T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SOLİTON DALGA ÇÖZÜMLERİNİN İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUYLA ARAŞTIRILMASI VE DİĞER NÜMERİK ÇÖZÜMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

AYŞE BETÜL KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOLİTON DALGA ÇÖZÜMLERİNİN İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUYLA ARAŞTIRILMASI VE DİĞER NÜMERİK ÇÖZÜMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

AYŞE BETÜL KOÇ

Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Konya, 2009

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Galip OTURANÇ
Yrd. Dr. Aydın KURNAZ

Bu tezde, tek (solitary) dalgalar olarak bilinen lineer olmayan dalga çözümleri çalışıldı. Soliton bir etkileşim anından sonrada şeklini ve hızını koruyan özel tür dalgalardır.

İlk bölümde, tek dalgalara ait genel tanımlara ve bu konuda yapılan mevcut araştırmalara değinilmiştir. Soliton çözümler bulmada kullanılan bazı nümerik metotlar (Adomian Ayrışım, Varyasyonel İterasyon, Diferansiyel Dönüşüm ve İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metotları) ve bunların temel özellikleri ikinci bölümde sunulmuştur. Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ve KdV tipi denklem sistemlerinin mevcut soliton çözümlerine dair incelemeler üçüncü bölümde yer almaktadır. KdV tipi denklem sistemlerinin (genelleştirilmiş coupled Hirota-Satsuma denklemleri ve coupled modifiye KdV denklemleri) indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metoduyla soliton çözümlerinin araştırılmasına yönelik çalışmalar ilk defa bu tezde dördüncü bölümde verilmiştir. Kullanılan metodun etkinliğini göstermek için elde edilen çözümler analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Son bölümde ise çalışmaya yönelik değerlendirmede bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Tek dalga, Soliton, KdV Denklemleri, Adomian ayrışım metodu, Varyasyonel iterasyon metodu, Diferansiyel dönüşüm metodu, İndirgenmiş Diferansiyel dönüşüm metodu

ABSTRACT

MS Thesis

INVESTIGATING THE SOLITON SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATIONS BY THE REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD AND COMPARING WITH THE OTHER NUMERICAL SOLUTIONS

AYŞE BETÜL KOÇ

Selcuk University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisior: Assoc. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

Konya, 2009

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Asst. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

In this thesis, the solutions of nonlinear waves which is known as solitary waves are studied. A soliton is a particular type of solitary wave, which is not destroyed when it collides with another wave of the same kind.

In the first part, the general description of the solitary waves and a brief summary of the studies concerning with these waves are given. Some numerical methods used for obtaining solitary solutions (Adomian Decomposition, Variational İteration, Differentional Transformation and Reduced differentional Transformation) and their properties are mentioned in the second part. The third part deals with the review of the available studies concerning the soliton solutions of the KdV equations and the system of KdV-type equations. The main aim of this study is given in the fourth part. Namely, the soliton solutions of the systems of the KdV-type equations (The generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equations and the coupled modified KdV equations) are first investigated by the reduced differential transformation method. To show the effectiveness and efficiency of the method, the results are compared with the analytic solutions. Finally, a brief discussion of the study is given in the last part.

Key Words: Solitary wave, Soliton, KdV Equations, Adomian Decomposition Method, Varriational İteration Method, Differential Transfom Method, Reduced Differential Transfom Method

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Aydın Kurnaz yönetiminde hazırlanarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tez içerik olarak dört bölümden oluşmuştur.

Tez çalışmamın seçimi ve yürütülmesi sürecindeki yardımları ve yönlendirmelerinden dolayı tez yöneticisi kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın Kurnaz'a, çok değerli vaktini bizler için kullanan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Galip Oturanç'a, desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Yıldıray Keskin'e ve Arş. Gör. Yücel Çenesiz'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Haklarını ödeyemeyeceğim sevgili ailemede teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayşe Betül Koç

Konya, 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET……*i*
ABSTRACT……*ii*
ÖNSÖZ……..*iii*
1. GİRİŞ 1
1.1. Amaç ve Kapsam..... 1
1.2. Literatür Özeti 2
2.NÜMERİK METOTLAR VE TEMEL TANIMLARI 8
2.1. Adomian Ayrışım Metodu..... 8
2.2. Varyasyonel İterasyon Metodu ..... ….16
2.3. Diferansiyel Dönüşüm Metodu ..... .17
2.4.İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu…….....24
3. SOLİTON ÇÖZÜMLERİN BAZI YÖNTEMLERLE ARAŞTIRILMASI….....26
3.1. KdV Denklemi 26
3.2. KdV Tipi Denklem Sistemleri..... 37
4. İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE SOLİTON ÇÖZÜMLERİN ARAŞTIRILMASI 51
5. SONUÇ VE ÖNERİLER……59
6. KAYNAKLAR 60

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Solitonlar, sahip oldukları şekli ve hızı koruyarak yayılan ve yine herhangi bir etkileşim anından sonrada bu özellikleri korumaya devam eden lineer olmayan dalgalardır (Wadati 1983). Şeklini ve hızını koruyor olması, her alandan birçok bilim adamının solitonlar üzerine çalışmalar yapmasına neden olmuş ve böylece Soliton teorisi doğmuştur. Bu teori matematiğin birçok alanıyla ilişkili olmakla beraber fiziksel, kimyasal ve biyolojik bilimlerde birçok uygulamaya sahiptir. Dalga kavramı ilk olarak, ya bir cisim, ya bir su yüzeyi, ya da gergin bir zar üzerinde gösterilebilir.

Solitonlar günümüz teknolojisi için oldukça önemli bir yere sahiptir. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin en az kayıpla ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşabilmesi önemlidir. Ancak ne var ki normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalar etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Solitonlar ile elektromanyetik dalgaları otomatik olarak yineleyen aletlere ihtiyaç kalmayacaktır. Çünkü solitonlar yapısı gereği genişliklerini ve hızlarını değiştirmeden sabit tutabilmektedirler. Soliton dalgalar ile 10.000 km' ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletilebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller optik fiberler boyunca her iki yönde iletilebilmektedir. Bu sayede sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir (Vedenskii, 1992).

Son yıllarda uygulamalı matematik ve birçok mühendislik problemlerinde karşımıza çıkan, analitik çözümleri olmayan veya çözümleri oldukça zor ve zaman alıcı olan diferansiyel denklemlerin çözümleri için, çözümleri daha kolay ve daha çabuk sonuca götüren nümerik yöntemler önem kazanmıştır. Söz konusu yöntemler sayesinde karşılaşılan karmaşık durumlar giderilebilir ve diğer mühendislik problemlerinin çözümü, geliştirilen bilgisayar programları yardımıyla saniyeler içerisinde elde edilebilir.

Bu çalışmada ilk olarak Soliton teorisindeki tarihi gelişmelere değinilecek ve genel bir literatür özeti verilecektir. İkinci bölümde, özellikle son yıllarda birçok çalışmaya konu olan nümerik çözüm yöntemleri Adomian ayrışım, Varyasyonel iterasyon, Diferansiyel dönüşüm ve bunun bir modifikasyonu olan indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemleri kısaca özetlenecektir. Korteweg de Vries (KdV) denklemi ve KdV tipi denklem sistemlerinin yukarıda bahsedilen nümerik çözümlerle soliton çözümlerini inceleyen mevcut çalışmalar ve sonuçları üçüncü bölümde verilecektir. Dördüncü bölümde, KdV denklemi ve KdV tipi denklem sistemlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemiyle soliton çözümleri ilk olarak bu çalışmada verilecek olup diğer çözüm yöntemleriyle sonuçlar karşılaştırılacaktır. Son bölümde ise bu çalışmaya ait genel sonuç ve değerlendirmeler yer alacaktır.

1.2. Literatür Özeti

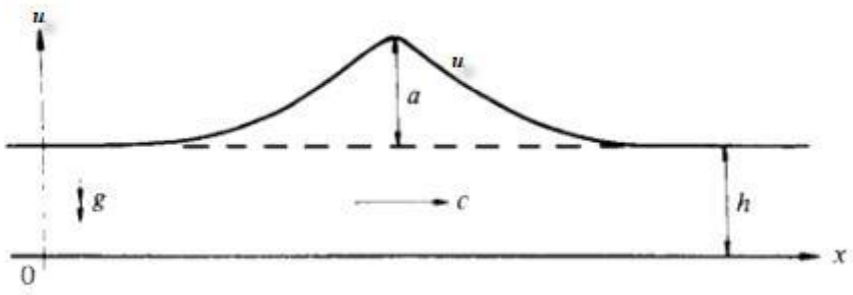
Tek (Solitary) dalgaların belgeli ilk gözlemleri 1834'te İskoç mühendis John Scott Rusell tarafından yapıldı. Russell bir çift atla birlikte, dar bir kanal boyunca sürüklenen bir botu izlemeye başladı. Russell at sırtında botu takip etti ve şaşırtıcı bir olayı gözlemledi: Bot aniden durduğunda bir eğri dalga bottan ayrılıyor ve oldukça iyi bir hızla ve tek geniş bir yükselti şeklinde ilerliyordu. Tek dalga (solitary wave), kanal boyunca şeklinde ve hızında bir değişme olmaksızın ilerledi, bilim adamı at sırtında dalgayı takibe devam etti, fakat saatte yaklaşık 8-9 mil hızla ilerleyen dalgayı 2 mil sonra kaybetti. İskoç bilim adamı, oldukça önemli bir doğa olayını gözlemlediğine inandı ve "Dalganın aktarımı (*The wave of translation*)" olarak isimlendirdiği çalışmaya devam edebilmek için bahçesinde deneysel bir su havuzu inşa ettirdi (Allen 1993).

