DÜMF Mühendislik Dergisi
web: http://dergipark.gov.tr/dumf

Araştırma Makalesi / Research Article

Pozitif Reel Fonksiyonlar için Devre Uygulamaları

Bülent Nafi ÖRNEK*
Amasya Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Amasya
nafi.ornek@amasya.edu.tr ORCID: 0000-0001-7109-230X, Tel: (358) 211 50 05 (1465)

Timur DÜZENLİ
Amasya Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, Amasya
timur.duzenli@amasya.edu.tr ORCID: 0000-0003-0210-5626

Geliş: 11.04.2018, Kabul Tarihi: 07.06.2018

Öz

Matematik biliminde sıklıkla kullanılan ve birçok mühendislik alanında yararlanılan pozitif reel fonksiyonlar, elektrik-elektronik mühendisliğinde empedans fonksiyonu adıyla yer almaktadır. Bu makalede, Schwarz Lemması'nın sınırda analizi incelenmiş ve bu analizde elde edilen empedans fonksiyonlarına karşılık gelen devreler araştırılmıştır. Çalışmada sunulan teoremde, $Z(0)=0$ koşulu dikkate alınarak empedans fonksiyonunun türevinin modülünün aşağıdan sınır analizi yapılmıştır ve kesin sonuç elde edilmiştir. Yapılan bu incelemede sağ yarı düzlemde tanımlı olan $s_1, s_2, ..., s_n$ noktaları dikkate alınarak $Z(s)$ fonksiyonunun değerlendirmesi daha da kuvvetlendirilmiştir. Ayrıca, bu değerlendirmede $Z(s)=Z(1)+c_1(s-1)+c_2(s-1)^2+....$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki birinci ve ikinci katsayıları hesaba katılarak eşitsizlik değerlendirilmiştir. Elde edilen eşitsizliğin eşitlik hali için $Z(s)$ fonksiyonu verilmiştir. $Z(s)$ fonksiyonunun parametreleri değiştirilerek farklı mertebeden empedans fonksiyonları elde edilebilmektedir. Dolayısıyla, sentezi gerçekleştirilen devreler, yapısal olarak farklılık göstermektedir. Çalışma içerisinde sunulan teoremin sonucu olarak genel bir empedans fonksiyonu elde edilmiştir. Bu empedans fonksiyonuna karşılık gelen devre modeli de en genel haliyle verilmiştir. Sonrasında ise, bazı örnek parametre değerleri seçilerek, bu genel devre modelinden türetilen farklı yapıdaki devrelere ait şematikler sunulmuştur. Elde edilen bu devreler, farklı sayıda sıfır ve kutuplara sahiptir. Dolayısıyla, bu sıfır ve kutup noktalarıyla bağlantılı olarak frekans düzleminde farklı sayıda ve farklı noktalarda kritik frekans değerlerine sahip olacaklardır. Buradan yola çıkarak, teorem içerisinde sunulan genel empedans fonksiyonundan farklı türde, dar-bant, bant-geçiren ve bant-durduran devrelerin türetilebileceği öngörülmektedir.

Anahtar Kelimeler: *Analitik fonksiyon, Schwarz Lemması, Sınır analizi, Empedans fonksiyonu, Devre;*

* Yazışmaların yapılacağı yazar

DOI: 10.24012/dumf.414381

Giriş

Empedans fonksiyonları, $Z(s)$, kompleks frekans parametresi s'ye bağlı pozitif reel fonksiyonlardır. Bir empedans fonksiyonu aşağıda verilen pozitif reel fonksiyonlara ait özellikleri taşıdığı takdirde fiziksel olarak gerçeklenebilmektedir (Reza, 1962):

1-) $Z(s)$ fonksiyonu $\Re s \geq 0$'da, sanal eksen üzerindeki kutuplar haricinde, analitik ve tek değerlidir.

2-) $Z(\bar{s}) = \overline{Z(s)}$

3-) $\Re s \geq 0$ için $\Re Z(s) \geq 0$.

