Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática[1]

Mónica E. Villarreal

Resumen

El desarrollo de actividades y proyectos de modelización matemática en la formación de futuros profesores resulta de vital importancia debido a que, tanto en documentos curriculares para la formación inicial de profesores de matemática, como en documentos curriculares para la educación secundaria, se recomienda la introducción de aplicaciones y modelización para la enseñanza de la matemática. Diversos investigadores indican que, si se pretende que los futuros profesores diseñen actividades de modelización para sus clases en la escuela secundaria, es necesario que tengan experiencias de modelización durante su formación inicial. En este artículo se describe un escenario de modelización creado para que futuros profesores de matemática desarrollen diversas actividades de modelización, en particular, para que lleven adelante proyectos de modelización abierta, con tema de libre elección. En base a datos recopilados durante siete años, se presentan experiencias de modelización llevadas adelante en este escenario. Se muestra el tipo de temas que fueron seleccionados, los contenidos matemáticos que se utilizaron para dar cuenta de los problemas formulados y el importante papel de las tecnologías en un proceso de modelización. El análisis detallado de un proyecto permite mostrar logros, dificultades y reflexiones en torno a la modelización. Se concluye con algunas reflexiones que ponen de manifiesto la necesidad de repensar las acciones propuestas en el escenario de modelización creado y coordinar acciones entre matemáticos y educadores matemáticos a fin de que la modelización sea comprendida, por los futuros profesores, como actividad matemática y como abordaje pedagógico.

Palabras clave: educación, matemática, modelización matemática, formación de profesores, tecnologías.

Abstract[2]

The development of mathematical modeling activities and projects in the education of future teachers is of vital importance because, both in curricular documents on initial mathematics teacher preparation, and in curricular documents on secondary education, the introduction

M. E. Villarreal
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
mvilla@famaf.unc.edu.ar

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por la autora en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.
Recibido por los editores el 4 de junio de 2019 y aceptado el 22 de julio de 2019.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 219–234. Costa Rica

of applications and modeling for the teaching of mathematics is recommended. Several researchers indicate that, if future teachers are intended to design modeling activities for their classes in high school, they need to have modeling experiences during their initial preparation. This article describes a modeling scenario created for future mathematics in which various modeling activities are developed. In particular, open-ended modeling projects are carried out on freely selected topics. Based on data collected over seven years, modeling experiences carried out in this scenario are presented. It shows the type of topics that were selected, the mathematical contents that were used in formulating the problems, and the important role of technologies in a modeling process. The detailed analysis of a project allows a demonstration of achievements, difficulties and reflections on modeling. It concludes with some reflections that highlight the need to rethink the actions proposed in the modeling scenario created, and to coordinate actions between mathematicians and mathematical educators so that modeling is understood, by future teachers, as a mathematical activity and as a pedagogical approach.

Keywords: education, Mathematics, mathematical modeling, teacher preparation, technologies.

1. Breve introducción: problemática y contexto

Este texto aborda aspectos de la problemática de la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización matemática como proceso científico y como abordaje pedagógico. Desde hace unos diez años un grupo de docentes e investigadores de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), del cual soy integrante, investiga en torno a la temática del desarrollo profesional de futuros profesores de matemática que llevan adelante proyectos de modelización[3], esto es, actúan como modelizadores; o que diseñan e implementan actividades de modelización durante el transcurso de sus primeras prácticas docentes en aula. Estas investigaciones han sido desarrolladas con estudiantes[4] que cursan la carrera de Profesorado en Matemática en la UNC. Esta carrera tiene una duración de 4 años. Su plan de estudios está compuesto por un 66% de cursos disciplinares (matemática, física o computación) impartidos por matemáticos o físicos y un 34% de cursos de carácter didáctico-pedagógico impartidos por pedagogos o educadores matemáticos.

En este artículo el foco se coloca en los futuros profesores en cuanto modelizadores y se propone como objetivo: reportar acerca de sus experiencias de modelización en el marco de un curso de Didáctica de la Matemática (DM).

En las siguientes secciones, se presentan algunas ideas en torno al vínculo entre modelización, currículum y formación inicial de profesores de matemática. El tratamiento de estas ideas busca fundamentar la importancia de la inclusión de la modelización en la formación de profesores. Luego, se hace referencia a los desafíos que la modelización implica para el trabajo docente. Posteriormente, se describe el escenario de modelización creado en el curso

[3] Para evitar repeticiones, a veces se usa "modelización" en lugar de "modelización matemática".
[4] De no mediar una aclaración, "estudiantes" se refiere siempre a "futuros profesores".

de DM y se brindan detalles de las acciones llevadas a cabo en él. Finalmente, se reportan algunos resultados de investigaciones realizadas en ese escenario de modelización.

2. Modelización en el currículum

Según Kaiser (2014), la importancia de la modelización a nivel internacional se ve reflejada en muchos currículums nacionales, sin embargo, todavía no es claro cómo integrar la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el ámbito local (Argentina), y en coincidencia con lo observado por Kaiser, la modelización es mencionada en documentos curriculares destinados a la educación secundaria. Por ejemplo, en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba se encuentran propuestas de situaciones de enseñanza relacionadas con la modelización, y se señala que el docente:

- Considerará la ***modelización*** para resolver problemas tanto externos como internos a la matemática. Además, propiciará el estudio de límites del modelo matemático para explicar un problema o fenómeno que se intenta resolver o explicar. Para que el estudiante pueda describir, analizar o predecir el fenómeno de la realidad modelado (por ejemplo, fenómenos sociales y/o naturales) mediante la matemática puesta en juego, se requiere que los estudiantes observen la realidad; la describan en forma simplificada; construyan un modelo; trabajen matemáticamente con él para arribar a resultados y conclusiones matemáticas; interpreten los resultados; evalúen la validez del modelo para poder explicar esa realidad.

