse $\left(y_{ij},x_{1ij},\ldots,x_{qij}\right)\left(1\le i\le c,1\le j\le n\right)$ için olabilirlik fonksiyonu,

$$L=L\left(z\right)L\left(x_1\right)L\left(x_2/x_1\right)\cdots L\left(x_q/x_1,x_2,\ldots,x_{q-1}\right) \tag{3.131}$$

$$\propto \left\{ \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{N} \prod_{i=1}^{c} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k} z_{ij}^{2} \right)^{-p} \right\} \left[\prod_{d=1}^{q} \left(\frac{1}{\sigma_{d.I_d}} \right)^{N} \prod_{i=1}^{c} \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-w_{dij}}}{\left\{ 1 + e^{-w_{dij}} \right\}^{b_d + 1}} \right]$$

olarak yazılır ve parametre tahminleri aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

$$\hat{\mu}_{di} = \hat{\mu}_{d.I_d i} + \sum_{l=1}^{d-1} \hat{\theta}_{dl} \hat{\mu}_{li} \ , \qquad \left(\hat{\mu}_{1i} = \hat{\mu}_{1.I_1 i} \right) \tag{3.132}$$

$$\hat{\sigma}_d = \sqrt{\hat{\sigma}_{d.I_d}^2 + \sum_{l=1}^{d-1} \hat{\theta}_{dl}^2 \hat{\sigma}_{l.I_l}^2} \ , \qquad \left(\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_{1.I_1} \right), \quad \hat{\rho}_{dl.I_l} = \hat{\theta}_{dl} \frac{\hat{\sigma}_l}{\hat{\sigma}_d} \ , \ \left(\hat{\rho}_{21.I_1} = \hat{\rho}_{21} \right)$$

$$\hat{\mu}_{d.I_d i} = \overline{x}_{ddi[.]} - \sum_{l=1}^{d-1} \hat{\theta}_{dl} \overline{x}_{ldi[.]} - \frac{\Delta_{di}}{m_{di}} \hat{\sigma}_{d.I_d} \ , \ \ \Delta_{di} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{dij} \ , \ \ \delta_{dij} = \alpha_{dij} - \frac{1}{b_d + 1} \ , \ \ m_{di} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{dij}$$

$$\hat{\sigma}_{d.I_d} = \frac{-B_d + \sqrt{B_d^2 + 4NC_d}}{2N}$$

$$B_d = \left(b_d + 1 \right) \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \delta_{dij} \left\{ X_{di[j]} - \sum_{l=1}^{d-1} K_{dl} X_{li[j]} \right\} \ \ , \ \ \overline{x}_{rdi[.]} = \left(1 / m_{di} \right) \sum_{j=1}^{n} \beta_{dij} x_{ri[j]}$$

$$C_d = \left(b_d + 1 \right) \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{dij} \left\{ X_{di[j]} - \sum_{l=1}^{d-1} K_{dl} X_{li[j]} \right\}^2 \ \ , \ \ X_{ri[j]} = x_{ri[j]} - \overline{x}_{rdi[.]} \ \ , \ \ \left(1 \le r \le d \right)$$

$$\hat{\theta}_{d-1} = \left(\hat{\theta}_{dl} \right) = K_{d-1} - D_{d-1} \hat{\sigma}_{d.I_d} \ ,$$

$$K_{d-1} = \left(X_{d-1}' \beta_d X_{d-1} \right)^{-1} \left(X_{d-1}' \beta_d Z_d \right) = \left(K_{dl} \right), \ \ D_{d-1i} = \left(X_{d-1}' \beta_d X_{d-1} \right)^{-1} \left(X_{d-1}' \delta_d 1_d \right) = \left(D_{dl} \right)$$

Burada,

$$X_{d-1}=\begin{bmatrix} X_{11[1]} & X_{21[1]} & \cdots & X_{d-11[1]} \\ X_{11[2]} & X_{21[2]} & \cdots & X_{d-11[2]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{11[n]} & X_{21[n]} & \cdots & X_{d-11[n]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1c[1]} & X_{2c[1]} & \cdots & X_{d-1c[1]} \\ X_{1c[2]} & X_{2c[2]} & \cdots & X_{d-1c[2]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1c[n]} & X_{2c[n]} & \cdots & X_{d-1c[n]} \end{bmatrix},\ Z_d=\begin{bmatrix} X_{d1[1]} \\ X_{d1[2]} \\ \vdots \\ X_{d1[n]} \\ \ddots \\ X_{dc[1]} \\ X_{dc[2]} \\ \vdots \\ X_{dc[n]} \end{bmatrix},\ 1_d=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ \hat{\theta}_{d-1}=\begin{bmatrix} \hat{\theta}_{d1} \\ \hat{\theta}_{d2} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{dd-1} \end{bmatrix} \qquad (3.133)$$

$$\beta_d=\begin{bmatrix} \beta_{d11} & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \beta_{d12} & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_{d1n} & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \beta_{dc1} & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{dc2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \beta_{dcn} \end{bmatrix},\ \delta_d=\begin{bmatrix} \delta_{d11} & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \delta_{d12} & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_{d1n} & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \delta_{dc1} & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \delta_{dc2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \delta_{dcn} \end{bmatrix}$$

ile gösterilir. Model parametrelerinin MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu}_i=\overline{y}_{i[.]}-\sum_{d=1}^{q}\hat{\gamma}_d\overline{u}_{di[.]},\quad \hat{\gamma}=\left(\hat{\gamma}_d\right)=K+D\hat{\sigma}, \qquad (3.134)$$

$$K=\left(U'\beta U\right)^{-1}\left(U'\beta Y\right)=\left(K_d\right),\ D=\left(U'\beta U\right)^{-1}\left(U'\alpha 1\right)=\left(D_d\right),$$

$$1_{(N\times 1)}=(1),U_{(N\times q)}=\left(\hat{U}_{di[j]}\right),\beta_{(N\times N)}=diag\left(\beta_d\right),\alpha_{(N\times N)}=diag\left(\alpha_{ij}\right),Y_{(N\times 1)}=\left(Y_{i[j]}\right),$$

$$Y_{i[j]}=y_{i[j]}-\overline{y}_{i[.]},\ \overline{y}_{i[.]}=\left(1/m_i\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}y_{i[j]},\ \overline{u}_{di[.]}=\left(1/m_i\right)\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\hat{u}_{di[j]},\ \hat{u}_{di[j]}=\left(x_{di[j]}-\hat{\mu}_{di}\right)\Big/\hat{\sigma}_d$$

$$\hat{U}_{di[j]} = \hat{u}_{di[j]} - \overline{u}_{di[.]} \quad , \quad m_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \, , \quad \hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4NC}}{2N}$$

$$B = \frac{2p}{k} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \left\{ Y_{i[j]} - \sum_{d=1}^{q} K_d \hat{U}_{di[j]} \right\}, \quad C = \frac{2p}{k} \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \left\{ Y_{i[j]} - \sum_{d=1}^{q} K_d \hat{U}_{di[j]} \right\}^2$$

şeklinde elde edilir. Birden fazla bağımsız değişkene sahip doğrusal regresyon modeli için bakınız İslam ve Tiku (2010).

3.2.4 Hipotez testi

$\mu_{y,i}$ i'inci denemenin ortalamasını göstermek üzere $H_0 : \sum_{i=1}^{c} l_i \mu_{y,i} = 0$ yokluk hipotezine karşı $H_1 : \sum_{i=1}^{c} l_i \mu_{y,i} \neq 0$ alternatif hipotezi sınanmak istensin.

i. LS tahmin edicilerine dayalı t istatistiği,

$$t = \frac{\sum_{i=1}^{c} l_i \tilde{\mu}_{y,i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{c} l_i^2 V\left(\tilde{\mu}_{y,i}\right)}} \tag{3.135}$$

olarak tanımlanır. $q = 2$ için $\tilde{\mu}_{y,i}$ ler,

$$\tilde{\mu}_{y,i} = \overline{y}_{i.} - \tilde{\gamma}_1 \left\{ \psi\left(b_1\right) - \psi\left(1\right) \right\} \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\gamma}_2 \left[\tilde{\theta}_{21} \left\{ \psi\left(b_1\right) - \psi\left(1\right) \right\} \tilde{\sigma}_1 + \left\{ \psi\left(b_2\right) - \psi\left(1\right) \right\} \tilde{\sigma}_{2.1} \right] \tag{3.136}$$

şeklindedir. Eğer $\left|t\right| > z_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi red edilir.

ii. MML tahmin edicilerine dayalı t^* istatistiği,

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^{c} l_i \hat{\mu}_{y,i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{c} l_i^2 V\left(\hat{\mu}_{y,i}\right)}} \tag{3.137}$$

olarak tanımlanır. Burada $\hat{\mu}_{y,i}$ 'ler,

$$\hat{\mu}_{y,i} = \overline{y}_{i[.]} - \hat{\gamma}_1 \left[\left(\overline{u}_{1i[.]} - \overline{u}_{11[.]} \right) + \frac{\Delta_1}{m_1} \hat{\sigma}_1 \right] - \hat{\gamma}_2 \left[\left(\overline{u}_{2i[.]} - \overline{u}_{22[.]} \right) + \hat{\theta}_{21} \left\{ \left(\overline{u}_{12[.]} - \overline{u}_{11[.]} \right) + \frac{\Delta_1}{m_1} \hat{\sigma}_1 \right\} + \frac{\Delta_2}{m_2} \hat{\sigma}_{2.1} \right] \tag{3.138}$$

şeklindedir. Burada $\overline{u}_{1i[.]}$ ve $\overline{u}_{2i[.]}$, LTS dağılımından elde edilen ağırlıklar kullanılarak, $\overline{u}_{11[.]}$, $\overline{u}_{12[.]}$ ve $\overline{u}_{22[.]}$ ise GL dağılımından elde edilen ağırlıklar kullanılarak elde edilen ortalamalardır. Yani,

$$\overline{u}_{1i[.]} = (1/m) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \hat{u}_{1i[j]} \quad , \quad \overline{u}_{2i[.]} = (1/m) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \hat{u}_{2i[j]} \quad , \quad \overline{u}_{11[.]} = (1/m_1) \sum_{j=1}^{n} \beta_{1ij} \hat{u}_{1i[j]} ,$$

$$\overline{u}_{12[.]} = (1/m_2) \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} \hat{u}_{1i[j]} \quad , \quad \overline{u}_{22[.]} = (1/m_2) \sum_{j=1}^{n} \beta_{2ij} \hat{u}_{2i[j]} \tag{3.139}$$

dir. Eğer, $\left| t^* \right| > z_{\alpha/2}$ ise H_0 hipotezi red edilir.

3.2.5 Monte Carlo simülasyon çalışması

3.2.5.1 Tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

Bu bölümde, birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin dağılımının GL ve hata terimlerinin dağılımının LTS olduğu durum için MML ve LS tahmin edicilerinin etkinlikleri karşılaştırılmaktadır. Bu amaçla çizelge 3.7'de deneme sayısı $c = 3$ ve $\rho_{21} = 0.5$ alınarak $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \rho_{21}, \tau_1, \gamma_1, \gamma_2, \sigma$ parametrelerinin LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve RE değerleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar örneklem genişliğinin $n = 10, 15, 20$ değerleri ile hata terimleri için LTS dağılımının şekil parametreleri $p = 3, 3.5, 5$ ve ortak değişkenler için GL dağılımının şekil parametrelerinin $b_1 = b_2 = 0.5$, $b_1 = b_2 = 1$, $b_1 = 2, b_2 = 4$,

$b_1 = 4, b_2 = 2$ kombinasyonları kullanılarak yapılmıştır. Daha sonra MML tahmin edicilerine dayalı t^* istatistiğinin asimptotik dağılımının normal olup olmadığının kanısına varmak için çizelge 3.8'de I. tip hatalar elde edilmiştir. Simülasyon çalışması, $q = 2$ ortak değişken için yapılmıştır.

Çizelge 3.7 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS ve MML tahmin edicilerinin Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q = 2$, $\rho_{21} = 0.5$

	$n=10, p=3, b_1=b_2=0.5$					$n=15, p=3, b_1=b_2=0.5$					$n=20, p=3, b_1=b_2=0.5$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	-0,0276	6,2093	-0,0310	5,2377	**84**	-0,0094	6,1694	-0,009	5,1997	**84**	-0,0058	6,2256	-0,0020	5,1199	**82**
σ_1	0,9810	0,3524	1,0501	0,3235	**92**	0,9881	0,3560	1,0346	0,2960	**83**	0,9916	0,3512	1,0266	0,2843	**81**
μ_2	-0,0250	6,7084	-0,0440	5,6720	**85**	-0,0181	6,6982	-0,022	5,6354	**84**	-0,0119	6,7223	-0,0130	5,5586	**83**
σ_2	0,9977	0,2939	1,0659	0,2677	**91**	0,9996	0,2982	1,0447	0,2479	**83**	0,9981	0,2870	1,0323	0,2331	**81**
ρ_{21}	0,4875	0,2602	0,4923	0,2199	**85**	0,4920	0,2498	0,4949	0,2024	**81**	0,4945	0,2495	0,4970	0,1952	**78**
τ_1	-0,0516	19,981	-0,1040	16,7600	**84**	-0,0297	20,0890	-0,0600	16,815	**84**	-0,0204	20,4040	-0,0370	16,7000	**82**
γ_1	0,9801	0,4377	1,0373	0,3152	**72**	0,9883	0,4312	1,0239	0,2746	**64**	0,9915	0,4250	1,0176	0,2650	**62**
γ_2	0,9961	0,3725	1,0507	0,2734	**73**	0,9992	0,3776	1,0337	0,2505	**66**	0,9981	0,3611	1,0249	0,2368	**66**
σ	0,9759	0,4595	1,1328	0,4794	**104**	0,9863	0,4801	1,1024	0,3975	**83**	0,9879	0,4861	1,0800	0,3595	**74**
	$n=10, p=3, b_1=2, b_2=4$					$n=15, p=3, b_1=2, b_2=4$					$n=20, p=3, b_1=2, b_2=4$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	0,0142	2,2595	0,0217	2,0909	**93**	-0,0004	2,3080	0,0032	2,1217	**92**	0,0076	2,2682	0,0089	2,0629	**91**
σ_1	0,9869	0,2814	1,0371	0,2685	**95**	0,9876	0,2715	1,0239	0,2468	**91**	0,992	0,2783	1,0199	0,244	**88**
μ_2	0,0288	2,4615	0,0543	2,075	**84**	0,0133	2,4517	0,0281	2,0555	**84**	0,0091	2,4757	0,0188	2,0546	**83**
σ_2	1,0008	0,2567	1,0395	0,2208	**86**	0,9970	0,2466	1,0246	0,2016	**82**	0,9992	0,2458	1,0203	0,1937	**79**
ρ_{21}	0,4914	0,2201	0,4995	0,1828	**83**	0,4937	0,2116	0,4995	0,1729	**82**	0,4966	0,204	0,5009	0,1664	**82**
τ_1	0,0463	8,8168	0,0990	7,7195	**88**	0,0155	8,9652	0,046	7,7670	**87**	0,0152	8,9912	0,0384	7,6896	**86**
γ_1	0,9869	0,5173	1,0291	0,4309	**83**	0,9890	0,5116	1,0195	0,4075	**80**	0,9912	0,4913	1,0143	0,3866	**79**
γ_2	1,0002	0,5483	1,0303	0,4542	**83**	0,9943	0,5100	1,0178	0,4061	**80**	0,9998	0,5015	1,0169	0,3867	**77**
σ	0,9805	0,4957	1,1234	0,497	**100**	0,9855	0,4814	1,0853	0,3937	**82**	0,9845	0,4479	1,0659	0,3399	**76**

Çizelge 3.7 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS ve MML tahmin edicilerinin Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q = 2$, $\rho_{21} = 0.5$ (devam)

	$n=10, p=3.5, b_1=b_2=1$					$n=15, p=3.5, b_1=b_2=1$					$n=20, p=3.5, b_1=b_2=1$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	-0,0004	3,3317	0.00001	3,1230	**94**	0,0078	3,1564	0.0056	2,9464	**93**	-0,0073	3,2532	-0,0082	3,0237	**93**
σ_1	0,9886	0,2732	1,0551	0,2918	**107**	0,9901	0,2659	1,0352	0,2654	**100**	0,9929	0,2711	1,0272	0,2636	**97**
μ_2	0,0029	3,2917	0,0032	3,1013	**94**	0,0055	3,3330	0,0041	3,0991	**93**	-0,0038	3,2577	-0,0046	3,0187	**93**
σ_2	1,0022	0,2402	1,0690	0,2562	**107**	0,9990	0,2392	1,0441	0,2442	**102**	1,0010	0,2356	1,0344	0,2311	**98**
ρ_{21}	0,4884	0,2426	0,4888	0,2326	**96**	0,4915	0,2274	0,4917	0,2135	**94**	0,4960	0,2225	0,4965	0,2069	**93**
τ_1	0,0046	10,969	0,0049	10,246	**93**	0,0178	10,661	0,0148	9,8922	**93**	-0,0067	10,639	-0,0086	9,8358	**92**
γ_1	0,9883	0,4378	1,0450	0,3965	**91**	0,9893	0,4186	1,0274	0,3587	**86**	0,9917	0,4295	1,0214	0,3654	**85**
γ_2	1,0015	0,4076	1,0592	0,3790	**93**	0,9993	0,3877	1,0383	0,3423	**88**	1,0016	0,3845	1,0305	0,3319	**86**
σ	0,9825	0,3794	1,1007	0,4030	**106**	0,9892	0,3819	1,0774	0,3567	**93**	0,9905	0,3643	1,0606	0,3129	**86**
	$n=10, p=3.5, b_1=4, b_2=2$					$n=15, p=3.5, b_1=4, b_2=2$					$n=20, p=3.5, b_1=4, b_2=2$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	0,0257	2,2397	0,0425	1,8085	**81**	0,0179	2,2146	0,0267	1,7844	**81**	0,0143	2,2363	0,0192	1,7915	**80**
σ_1	0,9844	0,3081	1,0220	0,2485	**81**	0,991	0,3026	1,0163	0,2362	**78**	0,9903	0,3023	1,0106	0,2303	**76**
μ_2	0,0247	3,3306	0,0395	2,9736	**89**	0,0226	3,375	0,0302	3,0194	**89**	0,018	3,3641	0,0201	2,996	**89**
σ_2	1,0024	0,2654	1,0499	0,2551	**96**	1,0016	0,2529	1,0341	0,2301	**91**	0,9997	0,2523	1,0258	0,2249	**89**
ρ_{21}	0,484	0,2813	0,4837	0,2485	**88**	0,4881	0,2673	0,4877	0,2332	**87**	0,491	0,2683	0,4912	0,2309	**86**
τ_1	0,0508	9,6386	0,1017	8,0317	**83**	0,0418	9,6439	0,0714	8,0131	**83**	0,0315	9,5119	0,0482	7,9159	**83**
γ_1	0,9842	0,5726	1,0162	0,4680	**82**	0,9929	0,5489	1,0136	0,4331	**79**	0,9886	0,5386	1,0064	0,4155	**77**
γ_2	1,0018	0,5103	1,0420	0,4577	**90**	1,0004	0,4758	1,0287	0,4076	**86**	0,9997	0,4653	1,0223	0,3876	**83**
σ	0,9818	0,3814	1,095	0,4057	**106**	0,9886	0,3746	1,0705	0,3464	**92**	0,9902	0,3782	1,0563	0,3200	**85**

Çizelge 3.7 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS ve MML tahmin edicilerinin Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\rho_{21}=0.5$ (devam)

