T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK UZAYLARDA STRONGLY θ-PRE SÜREKLİ ÇOĞUL-DEĞERLİ FONKSİYONLAR

AYŞE NAZLI ÜRESİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK UZAYLARDA STRONGLY θ-PRE SÜREKLİ ÇOĞUL-DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Ayşe Nazlı ÜRESİN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN
2007, 39 Sayfa

Bu çalışmada, çoğul-değerli fonksiyonlar için üstten ve alttan strong θ-pre süreklilik kavramını, T. Noiri'nin [18] tanımladığı strong θ-pre sürekliliğin bir genişlemesi olarak tanıttık. Bu amaca yönelik olarak çalışma üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, konunun uygulamalarıyla ilgili genel bilgilere değinilmiştir. İkinci bölümde, strongly θ-pre sürekli fonksiyon tanımı ve bu fonksiyonların temel özellikleri verilmiştir. Son bölümde, üstten ve alttan strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli fonksiyon kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca, üstten ve alttan strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli fonksiyonların temel karakterizasyonları ve özellikleri elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: pre-θ-açık küme, pre açık küme, pre kapanış, strongly θ-pre süreklilik, çoğul-değerli fonksiyon.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

STRONGLY θ-PRE CONTINUOUS MULTIFUNCTIONS IN TOPOLOGICAL SPACES

Ayşe Nazlı ÜRESİN

Selcuk University
Graduate School of Natural Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN
2007, 39 pages

In this study, we introduced the concept of upper and lower strong θ-pre continuity for multifunctions as an extension of the notion of strong θ-pre continuity due to Noiri [18]. For this purpose; the study includes three sections. In the first section, general knowledge about the subject is touched. In the second section; definition and basic properties of strongly θ-pre continuous functions are given. In the last section, the concept of upper and lower strongly θ-pre continuous multifunction is defined. Also, their basic characterizations and properties are obtained.

Keywords: pre-θ-open set, pre open set, pre closure, strongly θ-pre continuity, multifunction.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN danışmanlığında yapılmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yaptığım çalışmalarda bana her türlü desteği veren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN'e teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET……...iii

ABSTRACT……iv

ÖNSÖZ……v

İÇİNDEKİLER……....vi

SİMGELER…….....vii

1. GİRİŞ……1

2. TEMEL KAVRAMLAR…….....2

2. 1. Pre Açık (Kapalı), θ-Açık (Kapalı), Semi Açık (Kapalı), α-Açık Kümeler…..2

2. 2. Bazı Özel Topolojik Uzay Türleri……4

2. 3. Çoğul-Değerli Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Temel Kavramlar……..6

3. PRE-θ-AÇIK KÜMELER VE STRONGLY θ-PRE SÜREKLİLİK…….8

3. 1. Pre-θ-açık Kümeler ve Strongly θ-Pre Sürekli Fonksiyonlar……8

3. 2. Strongly θ-Pre Sürekli Çoğul-Değerli Fonksiyonlar…….18

4. SONUÇ VE ÖNERİLER……36

5. KAYNAKLAR……...37

SİMGELER

Tez metni içinde geçen küme isimleri (pre açık, semi açık, vb.) literatürdeki isimleri ile aynen kullanılmıştır.

Bu çalışmada kullanılmış, fakat tez metni içinde açıklanmamış simgeler, açıklamalarıyla birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamaları**
int(A)	A kümesinin içi
$cl(A)$	A kümesinin kapanışı
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
$\Rightarrow$	Gerek şart
$\forall$	Her
$f \mid U_\lambda$	Kısıtlanmış fonksiyon
$F \mid U_\lambda$	Kısıtlanmış çoğul-değerli fonksiyon
τ	Topoloji
$\Leftarrow$	Yeter şart

1. GİRİŞ

Süreklilik kavramı, matematikte en önemli konulardan biridir. Yakın zamanda, birçok matematikçi ve fizikçi [8], [9], [10], [11] topolojik uzaylarda fonksiyonların sürekliliği hakkında araştırmalar yapmıştır. Ayrıca, süreklilik kavramı dijital topolojiye de uygulanıp, dijital sürekli fonksiyonların çeşitli özellikleri incelenmiştir [27].

Bu çalışmanın amacı ise; T. Noiri'nin [18] tanımladığı ve S. H. Cho'nun [5] çeşitli özelliklerini ortaya koyduğu, strongly θ-pre süreklilik kavramını çoğul-değerli fonksiyonlara genişletip, üstten ve alttan strongly θ-pre sürekli fonksiyonların temel özelliklerini incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Pre Açık (Kapalı), θ -Açık (Kapalı), Semi Açık, α -Açık Kümeler

2. 1. 1. Tanım

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset \text{int}(cl(A))$ ise, A kümesine pre açık küme denir [13]. Bir pre açık kümenin tümleyenine pre kapalıdır denir. A kümesini kapsayan tüm pre kapalı kümelerin kesişimine, A kümesinin pre kapanış kümesi denir ve $pcl(A)$ ile gösterilir [7]. A kümesinin kapsadığı tüm pre açık kümelerin birleşimine, A kümesinin pre içi denir ve pint(A) ile gösterilir.

Pre açık (kapalı) kümeler ile ilgili literatürde iyi bilinen bazı temel özellikleri ele alalım.

2. 1. 2. Önerme

(X, τ) topolojik uzay olmak üzere;
a) pre açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi, yine bir pre açık kümedir.
b) pre kapalı kümelerin herhangi sayıda kesişimi, yine bir pre kapalı kümedir.

2. 1. 3. Önerme

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in pcl(A)$ olması için gerek ve yeter şart, x noktasını içeren her U pre açık kümesi için, $U \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

2. 1. 4. Uyarı

(X, τ) topolojik uzayındaki bütün pre açık kümelerin ailesini $PO(X)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm pre açık kümelerin ailesini $PO(X, x)$ ile göstereceğiz.

2. 1. 5. Teorem

n pozitif bir tam sayı ve $A = \prod_{j=1}^{n} A_{\alpha_j} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_j} X_\alpha$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $A \in PO(X) \Leftrightarrow$ her $j = 1,2,...,n$ için, $A_{\alpha_j} \in PO(X_{\alpha_j})$

b) $pcl(\prod_{\alpha \in A} A_\alpha) \subset \prod_{\alpha \in A} pcl(A_\alpha)$ [7].

2. 1. 6. Tanım

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer,

a) $A \subset cl(\text{int}(A))$ ise; A kümesine semi açık küme [12],

b) $A \subset \text{int}(cl(\text{int}(A)))$ ise; A kümesine α-açık küme denir [17].

2. 1. 7. Teorem

(X, τ) topolojik uzayı ve $A, B \subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer,

a) $A \in PO(X)$ ve B alt kümesi X uzayında semi açık ise, $A \cap B \in PO(B)$;

b) $A \in PO(B)$ ve $B \in PO(X)$ ise, $A \in PO(X)$ olur [14].

2. 1. 8. Teorem

(X, τ) topolojik uzayı ve $A \subset X_0 \subset X$ alt kümeleri verilsin. $pcl_{X_0}(A)$ ifadesi, A kümesinin X_0 alt uzayındaki pre kapanışını göstersin. Eğer,

a) $X_0 \subset X$ kümesi semi açık ise, $pcl_{X_0}(A) \subset pcl(A)$;

b) $A \in PO(X_0)$ ve $X_0 \in PO(X)$ ise, $pcl(A) \subset pcl_{X_0}(A)$ sağlanır [6].

2. 1. 9. Tanım

(X,τ) topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her U açık kümesi için $cl(U) \cap A \neq \varnothing$ ise; bu takdirde, x noktasına, A kümesinin θ-kapanış noktası denir [28]. A kümesinin tüm θ-kapanış noktalarının kümesine, A kümesinin θ-kapanışı denir ve $cl_\theta(A)$ ile gösterilir. Eğer $A = cl_\theta(A)$ ise, A kümesine θ-kapalı küme denir. Bir θ -kapalı kümenin tümleyenine, θ-açık küme denir [28].

2. 1. 10. Uyarı

Yukarıda tanımlanan pre açık ve θ-açık kümelerin özelliklerinden faydalanarak literatürde, genelleştirilmiş iki süreklilik çeşidi aşağıdaki gibi verilmiştir.

2. 1. 11. Tanım

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere; $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall$ V$\in \tau_2$ için, $f^{-1}(V)$ (X,τ_1) uzayında pre açık (θ-açık) küme oluyorsa; bu takdirde f fonksiyonuna pre sürekli [13] (strongly θ-sürekli [19]) denir.

2.2. Bazı Özel Topolojik Uzay Türleri

Bu kısımda; pre açık kümeler yardımıyla tanımlanabilen ya da karakterize edilebilen ve çalışmamız için gerekli bazı uzay tanımlarını inceledik.

2. 2. 1. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X uzayının her yoğun alt kümesi açık ise; X uzayına, *submaximal* uzay denir [26].

2. 2. 2. Teorem

Bir (X,τ) topolojik uzayı için, aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

a) X uzayı, *submaximal* uzaydır;

b) Her pre açık küme, açıktır [26].

2. 2. 3. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı verilsin.

a) X kümesinin her pre açık örtüsünün pre kapanışları X kümesini örtecek biçimde bir sonlu alt örtüsü varsa, X uzayına *p-kapalı* uzay denir [6].

b) X kümesinin her pre açık örtüsünün pre kapanışları X kümesini örtecek biçimde bir sayılabilir alt örtüsü varsa, X uzayına *p-Lindelöf* uzay denir [6].

c) X kümesinin her sayılabilir pre açık örtüsünün pre kapanışları X kümesini örtecek biçimde bir sonlu alt örtüsü varsa, X uzayına *sayılabilir p-kapalı* uzay denir [18].

