LORENTZ - MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE KONİKLER VE EĞRİLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdulaziz AÇIKGÖZ

Danışman
Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LORENTZ - MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE KONİKLER VE EĞRİLER ÜZERİNE

Abdulaziz AÇIKGÖZ

Danışman

Doç. Dr. NİLGÜN SÖNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Abdulaziz AÇIKGÖZ tarafından hazırlanan "Lorentz-Minkowski Düzleminde Konikler ve Eğriler Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 21/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik **Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

İmza

Başkan : Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

21/06/2018

Abdulaziz AÇIKGÖZ

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ - MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE KONİKLER VE EĞRİLER ÜZERİNE

Abdulaziz AÇIKGÖZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez çalışmasının amacı, Lorentz - Minkowski düzleminde *L*-konikler ve *L*-Cassini eğrileri üzerine inceleme yapmaktır.

Dört bölümden oluşan çalışmamızda birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır.

İkinci bölümde çalışmamıza temel oluşturan tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca Lorentz - Minkowski düzleminde orta kümeler gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde Lorentz - Minkowski düzleminde iki odaklı ve odak-doğrultman *L*-konikleri incelenmiştir.

Son bölümde Lorentz - Minkowski düzleminde iki odaklı *L*-Cassini eğrileri incelenmiş ve örneklendirilmiştir.

2018, ix + 76 sayfa

Anahtar Kelimeler: *L*-konikleri, *L*-cassini eğrileri

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

ON CONİCS AND CURVES İN LORENTZ – MİNKOWSKİ PLANE

Abdulaziz AÇIKGÖZ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Nilgün SÖNMEZ

The aim of this thesis is to do research on *L*-conics and *L*-Cassini curves in Lorentz – Minkowski plane.

This thesis consist of four chapters. In the first chapter reserved ıntroduction. In the second chapter is given basic definitions and theorems. Also, midset is introduced in Lorentz – Minkowski plane.

In the thırd chapter *L*-conics with two focis and focus-directrix are examined in Lorentz – Minkowski plane.

In the last chapter *L*-Cassini curves with two focies are examined and some examples about their are given in Lorentz – Minkowski plane.

2018, ix + 76 pages

Keywords: *L*-conics, *L*-Cassini curves

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ'e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen değerli büyüğüm M. Kemal DEMİRDELEN'e, değerli ağabeylerim Mahmut KAYHAN, Ali Hakan YÜKSEL, Hasan Fatih ÇELİKKAYA'ya, değerli ablalarım Nadide OKÇU ve Canan AÇIKGÖZ'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Abdulaziz AÇIKGÖZ
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
TABLOLAR DİZİNİ ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 2
2.1 Öklid Uzayı ve Öklid Uzayında Konikler 2
2.2 Lorentz – Minkowski Uzayı 9
2.3. Lorentz – Minkowski Düzleminde Doğrular 12
2.4 Orta Kümler 14
2.4.1 İki Noktanın Orta Kümesi 14
2.4.2 Bir Noktanın ve Bir Doğrunun Orta Kümesi 15
2.4.3 İki Doğrunun Orta Kümesi 15
3. LORENTZ – MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE KONİKLER 18
3.1 Lorentz – Minkowski Düzleminde Çemberler 18
3.2 Lorentz – Minkowski Düzleminde İki Odaklı Elipsler ve Singüler Noktaları 19
3.3 Lorentz–Minkowski Düzleminde İki Odaklı Hiperboller ve Sing. Noktaları 32
3.4 Odak-doğrultman *L*-Konikleri 45
3.4.1 Odak-doğrultman *L*-Elipsi 46
3.4.2 Odak-doğrultman *L*-Parabolü 49
3.4.3 Odak-doğrultman *L*-Hiperbolü 52
3.5 Dejenere Odak-doğrultman *L*-Konikleri 55
4. LORENTZ – MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE CASSİNİ EĞRİLERİ 64
5. KAYNAKLAR 74
ÖZGEÇMİŞ 76

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu vektör uzayı
L^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
$\|.\|_L$	Lorentz norm fonksiyonu
$\|.\|_E$	Öklid norm fonksiyonu
d_L	Lorentz uzaklık fonksiyonu
d_E	Öklid uzaklık fonsiyonu
$\langle .,. \rangle_E$	Öklid iç çarpımı
$\langle .,. \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1 Öklid düzleminde Cassini ovali……9

Şekil 2.2 L^2 de doğrular…….. 12

Şekil 2.3 L-orta kümesi 17

Şekil 3.1 Lorentz düzleminde birim çember ……...19

Şekil 3.2 L-çember parçası ……22

Şekil 3.3 L-çemberi ……23

Şekil 3.4 L-elips parçası-……23

Şekil 3.5 $|m| = 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken lightlike L-elipsi …..……..28

Şekil 3.6 $|m| = 1$ ve $2a > 2d = 0$ iken lightlike L-elipsi ……28

Şekil 3.7 $|m| > 1$ ve $2a = 2d$ iken timelike L-elipsi ……29

Şekil 3.8 $|m| > 1$ ve $2a > 2d$ iken timelike L-elipsi ……30

Şekil 3.9 $|m| > 1$ ve $2a < 2d$ iken timelike L-elipsi ……30

Şekil 3.10 $|m| < 1$ ve $2a = 2d$ iken spacelike L-elipsi ……31

Şekil 3.11 $|m| < 1$ ve $2a > 2d$ iken spacelike L-elipsi ……31

Şekil 3.12 $|m| < 1$ ve $2a < 2d$ iken spacelike L-elipsi ……32

Şekil 3.13 $m = -1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme ……37

Şekil 3.14 $m = 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme ……..38

Şekil 3.15 $|m| = 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme ……38

Şekil 3.16 $|m| = 1$ ve $2a > 2d = 0$ iken lightlike L-hiperbolü ……..39

Şekil 3.17 $|m| < 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme ……40

Şekil 3.18 $|m| < 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme ……40

Şekil 3.19 $|m| < 1$ ve $2a = 2d$ iken spacelike L-hiperbolü ……41

Şekil 3.20 $|m| < 1$ ve $2a < 2d$ iken spacelike L-hiperbolü ……41

Şekil 3.21 $|m| < 1$ ve $2a > 2d$ iken spacelike L-hiperbolü 42

Şekil 3.22 $|m| > 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme 43

Şekil 3.23 $|m| > 1$ ve $2a = 2d = 0$ iken orta küme 43

Şekil 3.24 $|m| > 1$ ve $2a = 2d$ iken timelike L-hiperbolü 44

Şekil 3.25 $|m| > 1$ ve $2a < 2d$ iken timelike L-hiperbolü 44

Şekil 3.26 $|m| > 1$ ve $2a > 2d$ iken timelike L-hiperbolü 45

Şekil 3.27 $0 < e < 1$ ve $1 < m < \infty$ iken odak-doğrultman L-elipsi 47

Şekil 3.28 $0 < e < 1$ ve $-\infty < m < -1$ iken odak-doğrultman L-elipsi 47

Şekil 3.29 $0 < e < 1$ ve $m = 0$ iken odak-doğrultman L-elipsi 48

Şekil 3.30 $0 < e < 1$ ve $0 < m < 1$ iken odak-doğrultman L-elipsi 48

Şekil 3.31 $0 < e < 1$ ve $-1 < m < 0$ iken odak-doğrultman L-elipsi 49

Şekil 3.32 $e = 1$ ve $1 < m < \infty$ iken odak-doğrultman L-parabolü 50

Şekil 3.33 $e = 1$ ve $-\infty < m < -1$ iken odak-doğrultman L-parabolü 50

Şekil 3.34 $e = 1$ ve $m = 0$ iken odak-doğrultman L-parabolü 51

Şekil 3.35 $e = 1$ ve $0 < m < 1$ iken odak-doğrultman L-parabolü 51

Şekil 3.36 $e = 1$ ve $-1 < m < 0$ iken odak-doğrultman L-parabolü 52

Şekil 3.37 $e > 1$ ve $1 < m < \infty$ iken odak-doğrultman L-hiperbolü 53

Şekil 3.38 $e > 1$ ve $-\infty < m < -1$ iken odak-doğrultman L-hiperbolü 53

Şekil 3.39 $e > 1$ ve $0 < m < 1$ iken odak-doğrultman L-hiperbolü 54

Şekil 3.40 $e > 1$ ve $m = 0$ iken odak-doğrultman L-hiperbolü 54

Şekil 3.41 $e > 1$ ve $-1 < m < 0$ iken odak-doğrultman L-hiperbolü 55

Şekil 3.42 $0 < e < 1$ ve $1 < m < \infty$ iken dejenere odak- doğrultman L-koniği 56

Şekil 3.43 $0 < e < 1$ ve $-\infty < m < -1$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği 56

Şekil 3.44 $0 < e < 1$ ve $m = 0$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği 57

Şekil 3.45 $0 < e < 1$ ve $0 < m < 1$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği 57

Şekil 3.46 $0 < e < 1$ ve $-1 < m < 0$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği …….58

Şekil 3.47 $e = 1$ ve $1 < m < \infty$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……..58

Şekil 3.48 $e = 1$ ve $-\infty < m < -1$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……59

Şekil 3.49 $e = 1$ ve $m = 0$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……..59

Şekil 3.50 $e = 1$ ve $0 < m < 1$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……..60

Şekil 3.51 $e = 1$ ve $-1 < m < 0$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……60

Şekil 3.52 $e > 1$ ve $1 < m < \infty$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……..61

Şekil 3.53 $e > 1$ ve $-\infty < m < -1$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……61

Şekil 3.54 $e > 1$ ve $m = 0$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……..62

Şekil 3.55 $e > 1$ ve $0 < m < 1$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……..62

Şekil 3.56 $e > 1$ ve $-1 < m < 0$ iken dejenere odak-doğrultman L-koniği ……63

Şekil 4.1 $|m| = 1$ ve $a = d = 0$ iken lightlike L-Cassini eğrisi ...…….69

Şekil 4.2 $|m| = 1$ ve $a = d = 0$ iken lightlike L-Cassini eğrisi …...…….69

Şekil 4.3 $|m| = 1$ ve $a > d = 0$ iken lightlike L-Cassini eğrisi ..……..70

Şekil 4.4 $|m| > 1$ ve $a = d$ iken timelike L-Cassini eğrisi ….……..70

Şekil 4.5 $|m| > 1$ ve $a > d$ iken timelike L-Cassini eğrisi .……..71

Şekil 4.6 $|m| > 1$ ve $a < d$ iken timelike L-Cassini eğrisi .……..71

Şekil 4.7 $|m| < 1$ ve $a = d$ iken spacelike L-Cassini eğrisi ……..72

Şekil 4.8 $|m| < 1$ ve $a < d$ iken spacelike L-Cassini eğrisi ……..72

Şekil 4.9 $|m| < 1$ ve $a > d$ iken spacelike L-Cassini eğrisi ……..73

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 3.1 Farklı Durumlarda İki Odaklı *L*-elipsi İncelemeleri 20

Tablo 3.2 Faklı Durumlarda İki Odaklı *L*-hiperbolü İncelemeleri 33

Tablo 4.1 Farklı Durumlarda İki Odaklı *L*-Cassini eğrisi İncelemeleri 65

1. GİRİŞ

Lorentz - Minkowski düzlemi bir Pseudo-Öklidyen düzlemdir ve bu düzlemde spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç doğrultu vardır.

$\mathbb{R}^2$ uzayında $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ vektörleri için $< x, y >_L = x_1 y_1 - x_2 y_2$ şeklinde tanımlı iç çarpıma Lorentz iç çarpımı ve bu iç çarpımla donatılmış vektör uzayına Lorentz düzlemi (iki boyutlu Lorentz uzayı) adı verilir. Bu düzlemde x vektörüne, $< x, x >_L > 0$ ise spacelike vektör, $< x, x >_L < 0$ ise timelike vektör, $< x, x >_L = 0$ ise lightlike (null) vektör denir.

Lorentz düzleminde, $x = (x_1, x_2)$ için $\|x\|_L = \sqrt{|< x, x >_L|}$ şeklinde tanımlanan eşitlik, x vektörünün normu olarak adlandırılır. $d_L(x, y) = \|x - y\|_L$ biçiminde tanımlanan $d_L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir metriktir.

Bu düzlemdeki konikler hakkında bu zamana kadar Wu vd.(2005), Horváth ve Martini (2011), Fankhänel (2012), Baronti vd. (2012), Martini ve Wu (2014), Shonoda (2015) tarafından çalışmalar üretilmiştir ve bu konu değişik yönleri ile ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasında Lorentz iç çarpımından indirgenen metrikle döşenen (donatılan) analitik düzlemde yani kısaca Lorentz - Minkowski düzleminde L-konikleri sınıflandırılmış ve örneklendirilmiştir. Ayrıca L-Cassini eğrileri üzerine çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayı ve Öklid Uzayında Konikler

Tanım 2.1.1 (Afin Uzay) $A \neq \emptyset$ bir cümle ve bir vektör uzayı Volsun.

$$\psi : A \times A \rightarrow V$$
$$(P,Q) \rightarrow \psi(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$$

dönüşümü;

1) $\forall P,Q,R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.
2) $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

şartlarını sağlıyorsa A cümlesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir (Hacısalihoğlu 1990).

Uzaydaki vektörler kümesi üzerinde tanımlanan "toplama" ve "skalerle çarpma" işlemleri cebirsel çokluklarla ilgili olarak bilinen (ve vektör uzayı aksiyomları denilen) bazı kuralları sağlarlar. Bu kurallar aşağıdaki teoremde toplu olarak verilmektedir.

Teorem 2.1.1 (Vektör Uzayı) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ uzayda herhangi vektörler olsunlar. $\vec{0} = (0,0,0)$ sıfır vektörü ve r,s de herhangi skalerler olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Değişme özelliği)
ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Birleşme özelliği)
iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ dır ve $\vec{0}$ bu kuralı gerçekleyen tek vektördür (Toplamsal birim elemanın varlığı)
iv) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ dır ve her $\vec{a}$ için $-\vec{a}$ bu özellikteki tek vektördür (Toplamsal ters elemanın varlığı)
v) $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$
vi) $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
vii) $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$
viii) $1\vec{a} = \vec{a}$ (Kaya 1988).

Tanım 2.1.2 (İç Çarpım Fonksiyonu) V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan bir

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümüne (reel değerli fonksiyon) denir, $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v\rangle$ şeklinde gösterilir.

i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ simetri aksiyomu.

ii) Bilineerlik aksiyomu:

$$\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle = \langle u, cv\rangle \,, \forall c \in \mathbb{R}\,;$$
$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \,, \forall v \in V\,;$$
$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle \,, \forall u \in V.$$

iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu:

$$\langle u, u\rangle \geq 0\,,$$
$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$$

(Hacısalihoğlu 1990).

Tanım 2.1.3 Bir yönlü doğru parçasının baş ve uç noktaları arasındaki uzaklık temsil ettiği vektörün uzunluğu olarak tanımlanır (Vektörün uzunluğu deyimi yerine vektörün boyu, büyüklüğü veya normu terimleri de kullanılır) (Kaya 1988).

Tanım 2.1.4 (İç Çapım Uzayı) $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere,

$$\langle p, q\rangle_E = \sum_{i=1}^{n} p_i\, q_i$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(p, q) \to \langle p, q\rangle$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid İç Çarpımı denir.

Tanım 2.1.5 (Norm) : $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$\|p\|_E = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

diyelim. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \to \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d_E(p, q) = \|p - q\|$$

biçimde tanımlanan $d_E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolaysıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir. Bu uzay kimi zaman E^n ile gösterilir (Sabuncuoğlu 2006).

$E = \mathbb{R}$, 1-boyutlu standart Öklid uzayı reel sayılar ekseni olarak reel sayılar sistemiyle birleştirilen Öklid doğrusudur.

E^2, 2 –boyutlu standart Öklid uzayı, reel düzlem ya da Öklid düzlemi olarak bilinir.

E^3, 3- boyutlu standart Öklid Uzayı olarak bilinir.

Tanım 2.1.6 (Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı) E^2 de $P(x_0, y_0)$ noktasının $Ax + By + C = 0$ doğrusuna uzaklığı,

$$\ell = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

birimdir (Balcı 2012).

Şimdi koniklerin tanımları verilsin.

Bir dik koni yüzeyinin bir düzlemle ortak noktalarının cümlesine konik adı verilir. d doğrusu koninin *anadoğrusu* ve T noktası da *tepe noktası* olsun.

Böyle bir koniyi K nokta cümlesi olarak alalım ve bir π düzlemiyle $K \bigcap \pi$ arakesitini izleyelim.

a) Eğer π düzlemi için $T \in \pi$ ise ve bütün anadoğruları kesiyorsa konik sadece T noktasından ibarettir.
b) Eğer π düzlemi için sadece $d \in \pi$ ise konik bu d doğrusundan ibarettir.
c) Eğer π düzlemi bütün anadoğruları kesiyorsa ve $T \notin \pi$ ise o zaman konik kapalı bir eğri olur. π nin anadoğrularla yaptığı açıya göre bu kapalı eğri bir elips veya bir çember olur.
d) Eğer π bütün anadoğruları kesmiyorsa
   i) $T \in \pi$ olduğu zaman konik kesişen iki doğru veya (bu iki doğrunun çakışması özel hali olan) bir doğru olur.
   ii) $T \notin \pi$ olduğu zaman konik ya bir hiperbol veya bir paraboldür.

Tanım 2.1.7 (Elips) π düzleminin sabit ve farklı iki noktası F, F' ve değişen bir noktası P ise, düzlemin P noktalarının,

$$(E) = \{P : d\,(P,F) + d\,(P,F') = 2\alpha\,, F, F', P \in \pi\,, \alpha > c > 0, d(F,F') = 2c\}$$

cümlesine elips denir. Kartezyen denklem olarak ifadesi yukarıdaki tanımda,

$$d_E(P,F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$d_E(P,F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

değerleri yerlerine yazılarak ve

$$c^2 = a^2 - b^2$$

konumu yapılarak

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ifadesi elde edilir. Yani düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların kümesine (geometrik yerine) elips denir. Sabit olan iki noktaya elipsin odakları adı verilir.

Tanım 2.1.8 (Hiperbol) π düzleminin sabit ve farklı iki noktası F, F' ve keyfi bir noktası P ise, düzlemin P noktalarının,

$$(H) = \{P : |d\,(P,F) - d\,(P,F')| = 2\alpha\,, d(F,F') = 2c, \alpha < c, F, F', P \in \pi\}$$

cümlesine hiperbol denir.

Kartezyen denklem olarak ifadesi yukarıdaki tanımda,

$$d_E(P,F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$d_E(P,F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

olduğundan,

$$|d_E\,(P,F) - d_E\,(P,F')| = \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2\alpha$$

veya

$$c^2 = a^2 + b^2$$

konumu ile hiperbolün standart formdaki denklemi denen,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ifadesi elde edilir. Yani düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların geometrik yerine hiperbol denir. Sabit olan noktalara hiperbolün odakları denir.

Tanım 2.1.9 (Parabol) π düzleminin sabit bir noktası F ve sabit bir doğrusu l ise, düzlemin P noktalarının,

$$(P) = \{P : d\,(P,F)/d\,(P,H) = 1\,, F, H, P \in \pi\,\}$$

cümlesine parabol denir. Ekseni $0x$ −ekseni ve tepe noktası başlangıç olan, bir dik koordinat sistemine göre, yukarıdaki tanımı ele alırsak,

$$d_E(P,F) = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$d_E(P,H) = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2}$$

olduğundan,

$$d_E(P,H) = d_E(P,F)$$

veya

$$\sqrt{(x + \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$$y^2 = 2px$$

elde edilir. Eğer parabolün ekseni y-ekseni ve yine tepesi koordinat başlangıcı ise,

$$x^2 = 2py$$

bulunur (Hacısalihoğlu 1990). Yani düzlemde sabit bir noktadan ve sabit doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine parabol denir. Sabit doğruya parabolün odağı, sabit doğruya parabolün doğrultmanı denir.

Tanım 2.1.10 (Singüler Nokta) Bir Q koniğinin denkleminde,

$$Q(x,y)=0, \quad Q_x(x,y)=0, \quad Q_y(x,y)=0$$

ise (x,y) noktasına singüler nokta denir. Yani,

$$Q(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$
$$Q_x(x,y)=2(ax+hy+g)=0$$
$$Q_y(x,y)=2(hx+by+f)=0$$

olmalıdır (Gibson 2003).

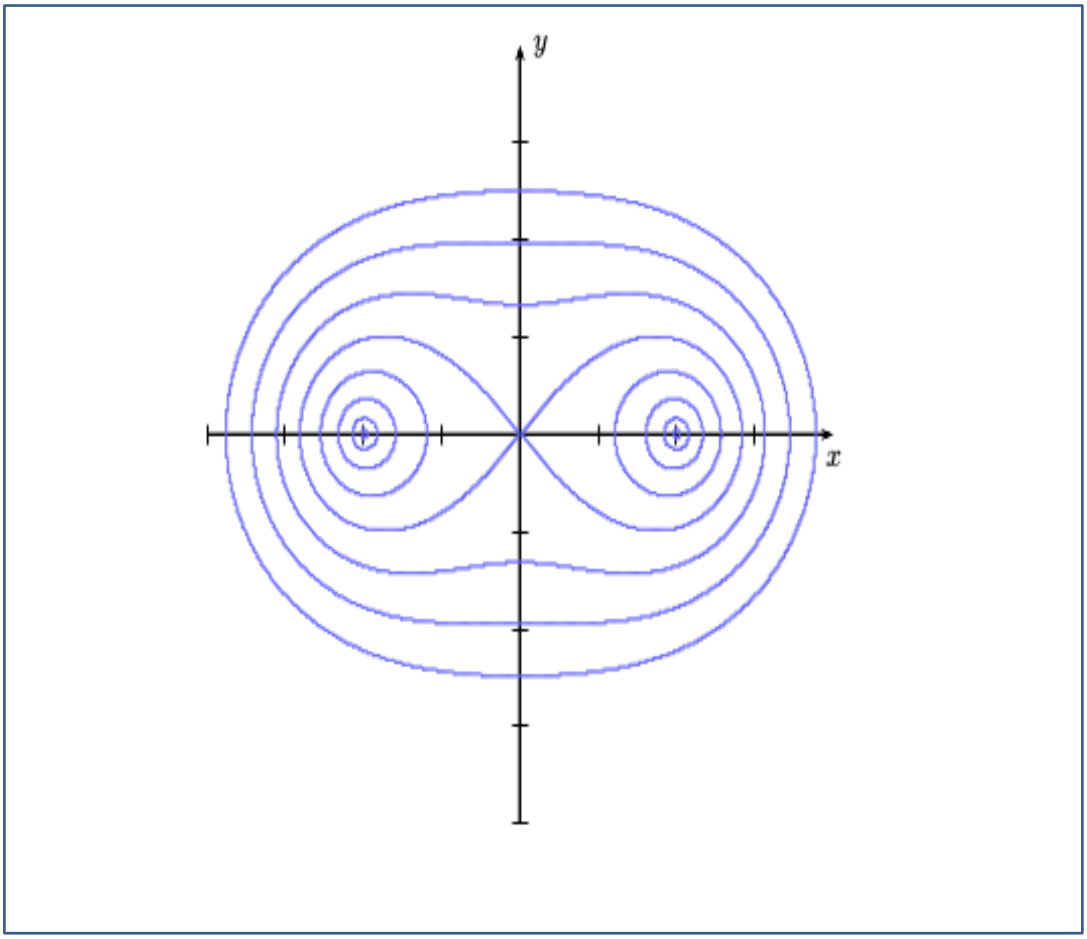
Tanım 2.1.11 (Cassini Ovali) Düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları çarpımı sabit olan noktaların geometrik yerine Cassini Ovali denir. Sabit noktalar P_1, P_2 olsun. Koordinat sistemini o şekilde seçelim ki $P_1=(u,0)$ ve $P_2=(-u,0)$ olsun. Aranan geometrik yere ait bir nokta $P=(x,y)$ olduğuna göre,

$$d_E(P,P_1).d_E(P,P_2)=a^2, \quad a=sabit>0$$

yazılabilir. Buradan,

$$(x^2+y^2+u^2)^2-4u^2x^2-a^4=0$$

bulunur. Bu denklemde $(x,y)\rightarrow(-x,-y)$ konumu eğrinin başlangıç noktasına göre simetrik olduğunu ve $(x,y)\rightarrow(-x,y)$ ve $(x,y)\rightarrow(x,-y)$ konumu da eğrinin koordinat eksenlerine göre simetrik olduğunu gösterir (Hacısalihoğlu 1990).



Şekil 2.1 Öklid Düzleminde Cassini Ovali

2.2 Lorentz - Minkowski Uzayı

Tanım 2.2.1 (Simetrik Bilineer Formlar) V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, u, v, w \in V$ için,

(i) $g\,(u, v) = g(v, u)$

(ii) $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

(iii) $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özelliklerine sahipse bu durumda g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.2.2 V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

(i) g non $-$ dejeneredir. $\Leftrightarrow g(u,v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $u = 0$ dır.

(ii) g dejeneredir. $\Leftrightarrow g(w,v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $w \neq 0$ dır.

(iii) V üzerindeki g non-dejenere simetrik bilineer form V nin bir W alt vektör uzayına indirgenebilir. $g/_W$ indirgenen simetrik bilineer form dejenere veya non-dejeneredir.