	$n=10, p=5, b_1=b_2=0.5$					$n=15, p=5, b_1=b_2=0.5$					$n=20, p=5, b_1=b_2=0.5$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**
μ_1	-0,0250	6,3887	-0,0270	5,3541	**84**	-0,0190	6,2199	-0,0180	5,1452	**83**	-0,012	6,2420	-0,0100	5,0670	**81**
σ_1	0,9879	0,3470	1,0569	0,3109	**90**	0,9895	0,3519	1,0350	0,2914	**83**	0,9904	0,3606	1,0242	0,2817	**78**
μ_2	-0,0400	6,8461	-0,0560	5,7761	**84**	-0,0280	6,7966	-0,0350	5,5886	**82**	-0,018	6,8107	-0,0210	5,6367	**83**
σ_2	0,9984	0,2973	1,0679	0,2679	**90**	0,9985	0,2991	1,0429	0,2501	**84**	0,9993	0,2867	1,0327	0,2373	**83**
ρ_{21}	0,4883	0,2545	0,4930	0,2140	**84**	0,4935	0,2484	0,4960	0,2012	**81**	0,4950	0,2456	0,4965	0,1949	**79**
τ_1	-0,0680	20,749	-0,1020	17,432	**84**	-0,0450	20,577	-0,0620	16,963	**82**	-0,0270	20,559	-0,0380	16,851	**82**
γ_1	0,9885	0,4311	1,0507	0,3585	**83**	0,9890	0,4251	1,0295	0,3235	**76**	0,9919	0,4344	1,0213	0,3096	**71**
γ_2	0,9968	0,3816	1,0593	0,3220	**84**	0,9990	0,3764	1,0386	0,2966	**79**	0,9986	0,3517	1,0288	0,2744	**78**
σ	0,9874	0,2840	1,0672	0,3092	**109**	0,9909	0,2706	1,0530	0,2762	**102**	0,9925	0,2705	1,0430	0,2708	**100**
	$n=10, p=5, b_1=2, b_2=4$					$n=15, p=5, b_1=2, b_2=4$					$n=20, p=5, b_1=2, b_2=4$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**
μ_1	0,0105	2,2272	0,0170	2,0786	**93**	0,0064	2,3032	0,0110	2,0881	**91**	0,0088	2,2889	0,0097	2,1116	**92**
σ_1	0,9851	0,2727	1,0370	0,2659	**98**	0,9899	0,2766	1,0260	0,2495	**90**	0,9943	0,2806	1,0212	0,2423	**86**
μ_2	0,0365	2,4544	0,0581	2,0905	**85**	0,0205	2,4875	0,0380	2,0646	**83**	0,0162	2,5248	0,0269	2,0777	**82**
σ_2	0,9953	0,2508	1,0367	0,2167	**86**	1,0003	0,2511	1,0270	0,2005	**80**	1,0013	0,2506	1,0214	0,1942	**77**
ρ_{21}	0,4924	0,2158	0,5005	0,1845	**85**	0,4932	0,2121	0,4998	0,1731	**82**	0,4963	0,2036	0,5009	0,1662	**82**
τ_1	0,0515	8,8001	0,0897	7,982	**91**	0,0298	8,8158	0,0575	7,8743	**89**	0,0245	8,9173	0,0403	7,9949	**90**
γ_1	0,9852	0,5148	1,0335	0,4991	**97**	0,9924	0,5154	1,0259	0,4686	**91**	0,9942	0,5045	1,0188	0,444	**88**
γ_2	0,9951	0,5312	1,0325	0,4895	**92**	0,9989	0,5109	1,0234	0,448	**88**	1,0012	0,5076	1,0198	0,4332	**85**
σ	0,9826	0,2745	1,0545	0,2974	**108**	0,9925	0,2799	1,0469	0,2838	**101**	0,9927	0,2726	1,0364	0,2677	**98**

Çizelge 3.7 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL, hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için LS ve MML tahmin edicilerinin Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\rho_{21}=0.5$ (devam)

	$n=10, p=5, b_1=b_2=1$					$n=15, p=5, b_1=b_2=1$					$n=20, p=5, b_1=b_2=1$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	0,0104	3,3593	0,0109	3,1494	**94**	0,0044	3,2392	0,0050	2,9979	**93**	-0,005	3,2970	-0,0050	3,0570	**93**
σ_1	0,9851	0,2621	1,0518	0,2802	**107**	0,9916	0,2738	1,0369	0,2761	**101**	0,9935	0,2604	1,0275	0,2533	**97**
μ_2	0,0067	3,3636	0,0073	3,1617	**94**	0,0013	3,2372	0,0027	3,0015	**93**	-0,0096	3,2443	-0,0090	2,9818	**92**
σ_2	1,0009	0,2494	1,0673	0,2677	**107**	1,0006	0,2403	1,0462	0,2418	**101**	0,9982	0,2313	1,0324	0,2291	**99**
ρ_{21}	0,4864	0,2372	0,4866	0,2261	**95**	0,4919	0,2301	0,4922	0,2178	**95**	0,4942	0,2237	0,4948	0,2088	**93**
τ_1	0,0187	11,152	0,0196	10,445	**94**	0,0021	10,737	0,0033	9,9708	**93**	-0,0184	10,688	-0,017	9,8847	**92**
γ_1	0,9841	0,4263	1,0456	0,4233	**99**	0,9927	0,4189	1,0339	0,3935	**94**	0,9951	0,4071	1,0263	0,3719	**91**
γ_2	1,0014	0,4030	1,0615	0,4027	**100**	1,0004	0,3959	1,0419	0,376	**95**	0,9968	0,3767	1,0283	0,3518	**93**
σ	0,9864	0,2724	1,0617	0,2960	**109**	0,9903	0,2783	1,0475	0,2814	**101**	0,9928	0,2745	1,039	0,2687	**98**
	$n=10, p=5, b_1=4, b_2=2$					$n=15, p=5, b_1=4, b_2=2$					$n=20, p=5, b_1=4, b_2=2$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	0,0271	2,2159	0,0438	1,8148	**82**	0,0109	2,2607	0,0220	1,8067	**80**	0,0122	2,2853	0,0183	1,8292	**80**
σ_1	0,9849	0,3056	1,0224	0,2495	**82**	0,9915	0,3080	1,0168	0,235	**76**	0,9934	0,3021	1,0127	0,2282	**76**
μ_2	0,0239	3,3423	0,0385	3,0146	**90**	0,0176	3,3536	0,0244	2,9873	**89**	0,0125	3,2547	0,0162	2,8965	**89**
σ_2	1,0037	0,2648	1,0505	0,2474	**93**	0,9985	0,2611	1,0315	0,2356	**90**	1,0009	0,2497	1,0264	0,2198	**88**
ρ_{21}	0,4832	0,2731	0,4834	0,2408	**88**	0,4897	0,2609	0,4895	0,2277	**87**	0,4936	0,2539	0,4925	0,2182	**86**
τ_1	0,0513	9,5204	0,0942	8,2158	**86**	0,0247	9,4539	0,0499	8,0177	**85**	0,0231	9,4008	0,0381	8,0025	**85**
γ_1	0,9854	0,5758	1,0197	0,5121	**89**	0,9944	0,5609	1,0173	0,4675	**83**	0,9928	0,5473	1,0107	0,4500	**82**
γ_2	1,0023	0,5102	1,0449	0,4790	**94**	0,9982	0,4742	1,0286	0,4331	**91**	1,0027	0,4678	1,0263	0,4171	**89**
σ	0,9851	0,2798	1,0572	0,3024	**108**	0,9893	0,2764	1,0432	0,2818	**102**	0,9913	0,2699	1,0346	0,2651	**98**

Çizelge 3.8 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda MML tahmin edicilerine dayalı t^* istatistiği için Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen I.tip hatalar, $q = 2$, $\rho_{21} = 0.5$

				$p = 3$			
n	$b_1 = b_2 = 0.5$	$b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$	$b_1 = 1$, $b_2 = 0.5$	$b_1 = b_2 = 1$	$b_1 = 4$, $b_2 = 2$	$b_1 = 2$, $b_2 = 4$	$b_1 = 4$, $b_2 = 4$
10	0.044	0.047	0.050	0.053	0.053	0.057	0.053
15	0.038	0.039	0.052	0.049	0.052	0.051	0.056
20	0.035	0.038	0.046	0.056	0.054	0.057	0.053
				$p = 3.5$			
10	0.042	0.044	0.049	0.048	0.052	0.049	0.049
15	0.041	0.040	0.044	0.056	0.054	0.053	0.058
20	0.042	0.041	0.047	0.051	0.058	0.052	0.058
				$p = 5$			
10	0.042	0.042	0.045	0.054	0.049	0.053	0.051
15	0.035	0.040	0.045	0.055	0.053	0.054	0.054
20	0.031	0.033	0.047	0.054	0.056	0.051	0.055

Hata terimleri için şekil parametresinin $p = 3.5$ ve $p = 5$ olduğu ve ortak değişkenler için şekil parametrelerinin $b_1 = b_2 = 1$ olduğu durumlarda, hata terimlerinin ve ortak değişkenlerin dağılımı normal dağılıma çok benzer. Buna rağmen, çizelge 3.7'den $p = 3.5$ iken $b_1 = b_2 = 1$, $p = 5$ iken $b_1 = b_2 = 1$ olduğu durumlarda σ, σ_1 ve σ_2 parametrelerinin LS tahmin edicileri etkin bulunurken, diğer tüm parametreler için MML tahmin edicilerinin etkin olduğu görülür. Ayrıca çizelgeden örneklem genişliği arttıkça LS tahmin edicilerinin etkinliğinin azaldığı da görülmektedir. Hata terimlerinin dağılımında şekil parametresi $p = 3$ olduğu durumda, örneklem genişliği $n = 10$ iken σ'nın LS tahmin edicisi daha etkin iken, GL dağılımına ait tüm şekil parametreleri için tüm parametrelerin MML tahmin edicileri LS tahmin edicilerinden daha etkindir.

Çizelge 3.8'den ise MML tahmin edicilerine dayalı t^* istatistiği için elde edilen I. tip hataların, önceden belirlenen 0.05 değerine yeterli bir yaklaşım sağladığı ve dolayısıyla t^* test istatistiğinin asimptotik olarak normal dağılıma sahip olabileceği makul görülmektedir.

3.2.5.2 İstatistiki dayanıklılık

Bu bölümde hata terimlerinde aykırı değer olduğu durum, ortak değişkenlerde aykırı değer olduğu durum ve her ikisinde de aykırı değer olduğu durumlar ayrı ayrı incelenecektir. Aşağıdaki modellere bakıldığında Model 1, 2, 3, 4 ve 5 hata terimleri için, Model 6 ortak değişkenler için ve Model 7 ise hem ortak değişkenler hem de hata terimlerinde aykırı değer olduğu durumlardır. Bu modeller incelenirken GL dağılımının şekil parametreleri $b_1 = b_2 = 1$ alınmıştır.

Hata terimlerinin şekil parametresi $p = 3.5$ olan LTS dağılımına sahip olduğu varsayılıyor. Ancak hata terimleri için şekil parametresi

Model 1: $p = 2$

Model 2: $p = 5$

şeklinde yanlış belirlensin. Yani hata terimlerinin parametre değerleri aslında yukarıdaki alternatif modellerdeki gibidir. Ancak şekil parametresi $p = 3.5$ olan LTS dağılımından geldiği zannedildiğinden, işlemler bu parametre değerleri kullanılarak yapılırsa tahmin edicilerin etkinlikleri nasıl etkilenir?

Ayrıca hata terimleri için (Model 3, Model 4, Model 5), ortak değişkenler için (Model 6) ve hem ortak değişkenler hem de hata terimleri için (Model 7) aykırı değer olduğu durumları ifade edilen aşağıdaki modeller de söz konusu olabilir:

Model3: Dixon Aykırı değer modeli: $(n-r)LTS(3.5,\sigma)+rLTS(3.5,4\sigma)$ (e ler için)

Model 4: Bulaşık model: $0.90LTS(3.5,\sigma)+0.10Uniform(-0.5,0.5)$ (e ler için)

Model 5: Karma model: $0.90LTS(3.5,\sigma)+0.10LTS(3.5,4\sigma)$ (e ler için)

Model 6: Dixon Aykırı değer modeli:

$(n-r)GL(1,\sigma_1)+rGL(1,4\sigma_1)$ (X_1 için)

$(n-r)GL(1,\sigma_{2.1})+rGL(1,4\sigma_{2.1})$ (X_2 için)

Model 7: Ortak değişkenlerin $b_1 = b_2 = 1$ olan GL ve hata teriminin $p = 3.5$ olan LTS dağılımından geldiği varsayılır. Ancak aslında ortak değişkenler $b_1 = b_2 = 2$ olan GL den ve hata terimi $p = 2$ olan LTS dağılımından gelmektedir.

Model 3 ve Model 6'daki r değerleri $r = [0.5 + 0.1n]$ ile hesaplanır. Çizelge 3.9'da yukarıda ifade edilen modeller için parametrelerin LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama ve varyansları hesaplanmıştır. MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerine göre RE değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 3.9 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (1) ve Model (2) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1$ $(1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0$ $(1\le i\le c)$, $\sigma=1$

Model (1)															
	$n=10$					$n=15$					$n=20$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	-0,0047	3,2632	-0,005	3,0764	**94**	-0,0019	3,2747	-0,0020	3,0445	**93**	-0,0045	3,2444	-0,0050	2,9859	**92**
σ_1	0,9877	0,2685	1,0545	0,2887	**108**	0,9918	0,2596	1,0370	0,2616	**101**	0,9950	0,2712	1,0288	0,2629	**97**
μ_2	-0,0047	3,3626	-0,0050	3,1644	**94**	-0,0046	3,2556	-0,005	3,0428	**93**	-0,0008	3,3161	-8E-04	3,0760	**93**
σ_2	1,0019	0,2399	1,0687	0,2568	**107**	1,0011	0,2342	1,0458	0,2358	**101**	1,0002	0,2337	1,0337	0,2300	**98**
ρ_{21}	0,4871	0,2435	0,4876	0,2318	**95**	0,4929	0,2309	0,4933	0,218	**94**	0,4947	0,2259	0,4947	0,2109	**93**
τ_1	-0,0088	10,957	-0,009	10,083	**92**	-0,0077	10,805	-0,0080	9,8022	**91**	-0,0032	10,803	-0,0050	9,6836	**90**
γ_1	0,9864	0,4349	1,0435	0,3394	**78**	0,9923	0,4127	1,0293	0,3006	**73**	0,9934	0,4042	1,0210	0,2842	**70**
γ_2	1,0031	0,3999	1,0578	0,3207	**80**	1,0005	0,3860	1,0370	0,2848	**74**	1,0010	0,3849	1,0282	0,2795	**73**
σ	0,9211	1,217	1,0018	1,0498	**86**	0,9341	1,6917	0,9647	0,9957	**59**	0,9424	1,9296	0,9399	0,8167	**42**
Model (2)															
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	0,0106	3,2639	0,0096	3,0743	**94**	0,0022	3,3201	0,0022	3,0792	**93**	0,0015	3,4037	0,0008	3,1338	**92**
σ_1	0,9833	0,2629	1,0496	0,2815	**107**	0,9928	0,2719	1,0378	0,2715	**100**	0,9942	0,2696	1,0274	0,2631	**98**
μ_2	0,0073	3,3133	0,0056	3,1287	**94**	0,0053	3,2623	0,0057	3,0470	**93**	-0,0010	3,2862	-0,001	3,0617	**93**
σ_2	1,0017	0,2399	1,0686	0,2584	**108**	1,0025	0,2372	1,0471	0,2385	**101**	1,0014	0,2411	1,0348	0,2359	**98**
ρ_{21}	0,4899	0,2380	0,4903	0,2276	**96**	0,4921	0,2301	0,4927	0,2156	**94**	0,4935	0,2285	0,4931	0,2127	**93**
τ_1	0,0188	10,762	0,0155	10,141	**94**	0,0053	10,943	0,0066	10,203	**93**	-0,002	11,110	-0,003	10,225	**92**
γ_1	0,9845	0,4257	1,0425	0,4033	**95**	0,9922	0,4191	1,0303	0,3692	**88**	0,9943	0,4156	1,0227	0,3618	**87**
γ_2	0,9989	0,4046	1,0563	0,3871	**96**	1,0024	0,3971	1,0409	0,3584	**90**	1,0013	0,3884	1,0304	0,3470	**89**
σ	0,9834	0,2821	1,1116	0,3278	**116**	0,9899	0,2780	1,0911	0,2992	**108**	0,9927	0,2798	1,0782	0,2816	**101**

Çizelge 3.10 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (3) ve Model (4) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1$ $(1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0$ $(1\le i\le c)$, $\sigma=1$

	Model (3)														
	$n=10$					$n=15$					$n=20$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**
μ_1	0,0083	3,3472	0,0096	3,1272	**93**	0,0012	3,3524	0,0020	3,1292	**93**	-0,0054	3,2413	-0,0047	2,9953	**92**
σ_1	0,9862	0,2714	1,0526	0,2904	**107**	0,9898	0,2648	1,0351	0,2662	**101**	0,9907	0,2644	1,0250	0,2562	**97**
μ_2	0,0046	3,3181	0,0037	3,1104	**94**	0,0078	3,2418	0,0089	3,0285	**93**	-0,0040	3,3231	-0,0034	3,0973	**93**
σ_2	1,0026	0,2413	1,0694	0,2599	**108**	1,0028	0,2284	1,0476	0,2307	**101**	1,0015	0,2374	1,0350	0,2320	**98**
ρ_{21}	0,4885	0,2382	0,4887	0,2257	**95**	0,4925	0,2201	0,4926	0,2093	**95**	0,4940	0,2248	0,4944	0,2107	**94**
τ_1	0,0101	11,314	0,0096	10,443	**92**	0,0079	11,274	0,0101	10,335	**92**	-0,015	10,996	-0,0125	10,067	**92**
γ_1	0,9868	0,4790	1,0435	0,4252	**89**	0,9917	0,4830	1,0301	0,3984	**82**	0,9913	0,4492	1,0212	0,3663	**82**
γ_2	1,0023	0,4521	1,0593	0,4102	**91**	0,9997	0,4286	1,0383	0,3642	**85**	1,0021	0,4253	1,0304	0,3543	**83**
σ	1,1168	0,6273	1,2351	0,6080	**97**	1,1653	0,7003	1,2401	0,5563	**79**	1,1251	0,6493	1,1756	0,4469	**69**
	Model(4)														
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**
μ_1	-0,002	3,2214	-0,0030	3,0111	**93**	0,0069	3,3173	0,0059	3,0796	**93**	-0,0018	3,2646	-2E-04	3,0104	**92**
σ_1	0,9863	0,2712	1,0531	0,2913	**107**	0,9910	0,2738	1,0368	0,2741	**100**	0,9944	0,2731	1,0284	0,2625	**96**
μ_2	0,0023	3,2360	0,0013	3,0347	**94**	0,0071	3,3512	0,0067	3,1311	**93**	-0,0009	3,2629	-0,0010	3,0128	**92**
σ_2	1,0026	0,2449	1,0699	0,2622	**107**	0,9997	0,2412	1,0443	0,2435	**101**	1,0037	0,2387	1,0374	0,2327	**97**
ρ_{21}	0,4871	0,2399	0,4878	0,229	**95**	0,4910	0,2203	0,4914	0,2075	**94**	0,4940	0,2320	0,4943	0,2162	**93**
τ_1	0,0011	10,713	-0,0008	9,9997	**93**	0,0154	11,007	0,0134	10,192	**93**	-0,0049	10,688	-0,0040	9,7861	**92**
γ_1	0,9858	0,4142	1,0435	0,3682	**89**	0,9910	0,4154	1,0294	0,3425	**82**	0,9964	0,4036	1,0249	0,3249	**80**
γ_2	1,0024	0,3934	1,0598	0,3551	**90**	0,9991	0,3852	1,0368	0,3277	**85**	1,0021	0,3696	1,0300	0,3055	**83**
σ	0,9325	0,3587	1,0409	0,3827	**107**	0,9417	0,3651	1,0182	0,3361	**92**	0,9415	0,3732	0,9983	0,3216	**86**

Çizelge 3.11 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (5) ve Model (6) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q=2$, $\mu_d=0$, $\sigma_d=1$, $\gamma_d=1\ (1\le d\le q)$, $\rho_{21}=0.5$, $\tau_i=0\ (1\le i\le c)$, $\sigma=1$