- Incluirá problemas que se modelen matemáticamente para el ***tratamiento del álgebra***, acudiendo a generalizaciones y contemplando una perspectiva amplia del álgebra como instrumento de modelización. Desde esta postura, las variables, ecuaciones y funciones, son instrumentos de modelización de problemas desde dentro y fuera de la matemática. Su visión como instrumento de modelización, implica que el docente deberá proponer tareas que apunten a cada uno de los pasos de la modelización matemática: identificación y designación de variables que caracterizan el sistema a modelizar, establecimiento de relaciones entre variables, trabajo a partir de expresiones simbólicas que permiten conocer el sistema modelado, interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico. (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2011, p. 48, énfasis en el original).

En el primer ítem se destaca la propuesta de trabajar tanto con modelización intra-matemática como extra-matemática. Asimismo, se menciona el estudio de los límites de un modelo para explicar un determinado fenómeno de la realidad y se explicitan las fases de un proceso de modelización. En el segundo ítem, el proceso de modelización se vincula más específicamente al álgebra como instrumento privilegiado para modelizar y se especifica la necesidad de proponer tareas que den cuenta de las fases del proceso para ese caso particular.

Ante las propuestas de enseñanza como las que se acaban de citar, cabe preguntarse: ¿qué perspectiva de modelización subyace en las mismas? Por un lado, el proceso de modelización es visto en estos diseños curriculares como un *vehículo* para aprender matemática (Julie

y Mudaly, 2007); lo que se busca es ofrecer aplicaciones de contenidos matemáticos ya estudiados. Aquí puede verse que se denomina modelización al uso de modelos ya creados para resolver ciertos problemas reales. En estos casos estamos en presencia de la aplicación de un modelo matemático ya estudiado que resulta adecuado para resolver un problema. Se trata de lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *aplicaciones ilustrativas*.

Por otro lado, se pone de manifiesto una postura que busca que los estudiantes se adentren en un proceso de modelización y sean creadores de modelos para fenómenos de la realidad. El desarrollo de este proceso en clases de matemática promueve lo que Muller y Burkhardt (2007) denominan *modelización activa*. Estos autores afirman que en este caso puede existir una variedad de herramientas matemáticas útiles para dar cuenta del problema y que elegirlas y usarlas apropiadamente es el mayor desafío para los estudiantes. En este caso, interesa el proceso de modelización en sí, como actividad matemática y como *contenido* (Julie y Mudaly, 2007).

Si se espera que los profesores lleven adelante procesos de modelización activa en sus clases, es necesario que ellos mismos vivan esa experiencia. En este artículo se reportan, en particular, experiencias de modelización con futuros profesores de matemática.

3. Modelización en la formación inicial de profesores de matemática

Los requerimientos de diseños curriculares para la educación secundaria en relación con la modelización –tales como los mostrados en la sección anterior–, la existencia de diferentes perspectivas asociadas a ese proceso y la variedad de tareas de modelización destinadas para clases de matemática (ver, por ejemplo, Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017) plantean desafíos para la formación de futuros profesores. ¿Qué ambientes de aprendizaje es necesario crear en el ámbito de la formación inicial si se pretende que los futuros profesores tengan condiciones para dar cuenta de requerimientos curriculares en torno a la modelización? Estos desafíos también son mencionados en el contexto internacional y muchos investigadores manifiestan sus preocupaciones, propuestas y reflexiones en relación con la modelización matemática en la formación de futuros profesores.

Doerr (2007) afirma que es necesario que los futuros profesores encuentren "experiencias de modelización que proporcionen una variedad de contextos y herramientas y que los involucren en análisis de meta-nivel de su actividad de modelización" (p. 77). Niss, Blum y Galbraith (2007) enfatizan que, si se pretende que los profesores de matemática incluyan "aplicaciones y modelización en sus agendas de enseñanza de manera eficiente, exitosa y reflexiva, necesitan oportunidades para desarrollar esa capacidad durante su educación inicial y a través de actividades regulares de desarrollo profesional en servicio" (p. 7). Blum (2015) se refiere a la necesidad de proporcionar a los futuros profesores el conocimiento profesional necesario para llevar adelante actividades de modelización y desarrollar experiencias de enseñanza con modelización. Por su parte, Gastón y Lawrence (2015) sostienen que la formación de los futuros profesores debería incluir conocimientos acerca de qué es la modelización matemática, cómo puede ser incorporada en la enseñanza y cómo se pueden

evaluar las actividades de modelización. Estos autores afirman que es deseable que los futuros profesores ganen experiencia significativa con la modelización, sea a través de la realización de actividades de modelización en cursos de matemática, o a través de cursos específicos de modelización.

Este breve recorrido por la literatura, permite distinguir tres focos asociados con las recomendaciones propuestas por los diferentes autores: 1) la importancia de vivenciar experiencias de modelización, 2) la preocupación con el desarrollo de conocimientos profesionales para generar, implementar y evaluar actividades de modelización en el aula y 3) el abordaje del proceso de modelización como objeto de enseñanza en sí mismo. Se puede decir que todos los autores presentados en esta revisión coinciden en la necesidad de ofrecer a los futuros profesores oportunidades para experimentar la modelización durante su formación inicial. La próxima sección presenta una propuesta para la formación inicial de profesores de matemática que pretende atender esa necesidad.