Elektrik mühendisliğinde, pozitif reel fonksiyonların türevleri genellikle devre sentezi ve analizinde kullanılmaktadır (Örnek ve Düzenli, 2018). Bu konuyla ilgili öncü çalışmalardan bir tanesinde empedans fonksiyonunun türevi, elektrik ve manyetik enerjiyi ilişkilendirmek için kullanılmıştır (Van der Pol, 1937). Ayrıca, empedans fonksiyonlarının bazı yeni özelliklerini, bu fonksiyonların türevini kullanarak araştıran çalışmalar da mevcuttur (Huang, 1965; Krueger ve Brown, 1969).

Bu çalışmada, empedans fonksiyonunun türevinin sıfır noktasında analizi gerçekleştirilerek yeni bir teorem sunulmaktadır. Bu teoremde, $Z(0) = 0$ olduğu varsayılarak, empedans fonksiyonunun türevinin modülü aşağıdan değerlendirilmiştir. Önceki çalışmalardan farklı olarak, empedans fonksiyonunun türevinin sınırda incelenmesi durumunda ne tür devreler tasarlanabileceği sorusunun cevabı aranmıştır. Bu soruyu cevaplamak amacıyla sınırda Schwarz Lemması kullanılmış olup, empedans fonksiyonlarının analizi $s = 0$ noktasında gerçekleştirilmiştir.

Şimdi, çalışmada sunulacak teoremlerle ilgili ön değerlendirmeler paylaşılacaktır.

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, E sıfır merkezli birim disk ve $T = \partial E = \{z : |z| = 1\}$ olsun. Kompleks fonksiyonlar teorisinin temel konularından biri Schwarz Lemması'dır. Schwarz Lemması, kompleks düzlemdeki birim disk üzerinde tanımlı ve değer kümesi yine birim disk olan analitik fonksiyonların aldığı değerlerin üzerine tahminler veren önemli bir sonuçtur (Azeroğlu ve Örnek, 2013). Geometrik fonksiyonlar teorisinin, analitik tasvirlerin sabit nokta teorisinin, hiperbolik geometrinin ve analizin birçok diğer alanlarının gelişmesinde önemli rol oynamaktadır. Maksimum modül prensibinin doğrudan uygulaması olan Schwarz Lemması basit ve yaygın olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir (Goluzin, 1966):

Lemma (Schwarz Lemması): E'de tanımlı analitik bir f fonksiyonu için $f(0) = 0$ ve $|z| < 1$ için $|f(z)| < 1$ olsun. Bu takdirde,

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in E \tag{1}$$

ve

$$|f'(0)| \leq 1 \tag{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerde (birinci eşitsizlikte herhangi bir $z \neq 0$ noktası için) eşitlik durumu yalnızca $|c| = 1$ olmak üzere $f(z) = cz$ olduğunda mümkündür.

$Z(s) = Z(1) + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \ldots$ fonksiyonu, $H = \{s \in \mathbb{C} : \Re s > 0\}$ sağ yarı düzlemde pozitif reel değerli bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$f(z) = \frac{Z(s) - Z(1)}{Z(s) + Z(1)}, \quad z = \frac{s-1}{s+1} \tag{3}$$

Burada $Z(1)$ pozitif ve reel bir sayıdır. Bu tasvirlerin devre teorisinde önemli kullanım alanları vardır (Richards, 1947). $f(z)$ fonksiyonu birim disk E'de analitik, $f(0) = 0$ ve $|z| < 1$ için $|f(z)| < 1$ sağlanır. Böylece yukarıda tanımladığımız $f(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar.