Tanım 2.2.3 (Skalar Çarpım Uzayı) V bir reel vektör uzayı olmak üzere, V üzerinde tanımlı,

$$g : V \times V \to V$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve non-dejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir.

Tanım 2.2.4 (Simetrik Bilineer Formun İndeksi) V bir skalar çarpım uzayı, W de üzerinde skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımının indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi V ise $0 \leq V \leq boyV$ dir. Ayrıca V skalar çarpımının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.5 (Lorentz Uzayı) V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir.

Tanım 2.2.6 (Lorentz İç Çarpım) $x, y \in \mathbb{R}^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. x ve y nin Lorentz iç çarpımı (skalar çarpımı),

$$xoy = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{R}^{1,n-1}$ (L^{n-1}) ile gösterilir. Ayrıca

$$\langle x, y \rangle_L = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

skalar çapımı $\mathbb{R}^{n-1,1}$ (L^{n-1}) ile gösterilir.

Bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ afin uzayına Lorentz-Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^n$ (L^n) ile gösterilir. Lorentz metriği olarak isimlendirilen bu iç çarpım bilineer, simetrik ve non-dejeneredir. Bundan sonraki bölümlerde Lorentz-Minkowski uzayı L^n olarak alınacak, $n = 2$ için $(L^2, \langle .,. \rangle_L)$ uzayı Lorentz-Minkowski düzlemi olarak adlandırılır ve L^2 ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.7 Bir $v \in V$ vektörü için,

(i) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise bu v vektörüne uzaysı (spacelike) vektör,

(ii) $g(v,v) < 0$ ise bu v vektörüne (timelike) zamansı vektör,

(iii) $g(v,v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise bu v vektörüne ışıksı (lightlike, null veya isotropik) vektör denir.

Tanım 2.2.8 (Lorentz Norm) : L^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu,

$$\|x\|_L = \sqrt{|\langle x, x \rangle_L|}$$

ile, x ve y vektörleri arasındaki uzaklık,

$$d_L(x,y) = \|x - y\|_L$$

şeklinde tanımlanır. Normu 1 br. olan vektöre de birim vektör denir. $\|x\|_L$ pozitif, sıfır ya da pozitif imajinerdir (O'Neill 1983, Ratchlife 1994).

2.3 Lorentz - Minkowski Düzleminde Doğrular

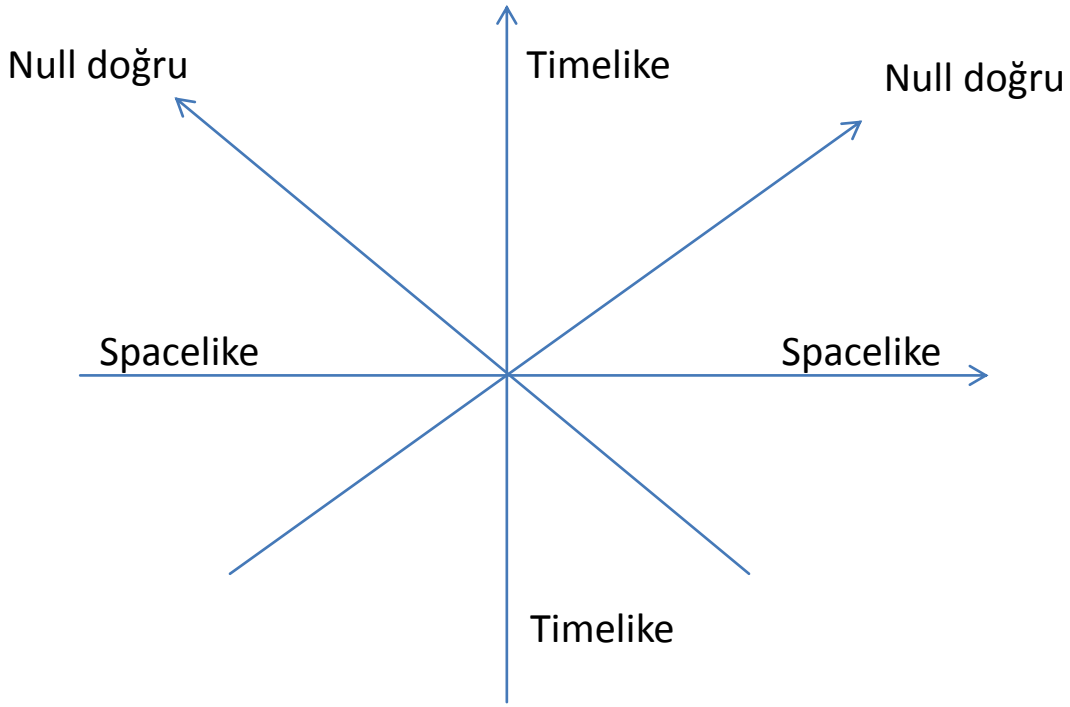
Tanım 2.3.1 L^2 de iki nokta $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ olsun. Bu noktalardan geçen doğrunun eğimi,

$$m = \frac{y - y_o}{x - x_0}$$

olmak üzere,

- $|m| < 1$ doğrusuna spacelike doğru (1.çeşit)
- $|m| > 1$ doğrusuna timelike doğru (2.çeşit)
- $|m| = 1$ doğrusuna lightlike (null) doğru

denir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 L^2 de doğrular

Tanım 2.3.2 L^2 de bir (x_0, y_0) noktasından geçen doğru denklemleri, hiperbolik trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilebilir.

i) $|m| < 1$ ise bu doğru (1.çeşit) denklemi,

$$(x - x_0)sinh\theta - (y - y_0)cosh\theta = 0 \qquad (2.1)$$

dir (θ açısı x ekseniyle yapılan açı olarak alınmıştır).

ii) $|m| > 1$ ise bu düzgün doğru (2.çeşit) denklemi,

$$(x - x_0)cosh\theta' - (y - y_0)sinh\theta' = 0 \qquad (2.2)$$

dir (θ' açısı y ekseniyle yapılan açı olarak alınmıştır).

Tanım 2.3.3 (Pseudo-Ortogonallik (Diklik)) L^2 de pseudo-ortogonallik Öklid ortogonallik tanımı ile aynıdır. Fakat pseudo-ortogonal olan iki doğrunun eğimleri çarpımı $+1$ dir.

Teorem 2.3.1 L^2 düzlemindeki $P_1(x_1, y_1)$ noktasının $\gamma : y - mx - q = 0$ doğrusuna uzaklığı,

$$d_L(P_1, \gamma) = \frac{|y_1 - mx_1 - q|}{\sqrt{|m^2 - 1|}}$$

$|m| \neq 1$, $|m| \neq \infty$ için γ doğrusunun 1.çeşit veya 2.çeşit olmasından bağımsız olarak formülü ile bellidir.

İspat: 2.çeşit bir düzgün doğru $\{\gamma : y - mx - q = 0\ ;\ |m| > 1\}$ üzerinde bir $P(x, y)$ noktasını ve düzgün doğrunun dışında bir $P_1(x_1, y_1)$ noktasını alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklığın karesi,

$$d_L(P,P_1)^2 = (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 = (x-x_1)^2(1-m^2)$$

$x \equiv x_2 = (x_1 - my_1 - mq)/(1-m^2)$ için ekstremdir (minimum) ve

$$\overline{P_2P_1}^2 \equiv D_{12} = \frac{(y_1 - mx_1 - q)^2}{m^2-1} \; ve \; d_{12} = \frac{|y_1 - mx_1 - q|}{\sqrt{|m^2-1|}} \qquad (2.3)$$

dir. Ayrıca P_1, P_2 noktalarından geçen bir düzgün doğru,

$$(y-y_1) = \frac{1}{m}(x-x_1)$$

denklemli bir γ doğrusuna Pseudo-ortogonaldir. (Catoni et al. 2008, Shonoda 2015).

2.4 Orta Kümeler

2.4.1 İki Noktanın Orta Kümesi

Tanım 2.4.1 L^2 düzleminde verilen iki noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu noktaların orta kümesi denir. Yani bu düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ iki nokta olmak üzere,

$$\{X : \; d_L(X,P_1) = d_L(X,P_2), X \in L^2\}$$

kümesine P_1, P_2 noktalarının orta kümesi denir. Buradan, $X = (x,y) \in L^2$ olmak üzere,

$$d_L(X,P_1) = d_L(X,P_2)$$
$$\sqrt{|(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2|} = \sqrt{|(x-x_2)^2 - (y-y_2)^2|}$$
$$|(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2| = |(x-x_2)^2 - (y-y_2)^2|$$

denkleminin çözümü Lorentz düzleminde iki noktanın orta kümesini verir. Bu durum L-hiperbolünün özel halidir ve Bölüm 3.3 de ayrıntılı olarak incelenecektir.

2.4.2 Bir Noktanın ve Bir Doğrunun Orta Kümesi

Tanım 2.4.2 L^2 düzleminde verilen bir noktadan ve bir doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu noktanın ve bu doğrunun orta kümesi denir. Yani bu düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$ bir nokta ve $L : y - mx - q = 0$ bir doğru olmak üzere,

$$\{X : \ d_L(X, P_1) = d_L(X, L), X \in L^2\}$$

kümesine P_1 noktasının ve L doğrusunun orta kümesi denir.

Buradan $X = (x, y) \in L^2$ olmak üzere,

$$|(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2| = \frac{|y - mx - q|^2}{|m^2 - 1|}$$

denkleminin çözümü bize P_1 noktasının ve L doğrusunun orta kümesini verecektir. Bu denklemde L-parabolünün denklemidir. Bölüm 3.4 de L-parabolleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

2.4.3 İki Doğrunun Orta Kümesi

Tanım 2.4.3 L^2 düzleminde verilen iki doğrudan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine bu doğruların orta kümesi denir. Yani, $L_1 : y + m_1x + c_1 = 0$ ve $L_2 : y + m_2x + c_2 = 0$ doğruları L^2 düzleminde verilen iki doğru olmak üzere,

$$\{X : \ d_L(X, L_1) = d_L(X, L_2), X \in L^2\}$$

kümesine L_1 ve L_2 doğrularının orta kümesi denir.

Buradan $X = (x, y) \in L^2$ olmak üzere,

$$\frac{|y+m_1x+c_1|}{\sqrt{|m_1^2-1|}}=\frac{|y+m_2x+c_2|}{\sqrt{|m_2^2-1|}}$$
$$\frac{y+m_1x+c_1}{\sqrt{|m_1^2-1|}}=\pm\frac{y+m_2x+c_2}{\sqrt{|m_2^2-1|}}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\sqrt{|m_2^2-1|}=p$ ve $\sqrt{|m_2^2-1|}=q$ olarak alırsak,

$$\frac{y+m_1x+c_1}{p}=\pm\frac{y+m_2x+c_2}{q}$$

olur.

Durum 1 : ${(y+m_1x+c_1)}/{p}={-(y+m_2x+c_2)}/{q}$ olsun. Bu durumda,

$$y=-\frac{m_2p+m_1q}{q+p}x-\frac{c_1q+c_2p}{q+p}$$

doğrusu bulunur.

Durum 2 : ${(y+m_1x+c_1)}/{p}={(y+m_2x+c_2)}/{q}$ olsun. Bu durumda,

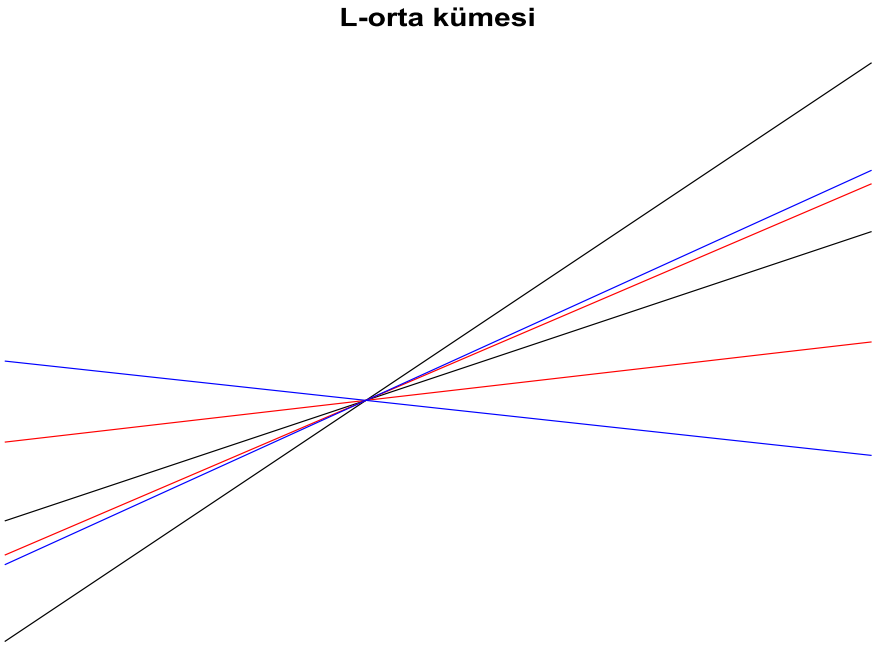
$$y=\frac{m_2p-m_1q}{q-p}x+\frac{c_2p-c_1q}{q-p}$$

doğrusu bulunur.

Sonuç olarak, iki doğrunun orta kümesi, yukarıdaki doğrulardan oluşur.

Şimdi de iki doğrunun L-orta kümeleri ile Öklid orta kümeleri karşılaştıralım. $|m|\neq 1$, $m\neq\infty$ iken $L_1 \parallel L_2$ ve $L_1 \perp L_2$ iken L-orta kümeler Öklid orta kümeyle aynıdır. m, L_1 ve L_2 doğrularının eğimi olmak üzere, $L_1 \parallel L_2$ ($|m|>1$ ve $|m|<1$) iken orta

küme bir tek doğru, diğer durumlarda kesişen iki doğrudur. $L_1 \perp L_2$ ($|m| > 1$ ve $|m| < 1$) iken orta küme Öklid anlamda açıortay doğrularıdır. Şekil 2.1 de mavi renkle siyah renkli doğruların Öklid anlamda orta kümesi, kırmızı renkle verilen de L-orta kümesini göstermektedir (Bkz. Şekil 2.3).



Şekil 2.3 L- Orta Kümesi

3. LORENTZ – MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE KONİKLER

3.1 Lorentz – Minkowski Düzleminde Çemberler

L^2 düzleminde çemberler, Öklid anlamdaki hiperbollerdir. Bu düzlemdeki çemberleri Öklid düzlemdeki çemberlere benzer şekilde tanımlayabiliriz. Aşağıda L^2 düzleminde L-çemberinin tanımı verilmiştir.

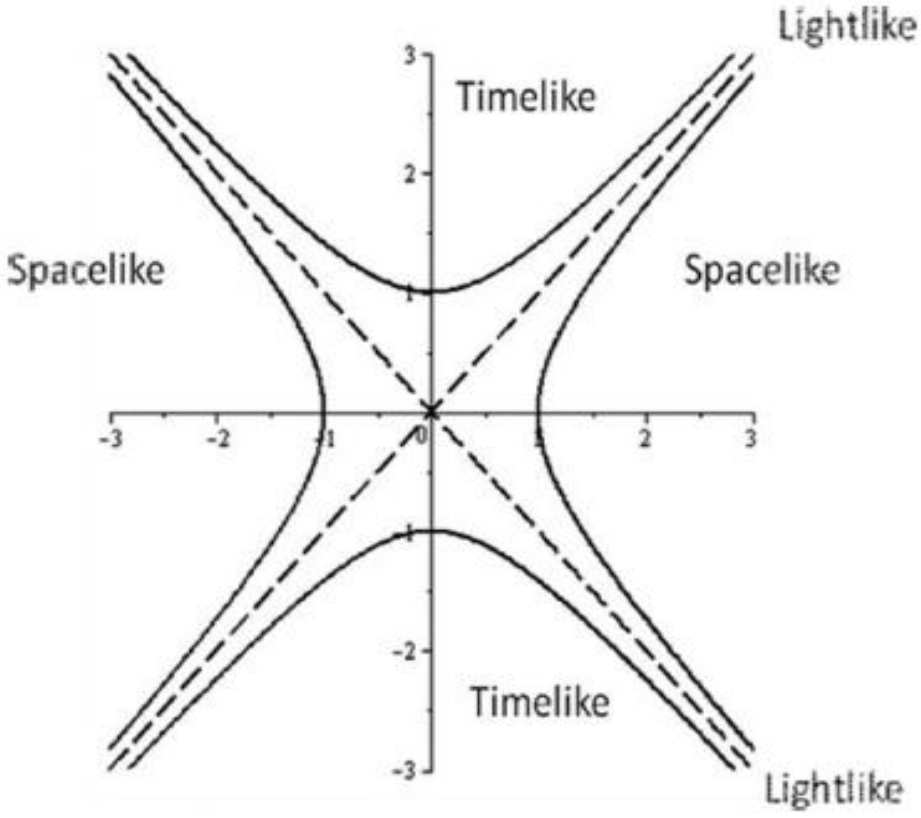
Tanım 3.1.1 $x = (x, y)$ L^2 düzleminde bir keyfi nokta, $z = (z_1, z_2)$ çemberin merkezi ve α yarıçap olmak üzere, Lorentz normunu kullanarak, L-çemberlerinin kümesini,

$$\{x \in L^2 : \|x - z\| = \alpha\ ,\ \alpha > 0\}$$

şeklinde yazabiliriz. Yani, L-çemberlerinin denklemi,

$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| = \alpha^2 \qquad (3.1.1)$$

biçimindedir. Bu L-çemberinin asal ekseni spacelike ise spacelike çember, asal eksen timelike ise timelike çember, asal eksen lightlike ise lightlike çember olarak adlandırılır. L^2 düzlemindeki birim çember $\{x \in \mathbb{R}^2 : < x, x >_L = 1\}$ şeklinde olup, $x = (x, y) \in L^2$ için $x^2 - y^2 = \pm 1$ denklemine sahiptir. Birim çember L^2 düzlemini dört bölgeye ayırır. Bunlardan ikisi spacelike da, diğer ikisi de timelike bölgesindedir. Birim çemberin asimptotları olan $y = x$ ve $y = -x$ doğruları lightlike (null) doğrulardır (Bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Lorentz düzleminde birim çember

3.2 Lorentz - Minkowski Düzleminde İki Odaklı Elipsler ve Singüler Noktaları

L^2 düzlemindeki elipsleri, Tanım 2.1.7 deki elipslere benzer şekilde tanımlarız. Bu düzlemdeki elipsler L-elipsleri olarak gösterilsin.

Tanım 3.2.1 $x = (x, y)$ L^2 düzleminde keyfi bir nokta, $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ elipsin odakları olmak üzere, L-elipslerinin kümesini,

$$\{x \in L^2 : \|x - z\| + \|x - w\| = 2\alpha\,,\ \alpha > 0\}$$

şeklinde yazabiliriz. Yani L-elipslerinin denklemi,

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} + \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 2\alpha \qquad (3.2.1)$$

şeklindedir. Bu elipslerin odaklar arası uzaklıklığı,

$$2d = \sqrt{|(z_1 - w_1)^2 - (z_2 - w_2)^2|} \qquad (3.2.2)$$

dir. L^2 düzleminde $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m olsun. L-elipslerini $|m| > 1$ ise timelike L-elipsi, $|m| < 1$ ise spacelike L-elipsi, $|m| = 1$ ise lightlike L-elipsi olarak adlandıracağız.

Teorem 3.2.1 L^2 düzleminde $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ odaklar ve $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$ ve $2d$ katsayılarının alacağı değerlere göre iki odaklı L-elipsi aşağıdaki Tablo 3.1 de verilen geometrik yerlerden biridir:

z, w ve m nin durumu	$2a$	Geometrik Yer
$z = w$	$2\alpha = 0$	$z = w = (z_1, z_2)$ noktasında kesişen lightlike (null) doğrular
$z \neq w$		$[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge
$z = w$	$2\alpha > 0$	$z = w = (z_1, z_2)$ merkezli ve $2a$ yarıçaplı L-çemberi
$\|m\| = 1$	$2\alpha = 2\mathrm{d} = 0$	Odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru
	$2\alpha > 2\mathrm{d} = 0$	6 singüler noktalı lightlike L-elipsi
	$2\alpha < 2d = 0$	Boş küme
$\|m\| > 1$	$2\alpha = 2\mathrm{d}$	6 singüler noktalı timelike L-elipsi
	$2\alpha > 2\mathrm{d}$	8 singüler noktalı timelike L-elipsi
	$2\alpha < 2d$	8 singüler noktalı timelike L-elipsi
$\|m\| < 1$	$2\alpha = 2\mathrm{d}$	6 singüler noktalı spacelike L-elipsi
	$2\alpha > 2\mathrm{d}$	8 singüler noktalı spacelike L-elipsi
	$2\alpha < 2d$	8 singüler noktalı spacelike L-elipsi

Tablo 3.1 Farklı Durumlarda İki Odaklı L-elipsi İncelemeleri

İspat: L-elipsleri için farklı durumlar söz konusudur.

I) $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ odaklarının bazı özel durumlarını inceleyelim.

I_1) $z = w$ ve $2\alpha = 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin geometrik yeri,

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 0$$
$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| = 0$$
$$(x - z_1)^2 = (y - z_2)^2$$
$$x - z_1 = y - z_2 \ \wedge \ -x + z_1 = y - z_2$$
$$y = x + z_2 - z_1 \ \wedge \ y = -x + z_2 + z_1$$

$z = w = (z_1, z_2)$ noktasında kesişen lightlike (null) doğrularıdır.

I_2) $z \neq w$ ve $2\alpha = 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin geometrik yeri,

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} + \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = 0$$
$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| = 0 \ \wedge \ |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = 0$$
$$(x - z_1)^2 = (y - z_2)^2 \ \wedge \ (x - w_1)^2 = (y - w_2)^2$$
$$(x - z_1)^2 = (y - z_2)^2 \ \wedge \ (x - w_1)^2 = (y - w_2)^2$$
$$x - z_1 = y - z_2 \ \wedge \ -x + z_1 = y - z_2 \ \wedge \ x - w_1 = y - w_2 \ \wedge \ -x + w_1 = y - w_2$$
$$y = x + z_2 - z_1 \ \wedge \ y = -x + z_2 + z_1 \ \wedge \ y = x + w_2 - w_1 \ \wedge \ y = -x + w_2 + w_1$$

$[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğrular olan dörtgensel bölgedir.

II) $z = w$ ve $2\alpha > 0$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denkleminin geometrik yeri,

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} = 2\alpha$$
$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| = 4\alpha^2$$

$z = w = (z_1, z_2)$ merkezli ve $2a$ yarıçaplı L- çemberidir.

III) $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$ ve $2d = d_L(z,w)$ değerlerine göre aşağıdaki durumlar incelenir.

$$\sqrt{|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|}+\sqrt{|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|}=2\alpha$$

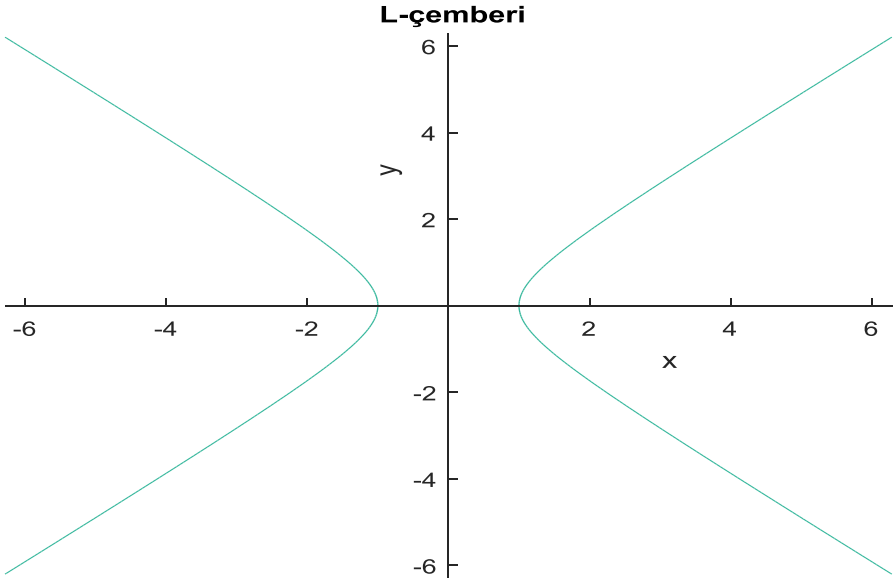
olur. Bu denklem için,

a) $|x-z_1|=|y-z_2|$ ve $|x-w_1|=|y-w_2|$ olsun. Bu durumda çözüm boş kümedir.