4. Un escenario de modelización para la formación de futuros profesores

Las recomendaciones de los expertos en relación a la formación de futuros profesores de matemática en torno a la modelización, e incluso la presencia formal de la modelización en los estándares locales para la formación de profesores no garantizan su tratamiento en el trayecto de la formación inicial. La realidad en nuestro contexto local, en particular en la carrera del Profesorado en Matemática de la UNC, está lejos de atender esos requerimientos. En los cursos disciplinares específicos de matemática se ofrecen escasos ejemplos de aplicaciones de la matemática en la resolución de problemas extra-matemáticos y, además, se brinda poco (o ningún) espacio para la modelización activa.

Dadas las dificultades que significa intentar introducir cambios en los formatos pedagógicos y contenidos de los cursos de matemática que forman parte del plan de estudios del Profesorado en Matemática de la UNC, y a fin de ofrecer oportunidades de vivenciar experiencias con el proceso de modelización matemática, en 2010 decidimos crear un ambiente de aprendizaje especial, un *escenario de modelización*[5], en el marco del curso de Didáctica de la Matemática. Desde entonces hemos mantenido esta práctica y hoy en día este escenario de modelización matemática está consolidado.

El curso de DM tiene modalidad anual, se dicta en el tercer año del plan de estudios y se extiende por 30 semanas con dos clases de cuatro horas por semana. En este curso, se estudian diferentes tendencias en educación matemática: resolución de problemas, educación matemática crítica, uso de tecnologías en la educación, modelización matemática.

Nociones de modelo, modelo matemático y proceso de modelización matemática son debatidas en el curso. Las fases de un proceso de modelización matemática son descriptas y discutidas con los estudiantes en base al trabajo de Bassanezi (2012). Según este autor, un proceso de modelización consta de varias fases. Comienza con la *selección de un tema*

[5] La noción de *escenario de modelización* que aquí se emplea fue desarrollada por Esteley (2014).

o fenómeno del mundo real[6], que por algún motivo sea de interés, y continúa con la *formulación de problemas* o preguntas asociadas con el mismo. Posteriormente se inicia una búsqueda de datos o se diseña un experimento para obtenerlos (*experimentación*). Una fase de *abstracción* comienza cuando se seleccionan variables y se levantan hipótesis o conjeturas. Al traducir las preguntas o problemas enunciados en lenguaje natural para el lenguaje matemático, se inicia un proceso de *matematización* para obtener un modelo matemático. La aceptación o rechazo de tal modelo es la *validación*. Si el modelo es rechazado, puede comenzar una fase de *modificación* y un nuevo ciclo se inicia.

Una vez estudiadas las fases de un proceso de modelización matemática, se muestran y analizan experiencias de actividades de modelización en diferentes contextos educativos (Asinari y Frassa, 2017; Mina y Dipierri, 2017; Mina, Esteley, Cristante y Marguet, 2007; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Villarreal y Esteley, 2013) y se resuelven varios problemas que requieren la creación de un modelo. Por último, se invita a los futuros profesores a desarrollar sus propios proyectos de modelización, siguiendo las fases del proceso y utilizando libremente tecnologías digitales, si así lo desean. Para ello, se pide a los estudiantes que formen pequeños grupos y seleccionen un tema del mundo real de su interés, formulen problemas relacionados con este tema, seleccionen variables, planteen hipótesis, diseñen experimentos (si es necesario), busquen información, recopilen y procesen datos, resuelvan el problema y trabajen en una fase de validación. Para esta tarea, el esquema del proceso de modelización de Bassanezi (2012) previamente estudiado es un pilar importante.

Después de que los grupos han elegido un tema de interés, se les pide que realicen una presentación de los mismos para el resto de la clase. Esta instancia de interacción colectiva resulta un pilar importante ya que los estudiantes reciben sugerencias y comentarios, tanto de los docentes como de sus colegas de clase. A partir de esta instancia, es posible que se formulen nuevos problemas, se reformulen los iniciales o inclusive se cambie de tema.

Durante el desarrollo de los proyectos de modelización, los estudiantes pueden consultar a especialistas en los temas seleccionados. Estos especialistas pueden ser otros docentes de la facultad o de la UNC, familiares, amigos o profesionales externos a la UNC. En muchos casos, la consulta con especialistas se constituye en otro pilar importante de la experiencia.

Algunas de las actividades relacionadas con los proyectos de modelización son realizadas por los estudiantes de forma autónoma en horarios extra-clase. Durante el desarrollo de los proyectos, los profesores de DM actúan como consultores que pueden ayudar a formular o reformular los problemas, recomendar la consulta de un especialista y establecer el contacto, informar sobre posibles fuentes de datos o sugerir nuevas preguntas para que los estudiantes se involucren en procesos de modelización más complejos.

Al final del proceso, cada grupo escribe un informe y hace una presentación oral para toda la clase. Durante estas presentaciones, que tienen una duración de alrededor de 40 minutos, el resto de la clase hace preguntas y comentarios sobre el proyecto que se está

[6] Blum (2002) denomina *mundo real* a "todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, así como la escuela y la universidad o disciplinas científicas y académicas diferentes de la matemática" (p. 152, traducción propia).

presentado. En muchos casos, surgen discusiones sobre la modelización como parte de la futura tarea docente en la escuela, o reflexiones sobre el papel de la tecnología en el proceso de modelización. La ejecución de todas las actividades de modelización descriptas anteriormente requiere aproximadamente seis semanas.