Şöyleki;

$$f'(z)=\frac{\frac{4}{(1-z)^2}Z'\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\mathrm{Z}(1)}{\left(Z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\mathrm{Z}(1)\right)^2} \tag{4}$$

olur. Schwarz Lemması'ndan,

$$f'(0)=\frac{4Z'(1)Z(1)}{(Z(1)+Z(1))^2}=\frac{Z'(1)}{Z(1)} \tag{5}$$

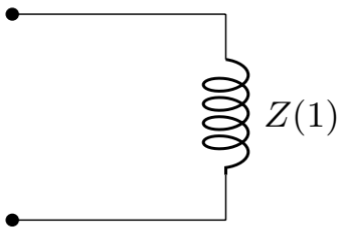
ve

$$\left|Z'(1)\right|\le Z(1) \tag{6}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlikte eşitlik hali, $Z(s)=sZ(1)$ fonksiyonu ile sağlanır.

$Z(s)=sZ(1)$ eşitliği, elektrik devrelerinde değeri $Z(1)$ olan bir bobine karşılık gelmektedir. Bu model, Şekil 1'de gösterilmektedir.



Şekil 1. $Z(s)=sZ(1)$ *eşitliği için devre modeli.*

Bobinler, alternatif akım devrelerinde, yüksek frekans değerleri için yüksek empedans, düşük frekans değerleri için düşük empedans gösterirler. Dolayısıyla, yüksek geçiren filtre karakteristiği gösteren bir filtre elde edilmiş olur.

Birim dairenin kendi kendine konform tasviri

$$k(z)=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \tag{7}$$

fonksiyonu ile veriliyor, öyle ki, $k(z)$ 'nin tek sıfırı z_0 noktasıdır. $z_1,z_2,...,z_n,|z_k|<1$ noktaları için,

$$B(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \tag{8}$$

formülü ile tanımlanmış $B(z)$ fonksiyonu, $z_1,z_2,...,z_n$ noktalarında sıfıra sahip, modülü 1'den büyük olmayan analitik fonksiyondur. Buna sonlu Blaschke çarpımı denir. Blaschke çarpımları analizde kullanılan çok önemli fonksiyonlardan olup Schwarz Lemması'nın farklı genellemelerinde de ortaya çıkmaktadır. Böylece, standart metotlarla Schwarz Lemması aşağıdaki şekilde kuvvetlendirilir:

$$\left|Z'(1)\right|\le Z(1)\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{s_k-1}{s_k+1}\right| \tag{9}$$

Burada $s_1,s_2,...,s_n$, H bölgesinde noktalar ve $Z(s_k)=Z(1),\ k=1,2,...,n$ 'dir. Bu eşitsizlik aşağıdaki ekstremal fonksiyon ile kesindir.

$$Z(s)=\frac{1-\frac{s-1}{s+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_k-1}{s_k+1}}{1-\frac{\overline{s_k-1}}{s_k+1}\frac{s-1}{s+1}}}{1+\frac{s-1}{s+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_k-1}{s_k+1}}{1-\frac{\overline{s_k-1}}{s_k+1}\frac{s-1}{s+1}}}Z(1) \tag{10}$$

Burada $s_1,s_2,...,s_n$ pozitif reel sayılardır.

Schwarz Lemması'nın sınır versiyonu basit halde şu şekilde verilir:

f, E birim diskinde analitik, $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1,\ |z|<1$ olsun. Ayrıca varsayalım ki, f fonksiyonu bir $b\in T$ noktasına sürekli devam ediyor, $f(0)=0$ ve $f'(b)$ mevcuttur. Bu takdirde klasik Schwarz Lemması'ndan, sınırda Schwarz Lemması olarak bilinen

$$\left|f'(b)\right| \geq 1 \tag{11}$$

eşitsizliği elde edilir. (11)'de eşitlik hali sadece $f(z)=ze^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ olduğunda mümkündür. (11) eşitsizliği ve genellemeleri geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli uygulamalara sahiptir.
(11) eşitsizliği Osserman tarafından yukarıdaki koşullar altında aşağıdaki şekilde kuvvetlendirilmiştir:

$$\left|f'(b)\right| \geq \frac{2}{1+\left|f'(0)\right|} \tag{12}$$

(12) eşitsizliğinde eşitlik hali ($b=1$ olduğunda) $f\left(z\right)=z\dfrac{z+a}{1+za}, 0 \leq a \leq 1$ fonksiyonu için gerçeklenir (Osserman, 2000).

