T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

BAHAR UYMAZ

DOKTORATEZİ

TEZ DANIŞMANI: DOÇ.DR. METİN AYDOĞDU
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

2008-EDİRNE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

BAHAR UYMAZ

DOKTORA TEZİ

TEZ DANIŞMANI: Doç.Dr. Metin AYDOĞDU

Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı

EDİRNE

2008

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Bahar UYMAZ

DOKTORA TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Metin AYDOĞDU

2008
EDİRNE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Bahar UYMAZ

DOKTORA TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

Bu tez 22/01/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Metin AYDOĞDU
Danışman

Prof. Dr. H. Erol AKATA

Prof. Dr. Ş. Erol OKAN

Doç. Dr. Taner TIMARCI

Doç. Dr. Erol ŞENOCAK

ÖZET

Doktora Tezi

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Dikdörtgen Plakların
Üç Boyutlu Serbest Titreşim Analizi

T.C.
Trakya Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Bu çalışmada, kalınlığı doğrultusunda malzeme elastik özellikleri fonksiyonel olarak değişen farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakların serbest titreşimi üç boyutlu lineer elastisite teorisi ve Klasik Plak Teorisi çerçevesinde Ritz yöntemi kullan›larak, Klasik Plak Teorisi ve kayma deformasyon teorileri çerçevesinde Navier tipi çözüm yöntemi kullan›larak incelenmiştir.

Ritz yönteminde yer değiştirme bileşenleri olarak Chebyshev polinomları kullanılmıştır. Farklı malzeme bileşimlerinin ve plak geometrisinin (kenar-kenar, kenar-kalınlık oranları), serbest titreşim frekansı üzerindeki etkileri parametrik olarak incelenmiştir.

Tüm kenarları basit destekli fonksiyonel derecelendirilmiş plaklara ait serbest titreşim frekansları klasik ve kayma deformasyon plak teorileri ile elde edilerek üç boyutlu lineer elastisite teorisi sonuçları ile kıyaslanmıştır.

Ritz yöntemiyle 3-boyutlu teoriye göre elde edilen ilk 4 frekansa ait mod şekilleri farklı malzeme bileşimlerinde ele alınan tüm sınır koşulları için verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üç Boyutlu Elastisite Teorisi, Serbest Titreşim, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plak, Ritz Yöntemi, Chebyshev Polinomları, Mod Şekli.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy Dissertation

Three Dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plate

T.C.
Trakya University
Institute of Natural and Applied Sciences
Mechanical Engineering Main Science Department

In this study, the free vibration of rectangular plate which the elastic properties of material varying functionally through the thickness and having different boundary conditions are investigated by Ritz method based on three-dimensional linear elasticity theory and classical plate theory and by Navier method based on classical plate theory and shear deformation theories.

In the Ritz method the displacement components are chosen in the form of the Chebyshev polynomials. Effect of the different material composition and the plate geometry (side-to-side ratios, side-to-thickness ratios) on the free vibration frequencies are investigated as parametrically.

Free vibration frequencies of simply supported functionally graded plates are obtained by classical plate theory and shear deformation plate theories and compared with three dimensional linear elasticity theory.

Using the three dimensional Ritz formulation, sets of first four mode shapes are generated for different material compositions with considered boundary conditions.

Keywords: Three Dimensional Free Vibration, Functionally Graded Plate, Ritz Method, Chebyshev Polynomials, Mod Shapes.

ÖNSÖZ

Yeni nesil mühendislik malzemelerinden biri olan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler derecelendirilmiş yapıları sayesinde ara yüzey problemlerini yenmekte ve yüksek ısıl direnç ve mukavemet sağlamaktadır. Başta ideal malzeme kombinasyonlar› olan seramik ve metal olmak üzere iki farkl› malzemeden oluşan derecelendirilmiş yapı malzeme özelliklerinin konuma bağlı olarak sürekli değişimiyle elde edilmektedir. Malzeme özelliklerindeki değişimin sürekli olmasından dolayı malzeme içerisinde gerilme yığılmaları meydana gelmemektedir. Bu nedenle Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin mekanik davranışlarının belirlenmesi çeşitli mühendislik yapılarının tasarlanmasında ayrı bir önem teşkil etmektedir. Bu çalışmada plakların serbest titreşim analizi gerçeğe en yakın sonuçlar elde edebilmek amac›yla üç boyutlu olarak yap›lmaktad›r.

Doktora tezi danışmanlığımı üstlenerek gerek konu seçimi, gerekse çalışmalarımın yürütülmesi sırasında desteğini ve bilgisini esirgemeyen ve her zaman teşvik edici olan hocam Sayın Doç.Dr. Metin AYDOĞDU'ya teşekkür ederim.

Çalışmam süresince değerli katkılarından dolayı Sayın Doç.Dr. Vahid FERECOV'a ve Yrd.Doç.Dr. Güler AKGÜN'e teşekkür ederim.

Uzun ve yorucu bir süreç olan doktora dönemi süresince gösterdikleri sab›r ve destekleri için sevgili eşime ve biricik oğlum Kerem'e teşekkür ederim.

Eğitim ve öğrenim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen canım anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim.

2007-Kas›m Bahar UYMAZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	xi
ÇİZELGE LİSTESİ	xiv
BÖLÜM 1. GİRİŞ	
1.1. Problem ve Önemi	1
1.2. Önceki Çalışmalar	1
1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	4
BÖLÜM 2. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKLAR	
2.1. Giriş	8
2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler	8
2.3. FDM Plakta Malzeme Özelliklerinin Kalınlık Doğrultusunda Değişimi	10
2.3.1. Kalınlık Doğrultusunda Kuvvet Kanununa Göre Değişim	11
2.3.2. Kalınlık Doğrultusunda Eksponansiyel Değişim	12
2.3.3. Mikro Mekanik Yaklaşım	13
2.3.3.1. Mori-Tanaka Modeli	14
2.3.3.2. Tutarl› Model	15
2.4. Plak Gerilme-Genleme İlişkileri	16
2.5. Plak Teorileri	23
2.5.1. Klasik Plak Teorisi	23
2.5.2. Kayma Deformasyon Teorileri	25
2.5.3. 3-Boyutlu Lineer Elastisite Teorisi	29
2.6. Üç Boyutlu Teoriye Göre Plaklarda Hareket Denklemlerinin Enerji	

Formülasyonu	30
2.7. Sınır Şartları	32
BÖLÜM 3. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ	
3.1. Giriş	34
3.2. Malzeme Özellikleri Eksponansiyel Olarak Değişen Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakta Rijitlik Katsay›lar›	34
3.3. Malzeme Özellikleri Kuvvet Kanununa Göre Değişen Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plakta Rijitlik Katsay›lar›	36
3.4. Serbest Titreşim Probleminin Navier Tipi Yöntem ile Çözümü	42
3.5. Ritz Yönteminin Plakların Titreşim Problemine Uygulanması	50
3.6. Chebyshev Polinomlar›	52
3.7. Serbest Titreşim Probleminin Ritz Yöntemi ile Çözümü	54
3.7.1. Üç Boyutlu Lineer Elastisite Teorisiyle Çözüm	54
3.7.2. Klasik Plak Teorisi ile Çözüm	77
3.8. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plaklarda Mod Şekilleri	82
BÖLÜM 4. GENEL DEĞERLENDİRME	93
KAYNAKLAR	97
EKLER	
EK-A Plak Denklemleri (BKDT)	103
EK-B Chebyshev Polinomlar›	105
EK-C Genel Sınır Şartları İçin Üç Boyutlu Teoriye Göre Ritz Yöntemindeki Matris Elemanlar›	109
EK-D Genel Sınır Şartları İçin KPT'ne Göre Ritz Yöntemindeki Matris Elemanlar›	111
EK-E Ritz Yönteminde Kullan›lan Bilgisayar Programı Akış Diyagramı	114

SİMGELER DİZİNİ

a	Plak kenar uzunluğu
b	Plak kenar uzunluğu
B	Bulk modülü
C_{ij}	Elastik sabitler matrisi
E	Elastisite modülü
$F_{\delta}(X,Y)$	S›n›r fonksiyonu (δ=u, v, w)
G	Kayma modülü
h	Plak kal›nl›ğı
[K]	Kat›l›k matrisi
[M]	Kütle matrisi
M_{0ij}	Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç momentler (i,j=x,y)
N_{0ij}	Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç kuvvetler (i,j=x,y)
p	Hacim oran› üsteli
P(ζ)	Efektif malzeme özelliği (ζ=X, Y, Z)
Ps(ζ)	s.ci Chebyshev polinomu
Q_x, Q_y	Kesme kuvveti
Q_{ij}	Elastik sabitler
S_{ij}	Esneklik matrisi
t	Zaman
T	Plak kinetik enerjisi
u, v, w	Plak orta düzlemindeki bir noktan›n x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
U, V, W	Plaktaki herhangi bir noktan›n x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
U_G	Plak genleme enerjisi
V_p	Hacim oran›
δ	Varyasyon sembolü
Δ	Boyutsuz frekans parametresi

ε_{ij}	Genleme tansörü
φ_1, φ_2	Şekil fonksiyonları
λ	Lame´ sabiti
ν	Poisson oran›
ω	Dairesel frekans (rad/sn)
Ω	Boyusuz serbest titreşim frekansı
σ_{ij}	Gerilme tansörü

K›saltmalar

A	Ankastre destekli
B	Basit destekli
BKDT	Birleştirilmiş Kayma Deformasyon Teorisi
BMKDT	Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
KPT	Klasik Plak Teorisi
PKDT	Parabolik Kayma Deformasyon Teorisi
S	Serbest kenar
UKDT	Uniform Kayma Deformasyon Teorisi
ÜMKDT	Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1.	Üniform kal›nl›ktaki dikdörtgen bir plağın geometrisi…..……..	11
Şekil 2.2.	İki fazlı malzeme(a)parçacıklı mikro-yap› (b)iskeletsel mikro-yap›……..……..	13
Şekil 2.3.	Üç boyutlu gerilme hali ……..….	17
Şekil 2.4.	FD plakta sınır şartlar› ……..	33
Şekil 3.1.	FD plakta elastisite modülünün δ değerleri ile eksponansiyel değişimi…….....	35
Şekil 3.2.	FD plakta seramik malzemenin hacim oran›n›n kuvvet kanununa göre p değerleri ile değişimi…….....	37
Şekil 3.3.	FD plakta elastisite modülünün kuvvet kanununa göre p değerleri ile değişimi ……..…….....	37
Şekil 3.4.	FD plakta elastisite modülünün matris faz› seramik olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi …….....	39
Şekil 3.5.	FD plakta elastisite modülünün matris faz› metal olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi …….....	40
Şekil 3.6.	FD plakta poisson oran›n›n matris faz› seramik olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi…….....	40
Şekil 3.7.	FD plakta poisson oran›n›n matris faz› metal olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi……	41
Şekil 3.8.	FD plakta elastisite modülünün tutarlı modele göre p değerleri ile değişimi ……	41
Şekil 3.9.	FD plakta poisson oranının tutarlı modele göre p değerleri ile değişimi …….....	42
Şekil 3.10.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=5 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi…...	62
Şekil 3.11.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=10 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi…...	63
Şekil 3.12.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=20 ve a/b=0.5;1.5;2 oranlar› için farkl› s›nır koşullarında p değerleriyle değişimi…...	64

Şekil 3.13.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=50 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi…..	65
Şekil 3.14a.	Boyutsuz frekans parametresinin a/b=0.5 için BBBB ve BSBS sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi……	66
Şekil 3.14b.	Boyutsuz frekans parametresinin a/b=0.5 için ASAS, BABA ve AAAA sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi…	67
Şekil 3.15a.	Boyutsuz frekans parametresinin a/b=2 için BSBS ve BBBB sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi……	68
Şekil 3.15b.	Boyutsuz frekans parametresinin a/b=2 için ASAS, BABA ve AAAA sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi…	69
Şekil 3.16a.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=2 için BSBS ve BBBB sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi……	70
Şekil 3.16b.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=2 için ASAS, BABA ve AAAA sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi…	71
Şekil 3.17a.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=5 için BSBS ve BBBB sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi……	72
Şekil 3.17b.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=5 için ASAS, BABA ve AAAA sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi…	73
Şekil 3.18a.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=50 için BSBS ve BBBB sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi……	74
Şekil 3.18b.	Boyutsuz frekans parametresinin a/h=50 için ASAS, BABA ve AAAA sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi…	75
Şekil 3.19.	BBBB sınır koşulunda yoğunluğun kalınlık doğrultusunda değişiminin boyutsuz frekans parametresi üzerine etkisi…….	76
Şekil 3.20.	AAAA sınır koşulunda yoğunluğun kalınlık doğrultusunda değişiminin boyutsuz frekans parametresi üzerine etkisi…….	77
Şekil 3.21.	Boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulunda a/h=100 için a/b oranı ve p değeriyle KPT'ne göre değişimi…..	80
Şekil 3.22.	Boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulunda a/h=2 için FD kare plakta farklı p değerlerinde plak teorisi ile değişimi…….	81

Şekil 3.23.	Boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerlerinde plak teorisi ile değişimi……	81
Şekil 3.24.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BBBB sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi…….	83
Şekil 3.25.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BBBB sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……..……..	84
Şekil 3.26.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BSBS sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……..……	85
Şekil 3.27.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BSBS sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……..…….	86
Şekil 3.28.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin ASAS sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……	87
Şekil 3.29.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin ASAS sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……..……..	88
Şekil 3.30.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BABA sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi…….	89
Şekil 3.31.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BABA sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……..……..	90
Şekil 3.32.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin AAAA sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi…….	91
Şekil 3.33.	Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin AAAA sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi……..……..	92

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1.	FD plak sınır şartları ……..	32
Çizelge 2.2.	x=sabit ve y=sabit kenarlar için sınır şartları ……	32
Çizelge 3.1.	Seramik ve Metal malzemelerin elastik özellikleri (Elastisite modülü E (GPa), Poisson oran› ν, kütle yoğunluğu ρ(kg/m^3)……	34
Çizelge 3.2.	Basit destekli izotropik plakta farkl› a/b oranlar› ve mod dizilişleri için temel frekans sonuçlar›n›n karşılaştırılması	47
Çizelge 3.3.	BBBB ve a/b=0.4 için frekansların p ile değişimi ……	48
Çizelge 3.4.	BBBB ve a/b=2/3 için frekansların p ile değişimi ……	48
Çizelge 3.5.	BBBB ve a/b=1.0 için frekansların p ile değişimi ……	49
Çizelge 3.6.	BBBB ve a/b=1.5 için frekansların p ile değişimi ……	49
Çizelge 3.7.	BBBB ve a/b=2.5 için frekansların p ile değişimi ……	50
Çizelge 3.8.	Klasik sınır koşullar› için s›n›r fonksiyonlar› ……	55
Çizelge 3.9.	FDM kare plaklarda a/h=5 ve p=10 için farkl› s›n›r koşullarında frekans parametresinin yakınsaması …….	58
Çizelge 3.10.	İzotropik kare plaklarda farklı sınır koşulları için frekans parametresinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması …….	58
Çizelge 3.11.	FD kare plaklarda frekans parametresinin BBBB s›n›r koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi ……...	59
Çizelge 3.12.	FD kare plaklarda frekans parametresinin BSBS s›n›r koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi ……...	59
Çizelge 3.13.	FD kare plaklarda frekans parametresinin ASAS s›n›r koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi ……...	60
Çizelge 3.14.	FD kare plaklarda frekans parametresinin BABA s›n›r koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi ……...	60
Çizelge 3.15.	FD kare plaklarda frekans parametresinin AAAA s›n›r koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi ……...	61

Çizelge 3.16.	FD kare plaklarda a/h=100 ve farklı p değerleri için yakınsama çalışması ……..	78
Çizelge 3.17.	Basit destekli kare plaklarda ilk 8 frekans parametresinin (Δ) karşılaştırılması ……..	79
Çizelge 3.18.	Basit destekli FD plaklarda farklı a/b oranları ve p değerleri için ilk 8 frekans parametresi …….	79

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Kısım 1'de incelenen problem ve önemi aç›klanmakta, K›s›m 2'de konu ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar özetlenmektedir. Kısım 3'te bu çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durulmaktadır.

1.1. Problem ve Önemi

Mühendislik uygulamalarında kullanılan taşıyıcı sistemler çubuk, kiriş, mil, levha, plak, kafes sistem veya kabuk şeklindedir. Bu sistemlerin farkl› zorlamalar altında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, güvenli endüstriyel tasarım açısından çok önemlidir. Bu çalışmada ele alınan yapı plaklardır. Plaklar, kalınlıkları diğer iki boyutunun yanında oldukça küçük değerler alan elemanlardır.

Tüm elastik cisimler bir dış uyarı etkisinde denge konumu etrafında salınım hareketine başlatıldığında ve bu uyarı kaldırıldığında hareketi engelleyici sönüm etkisi olmamas› halinde sal›n›m hareketini sürdürürler. Bu sal›n›ma serbest titreşim hareketi denir. Cismin 1 sn'deki toplam sal›n›m say›s›na frekans denir. Sürekli bir ortam olan plaklar için bu frekansların sayısı sonsuzdur. Bu frekansların en küçüğüne temel frekans denir. Bu frekans değerlerinden herhangi birine eşit frekanstaki bir dış zorlama durumunda plağın denge konumundan uzaklığı olan genlik değeri, artarak hasara sebep olabilir. Tahrip edici özelliğe sahip olan bu olaya rezonans denir. Dolayısıyla rezonans titreşimleri ve istenmeyen dinamik performansla karşılaşmamak için tasar›m safhas›nda genel titreşim analizi yapılmalıdır. Titreşim problemiyle ilgili diğer temel kavramlar ve geniş bilgi bu konuda yazılmış kitaplarda bulunabilir(Meirovitch, 1975).

1.2. Önceki Çalışmalar

Bu çalışmada ele alınan fonksiyonel derecelendirilmiş plak, malzeme özelliklerinin plak alt ve üst yüzeyleri arasında farklı değişim şekilleriyle ele alındığı ve

biri seramik diğeri metal iki malzemenin karışımından oluşmaktadır. Malzemedeki seramik bileşen düşük ısı iletkenlik katsayısından dolay› yüksek ›s›l direnç sağlamaktadır, (Hasselman ve Youngblood, 1978). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) malzeme özelliklerinin sürekli değişimi sayesinde farklı uygulamalarda ve yüksek s›cakl›kl› ortamlarda kullan›labilmektedir, (Hasselman ve Youngblood, 1978, Yamanouchi vd., 1990, Fukui ve Yamanaka, 1992, Koizumi, 1997). Bu durum FDM'lerin birçok uygulamada tercih edilme sebebi olmaktad›r.

Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) yapıların statik ve dinamik davranışlarını lineer ve non-lineer olarak analiz eden çeşitli çalışmalar mevcuttur. Praveen ve Reddy (1997), FD plaklar›n termoelastik analizini Von Karman kriterine göre non-lineer olarak yapmışlardır. Pradhan vd. (2000), FD silindirik kabukların çeşitli sınır koşulları alt›nda titreşim karakteristiklerini incelemiştir. Reddy (2000), malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı olarak değişen FD plakların analizini çeşitli kayma deformasyon teorilerine dayanarak analitik ve sonlu elemanlar yöntemiyle yapmıştır. Shabana ve Noda (2001), üretim sürecinde oluşmuş artık gerilmeleri göz önüne alarak ısıl yüklemeye maruz kalmış FD plaklardaki ısıl gerilmeleri sonlu elemanlar yöntemiyle analiz ederek FDM'lerde ısıl gerilmelerin bileşimsel ve mikroyapı dağılımını kontrol ederek en aza indirilebileceğini göstermiştir. Woo ve Meguid (2000), FD plakların ve sığ kabukların çökme analizini non-lineer olarak analitik yöntemle ve Chen (2005), FD plaklar›n titreşim analizini non-lineer olarak Galerkin yöntemiyle ve lineer olarak Runge-Kutta yöntemiyle yapmıştır. Vel ve Batra (2003a), FD plaklarda ›s›l gerilme analizini malzeme özelliklerinin mikromodel yaklaşımlara göre değişimini göz önüne alarak üç boyutlu kuvvet serileri yöntemiyle analiz etmiştir. Na ve Kim (2004), ince plak ve kabuklarda ›s›l burkulma analizini üç boyutlu olarak sonlu elemanlar yöntemiyle yapmıştır. Zenkour (2005), titreşim ve burkulma analizinde FD sandviç yapıları ele almıştır. Aydoğdu ve Taşkın (2007), serbest titreşim analizini çeşitli kayma deformasyon teorilerine göre FD kirişler için yapmıştır. Aydoğdu (2008), düzlem içi yüklere maruz kalmış FD plakların analizini klasik plak teorisine (KPT) göre yapmıştır. Abrate (2006), FD plaklarda serbest titreşim, burkulma ve statik çökme problemlerinin çözümlerinin izotrop plaklar için var olan sonuçlar›n› ve fonksiyonel derecelendirme katsayısını kullanarak elde edilebileceğini göstermiştir.

Yang vd. (2003), malzeme özellikleri konuma, sıcaklığa ve maruz kaldıkları elektrik alana bağlı olarak değişen, iki yüzeyinde de piezo-elektrik katmanlar bulunan ön gerilmeli FD plakların büyük genlikli titreşim analizini yüksek mertebe kayma deformasyonlarını kullanarak Galerkin yöntemiyle ele almıştır. Kim (2005), FD plakların serbest titreşim analizini üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisine (ÜMKDT) dayanarak yapmıştır. Ritz yöntemiyle çözümde yer değiştirme alanı fonksiyonunu çift katlı Fourier serileri olarak almış ve malzeme özelliklerini sıcaklığa bağlı alarak incelemiştir. Yang ve Shen (2001), malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı FD plaklarda serbest titreşim analizini KPT'ne göre Differential Quadrature (DQ) yaklaşımını ve Galerkin yöntemini kullanarak yapmıştır.

Vel ve Batra (2003b), FD plakların serbest titreşim analizinde 3-boyutlu elastisite teorisini kullanarak analitik çözüm elde etmiştir. Malzeme özelliklerinin değişimini mikromodel yaklaşımlar açısından ele almıştır. Ferreira vd. (2006), BMKDT ve ÜMKDT teorilerine dayanarak FD plaklarda Mori-Tanaka mikromekanik yaklaşımı ile doğal frekansları elde etmiştir.

Isıl gerilmelerin maksimum olduğu veya olabileceği yerlerde ısıl gerilmelere daha dayan›kl› yeni bir malzeme ilave etmek gereklidir. Geleneksel FDM'lerde cismin dış yüzeyinin tamamı aynı bileşen dağılımına sahip olacağından, cismin dış yüzeyinin de çok yüksek sıcaklık değişimine maruz kaldığ› tasar›m problemlerinde çok etkili olmayabilir. Bu da malzemenin iki veya üç doğrultuda değişen bağımsız malzeme özelliklerine sahip olmasıyla yenilebilir. Malzeme özelliklerinin iki doğrultuda değiştiği FDM'ler iki boyutlu FDM (2B-FDM) olarak adland›r›lmaktad›r. Literatürde baz› 2B-FDM çalışmaları mevcuttur. Dhaliwal ve Singh (1978), kartezyen koordinatlarda ve silindirik polar koordinatlarda, kayma kuvveti etkisinde homojen olmayan izotropik malzeme için denge denklemini çözmüşlerdir. Elastisite modülünü düzlem içi ve kalınlık doğrultusunda eksponansiyel olarak değişen bir fonksiyon olarak tanımlamışlardır. Nemat-Alla (2003), 2B-FDM'yi temsil eden hacim oranlar› ve karışımlar kanunu bağıntılarını elde etmiştir. Bunları plakta ısıl gerilmeleri hesaplamak için kullanmıştır. Elde ettiği sonuçlara göre 2B-FD plaklar ›s›l gerilmeler konusunda geleneksel FDM'ye göre daha yüksek yeteneğe sahiptir. Ayrıca, 2B-FDM'de

maksimum gerilme bölgesi, geleneksel FDM'deki maksimum gerilme bölgesinden daha küçüktür.

Serbest titreşim analizinin Ritz yöntemiyle yapıldığı çalışmalarda, yer değiştirme alanı bileşenlerinde uygun fonksiyonlar seçilmesinin Ritz yöntemine olan etkinliğini incelemek bu çalışmaların amaçlarından biri olmuştur. Leissa (1973), izotropik plaklarda basit (B), ankastre(A) ve serbest (S) sınır koşullarından oluşan 21 tip sınır koşulunun tamamını ele almış, 6 sınır koşulu için analitik çözüm ve 15 sınır koşulu için yer değiştirme bileşenlerini kiriş fonksiyonu olarak aldığı Ritz yöntemi ile çözüm elde etmiştir. Bhat (1985), Dickinson ve Di Blasio (1986), Liew vd. (1993), izotropik plakların serbest titreşim analizi üzerine yaptıkları çalışmalarında Ritz yönteminde ortogonal polinomlar kullanmışlardır. Aydoğdu ve Tımarcı (2001a), kompozit plakların burkulma ve titreşim analizinde yer değiştirme alanı bileşenleri olarak trigonometrik fonksiyonları ve Aydoğdu ve Tımarcı (2001b, 2003), Aydoğdu (2005), kompozit plakların titreşim analizinde basit polinomları kullanmışlarıdır.

Literatürde Ritz yönteminde Chebyshev polinomlarının kullanıldığı çalışmalar mevcuttur. Zhou vd. (2002), izotropik dikdörtgen plaklar›n 3-boyutlu serbest titreşim analizinde, Zhou vd. (2003), silindirlerin 3-boyutlu serbest titreşim analizinde ve Zhou vd. (2006), aç›l› plaklar›n 3-boyutlu serbest titreşim analizinde, yer değiştirme fonksiyonu olarak Chebyshev polinomlarını kullanmışlardır.

Uymaz ve Aydoğdu (2007a), malzeme özellikleri kalınlık doğrultusunda bir kuvvet kanununa göre değişen FD plağa ait doğal frekansları Ritz yönteminde KPT'ne göre Chebyshev polinomlarını kullanarak elde etmiştir. Uymaz ve Aydoğdu (2007b), farklı sınır koşulları için FD plaklarda titreşimi Ritz yönteminde 3-boyutlu elastisite teorisine göre Chebyshev polinomlarını kullanarak incelemiştir.

1.3. Çalışmanın Amac› ve Kapsam›

Plak problemlerinde analitik çözüm plakların karşılıklı iki kenarının basit destekli olması durumu ile sınırlıdır. Bu nedenle araştırmacılar çeşitli nümerik

yaklaşımlar geliştirmiştir. Literatürde Ritz yönteminde trigonometrik fonksiyonlar›n (Young, 1950, Warburton, 1954), kiriş fonksiyonlarının (Leissa, 1973), kuvvet serilerinin (Narita, 1985) kullanıldığı çalışmalar mevcuttur. Çoğunlukla ince plaklar için olmak üzere iyi sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, Ritz yönteminde değişik ince plak problemlerinde polinom fonksiyonları önerilmiş ve kullanılmıştır (Bhat, 1985; Liew vd., 1990). Bu polinomlar›n avantaj›, say›sal uygulamalarda kullanman›n daha kolay olması ve Ritz yönteminin hesaplama verimliliğini arttırmasıdır.

3-boyutlu analizin karmaşık olması sebebiyle plak teorilerinin geliştirilmesi yoluna gidilmiştir. Bu teoriler, problemin boyutunu indirgemeyi dolayısıyla özdeğer denkleminin determinant boyutunu küçültmeyi amaçlamaktad›r. Ancak bu basitleştirmeler kenar kalınlık oranının azalmas›yla 3-boyutlu çözümler ile bu yaklaşık plak teorileri aras›ndaki fark›n artmas›na sebep olmaktad›r.

Mühendislik uygulamalarında çoğunlukla orta kalınlıkta ve kalın plaklar yer almaktad›r. Pratikteki önemi sebebiyle bu plaklar›n dinamik karakteristiklerinin en iyi şekilde anlaşılabilmesi için çözüm yöntemlerinin güvenilir ve doğru sonuçlar vermesi gereklidir. Üç boyutlu sonuçlar direkt karşılaştırılabildiğinde düzlemsel plak teorilerinin de doğruluk derecesini belirleyebilmektedir.

Dinamik yük altındaki makine elemanları veya yapılar için doğal frekanslar ve mod şekilleri önemli parametrelerdir. Bir makine elemanı veya bir yapının tasarlanırken doğal frekansları ve mod şekillerinin ve dolayısıyla titreşimin genliğinin bilinmesiyle bu karakteristikler istenen sınırların dışında ise makine elemanının tasarımı değiştirilerek karakteristiklerin istenen sınırların içinde kalması sağlanabilir.

Kısım 2 ve Kısım 3'te değinilen önceki çalışmalar ve açıklamalar ışığında FD plaklar›n 3-boyulu titreşim davranışlarının genel sınır şartları için incelendiği bir çalışma mevcut değildir. Bu çalışmanın temel amacı bu eksikliği gidermek olarak açıklanabilir. Bu temel amaç ışığında aşağıda verilen alt başlıklar sayılabilir.

Malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusunda makromodel ve mikromodel yaklaşımlara göre değişimini incelemek.

Plakların titreşim davranışını yöneten denklemleri 3-boyutlu elastisite teorisine göre elde etmek.

Malzeme özelliklerinin değişim şekillerinin frekans parametreleri üzerine etkisini incelemek.

Kenarlarında değişik sınır şartlarına sahip FDM plakların doğal frekanslarını 3-boyutlu elastisite teorisine göre elde etmek.

İzotropik plak ve farklı tipte FDM plak için mod şekillerini çizerek bu plakların göz önüne alınan doğal frekanslar›ndaki 3-boyutlu titreşim davranışları arasındaki farkı görmek.

Titreşim karakteristiklerinin frekans parametreleri ve mod şekilleri üzerine olan etkisini incelemek.

KPT, yüksek mertebe kayma deformasyon teorileri ve 3-boyutlu elastisite teorisi ile elde edilen frekans parametrelerini karşılaştırmak ve düzlemsel teorilerin geçerliliğini incelemek.

Efektif malzeme özelliklerinin Elasitisite modülü ve yoğunluk olması ve yalnız Elastisite modülü olmas› durumunda frekanslar aras›ndaki fark› görmek.

Bu çalışmanın içerdiği yenilikler kısaca aşağıdaki gibi sıralanabilir:

Literatürde FD plaklarda 3-boyutlu titreşim ile ilgili olarak çok az çalışılmış olan bu konuda bilgi eksikliğinin giderilmesine katkıda bulunmak.

Yerdeğiştirme bileşenleri olarak Chebyshev polinomlarının kullanıldığı Ritz çözüm yöntemiyle elde edilen sonuçların geçerliliğinin araştırılması.

Çalışmanın 2. Bölümünde, malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusunda değişimi makromodel ve mikromodel yaklaşımlara göre incelenmiş, plak gerilme-genleme ilişkileri ve plak teorileri ele alınmış ve 3-boyutlu elastisite teorisi çerçevesinde Hamilton prensibinden faydalanarak FD plakların titreşim davranışını yöneten denklemler ve sınır şartlarının farklı bileşimleri elde edilmiştir. 3. Bölümde farkl› s›n›r koşullarında FD plakların serbest titreşim analizi ilk olarak Navier yöntemiyle daha sonra Ritz yöntemiyle yapılmıştır. Son olarak Ritz yöntemiyle 3-boyutlu elastisite teorisine göre elde edilen frekans sonuçları için mod şekilleri çizilmiştir.

BÖLÜM 2

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde FDM plakların serbest titreşim probleminin denklemleri ve sınır şartları elde edilmektedir. Kısım 2'de kısaca FDM'ler tanıtılmaktadır. Kısım 3'te malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusunda değişimi ve Kısım 4'te plak gerilme-genleme ilişkileri verilmektedir. Kısım 5'te plak teorileri incelenmektedir. Son olarak Kısım 6 ve Kısım 7'de Hamilton prensibi kullanılarak FD plağın 3-boyutlu titreşim davranışını yöneten diferansiyel denklemler ve sınır şartlarının olası bileşimleri elde edilmektedir.

2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler

Havac›l›k, uzay, savunma ve otomotiv gibi endüstrilerdeki h›zl› teknolojik gelişim ve artan rekabet, yüksek performansa sahip ürünlerin tasarlanmas›na bu durum da hafif ama ayn› zamanda mukavemeti yüksek malzemelere olan ihtiyac› ortaya koymaktad›r. Bu ihtiyaca cevap vermek üzere, mekanik özellikleri metallere göre daha üstün olan kompozit malzemeler üretilmeye başlanmıştır. Ancak dış yüzeylerindeki sıcaklık yaklaşık 2100 ˚K'e ulaşan ve yüzeyler arasındaki sıcaklık farkı 1600 ˚K civarında olan uzay araçları gibi yüksek sıcaklığa maruz kalan yapılarda metal üzerinde çeşitli tekniklerle oluşturulan homojen seramik kaplamalar, metali korozyona, oksidasyona ve aşınmaya karşı korusa da sistem yüksek seviyelerde ısıl gerilme sorunuyla karşı karşıya kalmaktadır. Bunun sebebi böyle yüksek sıcaklıkların bulunduğu ortamlarda ani ve büyük sıcaklık değişimlerinin olmasıyla seramik ve metal malzemelerin ısıl genleşme katsayılarının farklılıklarından dolayı yapılarda keskin gerilme dağılımları oluşmasıdır ve ara yüzeylerde oluşan bu gerilme yığılmaları çatlak oluşumunun da önde gelen sebeplerinden biridir. Bu sorunun getirisi olarak, 1984'te Japonya'da bir uzay mekiği projesi sırasında, 10 mm'den ince bir kesit için, 2000 ˚K seviyesinde bir yüzey sıcaklığına ve 1000 ˚K'lik bir sıcaklık aralığına dayanabilecek bir

ısıl bariyer malzemesi önerisi ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler konsepti ortaya çıkmıştır. FDM'ler birbirinden farklı özelliklere sahip homojen iki malzemeden oluşan ve malzeme özellikleri bir yüzeyden diğerine bir konum fonksiyonuna bağlı olarak sürekli veya kademeli bir değişim gösteren yüksek ısıl direnç kapasitesine sahip ileri teknoloji malzemeleridir.

FDM çalışmaları sonucunda birçok özelliği bir arada bulunduran ideal malzeme kombinasyonları, seramik ve metaller önem kazanmıştır. FDM'ler sıcaklığın yüksek olduğu yüzeyi düşük yoğunluk, yüksek mukavemet, katılık ve ıs›l dirence sahip olan seramik ve sıcaklığın düşük olduğu yüzeyi tokluk, elektrik geçirgenliği ve işlenebilirliğe sahip olan metal olacak ve seramikten metale doğru kademeli veya devamlı derecelendirilmiş bir geçişe sahip olacak şekilde tasarlanmış malzemelerdir. Bu tasar›m sayesinde, iki malzeme arasında farklı ısıl genleşme katsayılarından dolayı oluşan ısıl gerilmelerle birlikte, fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani değişimlerden dolayı meydana gelebilecek olan diğer olumsuzluklarda minimuma indirilmiş olur. Ayr›ca, bu malzemelerin bileşen, mikroyapı ve bazı mekaniksel özelliklerinin yapı boyunca yumuşak bir değişiminin tasarımcıya istenen mekanik ve ısıl özellikte bir malzeme üretimi konusunda büyük yararlar sağladığı görülmüştür. Bu durum FDM'lerin birçok uygulamada tercih edilme sebebi olmaktad›r.

FDM'lerde kademeli derecelendirilmiş yapılar teknik olarak yarı kompozit, sürekli olmayan termomekanik özelliklere sahip birbirinden farkl› homojen malzemeler içerir. Devamlı derecelendirilmiş yapılarda ise iki önemli özellik vard›r. Birincisi; seramiğin kısmi hacmi ara yüzde %0'dan yüzeyde %100'e kadar değiştiğinden, kaplamayla kaplanan arasındaki bağlanma, malzeme uyumluluğu sebebiyle daha iyi olacaktır. İkinci olarak; malzeme özellikleri dağılımlarının düzgün olmas› sebebiyle FDM kapl› ara katmanda gerilme konsantrasyonlar› kademeli homojen kaplamalara göre daha düşük olacaktır. Bir malzemenin bileşimi ve yapısı gibi özelliklerinin kısmi değişimi ve sürekli derecelendirilmesi malzemenin çok fonksiyonlu bir malzeme olmasını sağlar. Böyle bir özelliğe sahip olan FDM'lerden Nano-Teknoloji alan›nda da yararlan›labilir.