Russell, gözlemlerinin sonucunu 1844'de "Dalgalar Üzerine Bildiri (Report on Waves)" makalesinde, tek dalganın periyodik bir dalga olmayıp şeklini değiştirmeyen, tümsek şeklinde, simetrik izole edilmiş şekilde yayılan bir dalga olduğunu ifade etmiştir. Tek dalganın u hızı ile sonlu h derinliğindeki sıvının serbest yüzeyi üzerindeki maksimum a genişliği arasında

$$u^2 = g\ \ h + a \tag{1.2.1}$$

bağıntısının varlığını ortaya koydu. Burada g yerçekimi ivmesini temsil etmektedir (Şekil 1.2.1). Hızın dalga genişliğine bağlı olduğu gerçeğinin görülmüş olması, dalga denklemin lineer olmadığı gerçeğini de ortaya koyması açısından oldukça önemlidir (Newell 1985, Ablowitz ve Clarkson 1991, Drazin ve Johnson 1996).

Rusell'ın bildirisinden sonra uzun bir süre bu konu bilim adamlarının çalışmalarının dikkat çekmedi. 1870'lerde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizi ile matematiksel çözümlerin keşfi başladı. Boussinesq ve Rayleigh, Russell'ın gözlemlerini yüzeysel olarak incelediler ve deneyleri bir laboratuarda tekrar gerçekleştirdiler. Sıkıştırılamayan sıvıların hareket denklemini (1.2.1) denklemi ile aynı formda çıkardılar. Tek dalga profili için bir denklem oluşturmuşlarsa da bu denklemi çözüm kabul eden herhangi bir diferansiyel denklem bulamamışlardır.



Şekil 1.2.1: Tek dalganın tanımlanmasında kullanılan parametre ve değişkenler (Drazin,1996)

Tek dalgaların keşfinden 60 yıl sonra, bu doğa olayı için teorik yapı oluşturulmaya başlanmış ve 1895'de Hollandalı bilim adamı olan Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries tarafından Russell'ın gözlemlediği sığ su akıntılarındaki su dalgaları için bugünkü soliton teorisinin üzerine kurulduğu *Korteweg de Vries (KdV) denklemi* olarak tanınan matematiksel bir model ortaya konulmuştur. x ve t sırasıyla uzaklık ve zaman koordinatları olmak üzere dalga yüzeyinin yüksekliği $\eta(x,t)$ ile gösterilirse, ρ yoğunluğuna sahip bir akışkan üzerinde tek yöndeki dalga hareketi,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) \tag{1.2.2}$$

denklemi ile ele alınır. Burada h suyun denge derinliği , g yerçekimi ivmesi , α keyfi bir sabit, $\beta = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{\rho g}$ ve T ise su yüzeyi gerilimidir. Uygun dönüşümlerle

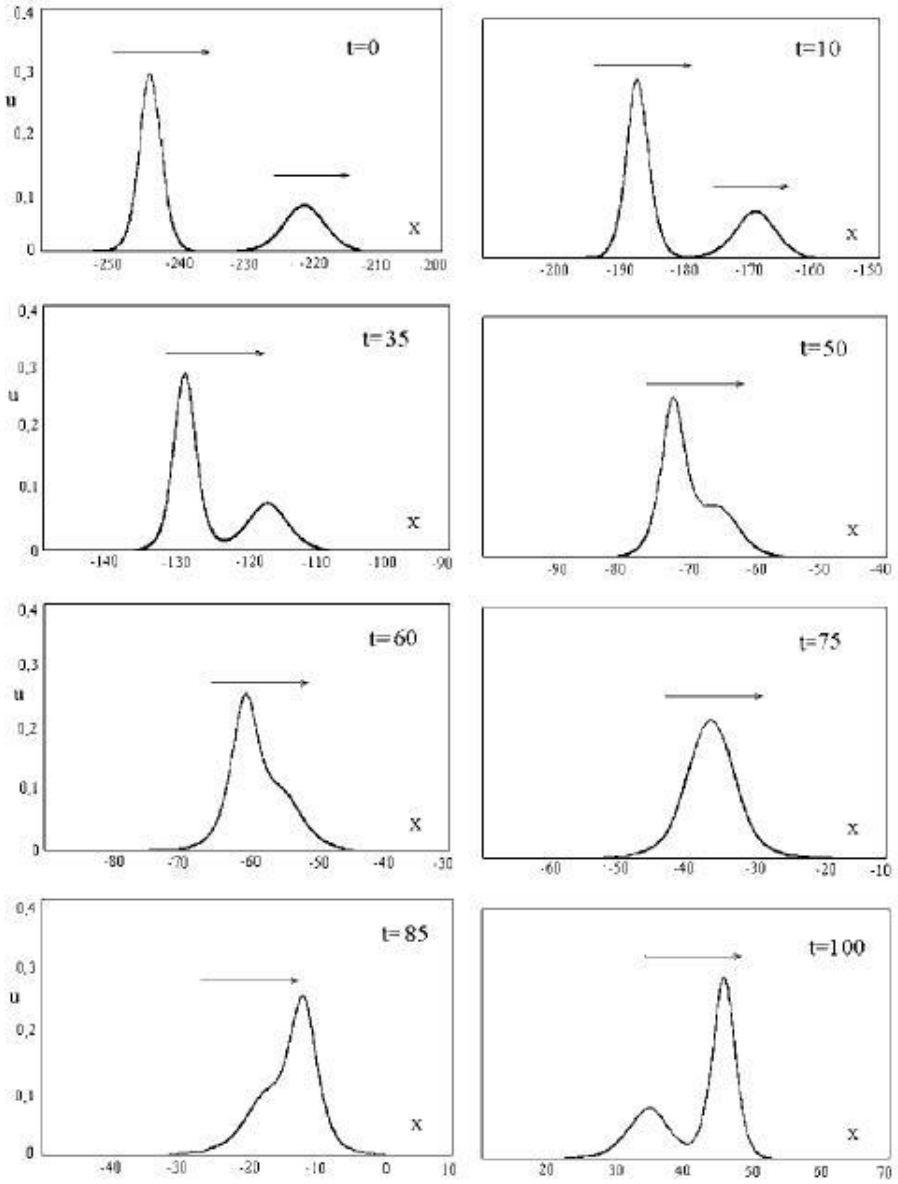
$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1.2.3)$$

KdV denkleminin standart formlarından biri oluşur. Bu denklem, içerisindeki lineer olmayan terimin etkisinden dolayı dalga olayının uzun süre yayıldığını gösterir (Dodd ve ark. 1982, Drazin ve Johnson 1996, Nuriyev 1996, Hirota 2004).

1955'de Fermi, Pasta ve Ulam tarafından "Fermi-Pasta-Ulam (FPU)'nun tekrarlanan olayı" olarak tanınan bir çalışma yürütülmüştür. Fermi, Pasta ve Ulam, Los Alamos bilimler laboratuarındaki lineer olmayan ve harmonik olmayan oskilatör sistemi üzerine çalışırken, 1914'de Debye tarafından ortaya atılan "Harmonik olmayan bir kafesin sonlu ısı iletkenliği, yaylardaki lineer olmayan kuvvetler yüzündendir" iddiasına dayanarak, sistemde modlar arasındaki lineer olmayan etkileşimin sistemin enerjisinin bütün modları boyunca düzenli olarak dağılmasına yol açmasını beklediler. Fakat sonuçlar, beklenenin aksine, enerjinin bütün modları boyunca yayılmadığını ancak bir süre sonra deneyin başladığı anda bulunduğu başlangıç modunda yeniden toplandığını gösterdi (Nuriyev 1996). Bu çalışmadan elde edilen beklenmedik sonuçlar, lineer olmayan sistemlerin bu tiplerine olan ilgiyi artırmış ve tek dalgalar üzerine yapılan birçok çalışmaya ön ayak olmuştur.