2. 2. 4. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her pre kapalı (kapalı) F kümesi ve her $x\in(X-F)$ noktası için, $x\in U$, $F\subset V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U,V\in PO(X)$ kümeleri varsa; bu takdirde X uzayına *pre-regüler* [22] (*p-regüler*[7]) uzay denir.

2. 2. 5. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için, $x\in U$, $y\in V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U,V\in \mathrm{PO}(X)$ kümeleri varsa; bu takdirde X uzayına *pre-*T_2 uzayı [21] denir.

2. 2. 6. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için, $x \in U$, $y \in V$ ve $pcl(U) \cap pcl(V) = \varnothing$ olacak şekilde $U,V \in \mathrm{PO}(X)$ kümeleri varsa; bu takdirde X uzayına *pre-Urysohn* uzayı [21] denir.

2. 3. Çoğul-Değerli Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

2. 3. 1. Tanım

$F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon ve $B \subseteq Y$ olsun.

$F^{-}(B) = \{x : F(x) \cap B \neq \varnothing\}$, $F^{+}(B) = \{x : F(x) \subseteq B\}$ kümelerine sırasıyla B kümesinin F altındaki büyük ters görüntüsü ve B kümesinin F altındaki küçük ters görüntüsü denir.

2. 3. 2. Uyarı

$F : X \to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olmak üzere;

a) $\forall x \in X$ için; $F(x) \neq \varnothing$ dir.

b) $\forall A \subseteq X$ için; $F(A) = \cup\{F(x) : x \in A\}$ şeklindedir.

2. 3. 3. Tanım

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere; $F : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall V \in \tau_2$ için,

a) $F^{+}(V)$; (X,τ_1) uzayında açık küme oluyorsa; bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna üstten semi sürekli,

b) $F^{-}(V)$; (X,τ_1) uzayında açık küme oluyorsa; bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna alttan semi sürekli denir.

2. 3. 4. Uyarı

Pre açık ve θ-açık kümelerin özelliklerinden faydalanarak literatürde tanımlanmış olan süreklilik çeşitleri çoğul değerli fonksiyonlara aşağıdaki gibi genişletilmiştir.

2. 3. 5. Tanım

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere; $F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Eğer,

a) $\forall x\in X$ ve $F(x)\subset V$ ($F(x)\cap V\neq\emptyset$) olan Y uzayının her V açık altkümesi için, $U\subset F^{+}(V)$ ($U\subset F^{-}(V)$) olacak biçimde x noktasını içeren X uzayının pre açık bir U alt kümesi varsa; bu takdirde F çoğul-değerli fonksiyonuna X üzerinde üstten (alttan) pre sürekli denir[24].

b) $\forall x\in X$ ve $F(x)\subset V$ ($F(x)\cap V\neq\emptyset$) olan Y uzayının her V açık altkümesi için, $cl(U)\subset F^{+}(V)$ ($cl(U)\subset F^{-}(V)$) olacak biçimde x noktasını içeren X uzayının açık bir U altkümesi varsa; bu takdirde F çoğul-değerli fonksiyonuna X üzerinde üstten (alttan) θ^{*}-sürekli denir[16].

3. PRE-θ-AÇIK KÜMELER VE STRONGLY θ-PRE SÜREKLİLİK

3. 1. Pre-θ-açık Kümeler ve Strongly θ-Pre Sürekli Fonksiyonlar

3. 1. 1. Tanım

(X, τ) topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren her pre açık U kümesi için $pcl(U) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa; bu takdirde x noktasına, A kümesinin pre-θ-kapanış noktası denir. A kümesinin tüm pre-θ-kapanış noktalarının kümesine, A kümesinin pre-θ-kapanışı denir ve $pcl_\theta(A)$ ile gösterilir. Eğer $A = pcl_\theta(A)$ ise, A kümesine pre-θ-kapalı küme denir. Bir pre-θ-kapalı kümenin tümleyenine, pre-θ-açık küme denir[18].

3. 1. 2. Uyarı

(X, τ) topolojik uzayındaki bütün pre-θ-açık kümelerin ailesini $P_\theta O(X)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm pre-θ-açık kümelerin ailesini $P_\theta O(X, x)$ ile göstereceğiz.

3. 1. 3. Önerme

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $U \in PO(X)$ ise; bu takdirde, $pcl(U) = pcl_\theta(U)$ geçerlidir [5].

Aşağıdaki teorem, pre-θ-açık küme kavramının bir karakterizasyonudur.

3. 1. 4. Teorem

(X, τ) topolojik uzayındaki bir U alt kümesinin pre-θ-açık küme olması için, gerek ve yeter şart her x$\in U$ noktası için, $x \in W$ ve $pcl(W) \subset U$ olacak şekilde bir W pre açık kümesinin varlığıdır [5].

3. 1. 5. Tanım

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere; $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x\in X$ ve $f(x)\in V$ şartını sağlayan $\forall V\subset Y$ açık kümesi için, $f(pcl(U))\subset V$ olacak biçimde x noktasını içeren bir $U\in PO(X)$ varsa; bu takdirde f fonksiyonuna strongly θ- pre süreklidir denir[18].

Aşağıdaki ilk üç teorem, strongly θ-pre sürekli fonksiyonların karakterizasyonlarıdır.

3. 1. 6. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler denktir:

a) f fonksiyonu strongly θ-pre süreklidir.

b) $\forall V\in\tau_2$ için $f^{-1}(V)$, X uzayında pre-θ-açık kümedir.

c) Y kümesinin her kapalı W kümesi için $f^{-1}(W)$, X uzayında pre-θ-kapalı kümedir.

d) $\forall A\subset X$ için, $f(pcl_\theta(A))\subset cl(f(A))$ olur.

e) $\forall B\subset Y$ için, $pcl_\theta(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(cl(B))$ sağlanır [18].

3. 1. 7. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonunun strongly θ-pre sürekli olması için gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(pcl_\theta(U))\subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir U pre açık kümesinin olmasıdır. [5].

3. 1. 8. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonunun strongly θ-pre sürekli olması için gerek ve yeter şart her $x\in X$ noktası ve $f(x)$ noktasını içeren her V açık kümesi için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde x noktasını içeren bir pre-θ-açık U kümesinin olmasıdır [5].

3. 1. 9. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu ile bu fonksiyonun g: $X\to X\times Y$ grafik fonksiyonu verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır:

***a*)** g fonksiyonu strongly θ- pre sürekli ise, f strongly θ- pre sürekli ve X, *p-regüler* uzaydır.

***b*)** f fonksiyonu strongly θ- pre sürekli ve X uzayı *pre-regüler* ise, g fonksiyonu strongly θ- pre süreklidir [18].

3. 1. 10. Sonuç

X, bir *p-regüler* uzay olsun. O halde, bir $f:X\to Y$ fonksiyonunun strongly θ- pre sürekli olması için gerek ve yeter şart $g:X\to X\times Y$ grafik fonksiyonunun strongly θ- pre sürekli olmasıdır [18].

3. 1. 11. Teorem

$f:X\to Y$ strongly θ-pre sürekli fonksiyon ve $X_0\subset X$ semi açık küme olsun. $f\mid X_0:X_0\to Y$ fonksiyonu da, strongly θ-pre süreklidir [18].

3. 1. 12. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu verilsin. Her $x\in X$ için, $f\mid X_0 : X_0 \to Y$ kısıtlama fonksiyonu strongly θ-pre sürekli olacak şekilde bir $X_0 \in PO(X,x)$ varsa, f fonksiyonu strongly θ-pre süreklidir [18].

3. 1. 13. Tanım

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

a) Her $x\in X$ ve $V\in PO(Y,f(x))$ için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ varsa; *f* fonksiyonuna *pre-irresolute* fonksiyon [25] ,

b) Her $U\in PO(X)$ için, $f(U)\in PO(Y)$ oluyorsa; f fonksiyonuna *M-preopen* fonksiyon denir [15].

3. 1. 14. Önerme

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ *pre-irresolute* bir fonksiyon ve *V*, (Y,τ_2) topolojik uzayında pre-θ-açık bir küme ise; $f^{-1}(V)$, (X,τ_1) uzayında pre-θ-açık bir kümedir [18].

Aşağıdaki teorem, bileşke fonksiyonun strongly θ-pre sürekli olması ile ilgilidir.

3. 1. 15. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ ve $g:(Y,\tau_2)\to(Z,\tau_3)$ fonksiyonları verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) Eğer *f* fonksiyonu strongly θ-pre sürekli ve *g* fonksiyonu sürekli ise; bu takdirde, $g\circ f:(X,\tau_1)\to(Z,\tau_3)$ bileşke fonksiyonu, strongly θ-pre süreklidir.

b) Eğer *f* fonksiyonu *pre-irresolute* bir fonksiyon ve *g* fonksiyonu strongly θ-pre sürekli bir fonksiyon ise; bu takdirde, $g\circ f:(X,\tau_1)\to(Z,\tau_3)$ bileşke fonksiyonu, strongly θ-pre süreklidir.

c) Eğer $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ birebir örten ve *M-preopen* bir fonksiyon ve $g\circ f:(X,\tau_1)\to(Z,\tau_3)$ strongly θ-pre sürekli bir fonksiyon ise; $g:(Y,\tau_2)\to(Z,\tau_3)$ fonksiyonu, strongly θ-pre süreklidir [18].