Model (5)															
	$n=10$					$n=15$					$n=20$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**
μ_1	-0,0006	3,2555	-0,0019	3,0420	**93**	-0,0038	3,2931	-0,0034	3,0496	**93**	-0,0056	3,3375	-0,0059	3,0990	**93**
σ_1	0,9840	0,2623	1,0505	0,2816	**107**	0,9931	0,2660	1,0385	0,2666	**100**	0,9928	0,2703	1,0267	0,2650	**98**
μ_2	0,0006	3,2560	0,0007	3,0750	**94**	-0,008	3,3295	-0,0076	3,1102	**93**	-0,0043	3,3385	-0,0055	3,1037	**93**
σ_2	1,0011	0,2415	1,0678	0,2592	**107**	1,0022	0,2390	1,0472	0,2415	**101**	1,0007	0,2369	1,034	0,2285	**96**
ρ_{21}	0,4875	0,2396	0,4880	0,2292	**96**	0,4933	0,2280	0,4932	0,2132	**94**	0,4942	0,2259	0,4944	0,2112	**94**
τ_1	-0,002	11,029	-0,0025	10,268	**93**	-0,0048	11,125	-0,0045	10,224	**92**	-0,0036	11,383	-0,0061	10,372	**91**
γ_1	0,9839	0,4596	1,0416	0,4178	**91**	0,993	0,4556	1,0311	0,3757	**82**	0,9921	0,4607	1,0209	0,3772	**82**
γ_2	1,0010	0,4568	1,0575	0,4158	**91**	1,0028	0,4412	1,0411	0,3717	**84**	1,0001	0,4275	1,0291	0,3506	**82**
σ	1,1127	0,6384	1,2328	0,6352	**99**	1,1204	0,6613	1,1983	0,5507	**83**	1,1237	0,6898	1,1767	0,4935	**72**

Model (6)															
	$n=10$					$n=15$					$n=20$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**	ort	n× var	ort	n× var	**RE**
μ_1	0,0005	4,3405	0,0011	3,7680	**87**	-0,0009	4,6172	-0,0007	3,8630	**84**	-0,0014	4,2956	-0,0040	3,6089	**84**
σ_1	1,1159	0,4670	1,1775	0,4408	**94**	1,1687	0,5286	1,1987	0,4382	**83**	1,1317	0,4840	1,1471	0,3799	**79**
μ_2	-0,0071	5,2103	-0,007	4,2755	**82**	-0,0054	5,9074	-0,0030	4,6026	**78**	-0,001	5,2795	-0,0050	4,0961	**78**
σ_2	1,2523	0,7111	1,3055	0,6366	**90**	1,3315	0,8283	1,3420	0,6504	**79**	1,2586	0,7145	1,2515	0,5097	**71**
ρ_{21}	0,5608	0,2721	0,5519	0,2483	**91**	0,5886	0,2612	0,5743	0,2304	**88**	0,5754	0,2647	0,5594	0,2224	**84**
τ_1	-0,0071	16,041	-0,006	13,117	**82**	-0,0037	18,069	-0,0009	14,079	**78**	0,0008	16,190	-0,0070	12,620	**78**
γ_1	1,1190	0,6645	1,1509	0,5146	**77**	1,1695	0,7139	1,1551	0,4412	**62**	1,1318	0,6589	1,1091	0,3742	**57**
γ_2	1,2517	0,8930	1,2425	0,5769	**65**	1,3314	1,0267	1,2410	0,4707	**46**	1,2584	0,8878	1,1693	0,3506	**39**
σ	0,9778	0,3573	1,115	0,4056	**114**	0,9891	0,3728	1,1141	0,3826	**103**	0,992	0,3786	1,0968	0,3475	**92**

Çizelge 3.12 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli için ortak değişkenlerin GL hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunda Model (7) için simülasyonla elde edilen ortalama, varyans ve RE değerleri, $q = 2$, $\mu_d = 0$, $\sigma_d = 1$, $\gamma_d = 1$ $(1 \le d \le q)$, $\rho_{21} = 0.5$, $\tau_i = 0$ $(1 \le i \le c)$, $\sigma = 1$

	Model (7)														
	$n = 10$					$n = 15$					$n = 20$				
	LS		MML			LS		MML			LS		MML		
	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**	ort	n × var	ort	n × var	**RE**
μ_1	1,0018	2,2529	0,9648	2,1336	**95**	0,9970	2,2898	0,9523	2,1462	**94**	0,9980	2,2551	0,9491	2,1297	**94**
σ_1	0,8236	0,1901	0,8805	0,2021	**106**	0,8266	0,1898	0,8662	0,1892	**100**	0,8278	0,1904	0,8586	0,1846	**97**
μ_2	1,3581	2,2713	1,3102	2,1706	**96**	1,3650	2,3144	1,3059	2,1900	**95**	1,3665	2,2538	1,2998	2,1366	**95**
σ_2	0,8362	0,1707	0,8935	0,1835	**107**	0,8369	0,1693	0,8764	0,1704	**101**	0,8364	0,1739	0,8668	0,1695	**97**
ρ_{21}	0,4864	0,2407	0,4870	0,2306	**96**	0,4925	0,2329	0,4927	0,2199	**94**	0,4936	0,2309	0,4939	0,2145	**93**
τ_1	2,3604	7,8077	2,2755	7,1459	**92**	2,3586	7,7466	2,2572	7,0279	**91**	2,3603	7,6173	2,2476	6,8720	**90**
γ_1	0,8241	0,3464	0,8924	0,2941	**85**	0,8252	0,3325	0,8801	0,2688	**81**	0,8280	0,3452	0,8755	0,2895	**84**
γ_2	0,8367	0,3368	0,9032	0,2900	**86**	0,8378	0,3224	0,8902	0,2593	**80**	0,8368	0,3214	0,8801	0,2391	**74**
σ	0,9242	1,3411	1,0010	1,1347	**85**	0,9343	1,4544	0,9664	0,8628	**59**	0,9438	2,2806	0,9458	0,9417	**41**

Çizelge 3.9-3.12'ye bakıldığında Model (1), Model (3), Model (4), Model (5) ve Model (7) için σ_1 ve σ_2 parametreleri haricindeki tüm parametreler, Model (2) için σ_1, σ_2 ve σ parametreleri haricindeki tüm parametreler, Model (6) için ise sadece σ parametresi hariç tüm parametrelerin MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin LS tahmin edicilerinden daha fazla olduğu görülmektedir. Ayrıca örneklem genişliği arttıkça MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin daha da arttığı görülmektedir.

4. UYGULAMA

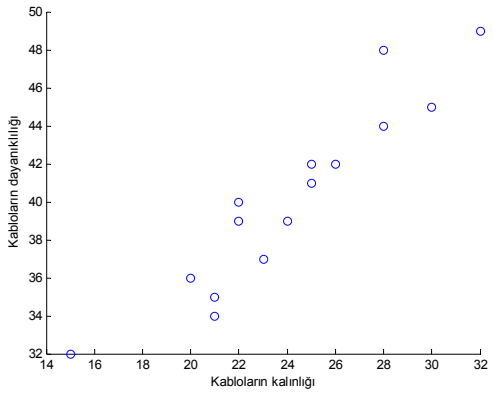
4.1 Uygulama 1: Kabloların Dayanıklılığı Deneyi

Montgomery (2000) tarafından verilen örnekte üç farklı makine, ürettikleri kabloların dayanıklılıkları bakımından karşılaştırılmak isteniyor. Bu amaçla yapılan çalışmada elde edilen veriler çizelge 4.1'de verildiği gibidir.

Çizelge 4.1 Kabloların dayanıklılığı veri seti

Makine 1		Makine 2		Makine 3	
y	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*
36	20	40	22	35	21
41	25	48	28	37	23
39	24	39	22	42	26
42	25	45	30	34	21
49	32	44	28	32	15

Çizelge 4.1'de *x* kabloların kalınlığını, *y* ise kabloların dayanıklılığını göstermektedir. MATLAB programı kullanılarak *x*'e karşı *y* için çizilen saçılım grafiği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



.

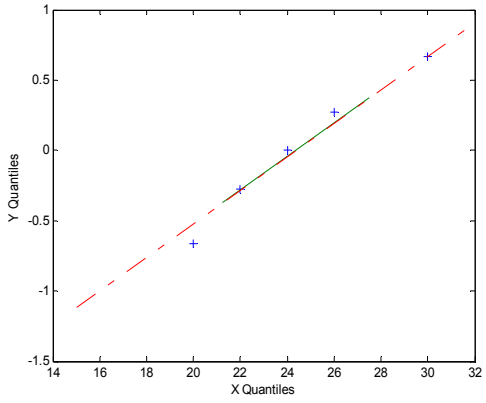
Şekil 4.1 *x* ile *y* arasındaki saçılım grafiği

Şekil 4.1'den kabloların kalınlığı ile dayanıklılığı arasında doğrusal bir ilişki olduğu görülmektedir. Bu nedenle kabloların dayanıklılıkları bakımından makineler arasında

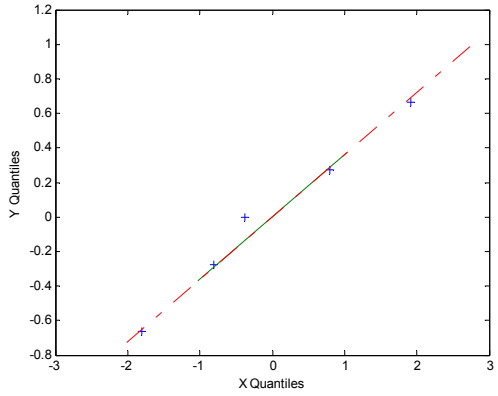
anlamlı bir farklılık olup olmadığının karşılaştırılabilmesi için, kabloların kalınlıklarının kabloların dayanıklılıklarına olan etkisinin arındırılması gerekir. Burada kullanılacak en uygun yöntem ANCOVA yöntemidir. Problemde sadece bir ortak değişken olduğundan bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli,

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \theta x_{ij} + e_{ij} \quad , \quad i = 1,\ldots,3\,;\ j = 1,\ldots,5$$

kullanılması uygundur. Montgomery (2000), bu problemi ortak değişkenin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında çözmüştür. Ancak ortak değişken stokastik olabilir ve hata terimleri ise normal dağılıma sahip olmayabilir. Burada ortak değişken ve hata terimlerinin dağılımının belirlenebilmesi için LTS Q-Q grafikleri çizilmiş ve aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



Şekil 4.2 x'ler için Q-Q grafiği, $p_1 = 2$



Şekil 4.3 e'ler için Q-Q grafiği, $p_2 = 2$

Şekil 4.2-4.3'den x'ler ve e'ler için Q-Q grafiklerine bakıldığında ortak değişkenin $LTS\left(2,\sigma_1\right)$ ve hata terimlerinin $LTS\left(2,\sigma_{2.1}\right)$ dağılımına uyduğu görülmektedir. Bu şekil parametrelerini belirlerken olası tüm şekil parametreleri için Q-Q grafikleri elde edilmiştir. Ancak veriye en uygun olan şekil parametrelerinin $p_1 = p_2 = 2$ olduğu görülmüş ve burada sadece bu grafikler verilmiştir. Veriye ait şekil parametrelerini daha iyi belirlemek amacıyla olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan şekil parametre değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen değerler aşağıdaki gibidir:

Çizelge 4.2 Kabloların dayanıklılığı veri seti kullanılarak farklı şekil parametreleri için olabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler

$\rho = 0.5$	$L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$
$p_1 = p_2 = 2$	$\mathbf{8.17.10^{-179}}$
$p_1 = p_2 = 3.5$	$1.22.10^{-249}$
$p_1 = p_2 = 5$	$3.91.10^{-317}$
$p_1 = 2, p_2 = 5$	$6.87.10^{-254}$
$p_1 = 5, p_2 = 2$	$4.65.10^{-242}$
$p_1 = 3.5, p_2 = 5$	$2.49.10^{-286}$
$p_1 = 5, p_2 = 3.5$	$1.93.10^{-280}$
$p_1 = 2, p_2 = 3.5$	$3.38.10^{-217}$
$p_1 = 3.5, p_2 = 2$	$2.96.10^{-211}$

Çizelge 4.2'den de görüldüğü gibi $\rho = 0.5$ ve $p_1 = p_2 = 2$ olduğunda olabilirlik fonksiyonu maksimum olur. Ayrıca veriye en uygun ρ değerinin de belirlenmesi gerekir.

Çizelge 4.3 Kabloların dayanıklılığı veri seti kullanılarak farklı ρ parametre değerleri için olabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler

$p_1 = p_2 = 2$	$L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$
$\rho = 0.2$	$2.44.10^{-182}$
$\rho = 0.5$	$8.17.10^{-179}$
$\rho = 0.8$	$\mathbf{2.99.10^{-178}}$

Çizelge 4.3'den de olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan ρ parametresinin 0.8 olduğu görülmektedir. Böylece olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerleri $p_1 = p_2 = 2$ ve $\rho = 0.8$ dir. Q-Q grafikleri ve olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerleri birbirini desteklediğinden, bu problem ortak değişkenin $LTS(2, \sigma_1)$ ve hata terimlerinin $LTS(2, \sigma_{2.1})$ dağılımına uyduğu varsayılarak çözülmüştür. Buna göre LS, M ve MML tahmin edicilerinin değerleri çizelge 4.4'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4.4 Kabloların dayanıklılığı veri seti için LS, M ve MML tahmin değerleri

	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	σ_1	σ_2	ρ_{21}
LS	25,2000	26.0000	21,2000	41,4000	43,2000	36.0000	4,0373	4,1688	0,9239
MML	24,8995	26,1364	21,4373	41,1455	43,1902	36,1285	5,9792	6,3563	0,9248
M	24,6872	26,3474	21,5980	40,7918	43,6158	36,0200	6,1063	6,4076	0,9203

	θ	μ_{211}	μ_{212}	μ_{213}	$\sigma_{2.1}$
LS	0,9540	17,3595	18,3963	15,7755	1,5951
MML	0,9831	16,6657	17,4944	15,0525	2,4180
M	0,9657	17,0725	17,8286	15,3860	2,5066

Çizelge 4.4'den tahmin değerlerine bakıldığında σ_1, σ_2, $\sigma_{2.1}$ ve θ parametrelerinin tahmin değerleri hariç, tüm parametreler için LS, M ve MML tahmin değerlerinin hemen hemen birbirine eşit olduğu görülüyor. σ_1, σ_2, $\sigma_{2.1}$ ve θ parametrelerinin tahmin değerlerinde ise M ile MML birbirine yakın çıkarken LS'nin M ile MML'den daha küçük olduğu görülür. Yani LS tahmin edicileri σ_1, σ_2 ve $\sigma_{2.1}$ parametrelerini M ve MML tahmin edicilerine göre daha alttan tahmin etmiştir.

Montgomery (2000) bu uygulama problemini ortak değişkenlerin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında çözdüğünde kabloların dayanıklılığı arasında anlamlı bir fark olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Burada ortak değişkenin stokastik olduğu, ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğunu varsaydık. Bu problem için birinci ve üçüncü denemenin ortalamasını ikinci deneme ile karşılaştırdık. Bu doğrusal bağıntıyı seçmemizin nedeni, simülasyon çalışmalarımızda bu doğrusal bağıntının kullanılmasıdır. Böylece uygulama sonuçları ile simülasyon sonuçlarını karşılaştırma ve destekleme imkanı sağlamış oluruz. Bunun için doğrusal bağıntılardan yararlandığımızda hipotezler,

$$H_0 : \mu_{21} - 2\mu_{22} + \mu_{23} = 0$$
$$H_1 : \mu_{21} - 2\mu_{22} + \mu_{23} \neq 0$$

şeklinde yazılır. Bu hipotezleri sınamak için LS, M ve MML tahmin edicileri için test istatistiklerinin değerleri sırasıyla

$$|t| = \left| \frac{\tilde{\mu}_{21} - 2\tilde{\mu}_{22} + \tilde{\mu}_{23}}{\sqrt{6V(\tilde{\mu}_{2i})}} \right| = \left| \frac{-9}{\sqrt{6(0.1973)}} \right| = 8.2719$$

$$|t^*| = \left| \frac{\hat{\mu}_{21MML} - 2\hat{\mu}_{22MML} + \hat{\mu}_{23MML}}{\sqrt{6V(\hat{\mu}_{2iMML})}} \right| = \left| \frac{-9.1064}{\sqrt{6(0.1355)}} \right| = 10.0995$$

$$|t^{**}| = \left| \frac{\hat{\mu}_{21M} - 2\hat{\mu}_{22M} + \hat{\mu}_{23M}}{\sqrt{6V(\hat{\mu}_{2iM})}} \right| = \left| \frac{-10.4198}{\sqrt{6(0.1531)}} \right| = 10.8717$$

olarak bulunur. Bu değerler aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

Çizelge 4.5 Kabloların dayanıklılığı veri seti için t, t^* ve t^{**} test istatistiklerinin değerleri

	LS	MML	M
Test istatistiği	8.2719	10.0996	10.8717
H_0 hipotezi	red	red	red

$|t|$, $|t^*|$ ve $|t^{**}|$ istatistikleri $z_{Tablo}=1.96$ değerinden büyük olduğundan H_0 hipotezi % 5 anlam düzeyinde bu üç test için de red edilir. Görülüyor ki ortak değişkenlerin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayıldığında ortalamalar arasında fark bulunmazken, ortak değişkenin stokastik olarak alınması durumunda ortalamalar arasında anlamlı bir fark bulunduğu görülmektedir. LS, MML ve M yöntemlerinin üçü de birinci ve üçüncü denemenin ortalamasının ikinci denemeden farklı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca çizelge 4.5'den MML ve M test istatistiklerinin yokluk hipotezini LS'den daha güçlü red ettikleri görülmektedir. Çizelge 3.3'de yapılan Monte Carlo simülasyon çalışmasından da t^* testinin gücünün t ve t^{**} testlerinden daha fazla olduğu görülmektedir. Bu nedenle t^* istatistiği için simülasyon sonucunun uygulamada elde edilen sonucu desteklediği ve t^* istatistiğinin sonucunun güvenilir olduğu söylenebilir.

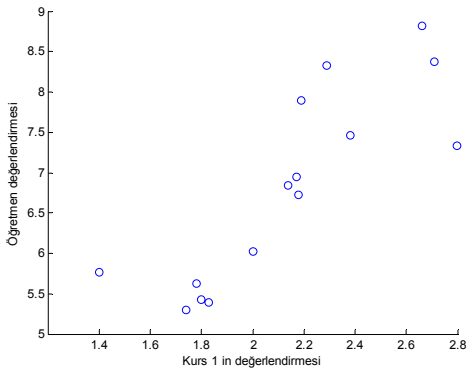
4.2 Uygulama 2: Öğretici Başarısı Deneyi

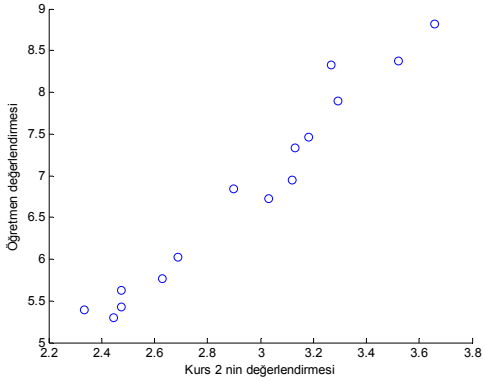
Rencher ve Schaalje (2008) tarafından verilen örnekte üç farklı kurs öğretici başarıları bakımından karşılaştırılmak isteniyor. Bu amaçla yapılan çalışmada elde edilen veriler aşağıdaki çizelgede verildiği gibidir.