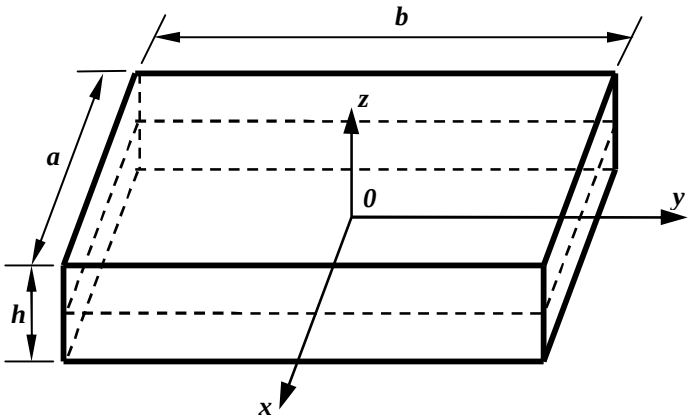
İlk olarak uzay araçları için tasarlanan FDM'ler iyi ısıl iletkenlik ve iyi ısıl direnç gibi iki zıt özelliğin bir malzemede bulunabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Bu özellikler sayesinde hafiflik, güçlülük ve sağlamlık mümkün olmaktadır. Japonya'daki uzay istasyonu Kiba'da test olarak FDM, bir fişek ve geri kullanılabilir bir roket motoru olarak kullanılmıştır. Roketlerin çoğunun kullanıldıktan sonra at›lmas› ve bununda ülkelere pahal›ya mal olmas›, ülkeleri maliyeti azaltmaya yani geri kullan›ml› roketler üzerinde çalışmaya yönlendirmiştir. Yapılan çalışmalar gelecekte uzay mekiklerinin geri kullanımlı roketler şeklinde üretilebileceklerini göstermiştir. Şu anda yalnızca, Japonlara ait Obita mekiği geri kullanımlıdır. FDM'lerin endüstriyel malzemelerdeki uygulamalarının geliştirilmesi de yine araştırmaların ana hedeflerinden biri olmuştur. Örneğin, derecelendirilmiş kesici kalemlerin geliştirilmesinin sebebi mukavemet ve ›s›l direnç bak›m›ndan daha iyi malzemelere ihtiyaç duyulmas›d›r. Bu alanda, umulan aşınma direnci ve sertlik elde edilmiştir. Kendi kendini yağlama fonksiyonu ve yüksek ›s›l dirençlerin kesici kalemlerde elde edilmesinin yan›nda, bazı derecelendirilmiş kalemler sayesinde yağ kullanılmadan uygulanan kuru kesimler de gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde geliştirilen bir kalem, iç kısmında çelik yoğunlukta, dış kısmına doğru elmas yoğunluktadır. Yüksek hızlı kesici kalemlerde de diğer FDM'lerde olduğu gibi üretim tekniğinden kaynaklanan şekil ve boyutta sınırlamalar bulunmaktadır, (Alagöz vd., 2004).

2.3. FD Plakta Malzeme Özelliklerinin Kalınlık Doğrultusunda Değişimi

FD plak problemlerinin incelenmesi süresince malzeme özelliklerinin sürekli değişimini tanımlayan çeşitli fonksiyonlar ele alınmıştır. Bu kısımda bunlardan bazıları incelenmektedir.

Ele alınan plağın geometrik konfigürasyonu Şekil 2.1 ile verilmektedir. Plak; uzunluğu a, genişliği b ve üniform kalınlığı h olan seramik ve metal karışımından oluşan fonksiyonel derecelendirilmiş plaktır. Plak geometrisi ve boyutları (x,y,z) kartezyen koordinat sistemine göre tanımlanmış olup orijin plağın geometrik merkezindedir ve eksenler plak kenarlarına paraleldir. Bileşimin üst yüzeyden itibaren değiştiği ve plak üst yüzeyinin (z=h/2) seramik ve alt yüzeyinin (z=-h/2) metal olduğu

kabul edilmektedir. Malzeme özelliklerinin değişimi kalınlık doğrultusunda al›nmaktad›r.



Şekil 2.1. Üniform kalınlıktaki dikdörtgen bir plağın geometrisi ve koordinatlar

2.3.1. Kalınlık Doğrultusunda Kuvvet Kanununa Göre Değişim

Efektif malzeme özellikleri bir kuvvet kanunu formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir(Reddy, 2000).

$$P(z) = P_{UL} V_U + P_L \tag{2.1}$$

$$P_{UL} = P_U - P_L \tag{2.2}$$

$$V_U = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \tag{2.3}$$

$$P(z) = (P_U - P_L) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_L \tag{2.4}$$

Burada P, efektif malzeme özelliği olmak üzere, P_L ve P_U sırasıyla ele alınan özelliğin plak alt ve üst yüzeylerindeki değerleridir. Hacim oranının değişimi V_U, basit bir kuvvet kanunu olarak tanımlanmaktadır. Hacim oranı üsteli p, plak kalınlığı boyunca malzeme değişim profilini göstermektedir ve bileşim malzemelerinin optimum dağılımını elde etmek amacıyla değiştirilebilir, $0 \le p \le \infty$.

2.3.2. Kalınlık Doğrultusunda Eksponansiyel Değişim

FDM'lerde, malzeme özelliklerinin değişimini ifade etmek için kullanılan yaklaşımlardan bir tanesi de eksponansiyel değişim yaklaşımıdır. Literatürde daha çok kırılma çalışmalarında kullanıldığı görülmektedir. Bu yaklaşımda malzemenin elastik özelliklerinin,

$$C_{ij} = \left(C_{ij}\right)^{0} e^{\lambda z} \tag{2.5}$$

şeklinde değiştiği kabul edilmektedir. Burada $(C_{ij})^0$, plağın orta eksenindeki (z=0) elastik özelliğidir. Birçok araştırmacı tarafından ısıl ve mekanik yüklemeler alt›ndaki FDM problemlerinin analitik çözümünde malzeme özelliklerinin sürekli değişimi eksponansiyel fonksiyonlarla tanımlanmıştır. Örneğin, Aydoğdu ve Taşkın (2007), tüm kenarlarından basit destekli bir FD kirişin serbest titreşim probleminin analitik çözümünde eksponansiyel değişim ve kuvvet kanununa göre değişimin her ikisini de kullanmışlardır. Eksponansiyel değişimi aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

$$E(z) = E_U e^{-\delta\left(1-2\frac{z}{h}\right)} \tag{2.6}$$

Burada δ,

$$\delta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E_U}{E_L}\right) \tag{2.7}$$

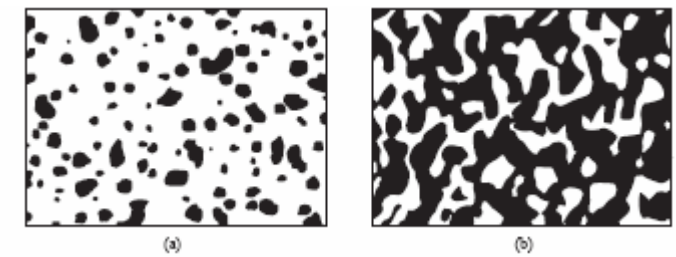
olarak tanımlıdır. Eksponansiyel değişimin genellikle analitik çözümü kolaylaştırdığı fakat malzemenin alt ve üst yüzeyleri dışında gerçeğe çok yakın sonuçlar vermediği görülmüştür (Nemat-Alla, 2003). Bu çalışmada Navier yöntemiyle çözümde ele al›nan eksponansiyel değişim yaklaşımı için (2.6) ve (2.7) ile tanımlı eksponansiyel değişim ifadeleri kullan›lmaktad›r.

2.3.3. Mikromekanik Yaklaşım

Mikromekanik analiz ile bileşenlerin bilinen özellikleri ve bu bileşenlerin birbirleri ile etkileşim özelliklerini kullanarak malzemenin tamamının davranışı hakkında fikir edinilebilir. Ayrıca mikromekanik yaklaşım sayesinde homojen olmayan bir kompozit malzeme yap›s›, anizotropik özellikleri belirlenebilen homojen bir yap› şeklinde modellenebilir.

Kompozit malzemelerde efektif modüllerin hesaplanabilmesi için birçok mikromekanik yaklaşım geliştirilmiştir. Örneğin, elyaf takviyeli kompozitlerde takviye eksenine paralel yöndeki elastisite modülü Voight Denklemi ile ve takviye eksenine dik yöndeki elastisite modülü Reuss Denklemi ile belirlenir (Şahin, 2000).

Elastik matris yapısını güçlendirmek amacı ile küresel takviye bileşenlerinin malzeme içinde tesadüfi bir şekilde dağıldığı kompozit malzemelerde iskeletsel mikro yap›ya sahip bölgede efektif malzeme özellikleri tutarl› (self-consistent) model ile ve parçac›kl› mikroyap›ya sahip bölgede efektif malzeme özellikleri Mori-Tanaka modeli ile belirlenir. Makroskopik olarak homojen kompozit malzemelerde efektif malzeme özelliklerinin belirlenebilmesi için kullan›lan tutarl› model ve Mori-Tanaka modeli FD plaklarda efektif malzeme özelliklerini belirlemek üzere kullanılabilmektedir. Aşağıda bu modellerden k›saca bahsedilmektedir.



Şekil 2.2. İki fazlı malzeme (a)parçacıklı mikroyapı (b)iskeletsel mikroyap›, (Vel ve Batra, 2003b)

2.3.3.1. Mori-Tanaka Modeli

Mori-Tanaka modeli, iyi tanımlanmış sürekli matris ve süreksiz parçacıklı faza sahip derecelendirilmiş mikro yapı bölgesinde uygulanabilir. Bileşenlerin birbirleriyle etkileşimini göz önüne al›r. Genellikle takviye malzemesi olarak kullan›lan küresel seramik parçacıkların boyutları, şekilleri ve yapıdaki dağılımları hakkında çok hassas bir bilgiye sahip olunmadığından efektif modülün hesaplanmasında takviye bileşenine ait hacim oran› dağılımından yararlanılır.

Bulk modülü (B) ve kayma modülü (G) aras›nda, Lamé sabiti λ ile tan›mlanan,

$$\lambda = B - \frac{2}{3}G \tag{2.8}$$

bağıntısı vardır. Bir noktadaki efektif kütle yoğunluğu "Karışım Kanunu" ile aşağıdaki gibi verilir.

$$\rho = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \tag{2.9}$$

Burada matris faz 1 indisi ile ve küresel parçac›kl› takviye faz› 2 indisi ile gösterilir. $V_1+V_2=1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

İzotropik matris malzemesi içinde rasgele dağılımlı olan izotropik parçac›klar›n olduğu plağa uygulanan Mori-Tanaka modeli ile elde edilen efektif Bulk modülü B ve kayma modülü G aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\frac{B - B_1}{B_2 - B_1} = V_2 \Big/ \left(1 + (1 - V_2)\frac{B_2 - B_1}{B_1 + (4/3)G_1} \right) \tag{2.10}$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = V_2 \Big/ \left(1 + (1 - V_2)\frac{G_2 - G_1}{G_1 + f_1} \right) \tag{2.11}$$

Bu notasyonda, B_1, G_1 ve V_1 matris faz›n ve B_2, G_2 ve V_2 parçac›kl› faz›n olmak üzere, s›ras›yla, Bulk modülü (hacimsel elastisite modülü), kayma modülü ve hacim oran›na karşılık gelmektedir. Burada f_1,

$$f_1 = G_1(9B_1 + 8G_1)/6(B_1 + 2G_1) \tag{2.12}$$

şeklindedir ve matris faza ve takviye faza ait Bulk modülü ve kayma modülü tanımları aşağıda verilmektedir.

$$B_1 = \frac{E_1}{3(1-2\nu_1)} \qquad B_2 = \frac{E_2}{3(1-2\nu_2)} \tag{2.13}$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \qquad G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu_2)} \tag{2.14}$$

Plak kalınlığı boyunca Mori-Tanaka modeline göre değişen Elastisite modülü ve Poisson oranının efektif değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E = \frac{9BG}{3B+G} \tag{2.15}$$

$$\nu = \frac{3B-2G}{2(3B+G)} \tag{2.16}$$

2.3.3.2. Tutarl› Model

Bu model matris ve takviye faz›n› birbirinden ay›rmaz ve ayn› efektif modülü fazların birbirleriyle değiştirildiği başka bir kompozit içinde geçerli kabul eder. Bu kabul, iskeletsel mikro yap›ya sahip bölgedeki efektif modülün belirlenmesi için uygun bir yaklaşımdır. Efektif modülün hesaplanmasında aşağıdaki bağıntılar kullanılır.

$$\delta / B = V_1/(B - B_2) + V_2/(B - B_1) \tag{2.17}$$

$$\xi / G = V_1 / (G - G_2) + V_2 / (G - G_1) \quad (2.18)$$

Burada,

$$\delta = 3 - 5\xi = B / (B + 4G/3) \quad (2.19)$$

olarak tanımlıdır. İlk denklem B değerini bulmak için çözüldüğünde G cinsinden aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$B = 1/(V_1 / (B_1 + 4G/3) + V_2 / (B_2 + 4G/3)) - 4G/3 \quad (2.20)$$

Burada G, aşağıdaki denklemin çözümünden elde edilir.

$$[V_1 B_1 / (B_1 + 4G/3) + V_2 B_2 / (B_2 + 4G/3)] + 5[V_1 G_2 / (G - G_2) + V_2 G_1 / (G - G_1)] + 2 = 0 \quad (2.21)$$

Hesaplamalardan da anlaşılacağı gibi efektif modülün hesaplanmasında tutarlı model Mori-Tanaka modeline göre daha karmaşık bir yöntemdir.

2.4. Plak Gerilme-Genleme İlişkileri

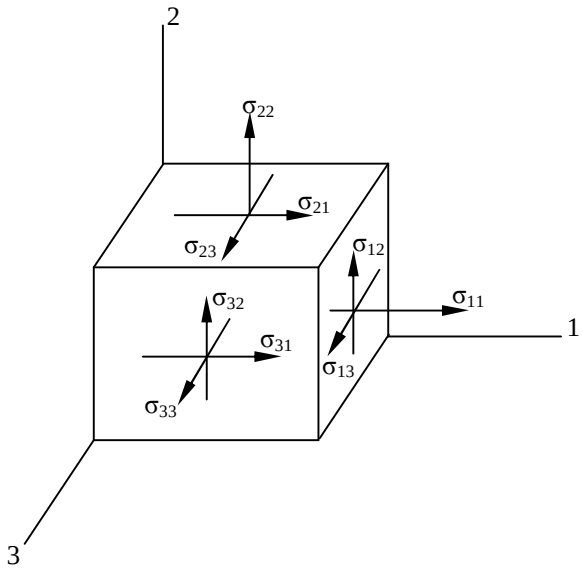
Bu kısımda genel olarak Gibson (1994)'dan yararlanılmıştır. Elastik sınırlar içinde bir cisimde bir noktadaki 3-boyutlu en genel gerilme durumu, Şekil 2.3'te gösterildiği gibi 9 gerilme bileşeni σ_{ij} (i,j = 1,2,3) ile verilir. Literatürde kullanıldığı şekliyle i=j olduğunda σ_{ij} normal gerilme ve i≠j olduğunda ise σ_{ij} kayma gerilmesi olarak adland›r›l›r.

Her bir gerilme bileşenine karşılık bir genleme bileşeni mevcuttur ve ε_{ij} ile gösterilir. i=j ve i≠j olmas› durumunda s›ras›yla normal genleme ve kayma genlemesi ad› verilir. Mühendislik ve tensör genlemeleri normal genleme durumunda ayn› olmalarına karşılık, kayma genlemesi durumunda; mühendislik kayma genlemesi (γ_{ij}), tensörel kayma genlemesinin (ε_{ij}) iki kat›d›r, ($\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$).

En genel durumda elastik bir cisimde bir noktadaki gerilme ve genleme bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

$$\sigma_{ij} = f_{ij}\left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}\right) \tag{2.22}$$

Burada f_{ij} fonksiyonu lineer veya non-lineer olabilir. Burada lineer durum göz önüne al›nmaktad›r.



Şekil 2.3. Üç boyutlu gerilme hali

Lineer elastisite teorisi temelinde bir noktadaki gerilme-genleme ilişkileri en genel anizotropik durum için genelleştirilmiş Hooke yasasına dönüşür ve matris formunda şu şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Burada [C] matrisi (9x9)=81 bileşene sahip rijitlik veya elastik sabitler matrisidir ve dördüncü mertebeden bir tansördür. Elastik sabitlerdeki ilk iki indis gerilmeye, son iki indis genlemeye aittir.

Genelleştirilmiş Hooke kanunu, indis notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (i,j = 1,2,3 \quad , \quad k,l = 1,2,3) \qquad (2.24)$$

Elastik sabitlerin sayısı bir takım simetri koşullarının kullanılması ile birlikte azalır. Başlangıçta 81 olan elastik sabitlerin sayısı, statik denge ve moment dengesinden gerilmelerin ve cismin dönme yapmadığı kabulünden genlemelerin simetrik olmas› $(\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji})$ sebebiyle önce 54'e sonra 36'ya düşer. Böylece gerilme ve genleme bileşenleri için kullanılan indisler tekrar düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılır.

Gerilmeler	Genlemeler
$\sigma_{11} = \sigma_1$	$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$
$\sigma_{22} = \sigma_2$	$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$
$\sigma_{33} = \sigma_3$	$\varepsilon_{33} = \varepsilon_3$
$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4$	$2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_4$
$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5$	$2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \varepsilon_5$
$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6$	$2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_6$

Bu durumda genelleştirilmiş Hooke kanunu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad (i,j = 1,2,..,6) \qquad (2.25)$$

Bu ifadede tekrarlanan indis toplamı göstermektedir. Bu eşitlik,

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \qquad (2.26)$$

şeklinde matris formuna dönüştürülür. Burada $[C]$ matrisi, (6x6)=36 elemanl› bir matris ve $\{\sigma\}$ ve $\{\varepsilon\}$, altışar elemanlı sütun vektörleridir.

Alternatif olarak genlemeleri gerilmeler cinsinden veren genelleştirilmiş Hooke yasas›,

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij}\sigma_j \qquad (i, j = 1,2,...,6) \tag{2.27}$$

ve matris formunda,

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \tag{2.28}$$

olarak yaz›l›r. Burada $[S]$ matrisi rijitlik matrisinin tersidir ve 'esneklik matrisi' ad›n› al›r, $[S] = [C]^{-1}$.

Termodinamiğin 1. yasasına göre, elastik cisimdeki şekil değiştirmelerin izotermal ve tersinir olduğu kabul edilerek, cisim içerisinde ortaya ç›kan W_G şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunun, genleme bileşenlerinin homojen ve ikinci mertebeden bir fonksiyonu olduğu kabul edilir.

Genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonunun (W_G) kullan›lmas›yla elastik sabitlerin sayısı 21'e düşer. Genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonunun her bir genlemeye göre türetilmesiyle bu genlemeye karşılık gelen gerilme bileşeni bulunur.

$$\sigma_i = \frac{\partial W_G}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij}\varepsilon_j \tag{2.29}$$

Bu ifadede genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonu,

$$W_G = \frac{1}{2} C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlıdır. W_G'nin ikinci türevi al›n›rsa,

$$\frac{\partial^2 W_G}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \tag{2.31}$$

bulunur. Türevlerin sırası değiştirilirse,

$$\frac{\partial^2 W_G}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \tag{2.32}$$

bulunur. Sonuç türevden bağımsız olacağından $C_{ij} = C_{ji}$ elde edilir ki buradan elastik sabitlerin de simetrik olduğu ortaya çıkar.

Bu simetri koşullarından sonra genelleştirilmiş Hooke yasasını tekrar şu şekilde yaz›labilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sim} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Rijitlik matrisinin bundan sonra yapılabilecek basitleştirmesi ancak malzemenin kendisinin bir tak›m simetri düzlemlerine sahip olmas› ile mümkündür.

Gerilme ve genleme bileşenleri, koordinat sistemlerinin seçimi ile değiştiğinden rijitlik matrisinin elemanları da seçilen koordinat takımı ile değişir. Bazı durumlarda C_{ij} katsayıları, verilen bir koordinat dönüşümünde göz önüne alınan ortamın simetrisine bağlı olarak değişmez (invaryant) kalabilir. Eğer bir noktadaki elastik sabitler, belirli bir düzleme göre, birbirlerinin tamamen aynadaki yansımaları şeklinde olan iki koordinat

takımı için eşitse, bu düzleme bu noktanın ‘elastik simetri düzlemi’ adı verilir. Malzemeler sahip olduklar› bu elastik simetri düzlemine göre isimlendirilir.

İzotropik bir malzemede sonsuz sayıda simetri düzlemi vardır. Ayrıca sıfırdan farklı eleman sayısı 12 ve bağımsız eleman sayısı 2’dir.

FD malzemelerin karakteristikleri izotrop malzemelerinkine benzemektedir. Bu yüzden FD plağın gerilme-genleme ilişkileri olarak izotrop bir malzemenin gerilme-genleme ilişkileri ele alınmaktadır.

İzotrop bir malzemenin üç boyutlu halde gerilme-genleme ilişkileri aşağıdaki gibi yaz›labilir.

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0\\ & & & C_{44} & 0 & 0\\ & \text{sim} & & & C_{55} & 0\\ & & & & & C_{66}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Burada C_{ij}, elastik sabitlerdir ve izotropik bir malzeme için aşağıdaki gibi tan›mlanmaktad›r.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ C_{12} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{C_{11}-C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned} \tag{2.35}$$

Burada G, kayma modülü olarak tan›ml›d›r.

Düzlem gerilme halini ele al›rsak,

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

Burada Q_{ij}, indirgenmiş elastik sabitlerdir ve izotropik bir malzeme için aşağıdaki gibi tan›mlanmaktad›r.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\\ Q_{12} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}\\ Q_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned} \tag{2.37}$$

3-boyutlu durumda lineer elastisitenin genleme-yer değiştirme ilişkileri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}\\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Bu eşitlikteki ε_x , ε_y ve ε_z s›ras›yla x,y ve z yönlerindeki normal genlemeleri, γ_{xy}, γ_{xz} ve γ_{yz} kayma genlemelerini, U, V ve W ise yer değiştirmeleri göstermektedir.

Elastik bir cismin genleme potansiyel ve kinetik enerjisi sırasıyla aşağıdaki eşitlikler şeklinde verilebilir:

$$U_G = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy}\right)dV \tag{2.39}$$

$$T = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\left((u_{,t})^2 + (v_{,t})^2 + (w_{,t})^2\right)dV \tag{2.40}$$

Burada ρ, cismin öz kütlesi ve V cismin hacmini göstermektedir.

2.5. Plak Teorileri

2.5.1. Klasik Plak Teorisi (KPT)

İnce plaklar için lineer ve non-lineer birçok teori geliştirilmiş olup bunlar Love-Kirchoff teorisinin ilk yaklaşımına (deforme olmayan dik doğrultular) dayanmaktadır. Plakların şekil değişimleri üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan en eski olanı Klasik Plak Teorisi (KPT)'dir. KPT'ne göre düşey kayma genlemeleri γ_{xz} ve γ_{yz} ve düşey normal genleme (ε_z) ihmal edilir. Bu kabullerin geometrik anlam› deformasyondan önce orta düzleme dik olan doğrular deformasyondan sonrada doğru ve dik kalırlar şeklinde açıklanmaktadır. Bu varsayımlar ışığında yer değiştirme alanı bileşenleri aşağ›daki gibi yaz›labilir.

$$\begin{aligned} U &= u(x, y; t) - zw_{,x} \\ V &= v(x, y; t) - zw_{,y} \\ W &= w(x, y; t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Burada U,V ve W plağa ait bir noktanın sırasıyla x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri, u, v ve w ise orta düzlemdeki bir noktanın t anındaki yer değiştirmelerini göstermektedir.

Genleme bileşenleri yer değiştirme alanı bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yaz›l›r.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= U_{,x} = u_{,x} - zw_{,xx} \\ \varepsilon_y &= V_{,y} = v_{,y} - zw_{,yy} \\ \gamma_{xy} &= U_{,y} + V_{,x} = u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} \end{aligned} \tag{2.42}$$

Burada,

$$\begin{aligned} e_x &= u_{,x}, \qquad e_y = v_{,y}, \qquad e_{xy} = u_y + v_x \\ k_x &= -w_{,xx}, \qquad k_y = -w_{,yy}, \quad k_{xy} = -2w_{,xy} \end{aligned} \tag{2.43}$$

olarak tanımlanırsa genleme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= e_x + zk_x \\ \varepsilon_y &= e_y + zk_y \\ \gamma_{xy} &= e_{xy} + zk_{xy} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Burada k_x, x-z düzleminde orta düzlemin eğilme eğriliği ve k_y, y-z düzleminde orta düzlemin eğilme eğriliğidir. k_{xy}, başlangıçta x-y düzleminde bulunan orta düzlemin düzlem dışı dönme eğriliğidir.

İnce veya kabul edilebilir bir orta kalınlığa sahip plaklarda ele alınabilen KPT'ne göre gerilme-genleme ilişkileri (2.36) ile ve indirgenmiş elastik sabit Q_{ij}'ler (2.37) ile verilmektedir.

Birim uzunluk başına kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} (N_{0x}, N_{0y}, N_{0xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})\, dz \\ (M_{0x}, M_{0y}, M_{0xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})\, z\, dz \end{aligned} \tag{2.45}$$

KPT'ne göre rijitlik katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}\, dz \qquad B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z\, dz \qquad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2\, dz \tag{2.46}$$

(2.44), (2.45) ve (2.46) eşitliklerinden yararlanarak bir plakta KPT'ne göre bünye denklemleri matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} N_{0x} \\ N_{0y} \\ N_{0xy} \\ M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

2.5.2. Kayma Deformasyon Teorileri

Son yıllarda yeni geliştirilen modern malzemelerin statik ve dinamik davranışlarının modellenmesinde KPT'nin yeterli olmadığı anlaşılmıştır. Bu teoriye göre düşey yöndeki kayma deformasyonları dikkate alınmamakta ve bu durum doğal frekanslar›n da hatalı elde edilmesine sebep olmaktadır. Bunun doğal sonucu olarak kenar/kal›nl›k oran› azald›kça hata da büyümektedir. Bu eksikliği gidermek amacıyla düşey kayma genlemelerini göz önüne alan yeni teoriler geliştirilmiştir (Yang vd.,1966, Reddy, 1984). Bu teorilerde varsayılan düzlem içi yer değiştirme bileşenlerinde düşey eksenin her ilave kuvveti için yeni bir bağımlı değişken ilave edilmektedir.

Kayma deformasyon teorilerinde, KPT'nin yer değiştirme alanına eklenen yeni fonksiyonlar z'nin fonksiyonu olan bir şekil fonksiyonu ile çarpılarak genelleştirilmiştir (Soldatos ve Tımarcı, 1993). Birleştirilmiş Kayma Deformasyon Teorisi (BKDT) yaklaşımından yola çıkarak plaklar için yeni bir yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi yaz›lmaktad›r.

$$\begin{aligned} U(x,y,z;t) &= u(x,y;t) - zw_{,x} + \varphi_1(z)u_1(x,y;t) \\ V(x,y,z;t) &= v(x,y;t) - zw_{,y} + \varphi_2(z)v_1(x,y;t) \\ W(x,y,z;t) &= w(x,y;t) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Burada u,v ve w orta düzlemdeki bir noktanın yer değiştirmelerini, $w_{,x}$ ve $w_{,y}$ orta düzleme dik doğrultuların y- ve x- eksenlerine göre dönmelerini göstermektedir. u_1 ve v_1 plak orta düzleminde düşey kayma genlemelerinin etkilerini gösteren bilinmeyenlerdir. Şekil fonksiyonu olarak adlandırılan φ_1 ve φ_2 fonksiyonları, plağın malzeme ve geometri sınırlamalarını sağlayacak şekilde seçilebilir. Bu fonksiyonlar uygunluk aç›s›ndan uzunluk boyutundad›r.

Şekil fonksiyonlarının yardımı ile daha önceki kayma deformasyon teorileri özel bir hal olarak elde edilebilmektedir. Bunlar aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} &\varphi(z) = 0 && \text{KPT} \\ &\varphi(z) = z && \text{UKDT} \\ &\varphi(z) = z(1 - 4z^2/3h^2) && \text{PKDT} \end{aligned} \qquad (2.49)$$

Yer değiştirme alanı bileşenleri, lineer elastik cismin kinematik ilişkilerinde (2.38), ε_z=0 kabulü ile yerine yazılırsa genleme alanı bileşenleri elde edilir.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = U_{,x} = u_{,x} - zw_{,xx} + \phi_1 u_{1,x} \\ &\varepsilon_y = V_{,y} = v_{,y} - zw_{,yy} + \phi_2 v_{1,y} \\ &\gamma_{yz} = V_{,z} + W_{,y} = v_1 \phi_{2,z} \\ &\gamma_{xz} = U_{,z} + W_{,x} = u_1 \phi_{1,z} \\ &\gamma_{xy} = U_{,y} + V_{,x} = u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} + \phi_1 u_{1,y} + \phi_2 v_{1,x} \end{aligned} \qquad (2.50)$$

Burada,

$$\begin{aligned} &e_x^c = u_{,x}, \quad e_y^c = v_{,y}, \quad e_{xy}^c = u_{,y} + v_{,x} \\ &k_x^c = -w_{,xx}, \quad k_y^c = -w_{,yy}, \quad k_{xy}^c = -2w_{,xy} \end{aligned} \qquad (2.51)$$

ve

$$\begin{aligned} &e_{yz}^a = v_1, \quad e_{xz}^a = u_1 \\ &k_x^a = u_{1,x}, \quad k_y^a = v_{1,y}, \quad k_{xy}^a = u_{1,y}, \quad k_{yx}^a = v_{1,x} \end{aligned} \qquad (2.52)$$

olarak tanımlıdır. Buna göre genleme alanı bileşenleri aşağıdaki formu alır.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= e_x^c + zk_x^c + \phi_1 k_x^a \\
\varepsilon_y &= e_y^c + zk_y^c + \phi_2 k_y^a \\
\gamma_{yz} &= e_{yz}^a \phi_2^{'} \\
\gamma_{xz} &= e_{xz}^a \phi_1^{'} \\
\gamma_{xy} &= e_{xy}^c + zk_{xy}^c + \phi_1 k_{xy}^a + \phi_2 k_{yx}^a
\end{aligned}
\qquad (2.53)
$$

Burada e_x ve e_y plak orta düzlemindeki normal genlemeleri, e_{xy}, e_{xy} ve e_{yz} kayma genlemeleri, k_x, xz düzleminde ve k_y, yz düzleminde orta düzlemin eğilme eğrilikleri, k_{xy}, orta düzlemin düzlem dışı dönme eğriliğidir. Bu eşitliklerdeki 'c' üst indisli terimler KPT'ne karşılık gelirken 'a' üst indisi ile verilen terimler BKDT'ne ait ilave terimleri göstermektedir.

BKDT'ne göre gerilme-genleme ilişkileri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_x^c + zk_x^c + \phi_1 k_x^a \\ e_y^c + zk_y^c + \phi_2 k_y^a \\ e_{yz}^a \phi_2^{'} \\ e_{xz}^a \phi_1^{'} \\ e_{xy}^c + zk_{xy}^c + \phi_1 k_{xy}^a + \phi_2 k_{yx}^a \end{bmatrix}
\qquad (2.54)
$$

Düzlem gerilme hali için Q_{ij}'lerin tan›m› (2.37) ile verilmektedir.

Birim uzunluk başına kuvvet ve moment bileşenleri,

$$
\begin{aligned}
(N_{0x}, N_{0y}, N_{0xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\
(M_{0x}, M_{0y}, M_{0xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\
(M_x^a, M_{xy}^a) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \tau_{xy}) \phi_1(z) dz
\end{aligned}
\qquad (2.55)
$$

$$\left(M_y^a, M_{yx}^a\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_y, \tau_{yx}\right) \phi_2(z) dz$$

$$Q_x^a = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \phi_1' dz$$

$$Q_y^a = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \phi_2' dz$$

BKDT'ne göre rijitlik katsay›lar›,

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \qquad B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z dz \qquad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} z^2 dz$$

$$B_{ijl} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \phi_l dz \qquad D_{ijl} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \phi_l z dz \qquad (2.56)$$

$$A_{pqlm} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{pq} \phi_l' \phi_m' dz \qquad D_{ijlm} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \phi_l \phi_m dz$$

$l, m = 1,2,6$

$i, j = 1,2,6$

$p, q = 4,5$

$()' = d() / dz$

olarak verilir. Burada iki indisli katsayılar KPT'den bilinen uzama, birleşme ve eğilme rijitliklerini, ikiden fazla indisi olan katsay›lar da kayma deformasyon etkilerini gösteren katsay›lard›r.

(2.53), (2.54), (2.55) ve (2.56) eşitliklerinden yararlanarak bir plakta BKDT'ne göre bünye denklemleri matris formunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} N_{0x} \\ N_{0y} \\ N_{0xy} \\ M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0xy} \\ M^a_x \\ M^a_y \\ M^a_{xy} \\ M^a_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{111} & B_{122} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{121} & B_{222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{661} & B_{662} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{111} & D_{122} & D_{161} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{121} & D_{222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{661} & D_{662} \\ B_{111} & B_{121} & 0 & D_{111} & D_{121} & D_{161} & D_{1111} & D_{1212} & 0 & 0 \\ B_{122} & B_{222} & 0 & D_{122} & D_{222} & 0 & D_{1212} & D_{2222} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{661} & 0 & 0 & D_{661} & 0 & 0 & D_{6611} & D_{6612} \\ 0 & 0 & B_{662} & 0 & 0 & D_{662} & 0 & 0 & D_{6612} & D_{6622} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^c_x \\ e^c_y \\ e^c_{xy} \\ k^c_x \\ k^c_y \\ k^c_{xy} \\ k^a_x \\ k^a_y \\ k^a_{xy} \\ k^a_{yx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q^a_y \\ Q^a_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{4422} & 0 \\ 0 & A_{5511} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^a_{yz} \\ e^a_{xz} \end{bmatrix} \qquad (2.57)$$

2.5.3. Üç Boyutlu Lineer Elastisite Teorisi

Yap› analiz alan›nda çalışan araştırmacıların temel amaçlarından birisi çözülmek istenen fiziksel problemin matematik modelindeki kabulleri mümkün olduğunca en aza indirerek gerçeğe en yakın davranışı bulmaktır. Bu amaçla üç boyutlu bir analiz yapılar hakk›nda daha güvenilir ve daha fazla bilgi vermektedir.

Üç boyutlu durumda yer değiştirme alanı bileşenleri,

$$\begin{aligned} U(x, y, z; t) &= U(x, y, z; t) \\ V(x, y, z; t) &= V(x, y, z; t) \\ W(x, y, z; t) &= W(x, y, z; t) \end{aligned} \qquad (2.58)$$

şeklindedir ve ayrıca,

$$\begin{aligned} e_x &= u,_x, & e_y &= v,_y, & e_z &= w,_z \\ e_{yz} &= v,_z + w,_x, & e_{xz} &= u,_z + w,_x, & e_{xy} &= u,_y + v,_x \end{aligned} \qquad (2.59)$$

olarak tan›mlan›r.

Üç boyutlu teoriye göre gerilme-genleme ilişkileri (2.34) ile ve uzaysal elastik sabitler olan C_{ij}'ler (2.35) ile verilmektedir.

2.6. Üç Boyutlu Elastisite Teorisine Göre Plaklarda Hareket Denklemlerinin Enerji Formülasyonu

Bu kısımda malzeme özellikleri kalınlık doğrultusunda değişen FD plaklara enerji prensiplerinin uygulanmas› incelenmekte ve bu prensipler varyasyon hesab› ile FD plaklar›n hareket denklemlerinin ç›kart›lmas› için kullan›lmaktad›r. Bu amaçla ilk olarak cismin potansiyel ve kinetik enerjileri tan›mlanmaktad›r.

Denklemlerin bu yol ile elde edilmesi yaklaşık hesaplar için bir temel oluşturmaktadır ve sınır şartlarını vermektedir. Özellikle Ritz ve Galerkin metotları enerji ilkelerine dayanmaktad›r. Ayr›ca enerji ilkeleri sonlu elemanlar yöntemine temel oluşturmaktadır.

Hamilton prensibinden keyfi bir zaman aralığında hareket denklemleri ve uygun sınır şartları belirlenebilir (Whitney, 1987).

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U_G - \delta T)dt = 0 \qquad (t_0 \le t \le t_1) \tag{2.60}$$

Burada, δ varyasyonel semboldür ve bu eşitlikten serbest titreşim problemini yöneten denklemler elde edilir. Bu k›s›mda en genel hal için plak denklemleri elde edilmektedir.