En síntesis, se puede decir que el escenario propuesto está caracterizado por: (a) la naturaleza abierta de los proyectos a desarrollar, debido a la libre elección de un tema del mundo real para estudiar y formular preguntas; (b) la ausencia de contenidos matemáticos predeterminados que deban ser enseñados, el foco está puesto en la modelización como una actividad matemática que merece ser enseñada en sí misma; (c) el carácter interdisciplinario del trabajo; (d) la promoción de la reflexión sobre la matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y la modelización y (e) el dominio del proceso completo de modelización. Por su parte, los principales pilares que permiten sostener las experiencias de modelización en este escenario son: (a) el estudio previo del proceso de modelización y las fases que lo integran y el análisis de experiencia desarrolladas en diferentes contextos educativos; (b) las instancias de interacción colectiva con los colegas de curso y los docentes de DM; (c) la asistencia de especialistas de distintas áreas del conocimiento y (d) el libre uso de distintas tecnologías digitales.

Este escenario creado con fines educativos, también se tornó en un escenario a ser investigado. La próxima sección reporta resultados de dos estudios y muestra detalles del desarrollo de un proyecto particular.

5. El escenario de modelización como escenario investigado

Las experiencias de modelización llevadas adelante en el escenario de modelización descripto en la sección anterior, se han registrado de diferentes maneras: informes finales escritos de los estudiantes, notas de campo durante las clases, vídeos de las presentaciones orales finales. Estas fuentes de datos nos han permitido desarrollar diferentes estudios en el periodo 2010-2016. En las siguientes subsecciones se detallan resultados que provienen de dos estudios.

Un primer estudio

En Villarreal, Esteley y Smith (2015) se abordaron las siguientes preguntas de investigación: ¿qué contenidos matemáticos utilizan los futuros profesores en sus proyectos?, ¿qué tipo de problemáticas o preocupaciones aparecen en los proyectos? y ¿qué dificultades enfrentaron durante el proceso de modelización? El estudio, se basó en 11 proyectos desarrollados por 41 estudiantes de las cohortes 2010, 2011 y 2012. La Tabla 1 muestra, de manera sintética, el tema de cada proyecto, el tipo de problemática o preocupación detectada y el contenido matemático involucrado en cada uno.

Tabla 1. Problemáticas abordadas y contenidos matemáticos involucrados en los proyectos de modelización.

Proyectos de modelización de los futuros profesores	Problemáticas/ Preocupaciones	Contenido matemático
Captación de agua en zonas secas	Socio-económica	Función de dos variables
Consumo de agua en el hogar	Ecológica	Estadística
Consumo de energía eléctrica en el hogar		Estadística
Basura y recolección de residuos reciclables		Funciones de proporcionalidad directa e inversa
Tiempo de espera en el comedor universitario	Personal	Función lineal
Abastecimiento de gas en garrafas en una localidad rural		Función lineal
Consumo de soja		Función lineal
Transmisión genética y características humanas		Probabilidad
Gastos de viaje escolar de fin de curso	Didáctica	Programación lineal
Juegos de lotería	Matemática	Probabilidad
Recuperación de la inversión para un cierto negocio		Funciones exponencial y logarítmica

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2015).

El análisis reveló que la libre elección de un tema para iniciar un proyecto de modelización fue un obstáculo importante para los estudiantes, pero también fue posible constatar que la creación de escenarios de modelización en el curso de DM habilitó espacios de reflexión en torno al rol docente en tales escenarios. A fin de profundizar el análisis y mostrar algunas dificultades que pueden surgir en un proceso de modelización, a continuación, se muestra con cierto nivel de detalle el proyecto referido a la basura.

Basura y recolección de residuos reciclables. Este proyecto fue desarrollado por Irene y Rosa y el relato del mismo está basado en la presentación oral que ellas realizaron para sus compañeros de clase. Al comienzo de la presentación se refirieron a la dificultad que experimentaron para definir el tema a tratar, señalando que al principio habían pensado en una variedad de temas: reservas y tipos de uso del petróleo, accidentes automovilísticos, forestación y deforestación, la música y la matemática, optimización del transporte y, basura y recolección de secos. Finalmente, optaron por este último tema y justificaron su decisión diciendo "Nos vamos a concentrar en una problemática local y que tenga una función social". Las preguntas que formularon en torno a este tema fueron también variadas: "¿Qué cantidad de basura reciclable se recolecta por día/semana? ¿Se clasifica? ¿Cuáles serían las clases? ¿Qué cantidad de beneficiarios tienen este servicio? ¿Todos separan la basura?" Estas preguntas podían responderse a partir de una búsqueda de datos en Internet u otras fuentes. De hecho, Irene expresó: "... teníamos un montón de ideas en relación a eso, pero nunca veíamos la matemática". Sin embargo, tal como lo señala Stillman (2015), a partir de esos datos fue posible formular problemas susceptibles de ser analizados matemáticamente.

Superada esa primera instancia de incertidumbre, Irene y Rosa iniciaron un proceso de investigación a partir del cual obtuvieron información acerca de la recolección diferenciada de residuos, sus beneficios y los aspectos socio-ambientales involucrados, realizaron una entrevista con un funcionario de la Municipalidad de Córdoba responsable del programa de reciclado en la ciudad y visitaron la página web de la empresa encargada de la recolección

diferenciada de residuos. Finalmente, obtuvieron datos de la población de Córdoba a partir del Censo de población y vivienda realizado en 2010.

En función de la información obtenida a partir de las distintas fuentes consultadas y preocupadas con los datos desalentadores en relación a la escasa respuesta de la población en torno a la importancia del reciclado, las estudiantes se propusieron como objetivo central de su proyecto "modelizar para concientizar" y no necesariamente "obtener una súper fórmula", tal como lo expresó Rosa. Para comenzar a generar modelos, plantearon las siguientes hipótesis:

- Los habitantes de Córdoba no son conscientes de la cantidad de basura reciclable que producen.
- Al año producimos más de nuestro peso en basura.
- Un gran porcentaje de basura que podría ser reciclada se tira junto con la basura común.