Çizelge 4.6 Kurslar veri seti

Kurs 1			Kurs 2			Kurs 3		
y	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
2.14	2.71	2.50	2.77	2.29	2.45	1.11	1.74	1.82
1.34	2.00	1.95	1.23	1.83	1.64	2.41	2.19	2.54
2.50	2.66	2.69	1.37	1.78	1.83	1.74	1.40	2.23
1.40	2.80	2.00	1.52	2.18	2.24	1.15	1.80	1.82
1.90	2.38	2.30	1.81	2.14	2.11	1.66	2.17	2.35

Çizelge 4.6'da y öğretici başarısını, x_1 ve x_2 iki farklı kursun başarısını göstermektedir. MATLAB programı kullanılarak x_1'e karşı y ve x_2'ye karşı y için çizilen saçılım grafikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.





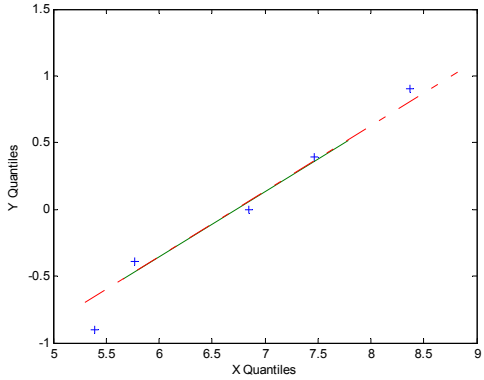
Şekil 4.4 x_1 ile y arasındaki saçılım grafiği Şekil 4.5 x_2 ile y arasındaki saçılım grafiği

Şekil 4.4-4.5'de x_1 ile y ve x_2 ile y değişkenleri arasında doğrusal bir ilişki olduğu görülmektedir. Bu nedenle öğretici başarılarını karşılaştırabilmek için, öncelikle Kurs 1 ve Kurs 2'nin öğretici başarısına etkisinin arındırılması gerekir. Kurslar arasındaki farklar sınanmak istenildiğinde kullanılacak en uygun yöntem ANCOVA yöntemidir. Problemde x_1 ve x_2 olmak üzere iki ortak değişken olduğundan iki ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modeli

$$y_{ij} = \mu_i + \gamma_1 x_{1ij} + \gamma_2 x_{2ij} + e_{ij} \ , \ i = 1,\ldots,3 \ ; \ j = 1,\ldots,5$$

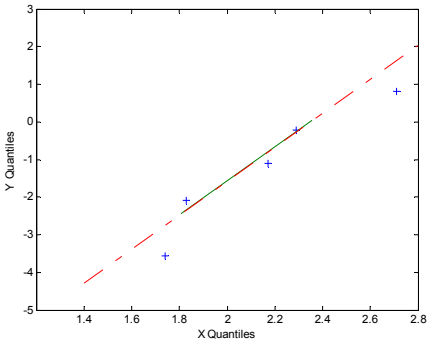
kullanılması uygun olur.

Rencher ve Schaalje (2008), bu problemi ortak değişkenlerin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında çözmüştür. Ancak ortak değişkenler stokastik olabilir ve hata terimleri ise normal dağılıma sahip olmayabilir. Burada *y'* ler için çizilen LTS Q-Q grafiği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

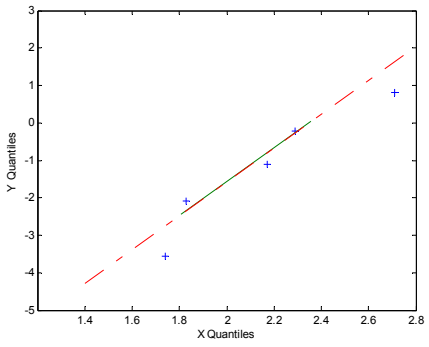


Şekil 4.6 y'ler için LTS Q-Q grafiği, $p = 5$

x_1 ve x_2 ortak değişkenleri için çizilen GL Q-Q grafikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



Şekil 4.7 x_1'ler için GL Q-Q grafiği, $b_1 = 0.5$



Şekil 4.8 x_2'ler için GL Q-Q grafiği, $b_2 = 0.5$

Yukarıdaki şekillerden x_1 ve x_2 ortak değişkenlerinin Q-Q grafiğine bakıldığında dağılımlarının sırasıyla $GL(b_1 = 0.5)$ ve $GL(b_2 = 0.5)$ dağılımına uyduğu görülmektedir. Ayrıca hata terimlerinin de $LTS(p = 5)$ dağılımına uygun olduğu görülmektedir. Veriye ait şekil parametrelerini daha iyi belirlemek amacıyla olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan şekil parametre değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen değerler aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Çizelge 4.7 Kurslar veri seti kullanılarak farklı parametre değerleri için olabilirlik fonksiyonunun aldığı değerler

p, b_1, b_2	$L(\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, \rho_{21}, \tau_1, \gamma_1, \gamma_2, \sigma)$
$p = 3, b_1 = b_2 = 1$	$2.06.10^{-44}$
$p = 3, b_1 = b_2 = 2$	$6.43.10^{-46}$
$p = 3, b_1 = b_2 = 0.5$	$1.17.10^{-43}$
$p = 3, b_1 = 2, b_2 = 4$	$2.17.10^{-47}$
$p = 3, b_1 = 4, b_2 = 2$	$1.85.10^{-47}$
$p = 3.5, b_1 = b_2 = 1$	$9.89.10^{-44}$
$p = 3.5, b_1 = b_2 = 2$	$3.08.10^{-45}$
$p = 3.5, b_1 = b_2 = 0.5$	$5.60.10^{-43}$
$p = 3.5, b_1 = 2, b_2 = 4$	$1.04.10^{-46}$
$p = 3.5, b_1 = 4, b_2 = 2$	$8.84.10^{-47}$
$p = 5, b_1 = b_2 = 1$	$8.69.10^{-43}$
$p = 5, b_1 = b_2 = 2$	$2.71.10^{-44}$
$p = 5, b_1 = b_2 = 0.5$	**$4.92.10^{-42}$**
$p = 5, b_1 = 2, b_2 = 4$	$9.14.10^{-46}$
$p = 5, b_1 = 4, b_2 = 2$	$7.77.10^{-46}$

Çizelge 4.7'den görüldüğü gibi $p = 5, b_1 = b_2 = 0.5$ değerleri için olabilirlik fonksiyonu maksimum değerini almaktadır. Q-Q grafikleri ve olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerleri birbirini desteklediğinden, bu problem ortak değişkenlerin $GL(b_1 = 0.5)$ ve $GL(b_2 = 0.5)$ ve hata terimlerinin $LTS(p = 5)$ dağılımına sahip olduğu varsayılarak çözülmüştür. Buna göre LS ve MML tahmin edicilerinin değerleri aşağıdaki çizelgedeki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4.8 Kurslar veri seti için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri

	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	σ_1	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	σ_2
LS	2,6708	2,2048	2,0208	0,1160	3,5323	3,0966	3,0895	0,1525
MML	2,6975	2,1837	2,0457	0,1298	3,5805	3,0531	3,1322	0,1783
	ρ_{21}	τ_1	γ_1	γ_2	σ	$\mu_{y,1}$	$\mu_{y,2}$	$\mu_{y,3}$
LS	0,8016	8,4478	0,0015	0,4346	0,2363	7.7313	6.7136	6.3965
MML	0,8101	8,6045	-0,0020	0,5205	0,2671	8.1136	7.0454	6.7345

Çizelge 4.8'den tahmin değerlerine bakıldığında tüm parametreler için LS ve MML tahmin değerlerinin birbirine çok yakın olduğu görülüyor. Rencher ve Schaalje (2008) bu uygulama problemini ortak değişkenlerin deterministik olduğu ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında çözdüğünde öğretici başarıları bakımından kurslar arasında fark olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Burada ortak değişkenlerin stokastik ve GL dağılımına sahip, hata terimlerinin ise LTS dağılımına sahip olduğu varsayıldı. İlk örnekteki gibi simülasyon çalışmaları ile destekleyebilmek amacıyla birinci ve üçüncü denemenin ortalamasının ikinci deneme ile karşılaştırılmak istendiği varsayıldı. Bunun için,

$$H_0 : \mu_{y,1} - 2\mu_{y,2} + \mu_{y,3} = 0$$
$$H_1 : \mu_{y,1} - 2\mu_{y,2} + \mu_{y,3} \neq 0$$

hipotezlerindeki doğrusal bağıntılar sınandığında, LS ve MML tahmin edicileri için test istatistiklerinin değerleri sırasıyla

$$|t| = \left| \frac{\tilde{\mu}_{y,1} - 2\tilde{\mu}_{y,2} + \tilde{\mu}_{y,3}}{\sqrt{6V\left(\tilde{\mu}_{y,i}\right)}} \right| = \left| \frac{0.7006}{\sqrt{6(5.1865)}} \right| = 0.1256$$

$$|t^*| = \left| \frac{\hat{\mu}_{y,1} - 2\hat{\mu}_{y,2} + \hat{\mu}_{y,3}}{\sqrt{6V\left(\hat{\mu}_{y,i}\right)}} \right| = \left| \frac{0.7573}{\sqrt{6(5.6948)}} \right| = 0.1296$$

olarak bulunur. Sonuçlar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

Çizelge 4.9 Kurslar veri seti için t ve t^* test istatistiklerinin değerleri

	LS	MML
Test istatistiği	0.1256	0.1296
H_0 hipotezi	red	red

Çizelge 4.9'dan da görüldüğü gibi $|t|$, $|t^*|$ istatistikleri $z_{0.025}=1.96$ değerinden küçük olduğundan H_0 hipotezi % 5 anlamlılık düzeyinde iki test için de red edilemez. Dolayısıyla ortak değişkenin deterministik olduğu durum ile ortak değişken stokastik olduğu durumlar birbirini desteklemekte ve öğretici başarıları bakımından kurslar arasında fark bulunamamıştır.

5. SONUÇ

ANCOVA modeli için geleneksel varsayım ortak değişkenlerin deterministik olması ve hata terimlerinin normal dağılıma sahip olmasıdır. Bu durumda en etkin yöntem LS yöntemidir. Ancak gerçek hayat problemlerinde bu varsayımların sağlanması çok zordur. Varsayımlar sağlanmadığında ise LS tahmin edicilerinin etkinlikleri ve kullanılan geleneksel testlerin gücü azalır. Bu nedenle varsayımların sağlanmadığı durumlar için etkin tahmin ediciler ve güçlü testleri sağlayan yeni yöntemler geliştirilmesi gerekir.

Bu çalışmada ANCOVA modellerinde ortak değişkenlerin stokastik ve hata terimlerinin normal olmadığı durum ile ilgilenilmiştir. Bu durumlar için geleneksel yöntemlere alternatif yöntemler geliştirilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin dağılımının LTS olduğu durum ele alındı. Parametreler için MML ve M yöntemleri kullanılarak yeni tahmin ediciler elde edildi. Bu tahmin edicilerin etkinlikleri Monte Carlo simülasyon çalışması ile geleneksel LS tahmin edicileri ile karşılaştırıldı. MML ve M tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerinden belirgin bir şekilde etkin oldukları görüldü. MML ve M tahmin edicilerine dayalı yeni test istatistikleri önerildi ve test istatistiklerinin dağılımlarının asimptotik olarak normal dağılıma sahip olduğu simülasyon çalışması ile gösterildi. Bu tahmin edicilere dayalı olarak önerilen test istatistiklerinin güçleri (t^{*} ve t^{**}) LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiği (t) ile karşılaştırıldı. t^{*} ve t^{**} istatistiklerinin, t istatistiğinden daha güçlü oldukları gösterildi. Ayrıca veride aykırı değerler olduğunda, önerilen testlerin daha küçük I. tip hatalarının olduğu (gücünün fazla olduğu) ve LS testinden daha dayanıklı oldukları gösterildi.

Çalışmanın diğer orijinal bölümünde ise birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde simetrik ve çarpık dağılımları bir arada kullanarak farklı durumlara uygun olan bir yöntem geliştirmek amacıyla ortak değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum ele alındı. Ortak değişkenler çarpık bir

dağılıma sahip olduğundan ve LS tahmin edicileri de ortak değişkenlerdeki aykırı değerlerden büyük ölçüde etkilendiğinden yeniden parametrelendirilmiş bir model önerildi. Bu model için MML yöntemi ile yeni tahmin ediciler elde edildi. Bu tahmin edicilerin LS yönteminden daha etkin tahmin ediciler oldukları Monte Carlo simülasyon çalışması ile gösterildi. Geliştirilen test istatistiğinin dağılımının asimptotik olarak normal olduğu gösterildi. Ayrıca veride oluşabilecek çeşitli aykırı değerler olduğu durumlarda MML tahmin edicilerinin etkinliklerinin LS tahmin edicilerinden daha fazla olduğu görüldü.

Sonuç olarak, bu çalışmada ANCOVA modelleri için ortak değişkenlerin stokastik olduğu ve hata terimlerinin dağılımının normal olmadığı varsayımları altında kullanılabilecek etkin tahmin ediciler elde edilmiş ve güçlü testler geliştirilmiştir.

Gelecekteki çalışmalarımızda birden fazla ortak değişkene sahip ANCOVA modellerinde simetrik durum ve çarpık durum ayrı ayrı incelenecektir. Ayrıca ortak değişkenlerin stokastik olduğu varsayımı altında farklı dayanıklı tahmin ediciler de elde edilecektir.

KAYNAKLAR

Acıtaş, Ş. 2010. Ortak Değişkenlerin Varlığı Durumunda Faktöriyel Tasarımlar. Anadolu Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans tezi, Eskişehir.

Akkaya, A.D. and Tiku, M.L. 2008. Robust estimation in multiple linear regression with non-Gaussian noise, *Automatica,* Volume 44, pp. 407-417.

Bain, L.J. and Engelhardt, M. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition, Duxbury Press.

Bartlett, M.S. 1953. Approximate confidence intervals, *Biometrika*, Volume 40, pp. 12-19.

Barnett, V.D. 1966. Evaluation of maximum likelihood estimators when the likelihood equation has multiple roots. *Biometrika*, Volume 53, pp. 151-165.

Beaton, A.E and Tukey, J.W. 1974. The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data. *Technometrics,* Volume 16, pp. 147-186.

Birch, J.B. and Myers, R.H. 1982. Robust analysis of covariance. *Biometrics,* Volume 38, pp. 699-713.

Box, G.E.P. 1953. Non-normality and tests on variances, *Biometrika*, Volume 40, pp. 318-335.

Casella, G. and Berger, R.L. 2002. Statistical Inference, 2nd edition, Duxbury Press, Pacific Grove, California.

Hampel, F.R., Ronchetti, E.M., Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A. 1986. Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions. John Wiley & Sons, New York.

Hoeffding, W. 1953. On the distribution of the expected value of the order statistics. *Annals of Mathematical Statistics,* Volume 24, pp. 93-100.

Huber, P.J. 1964. Robust estimation of a location parameter. *Annals of Mathematical Statistics*, Volume 35, pp. 73-101.

Huber, P.J. and Ronchetti, E.M. 2009. Robust Statistics. Second Edition, John Wiley & Sons.

İslam, M.Q., Tiku, M.L. and Yıldırım, F. 2001. Nonnormal regression I. Skew distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Volume 30, Number 6, pp. 993-1020.

İslam, M.Q. and Tiku, M.L. 2004. Multiple linear regression model under nonnormality, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Volume 33, Number 10, pp. 2443-2467.

İslam, M.Q. and Tiku, M.L. 2010. Multiple linear regression model with stochastic design variables, *Journal of Applied Statistics*, Volume 37, Number 6, pp. 923-943.

Kendall, M. and Stuart, A. 1967. The Advanced Theory of Statistics, Volume 2, London: Charles Griffin.

Kuehl, R.O. 2000. Design of Experiments: Statistical Principles of Research Design and Analysis, Second Edition, New York, Duxbury.

Lee, W. 1975. Experimental Design and Analysis. W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Maxwell, S.E. and Delaney, H.D. 2004. Designing Experiments and Analyzing Data: A Model Comparison Perspective, Second Edition, New Jersey.

Milliken, G.A. and Johnson, D.E. 2002. Analysis of Messy Data, Volume III, Analysis of Covariance. Chapman&Hall / CRC, New York.

Montgomery, D.C. 2000. Design and Analysis of Experiments, 5th Edition. John Wiley & Sons, New York.

Myers, J.L. and Well, A.D. 2003. Research Design and Statistical Analysis, Second Edition, New Jersey.

Oral, E. 2006. Binary Regression with Stochastic Covariates, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Volume 35, pp. 1429-1447.

Puthenpura, S. and Sinha, N.K. 1986. Modified maximum likelihood method for the robust estimation of system parameters from very noisy data. *Automatica*, Volume 22 pp. 231-235.

Rohatgi, V.K., 1976. An Introduction to Probability Theory Mathematical Statistics. Wiley, New York.

Rencher, A.C. and Schaalje, G.B. 2008. Linear Models in Statistics, Second Edition. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

Sahai, H and Ageel, M.I. 2000. The Analysis of Variance: Fixed, Random and Mixed Models. Birkhauser, Boston.

Sazak, H.S. 2003. Estimation and Hypothesis Testing in Stochastic Regression, Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sazak, H.S., Tiku, M.L. and Islam, M.Q. 2006. Regression analysis with a stochastic design variable, *International Statistical Review*, Volume 74, 1, pp. 77-88.

Sengupta, D. and Jammalamadaka, S.R. 2003. Linear Models: An Integrated Approach. World Scientific, New Jersey.

Silknitter, K.O., Wisnowski, J.W. and Montgomery, D.C. 1999. The Analysis of Covariance: A Useful Technique for Analysing Quality Improvement Experiments, *Quality and Reliability Engineering International*, Volume 15, pp. 303-316.

Şenoğlu, B. 2007a. Estimating parameters in one-way analysis of covariance model with short-tailed symmetric error distributions, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Volume 201, pp. 275-283.

Şenoğlu, B. 2007b. Robust estimation and hypothesis testing of linear contrasts in analysis of covariance with stochastic covariates, *Journal of Applied Statistics*, Volume 34, Number 2, pp. 141-151.

Şenoğlu B. ve Acıtaş, Ş. 2010. İstatistiksel Deney Tasarımı: Sabit Etkili Modeller, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Şenoğlu, B. and Avcıoğlu, M.D. 2009. Analysis of Covariance with Non-normal Errors, *International Statistical Review*, Volume 77, Number 3, pp. 366-377.

Tiku, M.L. 1967. Estimating the mean and standard deviation from a censored normal sample. *Biometrika*, Volume 54, pp. 155-165.

Tiku, M.L. and Kumra, S. 1985. Expected values and variances and covariances of ordered statistics for Students t distribution with two degrees of freedom, *J. Stat. Comput. Simul.* Volume 21, pp. 391-404.

Tiku, M.L., Tan W.Y. and Balakrishnan, N. 1986. Robust Inference. New York, Marcel Dekker.

Tiku, M.L. and Kambo, N.S. 1992. Estimation and hypothesis testing for a new family of bivariate nonnormal distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Volume 21, Number 6, pp. 1683-1705.

Tiku, M.L. and Suresh, R.P. 1992. A new method of estimation for location and scale parameters. *J. Statistical Planning and Inference*, Volume 30, pp. 281-292.

Tiku, M.L., Islam, M.Q. and Selçuk, A.S. 2001. Nonnormal regression.II. Symmetric distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Volume 30 Number 6, pp. 1021-1045.

Tiku, M.L. and Akkaya, A.D. 2004. Robust Estimation and Hypothesis Testing. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Tiku, M.L., Islam, M.Q. and Sazak, H.S. 2008. Estimation in bivariate non-normal distributions with stochastic variance functions. *Computational Statistics & Data Analysis*, Volume 52, pp. 1728-1745.

Tiku, M.L. and Akkaya, A.D. 2010. Estimation in multifactor polynomial regression under non-normality, *Pakistan Journal of Statistics*, Volume 26, Number 1, pp. 49-68.