Örnek olarak genleme potansiyel enerjisindeki ilk terimin varyasyonel analizi verilmektedir.

$$\delta U_G = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dV \tag{2.61}$$

Burada ilk terim olan ε_x genlemesi (2.38) ifadeleri ile verilen yer değiştirme bileşenlerinin türevleri cinsinden yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_V \sigma_x \delta\varepsilon_x dV = \iiint \sigma_x \delta u,_x \, dxdydz$$

$$\int_V \sigma_x \delta\varepsilon_x dV = \iint \left(\sigma_x \delta u - \int \delta u \sigma_x,_x \, dx \right) dydz \qquad (2.62)$$

$$\int_V \sigma_x \delta\varepsilon_x dV = \iint \sigma_x \delta u dydz - \iiint \sigma_x,_x \, \delta u dxdydz$$

Benzer işlemler diğer genleme bileşenleri için yapılır ve genleme enerjisinin varyasyonu aşağıdaki forma getirilir.

$$\delta U_G = \frac{1}{2} \left(\iint \left(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau xz \delta w \right) dydz + \iint \left(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau xz \delta w \right) dydz + \right.$$
$$\iint \left(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau xz \delta w \right) dydz - \iiint \left(\left(\sigma_x,_x + \tau_{xy},_y + \tau_{xz},_z \right) \delta u + \left(\tau_{xy},_x + \sigma_y,_y + \tau_{yz},_z \right) \delta v + \right.$$
$$\left. \left(\tau_{xz},_x + \tau_{yz},_y + \sigma_z,_z \right) \delta w \right) dxdydz \qquad (2.63)$$

Yerdeğiştirmeler zamana bağlı alınmadığı için,

$\delta u(t_0)=\delta u(t_1)=\delta v(t_0)=\delta v(t_1)=\delta w(t_0)=\delta w(t_1)=0$

kinetik enerjinin varyasyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\delta T = -\frac{1}{2} \iiint \rho \left(u,_{tt} \, \delta u + v,_{tt} \, \delta v + w,_{tt} \, \delta w \right) dxdydz \qquad (2.64)$$

Bulunan varyasyon ifadeleri genel denklemde yerine yaz›l›r.

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left\{ \iint \left(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w \right) dydz + \iint \left(\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w \right) dxdz + \iint \left(\tau_{xz} \delta u + \tau_{yz} \delta v \right) dxdy - \right.$$
$$\iiint \left(\left(\sigma_x,_x + \tau_{xy},_y + \tau_{xz},_z - \rho u,_{tt} \right) \delta u + \left(\tau_{xy},_x + \sigma_y,_y + \tau_{yz},_z - \rho v,_{tt} \right) \delta v + \left(\tau_{xz},_x + \tau_{yz},_y + \sigma_z,_z - \rho w,_{tt} \right) \delta w \right)$$
$$\left. dxdydz \right\} dt = 0 \qquad (2.65)$$

Bu eşitlikteki hacim integrali ancak aşağıdaki hareket denklemlerinin varlığı ile sağlanabilir.

$$\begin{aligned}
&\sigma_{x},_{x}+\tau_{xy},_{y}+\tau_{xz},_{z}=\rho u,_{tt}\\
&\tau_{xy},_{x}+\sigma_{y},_{y}+\tau_{yz},_{z}=\rho v,_{tt}\\
&\tau_{xz},_{x}+\tau_{yz},_{y}+\sigma_{z},_{z}=\rho w,_{tt}
\end{aligned} \qquad (2.66)$$

2.7. Sınır Şartları

(2.60) eşitliğinin çözümlenmesi sonucunda ortaya çıkan yüzeysel integraller Çizelge 2.1'deki sınır şartlarını verir. Bu sınır şartlarından yer değiştirme bileşenleri (çökme ve dönme) ile ilgili olanlar geometrik sınır şartları, kuvvet ve moment bileşenleri ise doğal sınır şartları adını alır.

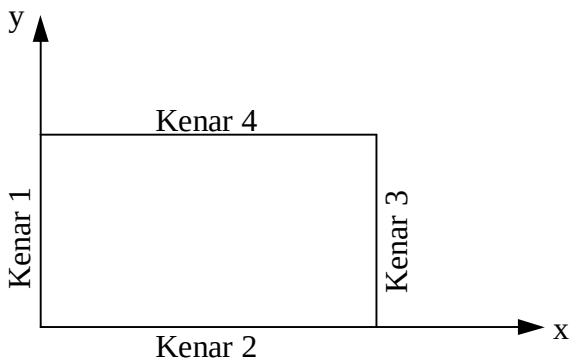
Çizelge 2.1. FDM plak sınır şartları

x=0,a	y=0,b	z=0,h
U yada σ_x	u yada τ_{xy}	u yada τ_{xz}
v yada τ_{xy}	v yada σ_y	v yada τ_{yz}
W yada τ_{xz}	w yada τ_{yz}	w yada σ_z-N_x^d w,xx-N_y^d w,yy-2N_{xy}^d w,xy-q

Çizelge 2.2. x=sabit ve y=sabit kenarlar için sınır şartları

x=sabit		
Basit destekli	(B)	σ_x=v=w=0
Ankastre destekli	(A)	u=v=w=0
Serbest kenarl›	(S)	σ_x= τ_{xy}= τ_{xz}=0
y=sabit		
Basit destekli	(B)	σ_y=u=w=0
Ankastre destekli	(A)	u=v=w=0
Serbest kenarl›	(S)	τ_{xy}=σ_y= τ_{yz}=0

FD plakların sınır şartlarının isimlendirilmesi Şekil 2.13'de gösterildiği sırayla yapılmaktadır. Buna göre x=sabit kenarları basit desteklenmiş, y=0 kenarı ankastre ve y=b kenar› serbest olan plak BABS şeklinde isimlendirilmektedir.



Şekil 2.4. FD plakta sınır şartları

BÖLÜM 3

FD PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

3.1. Giriş

Bu bölümde FD plakların serbest titreşim analizi tüm kenarlarının basit destekli olduğu durumda Navier yöntemi ile BKDT için yapılmaktadır. Sonuçlar KPT, UKDT ve PKDT için elde edilmektedir. Daha sonra analitik çözümün mümkün olmadığı, kenarlarında, keyfi olarak alınan sınır koşularının farklı bileşimlerinde yaklaşık bir çözüm yöntemi olan Ritz yöntemi ile 3-boyutlu lineer elastisite teorisi ve KPT için çözüm elde edilmektedir. Son olarak farklı tipte FD plaklarda mod şekilleri verilmektedir.

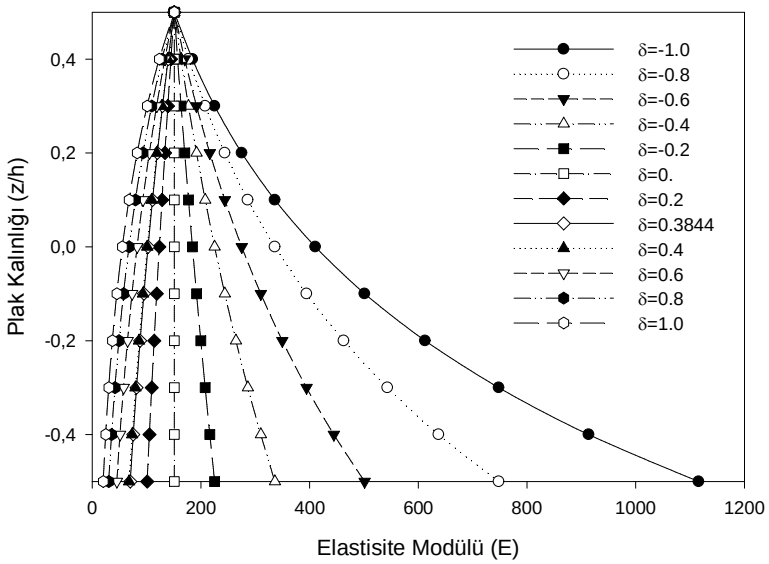
3.2. Malzeme Özellikleri Eksponansiyel Olarak Değişen FD Plakta Rijitlik Katsay›lar›

Bu çalışmada malzeme özelliklerinin değişiminin incelenmesinde ve frekans değerlerinin elde edilmesinde kullanılan iki farklı FDM'nin elastik özellikleri Çizelge 3.1 ile verilmektedir.

Çizelge 3.1. Seramik ve Metal malzemelerin elastik özellikleri (Elastisite modülü E (GPa), Poisson oran› ν, kütle yoğunluğu ρ(kg/m^3))

Malzeme	E	ρ	ν
SUS304	201.04	8166	0.3262
Si_3N_4	348.43	2370	0.2400
Aluminum	70	2707	0.3000
Zirconia	151	3000	0.3000

Plak kalınlığı boyunca elastisite modülünün eksponansiyel değişimi Şekil 3.1 ile verilmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi δ=0 değeri plağın tamamen seramikten yapıldığını göstermektedir.



Şekil 3.1. FD plakta elastisite modülünün δ değerleri ile eksponansiyel değişimi

Malzeme özellikleri (Elastisite modülü) kalınlık doğrultusunda eksponansiyel değişen FD plakta BKDT'ne ait rijitlik katsay›lar›n› bulmak için Q_{ij} elastik sabitleri (2.37), eşitlik (2.56)'da verilen katsayılarda yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= Q_{0ij}\frac{hE_U}{2\delta e^{\delta}}\left[e^{\delta}-e^{-\delta}\right]\\
B_{ij} &= Q_{0ij}\frac{h^2E_U}{4\delta^2 e^{\delta}}\left[(\delta-1)e^{\delta}+(\delta+1)e^{-\delta}\right]\\
D_{ij} &= Q_{0ij}\frac{h^3E_U}{8\delta^3 e^{\delta}}\left[(\delta^2-2\delta+2)e^{\delta}-(\delta^2+2\delta+2)e^{-\delta}\right]
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

Kayma deformasyon teorilerinden gelen ilave rijitlik katsay›lar› UKDT için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$
B_{ijl} = Q_{0ij}\frac{h^2E_U}{4\delta^2 e^{\delta}}\left[(\delta-1)e^{\delta}+(\delta+1)e^{-\delta}\right]
$$

$$D_{ijl} = Q_{0ij}\frac{h^3 E_U}{8\delta^3 e^{\delta}}\left[\left(\delta^2 - 2\delta + 2\right)e^{\delta} - \left(\delta^2 + 2\delta + 2\right)e^{-\delta}\right]$$

$$A_{pqlm} = Q_{0pq}\frac{E_U h}{2\delta e^{\delta}}\left[e^{\delta} - e^{-\delta}\right] \qquad (3.2)$$

$$D_{ijlm} = Q_{0ij}\frac{h^3 E_U}{8\delta^3 e^{\delta}}\left[\left(\delta^2 - 2\delta + 2\right)e^{\delta} - \left(\delta^2 + 2\delta + 2\right)e^{-\delta}\right]$$

Rijitlik katsayıları PKDT için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$B_{ijl} = Q_{0ij}\frac{h^2 E_U}{6\delta^4 e^{\delta}}\left[\left(\delta^3 - 3\delta + 3\right)e^{\delta} + \left(\delta^3 - 3\delta + 3\right)e^{-\delta}\right]$$

$$D_{ijl} = Q_{0ij}\frac{h^3 E_U}{192\delta^3 e^{\delta}}\left[\left(23\delta^5 - 44\delta^4 + 48\delta^3 - 6\delta^2 + 12\delta - 12\right)e^{\delta} - \left(23\delta^5 + 44\delta^4 + 48\delta^3 - 6\delta^2 - 12\delta - 12\right)e^{-\delta}\right]$$

$$A_{pqlm} = Q_{0pq}\frac{hE_U}{\delta^6 e^{\delta}}\left[\left(-2\delta^3 + 3\delta^2 - 6\delta + 6\right)e^{\delta} - \left(-2\delta^3 + 3\delta^2 + 6\delta + 6\right)e^{-\delta}\right] \qquad (3.3)$$

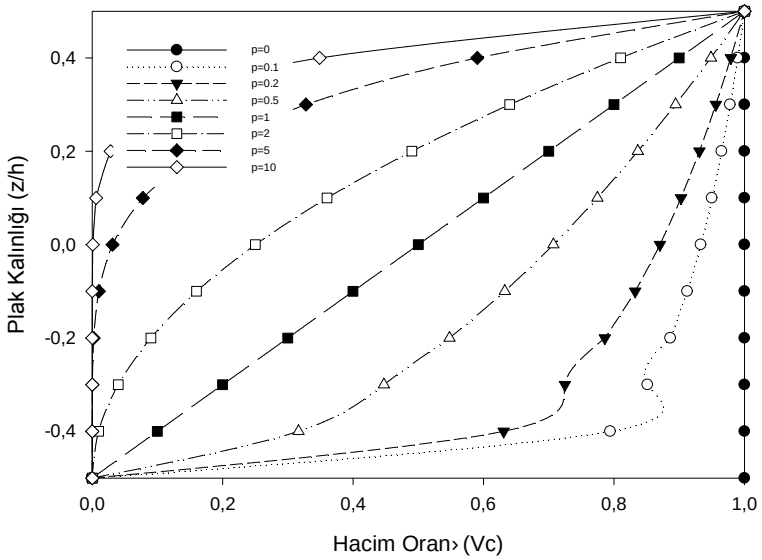
$$D_{ijlm} = Q_{0ij}\frac{E_U}{18\delta^6 e^{\delta}}\left[\left(h^3\left(\delta^5 + 12\delta^3 - 9\delta^2 + 18\delta - 18\right) - 4h\delta^2\left(\delta^2 + 3\delta + 6\right) - 48\delta^2\right)e^{\delta} + \left(h^3\left(-\delta^5 - 12\delta^3 + 9\delta^2 + 18\delta + 18\right) + 4h\delta^2\left(\delta^2 + 3\delta + 6\right) + 48\delta^2\right)e^{-\delta}\right]$$

Burada Q_{0ij}'lerin tanımı aşağıda verilmektedir.

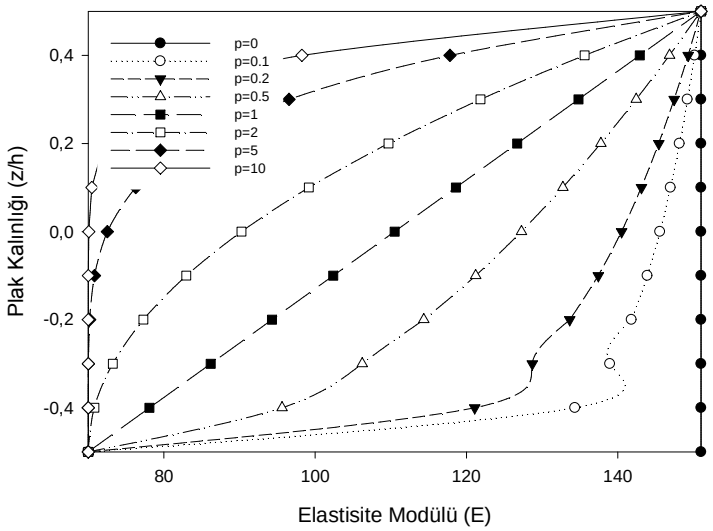
$$Q_{011} = \frac{1}{1-\nu^2} \quad Q_{012} = \frac{\nu}{1-\nu^2} \quad Q_{044} = Q_{055} = Q_{066} = \frac{1}{2(1+\nu)} \qquad (3.4)$$

3.3. Malzeme Özellikleri Kuvvet Kanununa Göre Değişen FD Plakta Rijitlik Katsay›lar›

Plak kalınlığı boyunca üst yüzeydeki malzemenin hacim oranının ve elastisite modülünün kuvvet kanununa göre değişimi Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 ile verilmektedir. Şekillerden de anlaşılacağı gibi p=0 değeri seramik plağa karşılık gelirken p'nin arttırılması ile metal plak özelliklerine yaklaşılmaktadır.



Şekil 3.2. FD plakta seramik malzemenin hacim oran›n›n kuvvet kanununa göre p değerleri ile değişimi



Şekil 3.3. FD plakta elastisite modülünün kuvvet kanununa göre p değerleri ile değişimi

Malzeme özellikleri (Elastisite modülü) kalınlık doğrultusunda kuvvet kanununa göre değişen FD plak için elde edilen rijitlik katsayıları aşağıda verilmektedir.

$$A_{ij} = Q_{0\,ij}\left[\frac{h\left(E_U - E_L\right)}{p+1} + hE_L\right]$$

$$B_{ij} = Q_{0ij}\left[\frac{h^2 p(E_U - E_L)}{2(p+1)(p+2)}\right] \tag{3.6}$$

$$D_{ij} = Q_{0ij}\left[\frac{h^3(p^2+p+2)(E_U - E_L)}{4(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{h^3 E_L}{12}\right]$$

Kayma deformasyon teorilerinden gelen ilave rijitlik katsay›lar› UKDT için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$B_{ijl} = Q_{0ij}\left[\frac{h^2 p(E_U - E_L)}{2(p+1)(p+2)}\right]$$

$$D_{ijl} = Q_{0ij}\left[\frac{h^3(p^2+p+2)(E_U - E_L)}{4(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{h^3 E_L}{12}\right]$$

$$A_{pqlm} = Q_{0pq}\left[\frac{h(E_U - E_L)}{p+1} + hE_L\right] \tag{3.7}$$

$$D_{ijlm} = Q_{0ij}\left[\frac{h^3(p^2+p+2)(E_U - E_L)}{4(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{h^3 E_L}{12}\right]$$

Rijitlik katsayıları PKDT için aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$B_{ijl} = Q_{0ij}\left[\frac{h^2 p(p+7)(E_U - E_L)}{3(p+1)(p+3)(p+4)}\right]$$

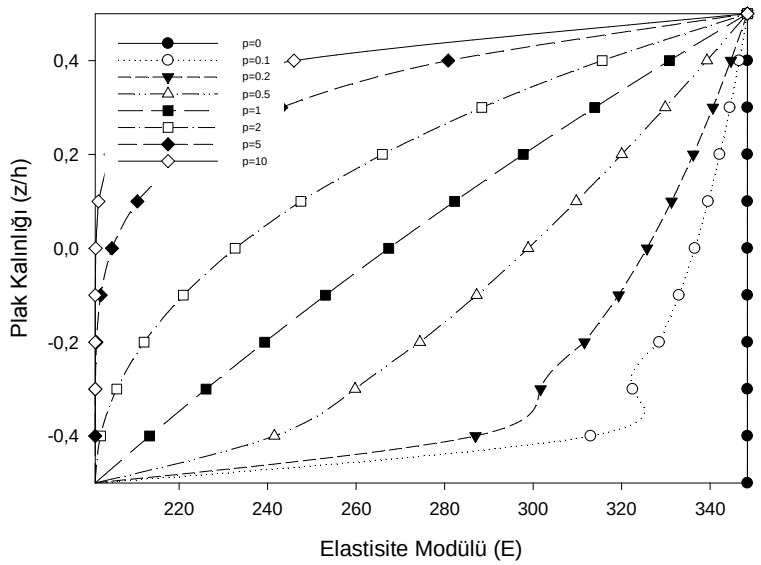
$$D_{ijl} = Q_{0ij}\left[\frac{h^3(p^4+12p^3+35p^2+48p+48)(E_U - E_L)}{6(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)} + \frac{h^3 E_L}{15}\right]$$

$$A_{pqlm} = Q_{0pq}\left[\frac{32h(E_U - E_L)}{(p+3)(p+4)(p+5)} + \frac{8hE_L}{15}\right] \tag{3.8}$$

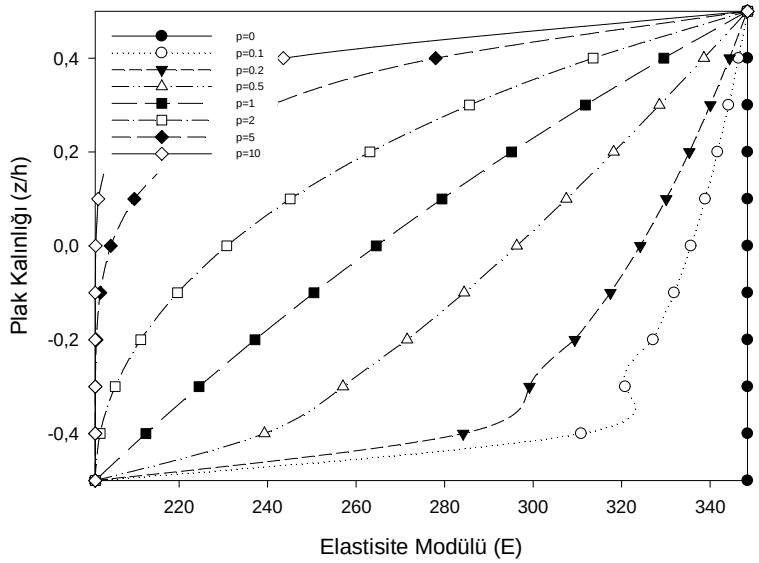
$$D_{ijlm} = Q_{0ij}\left[\frac{h^3(4p^6+118p^5+1084p^4+4740p^3+10143p^2+13296p+9792)(E_U - E_L)}{36(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)(p+7)} + \frac{17h^3 E_L}{315}\right]$$

Q_{0ij}'lerin tan›m› (3.4) nolu denklemle verilmektedir.

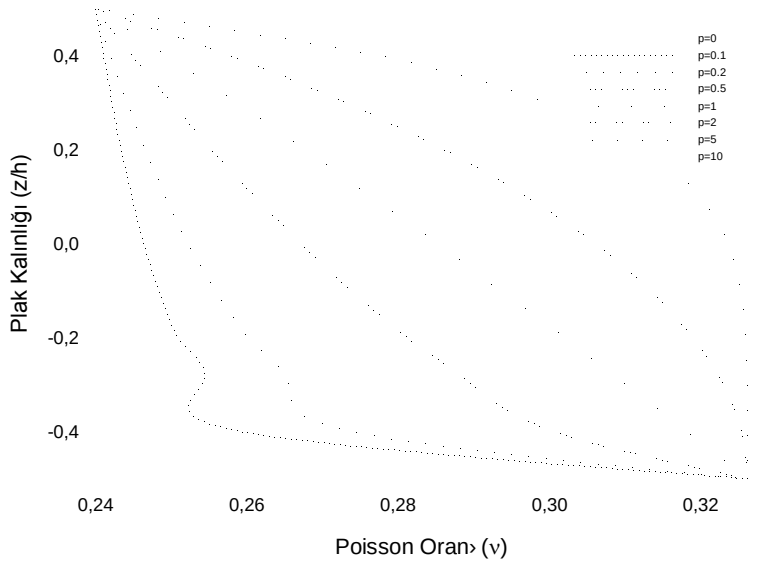
FD plakta malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusunda değişimi mikromekanik yaklaşımlar açısından da incelenmektedir. Bu amaçla FD plakta elastisite modülü ve Poisson oran›n›n matris faz›n seramik ve metal olmas› durumuna göre Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi Şekil 3.4-3.7 ile ve FD plakta elastisite modülü ve Poisson oranının kalınlık boyunca tutarlı modele göre p değerleri ile değişimi Şekil 3.8-3.9 ile verilmektedir. Her iki modelde de p=0 değeri plağın tamamen seramikten yapıldığını göstermektedir ve p=1 değeri için seramik ve metal bileşimin değişimi doğrusaldır.



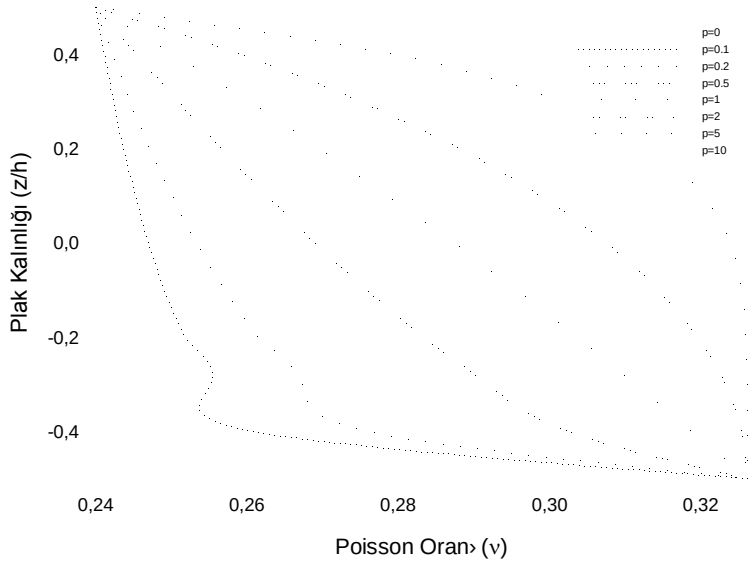
Şekil 3.4. FD plakta Elastisite modülünün matris faz› seramik olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi



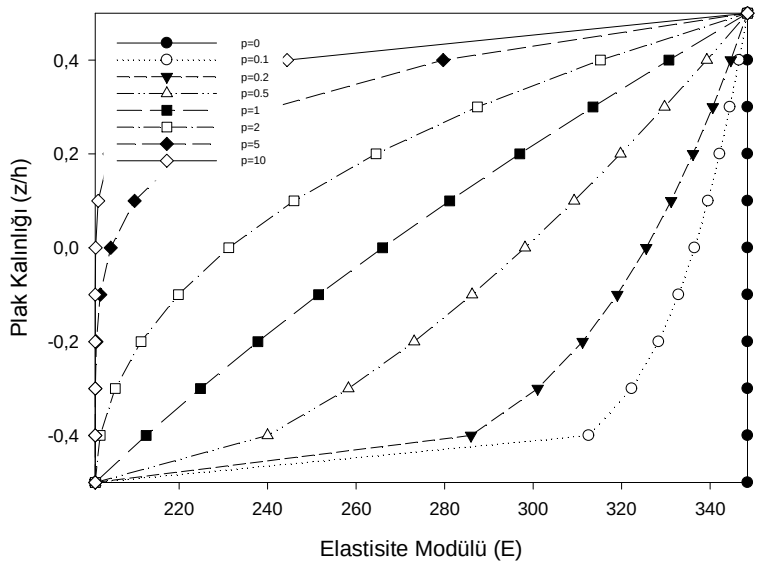
Şekil 3.5. FD plakta Elastisite modülünün matris faz› metal olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi



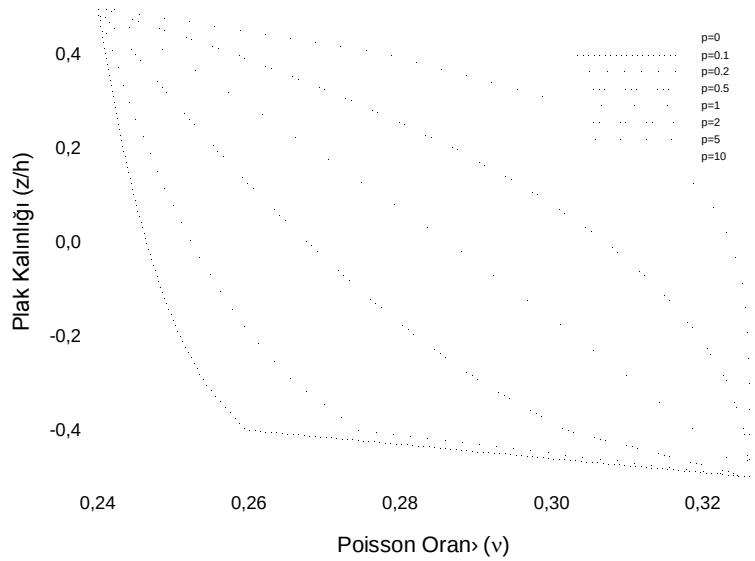
Şekil 3.6. FD plakta Poisson oran›n›n matris faz› seramik olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi



Şekil 3.7. FD plakta Poisson oran›n›n matris faz› metal olan Mori-Tanaka modeline göre p değerleri ile değişimi



Şekil 3.8. FD plakta elastisite modülünün tutarlı modele göre p değerleri ile değişimi



Şekil 3.9. FD plakta Poisson oranının tutarlı modele göre p değerleri ile değişimi

3.4. Serbest Titreşim Probleminin Navier Tipi Yöntem ile Çözümü

Bu k›s›mda, Ek-A'da BKDT için verilen FD plağın titreşim denklemleri ve Kısım 2.7'de verilen basit destek sınır şartları, yer değiştirme alanı bileşenlerinin aşağıdaki gibi trigonometrik fonksiyonlar şeklinde seçilmesiyle sağlanır.

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \\
v &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \\
w &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \\
au_1 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t \\
bv_1 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t
\end{aligned}
\qquad (3.9)
$$

Burada A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} ve E_{mn} bilinmeyen katsay›lar›, m ve n, s›ras›yla x ve y yönlerindeki yar›m dalga say›lar›n› ve ω (rad/sn) dairesel frekans› göstermektedir. Bu

yer değiştirme alanı bileşenleri serbest titreşim denklemlerinde (Ek-A) yerine yaz›l›rsa, aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi elde edilir.

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ & \text{sim.} & & K_{44} & K_{45} \\ & & & & K_{55} \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ & & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ & \text{sim.} & & M_{44} & M_{45} \\ & & & & M_{55} \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

Burada X_i (i=1,2,3,4,5) bilinmeyen katsay›lard›r. M matrisi atalet matrisi, K matrisi kat›l›k matrisi ve Ω boyutsuz serbest titreşim frekansıdır ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\Omega^2 = \rho_u \omega^2 \quad (3.11)$$

Kat›l›k matrisi elemanları aşağıda verilmektedir.

$$K_{11} = A_{11}\frac{m^2\pi^2}{a^2} + A_{66}\frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (3.12)$$

$$K_{12} = (A_{12} + A_{66})\frac{mn\pi^2}{ab}$$

$$K_{13} = -B_{11}\frac{m^3\pi^3}{a^3} - (B_{12} + 2B_{66})\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}$$

$$K_{14} = B_{111}\frac{m^2\pi^2}{a^2} + B_{661}\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$K_{15} = (B_{122} + B_{662})\frac{mn\pi^2}{ab}$$

$$K_{21} = K_{12}$$

$$K_{22} = A_{66}\frac{m^2\pi^2}{a^2} + A_{22}\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$K_{23} = -(B_{12} + 2B_{66})\frac{m^2n\pi^3}{a^2b} - B_{22}\frac{n^3\pi^3}{b^3}$$

$$K_{24} = (B_{121} + B_{661})\frac{mn\pi^2}{ab}$$

$$K_{25} = B_{662}\frac{m^2\pi^2}{a^2} + B_{112}\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$K_{31} = K_{13}$$

$$K_{32} = K_{23}$$

$$K_{33} = D_{11}\frac{m^4\pi^4}{a^4} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2} + D_{22}\frac{n^4\pi^4}{b^4}$$

$$K_{34} = D_{111}\frac{m^3\pi^3}{a^3} + \left(D_{121} + 2D_{661}\right)\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}$$

$$K_{35} = \left(D_{122} + 2D_{662}\right)\frac{m^2n\pi^3}{a^2b} + D_{112}\frac{n^3\pi^3}{b^3}$$

$$K_{41} = K_{14}$$

$$K_{42} = K_{24}$$

$$K_{43} = K_{34}$$

$$K_{44} = -A_{5511} - D_{1111}\frac{m^2\pi^2}{a^2} - D_{6611}\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$K_{45} = \left(D_{1212} + D_{6621}\right)\frac{mn\pi^2}{ab}$$

$$K_{51} = K_{15}$$

$$K_{52} = K_{25}$$

$$K_{53} = K_{35}$$

$$K_{54} = K_{45}$$

$$K_{55} = D_{1122}\frac{n^2\pi^2}{b^2} + D_{6622}\frac{m^2\pi^2}{a^2} + A_{4422}$$

Atalet matrisi elemanları aşağıda verilmektedir.

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= \rho h \\
M_{12} &= 0 \\
M_{13} &= 0 \\
M_{14} &= 0 \\
M_{15} &= 0
\end{aligned}
\qquad (3.13)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{21} &= 0 \\
M_{22} &= \rho h \\
M_{23} &= 0 \\
M_{24} &= 0 \\
M_{25} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{31} &= 0 \\
M_{32} &= 0 \\
M_{33} &= \rho h + \frac{\rho h^3}{12}\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{\rho h^3}{12}\frac{m^2\pi^2}{a^2} \\
M_{34} &= -\frac{\rho h^3}{15}\frac{m\pi}{a} \\
M_{35} &= -\frac{\rho h^3}{15}\frac{n\pi}{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{41} &= 0 \\
M_{42} &= 0 \\
M_{43} &= -\frac{\rho h^3}{15}\frac{m\pi}{a} \\
M_{44} &= \frac{17\rho h^3}{315} \\
M_{45} &= 0
\end{aligned}
$$

$$M_{51} = 0$$
$$M_{52} = 0$$
$$M_{53} = -\frac{\rho h^3}{15}\frac{n\pi}{b}$$
$$M_{54} = 0$$
$$M_{55} = \frac{17\rho h^3}{315}$$

FD plağın serbest titreşimini incelemek için (3.10) ile verilen özdeğer problemi çözülmektedir. Titreşim probleminde frekans parametresi boyutsuz olarak aşağıdaki gibi seçilmektedir.

$$\Delta^2 = \Omega^2 \frac{12(1-\nu^2)a^2b^2}{\pi^4 E_U h^2} \qquad (3.14)$$

Frekans sonuçlar› öncelikle izotropik plak için a/b=0.4,2/3,1.0,1.5,2.5 kenar/kenar oranlarında farklı mod dizilişlerinde KPT'ne göre elde edilmekte ve Leissa, (1973)'da verilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır, (Çizelge 3.2). Sonuçların oldukça uyumlu olduğu ve aralarındaki farkın en fazla % 0.22 olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.3-3.7'de yukarıda verilen a/b değerleri için FD plağa ait serbest titreşim frekansları farklı p üstelleri ve eksponansiyel değişim için elde edilmekte ve böylece a/b oranıyla birlikte malzeme bileşimi değişimin de farklı mod dizilişleri için frekans parametresine etkisi incelenmektedir. FD plaklarda ayn› a/b oran›nda p üstelinin değeri arttıkça frekans parametresinin değeri azalmakta ve aynı p üstelinde a/b oranı arttıkça frekans parametresinin değeri artmaktadır. Aynı mod dizilişi için frekans parametresi en yüksek değerini a/b oranının en büyük ve p üstelinin en küçük değerinde al›r.