Empedans Fonksiyonunun Türevinin Sınırda Analizi

Bu kısımda, empedans fonksiyonunun türevinin sınırda analiziyle elde edilen sonuçlar paylaşılacaktır. Pozitif reel fonksiyonların tanımından, $Z(s)$ fonksiyonunun s düzleminin sağ yarı kısmında analitik ve tek değerli olduğunu ifade edebiliriz.

Teorem. $Z(s)=Z(1)+c_1(s-1)+c_2(s-1)^2+....$ ve $Z(s)$ fonksiyonu $Z(0)=0$ ve sanal eksenin $s=0$ noktasında analitik olmak üzere, pozitif reel bir fonksiyon olsun. $s_1, s_2, ..., s_n$ 'nin H bölgesinde noktalar ve $Z(s_k)=Z(1),\ k=1,2,...,n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left|Z'(0)\right| \geq Z(1)\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Re s_k}{\left|s_k\right|^2} + \frac{2\left(\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{s_k-1}{s_k+1}\right|\right)-\left|c_1\right|\right)^2}{\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{s_k-1}{s_k+1}\right|\right)^2-\left|c_1\right|^2+\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{s_k-1}{s_k+1}\right|\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{4\Re s_k}{\left|s_k\right|^2-2i\Im s_k+1}\right)\right|}\right) \tag{13}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte, eşitlik hali $k=1,3,5,\ldots,n$ için

$$Z(s)=\frac{1+\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_k-1}{s_k+1}}{1-\frac{\overline{s_k}-1}{\overline{s_k}+1}\frac{s-1}{s+1}}}{1-\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_k-1}{s_k+1}}{1-\frac{\overline{s_k}-1}{\overline{s_k}+1}\frac{s-1}{s+1}}}Z(1) \tag{14}$$

fonksiyonu ile sağlanır. Burada $s_1, s_2, ..., s_n$ pozitif reel sayılardır.

İspat.

$$f(z)=\frac{Z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-Z(1)}{Z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+Z(1)} \tag{15}$$

fonksiyonuna bakalım. $f(z)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olan sıfırları $z_1, z_2, ..., z_n, \left|z_k\right|<1$ olsun.

$$B_1(z)=z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \tag{16}$$

fonksiyonu E birim diskinde analitik $\left|z\right|<1$ için $\left|B_1(z)\right|<1$ 'dır. Maksimum prensibinden, her $z \in E$ için $\left|f(z)\right| \leq \left|B_1(z)\right|$ eşitsizliği elde edilir.

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$h(z)=\frac{f(z)}{B_1(z)} \tag{17}$$

$h(z)$ fonksiyonu E birim diskinde analitik $\left|z\right|<1$ için $\left|h(z)\right|<1$ 'dir.

Özel halde,

$$h(z)=\frac{Z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-Z(1)}{\left[Z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+Z(1)\right]z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}} \tag{18}$$

$$h(z)=\frac{c_1\frac{2}{1-z}+c_2\left(\frac{2}{1-z}\right)^2z+c_3\left(\frac{2}{1-z}\right)^3z^2+....}{\left[2Z(1)+c_1\frac{2z}{1-z}+c_2\left(\frac{2z}{1-z}\right)^2+c_3\left(\frac{2z}{1-z}\right)^3+....\right]\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}} \tag{19}$$

$$|h(0)|=\frac{|c_1|}{Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|} \tag{20}$$

ve

$$|h'(0)|=\frac{\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}{Z^2(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|} \tag{21}$$

eşitlikleri elde edilir. Ek olarak,

$$\frac{bf'(b)}{f(b)}=|f'(b)|\geq|B'(b)|=\frac{bB'(b)}{B(b)} \tag{22}$$

ifadesinin kolayca sağlandığı görülür. Aşağıdaki gibi yeni bir kompleks $\Phi(z)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$\Phi(z)=\frac{h(z)-h(0)}{1-\overline{h(0)}h(z)} \tag{23}$$