Vaughan, D.C. 1992. On the Tiku-Suresh method of estimation, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, Volume 21, pp. 451-469.

Vaughan, D.C. and Tiku, M.L. 2000. Estimation and hypothesis testing for a nonnormal bivariate distribution with applications. *J. Mathematical and Computer Modelling* Volume 32, Number 1, pp. 53-67.

Weber, D.C. and Skillings, J.H. 2000. A First Course in the Design of Experiments: A Linear Models Approach. CRC Press LLC, New York.

Yandell, B.S. 1997. Practical Data Analysis for Designed Experiments. Chapman & Hall, London.

EKLER

EK 1 Bir ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu}_{2MML}$ ve $\hat{\mu}_{2M}$'in Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, deneme sayısı $c = 3$

EK 2 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_{y,i}$ ve $\hat{\mu}_{y,i}$'nın Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, $p = 2$, $\rho = 0.5$ ve $c = 3$

EK 3 Ortak değişken ve hata terimlerinin şekil parametreleri p_1 ve p_2 olan LTS dağılımına sahip olduğu durum için MATLAB dilinde yazılan program

EK 4 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA'da ortak değişkenin GL ve Hata Terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için MATLAB dilinde yazılan program

EK 1 Bir ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu}_{2MML}$ ve $\hat{\mu}_{2M}$'in Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, deneme sayısı $c = 3$

					$\rho = 0.2$				
n	$p_1 = p_2 = 2$	$p_1 = p_2 = 3.5$	$p_1 = p_2 = 5$	$p_1 = 2, p_2 = 3.5$	$p_1 = 3.5, p_2 = 2$	$p_1 = 2, p_2 = 5$	$p_1 = 5, p_2 = 2$	$p_1 = 3.5, p_2 = 5$	$p_1 = 5, p_2 = 3.5$
10 LS	0.0986	0.1010	0.1003	0.0995	0.0959	0.1001	0.0951	0.0996	0.0983
MML	0.0596	0.0903	0.0961	0.0882	0.0605	0.0955	0.0597	0.0955	0.0880
M	0.1059	0.1035	0.1013	0.1054	0.0973	0.1082	0.0955	0.1015	0.0997
15 LS	0.0630	0.0669	0.0664	0.0668	0.0628	0.0652	0.0675	0.0667	0.0670
MML	0.0376	0.0592	0.0633	0.0589	0.0382	0.0613	0.0394	0.0632	0.0591
M	0.0680	0.0683	0.0668	0.0722	0.0643	0.0713	0.0686	0.0687	0.0682
20 LS	0.0498	0.0507	0.0512	0.0504	0.0514	0.0497	0.0492	0.0497	0.0494
MML	0.0279	0.0445	0.0481	0.0431	0.0280	0.0462	0.0288	0.0471	0.0436
M	0.0539	0.0516	0.0520	0.0545	0.0518	0.0540	0.0495	0.0513	0.0499
					$\rho = 0.5$				
10 LS	0.1013	0.0997	0.1002	0.0982	0.0996	0.0988	0.0980	0.1012	0.0981
MML	0.0593	0.0901	0.0957	0.0818	0.0663	0.0862	0.0678	0.0950	0.0899
M	0.0975	0.0991	0.1001	0.0943	0.0971	0.0950	0.0977	0.0997	0.0980
15 LS	0.0645	0.0657	0.0677	0.0657	0.0656	0.0667	0.0631	0.0667	0.0663
MML	0.0381	0.0583	0.0638	0.0540	0.0437	0.0572	0.0436	0.0619	0.0597
M	0.0603	0.0653	0.0673	0.0633	0.0649	0.0639	0.0629	0.0656	0.0661
20 LS	0.0508	0.0509	0.0498	0.0495	0.0480	0.0507	0.0480	0.0498	0.0505
MML	0.0282	0.0443	0.0469	0.0394	0.0318	0.0421	0.0324	0.0465	0.0445
M	0.0484	0.0505	0.0497	0.0475	0.0474	0.0471	0.0478	0.0497	0.0504

EK 1 Bir ortak değişkenli bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_2$, $\hat{\mu}_{2MML}$ ve $\hat{\mu}_{2M}$ 'in Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, deneme sayısı $c = 3$ (devam)

	$\rho = 0.8$								
n	$\beta_1 = \beta_2 = 2$	$\beta_1 = \beta_2 = 3.5$	$\beta_1 = \beta_2 = 5$	$\beta_1 = 2, \beta_2 = 3.5$	$\beta_1 = 3.5, \beta_2 = 2$	$\beta_1 = 2, \beta_2 = 5$	$\beta_1 = 5, \beta_2 = 2$	$\beta_1 = 3.5, \beta_2 = 5$	$\beta_1 = 5, \beta_2 = 3.5$
10 LS	0.0952	0.1014	0.1021	0.1051	0.0980	0.0969	0.0977	0.0980	0.0985
MML	0.0578	0.0899	0.0972	0.0706	0.0786	0.0718	0.0820	0.0894	0.0917
M	0.0754	0.0947	0.0988	0.0744	0.0916	0.0738	0.0950	0.0913	0.0958
15 LS	0.0658	0.0687	0.0671	0.0659	0.0646	0.0678	0.0665	0.0672	0.0651
MML	0.0383	0.0606	0.0639	0.0461	0.0505	0.0478	0.0541	0.0611	0.0603
M	0.0488	0.0637	0.0651	0.0494	0.0597	0.0498	0.0648	0.0628	0.0636
20 LS	0.0637	0.0509	0.0507	0.0495	0.0507	0.0487	0.0501	0.0496	0.0507
MML	0.0279	0.0440	0.0476	0.0332	0.0380	0.0343	0.0404	0.0447	0.0467
M	0.0363	0.0467	0.0492	0.0364	0.0466	0.0363	0.0483	0.0461	0.0490

EK 2 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenlerin GL ve hata terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durumda $\tilde{\mu}_{y,i}$ ve $\hat{\mu}_{y,i}$ 'nın Monte Carlo simülasyonu yardımıyla elde edilen varyans değerleri, $p = 2$, $\rho_{21} = 0.5$ ve $c = 3$

					$p = 3$			
n		$b_1 = b_2 = 0.5$	$b_1 = 0.5\,, b_2 = 1$	$b_1 = 1\,, b_2 = 0.5$	$b_1 = b_2 = 1$	$b_1 = 4\,, b_2 = 2$	$b_1 = 2\,, b_2 = 4$	$b_1 = 4\,, b_2 = 4$
10	LS	2.5240	1.9112	1.3858	1.0435	1.6316	1.2756	1.8940
	MML	2.9166	2.4715	1.5681	1.1030	0.8852	0.8578	0.8790
15	LS	1.6681	1.2915	0.9088	0.7210	1.0695	0.8558	1.2473
	MML	2.1225	1.7595	1.0494	0.7859	0.5972	0.5866	0.5773
20	LS	1.2425	0.9980	0.7059	0.5451	0.8133	0.6259	0.9319
	MML	1.6334	1.3776	0.8305	0.5859	0.4302	0.4349	0.4342
					$p = 3.5$			
10	LS	2.4477	1.9456	1.3992	1.0883	1.6381	1.2995	1.9508
	MML	3.0545	2.5581	1.5664	1.1527	0.8992	0.8946	0.8998
15	LS	1.6636	1.2900	0.9186	0.7170	1.0650	0.8574	1.2720
	MML	2.0811	1.7778	1.0501	0.7724	0.5725	0.5907	0.5712
20	LS	1.2545	0.9734	0.6972	0.5416	0.8099	0.6269	0.9351
	MML	1.6100	1.3645	0.8178	0.5885	0.4224	0.4457	0.4255
					$p = 5$			
10	LS	2.5189	1.9667	1.4052	1.0878	1.7468	1.3058	1.9836
	MML	3.0102	2.5551	1.5735	1.1421	0.9249	0.8727	0.9170
15	LS	1.6985	1.3206	0.9456	0.7200	1.0785	0.8632	1.2542
	MML	2.1137	1.7827	1.0939	0.7803	0.5860	0.5882	0.5966
20	LS	1.2694	1.0092	0.7013	0.5384	0.8227	0.6320	0.9448
	MML	1.6350	1.3530	0.8109	0.5986	0.4352	0.4368	0.4353

EK 3 Bir ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişken ve hata terimlerinin şekil parametreleri p_1 ve p_2 olan LTS dağılımına sahip olduğu durum için MATLAB dilinde yazılan program

```
sim=10000
c=3; n=input ('n değerini giriniz:');  ro=input ('ro değerini giriniz:');
sigma1=1; sigma2=1; Teta=ro*(sigma2/sigma1); sigma21=sigma2*(sqrt(1-ro^2));
M1=0; M2=0; M21=M2-Teta*M1;
d=input ('d değerini giriniz:');
syc1=0; syc2=0; syc3=0;
p1=input ('p1 değerini giriniz:'); p2=input ('p2 değerini giriniz:'); k1=2*p1-3;     k2=2*p2-3;


* β1 in tam değerleri

if  n==10 & p1==2
c1=[-1.45972429 -0.74943029 -0.45394719 -0.25068692 -0.08058994 0.08058994 0.25068692
0.45394719 0.74943029 1.45972429];
end
if  n==10 & p1==3.5
c1=[-1.55511142 -0.92182131 -0.58390393 -0.32907908 -0.10669103 0.10669103 0.32907908
0.58390393 0.92182131 1.55511142];
end
if  n==10 & p1==5
c1=[-1.55406762 -0.95470841 -0.61224767 -0.34706469 -0.11279904 0.11279904 0.34706469
0.61224767 0.95470841 1.55406762];
end
if  n==10 & p1==10
c1=[-1.54730471 -0.98185667 -0.63712034 -0.36320907 -0.11833041 0.11833041 0.36320907
0.63712034 0.98185667 1.54730471];
end
if  n==15 & p1==2
c1=[-1.74937845 -0.98025337 -0.68102658 -0.48976976 -0.34327477 -0.21930586 -0.10708621 0
0.10708621 0.21930586 0.34327477 0.48976976 0.68102658 0.98025337 1.74937845];
 end
if  n==15 & p1==3.5
c1=[-1.79952120 -1.17340523 -0.85782598 -0.63361011 -0.45121075 -0.29104555 -0.14285973 0
0.14285973 0.29104555 0.45121075 0.63361011 0.85782598 1.17340523 1.79952120];
end
if  n==15 & p1==5
c1=[-1.78134334 -1.20596224 -0.89403571 -0.66539211 -0.47603630 -0.30792675 -0.15137927 0
0.15137927 0.30792675 0.47603630 0.66539211 0.89403571 1.20596224 1.78134334];
end
if  n==15 & p1==10
c1=[-1.75793951 -1.23110910 -0.92487670 -0.69342944 -0.49834107 -0.32325177 -0.15915562 0
0.15915562 0.32325177 0.49834107 0.69342944 0.92487670 1.23110910 1.75793951];
end
if  n==20 & p1==2
c1=[-1.97308558 -1.15077149 -0.84116182 -0.64965650 -0.50811345 -0.39307184 -0.29370447 -
0.20403522 -0.12028596 -0.03975447 0.03975447 0.12028596 0.20403522 0.29370447 0.39307184
0.50811345 0.64965650 0.84116182 1.15077149 1.97308558];
end
if  n==20 & p1==3.5
```

```
c1=[-1.97471399 -1.34682796 -1.03949136 -0.82707716 -0.65925175 -0.51659666 -0.38945618 -
0.27219102 -0.16107057 -0.05333010 0.05333010 0.16107057 0.27219102 0.38945618 0.51659666
0.65925175 0.82707716 1.03949136 1.34682796 1.97471399];
end
if  n==20 & p1==5
c1=[-1.94029898 -1.37543222 -1.07742613 -0.86450261 -0.69286217 -0.54498241 -0.41193810 -
0.28842050 -0.17086609 -0.05660399 0.05660399 0.17086609 0.28842050 0.41193810 0.54498241
0.69286217 0.86450261 1.07742613 1.37543222 1.94029898];
end
if  n==20 & p1==10
c1=[-1.90159237 -1.39557979 -1.10864521 -0.89679877 -0.72258986 -0.57047125 -0.43232559 -
0.30323310 -0.17984158 -0.05960941 0.05960941 0.17984158 0.30323310 0.43232559 0.57047125
0.72258986 0.89679877 1.10864521 1.39557979 1.90159237];
end
```

* α_1 ve β_1 değerlerinin hesaplanması

```
if  p1<3
   for j=1:n
Alfa1(j)=((c1(j)^3)/k1)/(1+((c1(j)^2)/k1))^2;
   end
   for j=1:n
b1(j)=1/(1+((c1(j)^2)/k1))^2;
   end
else
   for j=1:n
b1(j)=(1-(c1(j)^2/k1))/(1+((c1(j)^2)/k1))^2;
   end
   for j=1:n
Alfa1(j)=((2*(c1(j)^3))/k1)/(1+((c1(j)^2)/k1))^2;
   end
end

m1=sum(b1);
```

* β_2 nin tam değerleri

```
if  n==10 & p2==2
c2=[-1.45972429 -0.74943029 -0.45394719 -0.25068692 -0.08058994 0.08058994 0.25068692
0.45394719 0.74943029 1.45972429];
end
if  n==10 & p2==3.5
c2=[-1.55511142 -0.92182131 -0.58390393 -0.32907908 -0.10669103 0.10669103 0.32907908
0.58390393 0.92182131 1.55511142];
if  n==10 & p2==5
c2=[-1.55406762 -0.95470841 -0.61224767 -0.34706469 -0.11279904 0.11279904 0.34706469
0.61224767 0.95470841 1.55406762];
end
if  n==10 & p2==10
c2=[-1.54730471 -0.98185667 -0.63712034 -0.36320907 -0.11833041 0.11833041 0.36320907
0.63712034 0.98185667 1.54730471];
end
if  n==15 & p2==2
c2=[-1.74937845 -0.98025337 -0.68102658 -0.48976976 -0.34327477 -0.21930586 -0.10708621 0
0.10708621 0.21930586 0.34327477 0.48976976 0.68102658 0.98025337 1.74937845];
end
if  n==15 & p2==3.5
```

```
c2=[-1.79952120 -1.17340523 -0.85782598 -0.63361011 -0.45121075 -0.29104555 -0.14285973 0
0.14285973 0.29104555 0.45121075 0.63361011 0.85782598 1.17340523 1.79952120];
end
if  n==15 & p2==5
c2=[-1.78134334 -1.20596224 -0.89403571 -0.66539211 -0.47603630 -0.30792675 -0.15137927 0
0.15137927 0.30792675 0.47603630 0.66539211 0.89403571 1.20596224 1.78134334];
end
if  n==15 & p2==10
c2=[-1.75793951 -1.23110910 -0.92487670 -0.69342944 -0.49834107 -0.32325177 -0.15915562 0
0.15915562 0.32325177 0.49834107 0.69342944 0.92487670 1.23110910 1.75793951];
end
if  n==20 & p2==2
c2=[-1.97308558 -1.15077149 -0.84116182 -0.64965650 -0.50811345 -0.39307184 -0.29370447 -
0.20403522 -0.12028596 -0.03975447 0.03975447 0.12028596 0.20403522 0.29370447 0.39307184
0.50811345 0.64965650 0.84116182 1.15077149 1.97308558];
end
if  n==20 & p2==3.5
c2=[-1.97471399 -1.34682796 -1.03949136 -0.82707716 -0.65925175 -0.51659666 -0.38945618 -
0.27219102 -0.16107057 -0.05333010 0.05333010 0.16107057 0.27219102 0.38945618 0.51659666
0.65925175 0.82707716 1.03949136 1.34682796 1.97471399];
end
if  n==20 & p2==5
c2=[-1.94029898 -1.37543222 -1.07742613 -0.86450261 -0.69286217 -0.54498241 -0.41193810 -
0.28842050 -0.17086609 -0.05660399 0.05660399 0.17086609 0.28842050 0.41193810 0.54498241
0.69286217 0.86450261 1.07742613 1.37543222 1.94029898];
end
if  n==20 & p2==10
c2=[-1.90159237 -1.39557979 -1.10864521 -0.89679877 -0.72258986 -0.57047125 -0.43232559 -
0.30323310 -0.17984158 -0.05960941 0.05960941 0.17984158 0.30323310 0.43232559 0.57047125
0.72258986 0.89679877 1.10864521 1.39557979 1.90159237];
end
```

* α_2 ve β_2 değerlerinin hesaplanması

```
if p2<3
   for j=1:n
Alfa2(j)=((c2(j)^3)/k2)/(1+((c2(j)^2)/k2))^2;.
   end
   for j=1:n
b2(j)=1/(1+((c2(j)^2)/k2))^2;
   end
else
   for j=1:n
Alfa2(j)=((2*(c2(j)^3))/k2)/(1+((c2(j)^2)/k2))^2;
   end
   for j=1:n
b2(j)=(1-((c2(j)^2)/k2))/(1+((c2(j)^2)/k2))^2;
   end
end

m2=sum(b2);
```

* Simülasyonla elde edilen varyans değerleri

```
if  n==10 & p1==2 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.1013;
   vMu2mml=0.0593;
   vMu2m=0.0975;
```

```
end
if  n==10 & p1==3.5 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0997;
   vMu2mml=0.0901;
   vMu2m=0.0991;
end
if  n==10 & p1==5 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.1002;
   vMu2mml=0.0957;
   vMu2m=0.1001;
end
if  n==10 & p1==2 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0982;
   vMu2mml=0.0818;
   vMu2m=0.0943;
end
if  n==10 & p1==3.5 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0996;
   vMu2mml=0.0663;
   vMu2m=0.0971;
end
if  n==10 & p1==2 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0988;
   vMu2mml=0.0862;
   vMu2m=0.0950;
end
if  n==10 & p1==5 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0980;
   vMu2mml=0.0678;
   vMu2m=0.0977;
end
if  n==10 & p1==3.5 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.1012;
   vMu2mml=0.0950;
   vMu2m=0.0997;
end
if  n==10 & p1==5 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0981;
   vMu2mml=0.0899;
   vMu2m=0.0980;
end
if  n==15 & p1==2 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0645;
   vMu2mml=0.0381;
   vMu2m=0.0603;
end
if  n==15 & p1==3.5 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0657;
   vMu2mml=0.0583;
   vMu2m=0.0653;
end
if  n==15 & p1==5 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0677;
   vMu2mml=0.0638;
   vMu2m=0.0673;
end
if  n==15 & p1==2 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0657;
```

```
   vMu2mml=0.0540;
   vMu2m=0.0633;
end
if  n==15 & p1==3.5 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0656;
   vMu2mml=0.0437;
   vMu2m=0.0649;
end
if  n==15 & p1==2 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0667;
   vMu2mml=0.0572;
   vMu2m=0.0639;
end
if  n==15 & p1==5 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0631;
   vMu2mml=0.0436;
   vMu2m=0.0629;
end
if  n==15 & p1==3.5 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0667;
   vMu2mml=0.0619;
   vMu2m=0.0656;
end
if  n==15 & p1==5 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0663;
   vMu2mml=0.0597;
   vMu2m=0.0661;
end
if  n==20 & p1==2 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0508;
   vMu2mml=0.0282;
   vMu2m=0.0484;
end
if  n==20 & p1==3.5 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0509;
   vMu2mml=0.0443;
   vMu2m=0.0505;
end
if  n==20 & p1==5 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0498;
   vMu2mml=0.0469;
   vMu2m=0.0497;
end
if  n==20 & p1==2 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0495;
   vMu2mml=0.0394;
   vMu2m=0.0475;
end
if  n==20 & p1==3.5 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0480;
   vMu2mml=0.0318;
   vMu2m=0.0474;
end
if  n==20 & p1==2 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0507;
   vMu2mml=0.0421;
   vMu2m=0.0471;
end
```

```
if  n==20 & p1==5 & p2==2 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0480;
   vMu2mml=0.0324;
   vMu2m=0.0478;
end
if  n==20 & p1==3.5 & p2==5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0498;
   vMu2mml=0.0465;
   vMu2m=0.0497;
end
if  n==20 & p1==5 & p2==3.5 & ro==0.5
   vMu2ls=0.0505;
   vMu2mml=0.0445;
   vMu2m=0.0504;
end
```