3. 1. 16. Teorem

(X,τ_1), (X_1,τ_2) ve (X_2,τ_3) topolojik uzayları verilsin. Eğer $h:X\to X_1\times X_2$ $\left(h(x)=(x_1,x_2)\right)$ fonksiyonu strongly θ-pre sürekli ise; bu takdirde $i=1,2$ için, $f_i:X\to X_i$ $\left(f_i(x)=x_i\right)$ fonksiyonu strongly θ-pre süreklidir [5].

3. 1. 17. Teorem

Her $\alpha\in$ A için, $f_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha$ fonksiyonu strongly θ-pre sürekli ise; bu takdirde, her $x=\{x_\alpha\}$ için, $f(\{x_\alpha\})=\{f_\alpha(x_\alpha)\}$ biçiminde tanımlı $f:\Pi X_\alpha\to\Pi Y_\alpha$ çarpım fonksiyonu, strongly θ-pre süreklidir [18].

3. 1. 18. Teorem

Eğer $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ strongly θ-pre sürekli birebir bir fonksiyon ve Y bir T_0 (T_2) uzayı ise, X uzayı *pre-*T_2 (*pre-Urysohn*) uzayıdır [18].

3. 1. 19. Teorem

Eğer $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ strongly θ-pre sürekli bir fonksiyon ve Y, *Hausdorff* uzayı ise; bu takdirde, $E=\{(x,y):f(x)=f(y)\}$ alt kümesi $X\times X$ uzayında pre-θ-kapalıdır [18].

3. 1. 20. Tanım

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu ile bu fonksiyonun $G(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}\subset X\times Y$ grafiği verilsin. Eğer her $(x,y)\in((X\times Y)-G(f))$ için, $(pcl(U)\times V)\cap G(f)=\varnothing$ olacak şekilde $U\in PO(X,x)$ ve y noktasını içeren bir V açık kümesi varsa; bu takdirde f fonksiyonunun $G(f)$ grafiği, strongly pre kapalıdır denir [18].

[18]'de bir f fonksiyonunun grafiğinin strongly θ-pre kapalı olması ile ilgili karakterizasyon aşağıdaki gibi verilmiştir.

3. 1. 21. Önerme

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiğinin strongly pre kapalı olması için gerek ve yeter şart; her $(x,y)\in((X\times Y)-G(f))$ için, $f(pcl(U))\cap V=\varnothing$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir $U\subset X$ pre açık kümesi ve y noktasını kapsayan bir $V\subset Y$ açık kümesinin var olmasıdır [18].

$G(f)$ grafiğinin strongly pre kapalı olması ile f fonksiyonunun strongly θ-pre sürekli olması kavramları, [18]'de aşağıdaki gibi karşılaştırılmıştır.

3. 1. 22. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu, strongly θ-pre sürekli ve (Y,τ_2), *Hausdorff* uzayı ise; bu takdirde $G(f)$ grafiği, strongly pre kapalıdır [18].

3. 1. 23. Tanım

(X,τ_1) topolojik uzayı ve bir $K\subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer K kümesinin (X,τ_1) topolojik uzayının pre açık kümelerinden oluşan her $\{V_\alpha:\alpha\in\nabla\}$ örtüsü için,

$K \subset \cup\{pcl(V_\alpha) : \alpha \in \nabla_*\}$ olacak şekilde ∇ kümesinin bir ∇_* alt kümesi varsa; K alt kümesine, X uzayında *p-kapalı* denir [6].

Aşağıdaki teorem, *p-kapalı* kümenin strongly θ-pre sürekli fonksiyon altındaki görüntüsünün kompakt küme olduğunu gösterir.

3. 1. 24. Teorem

$f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ strongly θ-pre sürekli bir fonksiyon ve K kümesi X uzayında *p-kapalı* ise; bu takdirde $f(K)$, Y uzayının kompakt bir kümesidir [18].

3. 1. 25. Sonuç

$f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ fonksiyonu strongly θ-pre sürekli ve örten ise; bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) X uzayı, *p-kapalı* ise, Y uzayı kompakttır.

b) X uzayı, *p-Lindelöf* ise, Y *Lindelöf* uzayıdır.

c) X uzayı *sayılabilir p-kapalı* ise, Y sayılabilir kompakttır [18].

3. 1. 26. Teorem

Eğer bir $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ fonksiyonunun $G(f)$ grafiği, strongly pre kapalı ise; X uzayında *p-kapalı* olan her K alt kümesine karşılık gelen $f(K) \subset Y$, kapalı bir kümedir [18].

3. 1. 27. Teorem

(X, τ_1) topolojik uzayı, *submaximal* olsun. Eğer bir $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ topolojik uzayının grafiği strongly pre kapalı ise, Y uzayının her kompakt K kümesi için, $f^{-1}(K)$ kümesi, X uzayında θ-kapalıdır [18].

3. 1. 28. Teorem

(X,d_X) ve (Y,d_Y) metrik uzayları verilsin. Eğer $n=1,2,3,...,$ için, $f_n : X \to Y$ strongly θ-pre sürekli ve $f_0 : X \to Y$, $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsadığı fonksiyon ise; bu takdirde, f_0 fonksiyonu strongly θ-pre süreklidir [5].

3. 1. 29. Tanım

(X,τ) topolojik uzayında bir (x_i) ağı ve bir x noktası verilsin. Eğer x noktasını içeren her U açık kümesine karşılık, her $i \geq i_0$ için $x_i \in cl(U)$ olacak şekilde bir i_0 varsa; bu takdirde (x_i) ağı x noktasına θ-yakınsar denir [28].

3. 1. 30. Tanım

(X,τ) topolojik uzayında bir (x_i) ağı ve bir x noktası verilsin. Eğer x noktasını içeren her U pre-θ-açık (pre açık) kümesine karşılık, her $i \geq i_0$ için, $x_i \in U$ ($x_i \in pcl(U)$) olacak şekilde bir i_0 varsa; bu takdirde, (x_i) ağı x noktasına $p\theta$-yakınsar ($p\theta^*$-yakınsar) denir [5].

3. 1. 31. Sonuç

(X,τ) topolojik uzayında bir (x_i) ağı ve bir x noktası verilsin. Eğer (x_i), x noktasına yakınsıyorsa, (x_i) ağı x noktasına θ-yakınsar [5].

Aşağıdaki iki sonuç, ağlarda yakınsama ile θ-yakınsama ve $p\theta^*$-yakınsama ile $p\theta$-yakınsama kavramları arasındaki ilişkiyi belirtir.

3. 1. 32. Sonuç

(X,τ) topolojik uzayında bir (x_i) ağı ve bir x noktası verilsin. Eğer (x_i), x noktasına $p\theta^*$-yakınsıyorsa, (x_i) ağı x noktasına $p\theta$-yakınsar [5].

3. 1. 33. Önerme

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. X uzayında bir (x_i) ağı x noktasına $p\theta^*$-yakınsıyorsa, (x_i) ağı x noktasına θ-yakınsar; tersi ancak X uzayı *submaximal* ise doğrudur [5].

3. 1. 34. Uyarı

3. 1. 34. Önerme ile verilen ifadenin tersinin X uzayı *submaximal* iken doğru oldığu [5]'de verilmiştir.

3. 1. 35. Teorem

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım:

a) f fonksiyonu strongly θ-pre süreklidir.

b) her $x\in X$ ve X uzayında x noktasına $p\theta$-yakınsayan her (x_i) ağı için, $(f(x_i))$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsar.

c) her $x\in X$ ve X uzayında x noktasına $p\theta^*$-yakınsayan her (x_i) ağı için, $(f(x_i))$ ağı $f(x)$ noktasına yakınsar.

Bu durumda, $(a)\Rightarrow(b)\Rightarrow(c)$ elde edilir. Üstelik, X uzayı *submaximal* ise, (c) ifadesi (a) ifadesini gerektirir. Dolayısıyla, yukarıdaki ifadeler denk olur [5].

3. 1. 36. Uyarı

3. 1. 35. Teorem'deki *c)* ifadesinin *a)* ifadesini gerektirmesi, *submaximal* olmayan herhangi bir X uzayı için genellikle doğru olmadığı, [5]'de aşağıdaki örnek ile verilmiştir.

3. 1. 37. Örnek

φ, $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış topoloji olmak üzere; $(\mathbf{R},\varphi)$ topolojik uzayı verilsin. $\mathbf{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olsun. Ayrıca, $X=\{a,b\}$ kümesi ile bu küme üzerinde ayrık topoloji verilsin. O halde, $\mathbf{R}$ uzayı *submaximal* değildir. $f:\mathbf{R}\to X$ fonksiyonu, $x=0$ için $f(x)=a$ ve $x\neq 0$ için $f(x)=b$ biçiminde tanımlansın. $x\in\mathbf{R}$ ve (x_i), $\mathbf{R}$ uzayı içinde x noktasına $p\theta^*$-yakınsayan bir ağ olsun. Bu takdirde, $\mathbf{Q}\cup\{x\}$ ve $\mathbf{Q}^c\cup\{x\}$, $\mathbf{R}$ uzayında x noktasını içeren hem pre açık hem pre kapalı kümelerdir. O halde, her $i\geq i_0$ için, $x_i=x$ olacak şekilde bir i_0 vardır. Dolayısıyla $(f(x_i))$, $f(x)$ noktasına yakınsar. Diğer taraftan, $V=\{a\}$ olsun. Bu durumda V, X uzayında $f(0)=a$ noktasını içeren açık bir kümedir. 0 noktasını içeren tüm U pre açık kümeleri için, $U-\{0\}\neq\varnothing$ olur. Dolayısıyla, $f(pcl(U))=X\not\subset V$ elde edilir ki, buradan f fonksiyonu strongly θ-pre sürekli değildir.