FPU'nun dikkat çeken çalışması, 1965'de Martin Kruskal ve Norman Zabusky'nin çalışmasındaki tekrarlamanın nasıl olduğunu anlamak için lineer olmayan sabit bir sona sahip birim kütleli özdeş parçacıkların bir hat üzerindeki ilerleyişi sisteminin sürekli bir modelini yeniden kurmalarına ve böylece tek (solitary) dalgaların en önemli özelliklerinden birini belirlemelerine neden oldu. Bu çalışma, tek dalgaların, periyodik sınır koşulları tarafından uygulanan güçle yayılım döngüsünden geçerek oluşturdukları birbirleriyle olan etkileşimlerin formlarında bir değişiklik meydana getirmediğini, ancak fazlarında çok küçük bir değişiklik oluşturduğunu göstermiştir. Zabusky ve Kruskal, tek dalgaların parçacık benzeri karakter sergilemesinden dolayı, Yunancada parçacık anlamına gelen "*on*" kelimesinden yola çıkarak tek dalgaları "*Soliton*" 'lar olarak adlandırmışlardır. Bu parçacık benzeri hareket periyodik sınır koşullarına bağlı değildir. Zabusky ve Kruskal sayısal hesaplamalarla, KdV denkleminin sabit dalga çözümlerini buldular.

KdV denklemine ait, (şekil 1.2.2)'deki gibi başlangıç hızları $v_1 > v_2$ olarak belirlenmiş, iyi tanımlı iki tek dalga çözümünü ele almışlardır. Uzun ve dolayısıyla hızlı olan dalga $t = 0$ anında solda bulunmaktadır. Zaman ilerledikçe uzun ve hızlı olan soliton kısa ve yavaş olan solitona yetişmektedir. Büyük olanı yüksek bir hızla ilerlediğinden kısa olanı yakalar, çarpıştıkları $t = 75$ anında tek dalga haline gelirler, daha sonra hızlı olan yavaş olanı sollar ve $t = 100$ anından itibaren başlangıç formlarındaki şekil ve hızlarını yeniden almış olarak yollarına devam ederler (Munteanu ve Donescu 2004).



Şekil 1.2.1 : Aynı eksen üzerinde ilerleyen farklı hızlardaki iki solitonun etkileşimi (Munteanu, Donescu, 2004)

Bundan sonra Zabusky 1967'de iki solitonun gerçek fiziksel etkileşimini sayısal olarak göstermiş ve Lax 1968'de KdV denklemi tarafından yönlendirilen lineer olmayan etkileşim altında iki farklı çözümün korunduğunun analitik ispatını vermiştir.

Gardner, Green, Kruskal ve Miura, 1974'de lineer olmayan dönüşüm denklemlerinin integrallenebilmesi için ters dağılım dönüşümünü (*Inverse Scattering Transform*) tanıtmışlardır (Ablowitz ve Segur 1981).

1973'te Wahlquist ve Estabrook, bu denklemlerin bir Backlund dönüşümü altında değişmez kalabileceğini ve bu denklemler arasında aşikar çözümlerle ilişkili basit formüller olarak sunulmuş çoklu-soliton çözümlere sahip olduğunu göstermişlerdir.

19. yüzyıl sonlarına kadar ele alınan kayda değer sayıdaki dönüşüm denklemi (Sine-Gordon, Korteweg de Vries, Boussinesq ve Schrödinger gibi), bilim adamlarının lineer olmamanın doğası hakkındaki düşüncelerini kökünden değiştirdi.

KdV denkleminin tek dalga çözümünü, 2001'de Wazwaz, Adomian ayrışım metoduyla, 2007'de yine Wazwaz, varyasyonel iterasyon metoduyla, 2008'de Kangalgil ve Ayaz diferansiyel dönüşüm metoduyla ve 2009'da ise Keskin ve Oturanç indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metoduyla kurmuşlardır.

Hirota ve Satsuma iki uzun dalga arasındaki etkileşimi modelleyerek KdV tipi denklemlerden oluşan bir (*coupled*) sistem tanıtmışlardır (1981).

1999'da Wu ve arkadaşları ise Hirota ve Satsuma'nın modellediği denklem sisteminin genelleştirilmesi olarak lineer olmayan dağılım denklemleri ile ilgili yeni genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denklem sistemini ve coupled modifiye KdV denklem sistemini (*coupled* MKdV *denklem sistemi*) kurmuşlardır.

2001'de Fan tarafından tanh-fonksiyon metodu kullanılarak genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denklem sisteminin ve coupled MKdV denklem sisteminin soliton çözümleri elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denklem sisteminin tek dalga çözümlerini, 2004'te Kaya ve yine aynı yıl içerisinde Raslan, Adomian ayrışım metodunu kullanarak, diğer taraftan 2007'de Soliman ve Abdou, varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak elde etmişlerdir.

Coupled MKdV denklem sisteminin tek dalga çözümlerini ise 2004'te Raslan ve 2008'de ise Soliman ve Abdou, Adomian ayrışım metodunu kullanarak, 2007'de Ganji ve arkadaşları, varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak elde etmişlerdir.

2. NÜMERİK METOTLAR VE TEMEL TANIMLARI

Bu bölümde soliton çözümlere sahip KdV denklemi ve KdV tipi denklem sistemlerinin incelenmesinde kullanılabilen nümerik metotlardan Adomian Ayrışım, Varyasyonel İterasyon, Diferansiyel Dönüşüm ve İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metotlarının temel tanım ve özellikleri sırasıyla verilecektir.

2.1. Adomian Ayrışım Metodu

1981'de G.A. Adomian tarafından ortaya konulan daha sonra Yves Cherruault ve ekibi tarafından geliştirilen ayrışım metodu, bilinmeyen fonksiyonun, özel tip polinomlar (Adomian polinomları) kullanılmasıyla terimleri indirgenerek belirlenen bir seri formu olarak ayrıştırılmasına dayanır. Lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklemleri (cebirsel denklemleri, diferansiyel denklemleri, kısmi diferansiyel denklemleri gibi) çözer.

Genel olarak, problemlerin çözümünde lineerleştirme ve kesikleme prensiplerine dayanan sayısal yöntemler kullanılmaktadır, ancak bu metotların kullanılması ile elde edilen çözüm, problemin analitik çözümünden uzaklaşmasına sebep olur. Ayrışım metodu başlangıçta, metodun etkinliği sadece örneklerle ortaya konulduğundan, bazı şüpheler uyandırmış olsa da daha sonra teorik olarak yakınsaklık ispatları yapılmış ve çeşitli modellere uygulanmıştır. (Adomian 1984, Adomian 1988, Cherruault ve Adomian 1993, Adomian 1994, Abbaoui ve ark. 1995, Wazwaz 1999, Wazwaz 2002) çalışmalarından hareketle Adomian ayrışım metoduna ait şu bilgiler verilebilir.

Tanım 2.1.1.

Bir değişkenli skaler bir fonksiyon için n. mertebeden türev operatörü $\frac{d^n}{d\lambda^n}$ olmak üzere Adomian polinomları,

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}$$

formülü ile tanımlanır.

G.Adomian, çözümleri ararken öncelikle

$$F(u) = g \tag{2.1.1}$$

denklemini yapısal olarak ele almıştır. Burada u bilinmeyen fonksiyon ve g sürekli bir fonksiyon olup F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferansiyel operatörü gösterir. Adomian'ın metodunun yapısal işlem adımlarını şu şekilde verebiliriz.

Lineer terim $L+R$ şeklinde ayrıştırılır. N lineer olmayan operatör ve L yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatör olsun. O halde (2.1.1) denklemini

$$Lu(x) + Ru(x) + Nu(x) = g(x) \tag{2.1.2}$$

şeklinde verebiliriz. (2.1.2)'nin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}\mathrm{g} - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.1.3}$$

bulunur. Ayrışım metodu, u'nin çözümünü

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{2.1.4}$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan $Nu(x)$ terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.1.5}$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n'ler $u_0, u_1, \ldots, u_n$'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlardır. u ve Nu'lar, sırası ile,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \,,$$

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \tag{2.1.6}$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n'ler (2.1.6)'dan

$$n! A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n\right)\right]_{\lambda=0} \tag{2.1.7}$$

ifadesiyle bulunur. (2.1.4) ve (2.1.5) ifadeleri (2.1.2)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \tag{2.1.8}$$

eşitliği görülür. Burada $\theta = u(x,0)$ dır. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{aligned} u_0 &= \theta + L^{-1}g\,, \\ u_1 &= -L^{-1}R\,u_0 - L^{-1}A_0\,, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}R\,u_n - L^{-1}A_n\,,\ n \geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

şeklinde yazılır. Bulunan u_n terimleri ile (2.1.1) probleminin çözümü seri formunda hesaplanmış olur. Ancak $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sonsuz serisinin yerine belli sayıda seri terimleri kullanılarak yaklaşık çözüm,

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_n \tag{2.1.10}$$

alınır.