* Ortak değişken ve hata terimleri için LTS dağılımına sahip verilerin elde edilmesi

```
for k=1:sim
t1=trnd(2*p1-1,n,c);
a1=sqrt((2*p1-3)/(2*p1-1));
z=t1*a1*sigma1;

t2=trnd(2*p2-1,n,c);
a2=sqrt((2*p2-3)/(2*p2-1));
a=t2*a2*sigma2;
e=a*sigma21;
```

* Hata terimleri için aykırı değer modelinin elde edilmesi

```
r=floor(0.5+0.1*n);
for j=1:r
e(j,:)=sqrt(2)*e(j,:);
end
```

* Hata terimleri için karma modelinin elde edilmesi

```
u=unifrnd(0,1,n,c);
for j=1:n
for i=1:c
if u(j,i)>0.90
e(j,i)=sqrt(2)*e(j,i);
else
e(j,i)=e(j,i);
end
end
end
```

* Hata terimleri için bulaşık modelin elde edilmesi

```
u=unifrnd(0,1,n,c);
for j=1:n
for i=1:c
if u(j,i)>0.90
e(j,i)=unifrnd(-sqrt(3),sqrt(3));
else
e(j,i)=e(j,i);
end
```

```
end
end

x1=M1+sigma1*z;
y1=M21+Teta*x1+e;
x=[x1(:,1)+d x1(:,2)-2*d x1(:,3)+d];
y=[y1(:,1)+d y1(:,2)-2*d y1(:,3)+d];
```

* Ortak değişken için aykırı değer modelinin elde edilmesi

```
r=floor(0.5+0.1*n);
for j=1:r
x(j,:)=2*x(j,:);
end
```

* Ortak değişken için karma modelin elde edilmesi

```
u=unifrnd(0,1,n,c);
for j=1:n
for i=1:c
if u(j,i)>0.90
x(j,i)=2*x(j,i);
else
x(j,i)=x(j,i);
end
end
end
```

* Ortak değişken için bulaşık modelin elde edilmesi

```
u=unifrnd(0,1,n,c);
for j=1:n
for i=1:c
if u(j,i)>0.90
x(j,i)=unifrnd(-sqrt(3),sqrt(3));
else
x(j,i)=x(j,i);
end
end
end
```

* LS İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

```
for j=1:c
xorrt(j)=mean(x(:,j));
end

for j=1:c
yorrt(j)=mean(y(:,j));
end
```

* μ_1 in hesaplanması

```
M11LS(k)=xorrt(1);
M12LS(k)=xorrt(2);
M13LS(k)=xorrt(3);
```

* μ_2 'nin hesaplanması

```
M21LS(k)=yorrt(1);
M22LS(k)=yorrt(2);
M23LS(k)=yorrt(3);

MLS(k)=(M21LS(k)+M22LS(k)+M23LS(k))/c;

* σ1 in hesaplanması
xf1=x(:,1)-xorrt(1);
xf2=x(:,2)-xorrt(2);
xf3=x(:,3)-xorrt(3);

S1=sum((xf1).^2)+sum((xf2).^2)+sum((xf3).^2);
sigma1LS(k)=sqrt(S1/(c*n-c));

* θ nın hesaplanması
yf1=y(:,1)-yorrt(1);
yf2=y(:,2)-yorrt(2);
yf3=y(:,3)-yorrt(3);

T1=(yf1'*xf1)+(yf2'*xf2)+(yf3'*xf3);
TetaLS(k)=T1/S1;

* μ2.1 in hesaplanması
M211LS(k)=yorrt(1)-TetaLS(k)*xorrt(1);
M212LS(k)=yorrt(2)-TetaLS(k)*xorrt(2);
M213LS(k)=yorrt(3)-TetaLS(k)*xorrt(3);

* σ2.1 'in hesaplanması
sigma21LS(k)=sqrt((sum((yf1-TetaLS(k)*xf1).^2)+sum((yf2-TetaLS(k)*xf2).^2)
+sum((yf3-TetaLS(k)*xf3).^2))/(c*n-c-1));

sigma2LS(k)=sqrt(sigma21LS(k).^2+TetaLS(k).^2*sigma1LS(k)^2);
roLS(k)=TetaLS(k)*(sigma1LS(k)/sigma2LS(k));


* MML İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

* μ1 in hesaplanması

Mu1=(b1*sort(x,1))/m1;
Mu11MML(k)=Mu1(1);
Mu12MML(k)=Mu1(2);
Mu13MML(k)=Mu1(3);

* σ1 'in hesaplanması

N=c*n;
B1=((2*p1)/k1)*sum(Alfa1*sort(x,1));
if n==10
Mu1MML=[Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1];
end
if n==15
Mu1MML=[Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1];
end
if n==20
```

```
Mu1MML=[Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;Mu1;
Mu1;Mu1;Mu1];
end
C1=((2*p1)/k1)*sum(b1*((sort(x,1)-Mu1MML).^2));
sigmaa1=(B1+sqrt(B1^2+4*N*C1))/(2*sqrt(N*(N-c)));
sigma1MML(k)=sigmaa1;

*Concominantların hesaplanması

W=(y-(TetaLS(k))*x);
W1=[W(:,1) y(:,1) x(:,1)];  W2=[W(:,2) y(:,2) x(:,2)];  W3=[W(:,3) y(:,3) x(:,3)];
WW1=sortrows(W1);  WW2=sortrows(W2);  WW3=sortrows(W3);
ycon=[WW1(:,2) WW2(:,2) WW3(:,2)];  xcon=[WW1(:,3) WW2(:,3) WW3(:,3)];
yort=(b2*ycon)/m2;

if n==10
 yortt=[yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort];
end
if n==15
yortt=[yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort];
end
if n==20
yortt=[yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort;yort];
end
K2=(b2*xcon)/m2;

if n==10
K22=[K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2];
end
if n==15
K22=[K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2];
end
if n==20
K22=[K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2;K2];
end
```

* $\sigma_{2.1}$ in hesaplanması

```
K=sum(b2*((xcon-K22).*(ycon-yortt)))/sum(b2*(xcon-K22).^2);
B2=(2*p2/k2)*sum(Alfa2*((ycon-yortt)-K*(xcon-K22)));
C2=(2*p2/k2)*sum(b2*((ycon-yortt)-K*(xcon-K22)).^2);
sigmaa21=(B2+sqrt(B2^2+4*N*C2))/(2*sqrt(N*(N-c-1)));
sigma21MML(k)=sigmaa21;
```

* θ nın hesaplanması

```
D=sum(Alfa2*(xcon-K22))/sum(b2*(xcon-K22).^2);
TetaMML(k)=K+D*sigma21MML(k);

*Concominantların MML tahmin edicisi ile yeniden hesaplanması (1.kez)

Wbr=(y-(TetaMML(k))*x);
W11=[Wbr(:,1) y(:,1) x(:,1)];
W21=[Wbr(:,2) y(:,2) x(:,2)];
W31=[Wbr(:,3) y(:,3) x(:,3)];
WW11=sortrows(W11);
WW21=sortrows(W21);
WW31=sortrows(W31);
```

```
ycon1=[WW11(:,2) WW21(:,2) WW31(:,2)];
xcon1=[WW11(:,3) WW21(:,3) WW31(:,3)];
yort1=(b2*ycon1)/m2;
if n==10
yortt1=[yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1];
end
if n==15
yortt1=[yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;
yort1];
end
if n==20
yortt1=[yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yort1;yo
rt1;yort1;yort1;yort1];
end
K21=(b2*xcon1)/m2;
if n==10
K221=[K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21];
end
if n==15
K221=[K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21];
end
if n==20
K221=[K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K21;K2
1];
end
```

* $\sigma_{2.1}$ in hesaplanması

```
Kbr=sum(b2*((xcon1-K221).*(ycon1-yortt1)))/sum(b2*(xcon1-K221).^2);
B21=(2*p2/k2)*sum(Alfa2*((ycon1-yortt1)-Kbr*(xcon1-K221)));
C21=(2*p2/k2)*sum(b2*((ycon1-yortt1)-Kbr*(xcon1-K221)).^2);
sigmaa211=(B21+sqrt(B21^2+4*N*C21))/(2*sqrt(N*(N-c-1)));
sigma21MML1(k)=sigmaa211;
```

* θ nın hesaplanması

```
Dbr=sum(Alfa2*(xcon1-K221))/sum(b2*(xcon1-K221).^2);
TetaMML1(k)=Kbr+Dbr*sigma21MML1(k);
```

*Concominantların MML tahmin edicisi ile yeniden hesaplanması (2.kez)

```
Wiki=(y-(TetaMML1(k))*x);
W12=[Wiki(:,1) y(:,1) x(:,1)];
W22=[Wiki(:,2) y(:,2) x(:,2)];
W32=[Wiki(:,3) y(:,3) x(:,3)];
WW12=sortrows(W12);
WW22=sortrows(W22);
WW32=sortrows(W32);
ycon2=[WW12(:,2) WW22(:,2) WW32(:,2)];
xcon2=[WW12(:,3) WW22(:,3) WW32(:,3)];
yort2=(b2*ycon2)/m2;

if n==10
   yortt2=[yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2];
end
if n==15
yortt2=[yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2];
end
```

```
if n==20
yortt2=[yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yort2;yo
rt2;yort2;yort2;yort2];
end
K2k=(b2*xcon2)/m2;

if n==10
K222=[K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k];
end
if n==15
K222=[K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k];
end
if n==20
K222=[K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2k;K2
k];
end
```

* $\sigma_{2.1}$ in hesaplanması

```
Kiki=sum(b2*((xcon2-K222).*(ycon2-yortt2)))/sum(b2*(xcon2-K222).^2);
B22=(2*p2/k2)*sum(Alfa2*((ycon2-yortt2)-Kiki*(xcon2-K222)));
C22=(2*p2/k2)*sum(b2*((ycon2-yortt2)-Kiki*(xcon2-K222)).^2);
sigmaa212=(B22+sqrt(B22^2+4*N*C22))/(2*sqrt(N*(N-c-1)));
sigma21MML2(k)=sigmaa212;
```

* θ nın hesaplanması

```
D2=sum(Alfa2*(xcon2-K222))/sum(b2*(xcon2-K222).^2);
TetaMML2(k)=Kiki+D2*sigma21MML2(k);
```

* σ_2 nin hesaplanması

```
sigma2MML(k)=sqrt(sigma21MML2(k).^2+TetaMML2(k).^2*sigma1MML(k).^2');
```

* $\mu_{2.1}$ in hesaplanması

```
Mu21MML(k,:)=yort2-TetaMML2(k)*K2k;
Mu211MML=Mu21MML(:,1);
Mu212MML=Mu21MML(:,2);
Mu213MML=Mu21MML(:,3);

MuMML21(k)=Mu211MML(k)+TetaMML2(k).*Mu11MML(k);
MuMML22(k)=Mu212MML(k)+TetaMML2(k).*Mu12MML(k);
MuMML23(k)=Mu213MML(k)+TetaMML2(k).*Mu13MML(k);

MMML(k)=(MuMML21(k)+MuMML22(k)+MuMML23(k))/3;
roMML(k)=TetaMML2(k)*(sigma1MML(k)/sigma2MML(k));

*M İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

*Başlangıç değerleri

Mu11int=M11LS(k);
Mu12int=M12LS(k);
Mu13int=M13LS(k);

Mu21int=M21LS(k);
```

```
Mu22int=M22LS(k);
Mu23int=M23LS(k);

Mu211int=M211LS(k);
Mu212int=M212LS(k);
Mu213int=M213LS(k);

sigma1int=sigma1LS(k);
Tetaint=TetaLS(k);
sigma21int=sigma21LS(k);
sigma2int=sigma2LS(k);
roint=roLS(k);

z1=(x(:,1)-Mu11int)/sigma1int;
z2=(x(:,2)-Mu12int)/sigma1int;
z3=(x(:,3)-Mu13int)/sigma1int;

for  j=1:n

waw1(j)=(2*p1)/(k1+z1(j).^2);
waw2(j)=(2*p1)/(k1+z2(j).^2);
waw3(j)=(2*p1)/(k1+z3(j).^2);

end
```

* μ_1 in hesaplanması

```
Mu1M1son=(waw1*x(:,1))/sum(waw1);
Mu1M2son=(waw2*x(:,2))/sum(waw2);
Mu1M3son=(waw3*x(:,3))/sum(waw3);
```

* μ_2 nin hesaplanması

```
Mu2M1son=(waw1*y(:,1))/sum(waw1);
Mu2M2son=(waw2*y(:,2))/sum(waw2);
Mu2M3son=(waw3*y(:,3))/sum(waw3);
```

* σ_1 in hesaplanması

```
sigma1son=sqrt((waw1*((x(:,1)-Mu1M1son).^2)+waw2*((x(:,2)-Mu1M2son).^2)+waw3*((x(:,3)-
Mu1M3son).^2))/(N-c));
```

* γ_i lerin hesaplanması

```
aa1=(y(:,1)-Mu211int-Tetaint*x(:,1))/sigma21int;
aa2=(y(:,2)-Mu212int-Tetaint*x(:,2))/sigma21int;
aa3=(y(:,3)-Mu213int-Tetaint*x(:,3))/sigma21int;

for j=1:n

gamma1(j)=(2*p2)/(k2+aa1(j).^2);
gamma2(j)=(2*p2)/(k2+aa2(j).^2);
gamma3(j)=(2*p2)/(k2+aa3(j).^2);

end
xortMg1=(gamma1*x(:,1))/sum(gamma1);
xortMg2=(gamma2*x(:,2))/sum(gamma2);
xortMg3=(gamma3*x(:,3))/sum(gamma3);
```

```
yortMg1=(gamma1*y(:,1))/sum(gamma1);
yortMg2=(gamma2*y(:,2))/sum(gamma2);
yortMg3=(gamma3*y(:,3))/sum(gamma3);

xmf1=x(:,1)-xortMg1;
xmf2=x(:,2)-xortMg2;
xmf3=x(:,3)-xortMg3;

ymf1=y(:,1)-yortMg1;
ymf2=y(:,2)-yortMg2;
ymf3=y(:,3)-yortMg3;

Tm=gamma1*(ymf1'*xmf1)+gamma2*(ymf2'*xmf2)+gamma3*(ymf3'*xmf3);
Sm=gamma1*sum(xmf1.^2)+gamma2*sum(xmf2.^2)+gamma3*sum(xmf3.^2);
Tetason=Tm/Sm;

sigma21son=sqrt((gamma1*(ymf1-Tetason*xmf1).^2+gamma2*(ymf2-
Tetason*xmf2).^2+gamma3*(ymf3-Tetason*xmf3).^2)/(N-c-1));

sigma2son=sqrt(sigma21son^2+Tetason^2*sigma1son^2);

Mu211son=yortMg1-Tetason*xortMg1;
Mu212son=yortMg2-Tetason*xortMg2;
Mu213son=yortMg3-Tetason*xortMg3;

roson=Tetason*(sigma1son/sigma2son);
Fark=[Mu1M1son-Mu11int;Mu1M2son-Mu12int;Mu1M3son-Mu13int;sigma1son-sigma1int;Tetason-
Tetaint;sigma21son-sigma21int;Mu211son-Mu211int;Mu212son-Mu212int;Mu213son-Mu213int;roson-
roint;sigma2son-sigma2int;Mu2M1son-Mu21int;Mu2M2son-Mu22int;Mu2M3son-Mu23int];
NF=norm(Fark);

sayac=0;
while NF>0.001
sayac=sayac+1;

 z1=(x(:,1)-Mu1M1son)/sigma1son;
 z2=(x(:,2)-Mu1M2son)/sigma1son;
 z3=(x(:,3)-Mu1M3son)/sigma1son;

 for j=1:n

 waw1(j)=(2*p1)/(k1+z1(j).^2);
 waw2(j)=(2*p1)/(k1+z2(j).^2);
 waw3(j)=(2*p1)/(k1+z3(j).^2);

 end

 Mu1M1son1=(waw1*x(:,1))/sum(waw1);
 Mu1M2son1=(waw2*x(:,2))/sum(waw2);
 Mu1M3son1=(waw3*x(:,3))/sum(waw3);

 Mu2M1son1=(waw1*y(:,1))/sum(waw1);
 Mu2M2son1=(waw2*y(:,2))/sum(waw2);
 Mu2M3son1=(waw3*y(:,3))/sum(waw3);

 sigma1son1=sqrt((waw1*((x(:,1)-Mu1M1son1).^2)+
 waw2*((x(:,2)-Mu1M2son1).^2)+waw3*((x(:,3)-Mu1M3son1).^2))/(N-c));
```

```
aa1=(y(:,1)-Mu211son-Tetason*x(:,1))/sigma21son;
aa2=(y(:,2)-Mu212son-Tetason*x(:,2))/sigma21son;
aa3=(y(:,3)-Mu213son-Tetason*x(:,3))/sigma21son;

for j=1:n

gamma1(j)=(2*p2)/(k2+aa1(j).^2);
gamma2(j)=(2*p2)/(k2+aa2(j).^2);
gamma3(j)=(2*p2)/(k2+aa3(j).^2);

end

xortMg1=(gamma1*x(:,1))/sum(gamma1);
xortMg2=(gamma2*x(:,2))/sum(gamma2);
xortMg3=(gamma3*x(:,3))/sum(gamma3);

yortMg1=(gamma1*y(:,1))/sum(gamma1);
yortMg2=(gamma2*y(:,2))/sum(gamma2);
yortMg3=(gamma3*y(:,3))/sum(gamma3);

xmf1=x(:,1)-xortMg1;
xmf2=x(:,2)-xortMg2;
xmf3=x(:,3)-xortMg3;
ymf1=y(:,1)-yortMg1;
ymf2=y(:,2)-yortMg2;
ymf3=y(:,3)-yortMg3;

Sm1=gamma1*sum(xmf1.^2)+gamma2*sum(xmf2.^2)+gamma3*sum(xmf3.^2);
Tm1=gamma1*(ymf1'*xmf1)+gamma2*(ymf2'*xmf2)+gamma3*(ymf3'*xmf3);

Tetason1=Tm1/Sm1;
sigma21son1=sqrt((gamma1*(ymf1-Tetason1*xmf1).^2+
gamma2*(ymf2-Tetason1*xmf2).^2+gamma3*(ymf3-Tetason1*xmf3).^2)/(N-c-1));

sigma2son1=sqrt(sigma21son1^2+Tetason1^2*sigma1son1^2);
Mu211son1=yortMg1-Tetason1*xortMg1;
Mu212son1=yortMg2-Tetason1*xortMg2;
Mu213son1=yortMg3-Tetason1*xortMg3;

roson1=Tetason1*(sigma1son1/sigma2son1);

Mu11int=Mu1M1son;
Mu12int=Mu1M2son;
Mu13int=Mu1M3son;

Mu1M1son=Mu1M1son1;
Mu1M2son=Mu1M2son1;
Mu1M3son=Mu1M3son1;

Mu21int=Mu2M1son;
Mu22int=Mu2M2son;
Mu23int=Mu2M3son;

Mu2M1son=Mu2M1son1;
Mu2M2son=Mu2M2son1;
Mu2M3son=Mu2M3son1;

sigma1int=sigma1son;
```

```
 sigma1son=sigma1son1;

 Tetaint=Tetason;
 Tetason=Tetason1;

 sigma21int=sigma21son;
 sigma21son=sigma21son1;
 sigma2int=sigma2son;
 sigma2son=sigma2son1;

 Mu211int=Mu211son;
 Mu212int=Mu212son;
 Mu213int=Mu213son;

 Mu211son=Mu211son1;
 Mu212son=Mu212son1;
Mu213son=Mu213son1;

 roint=roson;
 roson=roson1;

Fark=[Mu1M1son-Mu11int;Mu1M2son-Mu12int;Mu1M3son-Mu13int; sigma1son-sigma1int;
      Tetason-Tetaint;sigma21son-sigma21int;Mu211son- Mu211int;Mu212son-Mu212int;
      Mu213son-Mu213int;roson-roint;sigma2son-sigma2int;Mu2M1son-Mu21int;
      Mu2M2son-Mu22int;Mu2M3son-Mu23int];

NF=norm(Fark);

 muintLS(sayac,:)=Mu11int;
 musonLS(sayac,:)=Mu1M1son;
sigma1intLS(sayac,:)=sigma1int;
 sigma1sonLS(sayac,:)=sigma1son;
 tetaintLS(sayac,:)=Tetaint;
 tetasonLS(sayac,:)=Tetason;

 FarkLS(sayac,:)=norm(Fark);

end
sycls (k,:)=sayac;

Mu11Mest(k)=Mu1M1son;
Mu12Mest(k)=Mu1M2son;
 Mu13Mest(k)=Mu1M3son;

 Mu21Mest(k)=Mu2M1son;
 Mu22Mest(k)=Mu2M2son;
 Mu23Mest(k)=Mu2M3son;

 sigma1Mest(k)=sigma1son;
TetaMest(k)=Tetason;
 sigma21Mest(k)=sigma21son;

Mu211Mest(k)=Mu211son;
Mu212Mest(k)=Mu212son;
Mu213Mest(k)=Mu213son;

roMest(k)=roson;
sigma2Mest(k)=sigma2son;
```

```
*Tablo değerlerinin hesaplanması

alfa=0.05;
ttablo=norminv(1-alfa/2);

*Test istatistiği

 tLS(k)=(M21LS(k)-2*M22LS(k)+M23LS(k))/sqrt(6*vMu2ls);
 tMML(k)=(MuMML21(k)-2*MuMML22(k)+MuMML23(k))/sqrt(6*vMu2mml);
 tM(k)=(Mu21Mest(k)-2*Mu22Mest(k)+Mu23Mest(k))/sqrt(6*vMu2m);

if abs(tLS(k))>ttablo;
syc1=syc1+1;
end
 if abs(tMML(k))>ttablo;
syc2=syc2+1;
end
if abs(tM(k))>ttablo;
syc3=syc3+1;
end
end
```