En el desarrollo del proyecto, las estudiantes generaron un conjunto de indicadores numéricos que relacionaban de diferente manera los datos encontrados, los llamaron "modelos lineales". Cada uno de ellos fue calculado bajo el supuesto que todos los habitantes producen la misma cantidad de basura. Por ejemplo, sabiendo que en Córdoba se producen 1.500.000 kg de basura diariamente y que la población es de 1.329.604 habitantes (según el Censo 2010), bajo el supuesto ya mencionado, se obtiene que cada habitante produce diariamente 1,3 kg de basura. Por otro lado, a partir de datos obtenidos en una encuesta realizada por la empresa a cargo de la recolección diferenciada de residuos, se sabía que el 31% de la población de Córdoba separa la basura y que diariamente se recolectan 28 tn de residuos reciclables. Bajo el mismo supuesto asumido en el cálculo anterior, si todos los habitantes de la ciudad separaran la basura, diariamente se recolectarían 90,32 tn de basura reciclable. La Figura 1 muestra el modo en que las estudiantes representaron estos indicadores.

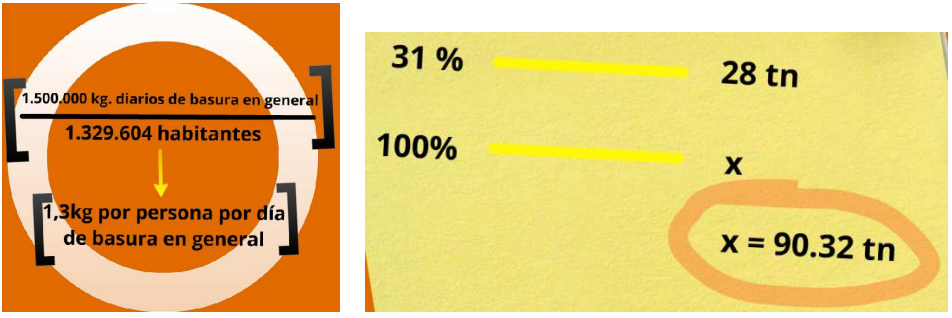


Figura 1: Dos indicadores numéricos mostrados en la presentación oral.

Atendiendo al objetivo de "modelizar para concientizar", las estudiantes produjeron un video que de una manera muy sencilla y al mismo tiempo impactante, permitía visualizar lo que significaba reciclar 90,32 tn. El video comenzaba con la pregunta: "¿Tenés idea de lo que significa 90,32 tn?", para luego proponer "Pensemos en un hombre de 90 kg". A partir de ahí, iban apareciendo siluetas de hombres vestidos con basura reciclable (que las estudiantes

denominaron "hombres basura") hasta completar 1003 siluetas, que corresponden a la cantidad de hombres equivalente a 90,32 tn. La secuencia del video puede verse en la Figura 2. La misma finaliza mostrando en imágenes la cantidad de "hombres basura" que no son recuperados a causa de no separar la basura que podría ser reciclada.