Aşağıda farklı durumlar için Adomian polinomlarının bulunuşundan bahsedilecektir (Wazwaz 1999, Wazwaz 2002).

I. Durum :

Eğer $F(y) = y^2$ ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{2.1.11}$$

olmak üzere lineer olmayan $F(y) = y^2$ terimi (2.2.11)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)^2 \tag{2.1.12}$$

bulunur. (2.2.12)'deki eşitliğin sağ tarafı açılıp, indis toplamları aynı olan terimler bir araya getirilirse

$$\begin{aligned} F(y) = {} & y_0^{\,2} + 2y_0y_1 + 2y_0y_2 + y_1^{\,2} + 2y_0y_3 + y_1y_2 + 2y_0y_4 \\ & + 2y_1y_3 + y^2 + 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 + \cdots \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

elde edilir. (2.2.13)'den $F(y) = y^2$ için Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y_0^{\,2}\,,\\
A_1 &= 2y_0y_1\,,\\
A_2 &= y_1^{\,2}+2y_0y_2\,,\\
A_3 &= 2y_1y_2+2y_0y_3,\\
A_4 &= y_2^{\,2}+2y_1y_3+2y_0y_4\,,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.14}
$$

formunda bulunur.

II. Durum:

Lineer olmayan polinom tipindeki terimler için $n\in Z^{+}$ olmak üzere aşağıdaki genelleme yapılabilir:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y_0^{\,n}\,,\\
A_1 &= n\,y_0^{\,n-1}\,,\\
A_2 &= \frac{1}{2}n\;\;n-1\;\;y_0^{\,n-2}\,y_1^{\,2}+n\,y_0^{\,n-1}\,y_2\,,\\
A_3 &= \frac{1}{6}n\,(n-1)(n-2)\,y_0^{\,n-3}\,y_1^{\,3}+n\,(n-1)\,y_0^{(n-2)}y_1y_2+n\,y_0^{(n-1)}y_3\,,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.15}
$$

III. Durum :

Eğer $n\in Z^{-}$ ise bu takdirde Adomian polinomları,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y_0^{-n}\,,\\
A_1 &= -n\,y_0^{-n+1}\,,\\
A_2 &= -\frac{1}{2}n\;\;n+1\;\;y_0^{-n+2}\,y_1^{\,2}-n\,y_0^{-n+1}\,y_2\,,\\
A_3 &= -\frac{1}{6}n\,(n+1)(n+2)\,y_0^{-n+3}\,y_1^{\,3}-n\,(n+1)\,y_0^{-(n+2)}y_1y_2-n\,y_0^{-(n+1)}y_3\,,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.16}
$$

formülüyle bulunur.

IV. Durum :

Eğer lineer olmayan terim $F(y)=y\,y_x$ ise

$$
y=\sum_{n=0}^{\infty}y_n\,,\qquad y_x=\sum_{n=0}^{\infty}y_{n_x}\,,
\tag{2.1.17}
$$

olmak üzere (2.1.17) ifadesi $F(y) = y\, y_x$ 'de yerine yazılırsa

$$F\left(y\right) = \left(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots\right) \times \left(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots\right)_x \tag{2.1.18}$$

ve indis toplamları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0 y_{0_x}\,, \\ A_1 &= y_{0_x} y_1 + y_0 y_{1_x}\,, \\ A_2 &= y_{0_x} y_2 + y_{1_x} y_1 + y_{2_x} y_0\,, \\ A_3 &= y_{0_x} y_3 + y_{1_x} y_2 + y_{2_x} y_1 + y_{3_x} y_0\,, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

bulunur.

V. Durum :

$F(y) = \sin y$ ise o zaman ilk olarak $A_0 = F(y_0)$ ifadesini diğer terimlerden ayırmalıyız. $F(y) = \sin y$, lineer olmayan terimi (2.1.11)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = \sin[\, y_0 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)] \tag{2.1.20}$$

eşitliği görülür. Bu ifadede $\theta = y_0$, $\phi = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$ alınırsa,

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \tag{2.1.21}$$

ifadesinden,

$$F(y) = \sin y_0 \cos(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) + \cos y_0 \sin(\, y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) \tag{2.1.22}$$

bulunur. Burada $\cos(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)$ ve $\sin(\, y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} F(y) = \sin y_0 &\left[1 - \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + \cdots)^2 + \frac{1}{4!}(y_1 + y_2 + \cdots)^4 - \cdots\right] \\ + \cos y_0 &\left[\,(y_1 + y_2 + \cdots) - \frac{1}{3!}(y_1 + y_2 + \cdots)^3 + \cdots\right] \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} F(y) = \sin y_0 &\left[1 - \frac{1}{2!}({y_1}^2 + 2y_1y_2 + \cdots) + \frac{1}{4!}({y_1}^4 + {y_2}^4 + \cdots) - \cdots\right] \\ + \cos y_0 &\left[\,(y_1 + y_2 + \cdots) - \frac{1}{3!}({y_1}^3 + {y_2}^3 + \cdots) + \cdots\right] \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

bulunur. (2.1.24) ifadesi düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \sin y_0 \,, \\
&A_1 = y_1 \cos y_0 \,, \\
&A_2 = y_2 \cos y_0 - \frac{1}{2!} y_1^{\,2} \sin y_0, \\
&A_3 = y_3 \cos y_0 - y_1 y_2 \sin y_0 - \frac{1}{3!} y_1^{\,3} \cos y_0 \,, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.25}
$$

elde edilir.

VI. Durum :

$F(y) = \cos y$ durumunda, yukarıda yapılan işlemlerin benzeri verilen lineer olmayan terim için uygulandığında,

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \cos y_0 \,, \\
&A_1 = -y_1 \sin y_0 \,, \\
&A_2 = -y_2 \sin y_0 - \frac{1}{2!} y_1^{\,2} \cos y_0, \\
&A_3 = -y_3 \sin y_0 - y_1 y_2 \cos y_0 + \frac{1}{3!} y_1^{\,3} \sin y_0 \,, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.26}
$$

bulunur.

VII. Durum :

$F(y) = \sinh y$ ve $F(y) = \cosh y$ şeklinde hiperbolik lineer olmayanlığa sahip ise aynı algoritma kullanılarak, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \sinh y_0 \,, \\
&A_1 = y_1 \cosh y_0 \,, \\
&A_2 = y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} \sinh y_0, \\
&A_3 = y_3 \cosh y_0 + y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{3!} y_1^{\,3} \cosh y_0 \,, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.27}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \cosh y_0 \,, \\
&A_1 = y_1 \sinh y_0 \,, \\
&A_2 = y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} \cosh y_0, \\
&A_3 = y_3 \sinh y_0 + y_1 y_2 \cos y_0 + \frac{1}{3!} y_1^{\,3} \sinh y_0 \,, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.28}
$$

formülleriyle elde edilir.

VIII. Durum :

$F(y) = e^{y}$ ise bu takdirde $F(y_0) = e^{y_0}$ teriminin diğer terimlerden ayrılması gerekir. $F(y) = e^{y}$ ifadesi (2.1.11)'de yerine yazılırsa

$$F(y) = e^{(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots)} \tag{2.1.29}$$

olur ki bu ifade,

$$F(y) = e^{y_0} e^{y_1 + y_2 + y_3 \cdots} \tag{2.1.30}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son ifadedeki $e^{y_1 + y_2 + y_3 \cdots}$ terimi Taylor serisine açılırsa

$$
\begin{aligned}
F(y) &= e^{y_0} \times \left[1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots) + \frac{1}{2!}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots)^2 + \cdots \right] \\
&= e^{y_0} + y_1 e^{y_0} + \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} \right) e^{y_0} + \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^{\,3} \right) e^{y_0} \\
&+ \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^{\,2} + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} y_2 + \frac{1}{4!} y_1^{\,4} \right) e^{y_0} + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.1.31}
$$

bulunur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
&A_0 = e^{y_0} \,, \\
&A_1 = y_1 e^{y_0} \,, \\
&A_2 = \left(y_2 + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} \right) e^{y_0} \,, \\
&A_3 = \left(y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3!} y_1^{\,3} \right) e^{y_0} \,, \\
&A_4 = \left(y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^{\,2} + \frac{1}{2!} y_1^{\,2} y_2 + \frac{1}{4!} y_1^{\,4} \right) e^{y_0} \,, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.32}
$$

elde edilir.

IX. Durum :

$F(y)=e^{-y}$ ise bu takdirde Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
&A_0=e^{-y_0}\,,\\
&A_1=-y_1e^{-y_0}\,,\\
&A_2=\left(-y_2+\frac{1}{2!}y_1^{\,2}\right)e^{-y_0}\,,\\
&A_3=\left(-y_3+y_1y_2-\frac{1}{3!}y_1^{\,3}\right)e^{-y_0}\,,\\
&A_4=\left(-y_4+y_1y_3+\frac{1}{2!}y_2^{\,2}-\frac{1}{2!}y_1^{\,2}y_2+\frac{1}{4!}y_1^{\,4}\right)e^{-y_0}\,,\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.1.33}$$

şeklinde olur.