EK 4 Birden fazla ortak değişkene sahip bir-yönlü ANCOVA modelinde ortak değişkenin GL ve Hata Terimlerinin LTS dağılımına sahip olduğu durum için MATLAB dilinde yazılan program

```
sim=10000
f=3;
n=input('Gözlem sayısı n değerini giriniz:');
N=f*n; M11=0;M12=0;M13=0; sigma1=1; M21=0; M22=0;M23=0; sigma2=1; ro21=0.5;
teta21=(sigma2/sigma1)*ro21; to1=0;to2=0;to3=0;gamma1=1; gamma2=1; sigma=1;
M211=M21-teta21*M11; M212=M22-teta21*M12; M213=M23-teta21*M13;
sigma21=sqrt(sigma2^2*(1-ro21^2));
q=2;
p=input('p değerini giriniz:');
b1=input('b1 değerini giriniz:');
b2=input('b2 değerini giriniz:');
k=2*p-3;

*Psi fonksiyonlarının hesaplanması

fib1=psi(b1);
fitrb1=psi(1,b1);
fib2=psi(b2);
fitrb2=psi(1,b2);

fi1=-0.5772;
fitr1=1.6449;

*Genelleştirilmiş Lojistik dağılıma sahip ortak değişkenler için t lerin elde edilmesi

for j=1:n
qu(j)=j/(n+1);
end

t1=-log((qu.^(-1/b1))-1);
t2=-log((qu.^(-1/b2))-1);

* Ortak Değişkenler için GL dağılımının tablo değerleri kullanılarak α1 ve β1 değerlerinin hesaplanması

for j=1:n
  Alfa11(j)=(1+exp(t1(j))+(t1(j)*exp(t1(j))))/((1+exp(t1(j)))^2);
  Beta11(j)=exp(t1(j))/((1+exp(t1(j)))^2);
  Alfa21(j)=(1+exp(t2(j))+(t2(j)*exp(t2(j))))/((1+exp(t2(j)))^2);
  Beta21(j)=exp(t2(j))/((1+exp(t2(j)))^2);
  Delt1(j)=Alfa11(j)-(1/(b1+1));
  Delt2(j)=Alfa21(j)-(1/(b2+1));
end

m1=sum(Beta11);
m2=sum(Beta21);

Delta1=sum(Delt1);
Delta2=sum(Delt2);

dibeta=diag(Beta21);
```

```
didelta=diag(Delt2);

*LTS Dağılımına sahip hata terimleri için tablo değerlerinin hesaplanması

for j=1:n
qu(j)=j/(n+1);
c(j)=tinv(qu(j),2*p-1)*sqrt((2*p-3)/(2*p-1));
end

*LTS dağılımına sahip hata terimleri için α ve β değerlerinin hesaplanması

for j=1:n
Beta(j)=(1-(c(j)^2/k))/(1+(c(j)^2/k))^2;
end
for j=1:n
Alfa(j)=((2*c(j)^3)/k)/(1+(c(j)^2/k))^2;
end

if Beta(1)<0
for j=1:n
Alfa(j)=(c(j)^3/k)/(1+(c(j)^2/k))^2;
 end
 for j=1:n
Beta(j)=1/(1+(c(j)^2/k))^2;
 end
end

m=sum(Beta);
diBetaLTS=diag(Beta);
diAlfaLTS=diag(Alfa);

if n==10
bir=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
end
if n==15
bir=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
end
if n==20
bir=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
end
if n==30
bir=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 
```

```
a12=unifrnd(0,1,n,1);
a13=unifrnd(0,1,n,1);

a21=unifrnd(0,1,n,1);
a22=unifrnd(0,1,n,1);
a23=unifrnd(0,1,n,1);

w11=-log(a11.^(-1/b1)-1);
w12=-log(a12.^(-1/b1)-1);
w13=-log(a13.^(-1/b1)-1);

w21=-log(a21.^(-1/b2)-1);
w22=-log(a22.^(-1/b2)-1);
w23=-log(a23.^(-1/b2)-1);

x11=M11+sigma1*w11;
x12=M12+sigma1*w12;
x13=M13+sigma1*w13;
```

* X_1 ortak değişkeni için aykırı değer modelinin elde edilmesi

```
r=floor(0.5+0.1*n);
for j=1:r
x11(j)=2*x11(j);
x12(j)=2*x12(j);
x13(j)=2*x13(j);
end

x21=M211+teta21*x11+w21*sigma21;
x22=M212+teta21*x12+w22*sigma21;
x23=M213+teta21*x13+w23*sigma21;
```

* X_2 ortak değişkeni için aykırı değer modelinin elde edilmesi

```
r=floor(0.5+0.1*n);
for j=1:r
x21(j)=2*x21(j);
x22(j)=2*x22(j);
x23(j)=2*x23(j);
end

*LTS dağılımına sahip verileri üretmek

tt1=trnd(2*p-1,n,1);
tt2=trnd(2*p-1,n,1);
tt3=trnd(2*p-1,n,1);

aa=sqrt((2*p-3)/(2*p-1));
e1=tt1*aa;
e2=tt2*aa;
e3=tt3*aa;

*Hata terimleri için aykırı değer modelinin elde edilmesi

r=floor(0.5+0.1*n);
```

```
for j=1:r
e1(j)=2*e1(j);
e2(j)=2*e2(j);
e3(j)=2*e3(j);
end
```

*Hata terimleri için bulaşık modelin elde edilmesi

```
u1=unifrnd(0,1,n,1);
u2=unifrnd(0,1,n,1);
u3=unifrnd(0,1,n,1);

for j=1:n
if u1(j)>0.90
e1(j)=unifrnd(-0.5,0.5);
else
e1(j)=e1(j);
end
if u2(j)>0.90
e2(j)=unifrnd(-0.5,0.5);
else
e2(j)=e2(j);
end
if u3(j)>0.90
e3(j)=unifrnd(-0.5,0.5);
else
e3(j)=e3(j);
end
end
```

*Hata terimleri için karma modelin elde edilmesi

```
u1=unifrnd(0,1,n,1);
u2=unifrnd(0,1,n,1);
u3=unifrnd(0,1,n,1);

for j=1:n

if u1(j)>0.90
e1(j)=2*e1(j);
else
e1(j)=e1(j);
end

if u2(j)>0.90
e2(j)=2*e2(j);
else
e2(j)=e2(j);
end

if u3(j)>0.90
e3(j)=2*e3(j);
else
e3(j)=e3(j);
end
end
```

```
u11=(x11-M11)/sigma1;
u12=(x12-M12)/sigma1;
u13=(x13-M13)/sigma1;

u21=(x21-M21)/sigma2;
u22=(x22-M22)/sigma2;
u23=(x23-M23)/sigma2;

y1=to1+gamma1*u11+gamma2*u21+e1;
y2=to2+gamma1*u12+gamma2*u22+e2;
y3=to3+gamma1*u13+gamma2*u23+e3;

*PARAMETRELERİN LS YÖNTEMİ İLE TAHMİNİ

x11ort=mean(x11);
x12ort=mean(x12);
x13ort=mean(x13);

x21ort=mean(x21);
x22ort=mean(x22);
x23ort=mean(x23);

bX11=x11-x11ort;
bX12=x12-x12ort;
bX13=x13-x13ort;

bX21=x21-x21ort;
bX22=x22-x22ort;
bX23=x23-x23ort;

tetaL21=inv((bX11'*bX11)+(bX12'*bX12)+(bX13'*bX13))*((bX11'*bX21)+(bX12'*bX22)+(bX13'*bX
23));
tetaLS21(i)=tetaL21;

sigm1LS=sqrt((bX11'*bX11)+(bX12'*bX12)+(bX13'*bX13))/sqrt((N-f)*(fitrb1+fitr1));
sigma1LS(i)=sigm1LS;

Mu11L=x11ort-((fib1-fi1)*sigm1LS);
Mu12L=x12ort-((fib1-fi1)*sigm1LS);
Mu13L=x13ort-((fib1-fi1)*sigm1LS);

Mu11LS(i)=Mu11L;
Mu12LS(i)=Mu12L;
Mu13LS(i)=Mu13L;
 sigma21L=sqrt(sum((bX21-(tetaL21*bX11)).^2+(bX22-(tetaL21*bX12)).^2+(bX23-
(tetaL21*bX13)).^2))/sqrt((N-f-1)*(fitrb2+fitr1));
sigma21LS(i)=sigma21L;
 sigm2LS=sqrt((sigma21L^2)+((tetaL21^2)*(sigm1LS^2)));
sigma2LS(i)=sigm2LS;

Mu211L=x21ort-(tetaL21*x11ort)-((fib2-fi1)*sigma21L);
Mu212L=x22ort-(tetaL21*x12ort)-((fib2-fi1)*sigma21L);
Mu213L=x23ort-(tetaL21*x13ort)-((fib2-fi1)*sigma21L);
Mu211LS(i)=Mu211L;
```

```
Mu212LS(i)=Mu212L;
Mu213LS(i)=Mu213L;

Mu21L=Mu211L+(tetaL21*Mu11L);
Mu22L=Mu212L+(tetaL21*Mu12L);
Mu23L=Mu213L+(tetaL21*Mu13L);

Mu21LS(i)=Mu21L;
Mu22LS(i)=Mu22L;
Mu23LS(i)=Mu23L;

ro21L=tetaL21*(sigm1LS/sigm2LS);
ro21LS(i)=ro21L;

*MODEL PARAMETRELERİNİN LS TAHMİN EDİCİLERİ

y1ort=mean(y1);
y2ort=mean(y2);
y3ort=mean(y3);
bY1=y1-y1ort;
bY2=y2-y2ort;
bY3=y3-y3ort;

u11L=(x11-Mu11L)/sigm1LS;
u12L=(x12-Mu12L)/sigm1LS;
u13L=(x13-Mu13L)/sigm1LS;

u21L=(x21-Mu21L)/sigm2LS;
u22L=(x22-Mu22L)/sigm2LS;
u23L=(x23-Mu23L)/sigm2LS;

u11ortLS=mean(u11L);
u12ortLS=mean(u12L);
u13ortLS=mean(u13L);

u21ortLS=mean(u21L);
u22ortLS=mean(u22L);
u23ortLS=mean(u23L);

U11LS=u11L-u11ortLS;
U12LS=u12L-u12ortLS;
U13LS=u13L-u13ortLS;

U21LS=u21L-u21ortLS;
U22LS=u22L-u22ortLS;
U23LS=u23L-u23ortLS;

* γ değerlerinin hesaplanması

deter=(U11LS'*U11LS+U12LS'*U12LS+U13LS'*U13LS)*(U21LS'*U21LS+U22LS'*U22LS+U23LS'*
U23LS)-(U11LS'*U21LS+U12LS'*U22LS+U13LS'*U23LS)^2;
Gamm1LS=((U21LS'*U21LS+U22LS'*U22LS+U23LS'*U23LS)*(U11LS'*bY1+U12LS'*bY2+U13LS'
*bY3)-
(U11LS'*U21LS+U12LS'*U22LS+U13LS'*U23LS)*(U21LS'*bY1+U22LS'*bY2+U23LS'*bY3))/deter;
Gamma1LS(i)=Gamm1LS;
```

```
Gamm2LS=((-
(U11LS'*U21LS+U12LS'*U22LS+U13LS'*U23LS))*(U11LS'*bY1+U12LS'*bY2+U13LS'*bY3)+(U11
LS'*U11LS+U12LS'*U12LS+U13LS'*U13LS)*(U21LS'*bY1+U22LS'*bY2+U23LS'*bY3))/deter;
Gamma2LS(i)=Gamm2LS;

tou1LS=y1ort-Gamm1LS*u11ortLS-Gamm2LS*u21ortLS;
tou2LS=y2ort-Gamm1LS*u12ortLS-Gamm2LS*u22ortLS;
tou3LS=y3ort-Gamm1LS*u13ortLS-Gamm2LS*u23ortLS;

to1LS(i)=tou1LS;
to2LS(i)=tou2LS;
to3LS(i)=tou3LS;

sigmLS=sqrt(sum((bY1-(Gamm1LS*U11LS)-(Gamm2LS*U21LS)).^2+(bY2-(Gamm1LS*U12LS)-
(Gamm2LS*U22LS)).^2+(bY3-(Gamm1LS*U13LS)-(Gamm2LS*U23LS)).^2))/sqrt(N-f-2);
sigmaLS(i)=sigmLS;

* PARAMETRELERİN MML YÖNTEMİ İLE TAHMİNİ

*Concomitantların hesaplanması

*1. deneme için concomitantlar

ww1=x21-(tetaLS21(i)*x11);
V1=[ww1 x11 x21];
A1=sortrows(V1);
kx11con=A1(:,2);
kx21con=A1(:,3);

xort111=(Beta11*sort(x11))/m1;
xort121=(Beta21*kx11con)/m2;
xort221=(Beta21*kx21con)/m2;

X111con=sort(x11)-xort111;
X11con=kx11con-xort121;
X21con=kx21con-xort221;

*2. deneme için concomitantlar

ww2=x22-(tetaLS21(i)*x12);
V2=[ww2 x12 x22];
A2=sortrows(V2);
kx12con=A2(:,2);
kx22con=A2(:,3);

xort112=(Beta11*sort(x12))/m1;
xort122=(Beta21*kx12con)/m2;
xort222=(Beta21*kx22con)/m2;

X112con=sort(x12)-xort112;
X12con=kx12con-xort122;
X22con=kx22con-xort222;

*3. deneme için concomitantlar
```

```
ww3=x23-(tetaLS21(i)*x13);
V3=[ww3 x13 x23];
A3=sortrows(V3);
kx13con=A3(:,2);
kx23con=A3(:,3);

xort113=(Beta11*sort(x13))/m1;
xort123=(Beta21*kx13con)/m2;
xort223=(Beta21*kx23con)/m2;

X113con=sort(x13)-xort113;
X13con=kx13con-xort123;
X23con=kx23con-xort223;
```

* $\sigma_{2.1}$ in hesaplanması

```
K21=inv(((X11con'*dibeta)*X11con)+((X12con'*dibeta)*X12con)+((X13con'*dibeta)*X13con))*(((X11
con'*dibeta)*X21con)+((X12con'*dibeta)*X22con)+((X13con'*dibeta)*X23con));
B2=(b2+1)*(Delt2*((X21con-(K21*X11con))+(X22con-(K21*X12con))+(X23con-(K21*X13con))));
C2=(b2+1)*(Beta21*((X21con-(K21*X11con)).^2+(X22con-(K21*X12con)).^2+(X23con-
(K21*X13con)).^2));
sigma21MM=(-B2+sqrt(B2^2+4*N*C2))/(2*sqrt(N*(N-f-1)));
sigma21MML(i)=sigma21MM;
```

* θ_{21} in hesaplanması

```
D21=inv(((X11con'*dibeta)*X11con)+((X12con'*dibeta)*X12con)+((X13con'*dibeta)*X13con))*(((X11
con'*didelta)*bir')+((X12con'*didelta)*bir')+((X13con'*didelta)*bir'));

Teta21MM=K21-(D21*sigma21MM);
Teta21MML(i)=Teta21MM;

*Concomitantların hesaplanması  (1.kez)

*1. deneme için concomitantlar

ww11=x21-(Teta21MML(i)*x11);
V11=[ww11 x11 x21];
A11=sortrows(V11);
kx11con1=A11(:,2);
kx21con1=A11(:,3);

xort1111=(Beta11*sort(x11))/m1;
xort1211=(Beta21*kx11con1)/m2;
xort2211=(Beta21*kx21con1)/m2;

X111con1=sort(x11)-xort1111;
X11con1=kx11con1-xort1211;
X21con1=kx21con1-xort2211;

*2. deneme için concomitantlar

ww21=x22-(tetaLS21(i)*x12);
V21=[ww21 x12 x22];
A21=sortrows(V21);
```

```
kx12con1=A21(:,2);
kx22con1=A21(:,3);

xort1121=(Beta11*sort(x12))/m1;
xort1221=(Beta21*kx12con1)/m2;
xort2221=(Beta21*kx22con1)/m2;

X112con1=sort(x12)-xort1121;
X12con1=kx12con1-xort1221;
X22con1=kx22con1-xort2221;

*3. deneme için concomitantlar

ww31=x23-(tetaLS21(i)*x13);
V31=[ww31 x13 x23];
A31=sortrows(V31);
kx13con1=A31(:,2);
kx23con1=A31(:,3);

xort1131=(Beta11*sort(x13))/m1;
xort1231=(Beta21*kx13con1)/m2;
xort2231=(Beta21*kx23con1)/m2;

X113con1=sort(x13)-xort1131;
X13con1=kx13con1-xort1231;
X23con1=kx23con1-xort2231;

* σ2.1 in hesaplanması

K211=inv(((X11con1'*dibeta)*X11con1)+((X12con1'*dibeta)*X12con1)+((X13con1'*dibeta)*X13con1)
)*(((X11con1'*dibeta)*X21con1)+((X12con1'*dibeta)*X22con1)+((X13con1'*dibeta)*X23con1));
B21=(b2+1)*(Delt2*((X21con1-(K211*X11con1))+(X22con1-(K211*X12con1))+(X23con1-
(K211*X13con1))));
C21=(b2+1)*(Beta21*((X21con1-(K211*X11con1)).^2+(X22con1-(K211*X12con1)).^2+(X23con1-
(K211*X13con1)).^2));
sigma21MM1=(-B21+sqrt(B21^2+4*N*C21))/(2*sqrt(N*(N-f-1)));
sigma21MML1(i)=sigma21MM1;

* θ21 in hesaplanması

D211=inv(((X11con1'*dibeta)*X11con1)+((X12con1'*dibeta)*X12con1)+((X13con1'*dibeta)*X13con1)
)*(((X11con1'*didelta)*bir')+((X12con1'*didelta)*bir')+((X13con1'*didelta)*bir'));

Teta21MM1=K211-(D211*sigma21MM1);
Teta21MML1(i)=Teta21MM1;

*Concomitantların hesaplanması ( 2.kez)

*1. deneme için concomitantlar

ww12=x21-(Teta21MML1(i)*x11);
V12=[ww12 x11 x21];
A12=sortrows(V12);
kx11con2=A12(:,2);
kx21con2=A12(:,3);
```

```
xort1112=(Beta11*sort(x11))/m1;
xort1212=(Beta21*kx11con2)/m2;
xort2212=(Beta21*kx21con2)/m2;

X111con2=sort(x11)-xort1112;
X11con2=kx11con2-xort1212;
X21con2=kx21con2-xort2212;

*2. deneme için concomitantlar

ww22=x22-(tetaLS21(i)*x12);
V22=[ww22 x12 x22];
A22=sortrows(V22);
kx12con2=A22(:,2);
kx22con2=A22(:,3);

xort1122=(Beta11*sort(x12))/m1;
xort1222=(Beta21*kx12con2)/m2;
xort2222=(Beta21*kx22con2)/m2;

X112con2=sort(x12)-xort1122;
X12con2=kx12con2-xort1222;
X22con2=kx22con2-xort2222;

*3. deneme için concomitantlar

ww32=x23-(tetaLS21(i)*x13);
V32=[ww32 x13 x23];
A32=sortrows(V32);
kx13con2=A32(:,2);
kx23con2=A32(:,3);

xort1132=(Beta11*sort(x13))/m1;
xort1232=(Beta21*kx13con2)/m2;
xort2232=(Beta21*kx23con2)/m2;

X113con2=sort(x13)-xort1132;
X13con2=kx13con2-xort1232;
X23con2=kx23con2-xort2232;
```