Bu fonksiyon E birim diskinde analitik $|z|<1$ için $|\Phi(z)|<1$, $\Phi(0)=0$ ve $b=-1\in\partial E$ için $|\Phi(b)|=1$ 'dır. Böylece (12) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+|\Phi'(0)|}&\leq|\Phi'(-1)|=\frac{1-|h(0)|^2}{\left|1-\overline{h(0)}h(z)\right|^2}|h'(-1)|\\&\leq\frac{1-|h(0)|}{1+|h(0)|}\left\{|f'(-1)|-|B_1'(-1)|\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$|\Phi'(0)|=\frac{|h'(0)|}{1-|h(0)|^2}=\frac{\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}{Z^2(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\left(1-\left(\frac{|c_1|}{Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|}\right)^2\right)}$$
$$=\prod_{k=1}^{n}|z_k|\frac{\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}{\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_1|^2} \tag{25}$$

ve

$$B_1(-1)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|1+z_k|^2} \tag{26}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned}&\frac{2}{1+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\frac{\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}{\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_1|^2}}\\&\leq\frac{1-\frac{|c_1|}{Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|}}{1+\frac{|c_1|}{Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|}}\left\{\frac{|Z'(0)|}{Z(1)}-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|1+z_k|^2}\right\},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\left(\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)-|c_1|\right)^2}{\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_1|^2+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}\\&\leq\left\{\frac{|Z'(0)|}{Z(1)}-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|1+z_k|^2}\right\}\end{aligned} \tag{28}$$

ve

$$\begin{aligned}&Z(1)\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|1+z_k|^2}\right.\\&\left.+\frac{2\left(\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)-|c_1|\right)^2}{\left(Z(1)\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_1|^2+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\left|2c_2-c_1^2+c_1\left(Z(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}\right\}\leq|Z'(0)|\end{aligned} \tag{29}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece (13) eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi (13) eşitsizliğinin eşitlik durumunu gösterelim.

$$Z\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\left(1+\frac{2z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right)Z(1) \tag{30}$$

olsun.

Bu taktirde, her iki tarafın türevini alırsak

$$\frac{2}{(1-z)^2}Z'\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=$$
$$2\frac{\left(2z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(1-\overline{z_k}z)(z-z_k)}\right)\left(1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{\left(1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^2}Z(1)$$
$$+2\frac{\left(2z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(1-\overline{z_k}z)(z-z_k)}\right)z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{\left(1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^2}Z(1) \tag{31}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $z=-1$ yazarsak

$$\frac{2}{4}Z'(0)=$$
$$2\frac{\left(-2\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}+\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(1+\overline{z_k})(-1-z_k)}\right)\left(1-\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)}{\left(1-\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)^2}Z(1)$$
$$+2\frac{\left(-2\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}+\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(1+\overline{z_k})(-1-z_k)}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}}{\left(1-\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)^2}Z(1) \tag{32}$$

ve $z_1,z_2,...,z_n,|z_k|<1$ değerleri pozitif reel sayı olduğundan

$$Z'(0)=4\frac{-\prod_{k=1}^{n}\frac{1+z_k}{1+\overline{z_k}}\left(-2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(1+\overline{z_k})}\frac{1}{1+z_k}\right)}{\left(1-\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)^2}Z(1) \tag{33}$$

$$Z'(0)=\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-z_k{}^2}{(1+z_k)^2}\right)Z(1)=Z(1)\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-z_k}{1+z_k}\right) \tag{34}$$