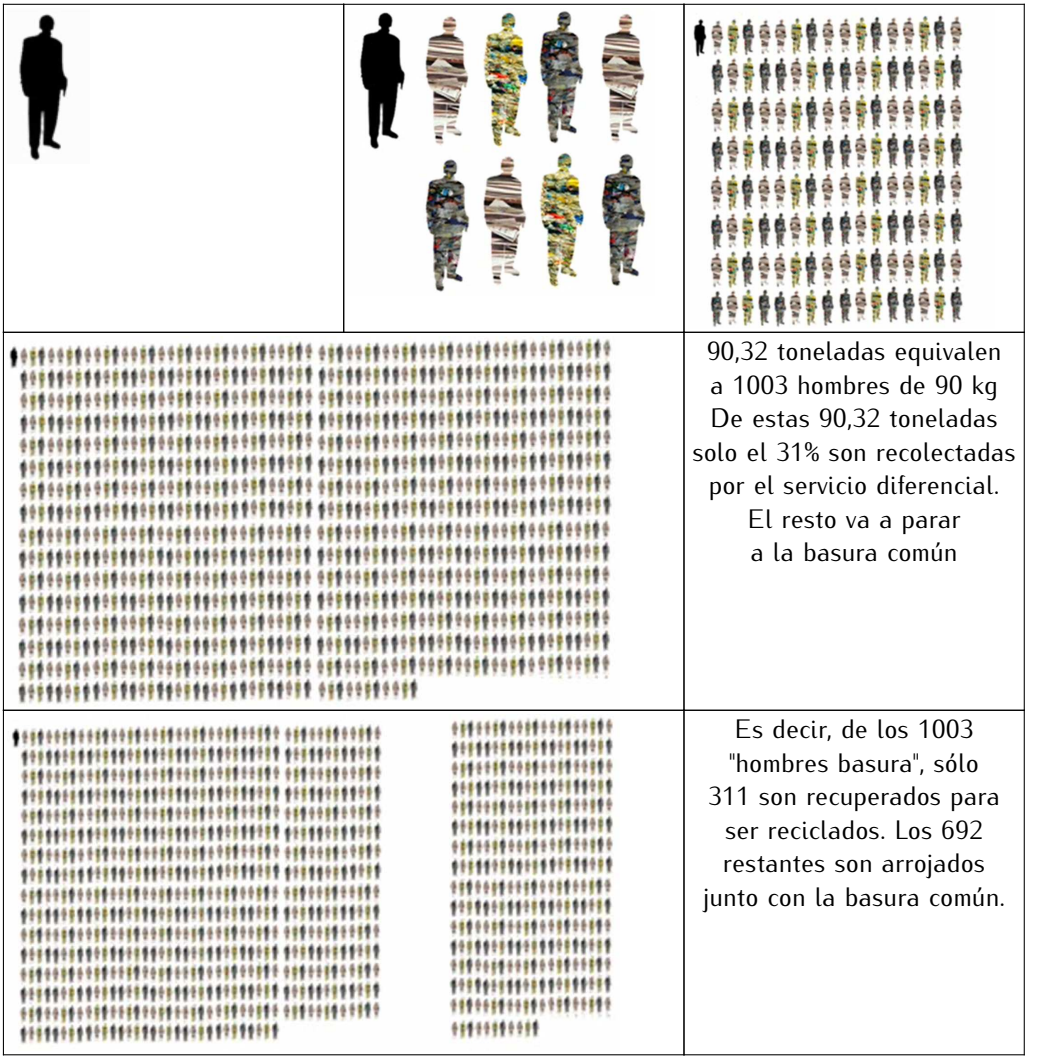


Figura 2. La secuencia del video.

La generación de un tercer indicador numérico construido por las estudiantes, fue posible gracias al siguiente dato: del total de la población de la ciudad de Córdoba, solo 650.000 habitantes gozaban del servicio de recolección diferenciada. Esto significa que un 48,89% de la población total podía separar la basura para reciclar. Sin embargo, solo el 31% de la población lo hace, y entonces hay un 17,89% que, teniendo el servicio disponible, no separa

la basura. Si lo hicieran, a las 28 tn que se reciclan diariamente podrían sumarse 16 tn más, bajo el mismo supuesto asumido desde el comienzo (todos los habitantes producen la misma cantidad de basura reciclable por día). La Figura 3 muestra el modo en que las estudiantes exhibieron este cálculo en la presentación oral ante la clase. Puede observarse que, en este caso, las estudiantes utilizan la equivalencia con la cantidad de "hombres basura", según fuera mostrada en el video.

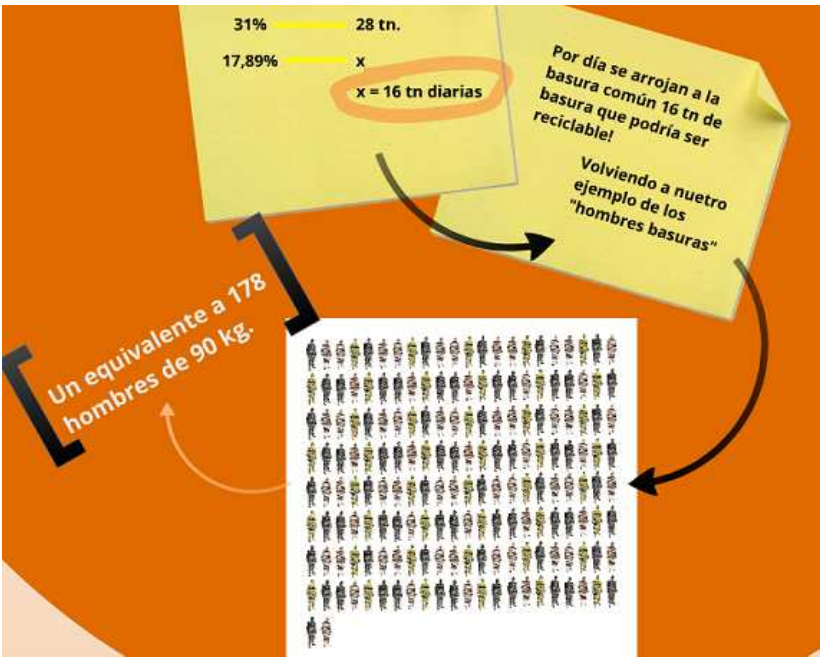


Figura 3. El tercer indicador numérico.

Durante la presentación del proyecto, Irene y Rosa manifestaron que una de las principales dificultades que tuvieron durante el desarrollo del mismo fue la elección del tema a tratar. Esto les demandó mucho tiempo hasta decidirse por el tema de la basura y la recolección de secos. El motivo de esta elección, tal como se indicó antes, fue el reconocimiento del valor de abordar una problemática local relevante y con una función social importante. En segundo lugar, las estudiantes indicaron que la búsqueda de información significó también una dificultad ya que existen pocos datos oficiales disponibles públicamente. Un tercer aspecto que actuó como una dificultad fue que las estudiantes querían poner en juego una matemática más avanzada en el proceso de modelización. Irene afirmó: "Pensamos que un modelo debería ser una fórmula complicada que implica muchas variables. Nos tomó un tiempo entender que el fenómeno podría describirse linealmente..." Estas palabras permiten inferir que, posiblemente exista entre las estudiantes la idea de que dado que ellas eran estudiantes avanzadas, deberían poner en juego una matemática más sofisticada que trascendiera el empleo de la "regla de tres simple".

Un aspecto relevante que se puso de manifiesto en la presentación oral fueron las reflexiones en torno a su futura tarea como docentes y qué potencialidades reconocían en el trabajo con modelización matemática, pensando en sus futuros alumnos.