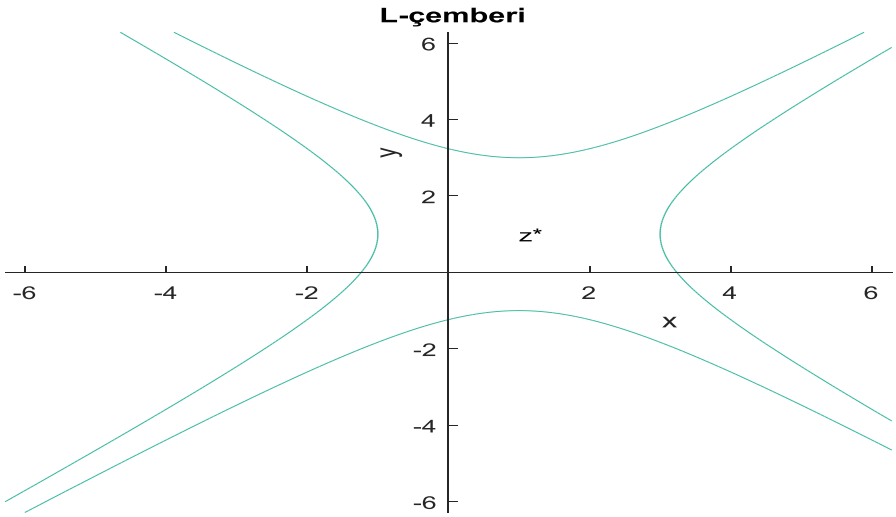
b) Aşağıdaki durumların her birinde (3.2.1) denkleminin geometrik yeri L-çember parçalarından oluşur (Şekil 3.2).

- $|x-z_1|>|y-z_2|$ ve $|x-w_1|=|y-w_2|$ olsun.
- $|x-z_1|<|y-z_2|$ ve $|x-w_1|=|y-w_2|$ olsun.
- $|x-z_1|=|y-z_2|$ ve $|x-w_1|>|y-w_2|$ olsun.
- $|x-z_1|=|y-z_2|$ ve $|x-w_1|<|y-w_2|$ olsun.

Yukarıdaki denklemlerin birleşimi L-çemberini oluşturur (Şekil 3.3).



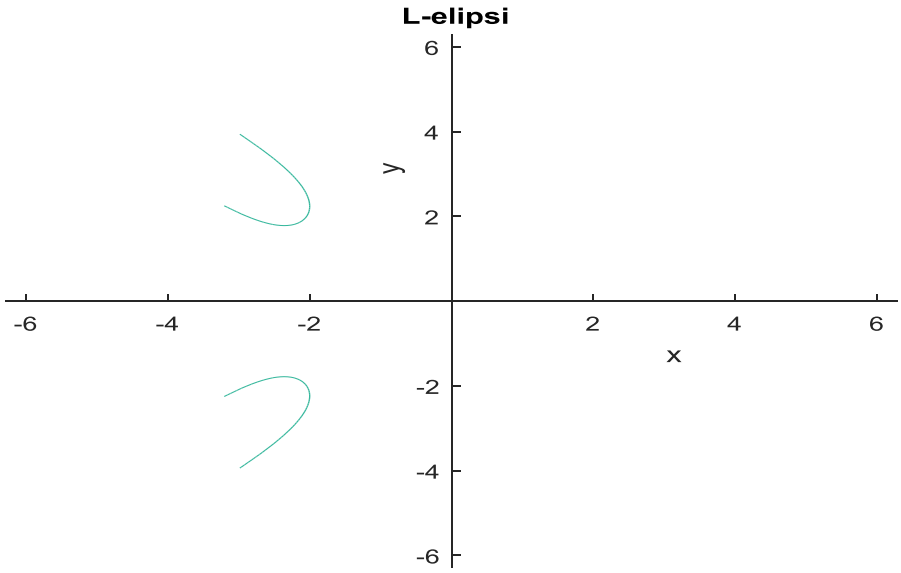
Şekil 3.2 $z=(0,0)$ ve $a=1$ L-çember parçası



Şekil 3.3 $z = (1,1)$ ve $a = \sqrt{2}$ L-çemberi

c) Aşağıdaki durumların her birinde (3.2.1) denkleminin geometrik yeri L-elips parçasıdır (Şekil 3.4).

- $|x - z_1| > |y - z_2|$ ve $|x - w_1| > |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| > |y - z_2|$ ve $|x - w_1| < |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| < |y - z_2|$ ve $|x - w_1| > |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| < |y - z_2|$ ve $|x - w_1| < |y - w_2|$ olsun.



Şekil 3.4 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = 2$ L-elips parçası

Yukarıdaki denklemlerin birleşimi L-elipslerini oluşturur. Fakat L-elipslerinin şekli singüler noktalarına göre farklılık gösterirler. Bu elipsler en fazla sekiz singüler noktaya sahip ve bunlar lightlike (null) doğrular üzerindedir. Bu doğrular,

$y = x + z_2 - z_1$, $\quad$ y= $-x + z_2 + z_1$, $\quad$ y= $x + w_2 - w_1$, $\quad$ y = $-x + w_2 + w_1$

biçimindedir.

Aşağıda L-elipslerinin üzerindeki en fazla sekiz singüler noktanın bulunuşu açıklanmıştır. Bu noktalar $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ ile gösterilmiştir.

Durum 1 : $|x - z_1| \geq |y - z_2|$ ve $|x - w_1| \geq |y - w_2|$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denklemi,

$$\sqrt{(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2} + \sqrt{(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2} = 2\alpha \qquad (3.2.3)$$

olur.

1- $P_1 = (x_1 , y_1)$ noktası $y = x + z_2 - z_1$ doğrusu üzerinde alınırsa, $x_1 = y_1 + z_1 - z_2$ olur. Bu değer (3.2.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sqrt{(y_1 + z_1 - z_2 - z_1)^2 - (y_1 - z_2)^2} + \sqrt{(y_1 + (z_1 - z_2 - w_1)^2 - (y_1 - w_2)^2} = 2\alpha$$

$$y_1^2 + 2y_1(z_1 - z_2 - w_1) + (z_1 - z_2 - w_1)^2 - y_1^2 + 2y_1 w_2 - w_2^2 = 4\alpha^2$$

$$y_1 = \frac{4\alpha^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(z_1 - z_2 - w_1 + w_2)}$$

bulunur. y_1 değeri $x_1 = y_1 + z_1 - z_2$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$x_1 = y_1 + z_1 - z_2 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{4\alpha^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(z_1 - z_2 - w_1 + w_2)} + z_1 - z_2$$

olacaktır.

Bu durumdaki diğer singüler noktalarda benzer şekilde bulunabileceğinden, doğrudan sonuçları yazabiliriz.

2- $P_2 = (x_2 , y_2)$ noktası $y = -x + z_2 + z_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_2 = \frac{4\alpha^2 + w_2^2 - (z_2 + z_1 - w_1)^2}{2(z_2 + z_1 - w_2 - w_1)} + z_1 + z_2$$

$$y_2 = \frac{4\alpha^2 + w_2^2 - (z_2 + z_1 - w_1)^2}{2(w_2 + w_1 - z_2 - z_1)}$$

bulunur.

3- $P_3 = (x_3 , y_3)$ noktası $y = x + w_2 - w_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_3 = \frac{4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2(w_1 - w_2 - z_1 + z_2)} + w_1 - w_2$$

$$y_3 = \frac{4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2(w_1 - w_2 - z_1 + z_2)}$$

dir.

4- $P_4 = (x_4 , y_4)$ noktası $y = -x + w_2 + w_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_4 = \frac{4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2(w_1 + w_2 - z_1 - z_2)} + w_1 + w_2$$

$$y_4 = \frac{4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2(z_1 + z_2 - w_1 - w_2)}$$

biçimindedir.

Durum 2 : $|x - z_1| \leq |y - z_2|$ ve $|x - w_1| \leq |y - w_2|$ olsun. Bu durumda (3.2.1) denklemi,

$$\sqrt{(y - z_2)^2 - (x - z_1)^2} + \sqrt{(y - w_2)^2 - (x - w_1)^2} = 2\alpha \qquad (3.2.4)$$

olur.

5- $P_5 = (x_5 , y_5)$ noktası $y = x + z_2 - z_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_5 = \frac{-4\alpha^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(z_1 - z_2 - w_1 + w_2)} + z_1 - z_2$$

$$y_5 = \frac{-4\alpha^2 + w_2^2 - (z_1 - z_2 - w_1)^2}{2(z_1 - z_2 - w_1 + w_2)}$$

olur.

6- $P_6 = (x_6 , y_6)$ noktası $y = -x + z_2 + z_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_6 = \frac{-4\alpha^2 + w_2^2 - (z_2 + z_1 - w_1)^2}{2(z_2 + z_1 - w_2 - w_1)} + z_2 + z_1$$

$$y_6 = \frac{-4\alpha^2 + w_2^2 - (z_2 + z_1 - w_1)^2}{2(w_2 + w_1 - z_2 - z_1)}$$

bulunur.

7- $P_7 = (x_7 , y_7)$ noktası $y = x + w_2 - w_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_7 = \frac{-4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2(w_1 - w_2 - z_1 + z_2)} + w_1 - w_2$$

$$y_7 = \frac{-4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 - w_2 - z_1)^2}{2(w_1 - w_2 - z_1 + z_2)}$$

dir.

8- $P_8 = (x_8, y_8)$ noktası $y = -x + w_2 + w_1$ doğrusu üzerinde ise,

$$x_8 = \frac{-4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2(w_1 + w_2 - z_1 - z_2)} + w_1 + w_2$$

$$y_8 = \frac{-4\alpha^2 + z_2^2 - (w_1 + w_2 - z_1)^2}{2(z_1 + z_2 - w_1 - w_2)}$$

biçimindedir.

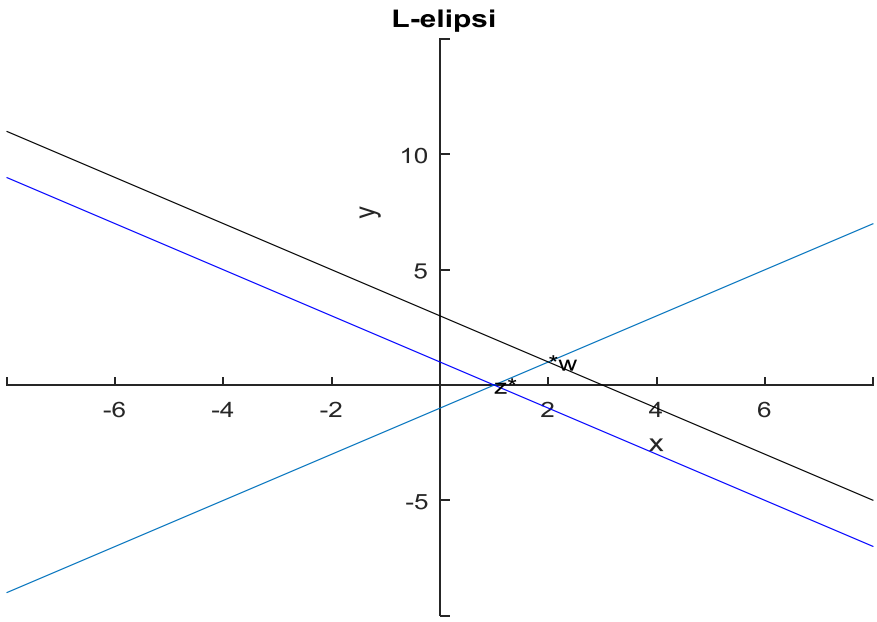
Aynı şekilde $|x - z_1| \geq |y - z_2|$ ve $|x - w_1| \leq |y - w_2|$, $|x - z_1| \leq |y - z_2|$ ve $|x - w_1| \geq |y - w_2|$ durumları içinde aynı singüler noktalar bulunur.

L-elipsleri bu singüler noktalara göre adlandırılacaktır.

Aşağıda (3.2.1) denklemiyle verilen L-elipslerinin şekilleri $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$, $2d = d_L(z, w)$ değerlerine göre gösterilmiştir.

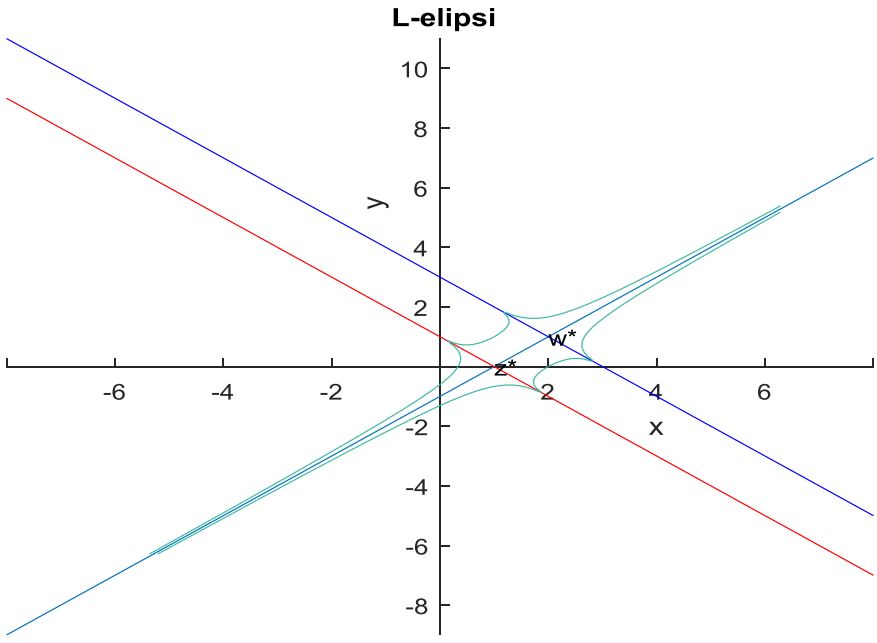
III₁) $|m| = 1$ (lightlike) olsun.

1) $2a = 2d = 0$ iken L-elipsi odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğrudur (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (2,1)$, $2a = 2d = 0$ lightlike L-elipsi

2) $2a > 2d = 0$ iken odakları aynı lightlike (null) doğru üzerinde olan 6 singüler noktalı lightlike L-elipsidir (Şekil 3.6).

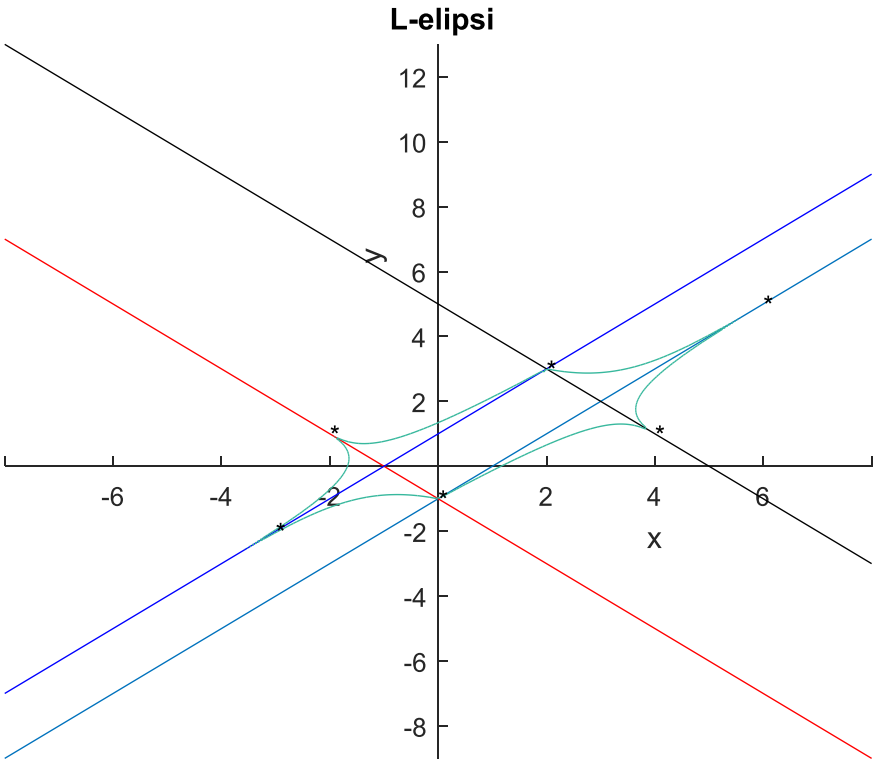


Şekil 3.6 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (2,1)$, $a = 1 > d = 0$ lightlike L-elipsi

3) $2a < 2d = 0$ ise çözüm boş kümedir.

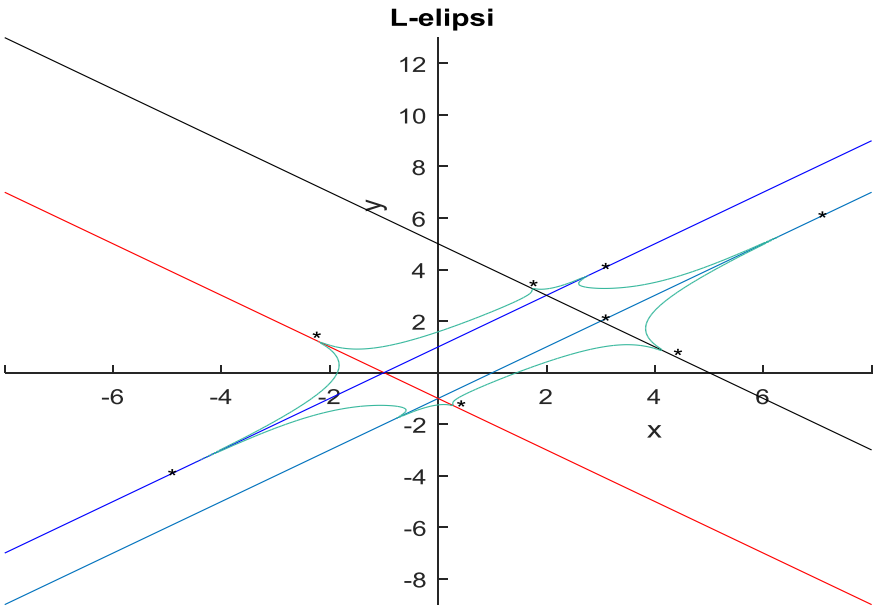
III$_2$) $|m| > 1$ (timelike) olsun.

1) $2a = 2d$ iken 6 singüler noktalı timelike L-elipsidir (Şekil 3.7).



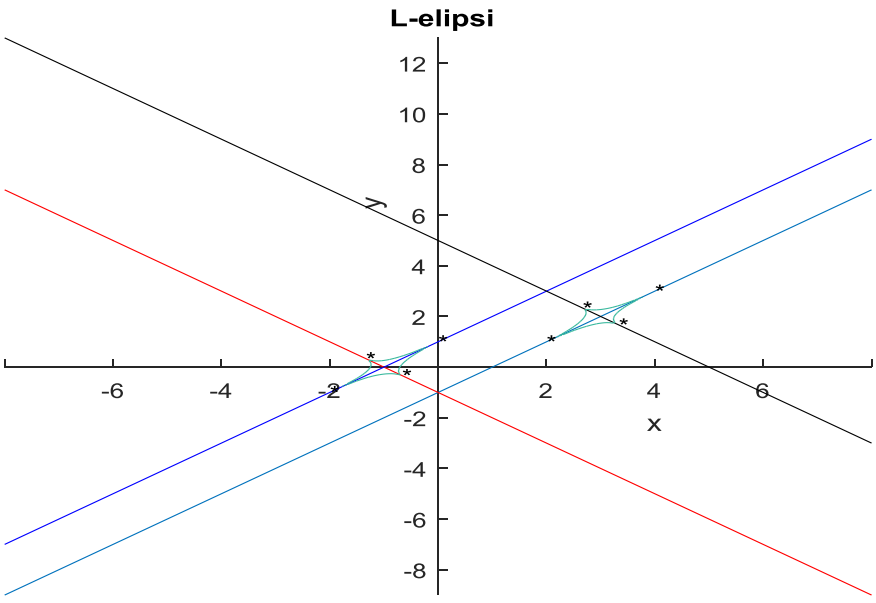
Şekil 3.7 Odakları $z = (0, -1)$ ve $w = (2,3)$, $a = d = \sqrt{3}$ timelike L-elipsi

2) $2a > 2d$ iken 8 singüler noktalı timelike L-elipsidir (Şekil 3.8).



Şekil 3.8 Odakları $z = (0, -1)$ ve $w = (2,3)$, $a = 2 > d = \sqrt{3}$ timelike L-elipsi

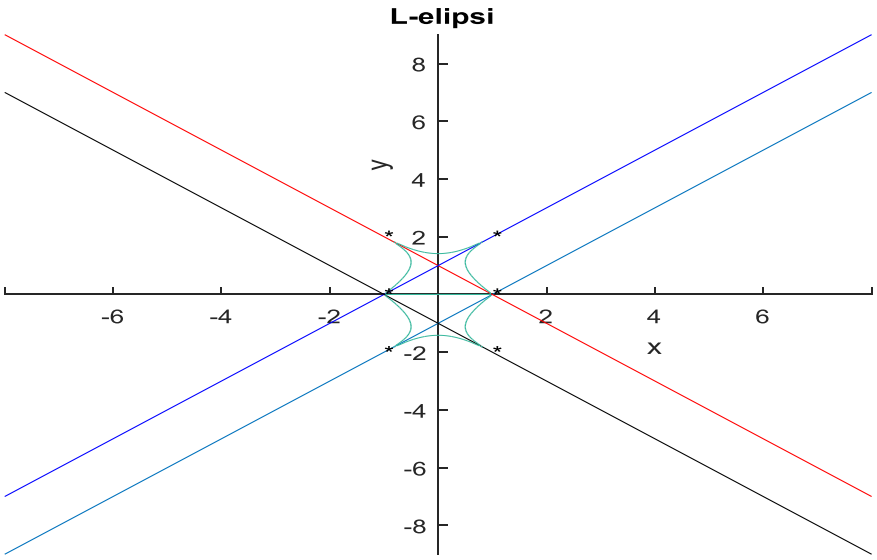
3) $2a < 2d$ iken 8 singüler noktalı timelike L-elipsidir (Şekil 3.9).



Şekil 3.9 Odakları $z = (0, -1)$ ve $w = (2,3)$, $a = 1 < d = \sqrt{3}$ timelike L-elipsi

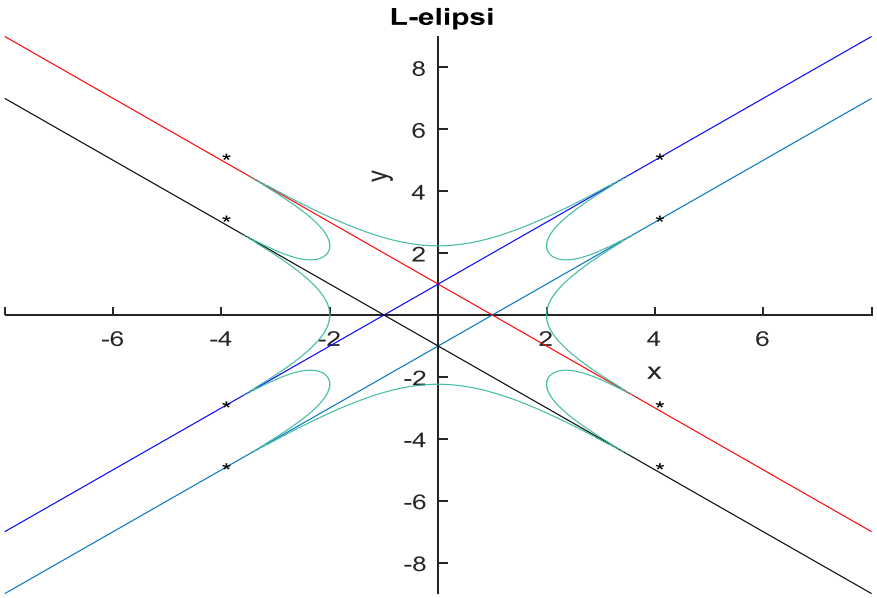
III$_3$) $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

1) $2a = 2d$ iken 6 singüler noktalı spacelike L-elipsidir (Şekil 3.10).



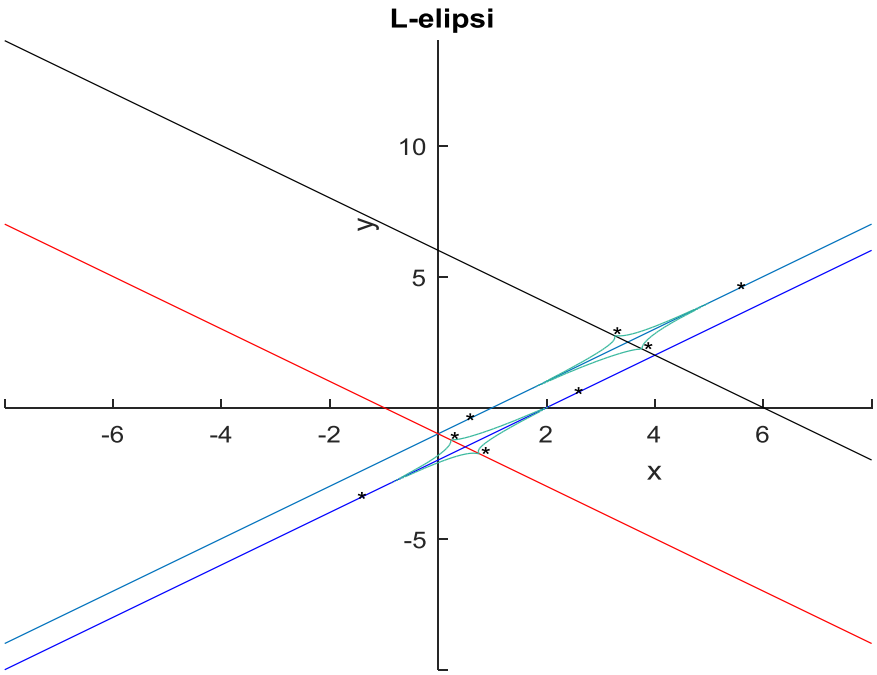
Şekil 3.10 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = d = 1$ spacelike L-elipsi

2) $2a > 2d$ iken 8 singüler noktalı spacelike L-elipsidir (Şekil 3.11).