eşitliği elde edilir. $z_k=\frac{s_k-1}{s_k+1}$ olduğundan dolayı

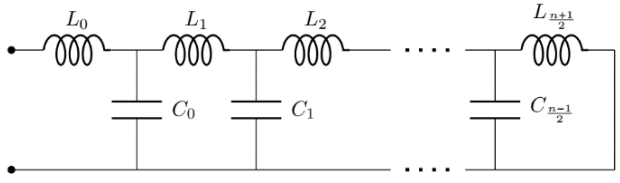
$$Z'(0)=Z(1)\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s_k}\right) \tag{35}$$

elde edilir. $|c_1|=0$ ve $|c_2|=\frac{Z(1)}{2}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{s_k-1}{s_k+1}\right|$ olduğundan, (13)'de eşitlik sağlanır.

Teoremde, çift değerler için fonksiyonun keskinliği hakkında bir şey söylenmediğinden, n 'nin tek sayı değeri alacağı varsayılmıştır. Buna göre, n adet çarpım içeren genel empedans fonksiyonu için aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$Z(s)=\frac{1+\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_k-1}{s_k+1}}{1-\frac{\overline{s_k-1}}{s_k+1}\frac{s-1}{s+1}}}{1-\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_k-1}{s_k+1}}{1-\frac{\overline{s_k-1}}{s_k+1}\frac{s-1}{s+1}}}Z(1) \tag{36}$$

n 'nin büyük değerler aldığı durumlar için genel devre modeli, Şekil 2'de verilmektedir.



Şekil 2. Büyük n değerleri için genel devre modeli

Örnek olarak, $n=1$ alındığında

$$Z(s)=\frac{1+\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_1-1}{s_1+1}}{1-\frac{\overline{s_1-1}}{s_1+1}\frac{s-1}{s+1}}}{1-\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2\frac{\frac{s-1}{s+1}-\frac{s_1-1}{s_1+1}}{1-\frac{\overline{s_1-1}}{s_1+1}\frac{s-1}{s+1}}}Z(1) \quad (37)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem aşağıdaki şekilde düzenlenerek devresi oluşturulacak empedans fonksiyonu elde edilebilir:

$$Z(s)=\frac{s^3+s(1+2s_1)}{(2+s_1)s^2+s_1}Z(1) \quad (38)$$

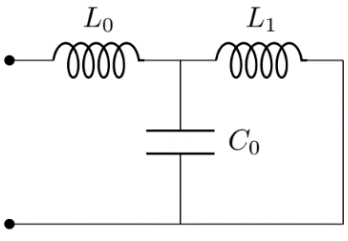
Elde edilen bu empedans fonksiyonuna karşılık gelen devre şeması Şekil 3'te verilmektedir. Buna göre, devrede yer alan elemanların değerleri sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$L_0=\frac{Z(1)}{s_1+2} \quad (39)$$

$$L_1=\frac{\left(2s_1-\frac{s_1}{(s_1+2)}+1\right)Z(1)}{s_1} \quad (40)$$

ve

$$C_0=\frac{(s_1+2)}{\left(2s_1-\frac{s_1}{(s_1+2)}+1\right)Z(1)} \quad (41)$$

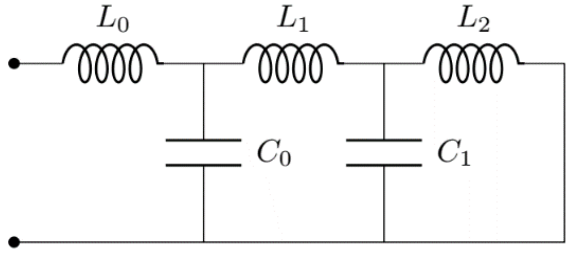


Şekil 3. $n=1$ için devre eşdeğeri.