* $\sigma_{2.1}$ in hesaplanması

```
K212=inv(((X11con2'*dibeta)*X11con2)+((X12con2'*dibeta)*X12con2)+((X13con2'*dibeta)*X13con2)
)*(((X11con2'*dibeta)*X21con2)+((X12con2'*dibeta)*X22con2)+((X13con2'*dibeta)*X23con2));
B22=(b2+1)*(Delt2*((X21con2-(K212*X11con2))+(X22con2-(K212*X12con2))+(X23con2-
(K212*X13con2))));
C22=(b2+1)*(Beta21*((X21con2-(K212*X11con2)).^2+(X22con2-(K212*X12con2)).^2+(X23con2-
(K212*X13con2)).^2));
sigma21MM2=(-B22+sqrt(B22^2+4*N*C22))/(2*sqrt(N*(N-f-1)));
sigma21MML2(i)=sigma21MM2;
```

* θ_{21} in hesaplanması

```
D212=inv(((X11con2'*dibeta)*X11con2)+((X12con2'*dibeta)*X12con2)+((X13con2'*dibeta)*X13con2)
)*(((X11con2'*didelta)*bir')+((X12con2'*didelta)*bir')+((X13con2'*didelta)*bir'));

Teta21MM2=K212-(D212*sigma21MM2);
Teta21MML2(i)=Teta21MM2;
```

* σ_1 in hesaplanması

```
B1=(b1+1)*(Delt1*(X111con2+X112con2+X113con2));
C1=(b1+1)*(Beta11*(X111con2.^2+X112con2.^2+X113con2.^2));
sigma1MM=(-B1+sqrt(B1^2+4*N*C1))/(2*sqrt(N*(N-f)));
sigma1MML(i)=sigma1MM;
```

* μ_1 in hesaplanması

```
Mu11MM=xort1112-((Delta1/m1)*sigma1MM);
Mu12MM=xort1122-((Delta1/m1)*sigma1MM);
Mu13MM=xort1132-((Delta1/m1)*sigma1MM);

Mu11MML(i)=Mu11MM;
Mu12MML(i)=Mu12MM;
Mu13MML(i)=Mu13MM;
```

* σ_2 nin hesaplanması

```
sigma2MM=sqrt((sigma21MM2^2)+((Teta21MM2^2)*(sigma1MM^2)));
sigma2MML(i)=sigma2MM;
```

* ρ_{21} in hesaplanması

```
ro21MM=(sigma1MM/sigma2MM)*Teta21MM2;
ro21MML(i)=ro21MM;
```

* $\mu_{2.1}$ in hesaplanması

```
Mu211MM=xort2212-(Teta21MM2*xort1212)-((Delta2/m2)*sigma21MM2);
Mu212MM=xort2222-(Teta21MM2*xort1222)-((Delta2/m2)*sigma21MM2);
Mu213MM=xort2232-(Teta21MM2*xort1232)-((Delta2/m2)*sigma21MM2);

Mu211MML(i)=Mu211MM;
Mu212MML(i)=Mu212MM;
Mu213MML(i)=Mu213MM;
```

* μ_2 nin hesaplanması

```
Mu21MM=Mu211MM+(Teta21MM2*Mu11MM);
Mu22MM=Mu212MM+(Teta21MM2*Mu12MM);
Mu23MM=Mu213MM+(Teta21MM2*Mu13MM);

M21MML(i)=Mu21MM;
M22MML(i)=Mu22MM;
M23MML(i)=Mu23MM;
 *MODEL PARAMETRELERİ İÇİN MML TAHMİN EDİCİLERİ
```

```
* model parametreleri için concomitantlar
*1. deneme için concomitantlar

zm1=y1-(Gamma1LS(i)*x11)-(Gamma2LS(i)*x21);
V4=[zm1 y1 x11 x21];
A4=sortrows(V4);
ky1con=A4(:,2);
x11conmml=A4(:,3);
x21conmml=A4(:,4);

u11MML=(x11conmml-Mu11MM)/sigma1MM;
u21MML=(x21conmml-Mu21MM)/sigma2MM;

u11ort=(Beta*u11MML)/m;
u21ort=(Beta*u21MML)/m;
y1ortcon=(Beta*ky1con)/m;

Y1con=ky1con-y1ortcon;
U11con=u11MML-u11ort;
U21con=u21MML-u21ort;

*2. deneme için concomitantlar

zm2=y2-(Gamma1LS(i)*x12)-(Gamma2LS(i)*x22);
V5=[zm2 y2 x12 x22];
A5=sortrows(V5);
ky2con=A5(:,2);
x12conmml=A5(:,3);
x22conmml=A5(:,4);

u12MML=(x12conmml-Mu12MM)/sigma1MM;
u22MML=(x22conmml-Mu22MM)/sigma2MM;

u12ort=(Beta*u12MML)/m;
u22ort=(Beta*u22MML)/m;
y2ortcon=(Beta*ky2con)/m;

Y2con=ky2con-y2ortcon;
U12con=u12MML-u12ort;
U22con=u22MML-u22ort;

*3. deneme için concomitantlar

zm3=y3-(Gamma1LS(i)*x13)-(Gamma2LS(i)*x23);
V6=[zm3 y3 x13 x23];
A6=sortrows(V6);
ky3con=A6(:,2);
x13conmml=A6(:,3);
x23conmml=A6(:,4);

u13MML=(x13conmml-Mu13MM)/sigma1MM;
u23MML=(x23conmml-Mu23MM)/sigma2MM;

u13ort=(Beta*u13MML)/m;
```

```
u23ort=(Beta*u23MML)/m;
y3ortcon=(Beta*ky3con)/m;

Y3con=ky3con-y3ortcon;
U13con=u13MML-u13ort;
U23con=u23MML-u23ort;

* σ nın hesaplanması

UMML1=[U11con U21con];
UMML2=[U12con U22con];
UMML3=[U13con U23con];

Ka=inv(((UMML1'*diBetaLTS)*UMML1)+((UMML2'*diBetaLTS)*UMML2)+((UMML3'*diBetaLTS)
*UMML3))*(((UMML1'*diBetaLTS)*Y1con)+((UMML2'*diBetaLTS)*Y2con)+((UMML3'*diBetaLTS
)*Y3con));
De=inv(((UMML1'*diBetaLTS)*UMML1)+((UMML2'*diBetaLTS)*UMML2)+((UMML3'*diBetaLTS)
*UMML3))*(((UMML1'*diAlfaLTS)*bir')+((UMML2'*diAlfaLTS)*bir')+((UMML3'*diAlfaLTS)*bir'))
;
K1=Ka(1);
K2=Ka(2);

D1=De(1);
D2=De(2);

Bb1=Y1con-(K1*U11con)-(K2*U21con);
Bb2=Y2con-(K1*U12con)-(K2*U22con);
Bb3=Y3con-(K1*U13con)-(K2*U23con);

B=((2*p)/k)*(Alfa*(Bb1+Bb2+Bb3));
C=((2*p)/k)*(Beta*(Bb1.^2+Bb2.^2+Bb3.^2));

sigmaaMM=(B+sqrt(B^2+4*N*C))/(2*sqrt(N*(N-f-2)));
sigmaMML(i)=sigmaaMM;

GammaMML=Ka+De*sigmaaMM;
Gamma1MM=GammaMML(1);
Gamma2MM=GammaMML(2);
Gamma1MML(i)=Gamma1MM;
Gamma2MML(i)=Gamma2MM;

*Model parametreleri için concomitantlar ( 1.kez)

*1. deneme için concomitantlar

zm11=y1-(Gamma1MML(i)*x11)-(Gamma2MML(i)*x21);
V41=[zm11 y1 x11 x21];
A41=sortrows(V41);
ky1con1=A41(:,2);
x11conmml1=A41(:,3);
x21conmml1=A41(:,4);

u11MML1=(x11conmml1-Mu11MM)/sigma1MM;
u21MML1=(x21conmml1-Mu21MM)/sigma2MM;
```

```
u11ort1=(Beta*u11MML1)/m;
u21ort1=(Beta*u21MML1)/m;
y1ortcon1=(Beta*ky1con1)/m;

Y1con1=ky1con1-y1ortcon1;
U11con1=u11MML1-u11ort1;
U21con1=u21MML1-u21ort1;

*2. deneme için concomitantlar

zm21=y2-(Gamma1MML(i)*x12)-(Gamma2MML(i)*x22);
V51=[zm21 y2 x12 x22];
A51=sortrows(V51);
ky2con1=A51(:,2);
x12conmml1=A51(:,3);
x22conmml1=A51(:,4);

u12MML1=(x12conmml1-Mu12MM)/sigma1MM;
u22MML1=(x22conmml1-Mu22MM)/sigma2MM;

u12ort1=(Beta*u12MML1)/m;
u22ort1=(Beta*u22MML1)/m;
y2ortcon1=(Beta*ky2con1)/m;

Y2con1=ky2con1-y2ortcon1;
U12con1=u12MML1-u12ort1;
U22con1=u22MML1-u22ort1;

*3. deneme için concomitantlar

zm31=y3-(Gamma1MML(i)*x13)-(Gamma2MML(i)*x23);
V61=[zm31 y3 x13 x23];
A61=sortrows(V61);
ky3con1=A61(:,2);
x13conmml1=A61(:,3);
x23conmml1=A61(:,4);

u13MML1=(x13conmml1-Mu13MM)/sigma1MM;
u23MML1=(x23conmml1-Mu23MM)/sigma2MM;

u13ort1=(Beta*u13MML1)/m;
u23ort1=(Beta*u23MML1)/m;
y3ortcon1=(Beta*ky3con1)/m;

Y3con1=ky3con1-y3ortcon1;
U13con1=u13MML1-u13ort1;
U23con1=u23MML1-u23ort1;

* σ nın hesaplanması

UMML11=[U11con1 U21con1];
UMML21=[U12con1 U22con1];
UMML31=[U13con1 U23con1];
```

```
Ka1=inv(((UMML11'*diBetaLTS)*UMML11)+((UMML21'*diBetaLTS)*UMML21)+((UMML31'*diB
etaLTS)*UMML31))*(((UMML11'*diBetaLTS)*Y1con1)+((UMML21'*diBetaLTS)*Y2con1)+((UMM
L31'*diBetaLTS)*Y3con1));
De1=inv(((UMML11'*diBetaLTS)*UMML11)+((UMML21'*diBetaLTS)*UMML21)+((UMML31'*diB
etaLTS)*UMML31))*(((UMML11'*diAlfaLTS)*bir')+((UMML21'*diAlfaLTS)*bir')+((UMML31'*diAl
faLTS)*bir'));
Kk11=Ka1(1);
Kk21=Ka1(2);

Dd11=De1(1);
Dd21=De1(2);

Bb11=Y1con1-(Kk11*U11con1)-(Kk21*U21con1);
Bb21=Y2con1-(Kk11*U12con1)-(Kk21*U22con1);
Bb31=Y3con1-(Kk11*U13con1)-(Kk21*U23con1);

Bbr=((2*p)/k)*(Alfa*(Bb11+Bb21+Bb31));
Cbr=((2*p)/k)*(Beta*(Bb11.^2+Bb21.^2+Bb31.^2));

sigmaaMM1=(Bbr+sqrt(Bbr^2+4*N*Cbr))/(2*sqrt(N*(N-f-2)));
sigmaMML1(i)=sigmaaMM1;

GammaMML1=Ka1+De1*sigmaaMM1;
Gamma1MM1=GammaMML1(1);
Gamma2MM1=GammaMML1(2);
Gamma1MML1(i)=Gamma1MM1;
Gamma2MML1(i)=Gamma2MM1;

* Model parametreleri için concomitantlar (LTS için) 2.kez

*1. deneme için concomitantlar

zm12=y1-(Gamma1MML1(i)*x11)-(Gamma2MML1(i)*x21);
V42=[zm12 y1 x11 x21];
A42=sortrows(V42);
ky1con2=A42(:,2);
x11conmml2=A42(:,3);
x21conmml2=A42(:,4);

u11MML2=(x11conmml2-Mu11MM)/sigma1MM;
u21MML2=(x21conmml2-Mu21MM)/sigma2MM;

u11ort2=(Beta*u11MML2)/m;
u21ort2=(Beta*u21MML2)/m;
y1ortcon2=(Beta*ky1con2)/m;

Y1con2=ky1con2-y1ortcon2;
U11con2=u11MML2-u11ort2;
U21con2=u21MML2-u21ort2;

*2. deneme için concomitantlar

zm22=y2-(Gamma1MML1(i)*x12)-(Gamma2MML1(i)*x22);
V52=[zm22 y2 x12 x22];
A52=sortrows(V52);
```

```
ky2con2=A52(:,2);
x12conmml2=A52(:,3);
x22conmml2=A52(:,4);

u12MML2=(x12conmml2-Mu12MM)/sigma1MM;
u22MML2=(x22conmml2-Mu22MM)/sigma2MM;

u12ort2=(Beta*u12MML2)/m;
u22ort2=(Beta*u22MML2)/m;
y2ortcon2=(Beta*ky2con2)/m;

Y2con2=ky2con2-y2ortcon2;
U12con2=u12MML2-u12ort2;
U22con2=u22MML2-u22ort2;

*3. deneme için concomitantlar

zm32=y3-(Gamma1MML1(i)*x13)-(Gamma2MML1(i)*x23);
V62=[zm32 y3 x13 x23];
A62=sortrows(V62);
ky3con2=A62(:,2);
x13conmml2=A62(:,3);
x23conmml2=A62(:,4);

u13MML2=(x13conmml2-Mu13MM)/sigma1MM;
u23MML2=(x23conmml2-Mu23MM)/sigma2MM;

u13ort2=(Beta*u13MML2)/m;
u23ort2=(Beta*u23MML2)/m;
y3ortcon2=(Beta*ky3con2)/m;

Y3con2=ky3con2-y3ortcon2;
U13con2=u13MML2-u13ort2;
U23con2=u23MML2-u23ort2;

* σ nın hesaplanması

UMML12=[U11con2 U21con2];
UMML22=[U12con2 U22con2];
UMML32=[U13con2 U23con2];

Ka2=inv(((UMML12'*diBetaLTS)*UMML12)+((UMML22'*diBetaLTS)*UMML22)+((UMML32'*diB
etaLTS)*UMML32))*(((UMML12'*diBetaLTS)*Y1con2)+((UMML22'*diBetaLTS)*Y2con2)+((UMM
L32'*diBetaLTS)*Y3con2));
De2=inv(((UMML12'*diBetaLTS)*UMML12)+((UMML22'*diBetaLTS)*UMML22)+((UMML32'*diB
etaLTS)*UMML32))*(((UMML12'*diAlfaLTS)*bir')+((UMML22'*diAlfaLTS)*bir')+((UMML32'*diAl
faLTS)*bir'));
Kk12=Ka2(1);
Kk22=Ka2(2);

Dd12=De2(1);
Dd22=De2(2);

Bb12=Y1con2-(Kk12*U11con2)-(Kk22*U21con2);
Bb22=Y2con2-(Kk12*U12con2)-(Kk22*U22con2);
```

```
Bb32=Y3con2-(Kk12*U13con2)-(Kk22*U23con2);

Biki=((2*p)/k)*(Alfa*(Bb12+Bb22+Bb32));
Ciki=((2*p)/k)*(Beta*(Bb12.^2+Bb22.^2+Bb32.^2));

sigmaaMM2=(Biki+sqrt(Biki^2+4*N*Ciki))/(2*sqrt(N*(N-f-2)));
sigmaMML2(i)=sigmaaMM2;

GammaMML2=Ka2+De2*sigmaaMM2;
Gamma1MM2=GammaMML2(1);
Gamma2MM2=GammaMML2(2);
Gamma1MML2(i)=Gamma1MM2;
Gamma2MML2(i)=Gamma2MM2;


tou1MM=y1ortcon2-(Gamma1MM2*u11ort2)-(Gamma2MM2*u21ort2);
tou2MM=y2ortcon2-(Gamma1MM2*u12ort2)-(Gamma2MM2*u22ort2);
tou3MM=y3ortcon2-(Gamma1MM2*u13ort2)-(Gamma2MM2*u23ort2);

to1MML(i)=tou1MM;
to2MML(i)=tou2MM;
to3MML(i)=tou3MM;

end
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Pelin KASAP

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 15.08.1979

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Seyranbağları Lisesi / 1993-1996

Lisans : Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü / 1997-2001

Yüksek Lisans: Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı / 2002-2005

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Bölümü / 2002-2006

Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü / 2006-2011

Yayınları (SCI ve diğer):

Altın, A., Şenoğlu, B. ve **Kasap, P.** 2008. Basit rassal örnekleme yönteminde süper evrenin Weibull olması durumunda evren modunun sağlam tahmin edicilerinin karşılaştırılması, VI. İstatistik Günleri Sempozyumu, 27-30 Ağustos 2008, Samsun.

Kasap, P., Ergül, B. and Yavuz, A.A. 2011. Evaluation of Turkey's Hydroelectric Potential By Using Statistical Techniques, *New World Sciences Academy*, Volume 6, Number 3, 59-68.

Kasap, P., Şenoğlu, B., Arslan, O. and Acıtaş, Ş. 2011. Estimating the Location and Scale Parameters of The GT Distribution, *New World Sciences Academy*, Volume 6, Number 3, 103-111.

Şenoğlu, B., Acıtaş, Ş. and **Kasap, P.** 2011. Robust 2^k Factorial Designs: Non-Normal Symmetric Distributions, *Pak. J. Statist*, (Kabul edildi)

Acıtaş, Ş., **Kasap, P.**, Şenoğlu, B. and Arslan, O. 2011. One-Step M estimator for the location parameter of Jones and Faddy's Skewed *t* (JFST) distribution based on MML estimators. The International Conference on Robust Statistics (ICORS 2011), June 27th-July 1st, 2011, Valladolid, Spain.

Acıtaş, Ş., **Kasap, P.**, Şenoğlu, B. and Arslan, O. 2011. Konum parametresinin M tahmin edicisinin farklı başlangıç değerleri için etkinliğinin ve yakınsama hızının karşılaştırılması: LTS dağılımı, Uluslararası 7. İstatistik Kongresi (İSTKON7), 28 Nisan-01 Mayıs 2011, Antalya.