Çizelge 3.2. Basit destekli izotropik plakta farklı a/b oranları ve mod dizilişleri için temel frekans sonuçlar›n›n karşılaştırılması

Çözüm yöntemi	**a/b**				
	0.4	**2/3**	**1.0**	**1.5**	**2.5**
Mod dizilişi	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**
Leissa, 1973	11.4487	14.2561	19.7392	32.0762	71.5564
Bu çalışma	11.4485	14.2551	19.7390	32.0761	71.5542
Mod dizilişi	**12**	**12**	**21**	**21**	**21**
Leissa, 1973	16.1862	27.4156	49.3480	61.6850	101.1634
Bu çalışma	16.1861	27.4155	49.3478	61.6847	101.1632
Mod dizilişi	**13**	**21**	**12**	**12**	**31**
Leissa, 1973	24.0818	43.8649	49.3480	98.6960	150.5115
Bu çalışma	24.0813	43.8646	49.3478	98.6955	150.5111
Mod dizilişi	**14**	**13**	**22**	**31**	**41**
Leissa, 1973	35.1358	49.3480	78.9568	111.0330	219.5987
Bu çalışma	35.1355	49.3478	78.9563	111.0329	219.5982
Mod dizilişi	**21**	**22**	**31**	**22**	**12**
Leissa, 1973	41.0576	57.0244	98.6960	128.3049	256.6097
Bu çalışma	41.0573	57.0237	98.6955	128.3043	256.6096
Mod dizilişi	**22**	**23**	**13**	**32**	**22**
Leissa, 1973	45.7950	78.9568	98.6960	177.6529	286.2185
Bu çalışma	45.7942	78.9563	98.6955	177.6524	286.2184
Mod dizilişi	**15**	**14**	**32**	**41**	**51**
Leissa, 1973	49.3480	80.0535	128.3049	180.1203	308.4251
Bu çalışma	49.3478	80.0531	128.3043	180.1199	308.4250
Mod dizilişi	**23**	**31**	**23**	**13**	**32**
Leissa, 1973	53.6906	93.2129	128.3049	209.7291	335.5665
Bu çalışma	53.6899	93.2127	128.3043	209.7290	335.5662
Mod dizilişi	**16**	**32**	**41**	**23**	**61**
Leissa, 1973	66.7185	106.3724	167.7833	239.3379	416.9908
Bu çalışma	66.7181	106.3720	167.7832	239.3378	416.9904

Çizelge 3.3. BBBB ve a/b=0.4 için frekansların p ile değişimi

Mod dizilişi		p						
		0.	**0.1**	**0.2**	**1.0**	**exp**	**2.0**	**10.0**
1	**11**	11.4485	11.0765	10.7661	9.5718	9.4239	9.1602	8.5592
2	**12**	16.1862	15.6591	15.2253	13.5318	13.3236	12.9541	12.1000
3	**13**	24.0818	23.2982	22.6519	20.1323	19.8227	19.2745	18.0030
4	**14**	35.1358	33.9927	33.0501	29.3736	28.9214	28.1249	26.2661
5	**21**	41.0576	39.7229	38.6200	34.3250	33.7951	32.8635	30.6938
6	**22**	45.7950	44.3058	43.0767	38.2858	37.6942	36.6566	34.2360
7	**15**	49.3480	47.7431	46.4188	41.2554	40.6190	39.4994	36.8918
8	**23**	53.6906	51.9452	50.5035	44.8855	44.1934	42.9756	40.1386
9	**16**	66.7185	64.5492	62.7583	55.7764	54.9159	53.4032	49.8779

Çizelge 3.4. BBBB ve a/b=2/3 için frekansların p ile değişimi

Mod dizilişi		p						
		0.	**0.1**	**0.2**	**1.0**	**exp**	**2.0**	**10.0**
1	**11**	14.2558	13.7923	13.4093	11.9188	11.7341	11.4109	10.6578
2	**12**	27.4155	26.5237	25.7877	22.9196	22.5643	21.9456	20.4941
3	**21**	43.8646	42.4383	41.2602	36.6716	36.1001	35.1113	32.7934
4	**13**	49.3478	47.7431	46.4177	41.2578	40.6110	39.5020	36.8918
5	**22**	57.0237	55.1707	53.6396	47.6760	46.9266	45.6465	42.6310
6	**23**	78.9563	76.3898	74.2711	66.0121	64.9685	63.2041	59.0297
7	**14**	80.0531	77.4513	75.3027	66.9298	65.8704	64.0812	59.8473
8	**31**	93.2127	90.1826	87.6798	77.9308	76.6932	74.6154	69.6868
9	**32**	106.3720	102.9145	100.0587	88.9343	87.5146	85.1505	79.5245

Çizelge 3.5. BBBB ve a/b=1.0 için frekansların p ile değişimi

Mod dizilişi		p						
		0.	**0.1**	**0.2**	**1.0**	**exp**	**2.0**	**10.0**
1	**11**	19.7390	19.0973	18.5677	16.5033	16.2483	15.8012	14.7573
2	**21**	49.3478	47.7431	46.4188	41.2578	40.6214	39.5020	36.8932
3	**12**	49.3478	47.7431	46.4188	41.2578	40.6214	39.5020	36.8932
4	**22**	78.9563	76.3898	74.2698	66.0121	64.9935	63.2045	59.0288
5	**31**	98.6955	95.4869	92.8386	82.5152	81.2419	79.0048	73.7852
6	**13**	98.6955	95.4869	92.8386	82.5152	81.2419	79.0048	73.7852
7	**32**	128.3043	124.1338	120.6893	107.2698	105.6139	102.7049	95.9218
8	**23**	128.3043	124.1338	120.6893	107.2698	105.6139	102.7049	95.9218
9	**41**	167.7832	162.3293	157.8258	140.2747	138.1094	134.3060	125.4368

Çizelge 3.6. BBBB ve a/b=1.5 için frekansların p ile değişimi

Mod dizilişi		p						
		0.	**0.1**	**0.2**	**1.0**	**exp**	**2.0**	**10.0**
1	**11**	32.0761	31.0324	30.1713	26.8162	26.4041	25.6770	23.9793
2	**21**	61.6847	59.6792	58.0242	51.5714	50.7770	49.3782	46.1151
3	**12**	98.6955	95.4872	92.8386	82.5167	81.2432	79.0063	73.7862
4	**31**	111.0329	107.4232	104.4438	92.8305	91.3989	88.8820	83.0106
5	**22**	128.3043	124.1340	120.6907	107.2718	105.6163	102.7083	95.9231
6	**32**	177.6524	171.8784	167.1101	148.5298	146.2380	142.2118	132.8168
7	**41**	180.1199	174.2653	169.4305	150.5928	148.2690	144.1874	134.6618
8	**13**	209.7290	202.9120	197.2824	175.3476	172.6420	167.8885	156.7973
9	**23**	239.3378	231.5582	225.1346	200.1029	197.0147	191.5912	178.9335

Çizelge 3.7. BBBB ve a/b=2.5 için frekansların p ile değişimi

Mod		p						
dizilişi		0.	0.1	0.2	1.0	exp	2.0	10.0
1	**11**	71.5542	69.2286	67.3083	59.8248	58.9012	57.2801	53.4949
2	**21**	101.1632	97.8744	95.1599	84.5790	83.2743	80.9815	75.6320
3	**31**	150.5111	145.6187	141.5789	125.8380	123.8963	120.4857	112.5255
4	**41**	219.5982	212.4606	206.5669	183.5998	180.7664	175.7899	164.1761
5	**12**	256.6096	248.2689	241.3811	214.5441	211.2327	205.4175	191.8470
6	**22**	286.2184	276.9151	269.2330	239.2989	235.6056	229.1200	213.9832
7	**51**	308.4250	298.3999	290.1215	257.8652	253.8858	246.8967	230.5851
8	**32**	335.5662	324.6590	315.6525	280.5574	276.2274	268.6233	250.8764
9	**61**	416.9904	403.4171	392.2448	348.6337	343.2532	333.8038	311.7507

3.5. Ritz Yönteminin FD Plakların Titreşim Problemine Uygulanması

Uygulamada çoğu kez titreşimin diferansiyel denkleminin çözümünden çok doğal frekansı önem kazanmaktadır. Bu nedenle titreşime özgü diferansiyel denklemi yazmadan doğal frekansı doğrudan doğruya hesap etmeye olanak veren yöntemlerden yararlan›l›r. Enerji yöntemi bunlardan biridir ve tek serbestlik dereceli basit sistemlerde doğal frekans için tam doğru sonucu vermektedir. Daha karışık, serbestlik derecesi yüksek olan sistemlerin doğal frekanslarının hesabında bu yöntemin genelleştirilmiş bir biçimi olan Rayleigh yöntemi kullanılır ve yaklaşık sonuçlar elde edilir. Ritz yöntemi ise serbestlik derecesi sayısını indirgeyerek doğal frekansa yakın frekanslar ve modlar bulan genel bir tekniktir. 1909 y›l›nda Ritz taraf›ndan Rayleigh yönteminin genişletilmişi olarak önerilmiştir.

Minimum enerji prensibine dayanan Ritz yöntemiyle yer değiştirme alanları, hareket denklemlerini elde etmeksizin yaklaşık olarak bulunabilir. Toplam enerji fonksiyonelini tanımlamak için 3 serbestlik dereceli KPT çerçevesinde aşağıda verildiği gibi yaklaşık bir yer değiştirme alanı önerilir (Langhaar, 1962, Leissa, 1969).

$$u = \sum_{i=0}^{I} A_i f_i(x,y,z)$$
$$v = \sum_{l=0}^{L} B_l f_l(x,y,z) \qquad (3.15)$$
$$w = \sum_{p=0}^{P} C_p f_p(x,y,z)$$

Bu eşitliklerde u, v ve w sırasıyla x, y ve z yönlerindeki yer değiştirme bileşenlerinin yaklaşık ifadeleri, A_i, B_l ve C_p, bilinmeyen katsay›lar ve f_i, f_l ve f_p, en az›ndan kenarlarda verilen geometrik sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen sürekli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar matematik olarak tam ise, varsayılan yer değiştirme bileşenleri, serilerin üst sınırları sonsuza giderken gerçek değerlerine yakınsarlar. Titreşim probleminde plağın toplam enerji fonksiyoneli, plak genleme potansiyel enerjisi U_G ve plak kinetik enerjisi T olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Pi = U_{G\max} - T_{\max} \qquad (3.16)$$

Tanımlanan bu enerji fonksiyoneli, (3.15) ile verilen yer değiştirme alanı bileşenleri cinsinden elde edilerek bilinmeyen katsayılara göre aşağ›daki gibi minimize edilirse,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial B_l} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial C_p} = 0 \qquad (3.17)$$
$$(i = 0,1,2,...,I; \quad l = 0,1,2,...,L; \quad p = 0,1,2,...,P)$$

bu katsay›lar cinsinden bir homojen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemindeki katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapacak özdeğerler, gerçek değerlere üst sınır oluşturur. Matris boyutu (3.15) eşitliğindeki serilerde alınacak terim sayısına bağlıdır. Bu özdeğerlerin en küçüğü temel serbest titreşim frekans parametresine karşılık gelir.

Plak titreşim problemlerinde seçilecek yer değiştirme alanı, en azından yer değiştirme ve eğimlerden oluşan geometrik sınır şartlarını sağlamalıdır. Kuvvet ve momentlerden oluşan doğal sınır şartlarının sağlanması zorunlu değildir. Verilen sınır

şartlarını sağlamanın değişik yolları vardır. Olası yöntemlerden birisi aşağıda verildiği gibi bir fonksiyon seçmektir.

$$u_i = \sum_{i=0}^{I} A_i f_i = A_0 f_0 + \sum_{i=1}^{I} A_i f_i \qquad (3.18)$$

Bu ifadede f_0 sınır şartlarını sağlayan, f_i ise s›n›rda s›f›r olan bir fonksiyondur. Ancak bu tip bir yaklaşım plak problemlerinde pek kullanılmaz. Sıkça kullanılan diğer bir yaklaşımda aşağıda verilen ifade kullanılır.

$$u_i = \sum_{i=0}^{I} A_i f_i \qquad (3.19)$$

Burada her bir f_i terimi (i=0,1,2, …,I) sınır şartlarını sağlar.

Ritz yönteminde yakınsamanın hızlı olması ve sayısal kararlılık sağlanması aç›s›ndan seçilecek f_i sisteminin uygunluğu önemlidir. Yeterli terim sayısının da alınmasıyla analitik çözüme yaklaşmak mümkündür. İncelenen çalışmalar arasında çoğunlukla trigonometrik fonksiyonlar (Aydoğdu ve Tımarcı, 2001a), basit polinomlar (Aydoğdu ve Tımarcı, 2003, Aydoğdu, 2005), çift katlı Fourier serileri (Kim, 2005) ve ortogonal polinomlar›n (Bhat, 1985, Dickinson ve Blasio, 1985, Liew vd., 1993), farkl› teorilere dayanarak ele alındığı görülmektedir. Bu çalışmada yer değiştirme alanı fonksiyonlar› olarak bir sonraki k›s›mda daha detayl› olarak ele al›nan Chebyshev polinomlar› (Zhou vd., 2002) kullan›lmaktad›r.

3.6. Chebyshev Polinomlar›

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılar ve x bir reel değişken olmak üzere,

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (3.20)$$

n.ci dereceden bir polinom olsun. Polinom fonksiyonlar› çok uygun özelliklere sahiptirler. Polinomlarda x'in istenilen her değeri için türev alınabilir ve herhangi bir aralıkta integral alınabilir. Bundan başka p(x) polinomu $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ gibi n+1 tane katsay› taraf›ndan tam olarak belirtilebilir.

n negatif olmayan bir tamsay›, $x=\cos\theta$ ve $0\leq\theta\leq\pi$ olmak üzere,

$$T_n(x)=\cos n\theta \tag{3.21}$$

fonksiyonu tan›mlans›n. θ s›f›rdan π'ye artarken, x- 1'den -1'e azal›r. $T_n(x)$ fonksiyonu I=[-1,1] aralığında tanımlanmış olur. $x=\cos\theta$ ise $\theta=\arccos x$'dir.

$$T_n(x)=\cos n(\arccos x) \tag{3.22}$$

$T_n(x)$ polinomunun I aralığı üzerinde değerler alan n dereceli bir Chebyshev polinomu olduğu Ek B'de verilmektedir.

Chebyshev polinomlar›, [-1,1] aralığında aynı en büyük ve en küçük artı ve eksi değerler arasında salınım yaptıklarından, eşit salınımlı (equal ripple) polinom olma özelliğini taşımaktadırlar ve bu özellikleri sayesinde yaklaşım fonksiyonundaki hatayı en küçük yapmaya çalışırlar. Dolay›s›yla minimaks kriterine yöneliktir. En küçük kareler yöntemi karelerin toplamını, Chebyshev yaklaşımı ise en büyük hatayı en küçük yapmaya çalışır. Polinomlar ile interpolasyon yapıldığında nokta sayısı arttıkça, aralık kenarlar›nda fonksiyon değerlerinde büyük sapmalar olmaktadır. Bu sapmaları Chebyshev polinomlarını kullanarak önlemek mümkündür (Bakioğlu, 2004).

Burada bahsedilen minimaks kriteri kısaca şu şekilde tanımlanabilmektedir: Bir f(x) fonksiyonu ile bu fonksiyonun yaklaşım fonksiyonu olan g(x) fonksiyonu ($f(x)\approx g(x)$) arasındaki farkların mutlak değerlerinin toplamının en küçük yapılmasıdır. Matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Bakioğlu, 2004).

$$\max_{a\leq x\leq b}\left|f(x)-g(x)\right| \tag{3.23}$$

3.7. Serbest Titreşim Probleminin Ritz Yöntemi ile Çözümü

Çalışmanın bu kısmında FD plaklarda serbest titreşim problemine enerji yöntemi olan Ritz yöntemi ile genel sınır koşullarında 3-boyutlu elastisite teorisi ve tüm kenarlarının basit destekli olması koşulunda KPT için çözüm elde edilmektedir. FD plakta Elastisite modülü ve yoğunluğun kalınlık doğrultusunda bir kuvvet kanununa göre değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu kabul edilmektedir.

3.7.1. 3-Boyutlu Lineer Elastisite Teorisiyle Çözüm

Çalışmanın bu k›sm›nda genel sınır koşulları için FDM plaklarda serbest titreşim problemi 3-boyutlu lineer elastisite teorisi kapsamında incelenmektedir. Yer değiştirme alan› genlik fonksiyonlar›,

$$\begin{aligned} U(X,Y,Z) &= F_u(X,Y)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i(X) P_j(Y) P_k(Z) \sin \omega t \\ V(X,Y,Z) &= F_v(X,Y)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l(X) P_m(Y) P_n(Z) \sin \omega t \\ W(X,Y,Z) &= F_w(X,Y)\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} C_{pqr} P_p(X) P_q(Y) P_r(Z) \sin \omega t \end{aligned} \qquad (3.24)$$

ile verildiği gibi plağın geometrik sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme alanı bileşenlerinin sınır fonksiyonları ile Chebyshev polinomlarının çarpımı şeklindedir. Burada A_{ijk}, B_{lmn} ve C_{pqr} bilinmeyen katsay›lard›r. $P_s(\xi)$ (s=1,2,3,…, ξ=X,Y,Z) kosinüs fonksiyonlar›na göre aşağıdaki gibi yazılabilen bir boyutlu s. Chebyshev polinomudur.

$$P_s(\xi) = \cos[(s-1)\arccos(\xi)] \qquad (s = 1,2,3,...) \qquad (3.25)$$

Yer değiştirme alanı genlik fonksiyonlarına karşılık gelen sınır fonksiyonları $F_u(X,Y)$, Fv(X,Y) ve Fw(X,Y),

$$F_\delta(X,Y) = f_\delta^1(X) f_\delta^2(Y) \qquad (\delta = u, v, w) \qquad (3.26)$$

olarak yazılabilir. Sınır koşulları x=sbt. kenar için aşağıdaki formda yazılabilir.

Serbest kenar

$$\sigma_x = 0,\ \tau_{xy} = 0 \ \text{ and } \ \tau_{xz} = 0. \tag{3.27}$$

Basit destekli kenar

$$w = 0,\ v = 0 \ \text{ and } \ \sigma_x = 0. \tag{3.28}$$

Ankastre kenar

$$w = 0,\ v = 0 \ \text{ and } \ u = 0. \tag{3.29}$$

x-ekseni için farklı sınır koşullarına karşılık gelen sınır fonksiyonu bileşenleri Çizelge 3.8 ile verilmiştir.

Çizelge 3.8. Klasik sınır koşullar› için s›n›r fonksiyonlar› (Zhou vd.,2002)

S.K.	$\mathbf{f_u^1}$	$\mathbf{f_v^1}$	$\mathbf{f_w^1}$
S-S	1	1	1
B-S	1	1+X	1+X
B-B	1	$1-X^2$	$1-X^2$
A-S	1+X	1+X	1+X
A-B	1+X	$1-X^2$	$1-X^2$
A-A	$1-X^2$	$1-X^2$	$1-X^2$

Yer değiştirme alanı bileşenleri genleme potansiyel enerjisi ve kinetik enerji ifadelerinde yerine koyularak maksimum enerji fonksiyonelinin bilinmeyen katsay›lara göre minimizasyonu aşağıdaki gibi yapılır.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial B_{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{\bar{p}\bar{q}\bar{r}}} = 0 \qquad \left(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r} = 1,2,3...\right) \tag{3.30}$$

Bu işlem sonucunda aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi elde edilir.

$$\left[\begin{bmatrix}[K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}]\\ & [K_{22}] & [K_{23}]\\ \text{sim.} & & [K_{33}]\end{bmatrix}-\Omega^2\begin{bmatrix}[M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}]\\ & [M_{22}] & [M_{23}]\\ \text{sim.} & & [M_{33}]\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}[A_{ijk}]\\ [B_{lmn}]\\ [C_{pqr}]\end{Bmatrix}=[0] \tag{3.31}$$

Burada $[K_{ij}]$ ve $[M_{ij}]$ terimleri EK-C'de verilmektedir ve s›f›rdan farkl› çözüm (non-trivial) elde etmek için determinantı sıfır yapan özdeğerler (Ω) serbest titreşim frekans parametresine karşılık gelir ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Omega^2=\frac{a^2\rho_u\omega^2}{E_u} \tag{3.32}$$

Bu özdeğer problemindeki kare matrisin boyutları [(I+1)(J+1)(K+1)+(L+1)(M+1)(N+1)+(P+1)(Q+1)(R+1)] ifadesi ile bulunur.

Ritz yönteminde yap›lan hesaplamalar örnek olmas› aç›s›ndan, varsay›lan yer değiştirme bileşenlerinin elastisite modülü ve yoğunluğun kalınlık doğrultusunda değiştiği FD plağa ait enerji fonksiyoneli ifadesinde (3.16) yerine yazılmasıyla elde edilen fonksiyonelin ilk terimi için yap›lan işlemler aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}\Pi=\iiint\Bigg[&\frac{1-\nu}{1-2\nu}\Bigg\{\Bigg(F_u,_x\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_iP_jP_k+F_u\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_i,_xP_jP_k\Bigg)^2+\\ &\lambda^2\Bigg\{\Bigg(F_v,_y\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{lmn}P_lP_mP_n+F_v\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{lmn}P_lP_m,_yP_n\Bigg)^2+\\ &\frac{\lambda^2}{\gamma^2}\Bigg\{\Bigg(F_w\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}C_{pqr}P_pP_qP_r\Bigg)^2+\ldots\Bigg]dXdYdZ\end{aligned} \tag{3.33}$$

Fonksiyonelin ilk teriminin A_{ijk} katsay›s›na göre belirli $\bar{i}$, $\bar{j}$ ve $\bar{k}$ için minimizasyonu ise aşağıdaki ifadeleri verir.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} = \frac{1}{2}\iiint\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left\{2\left(F_{u},_{x}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_{i}P_{j}P_{k} + F_{u}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_{i},_{x}P_{j}P_{k}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}}\left(F_{u},_{x}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_{i}P_{j}P_{k} + F_{u}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_{i},_{x}P_{j}P_{k}\right)\right\} + \ldots\right]dXdYdZ \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} = \frac{1}{2}\iiint\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left\{2\left(F_{u},_{x}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_{i}P_{j}P_{k} + F_{u}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}P_{i},_{x}P_{j}P_{k}\right)\right.\right. \quad (3.35)$$
$$\left.\left.\left(F_{u},_{x}P_{\bar{i}}P_{\bar{j}}P_{\bar{k}} + F_{u}P_{\bar{i}},_{x}P_{\bar{j}}P_{\bar{k}}\right)\right\} + \ldots\right]dXdYdZ$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\iiint\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(F_{u,x}^{2}P_{i}P_{\bar{i}}P_{j}P_{\bar{j}}P_{k}P_{\bar{k}} + F_{u}F_{u,x}P_{i}P_{\bar{i},x}P_{j}P_{\bar{j}}P_{k}P_{\bar{k}} + F_{u}F_{u,x}P_{i,x}P_{\bar{i}}P_{j}P_{\bar{j}}P_{k}P_{\bar{k}} + \right.\right.\right.$$
$$F_{u}^{2}P_{i,x}P_{\bar{i},x}P_{j}P_{\bar{j}}P_{k}P_{\bar{k}}\Big) + \frac{\lambda^{2}}{2}\Big(F_{u,y}^{2}P_{i}P_{\bar{i}}P_{j}P_{\bar{j}}P_{k}P_{\bar{k}} + F_{u}F_{u,y}P_{i}P_{\bar{i}}P_{j}P_{\bar{j},y}P_{k}P_{\bar{k}} + \quad (3.36)$$
$$F_{u}F_{u,y}P_{i}P_{\bar{i}}P_{j,y}P_{\bar{j}}P_{k}P_{\bar{k}} + F_{u}^{2}P_{i}P_{\bar{i}}P_{j,y}P_{\bar{j},y}P_{k}P_{\bar{k}} + \frac{1}{\gamma^{2}}F_{u}^{2}P_{i}P_{\bar{i}}P_{j}P_{\bar{j}}P_{k,z}P_{\bar{k},z}\Big)$$
$$\left.\left.\right\}dXdYdZ\right]A_{ijk} + \ldots$$

Bu eşitlikte ortaya çıkan integrallerin nümerik olarak FORTRAN 77 programlama dili ile hesaplaması yapılmaktadır ve hazırlanan bilgisayar programının akış diyagram› EK-E'de verilmektedir. Tüm sonuçlar çift incelikli say›lar kullan›larak elde edilmektedir.

Plağa ait boyutsuz frekans parametresi diğer çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için aşağıdaki gibi seçilmektedir.

$$\Delta^{2} = \Omega^{2}\frac{12(1-\nu^{2})b^{2}}{\pi^{4}h^{2}} \quad (3.37)$$

Temel frekans parametrelerinin yakınsaması ele alınan beş farklı sınır koşulu için Çizelge 3.9 ile verilmektedir. Bütün doğrultulardaki terim sayıları eşittir. I=J=K=5 terimden itibaren referans sonuçlarla oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmektedir. Tüm durumlarda 5- ve 6- terim sonuçları arasındaki maksimum fark % 2.3'tür. Çalışmadaki hassasiyeti artt›rmak amac›yla bu k›s›mda bundan sonraki hesaplamalarda al›nan terim

say›s› IxJxK=6x6x6'd›r. Kenarlardaki s›n›rland›rmalar artt›kça yak›nsama daha iyi olmaktad›r.

Çizelge 3.9. FDM kare plaklarda a/h=5 ve p=10 için farklı sınır koşularında boyutsuz frekans parametresinin yak›nsamas›

IxJxK	Sınır Koşulları				
	BBBB	BSBS	ASAS	BABA	AAAA
2×2×2	1.5937	0.8770	1.8049	2.1377	2.6076
3×3×3	1.4662	0.7983	1.4577	1.8520	2.1840
4×4×4	1.3711	0.7115	1.3957	1.7635	2.0976
5×5×5	1.3711	0.7095	1.3852	1.7578	2.0880
6×6×6	1.3711	0.7093	1.3820	1.7549	2.0832

Bu k›s›mda elde edilen sonuçlar Liew vd. (1993)'nin farkl› a/h oranlar› için elde ettiği sonuçlarla karşılaştırılmaktadır, (Çizelge 3.10). İnce plaklardan kalın plaklara sonuçların tüm sınır koşulları için oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.10. İzotropik kare plaklarda farklı sınır koşuları için boyutsuz frekans parametresinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması

a/h	Çözüm yöntemi	Sınır Koşulları				
		BBBB	BSBS	ASAS	BABA	AAAA
2	Liew vd,1993	1.2590	0.7261	1.0723	1.3836	1.5496
	Bu çalışma	1.2589	0.7263	1.0723	1.3038	1.5556
5	Liew vd,1993	1.7758	0.9120	1.7996	2.2920	2.7261
	Bu çalışma	1.7748	0.9127	1.8110	2.3000	2.7404
10	Liew vd,1993	1.9342	0.9571	2.1050	2.7188	3.3215
	Bu çalışma	1.9339	0.9581	2.1260	2.7349	3.3496
100	Liew vd,1993	1.9993	0.9755	2.2482	2.9351	3.6492
	Bu çalışma	1.9974	0.9757	2.2781	2.9614	3.6946

Malzeme üstelinin 0'dan 10'a ve kenar-kalınlık oranının 2'den 100'e değişen değerleri için elde edilen frekans parametreleri Çizelge 3.11-3.15 ile verilmektedir. Ele

alınan tüm sınır koşullarında a/h oranı arttıkça frekans parametreleri artmaktadır. Frekans parametreleri a/h=50 oranından sonra kesin bir değere yakınsamaktadır. Frekans parametreleri p üstelinin değeri arttıkça artmakta ve p üstelinin 0 değeri seramik malzemenin frekans parametresine karşılık gelmektedir. En yüksek ve en düşük frekans parametreleri s›ras›yla AAAA ve BSBS sınır koşullarında elde edilmektedir. Kenarlardaki kısıtlamalar arttıkça frekans parametresinin değeri artmaktadır.

Çizelge 3.11. FD kare plaklarda boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi

	p								
a/h	0. (Seramik)	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.	Metal
2	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507	0.9023
5	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711	1.2721
10	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066	1.3861
20	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491	1.4027
50	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620	1.4317
100	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652	1.4317

Çizelge 3.12. FD kare plaklarda boyutsuz frekans parametresinin BSBS sınır koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi

	p								
a/h	0. (Seramik)	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.	Metal
2	0.7263	0.7082	0.6930	0.6593	0.6268	0.5974	0.5698	0.5546	0.5205
5	0.9127	0.8876	0.8669	0.8228	0.7838	0.7541	0.7288	0.7095	0.6541
10	0.9581	0.9311	0.9088	0.8619	0.8215	0.7924	0.7687	0.7483	0.6867
20	0.9710	0.9439	0.9208	0.8734	0.8324	0.8037	0.7810	0.7602	0.6959
50	0.9751	0.9476	0.9246	0.8769	0.8360	0.8074	0.7842	0.7635	0.6989
100	0.9757	0.9481	0.9251	0.8774	0.8366	0.8074	0.7848	0.7641	0.6993

Çizelge 3.13. FD kare plaklarda boyutsuz frekans parametresinin ASAS sınır koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi

a/h	p								
	0. (Seramik)	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.	Metal
2	1.0723	1.0535	1.0344	0.9848	0.9380	0.8831	0.8246	0.7999	0.7686
5	1.8110	1.7663	1.7262	1.6431	1.5620	1.4899	1.4212	1.3820	1.2981
10	2.1260	2.0688	2.0199	1.9183	1.8275	1.7549	1.6941	1.6492	1.5238
20	2.2383	2.1748	2.1236	2.0124	1.9183	1.8520	1.7944	1.7464	1.6043
50	2.2737	2.2090	2.1563	2.0445	1.9493	1.8814	1.8275	1.7804	1.6297
100	2.2781	2.2135	2.1610	2.0493	1.9544	1.8867	1.8330	1.7832	1.6329

Çizelge 3.14. FD kare plaklarda boyutsuz frekans parametresinin BABA sınır koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi

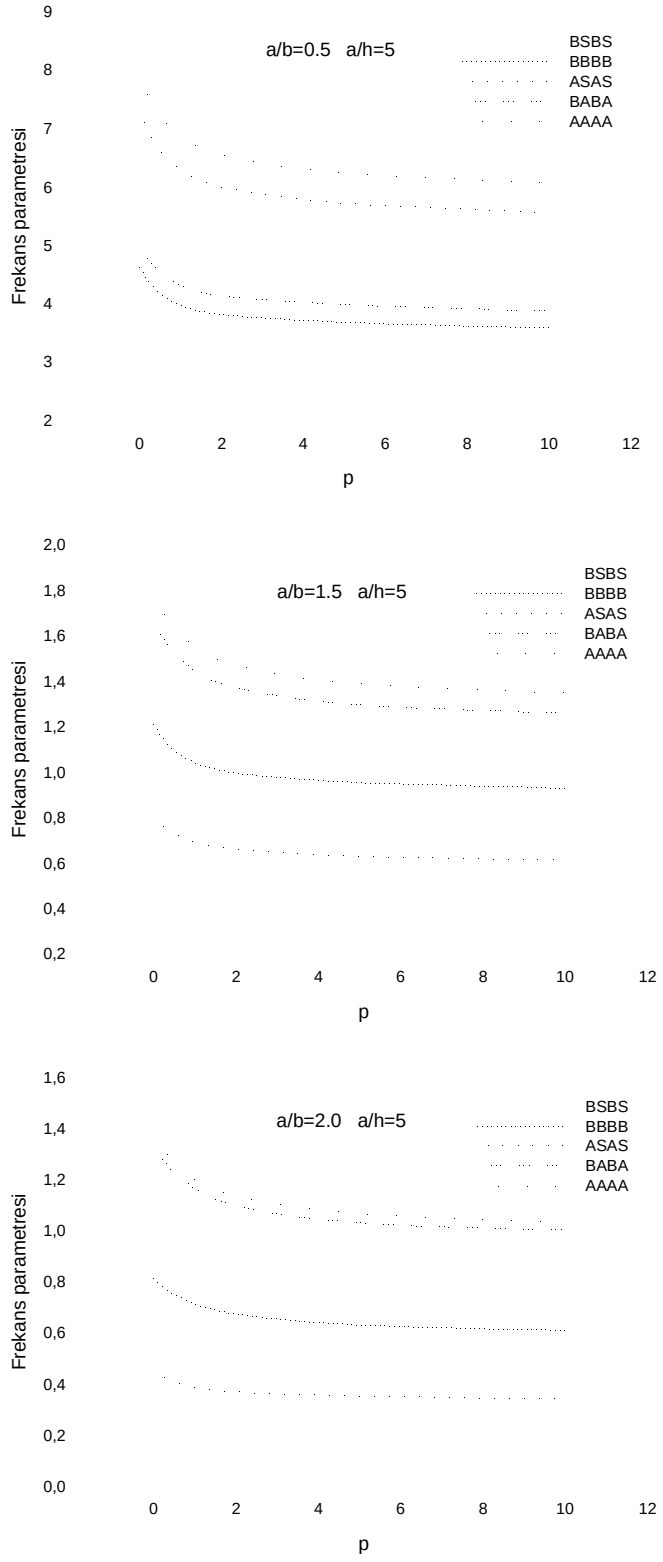
a/h	p								
	0. (Seramik)	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.	Metal
2	1.3038	1.2767	1.2529	1.1958	1.1357	1.0723	1.0049	0.9746	0.9345
5	2.3000	2.2427	2.1954	2.0880	1.9849	1.8947	1.8055	1.7549	1.6485
10	2.7349	2.6608	2.6000	2.4678	2.3516	2.2605	2.1794	2.1213	1.9603
20	2.9000	2.8195	2.7513	2.6096	2.4879	2.4000	2.3259	2.2649	2.0786
50	2.9529	2.8688	2.8000	2.6551	2.5318	2.4454	2.3748	2.3108	2.1165
100	2.9614	2.8775	2.8089	2.6627	2.5377	2.4515	2.3832	2.3194	2.1226

Çizelge 3.15. FD kare plaklarda boyutsuz frekans parametresinin AAAA s›n›r koşulu için a/h oranı ve p değerleri ile değişimi

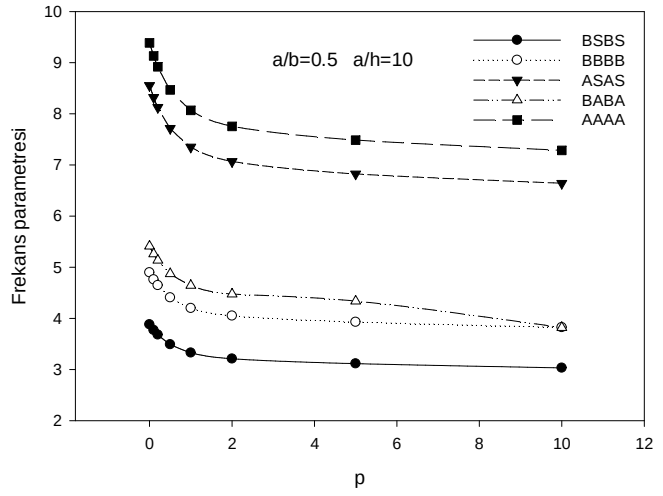
a/h	p								
	0. (Seramik)	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.	Metal
2	1.5556	1.5231	1.4933	1.4282	1.3564	1.2767	1.1916	1.1575	1.1149
5	2.7404	2.6739	2.6172	2.4919	2.3706	2.2561	2.1447	2.0832	1.9642
10	3.3496	3.2603	3.1859	3.0249	2.8809	2.7658	2.6645	2.5923	2.4009
20	3.5986	3.4971	3.4146	3.2388	3.0870	2.9765	2.8844	2.8071	2.5793
50	3.6810	3.5763	3.4914	3.3106	3.1559	3.0479	2.9597	2.8809	2.6384
100	3.6946	3.5888	3.5028	3.3211	3.1670	3.0577	2.9715	2.8931	2.6481

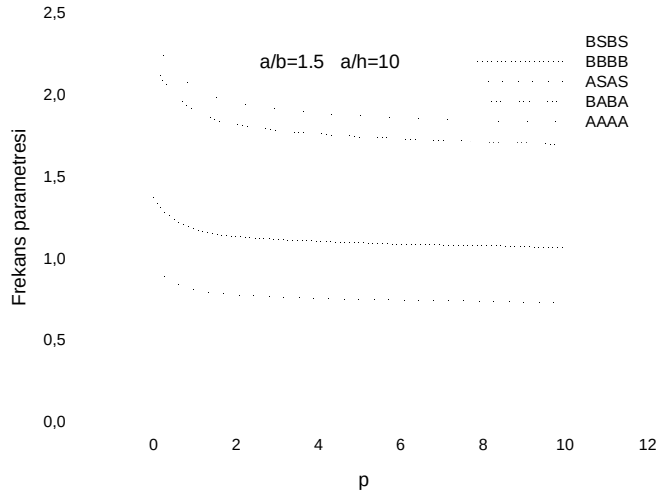
Frekans parametresinin farkl› a/h ve a/b oranlar› için ele al›nan tüm s›n›r koşullarında p üsteliyle değişimi Şekil 3.10-3.13 ile verilmektedir. Fonksiyonel derecelendirme üsteli p'nin artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. İncelenen tüm durumlar için frekansın p üsteline duyarlılığı p>2 olması durumunda azalmaktadır. Bu durum p>2 değerleri için plağın elastisite modülünün metalin elastisite modülüne yaklaşması olarak açıklanabilir (Şekil 3.3). Şekillere göre a/h'ın artmasıyla frekanslar artarken a/b'nin artmasıyla frekanslar azalmaktadır. İncelenen sınır şartlarına ait frekansların büyükten küçüğe sıralanışı a/b oranının değişmesiyle değişmektedir. Örneğin a/b=0.5 iken tüm kenar kalınlık oranları için temel frekansın sınır şartlarına göre küçükten büyüğe sıralanışı BSBS, BBBB, BABA, ASAS ve AAAA şeklinde iken, a/b=1,5 ve a/b=2 için bu sıralanış BSBS, ASAS, BBBB, BABA ve AAAA şeklinde olmaktad›r.