Bir başka örnek olarak $n=3$ alındığı durumda, empedans fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$Z(s)=\frac{s^5+(2s_1+2s_2+2s_3+s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3+1)s^3+(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3+2s_1s_2s_3)s}{(s_1+s_2+s_3)s^4+(s_1+s_2+s_3+2s_1s_2+2s_1s_3+2s_2s_3+s_1s_2s_3)s^2+s_1s_2s_3}Z(1) \quad (42)$$

Bu empedans fonksiyonuna karşılık gelen devre, Şekil 3'te verilen genel devre modelinin $n=3$ için özelleşmiş hali olacaktır. Şekil 4'te, $n=3$ durumuna karşılık gelen devre gösterilmektedir. Şeklin anlaşılır olması için, bobin ve sığaçların değerleri verilmemiş, sadece yapı olarak nasıl bir devre modeliyle karşılaşılacağı gösterilmiştir.



Şekil 4. $n=3$ için elde edilen empedans fonksiyonunun devre eşdeğeri

Şekil 3 ve 4'ten görüleceği üzere n değeri büyüdükçe daha kompleks devre şematikleriyle karşılaşılmaktadır. n değerini büyütmenin sonucu olarak empedans fonksiyonunda yer alan sıfırların ve kutupların sayısı da artacaktır. Bununla bağlantılı olarak, dar bant bant-geçiren ve bant-söndüren süzgeç tasarımlarının yapılmasının mümkün olacağı düşünülmektedir.

Sonuçlar

Bu çalışmada, elektrik mühendisliğinde sıkça kullanılan empedans fonksiyonlarının Schwarz Lemması'nı kullanarak sınırda analizi yapılmıştır. Çalışmada, $Z(0)=0$ koşulu altında empedans fonksiyonunun türevinin modülünün aşağıdan sınır analizi yapılmıştır ve sunulan teoremde kesin sonuç elde edilmiştir. Ayrıca, pozitif reel fonksiyonların özellikleri dikkate alınarak, empedans fonksiyonunun değerlendirmesi daha da kuvvetlendirilmiştir.

Teorik çıkarımların yanında, elde edilen empedans fonksiyonun farklı parametre değerleri için eşdeğer devre karşılıkları verilmiştir. Teoremin sonucu olarak ortaya çıkan devrelerin çok çentikli (multi-notch) filtre

karakteristiğine sahip LC devreleri olduğu görülmüştür.

Teşekkür

Bu çalışma, Amasya Üniversitesi tarafından FMB-BAP 18-0338 numaralı proje kapsamında desteklenmiştir.

Kaynaklar

Azeroğlu, T. A., & Örnek, B. N. (2013). A refined Schwarz inequality on the boundary. Complex Variables and Elliptic Equations, 58(4), 571-577.

Goluzin, G. M. (1969). Geometric theory of functions of a complex variable (Vol. 26). American Mathematical Soc.

Huang, T. (1965). Some Mapping Properties of RC and RL Driving-Point Impedance Functions. IEEE Transactions on Circuit Theory, 12(2), 257-259.

Krueger, R. J., & Brown, D. P. (1969). Positive real derivatives of driving point functions. Journal of the Franklin Institute, 287(1), 51-60.

Osserman, R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. Proceedings of the American Mathematical Society, 128(12), 3513-3517.

Örnek, B. N., & Düzenli, T. (2018). A Boundary Analysis for Derivative of Driving Point Impedance Functions. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs.

Reza, F. M. (1962). A bound for the derivative of positive real functions. SIAM Review, 4(1), 40-42.

Richards, P. I. (1947). A special class of functions with positive real part in a half-plane. Duke Mathematical Journal, 14(3), 777-786.

Van Der Pol, B. (1937). A new theorem on electrical networks. Physica, 4(7), 585-589.

Circuit applications for positive real functions

Extended abstract

In this paper, boundary analysis of Schwarz lemma has been considered and the corresponding circuits for the obtained impedance functions have been investigated. In the theorem presented in the study, boundary analysis has been carried out from below for the derivative of the impedance functions. Using the impedance function presented in our theorem, simple LC circuits have been obtained.