3. 1. 38. Sonuç

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) topolojik uzayları verilsin. Eğer $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ strongly θ-pre sürekli bir fonksiyon ise; her $x\in X$ ve X uzayında x noktasına $p\theta$-yakınsayan her (x_i) ağı için, $(f(x_i))$ ağı $f(x)$ noktasına θ-yakınsar [5].

3. 1. 39. Uyarı

$f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ fonksiyonu için, aşağıdaki gerektirmeler sağlanır.

Strongly θ-sürekli $\Rightarrow$ strongly θ-pre sürekli $\Rightarrow$ pre sürekli

3. 2. Strongly θ-Pre Sürekli Çoğul-Değerli Fonksiyonlar

3. 1. 5. Tanım ile ele aldığımız strongly θ-pre süreklilik kavramını çoğul-değerli fonksiyonlara aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

3. 2. 1. Tanım

$F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Eğer, $\forall x\in X$ ve $F(x)\subset V$ ($F(x)\cap V\neq\emptyset$) olan Y uzayının her V açık alt kümesi için; her $u\in pcl(U)$ için, $F(u)\subset V$ ($F(u)\cap V\neq\emptyset$) olacak şekilde bir $U\in PO(X,x)$ varsa F çoğul-değerli fonksiyonuna üstten strongly θ-pre süreklidir (alttan strongly θ-pre süreklidir) denir. F çoğul-değerli fonksiyonu hem üstten hem de alttan strongly θ-pre sürekli ise; bu takdirde F strongly θ-pre süreklidir denir.

Şimdi, sırasıyla üstten ve alttan strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli fonksiyonun karakterizasyonlarını verelim.

3. 2. 2. Teorem

$F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktirler:

a) F çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre süreklidir.

b) Her $x\in X$ ve $F(x)\subset V$ olacak biçimde Y uzayındaki her V açık kümesi için, $F(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\in P_\theta O(X,x)$ kümesi vardır.

c) Her $V\subset Y$ açık kümesi için, $F^+(V)\subset X$ bir pre-θ-açık kümedir.

d) Her $B\subset Y$ kapalı kümesi için, $F^-(B)\subset X$ bir pre-θ-kapalı kümedir.

e) Her $A\subset Y$ kümesi için, $pcl_\theta(F^-(A))\subset F^-(cl(A))$ sağlanır.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ **(c)** $V \subset Y$ açık bir küme ve $x \in F^+(V)$ olsun. Her $u \in pcl(U)$ için, $F(u) \subset V$ olacak şekilde $U \in PO(X,x)$ vardır. Dolayısıyla, $x \in pcl(U) \subset F^+(V)$ olur. Bu ise, $F^+(V) \subset X$ kümesinin pre-θ-açık olduğunu gösterir.

(c) $\Rightarrow$ **(d)** Her $B \subset Y$ kümesi için, $F^+(Y-B) = X - F^-(B)$ olması gerçeğinden açıktır.

(d) $\Rightarrow$ **(e)** Herhangi bir $A \subset Y$ kümesi verilsin. O halde, $cl(A)$ kümesi Y uzayında kapalı olup, $F^-(cl(A))$ kümesi X uzayında pre-θ-kapalıdır. Dolayısıyla, $pcl_\theta(F^-(A)) \subset F^-(cl(A))$ elde edilir.

(e) $\Rightarrow$ **(a)** Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $F(x) \subset V$ olacak şekilde herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. $(Y-V) \subset Y$ kapalı olduğundan, $pcl_\theta(F^-(Y-V)) \subset F^-(Y-V)$ elde edilir. O halde, $F^-(Y-V) \subset X$ pre-θ-kapalıdır. $F^-(Y-V) = X - F^+(V)$ eşitliği sağlandığından, $F^+(V) \subset X$ kümesi pre-θ-açık olur. Buradan, $pcl(U) \subset F^+(V)$ olacak şekilde $U \in PO(X,x)$ vardır. Bu ise, F çoğul-değerli fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olması tanımıdır.

(b) $\Rightarrow$ **(c)** Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi ile herhangi bir $x \in F^+(V)$ noktası verilsin. O halde $x \in U \subset F^+(V)$ olacak şekilde bir $U \in P_\theta O(X,x)$ kümesi vardır. U, X uzayında pre-θ-açık olduğundan, $x \in pcl(G) \subset U \subset F^+(V)$ olacak biçimde bir $G \in PO(X,x)$ kümesi vardır. Buradan $F^+(V)$, X uzayında pre-θ-açık bir kümedir.

(c) $\Rightarrow$ **(b)** Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $F(x) \subset V$ olacak biçimde herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. $F^+(V) \subset X$, pre-θ-açık küme olup, $x \in F^+(V)$ dır. $U = F^+(V)$ alırsak; $F(U) \subset V$ elde edilir.

3. 2. 3. Teorem

$F : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktirler:

a) F çoğul-değerli fonksiyonu alttan strongly θ-pre süreklidir.

b) Her $x \in X$ ve $x \in F^-(V)$ olacak biçimde Y uzayındaki her V açık kümesi için, $U \subset F^-(V)$ olacak şekilde bir $U \in P_\theta O(X,x)$ kümesi vardır.

c) Her $V \subset Y$ açık kümesi için, $F^-(V) \subset X$ bir pre-θ-açık kümedir.

d) Her $B \subset Y$ kapalı kümesi için, $F^+(B) \subset X$ bir pre-θ-kapalı kümedir.

e) Her $A \subset Y$ kümesi için, $pcl_\theta(F^+(A)) \subset F^+(cl(A))$ sağlanır.

3. 2. 4. Uyarı

$F:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu için, aşağıdaki gerektirmeler sağlanır:
Üstten θ^*-süreklilik $\Rightarrow$ üstten strongly θ-pre süreklilik $\Rightarrow$ üstten pre süreklilik
Ancak, bu gerektirmelerin tersleri aşağıda verdiğimiz iki örnekte olduğu gibi genelde doğru değildir.

3. 2. 5. Örnek

τ_c, **R** reel sayılar kümesi üzerindeki sonlu tümleyen topolojisi ve $\sigma = \{\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\},Y,\varnothing\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde bir topoloji olsun. $F:(X,\tau_c) \to (Y,\sigma)$ çoğul-değerli fonksiyonu, $x \in \mathbf{Q}$ ise $F(x) = \{1,2,3\}$, $x \in \mathbf{R}$-$\mathbf{Q}$ ise $F(x) = \{4\}$ biçiminde tanımlansın. $F^+(\{1,2\}) = \varnothing$, $F^+(\{3\}) = \varnothing$, $F^+(\{1,2,3\}) = \mathbf{Q}$ olur. **Q** rasyonel sayılar kümesi $(\mathbf{R},\tau_c)$ topolojik uzayında pre-θ-açık kümedir. Ancak, θ-açık değildir. Dolayısıyla, F çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre süreklidir. Ancak, üstten θ^*-sürekli değildir.

3. 2. 6. Örnek

$X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ topolojisi verilsin. Ayrıca; $Y = \{1,2,3\}$ kümesi ile bu küme üzerinde tanımlanan $\sigma = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},X,\varnothing\}$ topolojisi verilsin. $F:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ çoğul-değerli fonksiyonu, $x = a$ ise $F(x) = \{1,2\}$, $x = b$ ise $F(x) = \{3\}$, $x = c$ ise $F(x) = \{2,3\}$

şeklinde tanımlansın. $F^+(\{1\})=\varnothing,\ F^+(\{2\})=\varnothing, F^+(\{1,2\})=\{a\}$ olur. $\{a\}\in PO(X)$ olmasına rağmen; $\{a\}\notin P_\theta O(X)$ olur. Dolayısıyla, F üstten pre süreklidir. Ancak, üstten strongly θ-pre sürekli değildir.

3. 2. 7. Teorem

(X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzayları verilsin. $\{U_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$, X uzayının α-açık bir örtüsü olsun. O halde, $F: X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyonun üstten (alttan) strongly θ-pre sürekli olması için, gerek ve yeter şart her $\lambda\in\Lambda$ için, $F\mid U_\lambda : U_\lambda \to Y$ kısıtlamasının üstten (alttan) strongly θ-pre sürekli olmasıdır.

İspat:

İspat sadece F 'nin üstten strongly θ-pre sürekli olması durumu için yapılacaktır.

$\Rightarrow$: $\lambda\in\Lambda$ ve $x\in U_\lambda$ olsun. Ayrıca; $V\subset Y$, $(F\mid U_\lambda)(x)\subset V$ olacak şekilde açık bir küme olsun. F, üstten strongly θ-pre sürekli ve $F(x)=(F\mid U_\lambda)(x)$ olduğundan, $pcl(G)\subset F^+(V)$ olacak şekilde bir $G\in PO(X,x)$ vardır. $U=U_\lambda\cap G$ olsun. Buradan; $U\in PO(U_\lambda,x)$ olup $pcl_{U_\lambda}(U)\subset pcl(U)$ bağıntısı sağlanır. Dolayısıyla, $(F\mid U_\lambda)(pcl_{U_\lambda}(U))=F(pcl_{U_\lambda}(U))\subset F(pcl(U))\subset V$ olur. Böylece; her $\lambda\in\Lambda$ için, $F\mid U_\lambda : U_\lambda\to Y$ çoğul-değerli kısıtlama fonksiyonu, üstten strongly θ-pre süreklidir.