X. Durum :

$F(y)=\ln y$, $y>0$ ise bu takdirde, bu ifade (2.1.11)'de yerine yazılırsa

$$F(y)=\ln(y_0+y_1+y_2+\cdots) \tag{2.1.34}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.1.34) ifadesi

$$F(y)=\ln\left[y_0\left(1+\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_2}{y_0}+\cdots\right)\right] \tag{2.1.35}$$

formunda yazılabilir. $\ln(\alpha\beta)=\ln\alpha+\ln\beta$ olduğundan (2.1.35)

$$F(y)=\ln y_0+\ln\left(1+\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_2}{y_0}+\cdots\right) \tag{2.1.36}$$

olur. (2.1.36) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned}
F(y)=\ln y_0&+\left(\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_2}{y_0}+\frac{y_3}{y_0}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_2}{y_0}+\cdots\right)^2\\
&+\frac{1}{3}\left(\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_2}{y_0}+\cdots\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{y_1}{y_0}+\frac{y_2}{y_0}+\cdots\right)^4+\cdots
\end{aligned} \tag{2.1.37}$$

elde edilir. (2.1.37)'da indis toplamları aynı olan terimler gruplandırılırsa, Adomian polinomları aşağıdaki formda bulunur.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \ln y_0, \\
A_1 &= \frac{y_1}{y_0}, \\
A_2 &= \frac{y_2}{y_0} - \frac{1}{2}\frac{y_1^{\,2}}{y_0^{\,2}}, \\
A_3 &= \frac{y_3}{y_0} - \frac{y_1 y_2}{y_0^{\,2}} + \frac{1}{3}\frac{y_1^{\,3}}{y_0^{\,3}}, \\
A_4 &= \frac{y_4}{y_0} - \frac{1}{2}\frac{y_2^{\,2}}{y_0^{\,2}} - \frac{y_1 y_3}{y_0^{\,2}} + \frac{y_1^{\,2} y_2}{y_0^{\,3}} - \frac{1}{4}\frac{y_1^{\,4}}{y_0^{\,4}}, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.38}
$$

XI. Durum :

$F(y) = \ln(1+y)$, $-1 < y \le 1$ ise o zaman Adomian polinomları

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \ln(1+y_0), \\
A_1 &= \frac{y_1}{1+y_0}, \\
A_2 &= \frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2}\frac{y_1^{\,2}}{(1+y_0)^2}, \\
A_3 &= \frac{y_3}{1+y_0} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3}\frac{y_1^{\,3}}{(1+y_0)^3}, \\
A_4 &= \frac{y_4}{1+y_0} - \frac{1}{2}\frac{y_2^{\,2}}{(1+y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^2} + \frac{y_1^{\,2} y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{y_1^{\,4}}{(1+y_0)^4}, \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.1.39}
$$

şeklinde olur.

2.2. Varyasyonel İterasyon Metodu

Analitik çözüme hızla yakınsayan başarılı yaklaşımlar veren Varyasyonel İterasyon Metodu, Ji Huan He (1997) tarafından tanıtılmıştır. Bu metot ile elde edilen nümerik çözümlerin hata miktarının az olmasının yanında işlemler sırasında kullanılacak bilgisayarda yüksek kapasiteye de ihtiyaç duyulmaması metodun uygulamalarını artırmıştır. He, geliştirdiği metodu otonom diferansiyel denklemlere (2000), lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere (2004), integro diferansiyel denklemlere uyguladı (Wang ve He 2007). He'nin metodunu, Abdou ve Soliman (2005), Burger ve coupled Burger, Schrödinger-KdV, genelleştirilmiş KdV ve sığ su

denklemlerinin çözümlerini araştırmada kullandılar. Momani ve Abuasad, lineer Helmholtz kısmi diferansiyel denklemin çözümü için bu metodu uyguladılar. Ganji ve arkadaşları (2006) lineer olmayan Joulent-Miodek, coupled KdV ve coupled MKdV denklemlerinin çözümlerini varyasyonel iterasyon metodu ile araştırdılar. He ve Wu (2006), metodu lineer olmayan dağılım denklemleri için incelediler. Rafei ve Daniali (2007), WBK denklemlerine; Yusufoğlu ve Bekir (2007) ise RLW denklemine sayısal çözüm elde etmek için He'nin metodunu kullandılar.

Varyasyonel iterasyon metodunun uygulanmasında, L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ ise homojenliği bozan terim olmak üzere, çözüm aranan diferansiyel denklem,

$$Lu + Nu = g(x) \tag{2.2.1}$$

formunda ele alınır.

Varyasyonel iterasyon metoduna göre denklemin,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \; Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s) \; ds \tag{2.2.2}$$

formundaki varyasyon fonksiyonu kurulur. Burada λ, Lagrange çarpanı (Inokuti 1978) olup varyasyon teorisinden hareketle Maple, Mathematica gibi paket programları yardımıyla hesaplanır. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış varyasyon (He 1999) olup $\delta\tilde{u}_n = 0$'dır. Bulunan λ sayı değerine göre (2.2.2) varyasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek aranan çözüm fonksiyonu için rekürans bağıntısı oluşturulmuş olur. Başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon u_0 olarak seçilmek suretiyle $n > 0$ için u_n terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur. Son olarak çözüm fonksiyonu,

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n \tag{2.2.3}$$

eşitliğinden elde edilir.

2.3. Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Literatürde lineer, lineer olmayan, adi türevli ve kısmi türevli bir çok diferansiyel denklemin çözümünde başarıyla kullanılan Diferansiyel Dönüşüm Metodu'nu ilk olarak Zhou (1986) tanıttı. Zhou, bu çalışmasında elektrik ve elektrik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini

inceledi. Chen (1999), lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için kapalı seri çözüm formları elde ederek Zhou'nun metodunu geliştirdi.

Diferansiyel dönüşüm metodu, geleneksel Taylor seri metodundan farklıdır. Verilen fonksiyonların ilgili türevlerinin sembolik hesaplamalarını gerektiren Taylor Metodunda büyük mertebeler için yapılacak işlemler oldukça zahmetli olup uzun süre uğraşmayı gerektirir. Diferansiyel dönüşüm metodu ise hesaplanacak kısmın miktarını azaltır ve bir çok probleme kolayca uygulanabilir. Bu çözüm, diferansiyel denklem ve başlangıç bilgisi kullanarak taylor serisinin çözümünün katsayılarını hesaplamayı kapsar. Jang (2001), diferansiyel dönüşümü, diferansiyel denklemlerin taylor serisi çözümünü elde etmede bir iteratif prosedür olarak ele almıştır.

Diferansiyel dönüşüm metodu, seri formda hemen hemene analitik çözümler kurar. Sonsuz seri çözüm kapatılabildiği takdirde analitik çözüm fonksiyonuna ulaşılmış olur. Bu metot ile diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülebilir ve elde edilen cebirsel denklemler de bazı basit işlemlerle kolaylıkla sistematik bir şekilde çözülebilir.

Burada literatürde mevcut olan tek boyutlu, iki boyutlu ve *n* boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi hakkında bilgi verilecektir (Zhou 1986, Chen ve ark. 1996, Ayaz 2003, Kurnaz ve ark. 2005).

2.3.1. Tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi

Bu yöntem, tek değişkene bağlı diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır.

Metodun daha kolay kavranabilmesi için öncelikle diferansiyel operatörünün özelliklerini verelim:

1. $\frac{d}{dx}\left(u(x) \pm \alpha\, v(x)\right) = \frac{d}{dx}u(x) \pm \alpha \frac{d}{dx}v(x)$ (α keyfi sabit)

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2}u(x)$

3. $\frac{d^n}{dx^n}\left(u(x)v(x)\right) = v(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x) + \binom{n}{1}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u(x) + \ldots$

$$+ \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}v(x)\frac{d}{dx}u(x) + u(x)\frac{d^n}{dx^n}u(x)$$

Tanım 2.3.1.

Tek bileşenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k)$ olmak üzere, $u(x)$ ' nin tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0} \tag{2.3.1}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.2.

Diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu, $U(k)$ dönüşüm fonksiyonunun tersini ifade eder ve

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)x^k \tag{2.3.2}$$

biçimde tanımlanır. (2.3.2) eşitliğinde (2.3.1) ifadesi yazılarak aşağıdaki (2.3.3) eşitliği elde edilir.