In electrical engineering, impedance functions are said to be physically realizable if they satisfy the following conditions of the positive real functions:
1-) $Z(s)$ *is analytic in* $\Re s \geq 0$ *except possibly for poles on the axis of imaginaries*
2-) $\overline{Z(s)} = Z(\overline{s})$
3-) $\Re s \geq 0$, *in* $\Re Z(s) \geq 0$.
The Schwarz lemma is one of the most important topics of the complex functions theory. It is an essential result that gives estimates fort he analytic function defined on the unit disk and mapped onto itself. In its most basic form, the Schwarz lemma is given as follows:
Let us consider an $f(z)$ *function where* $f(0) = 0$ *and* $|f(z)| < 1$ *for* $|z| < 1$. *Then, the Schwarz lemma asserts that* $|f(z)| \leq |z|$, $z \in E$ *and* $|f'(0)| \leq 1$.
In these inequalities, (for an arbitrary $z \neq 0$ *point in the first equality) the equality case occurs only if* $f(z) = cz$ *for* $|c| = 1$.

Using this lemma, following impedance function has been obtained in the study:

$$Z(s) = \frac{1 - \dfrac{s-1}{s+1}\prod_{k=1}^{n} \dfrac{\dfrac{s-1}{s+1} - \dfrac{s_k - 1}{s_k + 1}}{1 - \dfrac{\overline{s_k} - 1}{s_k + 1}\dfrac{s-1}{s+1}}}{1 + \dfrac{s-1}{s+1}\prod_{k=1}^{n} \dfrac{\dfrac{s-1}{s+1} - \dfrac{s_k - 1}{s_k + 1}}{1 - \dfrac{\overline{s_k} - 1}{s_k + 1}\dfrac{s-1}{s+1}}} Z(1) \qquad (1)$$

where $s_1, s_2, ..., s_n$ *positive real coefficients and* n *is an odd integer. For the obtained impedance function,* $Z(s)$, *the schematic for the corresponding circuit is given in Fig. 1.*

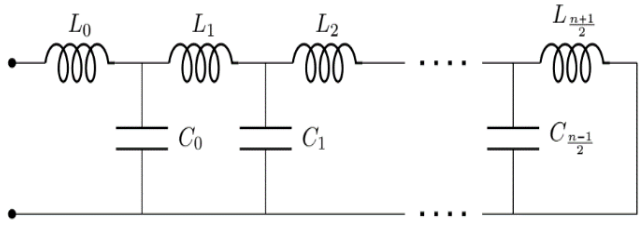


Figure 1. Circuit equivalent for general case of $Z(s)$ *function*

The corresponding circuits for $n = 1$ *and* $n = 3$ *cases are given in Figs. 2 and 3, respectively, as more specific examples of the general circuit model presented in Fig. 1.*

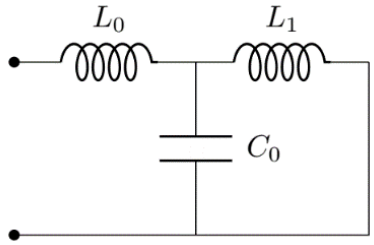


Figure 2. Circuit equivalent of $Z(s)$ *when* $n = 1$

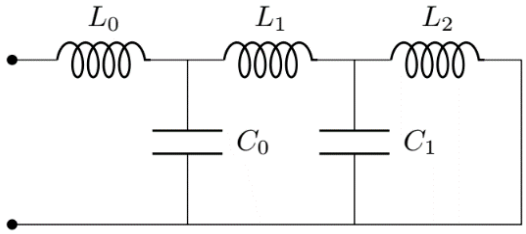


Figure 3. Circuit equivalent of $Z(s)$ *when* $n = 3$

According to these figures, it is possible to say that the number of the elements used in the designed circuits proportionally increases with greater values of n *parameter. The number of zeros and poles also increases when bigger values are chosen for* n. *This makes possible to design narrowband bandpass and bandstop filters with multiple critical frequencies.*

Keywords: *Analytic function, Schwarz lemma, Boundary analysis, Impedance function, Circuit.*