Şekil 3.11 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = 2 > d = 1$ spacelike L-elipsi

3) $2a < 2d$ iken 8 singüler noktalı spacelike L-elipsidir (Şekil 3.12).



Şekil 3.12 Odakları $z = (0,-1)$ ve $w = (4,2)$, $a = 1 < d = \sqrt{7}$ spacelike L-elipsi

3.3 Lorentz - Minkowski Düzleminde İki Odaklı Hiperboller ve Singüler Noktaları

L^2 düzlemindeki hiperbolleri, Tanım 2.1.8 deki hiperbollere benzer şekilde tanımlarız. Bu düzlemdeki hiperboller L-hiperbolleri olarak gösterilsin.

Tanım 3.3.1. $x = (x,y)$ L^2 düzleminde keyfi bir nokta, $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ hiperbolün odakları olmak üzere, L-hiperbollerinin kümesini,

$$\{x \in L^2 : |\, \|x - z\| - \|x - w\|\, | = 2\alpha\,,\ \alpha > 0\}$$

şeklinde yazabiliriz. Yani L-hiperbollerinin denklemi,

$$\left|\sqrt{|(x-z_1)^2 - (y-z_2)^2|} - \sqrt{|(x-w_1)^2 - (y-w_2)^2|}\,\right| = 2\alpha \qquad (3.3.1)$$

şeklindedir. Bu hiperbollerin odaklar arası uzaklığı,

$$2d = \sqrt{|(z_1 - w_1)^2 - (z_2 - w_2)^2|} \tag{3.3.2}$$

bulunur. L^2 düzleminde $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m olsun. L-hiperbollerini $|m| > 1$ ise timelike L-hiperbolü, $|m| < 1$ ise spacelike L-hiperbolü, $|m| = 1$ ise lightlike L-hiperbolü olarak adlandıracağız.

Teorem 3.3.1. L^2 düzleminde $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ odaklarının konumu ve $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$ ve $2d = d_L(z, w)$ katsayılarının alacağı değerlere göre iki odaklı L-hiperbolü aşağıdaki Tablo 3.2 de verilen geometrik yerlerden biridir:

m	**2α**	**Geometrik Yer**
$\|m\| = 1$	$2\alpha = 2\mathrm{d} = 0$	Odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru veya z ve w odaklarının orta noktasından geçen doğru
	$2\alpha > 2d = 0$	4 parçalı ve 4 singüler noktalı lightlike L-hiperbolü
	$2a < 2d = 0$	Boş küme
$\|m\| < 1$	$2a = 0$	$[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge veya $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusuna pseudo-ortogonal doğru ile spacelike L-çember parçasının birleşimi
	$2\alpha = 2\mathrm{d}$	6 singüler noktalı spacelike L-hiperbolü
	$2\alpha > 2\mathrm{d}$	8 singüler noktalı spacelike L-hiperbolü
	$2\alpha < 2d$	8 singüler noktalı spacelike L-hiperbolü
$\|m\| > 1$	$2a = 0$	$[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge veya $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusuna pseudo-ortogonal doğru ile timelike L-çember parçasının birleşimi
	$2\alpha = 2\mathrm{d}$	6 singüler noktalı timelike L-hiperbolü
	$2\alpha > 2\mathrm{d}$	8 singüler noktalı timelike L-hiperbolü
	$2\alpha < 2d$	8 singüler noktalı timelike L-hiperbolü

Tablo 3.2 Farklı Durumlarda İki Odaklı L-hiperbolü İncelemeleri

İspat : $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$ ve $2d = d_L(z,w)$ değerlerine göre aşağıdaki durumlar incelenir.

I) $|m| = 1, |m| > 1, |m| < 1$ ve $2a = 0$ olsun. Bu durumda (3.3.1) denkleminin geometrik yerini inceleyelim. Bu durumda,

$$\left|\sqrt{|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|} - \sqrt{|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|}\right| = 0$$

denklemi bulunur. Burada iki durum söz konusudur. Şimdi bu iki durumu inceleyelim.

I_1)

$$\sqrt{|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|} = 0 \quad \wedge \quad \sqrt{|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|} = 0$$

$$(x-z_1)^2 = (y-z_2)^2 \quad \wedge \quad (x-w_1)^2 = (y-w_2)^2$$

$$x - z_1 = y - z_2 \ , \ -x + z_1 = y - z_2 \ , \ x - w_1 = y - w_2 \ , -x + w_1 = y - w_2$$

$$y = x + z_2 - z_1 \ , \ y = -x + z_2 + z_1 \ , \ y = x + w_2 - w_1 \ , \ y = -x + w_2 + w_1$$

Bu durumda $[z,w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğrular olan dörtgensel bölge oluşur.

I_2)

$$\sqrt{|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|} = \sqrt{|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|}$$

$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2| = |(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|$$

$$(x-z_1)^2-(y-z_2)^2 = \pm((x-w_1)^2-(y-w_2)^2)$$

Pozitif işaretli eşitliği kullanarak denklemi düzenlersek,

$$(z_1-w_1)(2x-z_1-w_1) = (z_2-w_2)(2y-z_2-w_2)$$

ve bu denklemi standart halde yazarsak,

$$y = \frac{z_1 - w_1}{z_2 - w_2}x + \frac{({z_2}^2 - {w_2}^2) - ({z_1}^2 - {w_1}^2)}{2(z_2 - w_2)}$$

olur. Burada z, w odaklarından geçen doğruya pseudo-ortogonal doğrusu bulunur. Ayrıca bu doğru P_M, z ve w odaklarının orta noktası olmak üzere $P_M = \left({(z_1 + w_1)}/{2}, {(z_2 + w_2)}/{2} \right)$ noktasından geçer. Negatif işaretli eşitliği kullanarak denklemi düzenlersek,

$$(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2 = (y - w_2)^2 - (x - w_1)^2$$

$$x^2 - y^2 - x(z_1 + w_1) + y(z_2 + w_2) + \frac{(z_1^2 + w_1^2) - (z_2^2 + w_2^2)}{2} = 0$$

denklemli L-çember parçası bulunur.

Fakat $|m| = 1$ durumunda odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru veya z ve w odaklarının orta noktasından geçen doğrudur.

II) $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m iken, $2a \neq 0$ ve $2d = d_L(z, w)$ değerlerine göre,

$$\left| \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} - \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} \right| = 2\alpha$$

denkleminden aşağıdaki durumlar incelenir.

a) $|x - z_1| = |y - z_2|$ ve $|x - w_1| = |y - w_2|$ olsun.

Çözüm : Boş kümedir.

b) $|x - z_1| > |y - z_2|$ ve $|x - w_1| = |y - w_2|$, $|x - z_1| < |y - z_2|$ ve $|x - w_1| = |y - w_2|$ olsun.

Çözüm : $|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|=4\alpha^2$

denklemli L-çemberidir.

c) $|x-z_1|=|y-z_2|$ ve $|x-w_1|>|y-w_2|$, $|x-z_1|=|y-z_2|$ ve $|x-w_1|<|y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|=4\alpha^2$

denklemli L-çemberidir.

d) $|x-z_1|>|y-z_2|$ ve $|x-w_1|>|y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $\left|\sqrt{(x-z_1)^2-(y-z_2)^2}-\sqrt{(x-w_1)^2-(y-w_2)^2}\right|=2\alpha$

denklemine sahip L-hiperbol parçasıdır.

e) $|x-z_1|>|y-z_2|$ ve $|x-w_1|<|y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $\left|\sqrt{(x-z_1)^2-(y-z_2)^2}-\sqrt{(y-w_2)^2-(x-w_1)^2}\right|=2\alpha$

denklemli L-hiperbol parçasıdır.

f) $|x-z_1|<|y-z_2|$ ve $|x-w_1|>|y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $\left|\sqrt{(y-z_2)^2-(x-z_1)^2}-\sqrt{(x-w_1)^2-(y-w_2)^2}\right|=2\alpha$

denklemine sahip L-hiperbol parçasıdır.

g) $|x-z_1|<|y-z_2|$ ve $|x-w_1|<|y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $\left|\sqrt{(y-z_2)^2-(x-z_1)^2}-\sqrt{(y-w_2)^2-(x-w_1)^2}\right|=2\alpha$

denklemli L-hiperbol parçasıdır.

Böylece (3.3.1) denkleminin geometrik yeri L-hiperbolüdür.

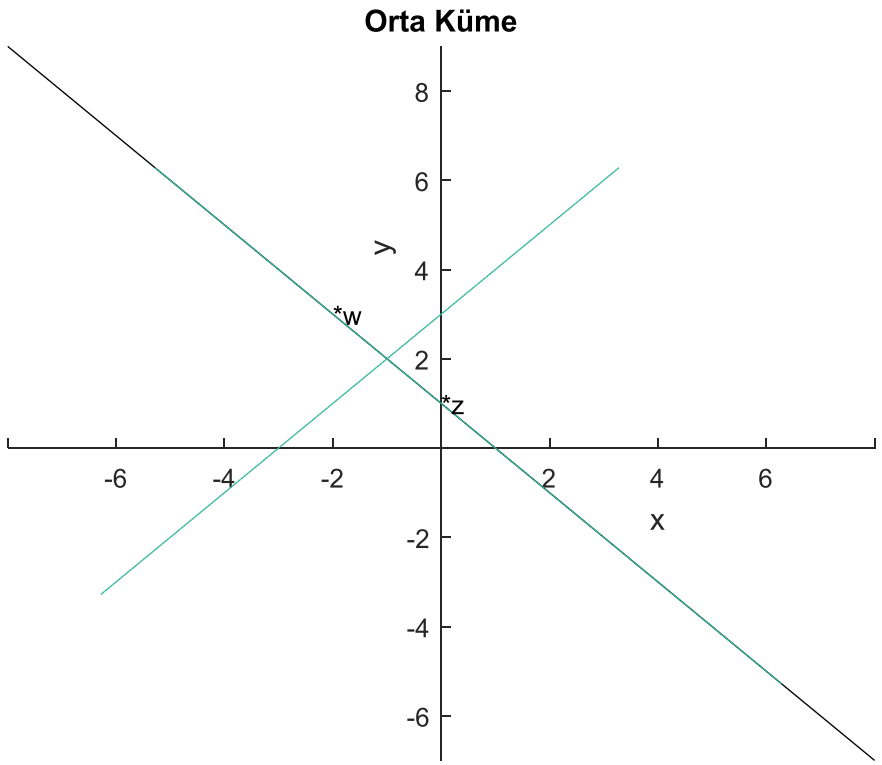
Lorentz - Minkowski düzleminde L-hiperbollerinin singüler noktaları aynı L-elipslerinde olduğu gibi lightlike (null) doğrular kullanılarak bulunabilir.

L-hiperbolleri de singüler noktalara göre adlandırılacaktır.

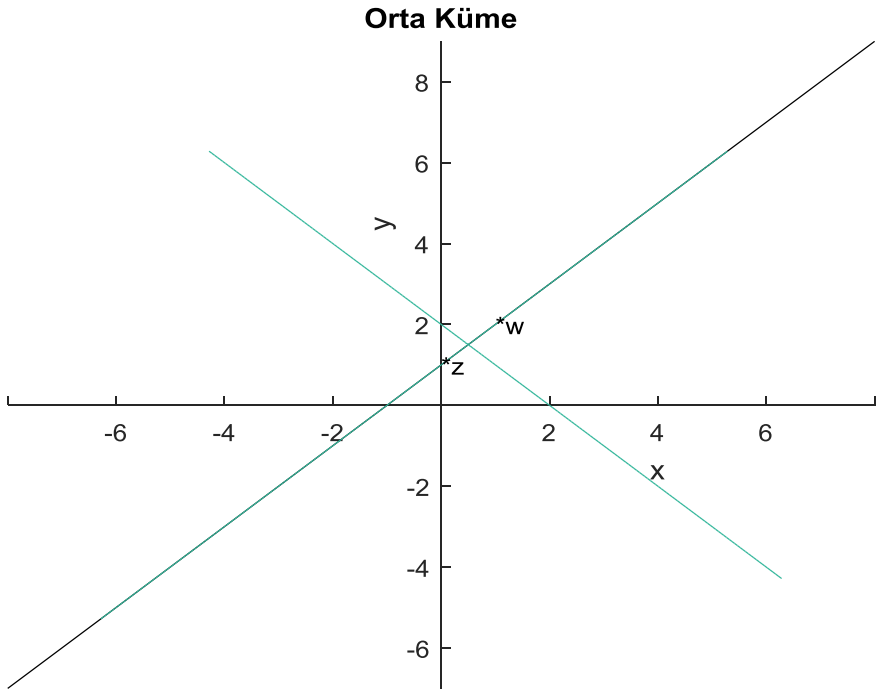
Aşağıda (3.3.1) denklemiyle verilen L-hiperbollerinin şekilleri, $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$ ve $2d = d_L(z,w)$ nın alacağı değerlerine göre gösterilmiştir.

II$_1$) $|m| = 1$ (lightlike) olsun.

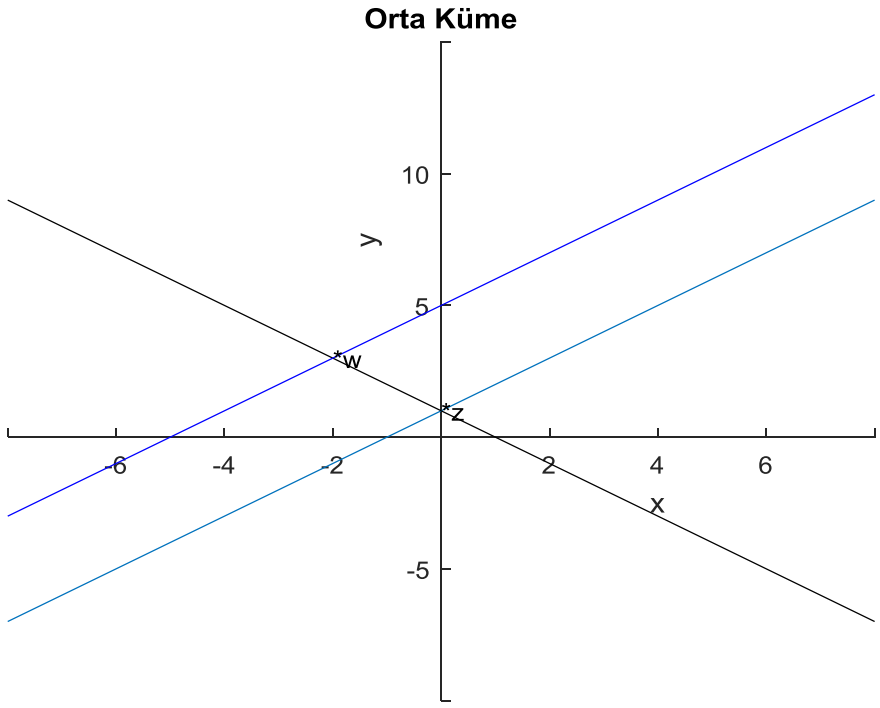
1) $2a = 2d = 0$ ise z ve w odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru veya odaklarının orta noktalarından geçen doğru (Şekil 3.13, Şekil 3.14, Şekil 3.15).



Şekil 3.13 $z = (0,1)$ ve $w = (-2,3)$, $m = -1$, $y = -x + 1$ doğrusu ile $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ L-çember parçasının birleşimi

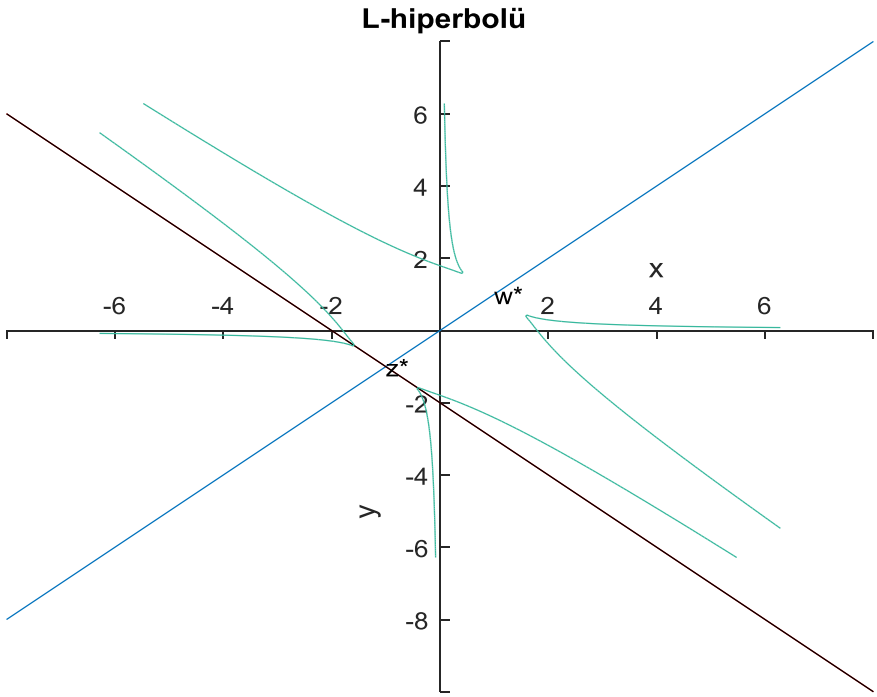


Şekil 3.14 $z = (0,1)$ ve $w = (1,2)$, $m = 1$, $y = x + 1$ doğrusu ile $x^2 - y^2 - x + 3y - 2 = 0$ L-çember parçasının birleşimi



Şekil 3.15 z ve w odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru

2) $2a > 2d = 0$ iken 4 parçalı ve 4 singüler noktalı lightlike L-hiperbolüdür (Şekil 3.16).

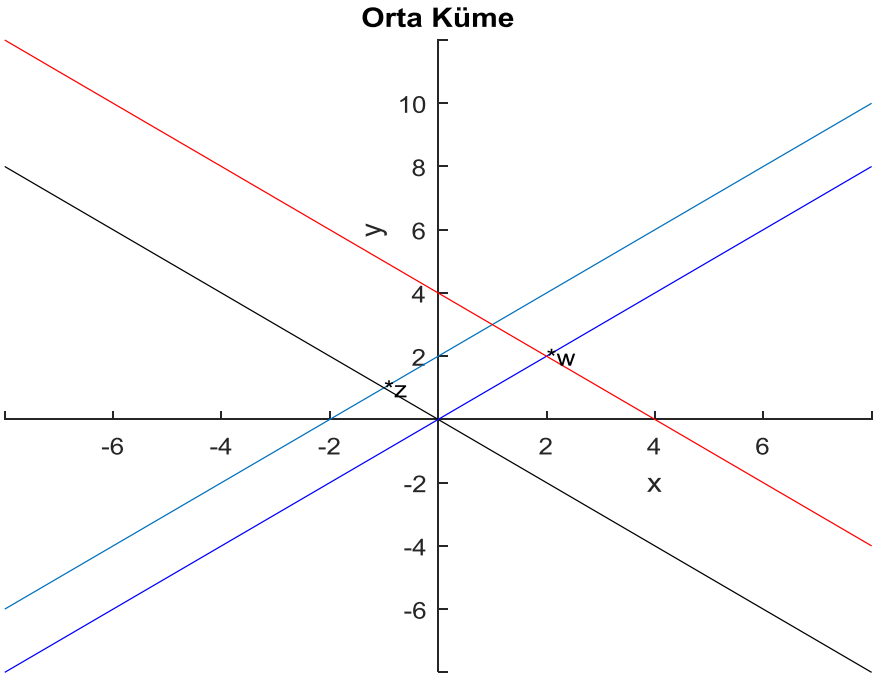


Şekil 3.16 Odakları $z = (-1,-1)$ ve $w = (1,1)$, $a = 1 > d = 0$ lightlike L-hiperbolü

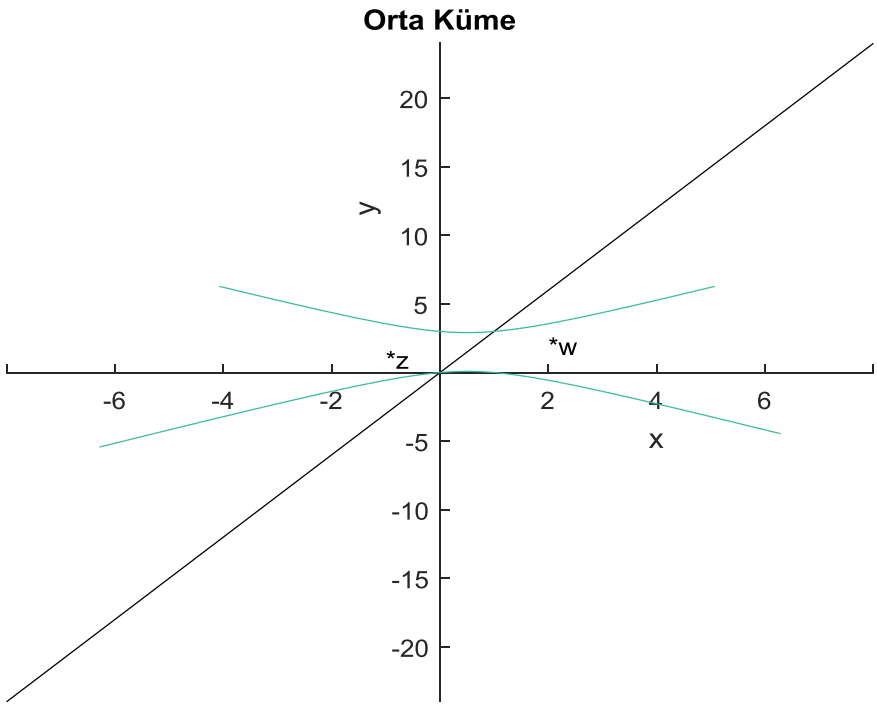
3) $2a < 2d = 0$ ise çözüm boş kümedir.

II₂) $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

1) $2a = 2d = 0$ iken $[z,w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge veya $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusuna pseudo-ortogonal doğru ile L-çember parçasının birleşimidir (Şekil 3.17 ve Şekil 3.18).

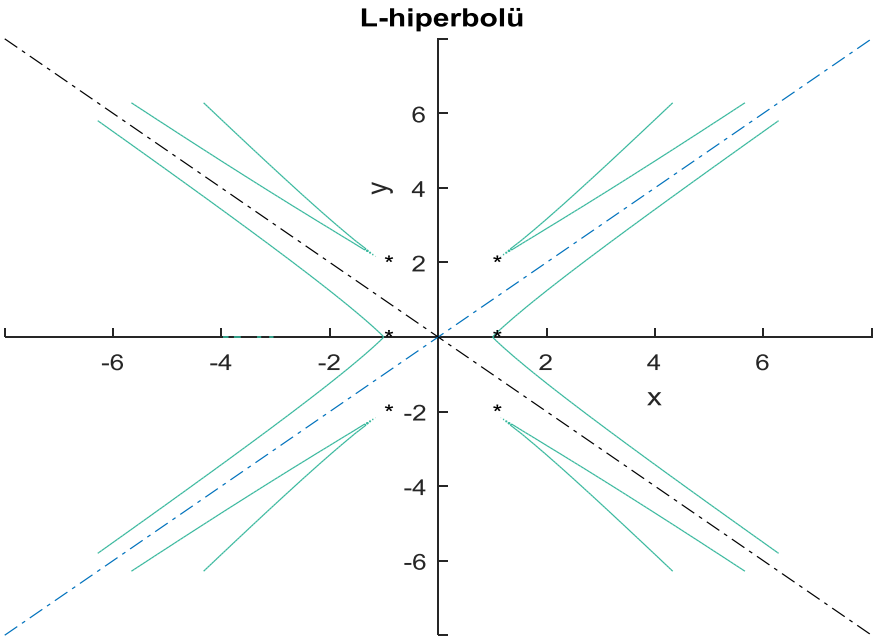


Şekil 3.17 $[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge



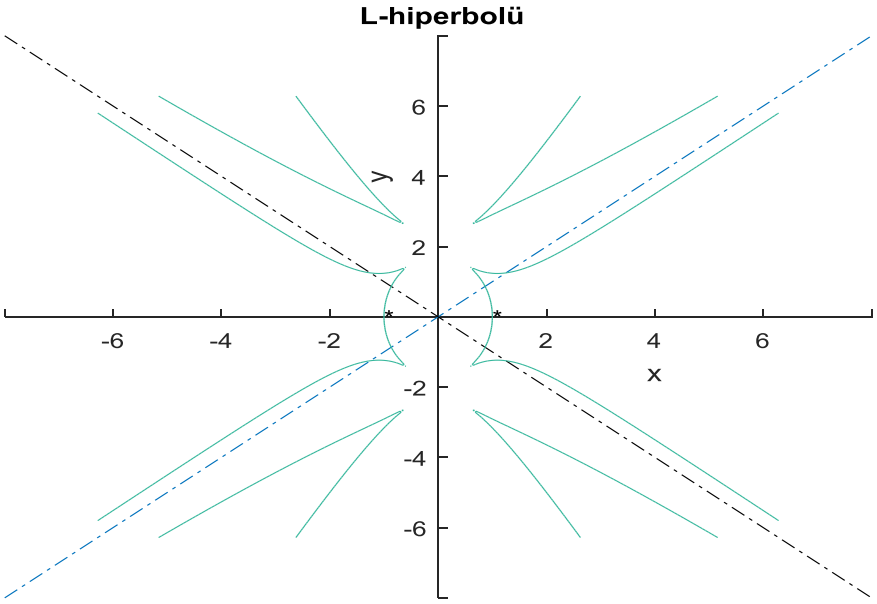
Şekil 3.18 $z = (-1,1)$ ve $w = (2,2)$, $-1 < m = 1/3 < 1$, $y = 3x$ doğrusu ile $x^2 - y^2 - x + 3y = 0$ L-çember parçasının birleşimi

2) $2a = 2d$ iken 6 singüler noktalı spacelike L-hiperbolüdür (Şekil 3.19).