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=0}x^k \tag{2.3.3}$$

$w(x)$ cebirsel işlemler içeren fonksiyon ve $W(k)$ ise bu fonksiyona karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonu olmak üzere, (2.3.1) ve (2.3.2) tanımlamaları kullanılarak tek boyutlu diferansiyel dönüşümü için bazı cebirsel işlemleri verelim (Chen ve Ho 1996, Chen ve Liu 1998, Chen ve Ho 1999, Abdel-Halim 2004, Arikoglu ve Özkol 2004):

Fonksiyon		**Dönüşüm**
$w(x)=u(x)\mp v(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=U(k)\mp V(k)$
$w(x)=\ c\ u(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=cU(k)$
$w(x)=\ \frac{d}{dx}u(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=(k+1)U(k+1)$
$w(x)=\ \frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$\Rightarrow$	$W(k)=(k+1)(k+2)...(k+r)\ U(k+r)$
		$=\ \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$

Fonksiyon		**Dönüşüm**
$w(x)=u(x)v(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$
$w(x)=x^m$	$\Rightarrow$	$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$
$w(x)=u(x)\dfrac{d^2}{dx^2}v(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$
$w(x)=\dfrac{d}{\partial x}u(x)\dfrac{d}{\partial x}v(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$
$w(x)=u(x)v(x)s(x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=U(k)\otimes V(k)\otimes S(k)$
		$=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r-t)$
$w(x)=u(x)v(x)\dfrac{d^2}{dx^2}s(x)$	$\Rightarrow$	
		$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r)V(t)S(k-r-t+2)$
$w(x)=a^{\lambda x}$	$\Rightarrow$	$W(k)=\dfrac{\lambda^k(\ln a)^k}{k!}$
$w(x)=sh(\lambda x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{k!} & k\ tek\ ise\\ 0 & k\ çift\ ise\end{cases}$
$w(x)=ch(\lambda x)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\begin{cases}0 & k\ tek\ ise\\ \dfrac{\lambda^k}{k!} & k\ çift\ ise\end{cases}$
$w(x)=\sin(ax+b)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k+b\right)$
$w(x)=\cos(ax+b)$	$\Rightarrow$	$W(k)=\dfrac{a^k}{k!}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k+b\right)$
$w(x)=\int_{x_0}^{x}u(t)v(t)dt$	$\Rightarrow$	$W(k)=\dfrac{U(k-1)\otimes V(k-1)}{k}$

2.3.2. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi

Tanım 2.3.3.

İki bileşenli *w(x,y)* fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu *W(k,h)* olmak üzere, *w(x,y)*' nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{2.3.4}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.4.

W(k,h) dönüşüm fonksiyonunun tersi, diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu şeklinde isimlendirilir ve

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^{k}y^{h} \tag{2.3.5}$$

ile tanımlanır. (2.3.4) ve (2.3.5) eşitlikleri dikkate alındığında (2.3.6) eşitliği elde edilir:

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}x^{k}y^{h}\,. \tag{2.3.6}$$

$w(x,y)$ cebirsel işlemler içeren fonksiyonlar ve $W(k,h)$ ise bu fonksiyonlara karşılık gelen diferansiyel dönüşüm fonksiyonları olmak üzere (2.3.4) ve (2.3.5) denklemleri yardımıyla (Zhou 1986, Ayaz 2003) tarafından verilen temel matematiksel işlemlere ait iki boyutlu diferansiyel dönüşümü için aşağıdaki özellikleri verelim:

Fonksiyon		**Dönüşüm**
$w(x,y)=u(x,y)\mp v(x,y)$	$\Rightarrow$	$W(k,h)=U(k,h)\mp V(k,h)$
$w(x,y)=c\,u(x,y)$	$\Rightarrow$	$W(k,h)=cU(k,h)$
$w\ (x,y\ )=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$	$\Rightarrow$	$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$

Fonksiyon **Dönüşüm**

$$w(x,y) = \frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = (k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+s)U(k+r,h+s)$$

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y) \quad \Rightarrow \quad W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)U(k-r,s)$$

$$w(x,y) = x^m y^n \quad \Rightarrow \quad W(k,h) = \delta(k-m,h-n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$w(x,y) = u(x,y)\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} (k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)V(k-r+2,s)$$

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} (r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} (s+1)(h-s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)s(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s} U(r,h-s-p)V(t,s)S(k-r-t,p)$$

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)\frac{\partial^2 s(x,y)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow$$

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+2)U(r,h-s-p)V(t,s)S(k-r-t+2,p)$$

$$U(r,h-s-p)V(t,s)S(k-r-t+2,p)$$

2.3.3. *N*- boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi

Tanım 2.3.5.

$w(x_1,x_2,...,x_n)$, n-bileşenli fonksiyon olmak üzere, $w(x_1,x_2,...,x_n)$'nin üç boyutlu diferansiyel dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$W(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}} \tag{2.3.7}$$

Tanım 2.3.6.

$W(k_1,k_2,...,k_n)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}W(k_1,k_2,...,k_n)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{2.3.8}$$

olarak tanımlanır. (2.3.7) ve (2.3.8) dikkate alınarak,

$$w(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!k_2!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n}w(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}}\right]_{\substack{x_1=0\\x_2=0\\x_n=0}}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{2.3.9}$$

yazılabilir.

(Kurnaz ve ark. 2005) çalışmasında yer alan n-boyutlu diferansiyel dönüşüme ait bazı özellikleri kısaca verelim:

Fonksiyon	**Dönüşüm**
$w(x_1,x_2,...,x_n)=u(x_1,x_2,...,x_n)\mp v(x_1,x_2,...,x_n)$	$\Rightarrow$
	$W(k_1,k_2,...,k_n)=U(k_1,k_2,...,k_n)\mp V(k_1,k_2,...,k_n)$
$w(x_1,x_2,...,x_n)=c\,u(x_1,x_2,...,x_n)$	$\Rightarrow$
	$W(k_1,k_2,...,k_n)=cU(k_1,k_2,...,k_n)$
$w(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1}$	$\Rightarrow$
	$W(k_1,k_2,...,k_n)=(k_1+1)U(k_1,k_2,...,k_n)$
$w(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^{r_1+r_2+...+r_n}}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}...\partial x_n^{r_n}}u(x_1,x_2,...,x_n)$	$\Rightarrow$
	$W(k_1,k_2,...,k_n)=\frac{(k_1+r_1)!}{k_1!}\frac{(k_2+r_2)!}{k_2!}\cdots\frac{(k_n+r_n)!}{k_n!}U(k_1+r_1,k_2+r_2,...,k_n+r_n)$

2.4. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Diferansiyel dönüşüm metodunun bir modifikasyonu olarak Keskin ve Oturanç (2009) tarafından önerilen İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, verilen diferansiyel denklemi tamamen cebirsel denkleme dönüştüren klasik dönüşümden farklı olarak kısmi diferansiyel denklemi yarı cebirsel bir denklem şekline getirmektedir. Böylece klasik yöntemde çözüme ulaşmak için kullanılan iterasyon sayısı oldukça azaltılmış olmaktadır. Bu sayede kullanılan bilgisayar hafızasından ve zamandan tasarruf edilir.

İki değişkenli $u(x,t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve bu fonksiyonun $u(x,t)=f(x)g(x)$ şeklinde tek değişkenli iki fonksiyonun kombinasyonu olduğunu kabul edelim. Diferansiyel dönüşümün temel özelliklerinden $u(x,t)$ fonksiyonu

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}F(i)x^i\sum_{j=0}^{\infty}G(j)t^j=\sum_{k=0}^{\infty}U_k\ x\ t^k$$

olarak yazılabilir. $U_k\ x$ fonksiyonu, $u(x,t)$'nin iki boyutlu spektrum fonksiyonudur. İndirgenmiş diferansiyel dönüşümün tanımları ve özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir (Keskin ve Oturanç 2009).

Tanım 2.4.1.

Eğer x konum ve t zaman değişkenlerine bağlı $u(x,t)$ fonksiyonu sürekli türevlenebilir ve analitik bir fonksiyon ise $u(x,t)$ fonksiyonunun dönüşüm fonksiyonu,

$$U_k\ x\ =\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right]_{t=0} \tag{2.4.1}$$

olup, $U_k(x)$ t-boyutlu spektrum fonksiyonudur.

Tanım 2.4.2.

$U_k(x)$'in ters dönüşüm fonksiyonu,

$$u\ x,t\ =\sum_{k=0}^{\infty}U_k\ x\ t^k \tag{2.4.2}$$

olarak tanımlanır.

(2.4.1) ve (2.4.2) denklemleri birlikte ele alınırsa,

$$u\ \ x,t\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t) \right]_{t=0} t^k \qquad (2.4.3)$$

yazılabilir.