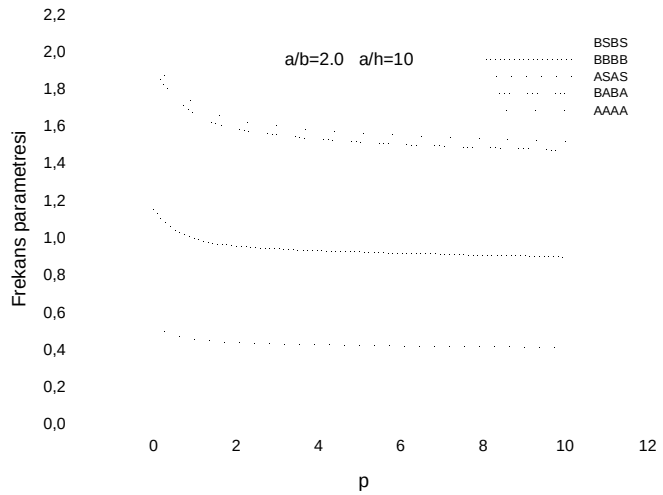
Yine bu şekillere göre dikkati çeken bir diğer nokta artan a/b oranı ile AAAA ve BABA sınır koşulları için elde edilen frekanslar birbirlerine yaklaşmaktadır. Bunun sebebi uzun kenar uçlarındaki sınır koşullarının ankastreden basit destekliye değiştirilmesinin frekansı üzerindeki etkisinin azaldığı şeklinde yorumlanabilir.



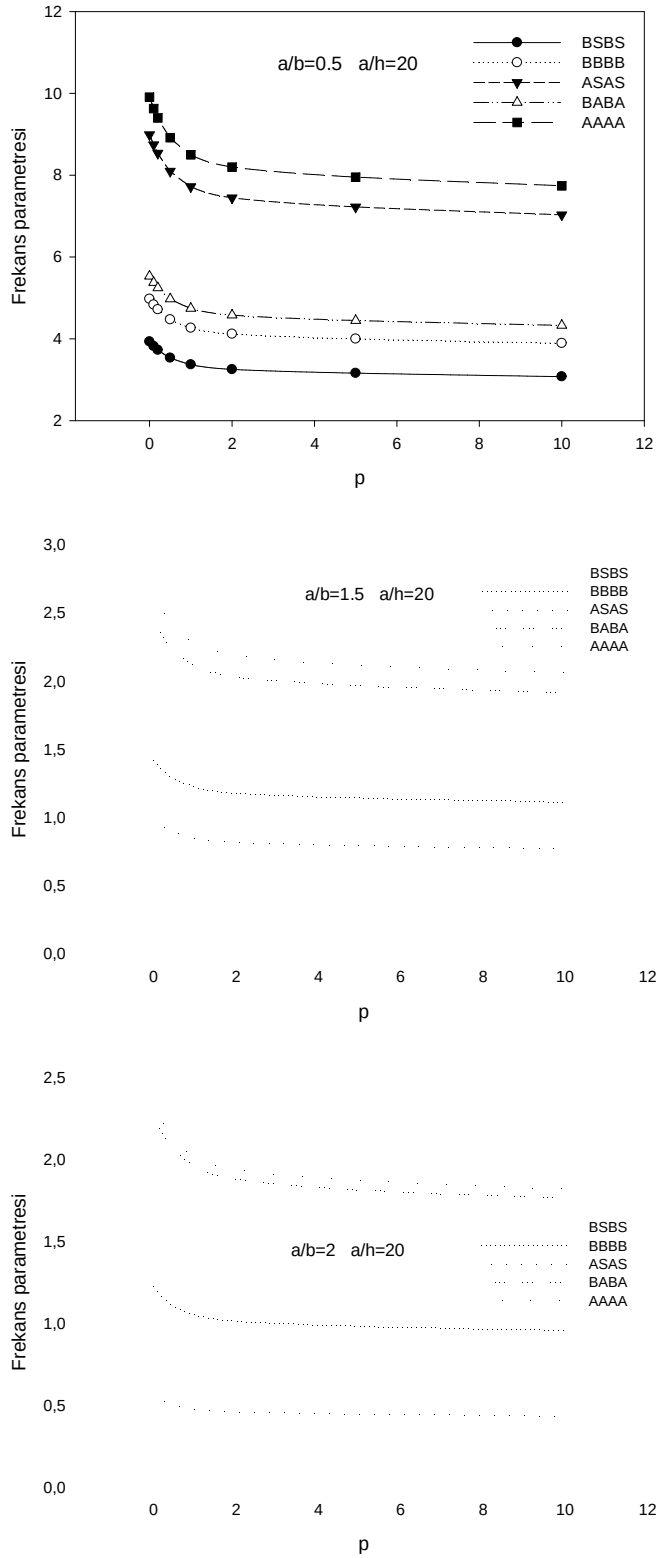
Şekil 3.10. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=5 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi



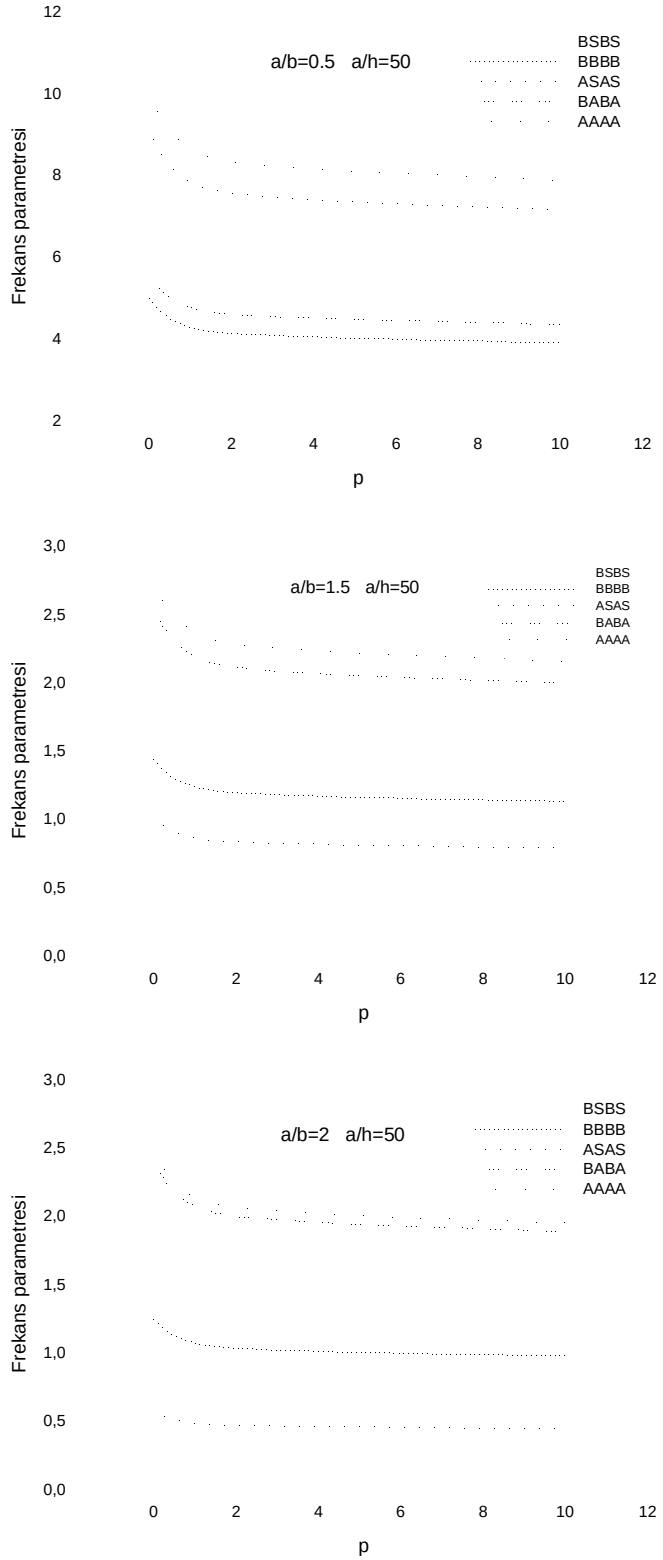




Şekil 3.11. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=10 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi

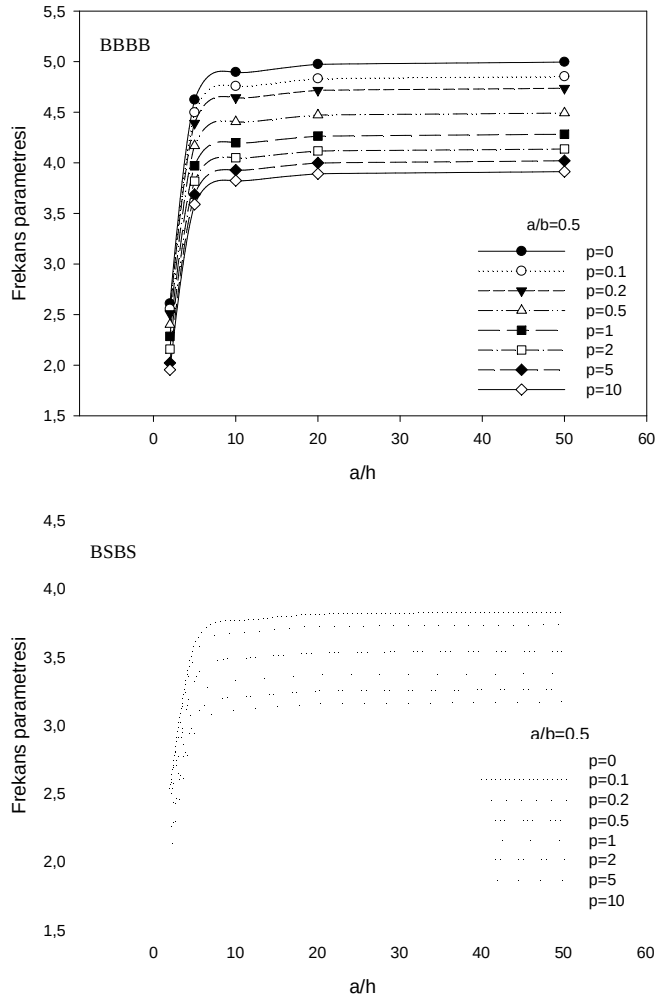


Şekil 3.12. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=20 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi

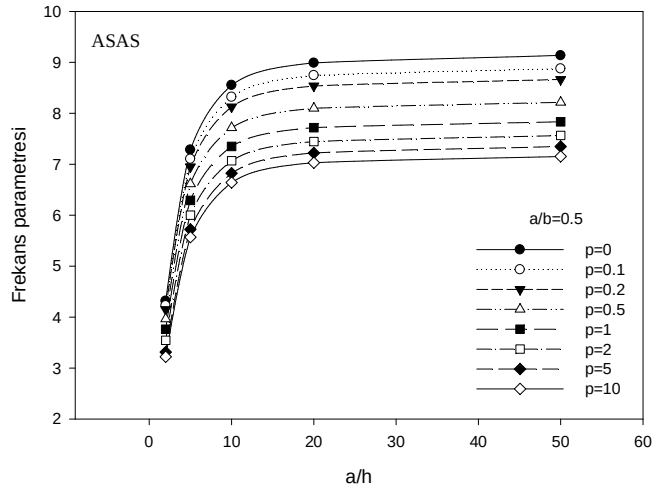


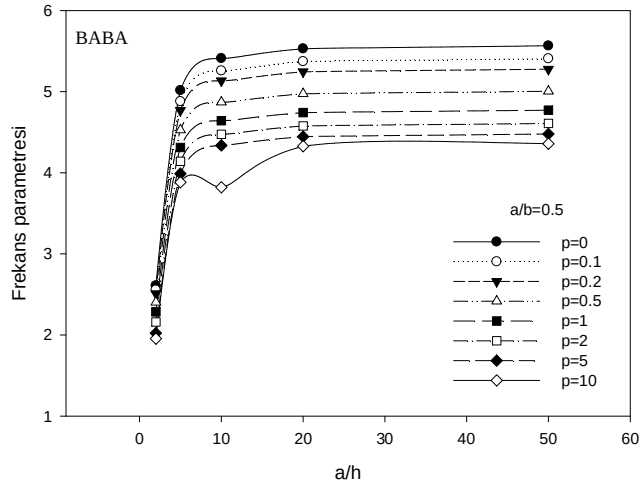
Şekil 3.13. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=50 ve a/b=0.5;1.5;2 oranları için farklı sınır koşullarında p değerleriyle değişimi

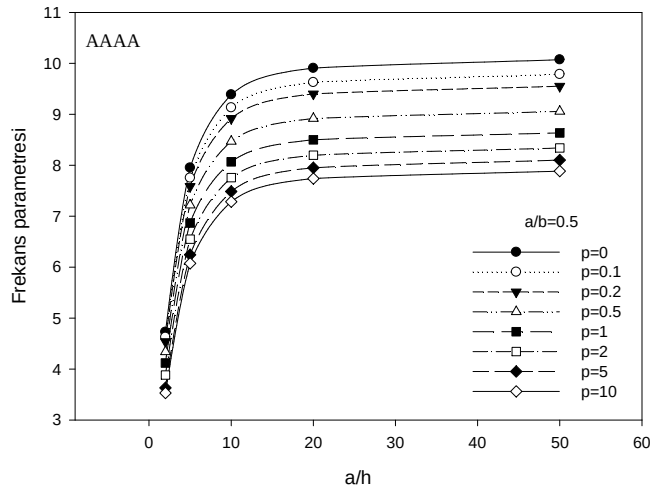
Frekans parametresinin seçilen p üsteli ve a/h oranı ile farklı sınır koşullar›nda değişimi a/b=0.5 ve 2 için değişimi Şekil 3.14-3.15 ile verilmektedir. Bu şekillere göre a/b=0.5 için a/h=10 değerine eriştikten sonra frekanslar yaklaşık olarak sabit bir değere yaklaşmakta iken a/b=2 iken frekanslar a/h=20 değerine kadar hızla değişmekte daha sonra sabit bir değere yakınsamaktadırlar.



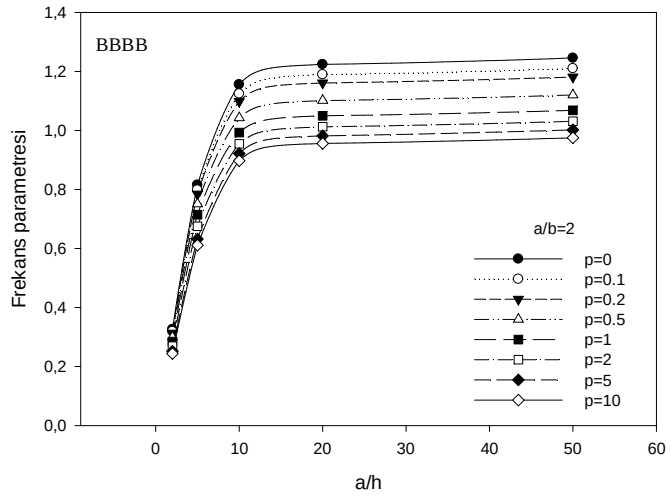
Şekil 3.14a. Boyutsuz frekans parametresinin a/b=0.5 için BBBB ve BSBS sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi

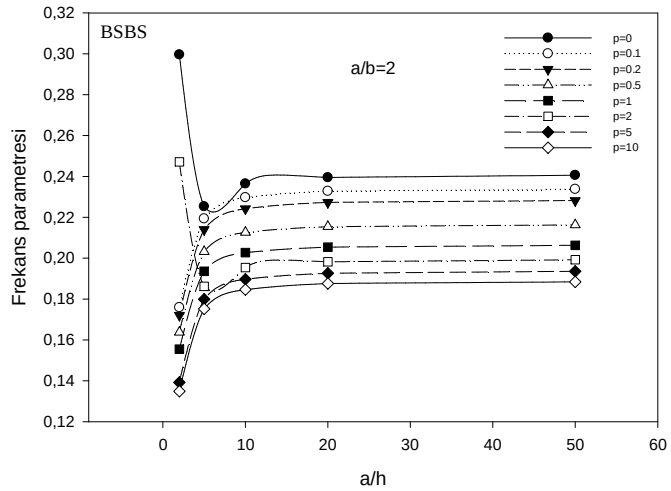




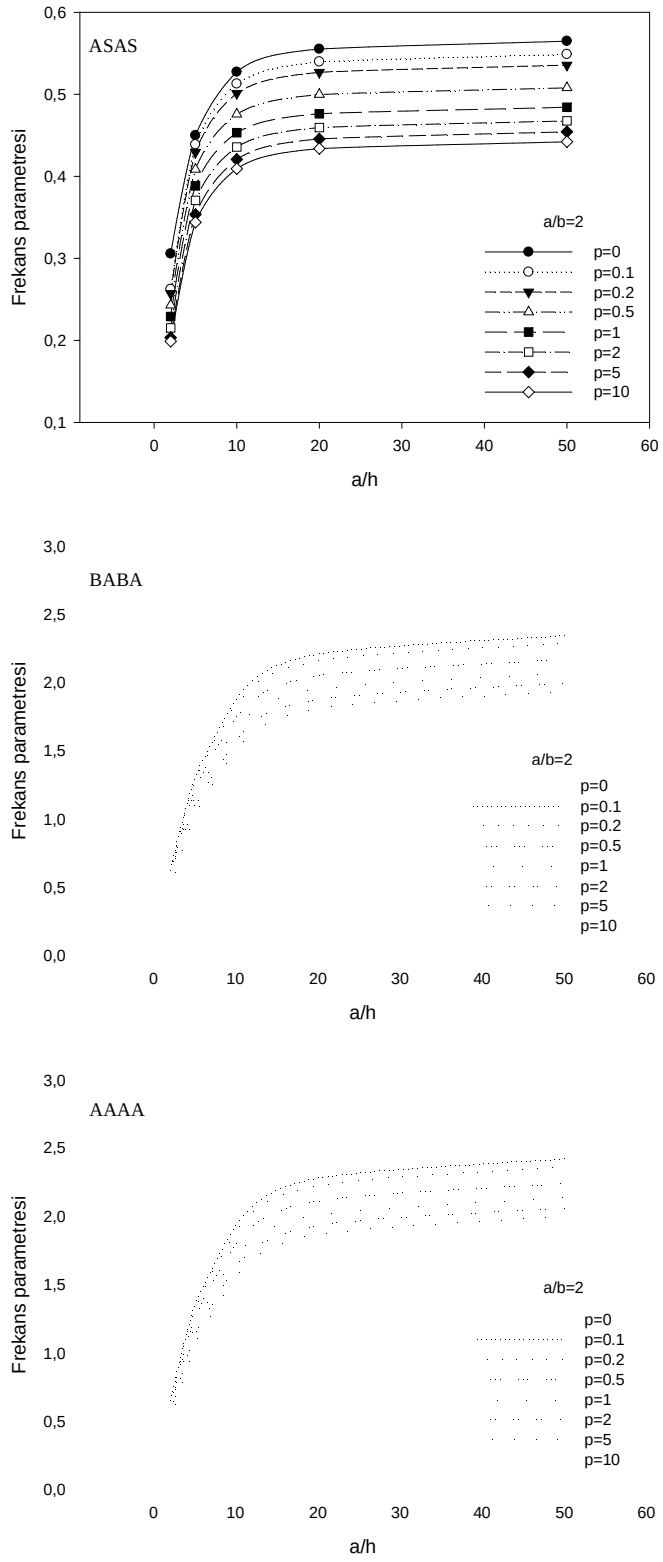


Şekil 3.14b. Boyutsuz frekans parametresinin a/b=0.5 için ASAS, BABA, AAAA sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi



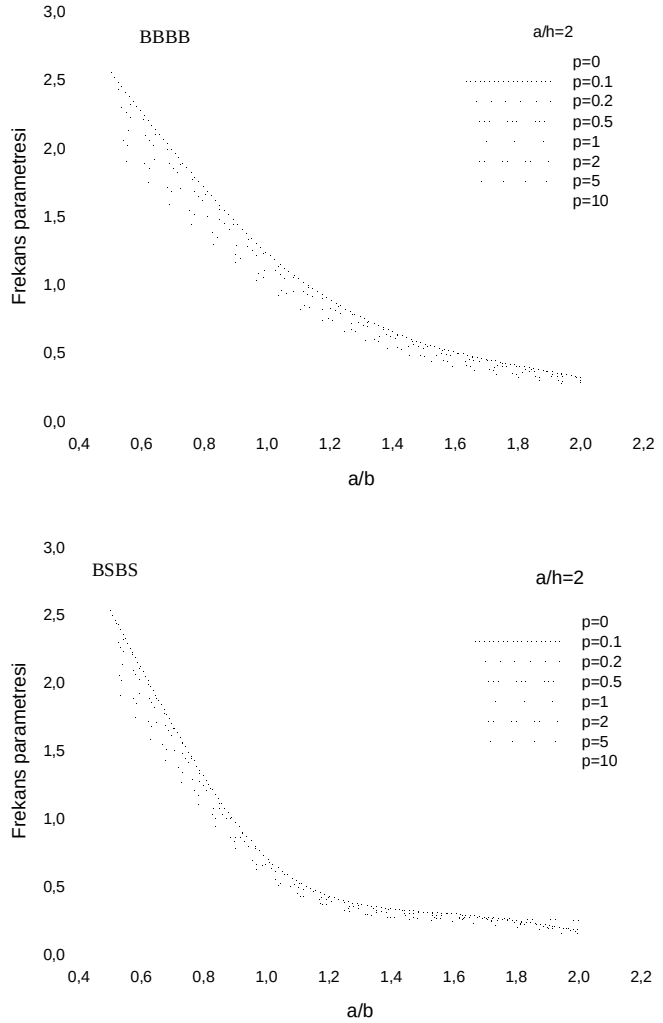


Şekil 3.15a. Boyutsuz frekans parametresinin a/b=2 için BBBB, BSBS sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi

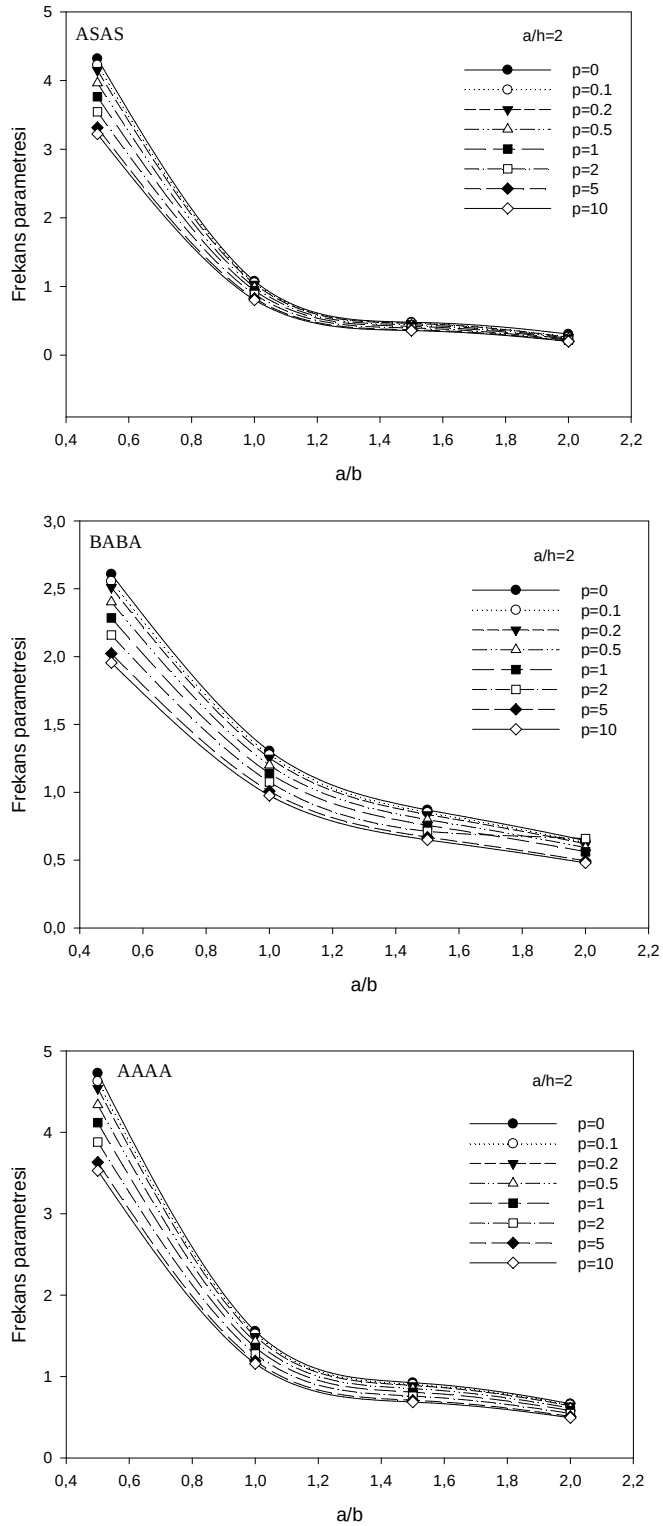


Şekil 3.15b. Boyutsuz frekans parametresinin a/b=2 için ASAS, BABA, AAAA sınır koşullarında a/h oranı ve p değerleriyle değişimi

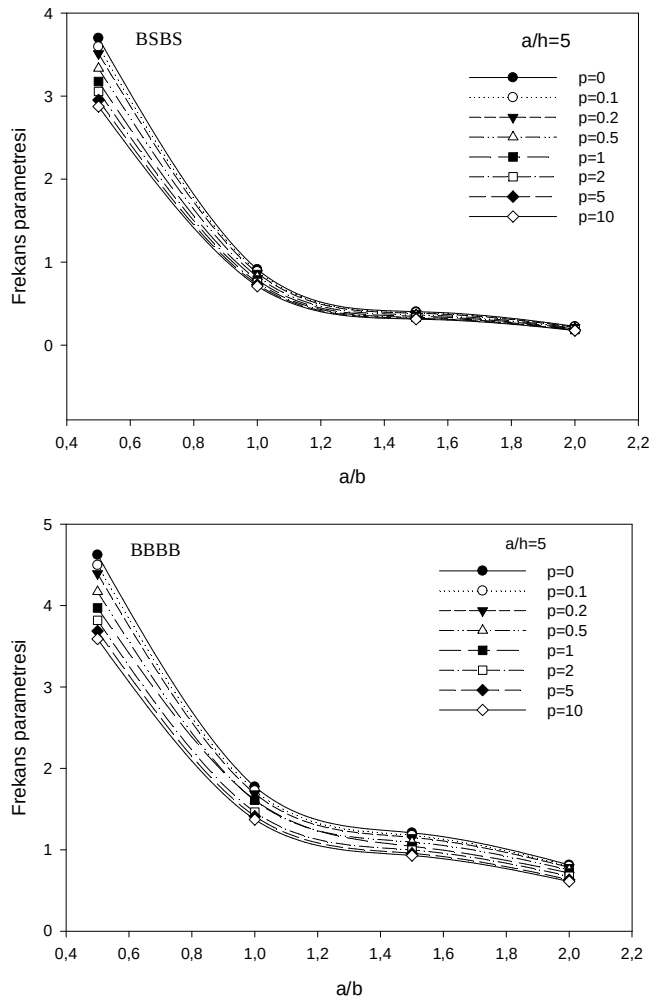
Frekans parametresinin p üsteli ve a/b oranı ile değişimi a/h=2, 5 ve 50 için Şekil 3.16-3.18 ile verilmektedir. Bu şekillere göre frekans parametresi a/b arttıkça azalmakta ve belirli bir a/b oranından sonra değişim hızı azalmaktadır. Frekans parametresinin a/b oranı ile değişimi küçük a/h oranları için daha belirgin olmaktadır. Yine küçük a/b oranlarında frekans parametresi p üsteliyle geniş bir aralıkta değişmekte iken a/b oranının artmasıyla frekans parametresinin p üsteline duyarlılığı azalmaktadır. Bu durum genel olarak frekans eğrilerinin genel olarak birbirlerine yaklaşmasına sebep olmaktadır. En belirgin azalma AAAA sınır koşulunda görülmektedir.



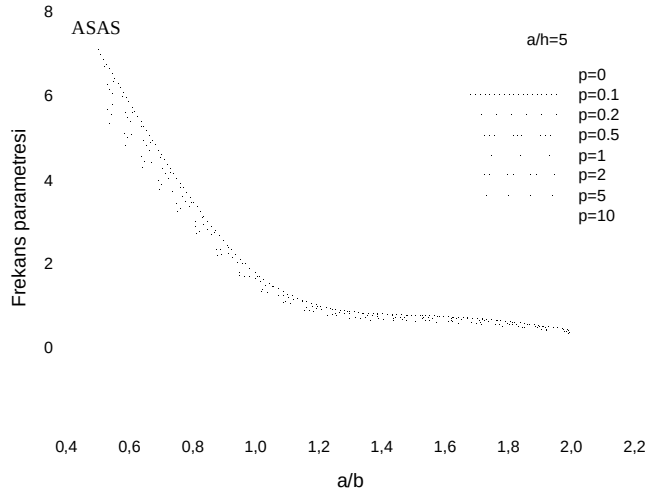
Şekil 3.16a. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=2 için BBBB, BSBS sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi

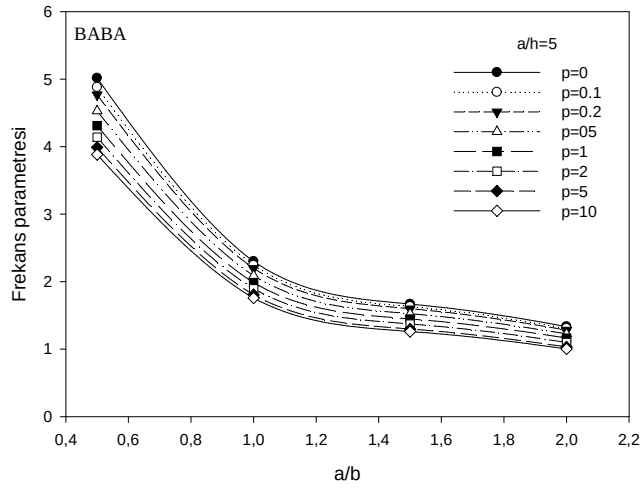


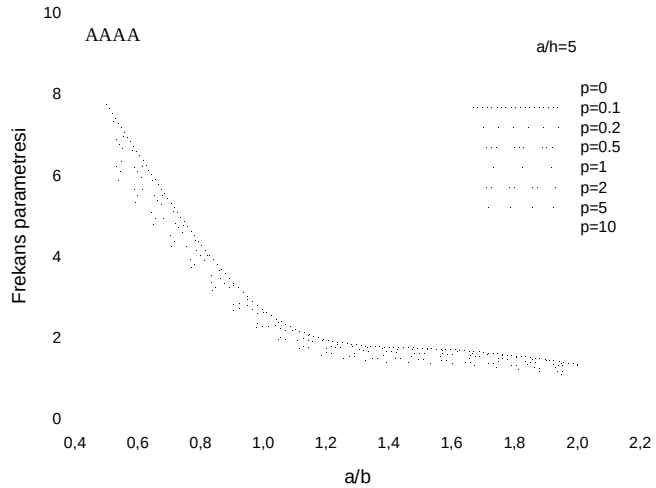
Şekil 3.16b. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=2 için ASAS, BABA, AAAA sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi



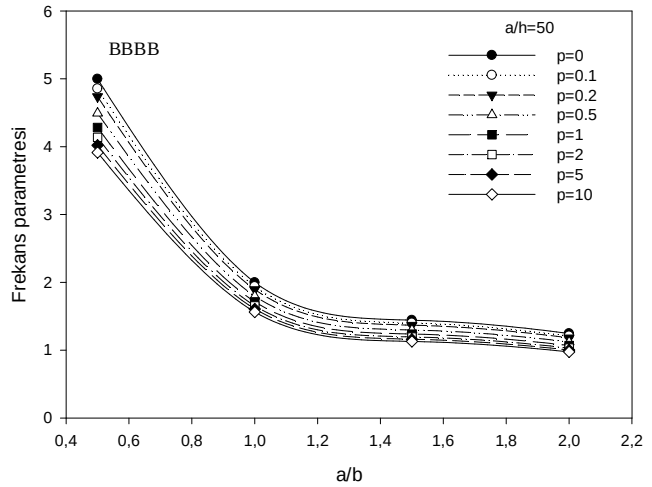
Şekil 3.17a. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=5 için BSBS ve BBBB sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi

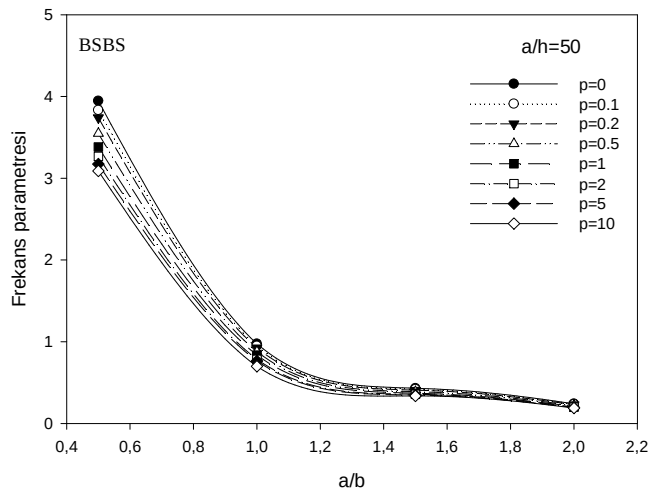




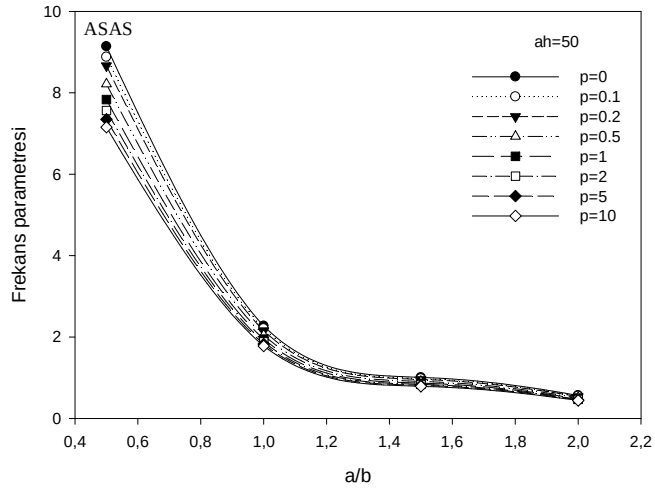


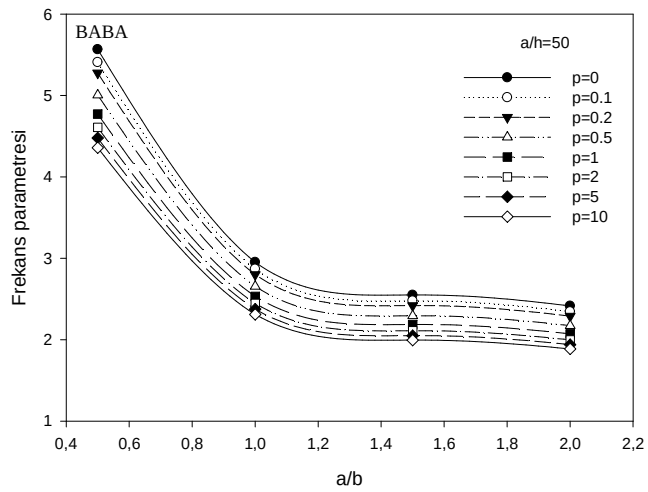
Şekil 3.17b. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=5 için ASAS, BABA, AAAA sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi

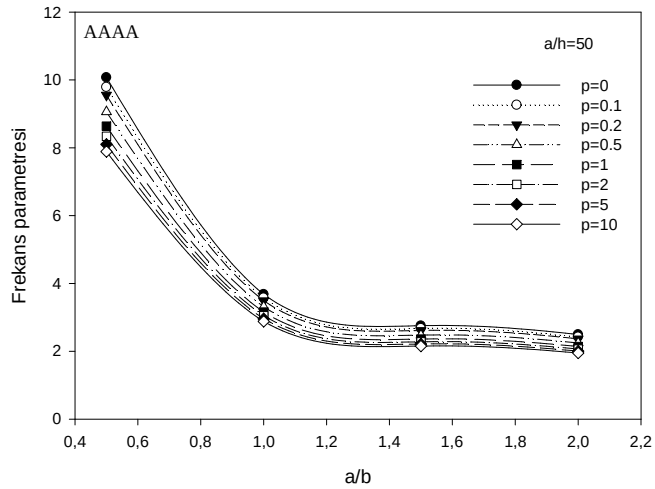




Şekil 3.18a. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=50 için BBBB, BSBS sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi

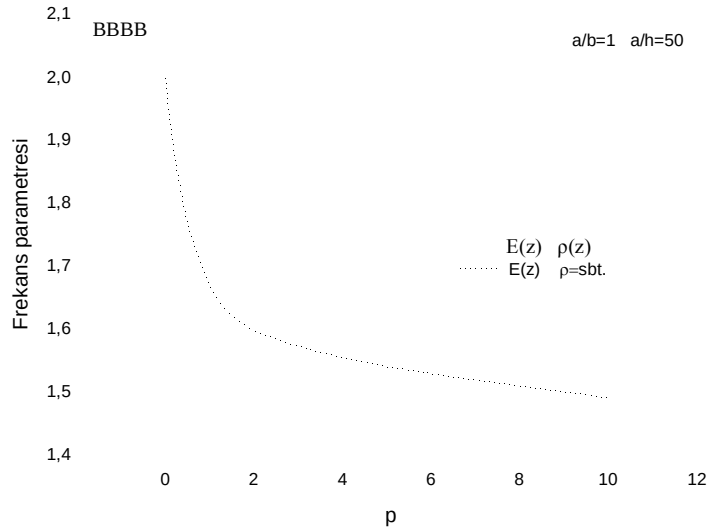




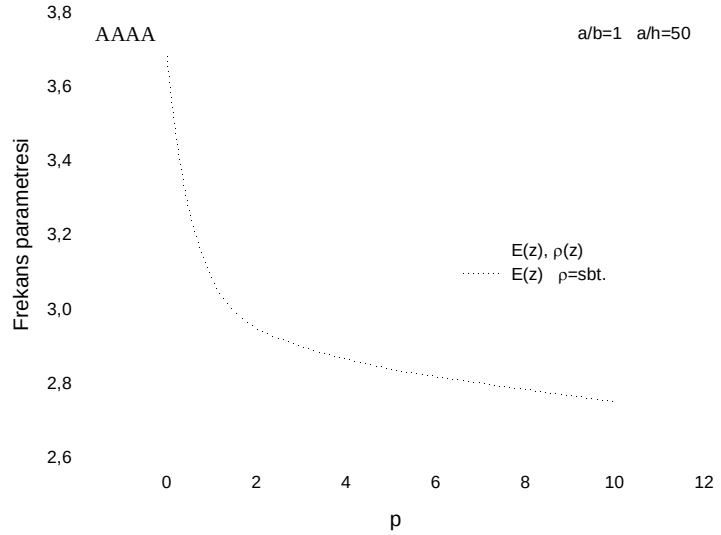


Şekil 3.18b. Boyutsuz frekans parametresinin a/h=50 için ASAS, BABA, AAAA sınır koşullarında a/b oranı ve p değerleriyle değişimi

Yoğunluğun değişken veya sabit olmasının frekans parametresine etkisi FD plağın tüm kenarlarının basit destekli ve ankastre olması durumu için Şekil 3.19 ve Şekil 3.20'de incelenmektedir. Yoğunluğun sabit alınması tüm plağın yoğunluk parametresi açısından seramik malzemeden oluştuğu anlamına gelmektedir. Yoğunluğun sabit olması durumunda ele alınan her iki sınır koşulu için de frekans parametresinin değerleri daha düşüktür. Bu farklılık p değerine bağlı olarak p değeri arttıkça artmaktadır. Böylece p değeri arttıkça yoğunluğun değişiminin frekans parametresine etkisi daha etkili olmaktad›r.