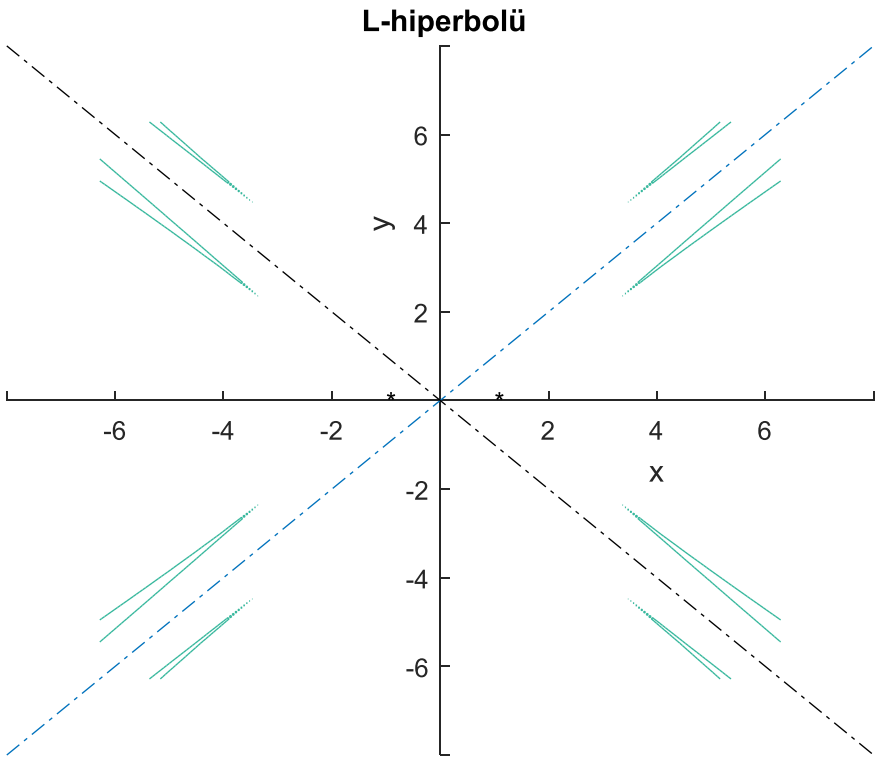
Şekil 3.19 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = d = 1$ spacelike L-hiperbolü

3) $2a < 2d$ iken 8 singüler noktalı spacelike L-hiperbolüdür (Şekil 3.20).



Şekil 3.20 Odakları $z = (2,0)$ ve $w = (-2,0)$, $a = 1 < d = 2$ spacelike L-hiperbolü

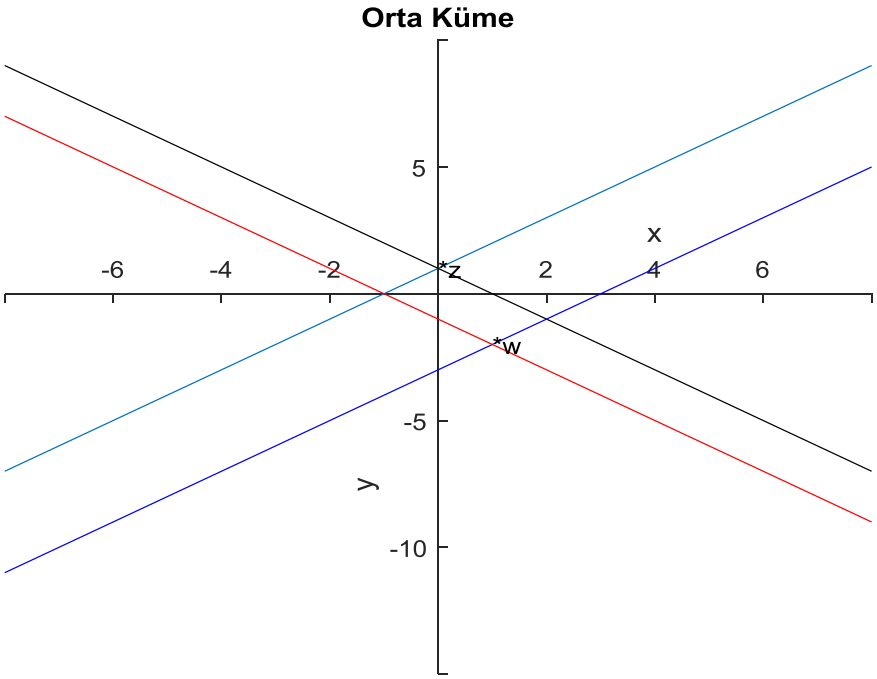
4) $2a > 2d$ iken 8 singüler noktalı spacelike L-hiperbolüdür (Şekil 3.21).



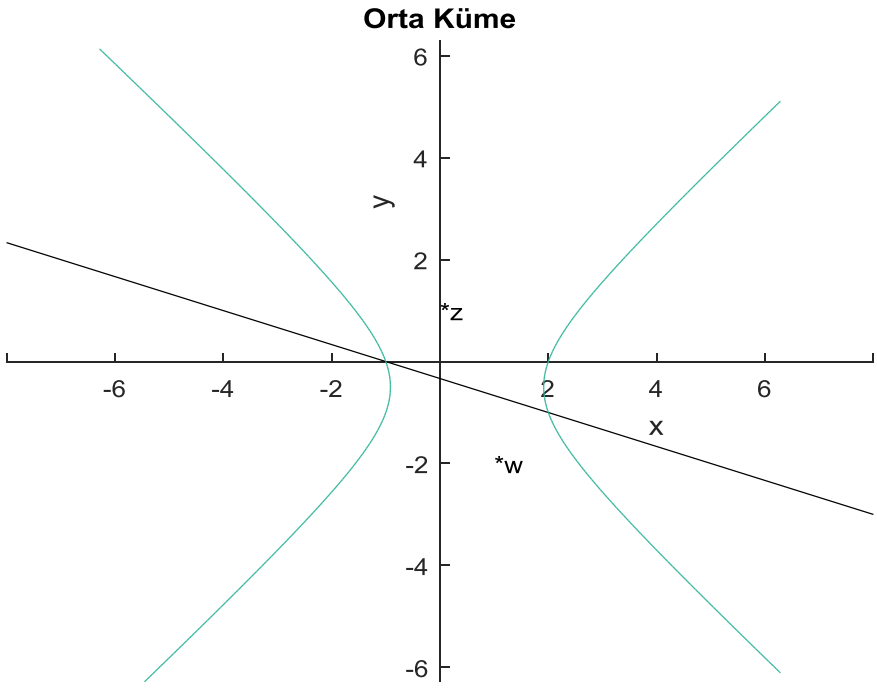
Şekil 3.21 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = 7/4 > d = 1$ spacelike L-hiperbolü

II$_3$) $|m| > 1$ (timelike) olsun.

1) $2a = 2d = 0$ iken $[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge veya $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusuna pseudo-ortogonal doğru ile L-çember parçasının birleşimidir (Şekil 3.22 ve Şekil 3.23).

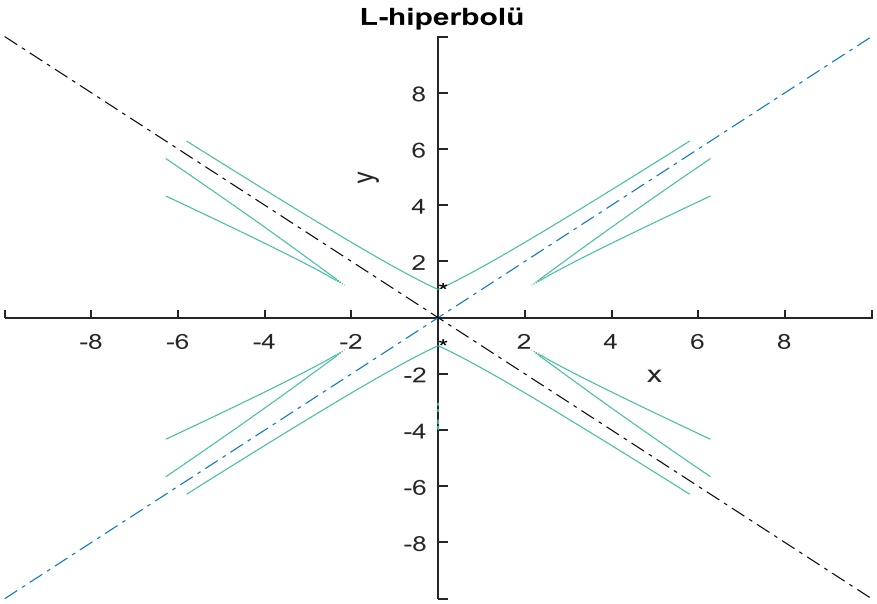


Şekil 3.22 $[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğru olan dörtgensel bölge



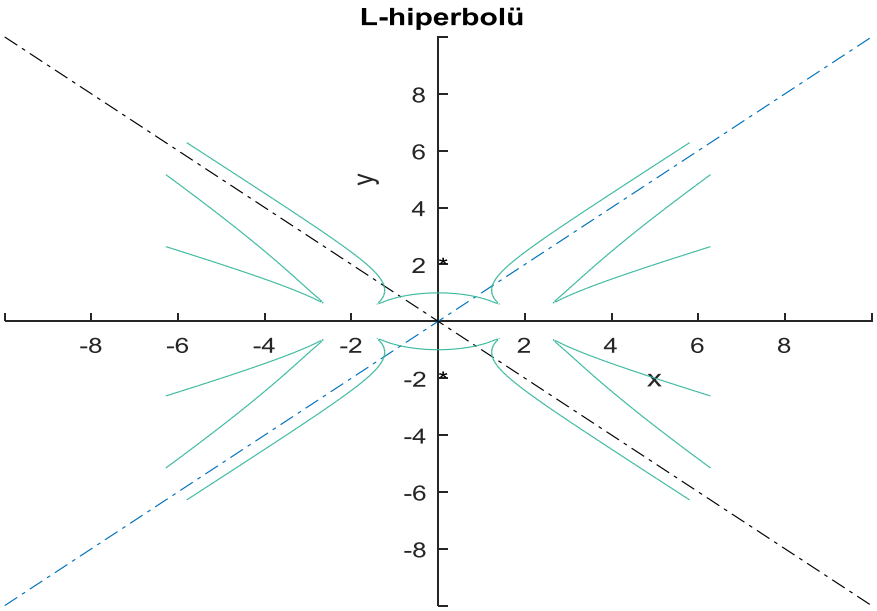
Şekil 3.23 $z = (0,1)$ ve $w = (1,-2)$ $m = -3 < -1$, $y = -1/3x - 1/3$ doğrusu ile $x^2 - y^2 - x - y - 2 = 0$ L-çember parçasının birleşimi

2) $2a = 2d$ iken 6 singüler noktalı timelike L-hiperbolüdür (Şekil 3.24).



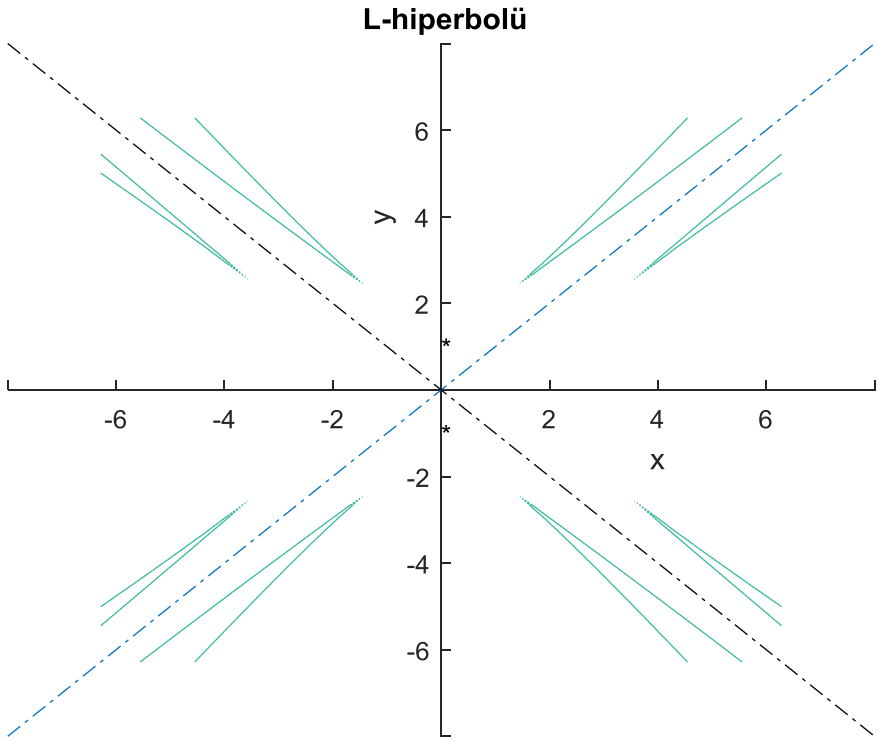
Şekil 3.24 Odakları $z = (0,1)$ ve $w = (0,-1)$, $a = d = 1$ timelike L-hiperbolü

3) $2a < 2d$ iken 8 singüler noktalı timelike L-hiperbolüdür (Şekil 3.25).



Şekil 3.25 Odakları $z = (0,2)$ ve $w = (0,-2)$, $a = 1 < d = 2$ timelike L-hiperbolü

4) $2a > 2d$ iken 8 singüler noktalı timelike L-hiperbolüdür (Şekil 3.26).



Şekil 3.26 Odakları $z = (0,1)$ ve $w = (0,-1)$, $a = 3/2 > d = 1$ timelike L-hiperbolü

3.4 Odak-doğrultman L-Konikleri

Tanım 3.4.1 L^2 düzleminde, verilen bir keyfi $x = (x, y)$ noktasının bir $z = w = (z_1, z_2)$ odak noktasına d_L-uzaklığının, verilen bir $L : ax + by + c = 0$ (doğrultman) doğrusuna d_L-uzaklığına oranı, verilen bir e $(dış\ merkezlik)$ sayısı olan noktaların kümesine odak-doğrultman L-konikleri denir. Yani L^2 düzleminde,

$$\left\{x : \frac{d_L(x,z)}{d_L(x,L)} = e\right\}$$

kümesine odak doğrultman L-koniği denir. Bu konik,

$$e < 1 \; iken \; L - elipsi$$
$$e = 1 \; iken \; L - parabol\text{ü}$$
$$e > 1 \; iken \; L - hiperbol\text{ü}$$

belirtir. Odak-doğrultman L-koniklerinin genel denklemi,

$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} - e\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} = 0 \qquad (3.4.1)$$

olarak ifade edilebilir.

Burada $L : ax + by + c = 0$ (doğrultman) doğrusunun eğimi $m = -{}^{a}/_{b}$ olmak üzere, $|m| = 1$, $m = \infty$ durumlarında dejenere ve dejenere olmayan odak-doğrultman L-konikleri yoktur.

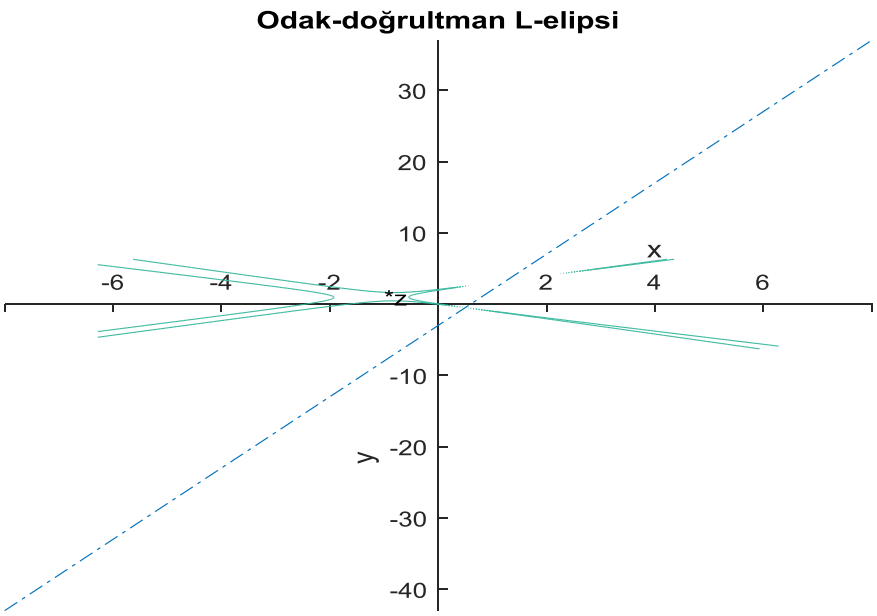
Aşağıda m nin diğer durumları için dejenere olmayan odak-doğrultman L-koniklerine birer örnek verilmiştir.

3.4.1 Odak-doğrultman L-Elipsi

(3.4.1) odak-doğrultman L-konik denkleminde $e < 1$ alınırsa odak-doğrultman L-elipsi elde edilir.

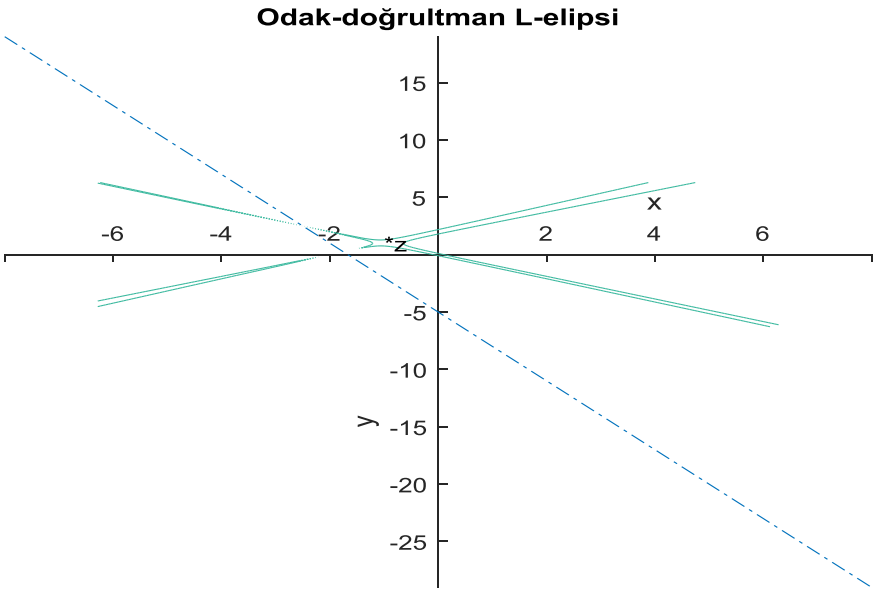
- $|m| > 1$ (timelike)

$1 < m < \infty$ olsun (Şekil 3.27).



Şekil 3.27 $e = 1/3$ ve odak $z = (-1,1)$, doğrultman $l: y - 5x + 3 = 0$, $m = 5$, odak-doğrultman L-elipsi

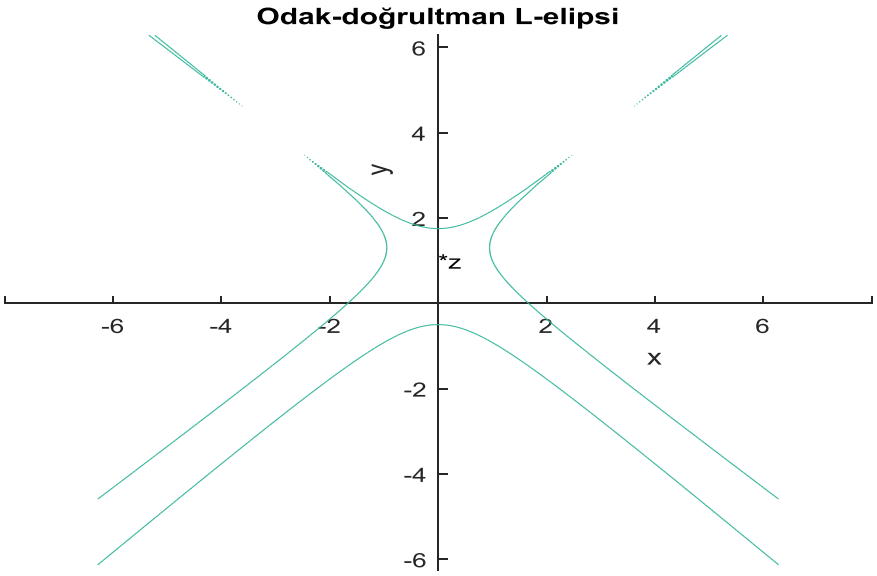
$-\infty < m < -1$ olsun (Şekil 3.28).



Şekil 3.28 $e = 1/4$ ve odak $z = (-1,1)$, doğrultman $l: y + 3x + 5 = 0$, $m = -3$, odak-doğrultman L-elipsi

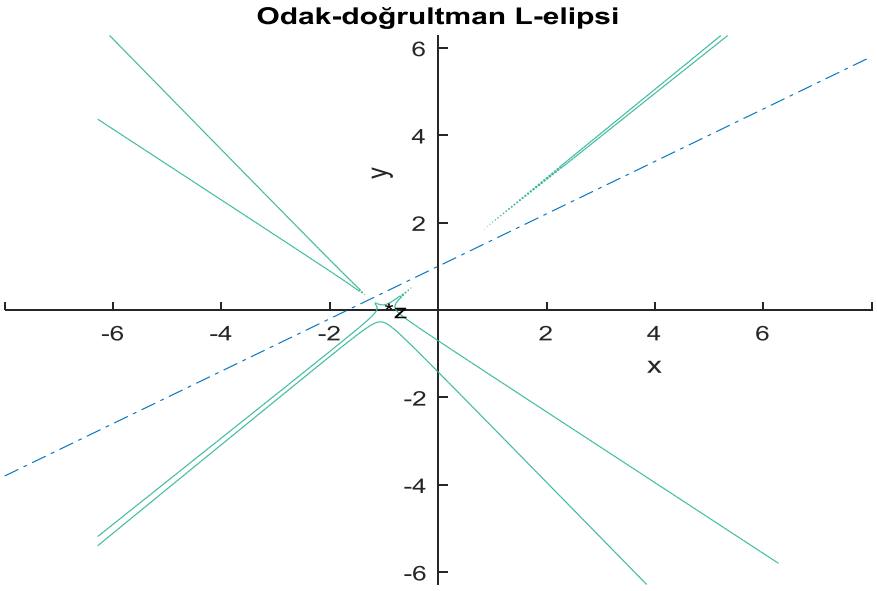
- $|m| < 1$ (spacelike)

$m = 0$ olsun (Şekil 3.29).



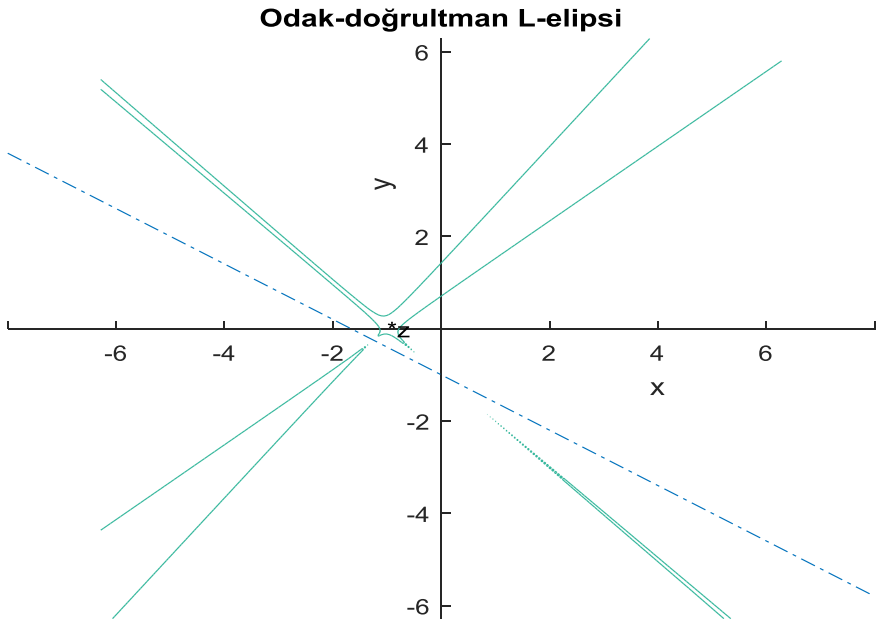
Şekil 3.29 $e = 1/3$ ve odak $z = (0,1)$, doğrultman $l: y - 4 = 0$, $m = 0$, odak-doğrultman L-elipsi

$0 < m < 1$ olsun (Şekil 3.30).