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüme ait bazı işlemler şöyledir:

Fonksiyon		**İndirgenmiş dönüşüm**
$w(x,t) = u(x,t) \mp v(x,t)$	$\Rightarrow$	$W_k(x) = U_k(x) \mp V_k(x)$
$w(x,t) = c\ u(x,t)$	$\Rightarrow$	$W_k(x) = cU_k(x)$
$w(x,t) = x^m t^n$	$\Rightarrow$	$W_k\ \ x\ = x^m \delta(k-n)$
$w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$\Rightarrow$	$W_k\ \ x\ = \sum_{r=0}^{k} V_r(x) U_{k-r}(x) = \sum_{r=0}^{k} U_r(x) V_{k-r}(x)$
$w\ \ x,t\ = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$	$\Rightarrow$	$W_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} U_k(x)$
$w\ \ x,t\ = \frac{\partial^r u(x,t)}{\partial t^r}$	$\Rightarrow$	$W_k(x) = \ k+1\ \ldots\ k+r\ U_{k+1}(x) = \frac{k+r\ !}{k!} U_{k+r}\ \ x$

3. SOLİTON ÇÖZÜMLERİN BAZI YÖNTEMLERLE ARAŞTIRILMASI

Bu bölümde, KdV denklemi ve KdV tipi denklem sistemleri için Adomian ayrışım, varyasyonel iterasyon, diferansiyel dönüşüm ve indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metotlarını kullanarak soliton çözümler elde edilmesine yönelik literatürde mevcut olan uygulamalar verilecektir.

3.1. KdV Denklemi

Örnek 3.1.1: KdV Denklemi

1895'de Diederik Johannes Korteweg ve Gustav de Vries tarafından tek dalgalar için modellenen ve soliton çözüme sahip denklemler için temel olan ünlü,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.1.1}$$

KdV denkleminin soliton çözümü, literatürde birçok metotla ele alınmış olmakla birlikte biz sadece dört metotla elde edilen çözümleri inceleyeceğiz.

Adomian ayrışım metodu kullanılarak kurulan çözüm:

Adomian ayrışım metodunu kullanarak,

$$u\ x,0\ = f\ \ x\ = -2\frac{k^2 e^{kx}}{1+e^{kx}\ ^2} \tag{3.1.2}$$

başlangıç koşuluna uyan çözümü A. M. Wazwaz tarafından 2001'de oluşturulmuştur. Metoda göre aranan çözüm fonksiyonu

$$u\ \ x,t\ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ \ x,t \tag{3.1.3}$$

şeklinde sonsuz bir serinin açılımı olarak kabul edilir. Denklemin lineer olmayan terimi uu_x için Adomian polinomları yardımıyla oluşturulan $F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ nonlineer operatörü ve $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ diferansiyel operatörü olmak üzere, (3.1.1) denkleminin operatör formuna

$$L^{-1}\ .\ = \int_0^t .\ dw$$

ters operatörü uygulanarak

$$u\ x,t\ = f\ x\ + L^{-1}\ 6uu_x - u_{xxx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\ x,t\ = -2\frac{k^2 e^{kx}}{1+e^{kx}\ ^2} + L^{-1}\left(6\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)_{xxx}\right) \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Seri çözüm için ilk terim $u_0\ x,t$ başlangıç koşullarından belirlenir. $n \geq 1$ için $u_n\ x,t$ terimleri için rekürans bağıntısı,

$$\begin{aligned} u_0\ x,t\ &= f\ x\ = -2\frac{k^2 e^{kx}}{1+e^{kx}\ ^2} \\ u_{s+1}\ x,t\ &= L^{-1}\ 6A_s - u_{s_{xxx}}\ , s \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

şeklindedir. Lineer olmayan terimi verecek Adomian polinomları,

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0},\ n \geq 0 \tag{3.1.6}$$

bağıntısından hareketle,

$$\begin{aligned} A_0 &= u_{0_x} u_0, \\ A_1 &= u_{0_x} u_1 + u_{1_x} u_0, \\ A_2 &= u_{0_x} u_2 + u_{1_x} u_1 + u_{2_x} u_0, \\ A_3 &= u_{0_x} u_3 + u_{1_x} u_2 + u_{2_x} u_1 + u_{3_x} u_0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

olup $u_n\ x,t$ 'in terimleri,

$$\begin{aligned} u_0\ x,t\ &= -2\frac{k^2 e^{kx}}{1+e^{kx}\ ^2}, \\ u_1\ x,t\ &= L^{-1}\ 6A_0 - u_{0_{xxx}}\ = -2\frac{k^5 e^{kx}\ e^{kx} x - 1}{1+e^{kx}\ ^3} t, \\ u_2\ x,t\ &= L^{-1}\ 6A_1 - u_{1_{xxx}}\ = -\frac{k^8 e^{kx}\ e^{2kx} - 4e^{kx} + 1}{1+e^{kx}\ ^4} t^2, \\ u_3\ x,t\ &= L^{-1}\ 6A_2 - u_{2_{xxx}}\ = -\frac{1}{3}\frac{k^{11} e^{kx}\ e^{3kx} - 11e^{2kx} + 11e^{kx} - 1}{1+e^{kx}\ ^5} t^3, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

olarak elde edilir. Bulunan terimler (3.1.3)'de yerine konularak çözümün seri formu,

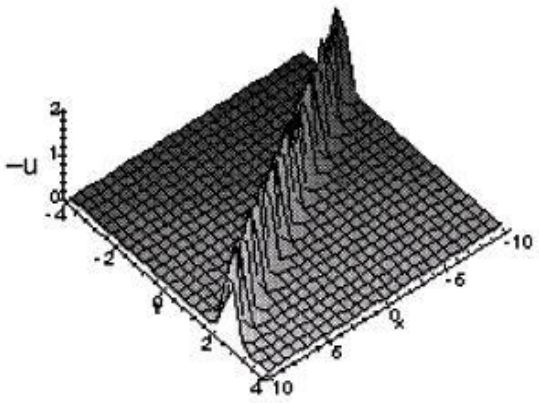
$$u(x,t) = -2\frac{k^2 e^{kx}}{1+e^{kx}{}^2} - 2\frac{k^5 e^{kx}\ e^{kx}x - 1}{1+e^{kx}{}^3}t - \frac{k^8 e^{kx}\ e^{2kx} - 4e^{kx} + 1}{1+e^{kx}{}^4}t^2 - \frac{1}{3}\frac{k^{11}e^{kx}\ e^{3kx} - 11e^{2kx} + 11e^{kx} - 1}{1+e^{kx}{}^5}t^3 + \cdots \quad (3.1.9)$$

elde edilir. Taylor serileri kullanılarak tek soliton formunda gerçek çözüm ise,

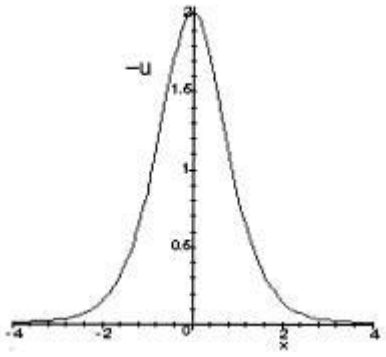
$$u(x,t) = -2\frac{k^2 e^{k\,x-k^2t}}{\left(1+e^{k\,x-k^2t}\right)^2} \quad (3.1.10)$$

olarak verilmiştir (Wazwaz 2001).

Şekil 3.1.1.de $k = 2, -4 \le t \le 4$ *ve* $-10 \le x \le 10$ değerleri için KdV denkleminin tek soliton çözümü görülmektedir. Şekil 3.1.2.de ise $t = 0,\ -4 \le x \le 4$ değerleri için tek soliton çözümü görülmektedir.



Şekil 3.1.1. $k = 2, -4 \le t \le 4$ *ve* $-10 \le x \le 10$ için tek soliton çözümü (Wazwaz 2001)



Şekil 3.1.2. $t = 0,\ -4 \le x \le 4$ için tek soliton çözüm (Wazwaz 2001)