$\Leftarrow$: Herhangi bir $x\in X$ noktası ile $F(x)\subset V$ olacak şekilde bir $V\subset Y$ açık kümesi verilsin. Buradan, $x\in U_\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda\in\Lambda$ vardır. $F\mid U_\lambda$, üstten strongly θ-pre sürekli ve $(F\mid U_\lambda)=F(x)$ olduğundan, $pcl_{U_\lambda}(U)\subset(F\mid U_\lambda)^+(V)$ olacak şekilde bir $U\in PO(U_\lambda,x)$ vardır. 2.1.8. Teorem kullanılarak, $F(pcl(U))\subset V$ olacak şekilde $U\in PO(X)$ ve $pcl(U)\subset pcl_{U_\lambda}(U)$ elde edilir. Sonuç olarak; F çoğul-değerli fonksiyonu, üstten strongly θ-pre süreklidir.

3. 2. 8. Teorem

(X,τ_1), (Y,τ_2) ve (Z,τ_3) topolojik uzayları olmak üzere; $F_1 : X \to Y$ ve $F_2 : Y \to Z$ çoğul-değerli fonksiyonları verilsin. Eğer $F_1 : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$, üstten (alttan) strongly θ-pre sürekli ve $F_2 : (Y,\tau_2) \to (Z,\tau_3)$ üstten (alttan) semi sürekli ise; bu takdirde, $F = F_2 \circ F_1 : X \to Z$ bileşke çoğul-değerli fonksiyonu üstten (alttan) strongly θ-pre süreklidir.

İspat:

İspat sadece F çoğul-değerli fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olması için yapılacaktır.

Herhangi bir $G \subset Z$ açık kümesi verilsin. $F_2 \circ F_1$ bileşke çoğul-değerli fonksiyonunun tanımından; $F^+(G) = (F_2 \circ F_1)^+(G) = F_1^+(F_2^+(G))$ olur. F_2 çoğul-değerli fonksiyonu üstten semi-sürekli olduğundan, $F_2^+(G) \subset Y$ açık kümedir. F_1 çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli olduğundan, $F_1^+(F_2^+(G)) \subset X$ pre-θ-açık kümedir. O halde, $F = F_2 \circ F_1$ çoğul-değerli bileşke fonksiyonu üstten strongly θ-pre süreklidir.

Literatürde iyi bilinen aşağıdaki tanımı ele alalım.

3. 2. 9. Tanım

$F_1 : X_1 \to Y_1$ ve $F_2 : X_2 \to Y_2$ şeklindeki iki çoğul-değerli fonksiyonun çoğul değerli çarpım fonksiyonu $F_1 \times F_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, her $x_1 \in X_1$ ve $x_2 \in X_2$ için, $(F_1 \times F_2)(x_1, x_2) = F_1(x_1) \times F_2(x_2)$ olarak tanımlıdır.

3. 2. 10. Önerme

$F_1 : X_1 \to Y_1$ ve $F_2 : X_2 \to Y_2$ çoğul-değerli fonksiyonları ve herhangi $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $(F_1 \times F_2)^+(A \times B) = F_1^+(A) \times F_2^+(B)$

b) $(F_1 \times F_2)^{-}(A \times B) = F_1^{-}(A) \times F^{-}{}_2(B)$

3. 2. 11. Teorem

$F_1 : (X_1, \tau_1) \to (Y_1, \sigma_1)$ ve $F_2 : (X_2, \tau_2) \to (Y_2, \sigma_2)$ çoğul-değerli fonksiyonları üstten (alttan) strongly θ-pre sürekli ise; bu takdirde, $F_1 \times F_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ çoğul değerli çarpım fonksiyonu, üstten (alttan) strongly θ-pre süreklidir.

İspat:

İspat sadece F_1, F_2 çoğul-değerli fonksiyonlarının üstten strongly θ-pre sürekli olması durumu için yapılacaktır.

Herhangi bir $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ noktası ile $F_1(x_1) \times F_2(x_2)$ kümesini kapsayan herhangi bir $V \subset Y_1 \times Y_2$ açık kümesi verilsin. O halde $F_1(x_1) \times F_2(x_2) \subset U_1 \times U_2 \subset V$ olacak şekilde $U_1 \subset Y_1$ ve $U_2 \subset Y_2$ açık kümeleri vardır. F_1 ve F_2 çoğul-değerli fonksiyonları üstten strongly θ-pre sürekli olduğundan; $F_1(A) \subset U_1$ ve $F_2(B) \subset U_2$ olacak şekilde $A \in P_\theta O(X_1, x_1)$ ve $B \in P_\theta O(X_2, x_2)$ kümeleri vardır. Ayrıca;

$$A \times B \subset F^{+}{}_1(U_1) \times F_2^{+}(U_2) = (F_1 \times F_2)^{+}(U_1 \times U_2) \subset (F_1 \times F_2)^{+}(V)$$

ifadesi sağlanır. Dolayısıyla, $A \times B \in P_\theta O(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$ ve $(F_1 \times F_2)(A \times B) \subset V$ sağlanır ki, bu ise $F_1 \times F_2$ çoğul-değerli fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olması tanımıdır.

3. 2. 12. Tanım

$F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonunun çoğul-değerli $G_F : X \to X \times Y$ grafik fonksiyonu, her $x \in X$ için $G_F(x) = \{x\} \times F(x)$ biçiminde tanımlıdır. $\{\{x\} \times F(x) : x \in X\} \subset X \times Y$ kümesine, F çoğul-değerli fonksiyonunun grafiği denir ve $G(F)$ ile gösterilir.

3. 2. 13. Önerme

$F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu ve herhangi $A \subset X$, $B \subset Y$ alt kümeleri için, aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $G_F{}^{+}(A \times B) = A \cap F^{+}(B)$

b) $G_F{}^{-}(A \times B) = A \cap F^{-}(B)$ [20]

Aşağıdaki teorem, F çoğul-değerli fonksiyonu ile $G(F)$ grafik fonksiyonunun alttan strongly θ-pre sürekli oluşu ile ilgili bir karakterizasyonudur.

3. 2. 14. Teorem

(X, τ) topolojik uzayı, regüler olsun. O halde, $F : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonunun alttan strongly θ-pre sürekli olması için,gerek ve yeter şart $G_F : X \to X \times Y$ çoğul-değerli grafik fonksiyonunun alttan strongly θ-pre sürekli olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$: F çoğul-değerli fonksiyonu, alttan strongly θ-pre sürekli olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ile $x \in G_F{}^{-}(W)$ olacak şekilde $W \subset X \times Y$ açık kümesi verilsin. $(\{x\} \times F(x)) \cap W \neq \varnothing$ olduğundan, $(x, y) \in W$ olacak şekilde $y \in F(x)$ vardır. Buradan, $(x, y) \in U \times V \in W$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır. X uzayının regüler olmasından dolayı, $x \in A \subset pcl(A) \subset cl(A) \subset U$ olacak şekilde $A \subset X$ açık kümesi vardır. $F(x) \cap V \neq \varnothing$ olduğundan; $G \subset pcl(G) \subset F^{-}(V)$ olacak şekilde $G \in PO(X, x)$ vardır. 2. 1. 7. Teorem gereği, $x \in A \cap G \in PO(X, x)$ ve dolayısıyla $pcl(A) \cap pcl(G) \subset U \cap F^{-}(V) = G_F{}^{-}(U \times V) \subset G_F{}^{-}(W)$ ifadesi sağlanır. Sonuç olarak; G_F çoğul-değerli fonksiyonu alttan strongly θ-pre süreklidir.

$\Leftarrow$: G_F çoğul-değerli grafik fonksiyonu alttan strongly θ-pre sürekli olsun. Herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. $X \times V \subset X \times Y$ açık küme olduğundan;

$G_F^-(X \times V) = X \cap F^-(V) = F^-(V) \subset X$ pre-θ-açık bir küme olur. Buradan, F çoğul-değerli fonksiyonunun alttan strongly θ-pre sürekli olduğu elde edilir.

3. 2. 15. Teorem

(X, τ) topolojik uzayı regüler ve her $x \in X$ için, $F(x)$ kümesi kompakt olacak şekilde $F : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. O halde, F çoğul-değerli fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olması için gerek ve yeter şart $G_F : X \to X \times Y$ çoğul değerli grafik fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$**:** F çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli olsun. $x \in X$ noktası ve $G_F(x)$ kümesini kapsayan $W \subset X \times Y$ açık kümesi verilsin. Her $y \in F(x)$ için, $(x, y) \in U(y) \times V(y) \subset W$ olacak biçimde $U(y) \subset X$ ve $V(y) \subset Y$ açık kümeleri vardır. $\{V(y) : y \in F(x)\}$ ailesi, $F(x)$'in açık bir örtüsüdür. $F(x)$ kümesi kompakt olduğundan, $F(x) \subset \bigcup \{V(y_i) : i = 1,2,...,n\}$ ifadesi sağlanacak şekilde sonlu tane $y_1, y_2, ..., y_n \in F(x)$ noktası vardır.