Şekil 3.30 $e = 1/3$ ve odak $z = (-1,0)$, doğrultman $l: 5y - 3x - 5 = 0$, $m = 3/5$, odak-doğrultman L-elipsi

$-1 < m < 0$ olsun (Şekil 3.31).



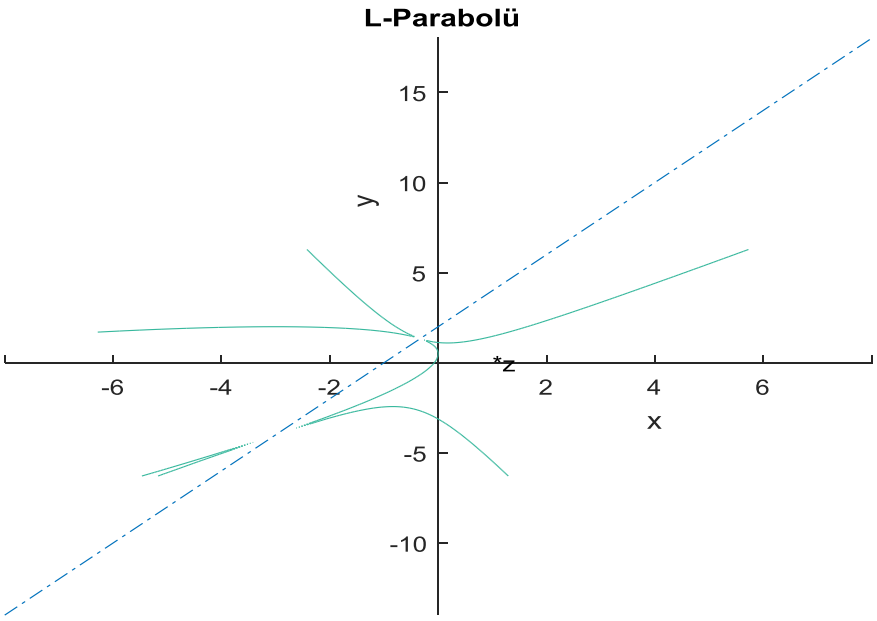
Şekil 3.31 $e = 1/3$ ve odak $z = (-1,0)$, doğrultman $l: 5y + 3x + 5 = 0$, $m = -3/5$, odak-doğrultman L-elipsi

3.4.2 Odak-doğrultman L-Parabolü

(3.4.1) odak-doğrultman L-konik denkleminde $e = 1$ alınırsa odak-doğrultman L-parabolü elde edilir.

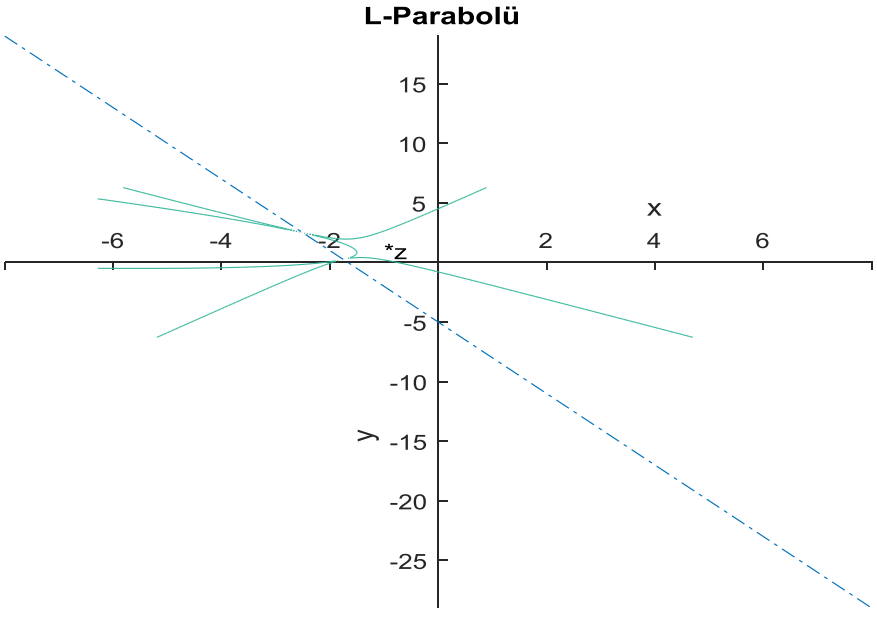
- $|m| > 1$ (timelike) olsun.

$1 < m < \infty$ olsun (Şekil 3.32).



Şekil 3.32 $e = 1$ ve odak $z = (1,0)$, doğrultman $l: y - 2x - 2 = 0$, $m = 2$, L-parabolü

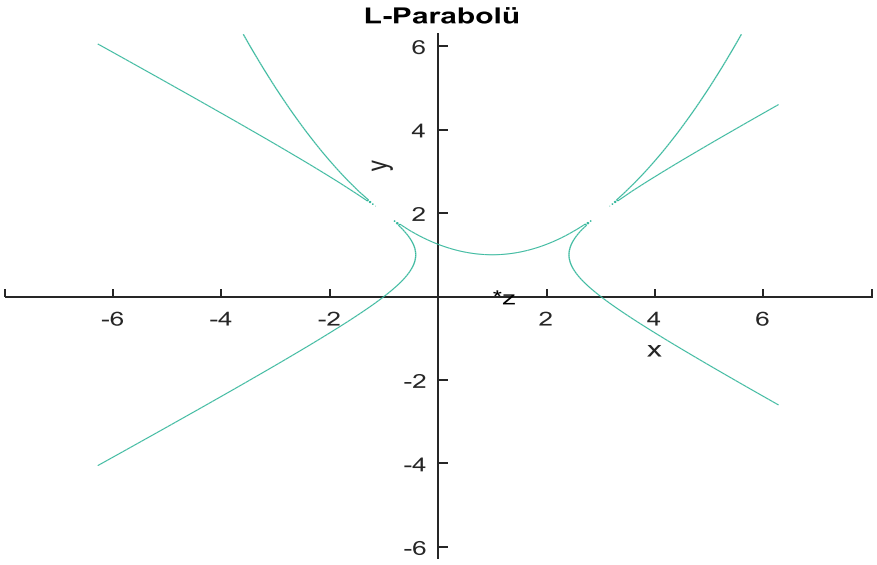
$-\infty < m < -1$ olsun (Şekil 3.33).



Şekil 3.33 $e = 1$ ve odak $z = (-1,1)$, doğrultman $l: y + 3x + 5 = 0$, $m = -3$, L-parabolü

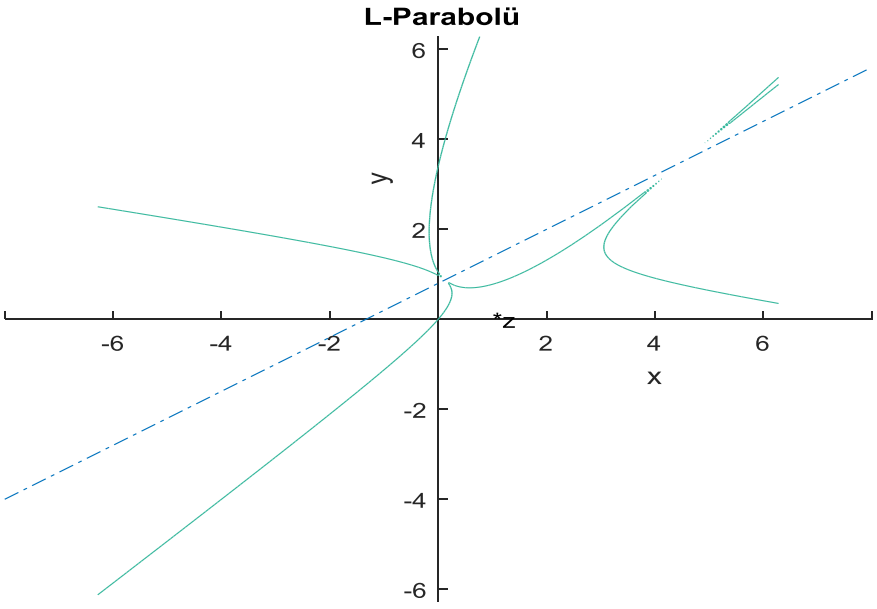
- $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

$m = 0$ olsun (Şekil 3.34).



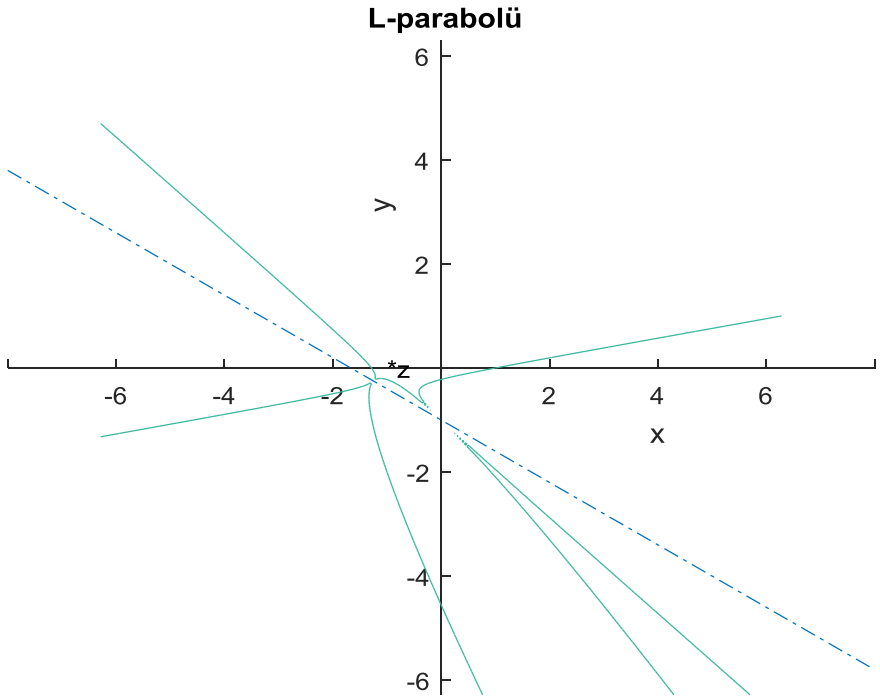
Şekil 3.34 $e = 1$ ve odak $z = (1,0)$, doğrultman $l: y - 2 = 0$, $m = 0$, L-parabolü

$0 < m < 1$ olsun (Şekil 3.35).



Şekil 3.35 $e = 1$ ve odak $z = (1,0)$, doğrultman $l: 5y - 3x - 4 = 0$, $m = 3/5$, L-parabolü

$-1 < m < 0$ olsun (Şekil 3.36).



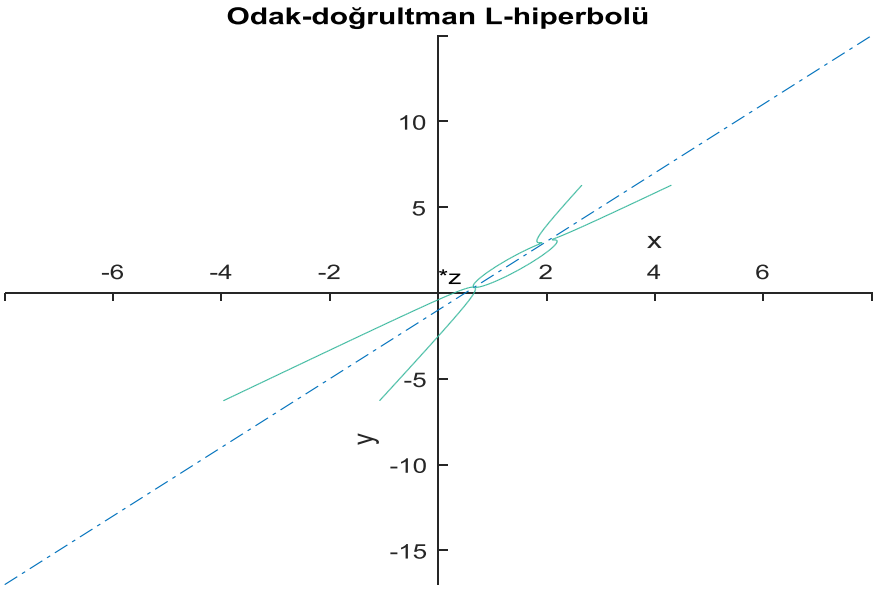
Şekil 3.36 $e = 1$ ve odak $z = (-1,0)$, doğrultman $l: 5y + 3x + 5 = 0$, $m = -3/5$, L-parabolü

3.4.3 Odak-doğrultman L-Hiperbolü

(3.4.1) odak-doğrultman L-konik denkleminde $e > 1$ alınırsa odak-doğrultman L-hiperbolü elde edilir.

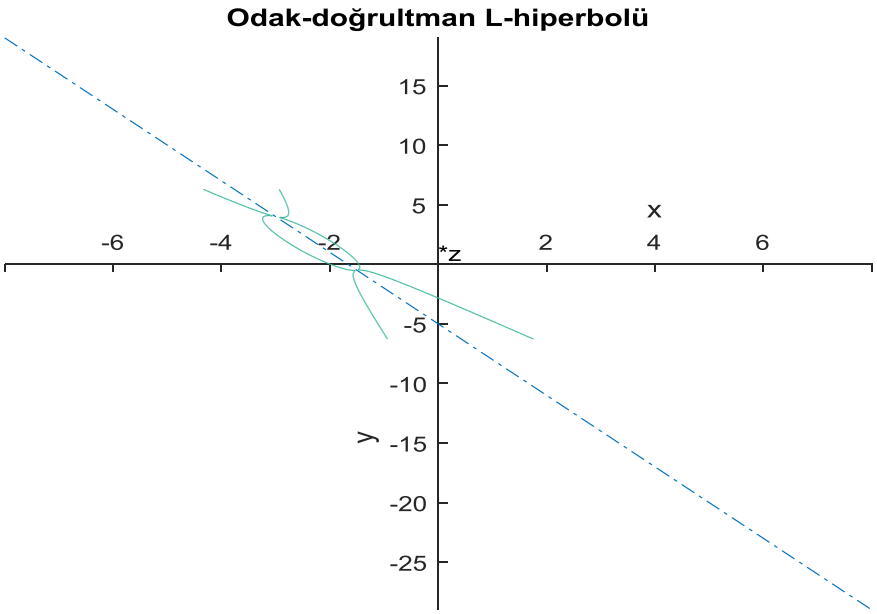
- $|m| > 1$ (timelike) olsun.

$1 < m < \infty$ olsun (Şekil 3.37).



Şekil 3.37 $e = 4$ ve odak $z = (0,1)$, doğrultman $l: y - 2x + 1 = 0$, $m = 2$, odak-doğrultman L-hiperbolü

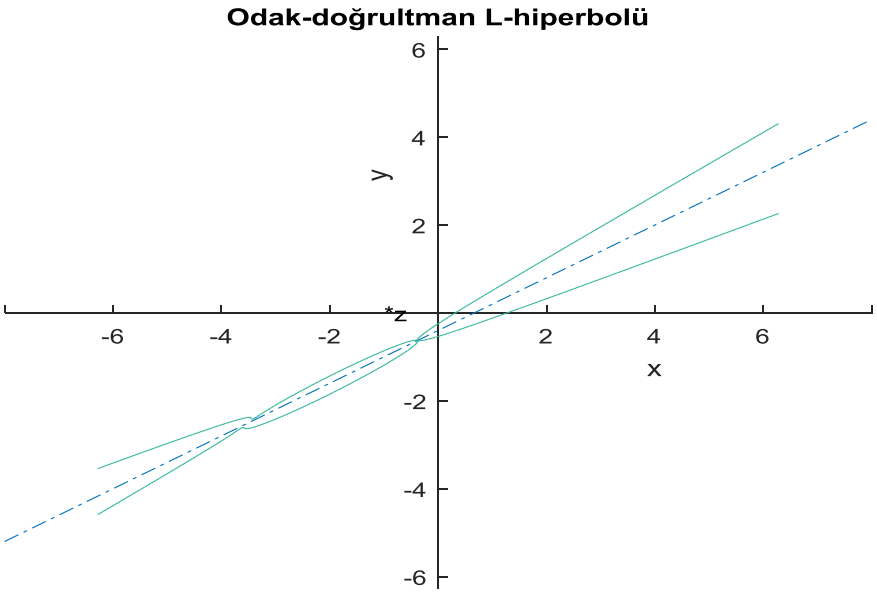
$-\infty < m < -1$ olsun (Şekil 3.38).



Şekil 3.38 $e = 5$ ve odak $z = (0,1)$, doğrultman $l: y + 3x + 5 = 0$, $m = -3$, odak-doğrultman L-hiperbolü

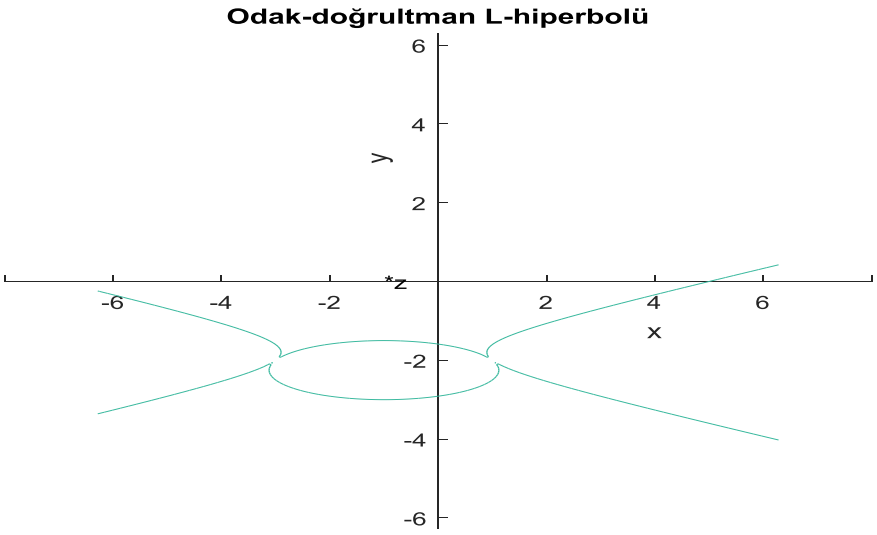
- $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

$0 < m < 1$ olsun (Şekil 3.39).



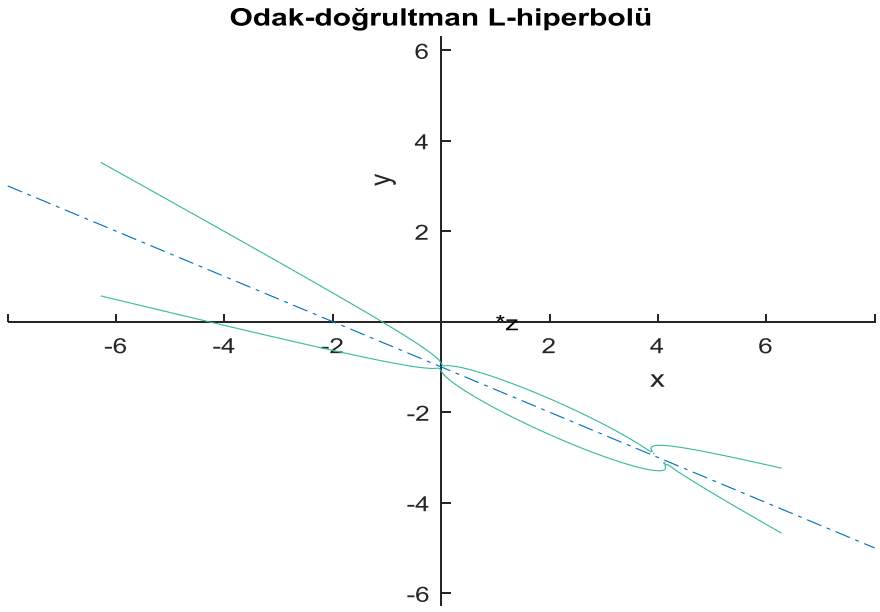
Şekil 3.39 $e = 5$ ve odak $z = (-1,0)$, doğrultman $l: 5y - 3x + 2 = 0$, $m = 3/5$, odak-doğrultman L-hiperbolü

$m = 0$ olsun (Şekil 3.40).



Şekil 3.40 $e = 3$ ve odak $z = (-1,0)$, doğrultman doğrusu $l: y + 2 = 0$, $m = 0$, odak-doğrultman L-hiperbolü

$-1 < m < 0$ olsun (Şekil 3.41).



Şekil 3.41 $e = 4$ ve odak $z = (1,0)$, doğrultman $l: 2y + x + 2 = 0$, $m = -1/2$, odak-doğrultman L-hiperbolü

3.5 Dejenere Odak-doğrultman L-Konikleri

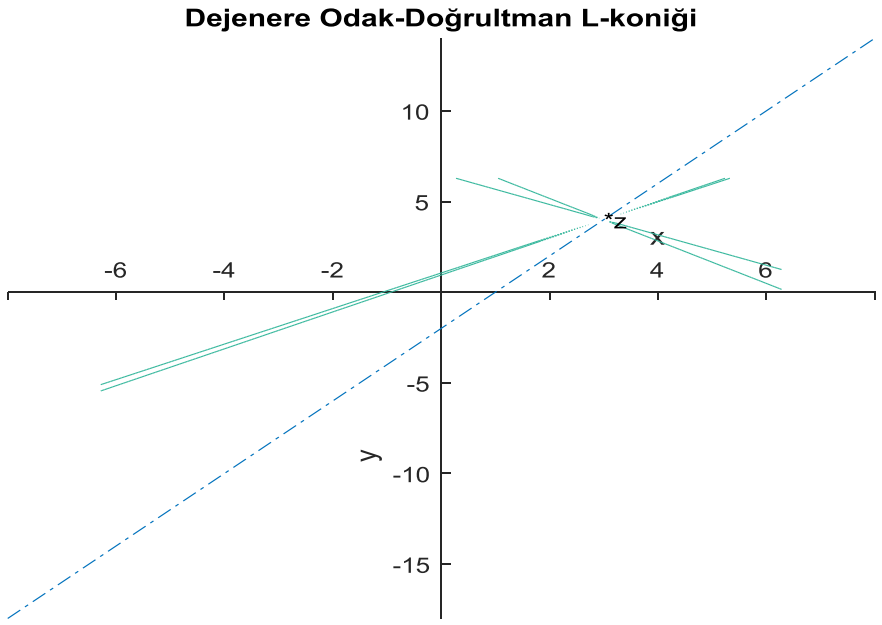
$$\sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} - e\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{|a^2 - b^2|}} = 0$$

denklemi için zoL iken dejenere odak-doğrultman L-konikleri elde edilir. Aşağıda $|m| \neq 1, m \neq \infty,$ durumlarında $e = 1,\ e > 1, e < 1$ için dejenere odak-doğrultman L-koniklerine birer örnek verilmiştir.

Durum I : $0 < e < 1$

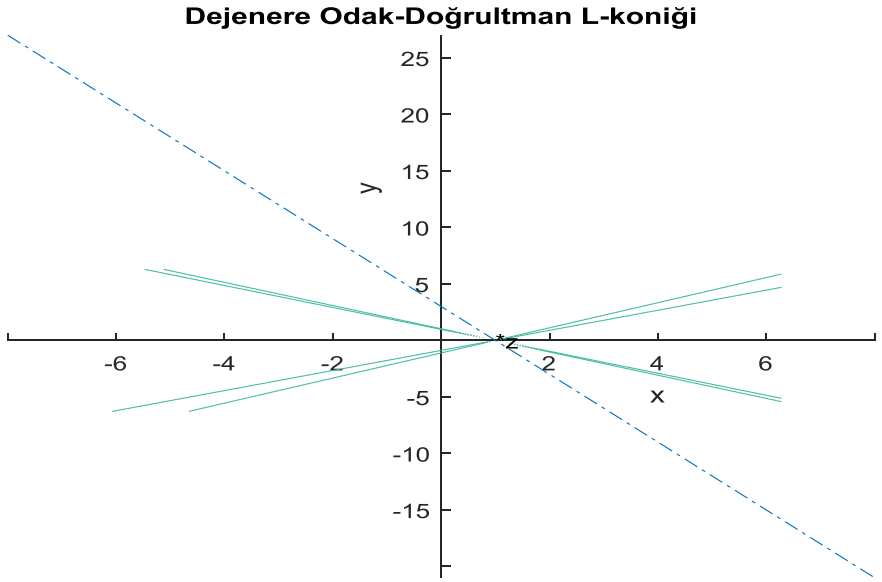
- $|m| > 1$ (timelike) olsun.