Un segundo estudio...y nuevos proyectos

En sucesivas cohortes del curso de DM, a partir de 2010, fue posible observar que el uso de tecnologías digitales fue aumentando de manera significativa en los proyectos de modelización. Así, en el estudio que se reporta en Villarreal, Esteley y Smith (2018) se abordaron las siguientes cuestiones: ¿qué tecnologías seleccionan los futuros profesores para utilizar en sus proyectos de modelización, y con qué propósitos?, y ¿en qué fases del proceso de modelización el uso de tecnologías fue significativo? En este trabajo se analizaron 32 proyectos de modelización que involucraron a 108 estudiantes del Profesorado en Matemática a lo largo de siete cohortes consecutivas, entre 2010 y 2016.

Las tecnologías utilizadas en los proyectos se clasificaron en cuatro categorías: Internet, planillas de cálculo, software matemático (GeoGebra, Mathlab) y lenguajes de programación (Python y Octave). El uso de Internet se manifestó en el 75% de los proyectos, principalmente como fuente de datos e información relacionada con el tema elegido. Las planillas de cálculo se emplearon en el 56% de los proyectos. La Tabla 2 muestra una categorización de los propósitos de uso de Internet o planillas de cálculo y, entre paréntesis, se indica la fase o fases del proceso de modelización enriquecidas por ese uso. La tabla pone en evidencia que las fases en las cuales estas tecnologías resultaron más significativas fueron las de experimentación y matematización.

El software matemático y los lenguajes de programación se utilizaron principalmente en la fase de matematización y no se crearon categorías específicas ya que los propósitos de uso estaban relacionados con la temática específica de cada proyecto.

Tabla 2. Propósitos de uso de Internet y planillas de cálculo.

Tipo de tecnología	Propósitos de uso (fase del proceso de modelización)
Internet	Buscar datos o información para iniciar la construcción del modelo (Formulación-Experimentación). Seleccionar variables (Abstracción). Formular o reformular el problema (Formulación-Modificación) Generar datos usando aplicaciones on-line (Experimentación). Validar el modelo (Validación)
Planilla de cálculo	Mostrar datos usando tablas o diferentes tipos de representación gráfica para comunicar resultados (Matematización). Realizar cálculos sencillos utilizando las prestaciones automáticas de las planillas de cálculo (Matematización). Programar funciones personalizadas utilizando las funciones originales de la planilla para realizar cálculos de una manera más eficiente, ejecutar simulaciones o aplicar el modelo creado (Matematización - Validación).

Fuente: elaboración propia en base a resultados presentados en Villarreal, Esteley y Smith (2015).

En Villarreal, Esteley y Smith (2018) puede verse la diversidad de temas abordados en los proyectos y el uso de las tecnologías digitales en cada uno de ellos. En particular, hay un

análisis detallado de un proyecto donde el empleo de tecnologías resultó esencial para su desarrollo.

En los años 2017 y 2018, nuevos proyectos de modelización fueron desarrollados por los futuros profesores que cursaban DM. En particular, en 2018, se solicitó a los estudiantes que manifestaran qué habían aprendido durante el proceso. Los futuros profesores reconocieron haber aprendido a aplicar contenidos matemáticos ya conocidos y que eso les había permitido dar sentido a esos contenidos (por ejemplo: grafos o regresión lineal). También señalaron como aprendizajes: el manejo de datos de la realidad, el empleo de prestaciones de programación en las planillas de cálculo y la aplicación de lenguajes de programación. Todos los grupos destacaron sus aprendizajes en torno a los temas específicos elegidos (recorridos en parques nacionales de la Patagonia argentina, termotanques solares, autos eléctricos, aborto inducido, viajes en Argentina). En el caso del proyecto dedicado al aborto, la pregunta formulada fue: ¿Cuántos abortos inducidos se producen por año en Argentina? La complejidad de la misma condujo hacia el estudio de un modelo ya existente que presenta la construcción de un multiplicador que es utilizado para estimar el número "real" de abortos, a partir de datos proporcionados por hospitales y encuestas a agentes de salud. Así, en el escenario de modelización creado en el marco de DM, no solo se crearon modelos, sino que también se estudiaron y aplicaron modelos creados por otros.

6. Reflexiones finales

La creación de escenarios de modelización en el curso de DM permitió a los futuros profesores experimentar el proceso de modelización durante su formación inicial. Al mismo tiempo, se pudo constatar que las tecnologías pueden ampliar y mejorar las experiencias de modelización de estos futuros profesores. Algunos de los proyectos de modelización desarrollados y las reflexiones expresadas por los futuros profesores, durante las presentaciones orales o en el informe final escrito, son evidencia de experiencias significativas. En particular, algunos estudiantes dieron sentido a la experiencia previendo posibles implicaciones para su futuro como profesores, tal es el caso de dos estudiantes que, en las conclusiones de su trabajo, escribieron:

> Consideramos que es muy importante haber experimentado el proceso de modelización ya que nuestras experiencias personales influirán en la forma en que seremos como profesores en el futuro. Al experimentarlo, sentimos y vivimos el proceso como lo harían nuestros futuros alumnos, y este hecho nos convenció de que la modelización matemática puede ser implementada como una estrategia pedagógica.

La experiencia vivida por los estudiantes les permitió visualizar que la modelización podría ser una propuesta pedagógica en su futuro como profesores. Al mismo tiempo, les posibilitó dar sentido a las diferentes experiencias de modelización en contextos educativos que habían sido analizadas en el curso de DM.