$U = \bigcap \{U(y_i) : i = 1,2,...,n\}$ ve $V = \bigcup \{V(y_i) : i = 1,2,...,n\}$ olsun. O halde, $U \subset X$ ve $V \subset Y$ açık kümeler olup, $\{x\} \times F(x) \subset U \times V \subset W$ elde edilir. X uzayının regüler olmasından dolayı, $x \in U_0 \subset pcl(U_0) \subset cl(U_0) \subset U$ olacak şekilde bir $U_0 \subset X$ açık kümesi vardır. Buradan, $\{x\} \times F(x) \subset pcl(U_0) \times V \subset U \times V \subset W$ olur. Ayrıca; F çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli olduğundan; $pcl(H) \subset F^+(V)$ olacak şekilde $H \in PO(X, x)$ vardır. $U_0 \cap H \in PO(X, x)$ ve $pcl(U_0 \cap H) \subset pcl(U_0) \cap pcl(H) \subset pcl(U_0) \cap F^+(V) = G_F^+(pcl(U_0) \times V) \subset G_F^+(W)$ ifadeleri elde edilir. Bu ise; G_F çoğul-değerli grafik fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olduğunu gösterir.

$\Rightarrow$**:** $G_F : X \to X \times Y$ çoğul-değerli grafik fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli olsun. $x \in X$ ve $F(x)$ kümesini kapsayan herhangi bir $V \subset Y$ açık kümesi verilsin. $X \times V \subset X \times Y$ açık bir küme ve $G_F(x) \subset X \times V$ olduğundan;

$U \subset G_F^+(X \times V) = F^+(V)$ olacak şekilde $U \in P_\theta O(X, x)$ vardır. Buradan, F çoğul değerli fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olduğu elde edilir.

Strongly pre kapalı grafik tanımını aşağıdaki gibi verdik.

3. 2. 16. Tanım

$F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Eğer her $(x, y) \notin G(F)$ için, $(pcl(U) \times V) \cap G(F) = \varnothing$ olacak şekilde x noktasını içeren pre açık bir U kümesi ve y noktasını içeren bir V açık kümesi varsa; bu takdirde $G(F) \subset X \times Y$ grafiği, strongly pre kapalıdır.

3. 2. 17. Teorem

Eğer $F : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli, her $x \in X$ için $F(x)$ kompakt ve (Y, τ_2) topolojik uzayı *Hausdorff* ise; bu takdirde $G(F) \subset X \times Y$ grafiği, strongly pre kapalıdır.

İspat:

$(x, y) \in (X \times Y) - G(F)$ olsun. Buradan, $y \notin F(x)$ elde edilir. Y topolojik uzayı, *Hausdorff* olduğundan, her $z \in F(x)$ için, $z \in U(z)$ ve $y \in V_z(y)$ olacak şekilde ayrık $V_z(y)$, $U(z) \subset Y$ açık kümeleri vardır. $\{U(z) : z \in F(x)\}$ ailesi, $F(x)$ kümesinin açık bir örtüsüdür. $F(x)$ kompakt olduğundan; $F(x) \subset \bigcup \{U(z_i) : i = 1,2,...,n\}$ olacak şekilde sonlu tane $z_1, z_2, ..., z_n \in F(x)$ noktaları vardır.

$U = \bigcup \{U(z_i) : i = 1,2,...,n\}$ ve $V = \bigcap \{V_{z_i}(y) : i = 1,2,...,n\}$ olsun. Bu takdirde, $F(x) \subset U$, $y \in V$ olacak şekilde hem ayrık , hem de açık $U, V \subset Y$ kümeleri vardır. F, üstten strongly θ-pre sürekli bir çoğul değerli fonksiyon olduğundan, $pcl(W) \subset F^+(U)$ olacak şekilde x noktasını içeren pre açık W kümesi vardır. O halde, $(x, y) \in pcl(W) \times V \subset (X \times Y) - G(F)$ olur. Dolayısıyla,

$(pcl(W)\times V)\cap G(F)=\varnothing$ elde edilir. Bu ise, $G(F)$ grafiğinin strongly pre kapalı olduğunu gösterir.

3. 2. 18. Teorem

Eğer $F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli, her $x\in X$ için $F(x)$ kompakt ve (Y,τ_2) topolojik uzayı *Hausdorff* ise; bu takdirde $A=\{(x,y)\in X\times X : F(x)\cap F(y)\neq\varnothing\}\subset X\times X$ kümesi pre-θ-kapalıdır.

İspat:

$(x,y)\in(X\times X)-A$ olsun. O halde, $F(x)\cap F(y)=\varnothing$ elde edilir. $F(x)$ ile $F(y)$ kompakt ve Y uzayı *Hausdorff* olduğundan, $F(x)\subset V_1$ ve $F(y)\subset V_2$ ifadeleri sağlanacak şekilde ayrık $V_1,V_2\subset Y$ açık kümeleri vardır. F çoğul değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli olduğundan, $x\in pcl(U_1)\subset F^+(V_1)$ ve $y\in pcl(U_2)\subset F^+(V_2)$ olacak şekilde $U_1\in PO(X,x)$ ve $U_2\in PO(X,y)$ kümeleri vardır.Ayrıca;

$pcl(U_1\times U_2)\cap A\subset(pcl(U_1)\times pcl(U_2))\cap A$ ve $(pcl(U_1)\times pcl(U_2))\cap A=\varnothing$

olduğundan; $pcl(U_1\times U_2)\cap A=\varnothing$ elde edilir. $U_1\times U_2\subset X\times X$ kümesi pre açık ve $(x,y)\in pcl(U_1\times U_2)\subset X-A$ olduğundan; $A\subset X\times X$ pre-θ-kapalı bir kümedir.

Çoğul-değerli fonksiyonlarda geriye dönüşüm kavramı, [29]'da aşağıdaki gibi verilmiştir.

3. 2. 19. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, $A\subset X$ ve $F:(X,\tau)\to(A,\tau_A)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Eğer her $x\in A$ için, $x\in F(x)$ oluyorsa; bu takdirde F çoğul değerli fonksiyonuna (X,τ) uzayından (A,τ_A) alt uzayına bir geriye dönüşüm denir [29].

3. 2. 20. Teorem

$F:(X,\tau)\to(X,\tau)$ çoğul-değerli fonksiyonu üstten strongly θ-pre sürekli ve (X,τ) *Hausdorff* uzayı olsun. Eğer her $x\in X$ nokatsı için, $F(x)$ kompakt ise; bu takdirde $A=\{x:x\in F(x)\}$, pre-θ-kapalı bir kümedir.

İspat:

Herhangi bir $x_0\in pcl_\theta(A)$ noktası verilsin. Varsayalım ki $x_0\notin A$ olsun. O halde, $x_0\notin F(x_0)$ elde edilir. (X,τ) uzayı *Hausdorff* ve $F(x)$ kompakt bir küme olduğundan; $x_0\in U$ ve $F(x_0)\subset V$ olacak şekilde ayrık U ve V açık kümeleri vardır. U ile V kümeleri açık olduklarından, $pcl(U)\cap V=\varnothing$ elde edilir. $pcl(W)\subset F^+(V)$ olacak şekilde $W\in PO(X,x_0)$ kümesi verilsin. Ayrıca; $pcl(U\cap W)\cap A\neq\varnothing$ olduğunu biliyoruz. $z\in pcl(U\cap W)\cap A$ olsun. $z\in A$ olduğundan, $z\in F(z)$ elde edilir ve dolayısıyla $z\in pcl(W)$ ile $z\in pcl(U)$ bulunur. Buradan, $pcl(W)\not\subset F^+(V)$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $x_0\in A$ olur ve A, pre-θ-kapalı bir kümedir.

3. 2. 21. Sonuç

(X,τ) topolojik uzayı ve bir $A\subset X$ kümesi verilsin. Her $x\in A$ için, $F(x)$ kompakt bir küme olacak şekilde, üstten strongly θ-pre sürekli $F:(X,\tau)\to(A,\tau_A)$ çoğul-değerli geriye dönüşüm fonksiyonu verilsin. Eğer (X,τ) *Hausdorff* ise; bu takdirde, $A\subset X$ pre-θ-kapalı bir kümedir.

3. 2. 22. Teorem

(X,τ) *Hausdorff* uzayı ve $A,B\subset X$ kompakt alt kümeleri verilsin. Bu takdirde, $A\subset U$, $B\subset V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde $U,V\subset X$ açık kümeleri vardır [31].

3. 2. 23. Teorem

$F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ üstten strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli bir fonksiyon ve her $x\in X$ için, $F(x)$ kompakt bir küme olsun. Ayrıca, her $x,y\in X(x\neq y)$ nokta çifti için, $F(x)\cap F(y)=\varnothing$ olsun. Eğer Y, *Hausdorff* uzayı ise, bu takdirde (X,τ_1), *pre-Urysohn* uzayıdır.

İspat:

Kabul gereği, $x,y\in X(x\neq y)$ noktaları için $F(x)\cap F(y)=\varnothing$ olsun. Y uzayı *Hausdorff*, $F(x)$ ve $F(y)$ kompakt kümeler olduğundan, 3. 2. 22. Teorem gereği $F(x)\subset V_1$, $F(y)\subset V_2$, $V_1\cap V_2=\varnothing$ olacak şekilde $V_1,V_2\subset Y$ açık kümeleri vardır. F, üstten strongly θ-pre sürekli fonksiyon olduğundan; $x\in pcl(U_1)\subset F^+(V_1)$, $y\in pcl(U_2)\subset F^+(V_2)$ olacak şekilde $U_1\in PO(X,x)$ ve $U_2\in PO(X,y)$ kümeleri vardır. O halde, $pcl(U_1)\cap pcl(U_2)=\varnothing$ olur. Böylece, X uzayının *pre-Urysohn* olduğu elde edilir.

3. 2. 24. Teorem

Üstten strongly θ-pre sürekli ve örten $F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu, her $x\in X$ için $F(x)$ kompakt olacak şekilde verilsin. Eğer X, *p-kapalı* bir uzay ise; bu takdirde (Y,τ_2) uzayı, kompakttır.