$1 < m < \infty$ iken (Şekil 3.42),



Şekil 3.42 $e = 1/3$ ve odak $z = (3,4)$, doğrultman $l: y - 2x + 2 = 0$, $m = 2$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

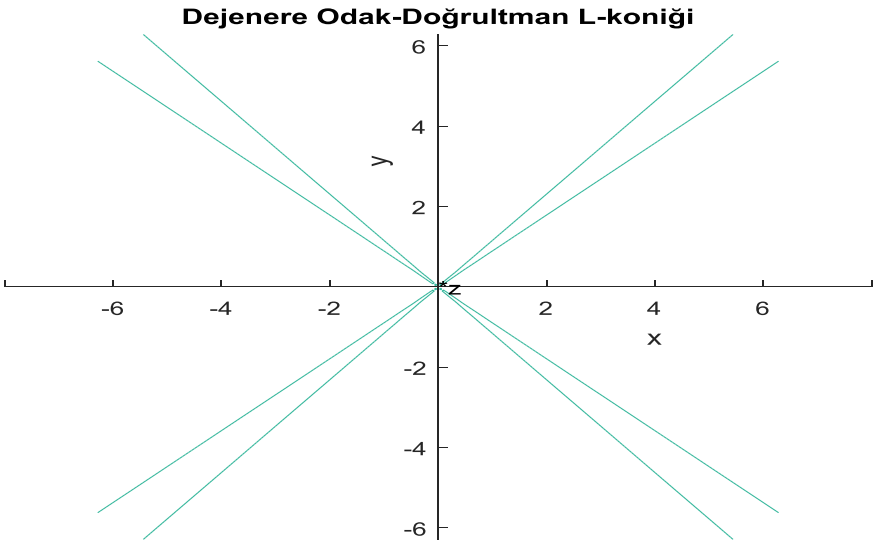
$-\infty < m < -1$ iken (Şekil 3.43),



Şekil 3.43 $e = 1/3$ ve odak $z = (1,0)$, doğrultman $l: y + 3x - 3 = 0$, $m = -3$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

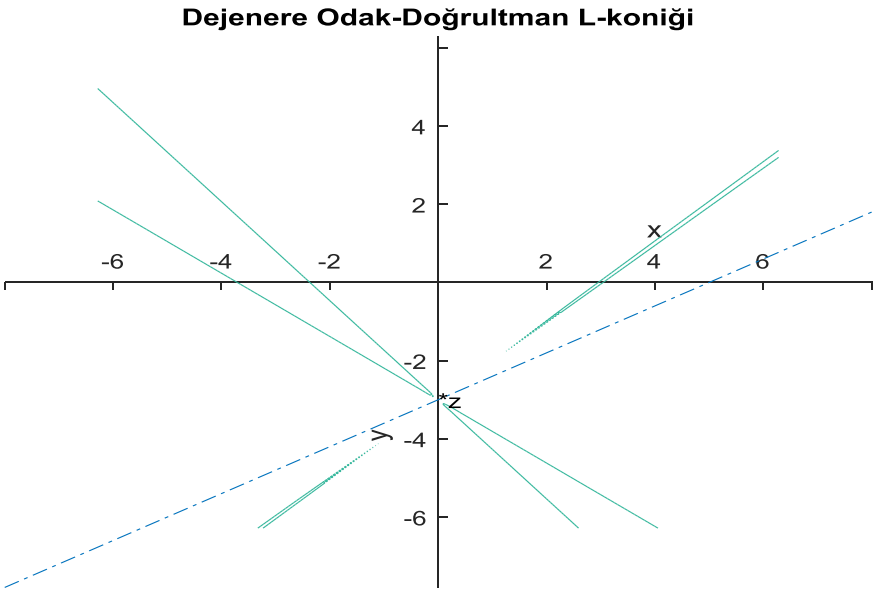
- $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

$m = 0$ iken (Şekil 3.44),



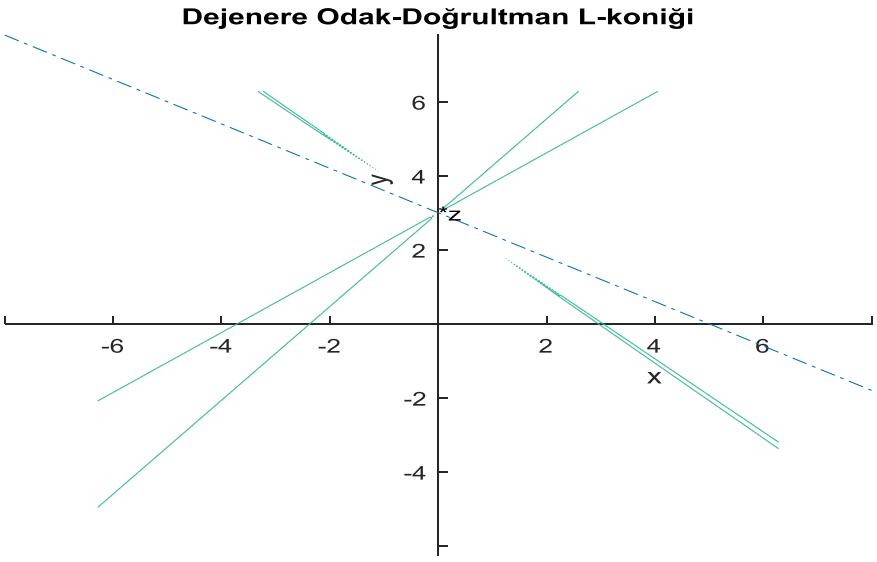
Şekil 3.44 $e = 1/2$ ve odak $z = (0,0)$, doğrultman $l: y = a$, $m = 0$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

$0 < m < 1$ iken (Şekil 3.45),



Şekil 3.45 $e = 1/3$ ve odak $z = (0, -3)$, doğrultman $l: 5y - 3x + 15 = 0$, $m = 3/5$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

$-1 < m < 0$ iken (Şekil 3.46),

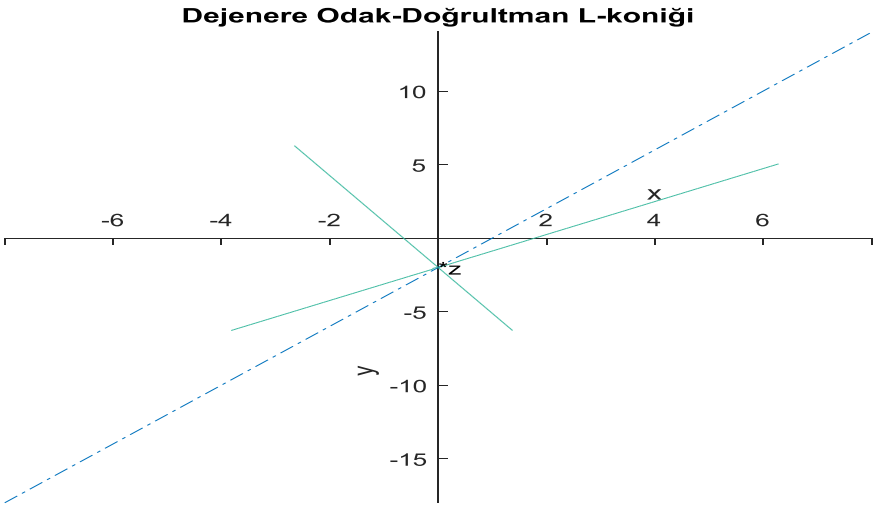


Şekil 3.46 $e = 1/3$ ve odak $z = (0,3)$, doğrultman $l: 5y + 3x - 15 = 0$, $m = -3/5$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

Durum II : $e = 1$

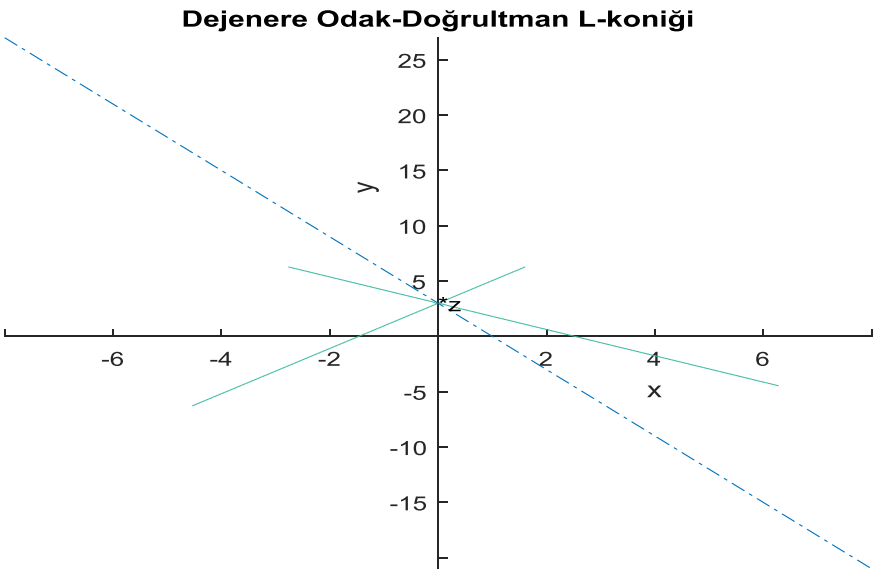
- $|m| > 1$ (timelike) olsun.

$1 < m < \infty$ iken (Şekil 3.47),



Şekil 3.47 $e = 1$ ve odak $z = (0, -2)$, doğrultman $l: y - 2x + 2 = 0$, $m = 2$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

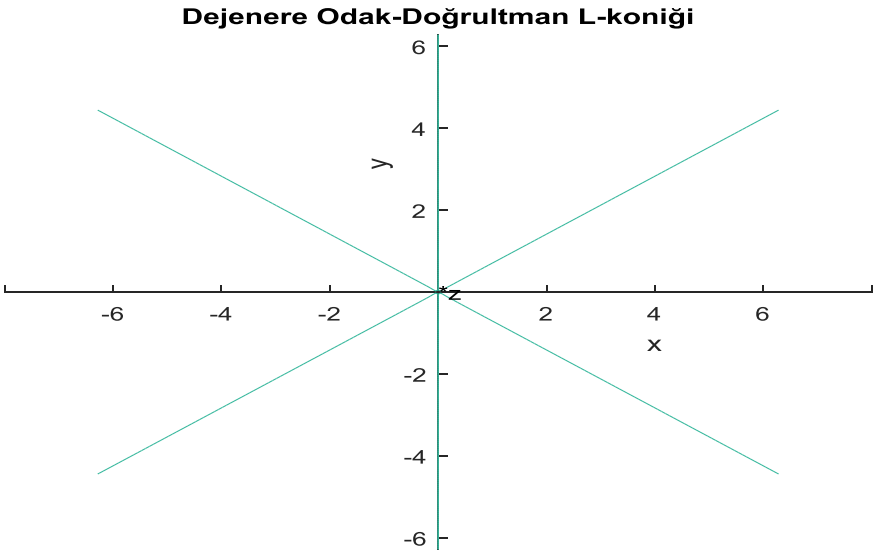
$-\infty < m < -1$ iken (Şekil 3.48),



Şekil 3.48 $e = 1$ ve odak $z = (0,3)$, doğrultman $l: y + 3x - 3 = 0$, $m = -3$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

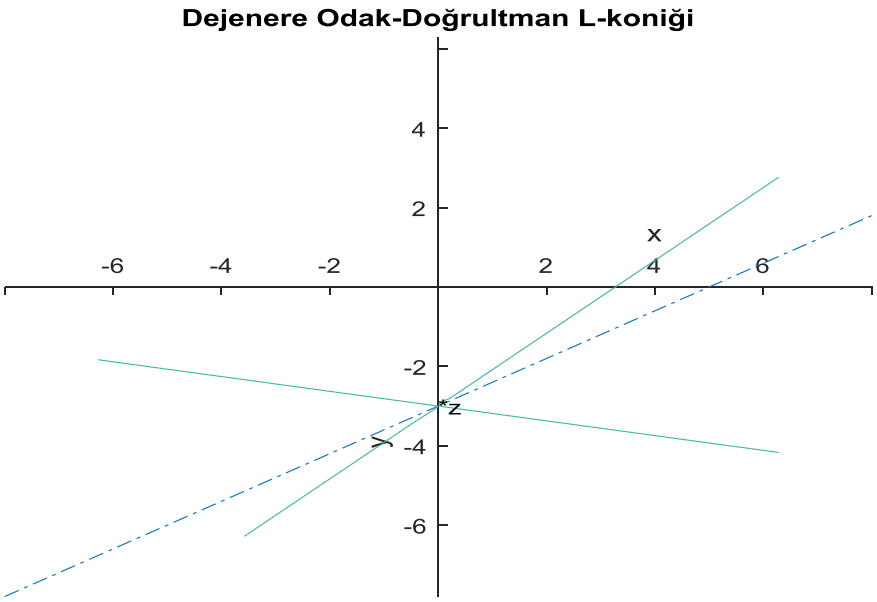
- $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

$m = 0$ iken (Şekil 3.49),



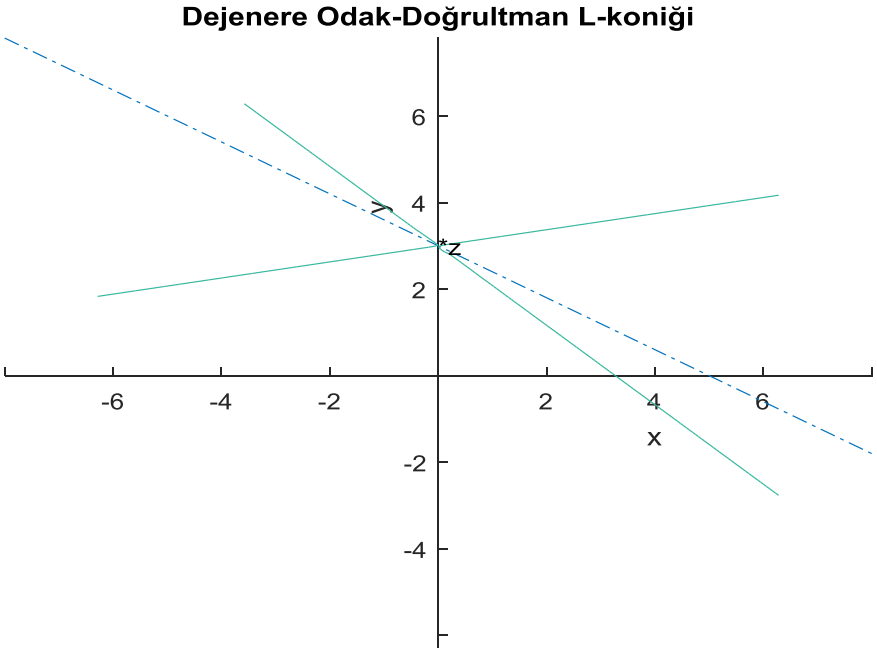
Şekil 3.49 $e = 1$ ve odak $z = (0,0)$, doğrultman $l: y = a$, $m = 0$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

$0 < m < 1$ iken (Şekil 3.50),



Şekil 3.50 $e = 1$ ve odak $z = (0, -3)$, doğrultman $l: 5y - 3x + 15 = 0$, $m = 3/5$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

$-1 < m < 0$ iken (Şekil 3.51),

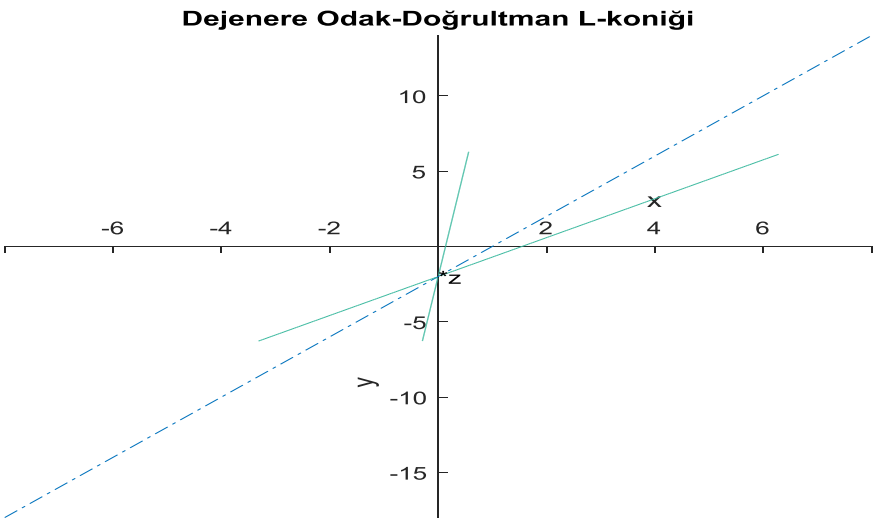


Şekil 3.51 $e = 1$ ve odak $z = (0,3)$, doğrultman $l: 5y + 3x - 15 = 0$, $m = -3/5$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

Durum III : $e > 1$

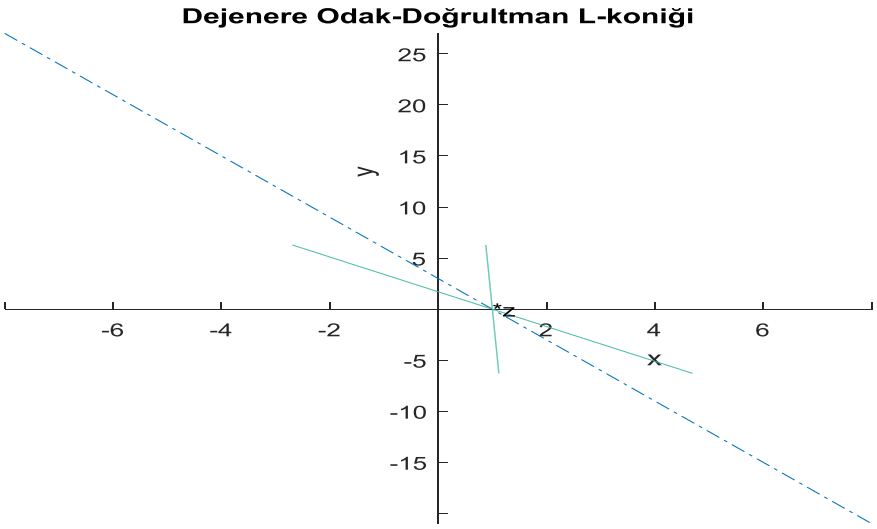
- $|m| > 1$ (timelike) olsun.

$1 < m < \infty$ iken (Şekil 3.52)



Şekil 3.52 $e = 2$ ve odak $z = (0, -2)$, doğrultman $l: y - 2x + 2 = 0$, $m = 2$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

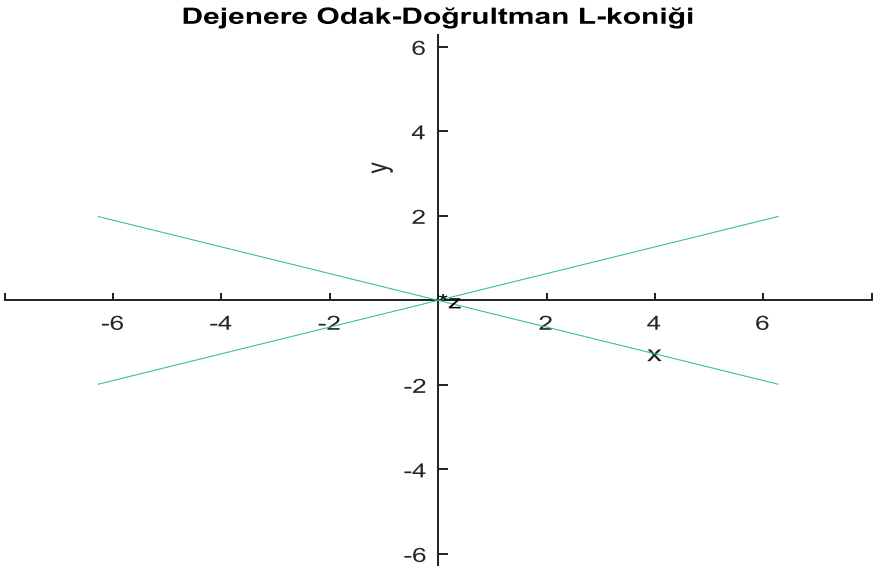
$-\infty < m < -1$ iken (Şekil 3.53),



Şekil 3.53 $e = 3$ ve odak $z = (1,0)$, doğrultman $l: y + 3x - 3 = 0$, $m = -3$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

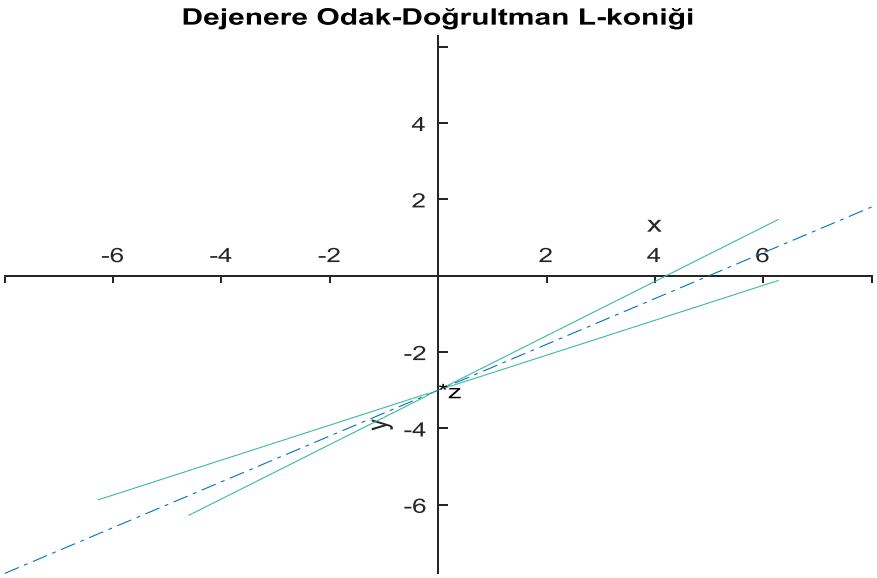
- $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

$m = 0$ iken (Şekil 3.54),



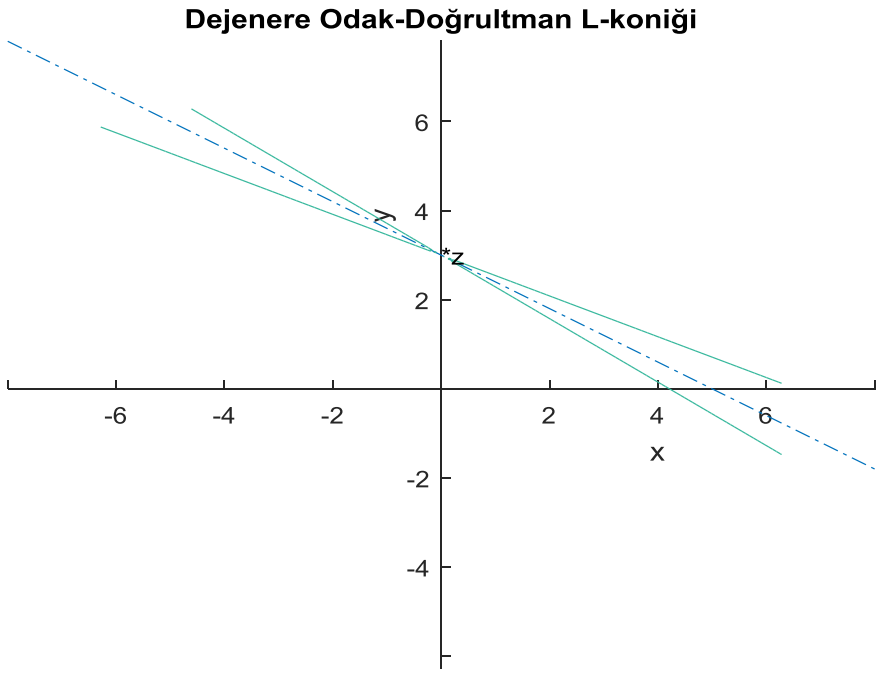
Şekil 3.54 $e = 3$ ve odak $z = (0,0)$, doğrultman $l: y = a$, $m = 0$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

$0 < m < 1$ iken (Şekil 3.55),



Şekil 3.55 $e = 5$ ve odak $z = (0, -3)$, doğrultman $l: 5y - 3x + 15 = 0$, $m = 3/5$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

$-1 < m < 0$ iken (Şekil 3.56),



Şekil 3.56 $e = 5$ ve odak $z = (0,3)$, doğrultman $l: 5y + 3x - 15 = 0$, $m = -3/5$, dejenere odak-doğrultman L-koniği

4. LORENTZ - MİNKOWSKİ DÜZLEMİNDE CASSİNİ EĞRİLERİ

L^2 düzlemindeki Cassini eğrilerini, Öklid düzlemindeki Cassini eğrilerine benzer şekilde tanımlayabiliriz. Yani düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıları çarpımı sabit olan noktaların geometrik yeridir. Bu düzlemdeki Cassini eğrileri L-Cassini eğrileri olarak adlandırılsın.

Tanım 4.1 L^2 düzleminde $x = (x, y)$ keyfi bir nokta, $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ sabit odak noktaları olmak üzere; L-Cassini eğrilerinin denklemi,

$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|.|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = a^4 \tag{4.1}$$

bulunur. Odaklar arası uzaklık $2d$ olmak üzere,

$$2d = \sqrt{|(z_1 - w_1)^2 - (z_2 - w_2)^2|} \tag{4.2}$$

bulunur. L^2 düzleminde $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m olsun. L-Cassini eğrilerini $|m| > 1$ ise timelike L-Cassini eğrisi, $|m| < 1$ ise spacelike L-Cassini eğrisi, $|m| = 1$ ise lightlike L-Cassini eğrisi olarak adlandırıcağız.