Mientras tanto, también es importante reconocer que no todos los estudiantes vivieron una experiencia significativa en el escenario de modelización creado en DM. En estos casos,

podía observarse que los estudiantes no se involucraban en sus proyectos de modelización. Diferentes razones pueden explicar esta situación: gran demanda de tiempo, dificultad para seleccionar un tema de interés y plantear problemas relacionados con él, dificultad para trabajar en colaboración con colegas. Asimismo, la ausencia de aplicaciones y actividades de modelización extra-matemáticas en los cursos de matemática y el escaso uso de tecnologías en la carrera del Profesorado en Matemática podrían actuar como barreras para la propuesta. Si bien los estudiantes disponen de conocimientos matemáticos avanzados, hacer uso de los mismos como herramientas para generar un modelo, no resulta una práctica familiar. En este punto se observa la necesidad de coordinar acciones entre los educadores matemáticos y los matemáticos para generar una comprensión más profunda de la modelización como propuesta pedagógica y actividad matemática.

Entretanto, las dificultades señaladas arriba fueron vividas por la mayoría de los grupos, incluidos aquellos que sí se comprometieron con el desarrollo de sus proyectos y pudieron superarlas. Es posible que muchos estudiantes no estuvieran convencidos de la relevancia de la modelización y de la importancia de las tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En este sentido, es importante destacar que ni la modelización matemática, ni las tecnologías digitales han sido actores importantes durante la formación matemática en el Profesorado. Queda planteada la necesidad de indagar de manera más profunda y sistemática en torno a las razones que hacen que algunos estudiantes no se involucren en el desarrollo de proyectos de modelización, ni entiendan su potencial como abordaje pedagógico.

Finalmente, es importante reconocer también que el tipo de actividad de modelización propuesto quizás significa un salto en relación a las actividades matemáticas a las que los estudiantes están habituados. Tal vez sea necesario desarrollar previamente pequeños proyectos, más acotados y sencillos, que aborden las distintas fases de un proceso de modelización de manera más gradual y que preparen el camino para luego poder abordar proyectos de modelización completos. Tal como lo señalan Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017), los tipos de tareas de modelización matemática recorren un amplio abanico de posibilidades, del cual los proyectos abiertos es solo uno. Esto conduce a la necesidad de repensar la secuenciación y el tipo de actividades de modelización propuestas en el curso de DM.

A pesar de las dificultades mencionadas, y en base a la evidencia positiva obtenida a lo largo de estos años, puede afirmarse que la implementación de actividades de modelización y el uso de tecnologías proporcionan aportes significativos para la formación inicial, por muchas razones: pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes, pueden contribuir a una educación inclusiva y pueden hacer que los futuros profesores sean sensibles hacia diferentes maneras de dar sentido a la matemática.

Referencias y bibliografía

Asinari, M. y Frassa, S. (2017). Experiencia de modelización matemática realizada en una escuela rural estatal con modalidad de pluricurso. En Fregona, D.; Smith, S.; Villarreal, M; Viola, F. (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la educación matemática* (pp. 161-186). Córdoba: FAMAF-UNC.

Bassanezi, R. (2012). *Temas y modelos*. Campinas, Brasil: UFABC.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? En Cho, S.J. (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–discussion document. *Educational Studies in Mathematics,* 51(1-2), 149-171. doi: 10.1023/A:1022435827400

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 69-78). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-29822-1_5

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: voces y sentidos*. (Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Córdoba). Recuperado de: **https://ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/sites/5/2013/05/EBOOK_ESTELEY.pdf**

Gastón, J., y Lawrence, B. (2015). Supporting teachers' learning about mathematical modeling. *Journal of Mathematics Research*, 7(4), 1-11. doi:10.5539/ijsp.v4n4p1

Julie, C., y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 503-510). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-29822-1_58

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 396-403). New York: Springer.

Mina, M. y Dipierri, I. (2017). Jóvenes diseñadores de rampas de acceso: aprendiendo matemática en un escenario de investigación con tecnologías. En Fregona, D.; Smith, S.; Villarreal, M.; Viola, F. (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la educación matemática* (pp. 187-212). Córdoba: FAMAF-UNC.

Mina, M.; Esteley, C.; Cristante, A. y Marguet, I. (2007). Experiencia de modelización matemática con alumnos de 12-13 años. En Abrate, R.; Pochulu, M. (Eds.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática* (pp. 295-304). Villa María, Argentina: UNVM.

Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba (2011). *Diseño Curricular. Ciclo Básico de la Educación Secundaria*. Recuperado de: **httphttp://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php**

Muller, E. y Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-Overview. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study* (pp. 267-274). New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-29822-1_28

Niss, M.; Blum, W y Galbraith, P. (2007). Introduction. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.-W.; Niss, M. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). New York: Springer.

Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 16(3), 1-27. doi: 10.15517/aie.v16i3.26084

Stillman, G. (2015). Problem finding and problem posing for mathematical modelling. En Lee, N. H.; Ng, D. K. (Eds.), *Mathematical modelling from theory to practice* (pp. 41-56). Singapore: National Institute of Education. doi: 10.1142/9789814546928_0003

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, Año XVIII, 36, 219-251.

Villarreal, M. y Esteley, C. (2013). Escenarios de modelización y medios: acciones, actividades y diálogos. En Borba, M.; Chiari, A. (Eds.), *Tecnologias digitais e educação matemática* (pp. 273-308). São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Villarreal, M. y Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus primeras prácticas en escenarios de modelización. En Fregona, D.; Smith, S.; Villarreal, M; Viola, F. (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática* (pp. 25-50). Córdoba: FAMAF-UNC.

Villarreal, M.; Esteley, C., y Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education*, 50(1-2), 327-341. doi: 10.1007/s11858-018-0925-5

Villarreal, M.; Esteley, C. y Smith, S. (2015). Pre-service mathematics teachers' experiences in modelling projects from a socio-critical modelling perspective. En Stillman, G.; Blum, W.; Biembengut, M. (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 567-578). Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-18272-8_48