Şekil 3.19. BBBB sınır koşulunda yoğunluğun kalınlık doğrultusunda değişiminin frekans parametresi üzerine etkisi



Şekil 3.20. AAAA sınır koşulunda yoğunluğun kalınlık doğrultusunda değişiminin frekans parametresi üzerine etkisi

3.7.2. KPT ile Çözüm

Çalışmanın bu k›sm›nda tüm kenarlar› basit destekli olan FDM plaklarda serbest titreşim problemi KPT kapsamında incelenmektedir. Kısım 3.7.1'dekine benzer işlemler yapılarak aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi elde edilir.

$$\left[\begin{bmatrix}[K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ & [K_{22}] & [K_{23}] \\ \text{sim.} & & [K_{33}]\end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix}[M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] \\ & [M_{22}] & [M_{23}] \\ \text{sim.} & & [M_{33}]\end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix}[A_{ij}] \\ [B_{lm}] \\ [C_{pq}]\end{Bmatrix} = [0] \qquad (3.38)$$

Burada $[K_{ij}]$ ve $[M_{ij}]$ terimleri EK-D'de verilmektedir ve s›f›rdan farkl› çözüm (non-trivial) elde etmek için determinantı sıfır yapan özdeğerler (Ω) serbest titreşim frekans parametresine karşılık gelir. Bu özdeğer problemindeki kare matrisin boyutları [(I+1)(J+1)+(L+1) (M+1)+(P+1)(Q+1)] ifadesi ile bulunur.

Diğer çalışmalarla karşılaştırma yapılabilmesi için, (3.37) ile verilen boyutsuz frekans parametresi al›nmaktad›r.

İlk olarak a/h=100 kenar/kalınlık oranında p'nin farklı değerleri için frekans parametresinin yakınsaması Çizelge 3.16 ile verilmektedir. Bütün doğrultulardaki terim sayıları eşittir. M=N=4 terimden itibaren referans sonuçlarla oldukça uyumlu sonuçlar elde edilir. Tüm durumlarda 3- ve 4- terim sonuçlar› aras›ndaki maksimum fark % 0.5'tir. Çalışmadaki hassasiyeti arttırmak amacıyla bu kısımda bundan sonraki hesaplamalarda terim say›s› MxN=10x10 al›nmaktad›r.

Çizelge 3.17'de basit destekli izotropik kare plağa ait ilk 8 frekans parametresi hesaplanmakta ve literatürde mevcut olan diğer sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Chebyshev polinomları kullanılarak Ritz yöntemiyle KPT'ne göre elde edilmiş olan şimdiki sonuçların KPT'ne göre analitik çözümle elde edilmiş sonuçlarla uyumlu ve üç boyutlu çözümle elde edilmiş sonuçlardan büyük olduğu görülmektedir.

FD plaklarda ilk 8 frekans parametresi farkl› a/b oranlar› ve p üstelleri için Çizelge 3.18 ile verilmektedir. Ayn› p üstelinde a/b oran› artt›kça frekans parametresi azalmakta ve benzer şekilde aynı a/b oranında p üsteli arttıkça frekans parametresi yine azalmaktadır. Frekans parametreleri en yüksek değerlerini a/b'nin ve p'nin en küçük değerlerinde almaktadır.

Çizelge 3.16. FD kare plaklarda a/h=100 ve farklı p değerleri için yakınsama çalışması

	a/h=100. a/b=1.			
MxN	p=0.	p=0.1	p=1.	p=10.
1x1	2.1236	2.0566	1.8165	1.5999
2x2	2.1236	2.0542	1.7748	1.5874
3x3	1.9977	1.9339	1.6733	1.4966
4x4	1.9977	1.9339	1.6703	1.4933
6x6	1.9977	1.9339	1.6703	1.4933
8x8	1.9977	1.9339	1.6703	1.4933
10x10	1.9977	1.9339	1.6703	1.4933

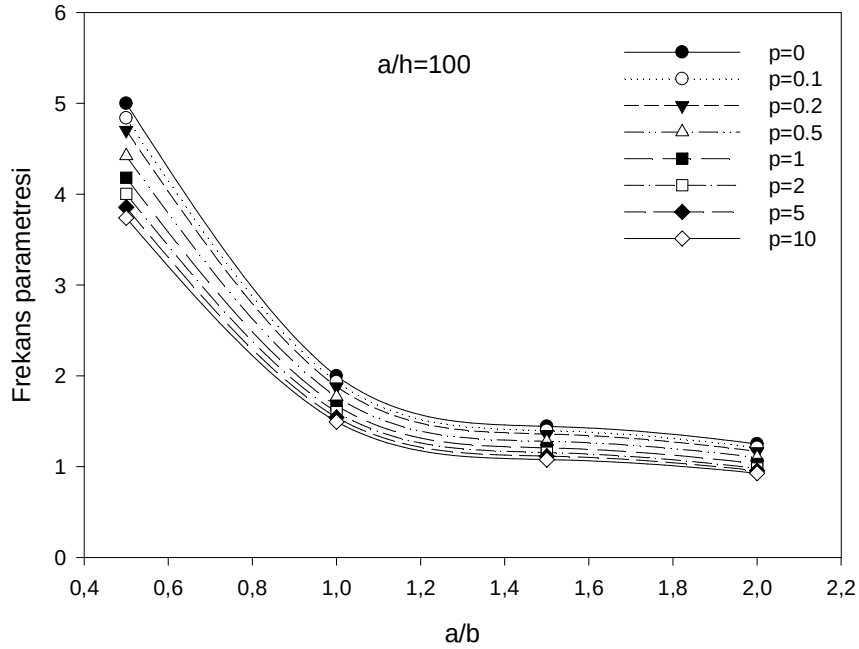
Çizelge 3.17. Basit destekli kare plaklarda ilk 8 frekans parametresinin (Δ) karşılaştırılması

a/h	Çözüm yöntemi	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8
1000	Zhou vd., 2002	1.9972	4.9999	4.9999	7.9996	9.9995	9.9995	13.000	13.000
	Leissa, 1973	2.0	5.0	5.0	8.0	10.0	10.0	13.0	13.0
	Bu çalışma	1.9977	5.000	5.000	7.9997	10.000	10.000	13.001	13.001

Çizelge 3.18. Basit destekli FD plaklarda farklı a/b oranları ve p değerleri için ilk 8 frekans parametresi

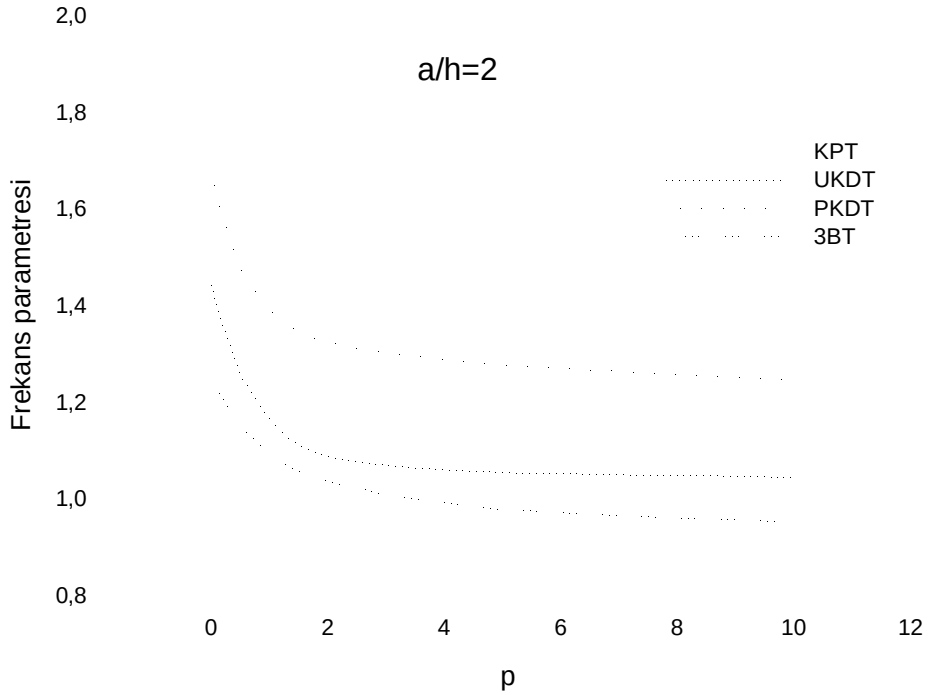
a/b	p	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8
0.5	0.0	4.9990	7.9997	13.1241	16.9989	19.9996	20.6065	25.0904	32.4963
	0.1	4.8332	7.7368	12.6970	16.4474	19.3492	19.9445	24.2742	31.4458
	1.0	4.1785	6.6865	10.9709	14.2150	16.7231	17.3928	20.9791	27.2901
	10.0	3.7363	5.9799	9.8112	12.7088	14.9522	15.4602	18.7576	24.3349
1.0	0.0	1.9977	5.0000	5.0000	7.9997	10.0000	10.0000	13.0010	13.0010
	0.1	1.9341	4.8374	4.8374	7.7398	9.6773	9.6773	12.5794	12.5794
	1.0	1.6706	4.1803	4.1803	6.6886	8.3675	8.3675	10.8745	10.8745
	10.0	1.4936	3.7383	3.7383	5.9808	5.9808	7.4797	7.4797	9.7217
1.5	0.0	1.4422	2.7767	4.4441	5.0596	5.7775	8.0464	8.3926	9.5927
	0.1	1.3964	2.6870	4.3000	4.8949	5.5893	7.7849	8.1231	9.2811
	1.0	1.2041	2.3216	3.7162	4.2296	4.8311	6.7274	7.0970	8.0203
	10.0	1.0770	2.0760	3.3226	3.7815	4.3197	6.0158	6.3007	7.1719
2.0	0.0	1.2489	1.9999	3.2802	4.2497	5.0000	5.1517	6.2721	8.1237
	0.1	1.2083	1.9339	3.1733	4.1109	4.8374	4.9860	6.0687	7.8610
	1.0	1.0440	1.6703	2.7422	3.5538	4.1809	4.3474	5.2440	6.8226
	10.0	0.9327	1.4933	2.4515	3.1764	3.7376	3.8652	4.6893	6.0835

Frekans parametresinin a/h=100 için a/b oranı ve p üsteli ile değişimi Şekil 3.21 ile verilmektedir. a/b oran› artt›kça frekans parametresi azalmaktad›r. Bu azalma a/b'nin 1'den büyük değerlerinde daha zayıflamaktadır.

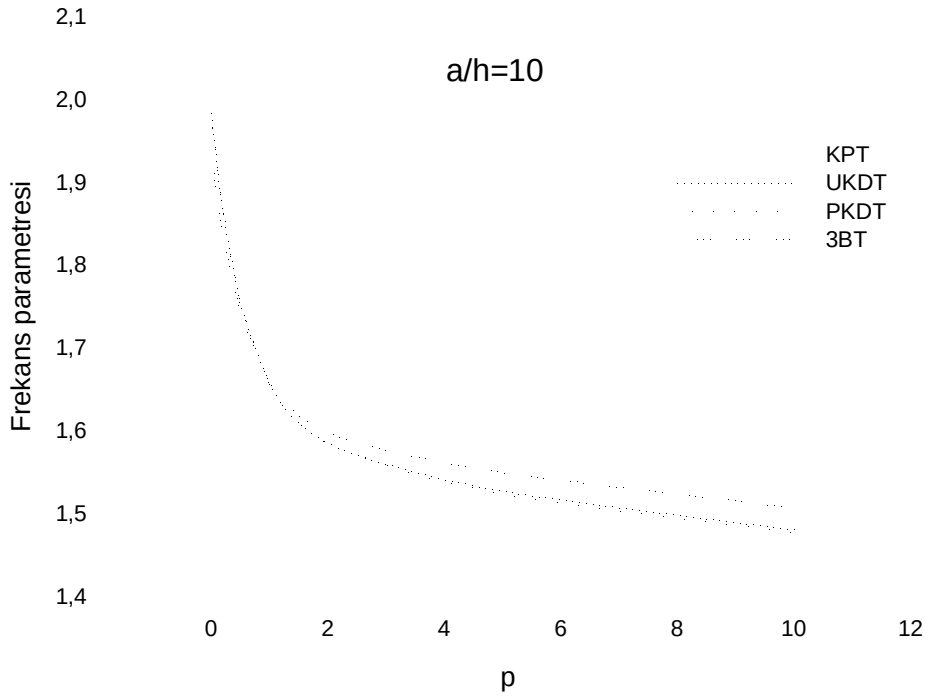


Şekil 3.21. Boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulunda a/h=100 için a/b oranı ve p değeriyle KPT'ne göre değişimi

Frekans parametrelerinin FD plağın tüm kenarlar›n›n basit destekli olmas› durumunda a/h=2,10,20 ve 100 iken p değerleriyle değişimi ele alınan tüm teoriler için Şekil 3.22-3.23'te karşılaştırılmakta ve KPT ve kayma deformasyon teorilerinin geçerlilikleri incelenmektedir. a/h oran› artt›kça kayma deformasyon teorileri ve KPT aras›ndaki fark azalmakta ve sonuçlar üç boyutlu teoriyle elde edilen sonuçlara yaklaşmaktadır. Ancak 3-boyutlu teoriyle elde edilen sonuçlara en yak›n sonuçlar›n a/h=10 için elde edildiği görülmektedir. Hacim oranı üsteli p'nin 2'den büyük değerlerinde teoriler arasındaki farklılık daha belirgin olmaktadır.



Şekil 3.22. Boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulunda a/h=2 için FD kare plakta farklı p değerlerinde plak teorisi ile değişimi



Şekil 3.23. Boyutsuz frekans parametresinin BBBB sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerlerinde plak teorisi ile değişimi

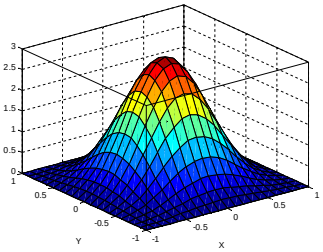
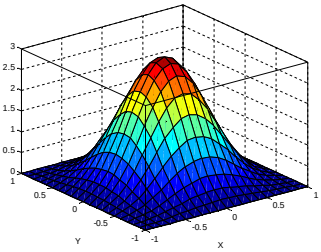
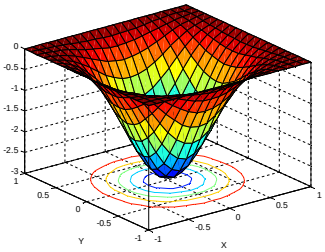
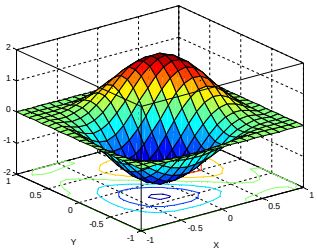
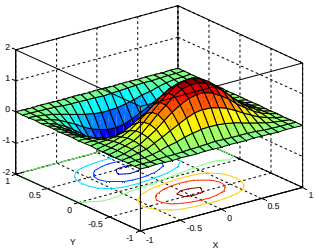
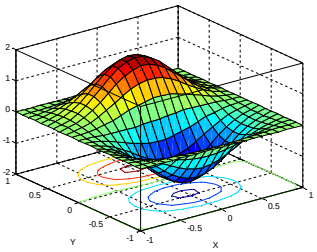
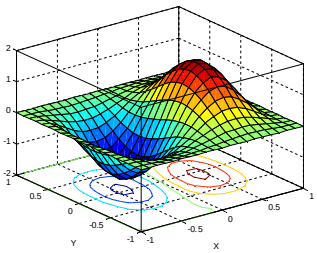
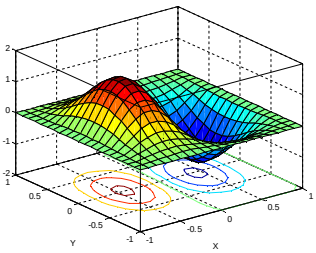
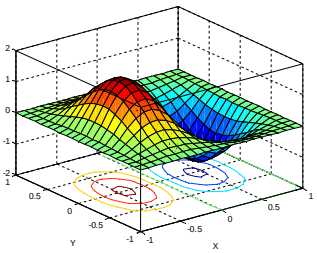
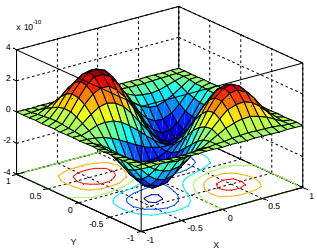
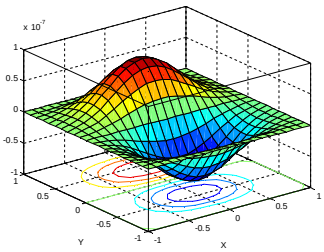
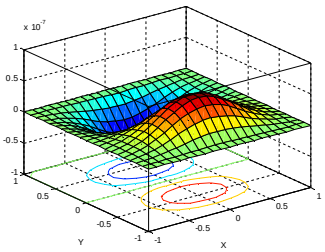
3.8. FD Plaklarda Mod Şekilleri

Bu k›s›mda izotropik plak ve farkl› tipte FD plaklarda Ritz yöntemiyle 3-boyutlu teoriye göre elde edilen ilk 4 frekansa ait mod şekilleri düşey doğrultudaki yer değiştirme alanı bileşeni w için farklı kalınlıktaki plaklara göre yine 3-boyutlu olarak verilmektedir. Bu amaçla (3.31) eşitliği ile verilen özdeğer probleminin ifadesinde yer alan ve özvektörlere karşılık gelen bilinmeyen katsayıların bulunması gerekmektedir. Özvektörler kısaca aşağıda verildiği gibi bulunmaktadır.

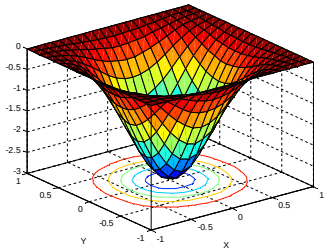
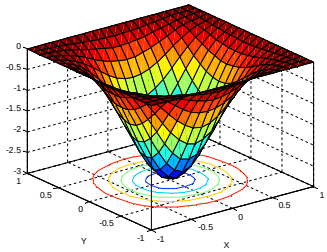
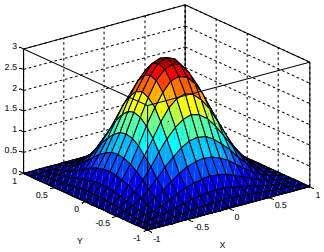
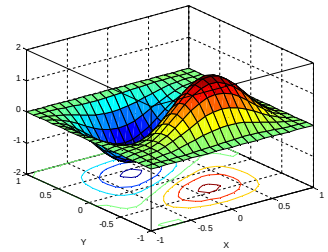
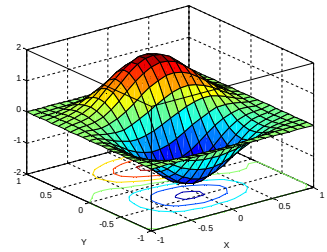
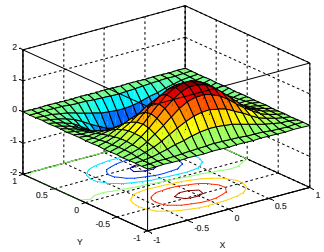
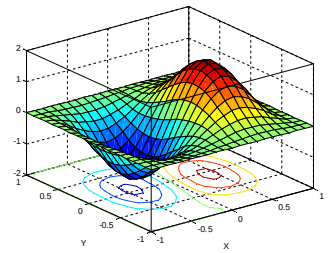
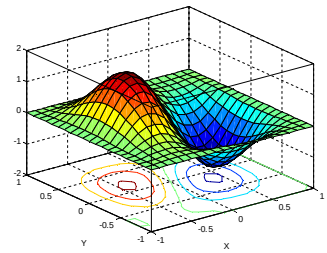
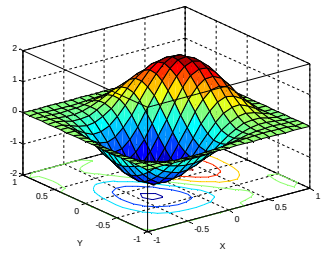
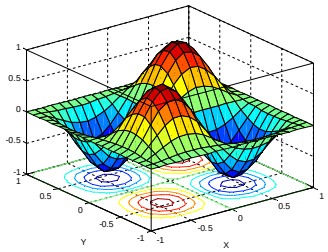
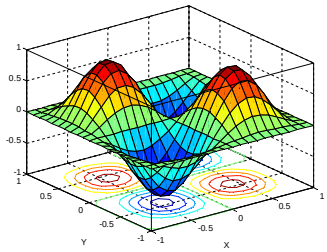
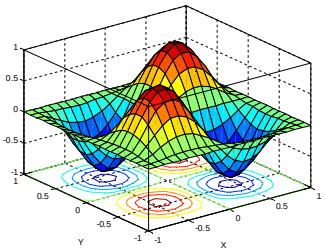
$$\left[[M]^{-1}[K]-\Omega^2[M][M]^{-1}\right]\{X\}=[0] \tag{3.39}$$

Buradan ilk olarak özdeğerler ve dolayısıyla özdeğerlere karşılık gelen doğal frekanslar bulunmaktadır. Ele alınan doğal frekanslara karşılık gelen özvektörler ve dolayısıyla bilinmeyen katsayılar da doğal frekanslarla birlikte bulunmuş olmaktadır. Böylece bulunan katsayılar (3.24) eşitliği ile verilen yer değiştirme alanı bileşenlerinde yerine koyularak mod şekilleri çizilebilmektedir. Bu çalışmada plağın düşey doğrultudaki deformasyonlarını incelemek amacıyla düşey doğrultudaki yer değiştirme alanı bileşeni w'nin mod şekilleri farklı a/h oranı ve p üstellerinde ele alınan tüm sınır koşulları için çizilmektedir. Özvektörlere karşılık gelen bilinmeyen katsayıların bulunmasında ve mod şekillerinin çizilmesinde MATLAB 6.5 programından yararlanılmakta ve çizimlerde 3-boyutlu eğri çizim komutları kullanılmaktadır.

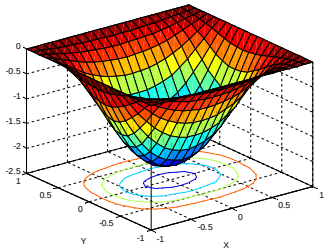
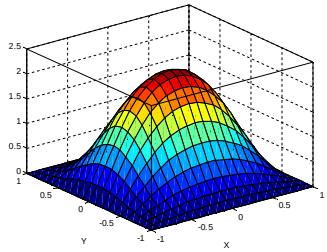
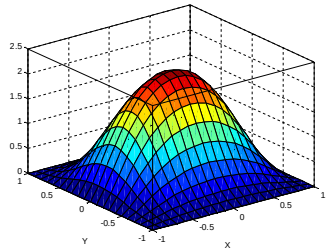
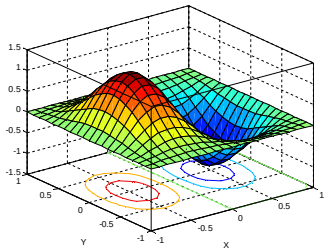
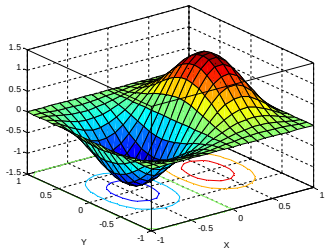
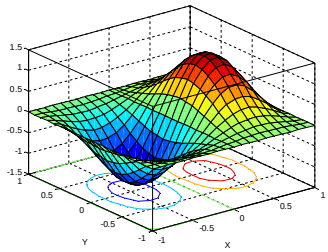
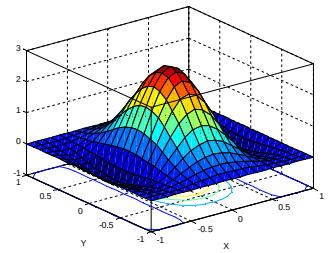
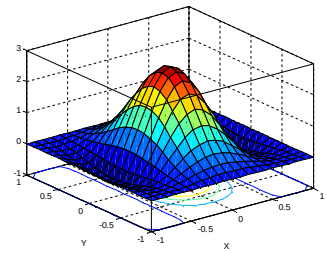
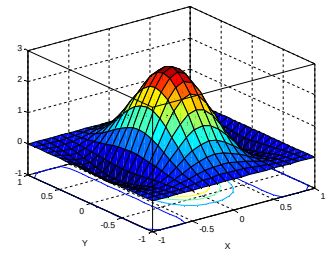
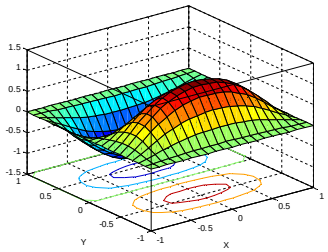
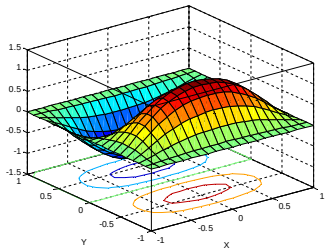
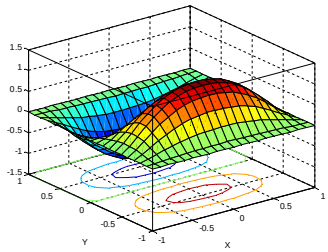
Ele alınan tüm sınır koşuları için çizilen mod şekilleri Şekil 3.24-3.33 ile verilmektedir. Tüm kenarlar› ayn› türden destekli olan plaklarda (BBBB ve AAAA), çift eksenel simetri sebebiyle (m,n)=(n,m) durumlar›nda frekanslar ve mod şekilleri birbirlerinin aynı olmaktadır. Mesnetleme biçimine bağlı olarak belirli bir yöndeki yarı dalga sayıları değişebilmektedir. Yarı dalga sayıları kenarlardaki kısıtlamaların az olduğu kenarlar doğrultusunda daha hızlı artmaktadır. Örneğin, serbest kenarlar olması durumunda bu kenarlar doğrultusunda 3. frekansta üç yarı dalga oluşmaktadır. Aynı sınır şartı için, kenar/kalınlık oranının değişmesiyle mod dizilişleri arasında bir fark oluşmamaktadır. Hacim oranı üsteli p'nin artmasıyla malzemenin rijitliğinin azalmasından dolayı genliklerin arttığı gözlenmektedir.

p=0	p=1	p=10
		
1.9339 (1,1)	1.6583 (1,1)	1.5066 (1,1)
		
4.6351 (2,1)	3.9824 (2,1)	3.5986 (2,1)
		
4.6351 (1,2)	3.9824 (1,2)	3.5986 (1,2)
		
6.5233 (2,2)	5.7210 (2,2)	4.8908 (2,2)

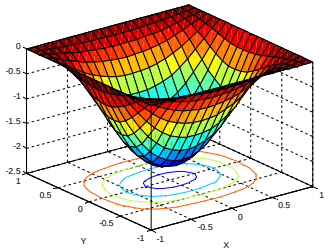
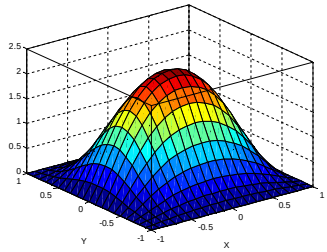
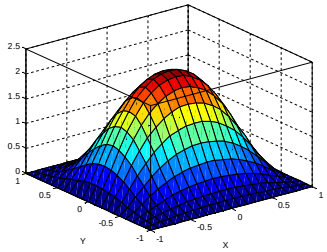
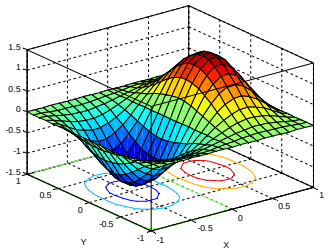
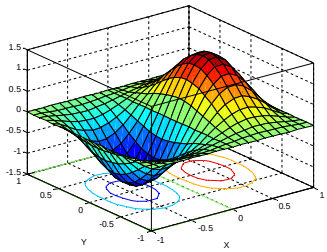
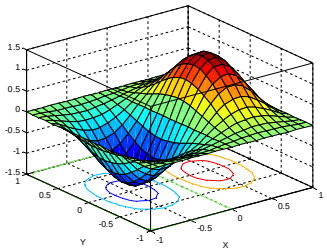
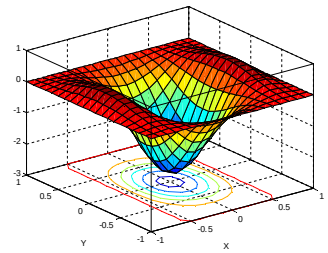
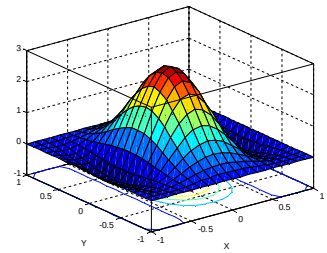
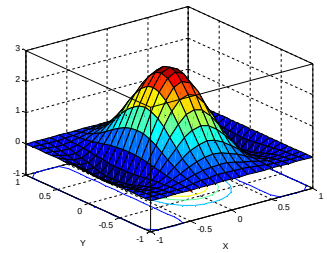
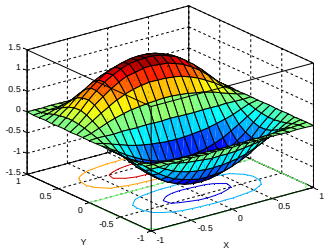
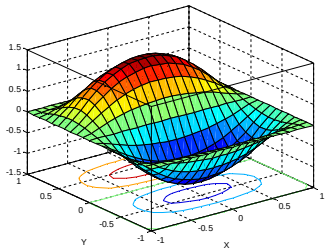
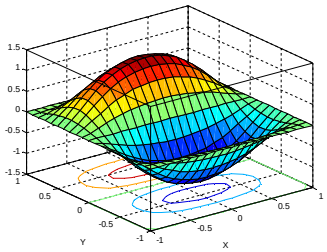
Şekil 3.24. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BBBB sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
1.9974 (1,1)	1.7117(1,1)	1.5652(1,1)
		
5.0109 (2,1)	4.2965 (2,1)	3.9243 (2,1)
		
5.0109 (1,2)	4.2965(1,2)	3.9243(1,2)
		
8.0068 (2,2)	6.8686 (2,2)	6.2737 (2,2)

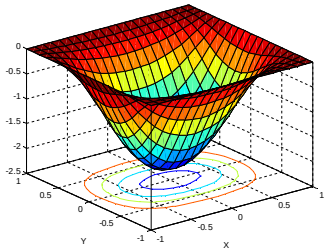
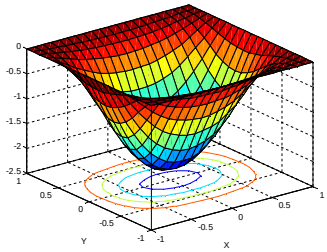
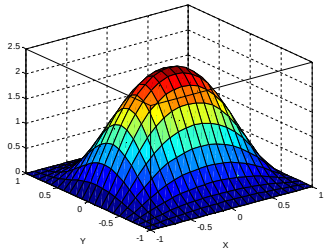
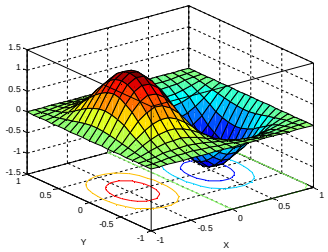
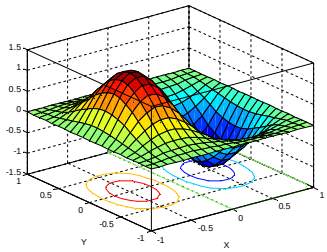
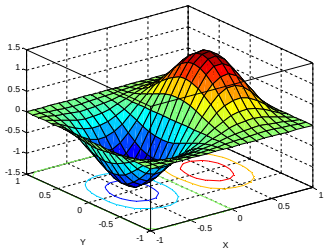
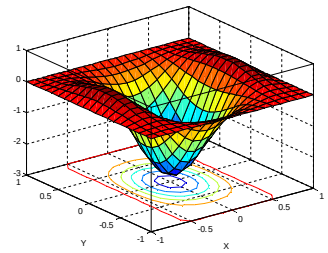
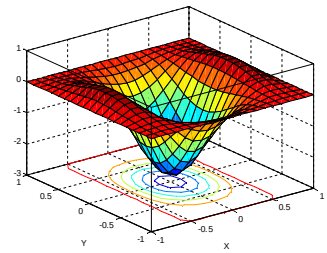
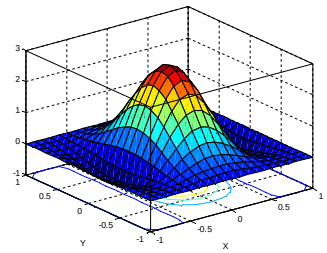
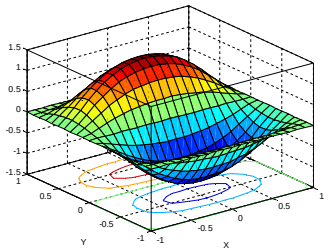
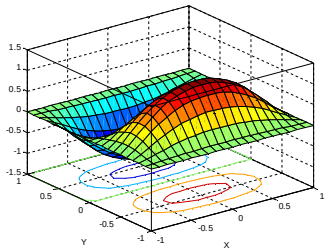
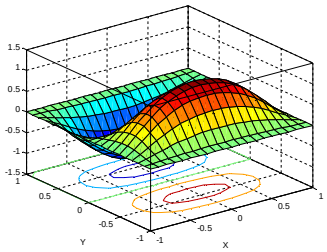
Şekil 3.25. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BBBB sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
0.9581(1,1)	0.8215 (1,1)	0.7483 (1,1)
		
1.5779 (1,2)	1.3527 (1,2)	1.2288 (1,2)
		