Teorem 4.1 L^2 düzleminde $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ odaklarının konumu ve $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, a ve $2d = d_L(z, w)$ katsayılarının alacağı değerlere göre L-Cassini eğrisi aşağıdaki Tablo 4.1 de verilen geometrik yerlerden biridir:

z, w	α, d	Geometrik Yer
$z = w$	α = 0	$z = w = (z_1, z_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular
$z \neq w$		$[z, w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğrular olan dörtgensel bölge veya $z = (z_1, z_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $w = (w_1, w_2)$ merkezli L-çemberinin birleşimi veya $w = (w_1, w_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $z = (z_1, z_2)$ merkezli L-çemberinin birleşimi
$z = w$	α > 0	$z = w = (z_1, z_2)$ merkezli ve a yarıçaplı L-çemberi
$\|m\| = 1$	α = d = 0	Odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru veya $z = (z_1, z_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $w = (w_1, w_2)$ merkezli L-çemberinin birleşimi veya $w = (w_1, w_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $z = (z_1, z_2)$ merkezli L-çemberinin birleşimi
	α > d = 0	Lightlike L-Cassini eğrisi
	$\alpha < d = 0$	Boş küme
$\|m\| > 1$	Tüm durumlar	Timelike L-Cassini eğrisi
$\|m\| < 1$	Tüm durumlar	Spacelike L-Cassini eğrisi

Tablo 4.1 Farklı Durumlarda İki Odaklı L-Cassini eğrisi İncelemeleri

İspat: L-Cassini eğrileri için farklı durumlar söz konusudur.

I) $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ odaklarının bazı özel durumlarını inceleyelim.

I_1) $z = w$ ve $\alpha = 0$ olsun.

Çözüm :

$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|^2=0$$
$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|=0$$
$$(x-z_1)^2=(y-z_2)^2$$
$$x-z_1=\ y-z_2\ \wedge\ -x+z_1=y-z_2$$
$$\mathrm{y}=\ x+z_2-\ z_1\ \wedge\ \mathrm{y}=-\mathrm{x}+z_2+z_1$$

$z=w=(z_1,z_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrularıdır.

I_2) $z\neq w$ ve $a=0$ olsun. Bu durumda

$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|.|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|=0$$

denklemi bulunur. Burada iki durum söz konusudur. Şimdi bu iki durumu inceleyelim.

Çözüm 1:

$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|=\ 0\ \wedge\ |(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|=0$$
$$(x-z_1)^2=(y-z_2)^2\ \wedge\ (x-w_1)^2=(y-w_2)^2$$
$$(x-z_1)^2=(y-z_2)^2\ \wedge\ (x-w_1)^2=(y-w_2)^2$$
$$x-z_1=y-z_2\ \wedge\ -x+z_1=y-z_2\ \wedge\ x-w_1=\ y-w_2\ \wedge\ -x+w_1=y-w_2$$
$$y=x+z_2-z_1\ \wedge\ y=-x+z_2+z_1\ \wedge\ y=\ x+w_2-w_1\ \wedge\ y=\ -x\ +\ w_2+w_1$$

$[z,w]$ köşegenli kenarları lightlike (null) doğrular olan dörtgensel bölgedir.

Çözüm 2:

$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|.|(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|=0$$
$$|(x-z_1)^2-(y-z_2)^2|=0\ \ \vee\ \ |(x-w_1)^2-(y-w_2)^2|=0$$
$$(x-z_1)^2=(y-z_2)^2\ \ \vee\ \ (x-w_1)^2=(y-w_2)^2$$
$$(y-z_2=x-z_1\wedge y-z_2=-x+z_1)\vee(\ y-w_2=x-w_1\wedge y-w_2=-x+w_1)$$
$$(y=x+z_2-z_1\wedge y=-x+z_2+z_1)\vee(y=x+w_2-w_1\wedge y=-x+w_2+w_1)$$

$z = (z_1, z_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $w = (w_1, w_2)$ merkezli L-çemberinin birleşimi veya $w = (w_1, w_2)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $z = (z_1, z_2)$ merkezli L-çemberinin birleşimidir.

II) $z = w$ ve $\alpha > 0$ olsun.

Çözüm : $$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|^2 = \alpha^4$$
$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| = \alpha^2$$

$z = w = (z_1, z_2)$ merkezli ve a yarıçaplı L-çemberidir.

III) $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, $2a$ ve $2d = d_L(z, w)$ değerlerine göre,

$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| . |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = a^4$$

denkleminden aşağıdaki durumlar incelenir.

a) Aşağıdaki durumların her birinde (4.1) denkleminin çözüm kümesi boş kümedir.

- $|x - z_1| = |y - z_2|$ ve $|x - w_1| = |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| > |y - z_2|$ ve $|x - w_1| = |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| < |y - z_2|$ ve $|x - w_1| = |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| = |y - z_2|$ ve $|x - w_1| > |y - w_2|$ olsun.
- $|x - z_1| = |y - z_2|$ ve $|x - w_1| < |y - w_2|$ olsun.

b) $|x - z_1| > |y - z_2|$ ve $|x - w_1| > |y - w_2|$ olsun.

Çözüm : $[(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2] . [(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2] = a^4$

denklemli L-Cassini eğri parçasıdır.

c) $|x-z_1| > |y-z_2|$ ve $|x-w_1| < |y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $[(x-z_1)^2-(y-z_2)^2].[(y-w_2)^2-(x-w_1)^2] = a^4$

denklemli L-Cassini eğri parçasıdır.

d) $|x-z_1| < |y-z_2|$ ve $|x-w_1| > |y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $[(y-z_2)^2-(x-z_1)^2].[(x-w_1)^2-(y-w_2)^2] = a^4$

denklemli L-Cassini eğri parçasıdır.

e) $|x-z_1| < |y-z_2|$ ve $|x-w_1| < |y-w_2|$ olsun.

Çözüm : $[(y-z_2)^2-(x-z_1)^2][(y-w_2)^2-(x-w_1)^2] = a^4$

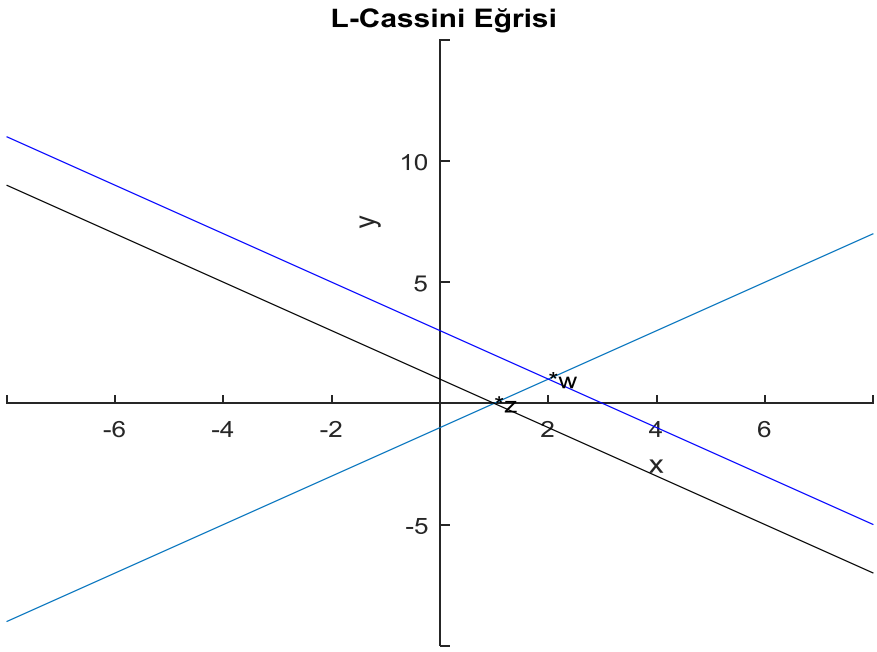
denklemli L-Cassini eğri parçasıdır.

Böylece (4.1) denkleminin çözümleri bütün haller için incelenmiş oldu.

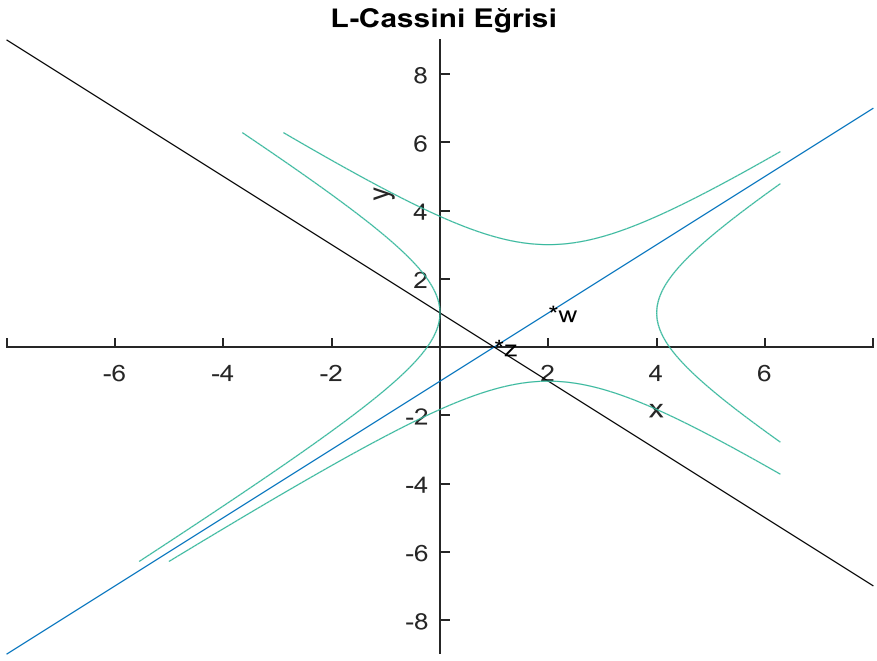
Aşağıda (4.1) denklemiyle verilen L-Cassini eğrilerinin şekilleri $\overleftrightarrow{zw}$ doğrusunun (asal eksenin) eğimi m, a ve $2d = d_L(z,w)$ nin alacağı değerlere göre birer örnek gösterilmiştir.

Durum I : $|m| = 1$ (lightlike) olsun.

1) $a = d = 0$ iken (Şekil 4.1, Şekil 4.2),

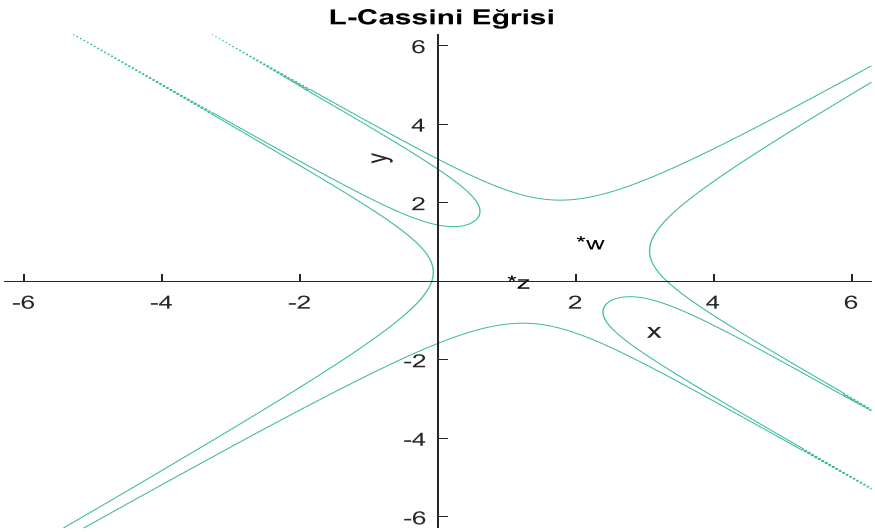


Şekil 4.1 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (2,1)$, $a = d = 0$, z ve w odakların en az birinden geçen üç lightlike (null) doğru



Şekil 4.2 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (2,1)$, $a = d = 0$, $z = (1,0)$ odak noktasında kesişen lightlike (null) doğrular ile $w = (2,1)$ merkezli L-çemberinin birleşimi

2) $a > d = 0$ iken (Şekil 4.3),

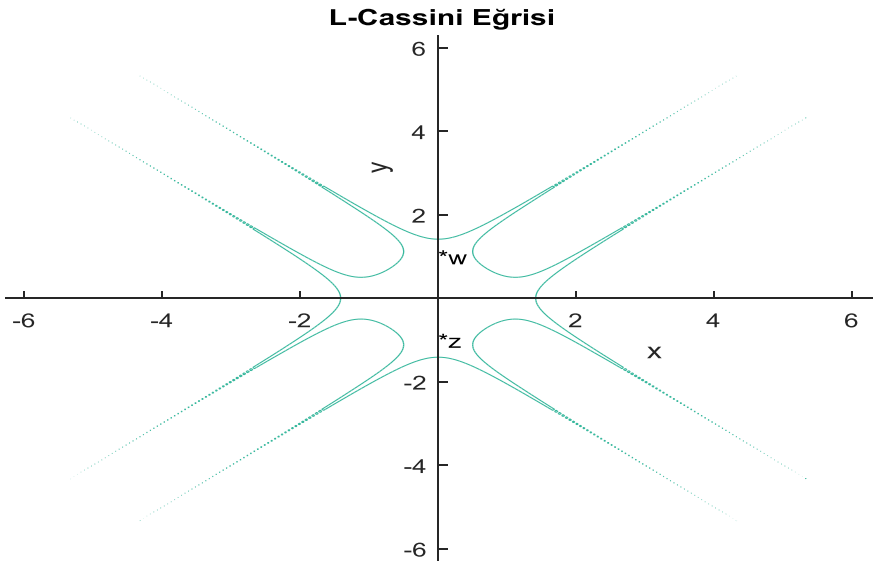


Şekil 4.3 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (2,1)$, $a = \sqrt{2} > d = 0$ lightlike L-Cassini Eğrisi

3) $a < d = 0$ iken çözüm boş kümedir.

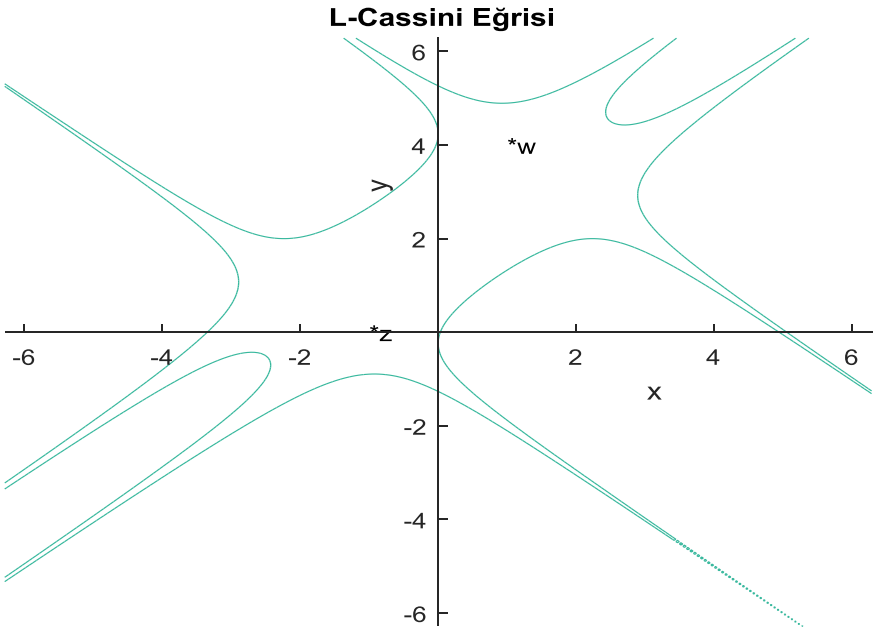
Durum II : $|m| > 1$ (timelike) olsun.

1) $a = d$ iken (Şekil 4.4),



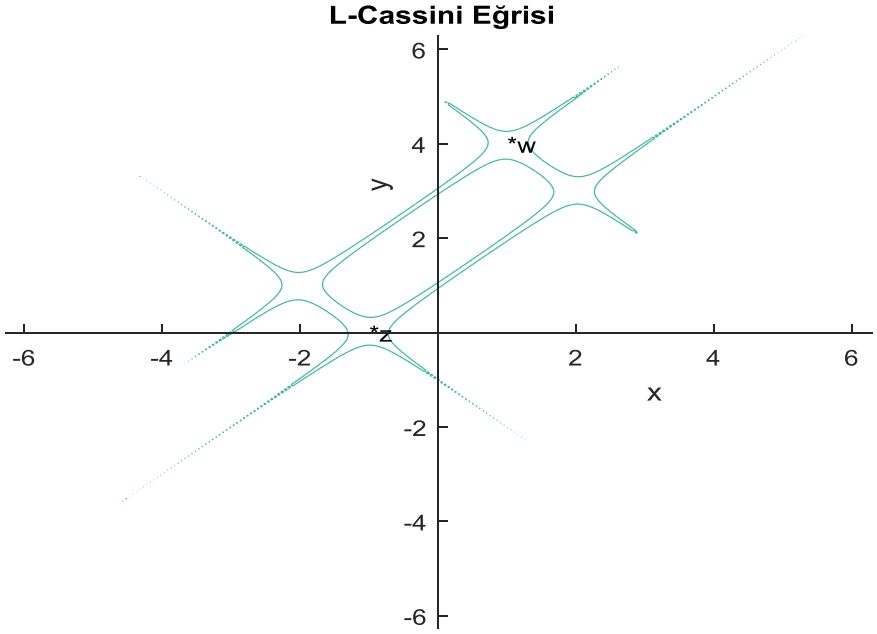
Şekil 4.4 Odakları $z = (0,-1)$ ve $w = (0,1)$, $a = d = 1$ timelike L-Cassini Eğrisi

2) $a > d$ iken (Şekil 4.5),



Şekil 4.5 Odakları $z = (-1,0)$ ve $w = (1,4)$, $a = 2 > d = \sqrt{3}$ timelike L-Cassini Eğrisi

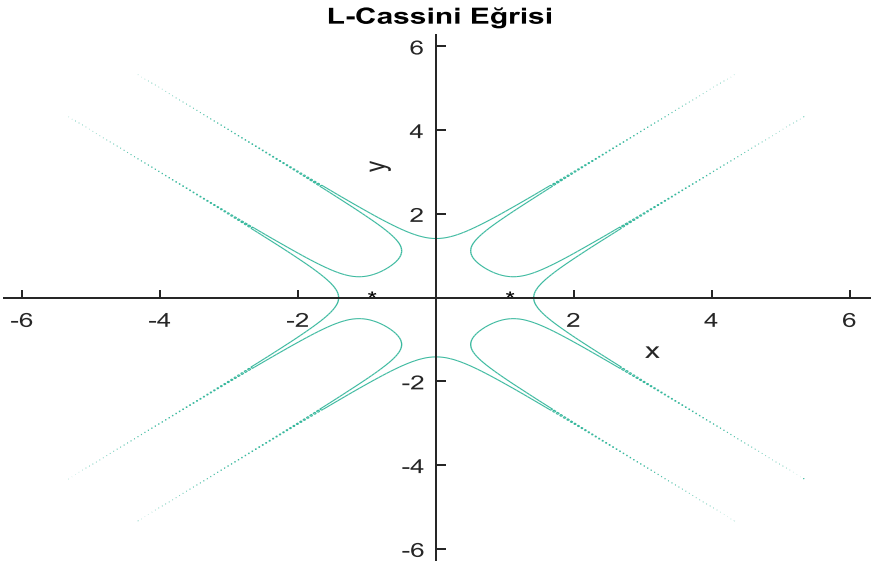
3) $a < d$ iken (Şekil 4.6),



Şekil 4.6 Odakları $z = (-1,0)$ ve $w = (1,4)$, $a = 1 < d = \sqrt{3}$ timelike L-Cassini Eğrisi

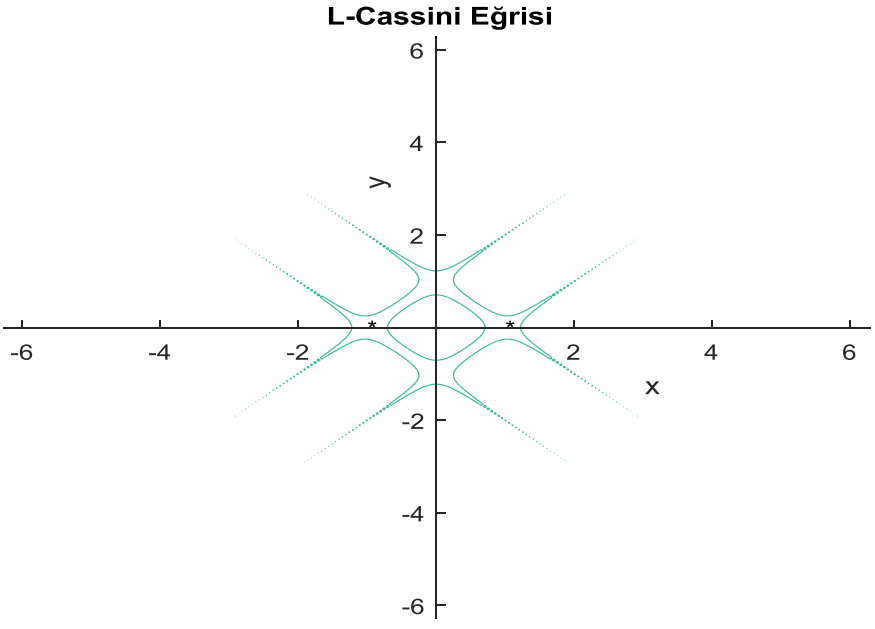
Durum III : $|m| < 1$ (spacelike) olsun.

1) $a = d$ iken (Şekil 4.7),



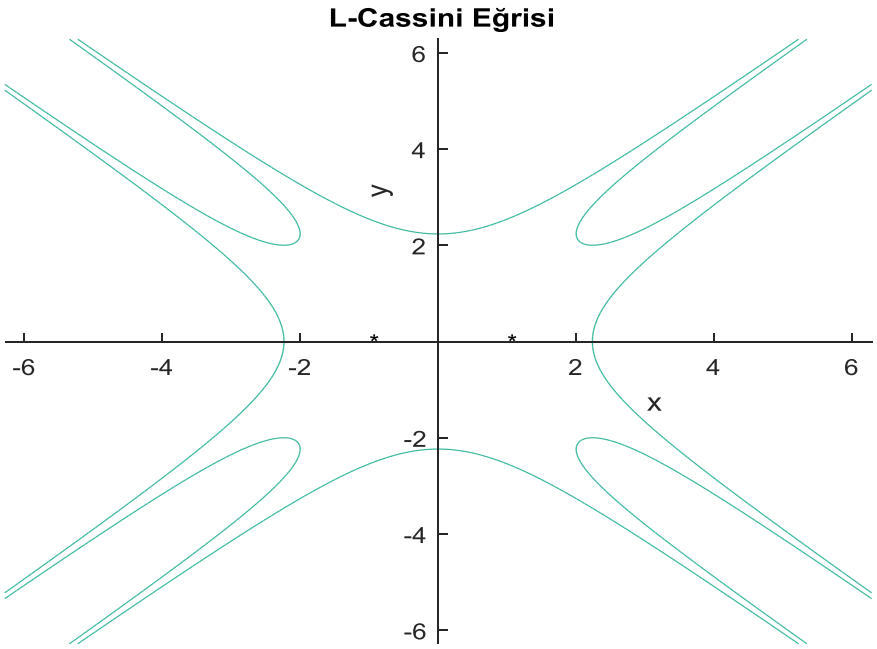
Şekil 4.7 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = d = 1$ spacelike L-Cassini Eğrisi

2) $a < d$ iken (Şekil 4.8),



Şekil 4.8 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = 1/\sqrt{2} < d = 1$ spacelike L-Cassini Eğrisi

3) $a > d$ iken (Şekil 4.9),



Şekil 4.9 Odakları $z = (1,0)$ ve $w = (-1,0)$, $a = 2 > d = 1$ spacelike L-Cassini Eğrisi

5. KAYNAKLAR

Balcı, M. (2012). Analitik Geometri. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul.

Baronti, M., Casini, E. and Franchetti, C. (2012). The size of a Minkowski ellipse that contains the unit ball. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, **385:** 278–284.

Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E. and Zampetti, P. (2008). The Mathematics of Minkowski Space-Time. Birkhäuser Verlag AG, Basel.

Fankhänel, A. (2012). On conics in Minkowski planes. *Extracta Mathematicae*, **27:** 13–29.

Gibson, C.G. (2003). Elemantary Euclidean Geometry an introduction. Cambridge University Press, New York.

Hacısalihoğlu, H.H. (1990). 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri. Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Horváth, A.G. and Martini, H. (2011). Conics in normed planes. *Extracta Mathematicae*, **26:** 29–43.

Kaya, R. (1988). Analitik Geometri. Anadolu Üniversitesi Eğitim Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayınları, Eskişehir.

Martini, H. and Wu, S. (2014). Classical curve theory in normed planes. *Computer Aided Geometric Design*, **31:** 373-397.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity. Academic Press, London.

Ratchlife, J.G. (1994). Foundations of hyperbolic manifolds. Springer Verlag, Berlin.

Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferansiyel Geometri. Nobel Basımevi, Ankara.

Shonoda, E.N. (2015). Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane. *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* **24:** 270-278.

Wu, S., Donghai, J. and Romero, J.A. (2005). Metric ellipses in Minkowski planes. *Extracta Mathematicae,* **20:** 273–280.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Abdulaziz AÇIKGÖZ

Doğum Yeri ve Tarihi : Vezirköprü/1988

Yabancı Dili : İngilizce

İletişim (Telefon/e-posta) : 0534 288 17 24 / abdulaziztiki@windowslive.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Vezirköprü Lisesi
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	:	

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Yayınları (SCI ve diğer) :

Diğer konular :