İspat:

$\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ ailesi, Y kümesinin bir açık örtüsü olsun. Her $x\in X$ için, $F(x)$ kompakt bir küme olduğundan, $F(x)\subset\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ ifadesi sağlanacak biçimde sonlu bir $\Lambda(x)\subset\Lambda$ vardır. $V(x)=\bigcup\{V_\lambda:\lambda\in\Lambda(x)\}$ olsun. F çoğul-değerli fonksiyonu, üstten strongly θ-pre sürekli olduğundan; $pcl(U(x))\subset F^+(V(x))$ olacak şekilde x noktasını içeren bir $U(x)\subset X$ pre açık kümesi vardır. O halde, $\{U(x):x\in X\}$ ailesi X kümesinin pre açık örtüsüdür. X uzayı, *p-kapalı* olduğundan; $X=\bigcup\{pcl(U(x_i)):i=1,2,...,n\}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1,x_2,...,x_n\in X$ vardır.Buradan,

$F(X) = Y = F(\bigcup_{i=1}^{n} pcl(U(x_i))) = \bigcup_{i=1}^{n} F(pcl(U(x_i))) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x_i)} V_\lambda$ elde edilir.

Dolayısıyla, Y uzayı kompakttır.

3. 2. 25. Uyarı

$(D,>)$; bir yönlendirilmiş küme, (F_λ) ise; her $\lambda \in D$ için, $F_\lambda : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonlarının bir ağıdır. Aşağıda öncelikle çoğul-değerli fonksiyonların ağ kavramı ile ilgili iki tanım ele alınmıştır. Ardından, üstten strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli fonksiyon ile karşılaştırılmıştır.

3. 2. 26. Tanım

(X,τ_1) ve (Y,τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere; her $\lambda \in D$ için, $F_\lambda : X \to Y$ olacak şekilde $(F_\lambda)_{\lambda \in D}$ çoğul-değerli fonksiyonlar ağı verilsin. Her $x \in X$ için, $F^*(x) = \{ y \in Y : y$ noktasının her V açık komşuluğu ve her $\mu \in D$ için, $\lambda > \mu$ ve $V \cap F_\lambda(x) \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $\lambda \in D$ vardır$\}$ biçiminde tanımlı $F^* : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonuna $(F_\lambda)_{\lambda \in D}$ ağının üst topolojik limiti denir [2].

3. 2. 27. Tanım

Her $\lambda \in D$ için, $F_\lambda : X \to Y$ olmak üzere; $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Her $\lambda \in D$ için, $F_\lambda(x_0)$ kümesini kapsayan her V_λ açık kümesine karşılık, $F_\lambda(U) \subset V_\lambda$ olacak şekilde bir $U \in P_\theta O(X, x_0)$ varsa; bu takdirde, $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağına $x_0 \in X$ noktasında üstten eş strongly θ-pre sürekli denir.

3. 2. 28. Teorem

(Y,τ_2) uzayı kompakt olmak üzere; Her $\lambda \in D$ için, $F_\lambda : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ biçminde tanımlı çoğul-değerli fonksiyonların $(F_\lambda)_{\lambda \in D}$ ağı verilsin. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa:

a) Her $x \in X$ ve her $\lambda \in D$ için, $\bigcup \{F_\mu(x) : \mu > \lambda\} \subset Y$ kümesi kapalıdır.

b) $(F_\lambda)_{\lambda \in D}$, X uzayı üzerinde üstten eş strongly θ-pre sürekli ise, F^* çoğul-değerli fonksiyonu X üzerinde üstten strongly θ-pre süreklidir.

İspat:

3. 2. 26. Tanım ve (*a*) gereğince $F^*(x) = \bigcap \{(\bigcup \{F_\mu(x) : \mu > \lambda\}) : \lambda \in D\}$ olur. $(\bigcup \{F_\mu(x) : \mu > \lambda\})_{\lambda \in D}$ ağı, kapalı kümelerin sonlu kesişim özelliğini sağlayan bir ailesi olduğundan ve Y kümesinin kompaktlığından, her $x \in X$ için, $F^*(x) \neq \varnothing$ elde edilir. $x_0 \in X$ noktası ve Y kümesinin $F^*(x_0) \subset V$ olacak şekilde özalt kümesi olan V açık kümesi verilsin. O halde, $F^*(x_0) \cap (Y - V) = \varnothing$, $F^*(x_0) \neq \varnothing$ ve $(Y - V) \neq \varnothing$ ifadeleri sağlanır. Buradan, $\bigcap \{(\bigcup \{F_\mu(x_0) : \mu > \lambda\}) : \lambda \in D\} \cap (Y - V) = \varnothing$ olup; dolayısıyla, $\bigcap \{(\bigcup \{F_\mu(x_0) \cap (Y - V) : \mu > \lambda\}) : \lambda \in D\} = \varnothing$ elde edilir. Son eşitlikten ve Y kümesinin kompaktlığından, $\mu > \lambda$ olan her $\mu \in D$ için, $F_\mu(x_0) \cap (Y - V) = \varnothing$ olacak şekilde bir $\lambda \in D$ vardır. $(F_\lambda)_{\lambda \in D}$ ağı, X üzerinde üstten eş strongly θ-pre sürekli olduğundan, her $\mu > \lambda$ için, $F_\mu(U) \subset V$ olacak şekilde x_0 noktasını içeren bir U pre-θ-açık kümesi vardır. O halde, her $x \in U$ için, $F_\mu(x) \cap (Y - V) = \varnothing$ olur. Dolayısıyla, $\bigcup \{F_\mu(x) \cap (Y - V) : \mu > \lambda\} = \varnothing$ olup; buradan, $\bigcap \{(\bigcup \{F_\mu(x) : \mu > \lambda\}) : \lambda \in D\} \bigcap (Y - V) = \varnothing$ elde edilir. Bu takdirde, $F^*(U) \subset V$ olur. Eğer $V = Y$ ise, x_0 noktasını içeren her U pre-θ-açık kümesi için, $F^*(U) \subset V$ olur. Buradan F^* çoğul-değerli fonksiyonu, x_0 noktasında üstten strongly θ-pre süreklidir. x_0 noktası keyfi olduğundan; F^* çoğul-değerli fonksiyonu, X üzerinde üstten strongly θ-pre süreklidir.

3. 2. 29. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı ve X uzayında boş olmayan kümelerin boş olmayan bir Ω ailesi verilsin. Eğer Ω ailesi "$\forall M_1, M_2 \in \Omega$ için $\exists M_3 \in \Omega \ni M_3 \subset M_1 \cap M_2$" özelliğini sağlarsa, Ω ailesine yönlendirilmiş aile denir [30].

3. 2. 30. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, Ω yönlendirilmiş ailesi ve bir $p \in X$ noktası verilsin. Eğer p noktasını içeren her U açık kümesi ile Ω ailesine ait her kümenin kesişimi boştan farklı ise; bu takdirde, p noktasına Ω ailesinin kapanış noktası denir [30].

3. 2. 31. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, Ω yönlendirilmiş ailesi ve bir $p \in X$ noktası verilsin. Eğer p noktasını içeren her U açık kümesi, Ω ailesine ait bir kümeyi kapsıyorsa, Ω ailesi p noktasına yakınsar denir [30].

3. 2. 32. Tanım

(X,τ) topolojik uzayı, Ω yönlendirilmiş ailesi, Ψ ailesi ve bir $E \subset X$ kümesi verilsin. Eğer,

a) Ω ailesine ait her M kümesi, Ψ ailesine ait bir K kümesini kapsıyorsa; bu takdirde, Ψ ailesine, Ω ailesinin yönlendirilmiş alt ailesi denir [30].

b) Ω ailesinin her yönlendirilmiş alt ailesinin, E kümesinde bir kapanış noktası varsa; bu takdirde, Ω ailesi, E kümesi yönünde yönlendirilmiştir denir [30].

3. 2. 33. Uyarı

$F:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu için, aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) X uzayındaki her Ω yönlendirilmiş ailesi için, $\Sigma = F(\Omega) = \{F(M)\}, M \in \Omega$, Y uzayında yönlendirilmiş bir ailedir.Aynısı, $F^{-} : F(X) \to X$ altında, $F(X)$ uzayındaki Σ için de geçerlidir [30].

b) Ω ailesi, X uzayında yönlendirilmiş aile ve Ψ ailesi, $F(\Omega) = \Sigma$ ailesinin yönlendirilmiş alt ailesi ise, Ω ve $F^{-}(\Psi) = \Omega'$ ailelerinin $\Omega'' = \{M \cap M'\}, M \in \Omega, M' \in \Omega'$ şeklinde ortak bir yönlendirilmiş alt ailesi vardır [30].

3. 2. 34. Tanım

(X, τ) topolojik uzayı ve Ω yönlendirilmiş ailesi verilsin. Eğer bir $p \in X$ noktasını içren her pre-θ-açık U kümesi, Ω ailesine ait bir kümeyi kapsıyorsa; bu takdirde, Ω ailesi p noktasına pre-θ-yakınsar denir.

3. 2. 35. Teorem

$F : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ üstten strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli fonksiyonu, her $x \in X$ için, $F(x)$ kompakt olacak şekilde verilsin. O halde, her $x \in X$ noktası ve x noktasına pre-θ-yakınsayan her Ω yönlendirilmiş ailesi için, $\{F(\Omega)\} = \Sigma$ ailesi $F(x)$ ailesi yönünde yönlendirilmiştir.