3.4871 (1,3)	2.9933 (1,3)	2.7111 (1,3)
		
3.7121 (2,1)	3.1874 (2,1)	2.8861 (2,1)

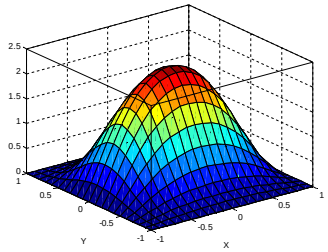
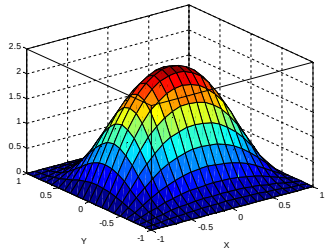
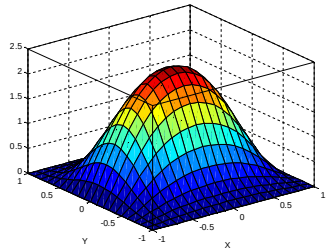
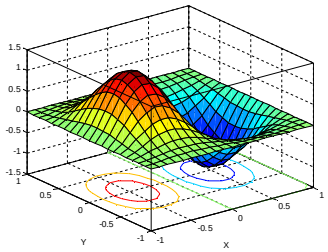
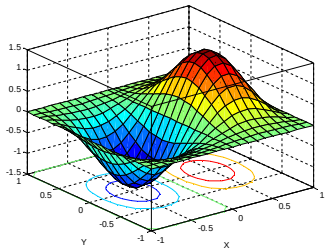
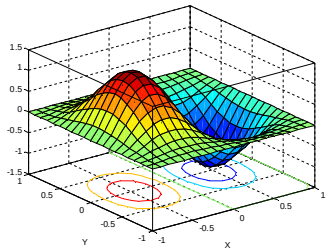
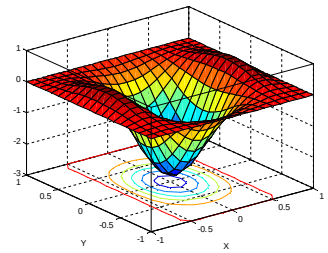
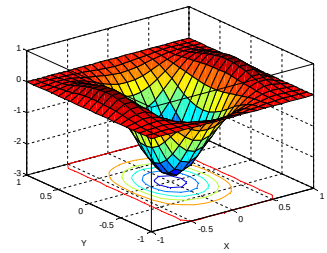
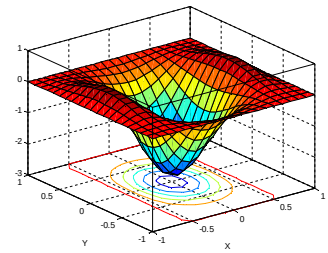
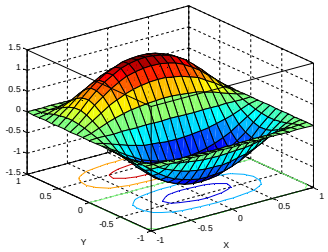
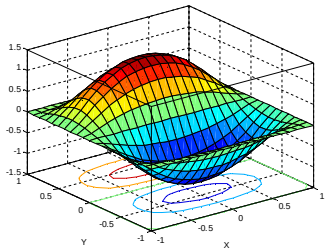
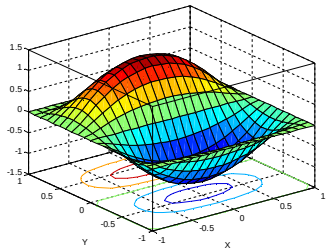
Şekil 3.26. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BSBS sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
0.9757(1,1)	0.8366(1,1)	0.7641(1,1)
		
1.6431 (1,2)	1.3999(1,2)	1.2688 (1,2)
		
3.7616 (1,3)	3.2186 (1,3)	2.9427 (1,3)
		
3.9623 (2,1)	3.3926 (2,1)	3.1000 (2,1)

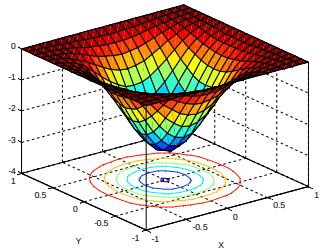
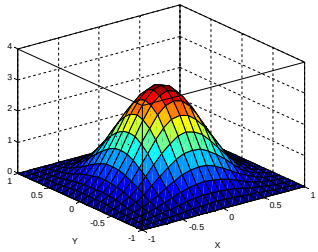
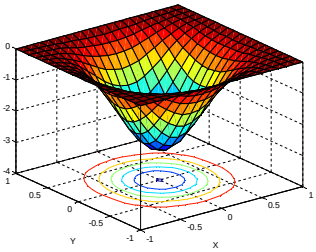
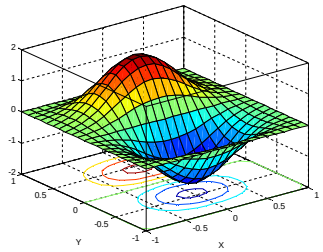
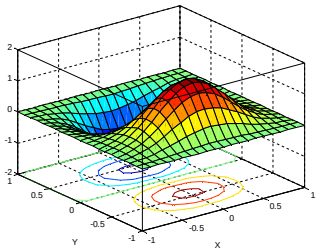
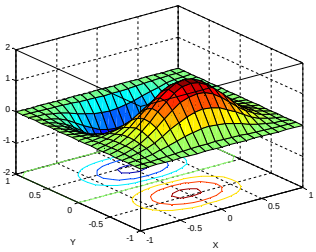
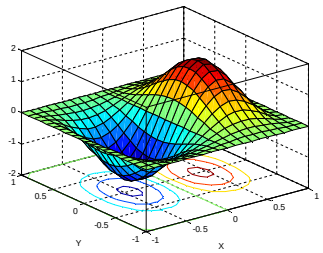
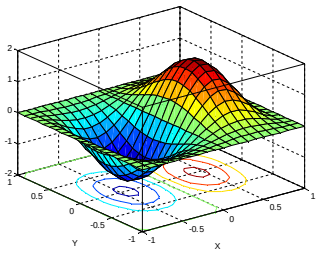
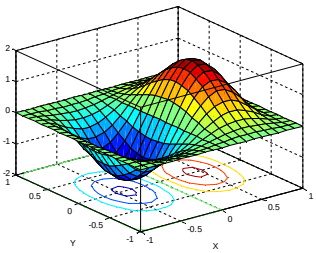
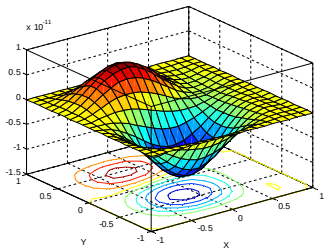
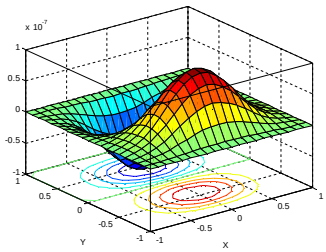
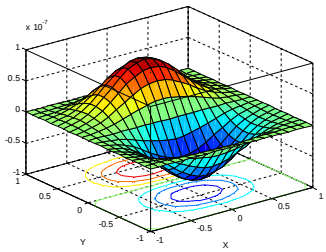
Şekil 3.27. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BSBS sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
2.1260 (1,1)	1.8275 (1,1)	1.6492 (1,1)
		
2.4839 (1,2)	2.1377 (1,2)	1.9261 (1,2)
		
3.9862 (1,3)	3.4278 (1,3)	3.0870 (1,3)
		
5.5073 (2,1)	4.7466 (2,1)	4.2367 (2,1)

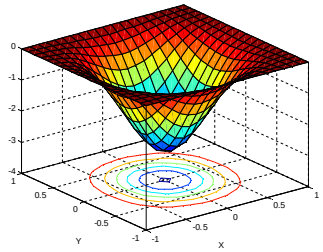
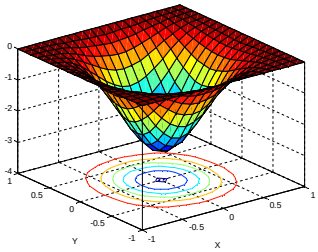
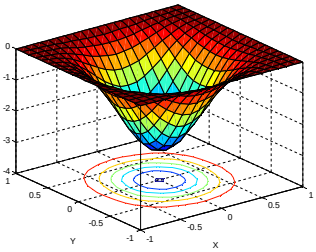
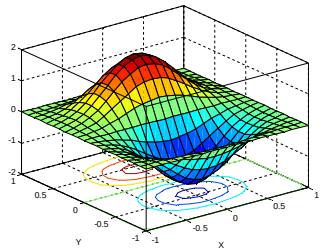
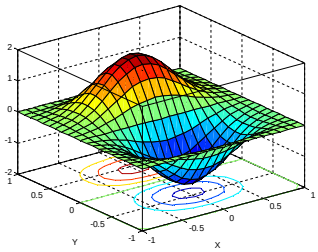
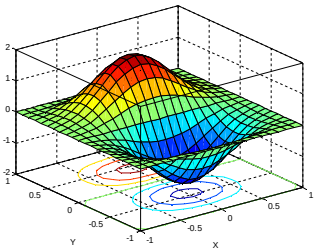
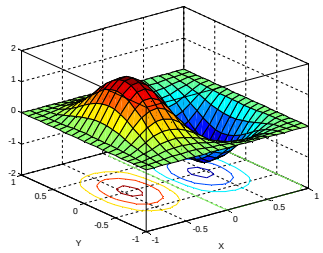
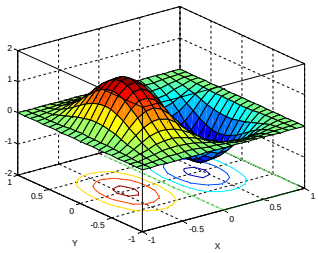
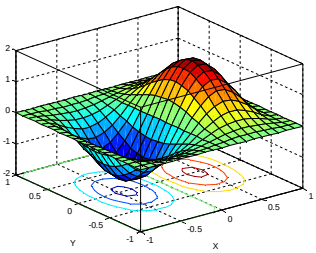
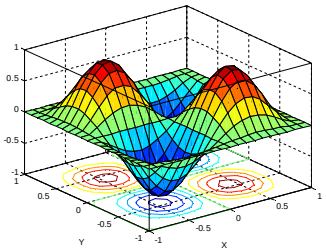
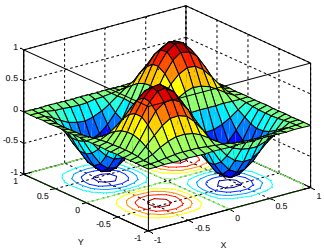
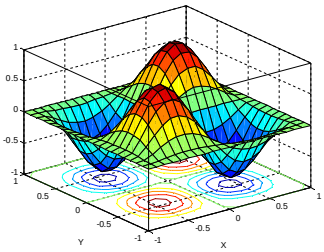
Şekil 3.28. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin ASAS sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
2.2781(1,1)	1.9544(1,1)	1.7832(1,1)
		
2.7129(1,2)	2.3259(1,2)	2.1236(1,2)
		
4.4844(1,3)	3.8483(1,3)	3.5156(1,3)
		
6.5543(2,1)	5.6178(2,1)	5.1293(2,1)

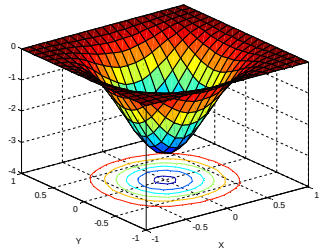
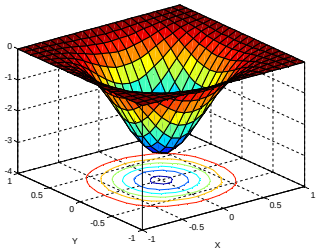
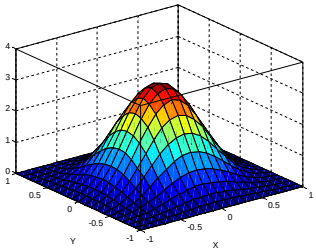
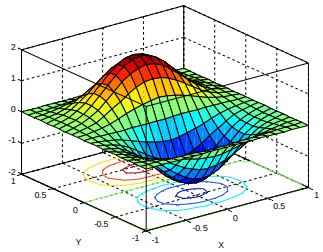
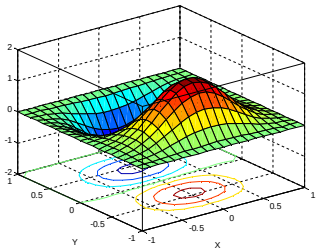
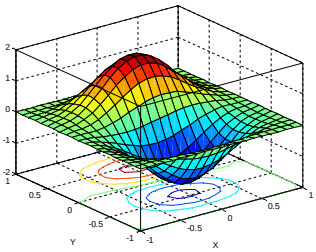
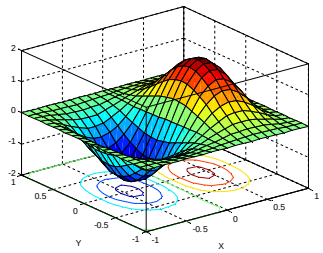
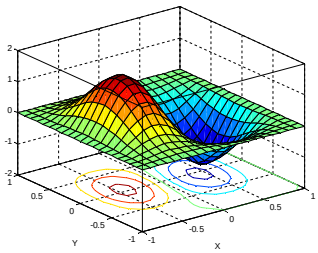
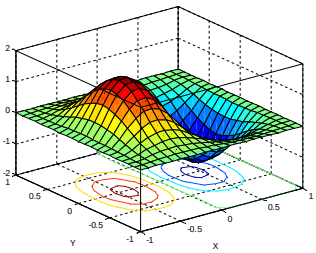
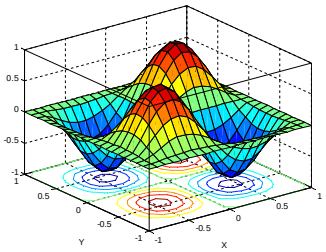
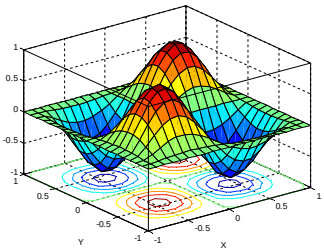
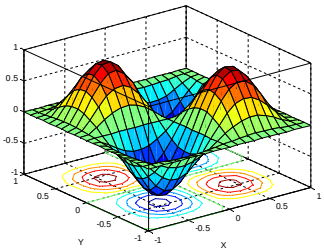
Şekil 3.29. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin ASAS sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
2.7349 (1,1)	2.3516 (1,1)	2.1213 (1,1)
		
5.0249 (2,1)	4.3209 (2,1)	3.8897 (2,1)
		
6.1441 (1,2)	5.2943 (1,2)	4.7254 (1,2)
		
6.5230 (2,2)	5.7193 (2,2)	4.8898 (2,2)

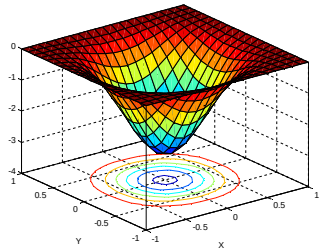
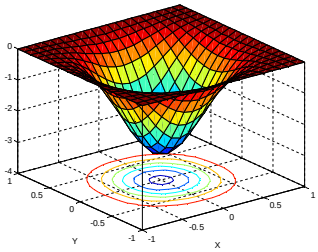
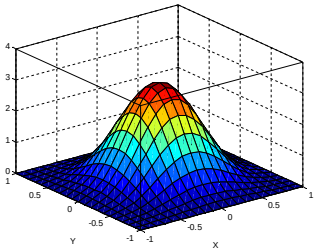
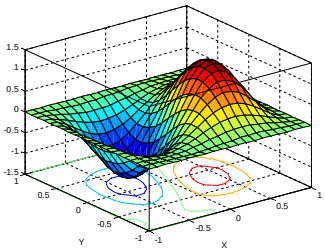
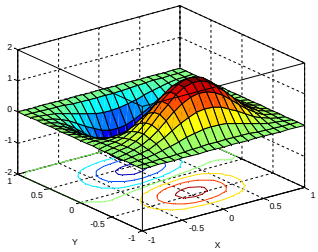
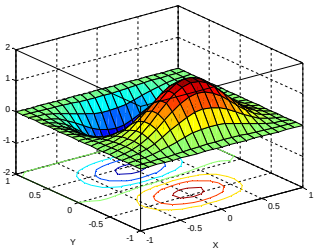
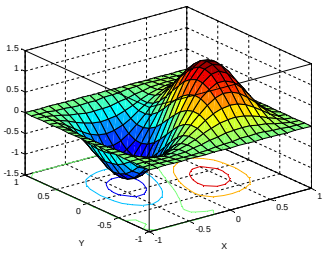
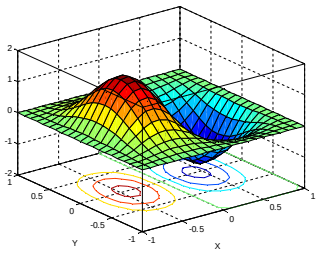
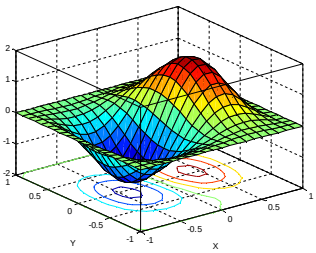
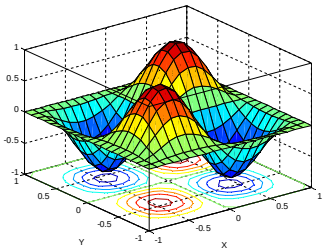
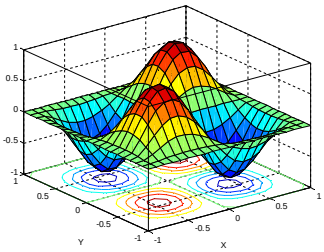
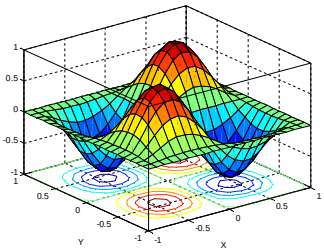
Şekil 3.30. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BABA sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yar› dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
2.9614 (1,1)	2.5377 (1,1)	2.3194 (1,1)
		
5.5794 (2,1)	4.7833(2,1)	4.3657(2,1)
		
7.3045 (1,2)	6.2625 (1,2)	5.7148 (1,2)
		
9.7509 (2,2)	8.3598 (2,2)	7.6327 (2,2)

Şekil 3.31. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin BABA sınır koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
3.3496 (1,1)	2.8809 (1,1)	2.5923 (1,1)
		
6.4447 (2,1)	5.5551 (2,1)	4.9557 (2,1)
		
6.4447 (1,2)	5.5551 (1,2)	4.9557 (1,2)
		
9.0144 (2,2)	7.7787 (2,2)	6.9072 (2,2)

Şekil 3.32. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin AAAA sınır koşulunda a/h=10 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

p=0	p=1	p=10
		
3.6946(1,1)	3.1670(1,1)	2.8931(1,1)
		
7.7158 (2,1)	6.6151(2,1)	6.0423(2,1)
		
7.7158 (1,2)	6.6151 (1,2)	6.0423 (1,2)
		
11.2411(2,2)	9.6364(2,2)	8.7983(2,2)

Şekil 3.33. Boyutsuz ilk 4 frekans parametresine ait mod şekillerinin AAAA sın›r koşulunda a/h=100 için FD kare plakta farklı p değerleri ile değişimi ((m,n): yarı dalga say›lar›)

BÖLÜM 4

GENEL DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, Fonksiyonel Derecelendirilmiş dikdörtgen plakların serbest titreşim analizi 3-boyutlu lineer elastisite teorisi ve KPT'ne göre Ritz yöntemiyle ve BKDT'ne göre Navier tipi yöntemle ele al›nmaktad›r. BKDT, varyasyonel olarak tutarl›, 5-serbestlik dereceli kayma deformasyon etkilerini içeren iki boyutlu bir plak teorisidir. Bu teoride düzlem içi yer değiştirme bileşenlerinde kullanılan kayma deformasyon şekil fonksiyonlarının uygun olarak seçilmesi ile literatürde bulunan ve bu çalışmada da kullanılan KPT, UKDT ve PKDT özel hal olarak elde edilebilmektedir. Ritz yönteminde kullanılan plağın geometrik sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme alanı bileşenleri, sınır fonksiyonları ile Chebyshev polinomlarının çarpımı şeklinde al›nmaktad›r.

Çalışmada ilk olarak malzeme özelliklerinin kalınlık doğrultusundaki değişimi bazı makromodel ve mikromodel yaklaşımlarla incelenmekte ve grafikler halinde verilmektedir. FD plakların titreşim davranışını yöneten denklemler ve sınır şartlarının uygun bileşimleri Hamilton prensibiyle 3-boyutlu lineer elastisite teorisine dayanarak elde edilmektedir.

Serbest titreşim analizi ilk olarak Navier yöntemiyle BKDT'den özel hal olarak elde edilebilen KPT, UKDT ve PKDT için yap›lmaktad›r. Bu amaçla yap›lacak ilk işlem olan rijitlik katsayılarının elde edilmesinde elastisite modülünün kalınlık doğrultusunda eksponansiyel ve kuvvet kanununa göre değişmesi durumu göz önüne alınmaktadır. Hacim oranı üsteli p'ye bağlı olarak malzeme bileşimi değişimi ve a/b oranını değişiminin, farklı mod dizilişleri için frekans parametrelerine etkisi KPT'ne bağlı olarak incelenmektedir. Frekans parametrelerinin değeri hacim oranı üsteli p üstelinin değeri arttıkça azalmakta ancak a/b oranı arttıkça artmaktadır. Malzeme özelliklerinin eksponansiyel değişmesi durumunda elde edilen frekans parametrelerinin değerlerinin, ele alınan tüm a/b oranları ve mod dizilişleri için hacim oranı üsteli p'nin 1 ve 2 olması durumunda aldığı değerler arasında olduğu görülmektedir.

Serbest titreşim analizinde ikinci olarak analitik çözümün mümkün olmadığı, kenarlarında, keyfi olarak, sınır koşullarının farklı bileşimlerine maruz kalmış FD plaklara bir enerji yöntemi olan Ritz yöntemi uygulanmaktad›r. Bunun için gerekli olan enerji fonksiyonelleri 3-boyutlu lineer elastisite teorisi ve KPT'ne göre elde edilmektedir. Sınır koşullarının BBBB, BSBS, ASAS, BABA, AAAA bileşimleri için 3-boyutlu çözümle ve BBBB bileşimi için ayrıca KPT'ne göre çözümle temel frekanslar elde edilmektedir. Ele al›nan her iki teori için elde edilen sonuçlarda elasitisite modülü ve yoğunluğun kalınlık doğrultusunda kuvvet kanununa göre değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca yoğunluğun değişiminin frekans parametresine olan etkisinin daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla yoğunluğun sabit olması durumu için de çözüm elde edilmektedir. Bütün doğrultulardaki terim sayıları eşit al›nmaktad›r. Elde edilen sonuçlar analitik çözümle kayma deformasyon teorilerine göre elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Farklı malzeme bileşimlerinin ve plak geometrisinin (kenar-kenar, kenar-kalınlık oranları), serbest titreşim frekans değerlerine etkisi incelenmektedir. Ayr›ca elde edilen say›sal sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılarak değerlendirilmektedir.

Ritz yöntemiyle 3-boyutlu elastisite teorisine göre çözümde tüm s›n›r koşullarında terim sayısının 5- ve 6- olmas› durumunda frekans sonuçlar› aras›ndaki maksimum fark % 2.3'tür. Çalışmadaki hassasiyeti arttırmak amacıyla hesaplamalarda al›nan terim say›s› IxJxK=6x6x6'd›r. Kenarlardaki s›n›rland›rmalar artt›kça yak›nsama daha iyi olmaktad›r. Genel olarak kenarlardaki k›s›tlamalar artt›kça frekans parametrelerinin değerleri artmaktadır. En yüksek ve en düşük frekans parametreleri sırasıyla AAAA ve BSBS sınır koşullarında elde edilmektedir. Ele alınan tüm sınır koşullarında plak kalınlığı azaldıkça frekans parametreleri artmaktad›r. Kenar-kal›nl›k oranı a/h=50 değerinden itibaren frekans parametreleri daha kesin bir değere yakınsamaktadır. Frekans parametreleri p üstelinin değeri arttıkça azalmakta ancak genel olarak p>2 değerleri için bu azalma daha zayıflamaktadır. Hacim oranı üsteli p'nin 0 değeri seramik malzemenin frekans parametresine karşılık gelmektedir.

Yoğunluğun plak kalınlığı boyunca sabit ve değişken olmasının frekans parametresine etkisi sınır koşullarının BBBB ve AAAA bileşimleri için

incelenmektedir. Yoğunluğun sabit olması durumunda ele alınan her iki sınır koşulu için de frekans parametresinin değerleri daha düşüktür. Bu farklılık p değerine bağlı olarak p değeri arttıkça artmaktadır. Böylece p değeri arttıkça yoğunluğun değişiminin frekans parametresine etkisi daha belirgin olmaktad›r.

KPT'ne göre Ritz yöntemiyle çözümde BBBB sınır koşulu için ilk 8 frekans elde edilmektedir. M=N=4 terimden itibaren referans sonuçlarla oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmektedir. Tüm durumlarda 3- ve 4- terim sonuçlar› aras›ndaki maksimum fark % 0.5'tir. Çalışmadaki hassasiyeti arttırmak amacıyla hesaplamalarda terim say›s› MxN=10x10 al›nmaktad›r. Sonuçlar üç boyutlu çözümle elde edilenlere benzer şekildedir. Frekans parametreleri, p değeri ve a/b oranının artmasıyla azalmaktad›r.

KPT, kayma deformasyon teorileri ve 3-boyutlu teoriyle elde edilen frekans parametreleri karşılaştırılmakta ve düzlemsel teorilerin geçerlilikleri incelenmektedir. a/h oran› artt›kça kayma deformasyon teorileri ve KPT aras›ndaki fark azalmakta ve sonuçlar 3-boyutlu teoriyle elde edilen sonuçlara yaklaşmaktadır. Ancak 3-boyutlu teoriyle elde edilen sonuçlara en yakın sonuçların a/h=10 için elde edildiği görülmektedir. Hacim oranı üsteli p'nin 2'den büyük değerlerinde sonuçlar arasındaki farkl›l›k daha belirgin olmaktadır. Bu durumda ele alınan koşul için p'nin 2'den büyük değerlerinde düzlemsel teorilerin geçerliliği azalmaktadır.

Son olarak, FD kare plakta Ritz yöntemiyle 3-boyutlu teoriye göre elde edilen ilk 4 frekans parametresine ait mod şekilleri bu çalışmada ele alınan tüm sınır koşullarında a/h oranının 10 ve 100 değerleri ve p'nin 0,1 ve 10 değerleri için verilmektedir. Düşey doğrultudaki deformasyonlar için çizilen bu mod şekilleri plağın göz önüne alınan doğal frekanstaki titreşimi sırasında düşey doğrultuda yaptığı hareketi göstermektedir.

Malzeme özellikleri kalınlık doğrultusunda değişen FD plakların serbest titreşim analiziyle elde edilen sonuçlar kısaca şu şekilde özetlenebilir. Kayma deformasyon teorileri ve KPT ile elde edilen sonuçlar, 3-boyutlu elastisite teorisine göre elde edilen

sonuçlarla p'nin küçük değerleri için uyumludur ancak p'nin değeri arttıkça 3-boyutlu çözümle elde edilen sonuçların hassasiyeti artmakta ve ele alınan diğer teorilere göre daha iyi sonuçlar vermektedir. FDM plaklarda ele alınan efektif malzeme özelliği frekans parametresinin değişimini etkilemektedir. FDM plakların serbest titreşim analizinde elde edilen frekans sonuçları kendisini oluşturan iki malzemenin frekans değerleri arasındadır. Mod şekillerinde ise tüm kenarları aynı sınır şartına sahip plaklarda (m,n)=(n,m) durumlarında frekanslar ve mod şekilleri birbirlerinin aynı olmaktadır. Mesnetleme biçimine bağlı olarak belirli bir yöndeki yarı dalga sayıları değişebilmekte ve yarı dalga sayıları kenarlardaki kısıtlamaların az olduğu kenarlar doğrultusunda daha hızlı artmaktadır. Aynı sınır şartı için, kenar/kalınlık oranının değişmesiyle mod dizilişleri arasında bir fark oluşmamaktadır. Hacim oranı üsteli p'nin artmasıyla malzemenin rijitliğinin azalmasından dolayı genliklerin arttığı gözlenmektedir.

Bu çalışmada kullanılan yöntem ile diğer olası sınır şartlarına sahip FD plakların titreşim problemi çalışılabilir. Hazırlanan programlarda basit bir takım değişiklikler ile FD plaklar›n burkulma problemi de incelenebilir. Elde edilen sonuçlar yap›lacak yeni araştırmalara kaynak olacak niteliktedir. Sonuçlar tasarımcılar tarafından kullan›labilecektir.

KAYNAKLAR

ABRATE S, 2006, "Free Vibration, Buckling and Static Deflections of Functionally Graded Plates" Composites Science and Technology, 66, 2383-2394.

ALAGÖZ H, GÜLGEÇ M, KONEZ A, 2004, "Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler ve Kullan›m Alanlar›" Mühendis ve Makine, Cilt: 45, Say›: 532.

AYDOĞDU M, TIMARCI T, 2001a, "Buckling and Vibration Analysis of Laminated Composite Plates on The Basis of a Higher Order Theory" European Conference on Computational Mechanics, Cracow, Poland.

AYDOĞDU M, TIMARCI T, 2001b, "İleri Bir Plak Teorisini Kullanarak Katmanlı Kompozit Plakların Titreşiminin İncelenmesi" 10. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu, Selçuk Üniveritesi, Konya.

AYDOĞDU M, TIMARCI T, 2003, "Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Square Plates with General Boundary Conditions" Composites Science and Technology, 63, 1061-1070.

AYDOĞDU M., 2005, "Katmanlı Dikdörtgen Kompozit Plakların Titreşiminin Ritz Yöntemi ile 3-Boyutlu Analizi" XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, Antakya.

AYDOĞDU M, 2008, "Conditions for Functionally Graded Plates to Remain Flat Under In-Plane Loads by Classical Plate Theory" Composite Structures, 82, 155-157.

AYDOĞDU M, TAŞKIN V, 2007, "Free Vibration Analysis of Functionaly Graded Beams with Simply Supported Edges" Materials &Design, 28, 1651-1656.

BAKİOĞLU M, 2004, "Sayısal Analiz" İTÜ İnşaat Fakültesi, Birsen Yay›nevi, İstanbul.

BHAT RB, 1985, “Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Ritz Method” Journal of Sound and Vibration 102, 4, 493-499.

BOZKURT A, 2003, “Chebyshev Polinomlar› ve Onlar›n Yak›nsakl›k Özellikleri” Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Mersin.

CHEN CS, 2005, “Nonlinear Vibration of a Shear Deformable Functionally Graded Plate” Composite Structures, 68, 295-302.

DHALIWAL RS, SINGH BM, 1978, “On The Theory of Elasticity of A Non-Homogeneous Medium” Journal of Elasticity, 8, 211-219.

DICKINSON SM, DI BLASIO A, 1986, “On The Use of Orthogonal Polynomials in The Rayleigh-Ritz Method for The Study of The Flexural Vibration and Buckling of Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates” Journal of Sound and Vibration, 108, 1, 51-62.

FERREIRA AJM, BATRA RC, ROQUE CMC, QIAN LF, JORGE RMN, 2006, “Natural Frequencies of Functionally Graded Plates by a Meshless Method” Composite Structures, 75, 593-600.

FOX L, PARKER IB, 1968, “Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis” Oxford University Press, London, s.205.

FUKUI Y, YAMANAKA N, 1992, “Elastic Analysis for Thick-Walled Tubes of Functionally Graded Material Subjected to Internal Pressure” International Journal of Japan Society of Mechanical Engineers Series A, 35, 379-385.

GIBSON RF, 1994, “Principles of Composite Material Mechanics” McGraw-Hill International Editions.

HASSELMAN DPH, YOUNGBLOOD GE, 1978, “Enhanced Thermal Stress Resistance of Structural Ceramics with Thermal Conductivity Gradient” Journal of the American Ceramic Society, 61(1,2), 49-53.

KIM YW, 2005, “Temperature Dependent Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates” Journal of Sound and Vibration, 284, 531-549.

KOIZUMI M, 1997, “FGM Activities in Japan” Composites Part B, 286, 1-4.

LANGHAAR HL, 1962, “Energy Methods in Applied Mechanics”, John Wiley and Sons.

LEISSA AW, 1969, “Vibration of Plates”, US Government Printing Office, Washington, DC, NASA SP-160, 331-340.

LEISSA AW, 1973, “The Free Vibration of Rectangular Plates” Journal of Sound and Vibration, 31, 257-293.

LIEW KM, LAM KY, CHOW ST, 1990, “Free Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Orthogonal Plate Function” Computational Structures, 34, 79-85.

LIEW KM, HUNG KC, LIM MK, 1993, “A Continuum Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Rectangular Plates” International Journal of Solids and Structures, 30, 3357-3379.

MEIROVITCH L, 1975, “Elements of Vibration Analysis”, NewYork, McGraw-Hill Book Comp.

NA KS, KIM JW, 2004, “Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Materials” Composites: Part B, bask›da.

NARITA Y, 1985, “The Effect of Point Constraints on Transverse Vibration of Cantilevered Plates” Journal of Sound and Vibration, 102, 305-313.

NEMAT-ALLA M, 2003, “Reduction of Thermal Stresses by Developing Two-Dimensional Functionally Graded Materials” International Journal of Solids and Structures.

PRADHAN SC, LOY CT, LAM KY, REDDY JN, 2000, “Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Various Boundary Conditions” Applied Acoustics, 61, 111-129.

PRAVEEN GN, REDDY JN, 1997, “Nonlineer Transient Thermoelastic Analysis of Functionaaly Graded Ceramic-Metal Plates” International Journal of Solids and Structures, Vol.35, No:33, 4457-4476.

REDDY, JN, 1984, “A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates” ASME Journal of Applied Mechanicals, 51, 745-752.

REDDY, JN, 2000, “Analysis of Functionally Graded Plates” International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, 663-684.

SHABANA YM, NODA N, 2001, “Thermo-Elasto-Plastic Stresses in Functionally Graded Materials Subjected to Thermal Loading Taking Residual Stresses of The Fabrication Process into Consideration” Conposites: Part B, 32, 111-121.

SOLDATOS KP, TIMARCI T, 1993, “A Unified Formulation of Laminated Composite, Shear Deformable, Five-Degrees-of-Freedom Cylindirical Shell Theories”, Composite Structures, 25, 165-171.

ŞAHİN Y, 2000, “Kompozit Malzemelere Giriş” Gazi Üniversitesi, Gazi Kitabevi, Ankara.

UYMAZ B, AYDOĞDU M, 2007a, “Vibration Analysis of Functionally Graded Plates with Simply Supported Edge Condition” 4. Ankara International Aerospace Conference, METU, Ankara.

UYMAZ B, AYDOĞDU M, 2007b, “Three-Dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Under Various Boundary Conditions” Journal of Reinforced Plastics and Composites, 26, 1847-1863, SAGE Publications, Los Angeles, London, New Delhi and Singapore.

VEL SS, BATRA RC, 2003a, “Three-Dimensional Analysis of Transient Thermal Stresses in Functionally Graded Plates” International Journal of Solids and Structures, 40, 7181-7196.

VEL SS, BATRA RC, 2003b, “Three-Dimensional Exact Solution for The Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates” Journal of Sound and Vibration, 272, 703-730.

WARBURTON GB, 1954, “The Vibration of Rectangular Plates” Proc. Institution of Mechanical Engineers, 168, 371-384.

WHITNEY JM, 1987, “Structural Analysis of Laminated Plates” Lancaster, Pennsylvania: Technomic.

WOO J, MEGUID SA, 2000, “Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells” International Journal of Solids and Structures, 38, 7409-7421.

YAMANOUCHI M, KOIZUMI M, HIRAI T, SHIOTA I, 1990, “Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials” Japan

YANG PC, NORRIS CH, STAVSKY Y, 1966, “Elastic Wave Propagation in Heterogenous Plates” International Journal of Solids and Structures, 2, 665-684.

YANG J, SHEN HS, 2001, “Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates” Composite Structures, 54, 497-508.

YANG J, KITIPORNCHAI S, LIEW KM, 2003, “Large Amplitude Vibration of Thermo-Electro-Mechanically Stressed FGM Laminated Plates” Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 192, 3861-3885.

YOUNG D, 1950, “Vibration of Rectangular Plates by The Ritz Method” Journal of Applied Mechanics, 17, 448-453.

ZENKOUR A, 2005, “A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2- Buckling and Free Vibration” International Journal of Solids and Structures, 42, 5243-5258.

ZHOU D, CHEUNG YK, AU FTK, LO SH, 2002, “Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Rectangular Plates Using Chebyshev Polynomial and Ritz Method” International Journal of Solids and Structures, 39, 6339-6353.

ZHOU D, CHEUNG YK, LO SH, AU FTK, 2003, “3D Vibration Analysis of Solid and Hollow Circular Cylinders via Chebyshev-Ritz Method” Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 192, 1575-1589.

ZHOU D, LO SH, AU FTK, CHEUNG YK, LIU WQ, 2006, “3D Vibration Analysis of Skew Thick Plates Using Chebyshev-Ritz Method” International Journal of Mechanical Sciences, 48, 1481-1493.

EK-A

PLAK DENKLEMLERİ (BKDT)

BKDT'ne göre plak denklemleri yer değiştirme alanı bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+B_{111}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$+B_{661}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+(B_{122}+B_{662})\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=I_1$$

$$(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(B_{121}+B_{661})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}$$

$$+B_{662}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+B_{112}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=I_2$$

$$B_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+D_{111}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}+(D_{121}+2D_{661})\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\partial y^2}+(D_{122}+2D_{662})\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2\partial y}+D_{112}\frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3}=I_3$$

$$B_{111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B_{661}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(B_{121}+B_{661})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-D_{111}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-(D_{121}+2D_{661})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-A_{5511}u_1$$
$$+D_{1111}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+D_{6611}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+(D_{1212}+D_{6621})\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial y}=I_4$$

$$(B_{122}+B_{662})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+B_{112}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+B_{662}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(D_{122}+2D_{662})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-D_{112}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$$
$$+(D_{1212}+D_{6612})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+D_{1122}\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}+D_{6622}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-A_{4422}v_1=I_5$$

Bu denklemlerde sağ taraftaki terimler aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$I_1 = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho_0^{-11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$I_2 = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho_0^{-21} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

$$I_3 = \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} - \rho_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \rho_1^{-11} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} + \rho_1^{-21} \frac{\partial^3 v_1}{\partial y \partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}$$

$$I_4 = \rho_0^{-11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_1^{-11} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho_0^{-12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$I_5 = \rho_0^{-21} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho_1^{-21} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho_0^{-22} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

EK-B

CHEBYSHEV POLİNOMLARI

$a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ reel sayılar ve x bir reel değişken olmak üzere,

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \tag{1}$$

n.ci dereceden bir polinom olsun. Polinom fonksiyonlar› çok uygun özelliklere sahiptirler. Polinomlarda x'in istenilen her değeri için türev alınabilir ve herhangi bir aralıkta integral alınabilir. Bundan başka p(x) polinomu $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ gibi n+1 tane katsay› taraf›ndan tam olarak belirtilebilir.

n negatif olmayan bir tamsay›, $x=\cos\theta$ ve $0\le\theta\le\pi$ olmak üzere,

$$T_n(x)=\cos n\theta \tag{2}$$

fonksiyonu tan›mlans›n. θ s›f›rdan π'ye artarken, x- 1'den -1'e azal›r. $T_n(x)$ fonksiyonu I=[-1,1] aralığında tanımlanmış olur. $x=\cos\theta$ ise $\theta=\arccos x$'dir.

$$T_n(x)=\cos n(\arccos x) \tag{3}$$

Şimdi $T_n(x)$'in n dereceli bir polinom olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta+i\sin\theta \\ e^{in\theta} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \end{aligned} \tag{4}$$

olduğunu hatırlayalım. Binom açılımından,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos^n\theta+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta(i\sin\theta)+\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta(i^2\sin^2\theta)+\ldots+\binom{n}{n}(i\sin\theta)^n \tag{5}$$

(4) ve (5) eşitliklerinde reel kısımlar eşit olduğundan $\sin^2\theta$ yerine $1-\cos^2\theta$ yaz›larak,

$$\cos n\theta = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^q \binom{n}{2q} \cos^{n-2q}\theta \left(\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} \cos^{2k}\theta \right) \tag{6}$$

elde edilir ve bu ifadede $\cos\theta=x$ yaz›l›rsa $\cos n\theta$'nın polinom olduğu görülür. Dolay›s›yla (6) ile tan›mlanan fonksiyon bir polinomdur. Bu polinomun katsay›lar› belirlensin. Eğer,

$$\begin{aligned} A_q &= (-1)^q \binom{n}{2q} \cos^{n-2q}\theta, \qquad & q &= 0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right] \\ B_{k,q} &= (-1)^k \binom{q}{k} \cos^{2k}\theta, \qquad & k &= 0,1,2,\ldots,q \end{aligned} \tag{7}$$

olarak seçilirse (6) ifadesinin sağ tarafı bir üçgensel toplam olur. Yani,

$$\begin{aligned} \cos n\theta = {} & A_0 B_{0,0} \\ & + A_1 B_{0,1} + A_1 B_{1,1} \\ & + A_2 B_{0,2} + A_2 B_{1,2} + A_2 B_{2,2} \\ & \ldots \\ & + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{0,\left[\frac{n}{2}\right]} + \ldots + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]} \end{aligned} \tag{8}$$

şeklindedir. (8) eşitliğinin sağ tarafındaki aynı köşegen üzerindeki elemanlar toplanırsa,

$$\cos n\theta = \left(A_0 B_{0,0} + A_1 B_{1,1} + ... + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]} \right)$$
$$+ \left(A_1 B_{0,1} + A_2 B_{1,2} + ... + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{\left[\frac{n}{2}\right]-1,\left[\frac{n}{2}\right]} \right)$$
$$...$$
$$+ \left(A_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} B_{0,\left[\frac{n}{2}\right]-1} + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{1,\left[\frac{n}{2}\right]} \right) \qquad (9)$$
$$+ \left(A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{0,\left[\frac{n}{2}\right]} \right)$$

elde edilir. A_q ve $B_{k,q}$ değerleri $q=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$ ve k=0,1,…,q için yukar›da yerlerine yaz›l›rsa,

$$T_n(x) = \cos n\theta = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left((-1)^k \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} \cos^{n-2k}\theta \right) \qquad (10)$$

elde edilir. (10) eşitliği $T_n(x)$'in n.ci dereceden bir polinom olduğunu gösterir. $\cos\theta=x$ olmak üzere (10) eşitliği,

$$T_n(x) = t_0^{(n)} + t_1^{(n)} x + t_2^{(n)} x^2 + ... + t_n^{(n)} x^n \qquad (11)$$

şeklinde yazılırsa,

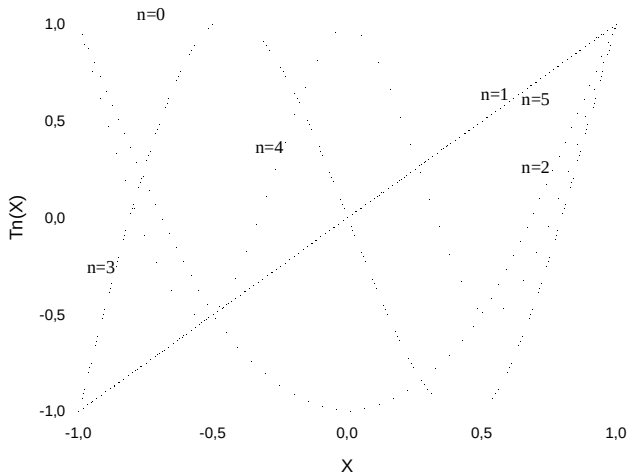
$$t^{(n)}_{n-(2k+1)} = 0 \quad ; \qquad k = 0,1,..., \left[\frac{n-1}{2}\right]$$
$$t^{(n)}_{n-2k} = (-1)^k \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} \quad ; \qquad k = 0,1,..., \left[\frac{n}{2}\right] \qquad (12)$$

olduğu görülür. Böylece (3) ile tanımlı $T_n(x)$ polinomuna I aralığı üzerinde değerler alan n.ci dereceden *Chebyshev polinomu* denir, (Bozkurt, 2003). Tn(x) polinomlar›, ilk defa Rus matematikçi P.L.Chebyshev (1821-1894) tarafından çalışılmış ve onun ismiyle adlandırılmıştır (Fox ve Parker, 1968).

Negatif olmayan n tamsay›s› için, n.ci dereceden Chebyshev polinomlar› (11) ve (12) formülleri ile tanımlanır. İlk altı Chebyshev polinomu aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 ve T_5 Chebyshev polinomlarının grafikleri Şekil 1 ile verilmektedir.



Şekil B.1. Chebyshev polinomlarının değişimi

EK-C

GENEL SINIR ŞARTLARI İÇİN ÜÇ BOYUTLU TEORİYE GÖRE RİTZ YÖNTEMİNDEKİ MATRİS ELEMANLARI

$$\left[K - \Omega^2 M\right]\left[X\right] = 0$$

$$K_{11} = \iiint E(Z)\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(F_{u,x}^2 P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}} + F_u F_{u,x} P_i P_{\bar{i},x} P_j P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}} + F_u F_{u,x} P_{i,x} P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}} + F_u^2 P_{i,x} P_{\bar{i},x} P_j P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(F_{u,y}^2 P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}} + F_u F_{u,y} P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j},y} P_k P_{\bar{k}} + F_u F_{u,y} P_i P_{\bar{i}} P_{j,y} P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}} + F_u^2 P_i P_{\bar{i}} P_{j,y} P_{\bar{j},y} P_k P_{\bar{k}} + \frac{1}{\gamma^2} F_u^2 P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} P_{k,z} P_{\bar{k},z}\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{12} = \iiint E(Z)\lambda\left\{\frac{\nu}{1-2\nu}\left(F_{u,x} F_{v,y} P_l P_{\bar{i}} P_m P_{\bar{j}} P_n P_{\bar{k}} + F_{u,x} F_v P_l P_{\bar{i}} P_{m,y} P_{\bar{j}} P_n P_{\bar{k}} + F_u F_{v,y} P_l P_{\bar{i},x} P_m P_{\bar{j}} P_n P_{\bar{k}} + F_u F_v P_k P_{\bar{i},x} P_{m,y} P_{\bar{j}} P_n P_{\bar{k}}\right) + \frac{1}{2}\left(F_{u,y} F_{v,x} P_l P_{\bar{i}} P_m P_{\bar{j}} P_n P_{\bar{k}} + F_u F_{v,x} P_l P_{\bar{i}} P_m P_{\bar{j},y} P_n P_{\bar{k}} + F_{u,y} F_v P_{l,x} P_{\bar{i}} P_m P_{\bar{j}} P_n P_{\bar{k}} + F_u F_v P_{l,x} P_{\bar{i}} P_m P_{\bar{j},y} P_n P_{\bar{k}}\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{13} = \iiint E(Z)\frac{\lambda}{\gamma}\left\{\frac{\nu}{1-2\nu}\left(F_{u,x} F_w P_p P_{\bar{i}} P_q P_{\bar{j}} P_{r,z} P_{\bar{k}} + F_u F_w P_p P_{\bar{i},x} P_q P_{\bar{j}} P_{r,z} P_{\bar{k}}\right) + \frac{1}{2}\left(F_u F_{w,x} P_p P_{\bar{i}} P_q P_{\bar{j}} P_r P_{\bar{k},z} + F_u F_w P_{p,x} P_{\bar{i}} P_q P_{\bar{j}} P_r P_{\bar{k},z}\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{21} = \iiint E(Z)\left\{\lambda\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\left(F_{u,x} F_{v,y} P_i P_{\bar{l}} P_j P_{\bar{m}} P_k P_{\bar{n}} + F_{u,x} F_v P_i P_{\bar{l}} P_j P_{\bar{m},y} P_k P_{\bar{n}} + F_u F_{v,y} P_{i,x} P_{\bar{l}} P_j P_{\bar{m}} P_k P_{\bar{n}} + F_u F_v P_{\bar{i},x} P_{\bar{l}} P_j P_{\bar{m},y} P_k P_{\bar{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(F_{u,y} F_{v,x} P_i P_{\bar{l}} P_j P_{\bar{m}} P_k P_{\bar{n}} + F_{u,y} F_v P_i P_{\bar{l},x} P_j P_{\bar{m}} P_k P_{\bar{n}} + F_u F_{v,x} P_i P_{\bar{l}} P_{j,y} P_{\bar{m}} P_k P_{\bar{n}} + F_u F_v P_i P_{\bar{l},x} P_{j,y} P_{\bar{m}} P_k P_{\bar{n}}\right)\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{22} = \iiint E(Z)\left\{\lambda^2\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(F_{v,y}^2 P_l P_{\bar{l}} P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}} + F_v F_{v,y} P_l P_{\bar{l}} P_m P_{\bar{m},y} P_n P_{\bar{n}} + F_v F_{v,y} P_l P_{\bar{l}} P_{m,y} P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}} + F_v^2 P_l P_{\bar{l}} P_{m,y} P_{\bar{m},y} P_n P_{\bar{n}}\right) + \frac{1}{2\gamma^2}\left(F_v^2 P_l P_{\bar{l}} P_m P_{\bar{m}} P_{n,z} P_{\bar{n},z}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(F_{v,x}^2 P_l P_{\bar{l}} P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}} + F_v F_{v,x} P_l P_{\bar{l},x} P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}} + F_v F_{v,x} P_{l,x} P_{\bar{l}} P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}} + F_v^2 P_{l,x} P_{\bar{l},x} P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}}\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{23} = \iiint E(Z)\left\{\frac{\lambda^2}{\gamma}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\left(F_{v,y}F_w P_p P_{\bar{l}} P_q P_{\bar{m}} P_{r,z} P_{\bar{n}} + F_v F_w P_p P_{\bar{l}} P_q P_{\bar{m},y} P_{r,z} P_{\bar{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(F_v F_{w,y} P_p P_{\bar{l}} P_q P_{\bar{m}} P_r P_{\bar{n},z} + F_v F_w P_p P_{\bar{l}} P_{q,y} P_{\bar{m}} P_r P_{\bar{n},z}\right)\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{31} = \iiint E(Z)\left\{\frac{\lambda}{\gamma}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\left(F_{u,x}F_w P_i P_{\bar{p}} P_j P_{\bar{q}} P_k P_{\bar{r},z} + F_u F_w P_{i,x} P_{\bar{p}} P_j P_{\bar{q}} P_k P_{\bar{r},z}\right) + \frac{1}{2}\left(F_u F_{w,x} P_i P_{\bar{p}} P_j P_{\bar{q}} P_{k,z} P_{\bar{r}} + F_u F_w P_i P_{\bar{p},x} P_j P_{\bar{q}} P_{k,z} P_{\bar{r}}\right)\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{32} = \iiint E(Z)\left\{\frac{\lambda^2}{\gamma}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\left(F_{v,y}F_w P_l P_{\bar{p}} P_m P_{\bar{q}} P_n P_{\bar{r},z} + F_v F_w P_l P_{\bar{p}} P_{m,y} P_{\bar{q}} P_n P_{\bar{r},z}\right) + \frac{1}{2}\left(F_v F_{w,y} P_l P_{\bar{p}} P_m P_{\bar{q}} P_{n,z} P_{\bar{r}} + F_v F_w P_l P_{\bar{p}} P_m P_{\bar{q},y} P_{n,z} P_{\bar{r}}\right)\right)\right\} dZdYdX$$

$$K_{33} = \iiint E(Z)\left\{\lambda^2\left(\frac{1-\nu}{\gamma^2(1-2\nu)}\left(F_w^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_{r,z} P_{\bar{r},z} + \frac{1}{2}\left(F_{w,y}^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,y} P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q},y} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,y} P_p P_{\bar{p}} P_{q,y} P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w^2 P_p P_{\bar{p}} P_{q,y} P_{\bar{q},y} P_r P_{\bar{r}}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(F_{w,x}^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,x} P_p P_{\bar{p},x} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,x} P_{p,x} P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w^2 P_{p,x} P_{\bar{p},x} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}}\right)\right\} dZdYdX$$

$$M_{11} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4}\left(F_u^2 P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} P_k P_{\bar{k}}\right) dZdYdX$$

$$M_{22} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4}\left(F_v^2 P_l P_{\bar{l}} P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}}\right) dZdYdX$$

$$M_{33} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4}\left(F_w^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}}\right) dZdYdX$$

EK-D

GENEL SINIR ŞARTLARI İÇİN KPT'NE GÖRE RİTZ YÖNTEMİNDEKİ MATRİS ELEMANLARI

$$[K - \Omega^2 M][X] = 0$$

$$K_{11} = \iiint E(Z)\{(F_{u,x}^2 P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} + F_u F_{u,x} P_i P_{\bar{i},x} P_j P_{\bar{j}} + F_u F_{u,x} P_{i,x} P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} + F_u^2 P_{i,x} P_{\bar{i},x} P_j P_{\bar{j}}) + \frac{\lambda^2(1-\nu)}{2}$$
$$(F_{u,y}^2 P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j}} + F_u F_{u,y} P_i P_{\bar{i}} P_j P_{\bar{j},y} + F_u F_{u,y} P_i P_{\bar{i}} P_{j,y} P_{\bar{j}} + F_u^2 P_i P_{\bar{i}} P_{j,y} P_{\bar{j},y})\}dZdYdX$$

$$K_{12} = \iiint E(Z)\lambda\{\nu(F_{u,x} F_{v,y} P_k P_{\bar{i}} P_l P_{\bar{j}} + F_{u,x} F_v P_k P_{\bar{i}} P_{l,y} P_{\bar{j}} + F_u F_{v,y} P_k P_{\bar{i},x} P_l P_{\bar{j}} + F_u F_v P_k P_{\bar{i},x} P_{l,y} P_{\bar{j}}) + \frac{(1-\nu)}{2}$$
$$(F_{u,y} F_{v,x} P_k P_{\bar{i}} P_l P_{\bar{j}} + F_u F_{v,x} P_k P_{\bar{i}} P_l P_{\bar{j},y} + F_{u,y} F_v P_{k,x} P_{\bar{i}} P_l P_{\bar{j}} + F_u F_v P_{k,x} P_{\bar{i}} P_l P_{\bar{j},y})\}dZdYdX$$

$$K_{13} = \iiint E(Z)\{-\beta Z\{F_{u,x} F_{w,xx} P_m P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j}} + F_u F_{w,xx} P_m P_{\bar{i},x} P_n P_{\bar{j}} + 2F_{u,x} F_{w,x} P_{m,x} P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j}} +$$
$$2F_u F_{w,x} P_{m,x} P_{\bar{i},x} P_n P_{\bar{j}} + F_{u,x} F_w P_{m,xx} P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j}} + F_u F_w P_{m,xx} P_{\bar{i},x} P_n P_{\bar{j}}\} - \lambda\gamma Z\{\nu(F_{u,x} F_{w,yy} P_m P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j}} +$$
$$F_u F_{w,yy} P_m P_{\bar{i},x} P_n P_{\bar{j}} + 2F_{u,x} F_{w,y} P_m P_{\bar{i}} P_{n,y} P_{\bar{j}} + 2F_u F_{w,y} P_m P_{\bar{i},x} P_{n,y} P_{\bar{j}} + F_{u,x} F_w P_m P_{\bar{i}} P_{n,yy} P_{\bar{j}} +$$
$$F_u F_w P_m P_{\bar{i},x} P_{n,yy} P_{\bar{j}}) + (1-\nu)(F_{u,y} F_{w,xy} P_m P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j}} + F_u F_{w,xy} P_m P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j},y} F_{u,y} F_{w,x} P_m P_{\bar{i}} P_{n,y} P_{\bar{j}} +$$
$$F_u F_{w,x} P_m P_{\bar{i}} P_{n,y} P_{\bar{j},y} + F_{u,y} F_{w,y} P_{m,x} P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j}} + F_u F_{wy} P_{m,x} P_{\bar{i}} P_n P_{\bar{j},y} + F_{u,y} F_w P_{m,x} P_{\bar{i}} P_{n,y} P_{\bar{j}} +$$
$$F_u F_w P_{m,x} P_{\bar{i}} P_{n,y} P_{\bar{j},y})\}\}dZdYdX$$

$$K_{21} = \iiint E(Z)\lambda\{\nu(F_{u,x} F_{v,y} P_i P_{\bar{k}} P_j P_{\bar{l}} + F_{u,x} F_v P_i P_{\bar{k}} P_j P_{\bar{l},y} + F_u F_{v,y} P_{i,x} P_{\bar{k}} P_j P_{\bar{l}} + F_u F_v P_{i,x} P_{\bar{k}} P_j P_{\bar{l},y}) + \frac{(1-\nu)}{2}$$
$$(F_{u,y} F_{v,x} P_i P_{\bar{k}} P_j P_{\bar{l}} + F_{u,y} F_v P_i P_{\bar{k},x} P_j P_{\bar{l}} + F_u F_{v,x} P_i P_{\bar{k}} P_{j,y} P_{\bar{l}} + F_u F_v P_i P_{\bar{k},x} P_{j,y} P_{\bar{l}})\}dZdYdX$$

$$K_{22} = \iiint E(Z)\{\lambda^2(F_{v,y}^2 P_k P_{\bar{k}} P_l P_{\bar{l}} + F_v F_{v,y} P_k P_{\bar{k}} P_l P_{\bar{l},y} + F_v F_{v,y} P_k P_{\bar{k}} P_{l,y} P_{\bar{l}} + F_v^2 P_k P_{\bar{k}} P_{l,y} P_{\bar{l},y})\} + \frac{(1-\nu)}{2}$$
$$(F_{v,x}^2 P_k P_{\bar{k}} P_l P_{\bar{l}} + F_v F_{v,x} P_k P_{\bar{k},x} P_l P_{\bar{l}} + F_v F_{v,x} P_{k,x} P_{\bar{k}} P_l P_{\bar{l}} + F_v^2 P_{k,x} P_{\bar{k},x} P_l P_{\bar{l}})\}dZdYdX$$

$$K_{23} = \iiint E(Z)\{\{-\lambda\gamma Z(F_{v,y}F_{w,yy}P_m\bar{P}_kP_nP_l + F_vF_{w,yy}P_m\bar{P}_kP_nP_{l,y} + 2F_{v,y}F_{w,y}P_m\bar{P}_kP_{n,y}P_l + 2F_vF_{w,y}P_m\bar{P}_kP_{n,y}P_{l,y} + F_{v,y}F_wP_m\bar{P}_kP_{n,yy}P_l + F_vF_wP_m\bar{P}_kP_{n,yy}P_{l,y}) - \beta Z(\nu(F_{v,y}F_{w,xx}P_m\bar{P}_kP_nP_l + F_vF_{w,xx}P_m\bar{P}_kP_nP_{l,y} + 2F_{v,y}F_{w,x}P_{m,x}\bar{P}_kP_nP_l + 2F_vF_{w,x}P_{m,x}\bar{P}_kP_nP_{l,y} + F_{v,y}F_wP_{m,xx}\bar{P}_kP_nP_l + F_vF_wP_{m,xx}\bar{P}_kP_nP_{l,y})) - \gamma Z(1-\nu)\{F_{v,x}F_{w,xy}P_m\bar{P}_kP_nP_l + F_vF_{w,xy}P_m\bar{P}_{k,x}P_nP_l + F_{v,x}F_{w,x}P_m\bar{P}_kP_{n,y}P_l + F_vF_{w,x}P_m\bar{P}_{k,x}P_{n,y}P_l + F_{v,x}F_{w,y}P_{m,x}\bar{P}_kP_nP_l + F_vF_{w,y}P_{m,x}\bar{P}_{k,x}P_nP_l + F_{v,x}F_wP_{m,x}\bar{P}_kP_{n,y}P_l + F_vF_wP_{m,x}\bar{P}_{k,x}P_{n,y}P_l\}\}dZdYdX$$

$$K_{31} = \iiint E(Z)\{-\beta Z(F_{u,x}F_{w,xx}P_i\bar{P}_mP_jP_n + 2F_{u,x}F_{w,x}P_i\bar{P}_{m,x}P_jP_n + F_{u,x}F_wP_i\bar{P}_{m,xx}P_jP_n + F_uF_{w,xx}P_{i,x}\bar{P}_mP_jP_n + 2F_uF_{w,x}P_{i,x}\bar{P}_{m,x}P_jP_n + F_uF_wP_{i,x}\bar{P}_{m,xx}P_jP_n) - \lambda\gamma Z\{\nu(F_{u,x}F_{w,yy}P_i\bar{P}_mP_jP_n + 2F_{u,x}F_{w,y}P_i\bar{P}_mP_jP_{n,y} + F_{u,x}F_wP_i\bar{P}_mP_jP_{n,yy} + F_uF_{w,yy}P_{i,x}\bar{P}_mP_jP_n + 2F_uF_{w,y}P_{i,x}\bar{P}_mP_jP_{n,y} + F_uF_wP_{i,x}\bar{P}_mP_jP_{n,yy}) + (1-\nu)(F_{u,y}F_{w,xy}P_i\bar{P}_mP_jP_n + F_{u,y}F_{w,x}P_i\bar{P}_mP_jP_{n,y} + F_{u,y}F_{w,y}P_i\bar{P}_{m,x}P_jP_n + F_{u,y}F_wP_i\bar{P}_{m,x}P_jP_{n,y} + F_uF_{w,xy}P_i\bar{P}_mP_{j,y}P_n + F_uF_{w,x}P_i\bar{P}_mP_{j,y}P_{n,y} + F_uF_{w,y}P_i\bar{P}_{m,x}P_{j,y}P_n + F_uF_wP_i\bar{P}_{m,x}P_{j,y}P_{n,y})\}\}dZdYdX$$

$$K_{32} = \iiint E(Z)\{\{-\lambda\gamma Z(F_{v,y}F_{w,yy}P_k\bar{P}_mP_l\bar{P}_n + 2F_{v,y}F_{w,y}P_k\bar{P}_mP_l\bar{P}_{n,y} + F_{v,y}F_wP_k\bar{P}_mP_l\bar{P}_{n,yy} + F_vF_{w,yy}P_k\bar{P}_mP_{l,y}\bar{P}_n + 2F_vF_{w,y}P_k\bar{P}_mP_{l,y}\bar{P}_{n,y} + F_vF_wP_k\bar{P}_mP_{l,y}\bar{P}_{n,yy}) - \beta Z(\nu(F_{v,y}F_{w,xx}P_k\bar{P}_mP_l\bar{P}_n + 2F_{v,y}F_{w,x}P_k\bar{P}_{m,x}P_l\bar{P}_n + F_{v,y}F_wP_k\bar{P}_{m,xx}P_l\bar{P}_n + F_vF_{w,xx}P_k\bar{P}_mP_{l,y}\bar{P}_n + 2F_vF_{w,x}P_k\bar{P}_{m,x}P_{l,y}\bar{P}_n + F_vF_wP_k\bar{P}_{m,xx}P_{l,y}\bar{P}_n)) - \gamma Z(1-\nu)(F_{v,x}F_{w,xy}P_k\bar{P}_mP_l\bar{P}_n + F_{v,x}F_{w,x}P_k\bar{P}_mP_l\bar{P}_{n,y} + F_{v,x}F_{w,y}P_k\bar{P}_{m,x}P_l\bar{P}_n + F_{v,x}F_wP_k\bar{P}_{m,x}P_l\bar{P}_{n,y} + F_vF_{w,xy}P_{k,x}\bar{P}_mP_l\bar{P}_n + F_vF_{w,x}P_{k,x}\bar{P}_mP_l\bar{P}_{n,y} + F_vF_{w,y}P_{k,x}\bar{P}_{m,x}P_l\bar{P}_n + F_vF_wP_{k,x}\bar{P}_{m,x}P_l\bar{P}_{n,y})\}dZdYdX$$

$$K_{33} = \iiint E(Z)\{\beta^2 Z^2 (F^2_{w,xx} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 2F_{w,x} F_{w,xx} P_m \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_n + F_w F_{w,xx} P_m \bar{P}_{m,xx} P_n \bar{P}_n +$$
$$2F_{w,x} F_{w,xx} P_{m,x} \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 4F^2_{w,x} P_{m,x} \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_n + 2F_w F_{w,x} P_{m,x} \bar{P}_{m,xx} P_n \bar{P}_n +$$
$$F_w F_{w,xx} P_{m,xx} \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 2F_w F_{w,xx} P_{m,xx} \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_n + F^2_w P_{m,xx} \bar{P}_{m,xx} P_n \bar{P}_n) + \lambda^2 \gamma^2 Z^2 ($$
$$F^2_{w,yy} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 2F_{w,y} F_{w,yy} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,y} + F_w F_{w,yy} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,yy} + 2F_{w,y} F_{w,yy} P_m \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_n +$$
$$4F^2_{w,y} P_m \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_{n,y} + 2F_w F_{w,y} P_m \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_{n,yy} + F_w F_{w,yy} P_m \bar{P}_m P_{n,yy} \bar{P}_n + 2F_w F_{w,y} P_m \bar{P}_m P_{n,yy} \bar{P}_{n,y} +$$
$$F^2_w P_m \bar{P}_m P_{n,yy} \bar{P}_{n,yy}) \} + \lambda\beta\gamma Z^2 \{ \{ F_{w,xx} F_{w,yy} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 2F_{w,x} F_{w,yy} P_m \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_n +$$
$$F_w F_{w,yy} P_m \bar{P}_{m,xx} P_n \bar{P}_n + 2F_{w,xx} F_{w,y} P_m \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_n + 4F_{w,x} F_{w,y} P_m \bar{P}_{m,x} P_{n,y} \bar{P}_n + 2F_w F_{w,y} P_m \bar{P}_{m,xx} P_{n,y} \bar{P}_n +$$
$$F_w F_{w,xx} P_m \bar{P}_m P_{n,yy} \bar{P}_n + 2F_w F_{w,x} P_m \bar{P}_{m,x} P_{n,yy} \bar{P}_n + F^2_w P_m \bar{P}_{m,xx} P_{n,yy} \bar{P}_n + 2F_{w,xx} F_{w,y} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,y} +$$
$$F_w F_{w,xx} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,yy} + 2F_{w,x} F_{w,yy} P_{m,x} \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 4F_{w,x} F_{w,y} P_{m,x} \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,y} + 2F_w F_{w,x} P_{m,x} \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,yy} +$$
$$F_w F_{w,yy} P_{m,xx} \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + 2F_w F_{w,y} P_{m,xx} \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,y} + F^2_w P_{m,xx} \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,yy} \} \} + 2\gamma^2 Z^2 (1-\nu) \{$$
$$F^2_{w,xy} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + F_{w,x} F_{w,xy} P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,y} + F_{w,y} F_{w,xy} P_m \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_n + F_w F_{w,xy} P_m \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_{n,y} +$$
$$F_{w,x} F_{w,xy} P_m \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_n + F^2_{w,x} P_m \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_{n,y} + F_{w,x} F_{w,y} P_m \bar{P}_{m,x} P_{n,y} \bar{P}_n + F_w F_{w,x} P_m \bar{P}_{m,x} P_{n,y} \bar{P}_{n,y} +$$
$$F_{w,y} F_{w,xy} P_{m,x} \bar{P}_m P_n \bar{P}_n + F_{w,x} F_{w,y} P_{m,x} \bar{P}_m P_n \bar{P}_{n,y} + F^2_{w,y} P_{m,x} \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_n + F_w F_{w,y} P_{m,x} \bar{P}_{m,x} P_n \bar{P}_{n,y} +$$
$$F_w F_{w,xy} P_{m,x} \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_n + F_w F_{w,x} P_{m,x} \bar{P}_m P_{n,y} \bar{P}_{n,y} + F_w F_{w,y} P_{m,x} \bar{P}_{m,x} P_{n,y} \bar{P}_n +$$
$$F^2_w P_{m,x} \bar{P}_{m,x} P_{n,y} \bar{P}_{n,y} \} \} dZdYdX$$

$$M_{11} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4} (F^2_u P_i \bar{P}_i P_j \bar{P}_j) dZdYdX$$

$$M_{22} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4} (F^2_v P_k \bar{P}_k P_l \bar{P}_l) dZdYdX$$

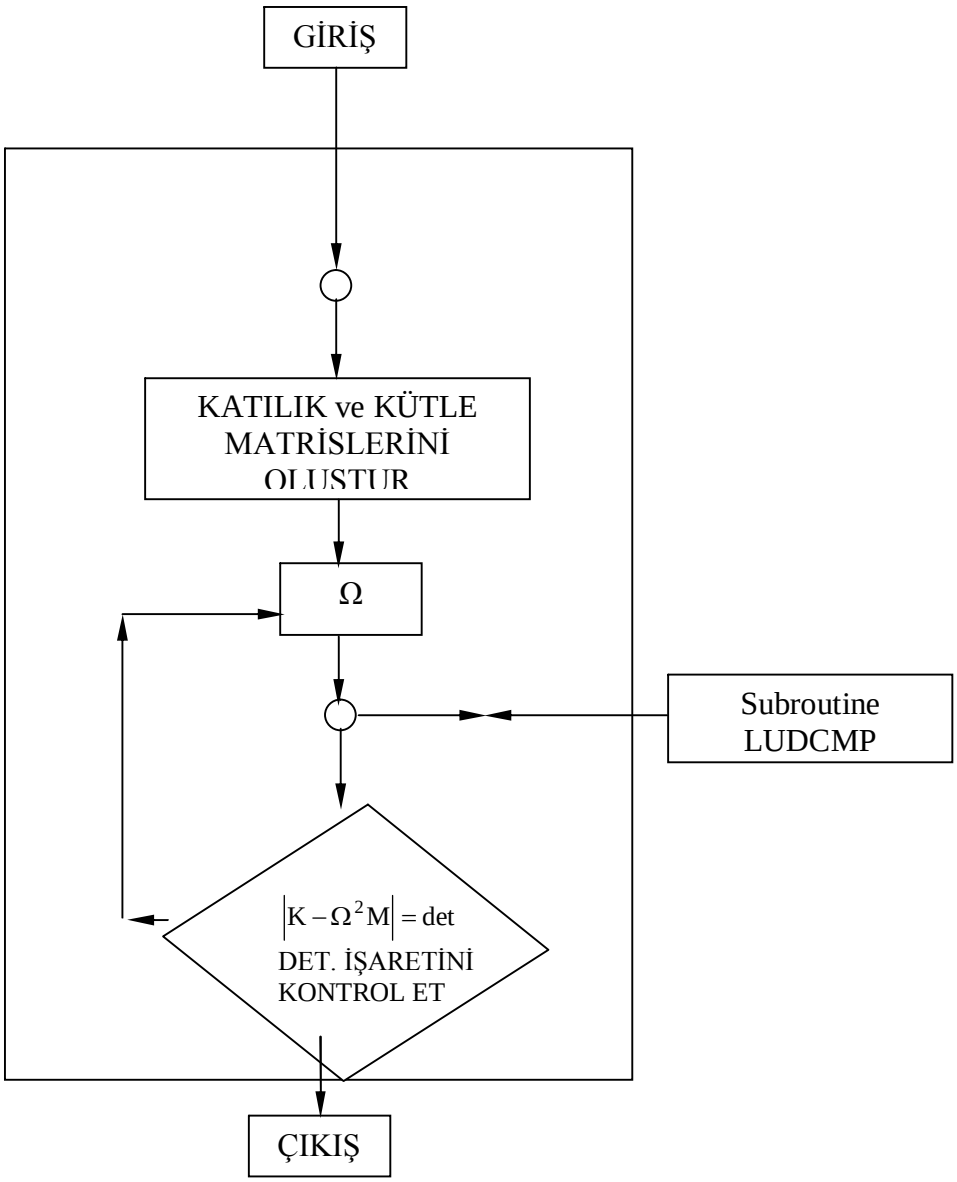
$$M_{33} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4} (F^2_w P_m \bar{P}_m P_n \bar{P}_n) dZdYdX$$

Bu eşitliklerde görülen boyutsuz parametreler λ, γ ve β aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\lambda = \frac{a}{b}, \qquad \gamma = \frac{h}{b}, \qquad \beta = \frac{h}{a}$$

EK-E

RİTZ YÖNTEMİNDE KULLANILAN BİLGİSAYAR PROGRAMI AKIŞ DİYAGRAMI



GİRİŞ	a/h (kenar-kal›nl›k)oranlar› p (hacim oranı üsteli) değerleri Malzeme özellikleri
Subroutine LUDCMP	Determinant hesaplar (Numerical recipies) (3.30 ve 3.36 denklemleri)
ÇIKIŞ	Determinantın işaret değiştirdiği değer serbest titreşim frekans parametresi