İspat:

Σ_1 ailesi, Σ ailesinin yönlendirilmiş alt ailesi olsun. O halde, Ω ve $\Omega' = \{F^{-}(N_1)\}, N_1 \in \Sigma_1$ ailelerinin Ω'' ortak yönlendirilmiş alt ailesi vardır. Ω'' ailesi, x nokatsına pre-θ-yakınsar. Varsayalım ki, $F(x)$'e ait hiçbir nokta, Σ_1 ailesinin kapanış noktası olmasın. Buradan, her $y \in F(x)$ için, $N_y \cap U_y = \varnothing$ olacak şekilde y noktasını içeren bir U_y açık kümesi ve $N_y \in \Sigma_1$ vardır. $F(x)$ kompakt olduğundan, U_y kümelerinin sonlu $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ birleşimi tarafından örtülür. Karşılık gelen $N_{y_1} \cap ... \cap N_{y_n}$ kesişimi, Σ_1 ailesinin bir N_1 elemanını kapsar. Ayrıca,

$N_1 \cap U = \varnothing$ olur. F çoğul-değerli fonksiyonu, üstten strongly θ-pre sürekli olduğundan, $F^-(Y-U)$ kümesi kapalıdır. Dolayısıyla, $X - F^-(Y-U)$ kümesi pre-θ-açıktır ve x noktasını içerir; ancak, Ω' ailesinin $F^-(N_1)$ elemanıyla kesişimi boş kümedir. Buradan, Ω' ailesinin alt ailesi Ω'', x noktasına pre-θ-yakınsamaz. Bu ise; bir çelişkidir. Dolayısıyla, Σ_1 ailesinin $F(x)$ kümesinde bir kapanış noktası vardır. Σ ailesi, $F(x)$ yönünde yönlendirilmiştir.

3. 2. 36. Teorem

(X,τ_1) *submaximal* uzayı ve $F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Eğer her $x\in X$ ve x noktasına pre-θ-yakınsayan her yönlendirilmiş Ω ailesi için, $\{F(\Omega)\}=\Sigma$ ailesi $F(x)$ yönünde yönlendirilmişse; bu takdirde, F çoğul-değerli fonksiyonu, üstten strongly θ-pre süreklidir.

İspat:

$B\subset Y$ kapalı kümesi verilsin. $F^-(B)=A$ ve $x\in pcl_\theta(A)-A$ olsun. X uzayında, x noktasını içeren tüm U pre-θ-açık kümeleri için, $U\cap A$ kümelerinin oluşturduğu, Ω yönlendirilmiş ailesi verilsin. X *submaxima*l uzay olduğundan, pre-θ-açık iki kümenin kesişimi bu uzayda yine pre-θ-açıktır. Dolayısıyla, $U_1,U_2\in P_\theta O(X,x)$ ve $U_1\cap A, U_2\cap A\in\Omega$ olmak üzere, $(U_1\cap A)\cap(U_2\cap A)$ kesişimi Ω ailesine ait bir K kümesini kapsar. Ayrıca, $\varnothing\notin\Omega$ olur. Sonuç olarak, Ω ailesi bir yönlendirilmiş ailedir. O halde, Ω, x noktasına pre-θ-yakınsar; böylece, $\Sigma=\{F(M)\}, M\in\Omega$ ailesi $F(x)$ yönünde yönlendirilmiştir. Ancak, her $M\in\Omega$ için, $F(x)\subset Y-B$ ve $(F(M)\cap B)\cap(Y-B)=\varnothing$ olur. Bu ise, $\{F(M)\cap B\}, M\in\Omega$, Σ ailesinin yönlendirilmiş alt ailesi olduğundan, $F(x)$ kümesinde bir kapanış noktası olması zorunluluğundan dolayı imkansızdır.

3. 2. 37. Uyarı

Son iki teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3. 2. 38. Sonuç

(X,τ_1) submaximal uzay olmak üzere; $F:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. Ayrıca; her $x\in X$ için $F(x)$ kümesi kompakt olsun. F çoğul-değerli fonksiyonunun üstten strongly θ-pre sürekli olması için, gerek ve yeter şart her $x\in X$ ve x noktasına pre-θ-yakınsayan her yönlendirilmiş Ω ailesi için, $\{F(\Omega)\}=\Sigma$ ailesinin $F(x)$ kümesi yönünde yönlendirilmiş olmasıdır.

İspat:

3. 2. 35. Teorem ile 3. 2. 36. Teorem gereği açıktır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, üstten ve alttan strongly θ-pre sürekli çoğul-değerli fonksiyonlar tanıtılıp, sağladığı özellikler incelenmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda; elde ettiğimiz tanım ve özelliklerin ideal topolojik uzaylara uygulamaları incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

[1]. Banzaru, T., 1972 Multifunctions and M-product Spaces. (Romanian). Bull. Stiin. Teh. Inst. Politeh Timisoara Ser. Mat. Fiz. Mer. Teor. Apl.
Studies 17: 17-23.

[2]. Banzaru, T., 1983 On the Upper Semicontinuity of the Upper Topological Limit for Multifunction Nets. Semin. Math. Fiz. Mer. Teor. Apl.
Studies: 59-64.

[3]. Berge, C., 1959 Espaces Topologiques Fonctions Multivoques. Paris: Dunod.

[4]. Caldas, M., Jafari, S., Noiri, T. and Simoes, M., 2007 A New Generalization of Contra-Continuity via Levine's g-closed Sets. Chaos, Solitons & Fractals
Studies 32: 1597-1603.

[5]. Cho, S.H., 2003 A Note on Strongly θ-precontinuous Functions. Acta Math. Hungar
Studies 101: 173-178.

[6]. Dontchev, J., Ganster, M. and Noiri, T., 2000 On p-closed Spaces. Internat. J. Math. Sci
Studies 24: 203-212.

[7]. El-Deeb, S. N., Hasanein, I. A. and Mashaour, A. S., 1983 On p-regular Spaces. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie
Studies 27: 311-315.

[8]. El- Naschie, M. S., 1998 On the Uncertainty of Cantorian Geometry and Two-Slit Experiment. Chaos, Solitons & Fractals
Studies 9: 517-29.

[9]. El- Naschie, M. S., 2004 The Symplictic Vacuum, Exotic Quasi-Particles and Gravitational Instantion. Chaos, Solitons & Fractals
Studies 22: 1-11.

[10]. El- Naschie, M. S., 2004 Quantum Gravity from Descriptive Set Theory. Chaos, Solitons & Fractals
Studies 19: 1339-44.

[11]. El- Naschie, M. S., 2006 Topics in the Mathematical Physics of E-infinity Theory. Chaos, Solitons & Fractals
Studies 30: 656-63.

[12]. Levine, N., 1963 Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces. Amer. Math. Monthly

Studies 70: 36-41.

[13]. Mashour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb, S. N., 1982 On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. Proc. Math. Phsy. Soc. Egypt
Studies 53: 47-53.

[14]. Mashour, A. S., Hasanein, I. A. and El-Deeb, S. N., 1982 A Note on Semi-Continuity and Precontinuity. Indian J. Pure Appl. Math.
Studies 13: 1119-1123.

[15]. Mashour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. and Hasanein, I. A., 1984 On Pretopological Spaces. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie
Studies 28: 39-45.

[16]. Mukherjee, M. N., Raychaudhuri, S. and Sinha, P., 2002 On Upper and Lower θ^*-Continuous Multifunctions. Southeast Asian Bulletin of Mathematics
Studies 26: 841-855.

[17]. Njastad, O., 1965 On Some Classes of Nearly Open Sets. Pasific J. Math.
Studies 15: 961-70.

[18]. Noiri, T., 2001 Strongly θ-Pre Continuous Functions. Acta Math. Hungar
Studies 90: 307-316.

[19]. Noiri, T., 1980 On δ-Continuous Functions. J. Korean Math. Soc.
Studies 16: 161-166.

[20]. Noiri, T. and Popa, V., 1993 Almost Weakly Continuous Multifunctions. Demonstrat. Math.
Studies 26: 363-80.

[21]. Nour, T. M. J., 1989 Contributions to the Theory of Bitopological Spaces. Ph. D. Thesis, Univ. of Delhi

[22]. Pal, M. C. and Bhattacharyya, P., 1996 Feeble and Strong Forms of Preirresolute Functions. Bull. Malaysian Math. Soc.
Studies 19: 63-75.

[23]. Ponomarev, V. I., 1964 Properties of Topological Spaces Preserved Under Multivalued Continuous Mappings. Amer. Math. Soc. Transl. II
Studies 38: 119-140.

[24]. Popa, V., 1988 Some Properties of H-almost Continuous Multifunctions. Problem Math.
Studies 10: 9-26.

[25]. Reilly, I. L. and Vamanamurthy, M. K., 1985 On α-Continuity in Topological Spaces. Acta Math. Hungar

Studies 45: 27-32.

[26]. Reilly, I. L. and Vamanamurthy, M. K., 1990 On Some Questions Concerning Preopen Sets. Kyungpook Math. J.
Studies 30: 87-93.

[27]. Rosenfeld, A., 1986 ‘Continuous’ Functions on Digital Pictures. Pattern Recognition Letters
Studies 4: 177-184.

[28]. Velicko, N. V., 1968 H-Closed Topological Spaces. Amer. Math. Soc. Transl.
Studies 78: 103-18.

[29]. Whyburn, G. T., 1968 Retracting Multifunctions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.
Studies 59: 343-348.

[30]. Whyburn, G. T., 1965 Directed Families of Sets and Closedness of Functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.
Studies 54: 688-692.

[31]. Willard, S., 1970 General Topology, Addison-Wesley Publishing Company Reading.