Verilen ikinci bir başlangıç koşulu,

$$u\ \ x,0\ \ = g\ \ x\ \ = -24\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}\ \ ^{2}} \tag{3.1.11}$$

için KdV denklemini tekrar ele alalım. İlk başlangıç koşulunda uygulanan işlem basamakları ikinci başlangıç koşulu için de takip edilerek,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\ \ x,t\ \ = -24\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}\ \ ^{2}} + L^{-1}\left(6\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)_{xxx}\right) \tag{3.1.12}$$

rekürans bağıntısı,

$$\begin{aligned} u_0\ \ x,t\ \ &= g\ \ x\ \ = -24\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}\ \ ^{2}}, \\ u_{k+1}\ \ x,t\ \ &= L^{-1}\ \ 6A_k - u_{k\ xxx}\ \ , \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

kullanılarak seri çözümün terimleri,

$$u_0\ \ x,t\ \ = -24\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}\ \ ^{2}},$$

$$u_1\ \ x,t\ \ = L^{-1}\ \ 6A_0 - u_{0_{xxx}}\ \ = 192\frac{e^{2x}\ \ 1+25e^{2x}-25e^{4x}-e^{6x}}{1+e^{2x}\ \ ^{5}}t,$$

$$u_2\ \ x,t\ \ = L^{-1}\ \ 6A_1 - u_{1_{xxx}}$$

$$= -768\frac{e^{2x}\ \ 1+240e^{2x}+183e^{4x}-2128e^{6x}+183e^{8x}+240e^{10x}+e^{12x}}{1+e^{kx}\ \ ^{8}}t^2,$$

$$u_3\ \ x,t\ \ = L^{-1}\ \ 6A_2 - u_{2_{xxx}}\ \ = 2048\frac{e^{2x}\ \ G\ \ x\ \ + H\ \ x}{1+e^{2x}\ \ ^{11}}t^3,$$

$$G\ \ x\ \ = 1+2011e^{2x}+5288e^{4x}-51488e^{6x}-106606e^{8x},$$

$$H\ \ x\ \ = 106606e^{10x}+51488e^{12x}-5288e^{14x}-2011e^{16x}-e^{18x}.$$

olarak elde edilir. İlk dört terim için yaklaşık çözüm,

$$u\ x,t\ = -24\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}\ ^{2}} + 192\frac{e^{2x}\ 1+25e^{2x}-25e^{4x}-e^{6x}}{1+e^{2x}\ ^{5}}t$$

$$-768\frac{e^{2x}\ 1+240e^{2x}+183e^{4x}-2128e^{6x}+183e^{8x}+240e^{10x}+e^{12x}}{1+e^{kx}\ ^{8}}t^{2} \quad (3.1.14)$$

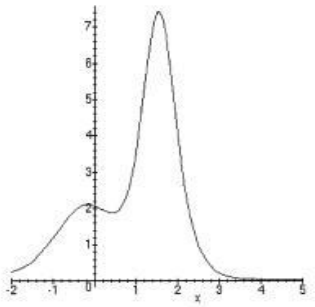
$$+2048\frac{e^{2x}\ G\ x\ +H\ x}{1+e^{2x}\ ^{11}}t^{3}+\cdots$$

KdV denkleminin (3.1.2) başlangıç koşulu için gerçek çözümü literatürde

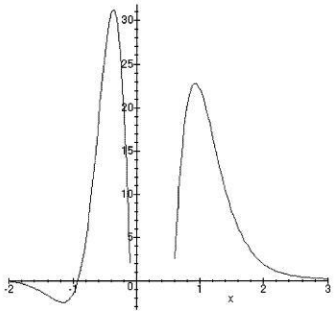
$$u\ x,t\ = 12\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{8t-2x}+2e^{64t-4x}+e^{72t-6x}}{1+3e^{8t-2x}+3e^{64t-4x}+e^{72t-6x}}\right) \quad (3.1.15)$$

olarak bulunmaktadır. (Drazin, Johnson, 1993**).**

Karşılaştırma yapılabilmesi için (Şekil 3.1.3)'te gerçek çözümün $t=0.08$ değeri ve $-2\le x\le 5$ aralığındaki iki soliton grafiği, (Şekil 3.1.4)'te ise yaklaşık çözümün $t=0.08$ değeri ve $-2\le x\le 5$ aralığındaki iki soliton grafiği verilmiştir.



Şekil 3.1.3. (3.1.15)'de verilen gerçek çözüme ait $t=0.08$ ve $-2\le x\le 5$ değerleri kullanılarak oluşturulan iki soliton (Wazwaz 2001)



Şekil 3.1.4. (3.1.14)'de verilen nümerik çözüme ait $t=0.08\ ve\ -2\le x\le 5$ değerleri kullanılarak oluşturulan iki soliton (Wazwaz 2001)

Varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak kurulan çözüm:

Wazwaz 2007'de (3.1.1) denkleminin soliton çözümünü varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak elde etmiştir. Bahsi geçen çalışmaya göre, λ Lagrange çarpanı olmak üzere KdV denklemi için ilk olarak varyasyonel fonksiyon

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t \lambda\ \xi\ \left\{\frac{\partial u_n\ x,\xi}{\partial\xi}-3\frac{\partial\ u_n{}^2\ x,\xi}{\partial x}+\frac{\partial^3\ u_n\ \ x,\xi}{\partial x^3}\right\}d\xi \quad (3.1.16)$$

kurulur. Maple paket program yardımıyla da hesaplanabilen Lagrange çarpanı $\lambda=-1$ olup buna göre (3.1.16) bağıntısı düzenlenirse

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-\int_0^t\left\{\frac{\partial u_n\ x,\xi}{\partial\xi}-3\frac{\partial\ u_n{}^2\ x,\xi}{\partial x}+\frac{\partial^3\ u_n\ \ x,\xi}{\partial x^3}\right\}d\xi\,,n\geq 0 \quad (3.1.17)$$

çözüm fonksiyonunun terimleri için rekürans bağıntısı elde edilir.

$$u\ \ x,0\ =6x \quad (3.1.18)$$

şeklinde verilen başlangıç koşulu rekürans bağıntısında ilk basamak $u_0\ \ x,t$ için seçilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&u_0\ \ x,t\ =6x,\\
&u_1\ \ x,t\ =6x\ \ 1+36t\ ,\\
&u_2\ \ x,t\ =6x\ \ 1+36t+1296t^2+15552t^3\ ,\\
&u_3\ \ x,t\ =6x\ \ 1+36t+1296t^2+15552t^3+1119744t^4+20155392t^5\ ,\\
&u_4\ \ x,t\ =6x\ \ 1+36t+1296t^2+46656t^3+1679616t^4+60466176t^5+2176782336t^6\ ,\\
&\vdots\\
&u_n\ \ x,t\ =6x(1+36t+1296t^2+46656t^3+1679616t^4+60466176t^5+2176782336t^6\\
&\qquad\qquad +78364164096t^7+...)
\end{aligned} \quad (3.1.19)$$

terimleri elde edilir.

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n \quad (3.1.20)$$

hesaplanarak çözüm fonksiyonu

$$u\ \ x,t\ =\frac{6x}{1-36t},\ \ |36t|<1 \quad (3.1.21)$$

bulunmuştur.

Diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak kurulan çözüm:

F. Kangalgil ve F. Ayaz (2008) (3.1.1) denkleminin (3.1.2) başlangıç koşulu için çözümünü diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak aramışlardır. Bu metotla çözüm aranırken (3.1.1) denklemine iki boyutlu dönüşüm uygulanır. Aranan $u(x,t)$ fonksiyonuna karşılık gelen dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere,

$$(h+1)U(k,h+1)=6\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}[\ k+1-r\ \ U\ \ r,h-s\ \ U\ \ k+1-r,s\ -\frac{(k+3)!}{k!}U\ \ k+3,h \quad (3.1.22)$$

bağıntısı kurulur. Başlangıç koşulunun seri açılımı ile

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k y^h \quad (3.1.23)$$

açılımı eşitlenerek,

$$\begin{aligned} &U\ \ k,0\ =0,\ k=1,3,5,... \\ &U\ \ 0,0\ =-\frac{1}{2}k^2,\ U\ \ 2,0\ =\frac{1}{8}k^4,\ U\ \ 4,0\ =-\frac{1}{48}k^6 \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

terimleri elde edilir. (3.1.24) terimleri, denklem (3.1.22)'de uygulanarak $U(k,h)$'ın bazı terimleri bulunur.

$$\begin{aligned} &U(k,1)=0, \quad k=0,2,4,..., \\ &U(k,2)=0, \quad k=1,3,5,..., \\ &U(k,3)=0, \quad k=1,3,5,..., \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Diğer $U(k,h)$ terimleride yine (3.1.22)'de verilen bağıntıdan elde edilir. Böylece, çözüm fonksiyonunun seri formu,

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\left\{-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{8}k^4x^2-\frac{1}{48}k^6x^4+\frac{17}{5760}k^8x^6-\frac{31}{80640}k^{10}x^8+\cdots\right\} \\ &+\left\{-\frac{1}{4}k^6xt+\frac{1}{12}k^8x^3t-\frac{17}{960}k^{10}x^5t+\frac{31}{10080}k^{12}x^7t-\frac{691}{1451520}k^{14}x^9t+\cdots\right\} \\ &+\left\{\frac{1}{8}k^8t^2-\frac{1}{8}k^{10}x^2t^2+\frac{17}{384}k^{12}x^4t^2-\frac{31}{2880}k^{14}x^6t^2+\frac{691}{322560}k^{16}x^8t^2+\cdots\right\} \\ &+\left\{\frac{5}{3}k^{11}t^3+\left(-\frac{92}{3}k^{12}e^k+29k^{12}(e^k)^2+\frac{79}{2}k^{13}\right)x^2t^3\right. \\ &\left.+\left(-\frac{106}{9}k^{14}e^k+\frac{183}{2}k^{13}(e^k)^2-\frac{574}{3}k^{12}(e^k)^3-\frac{55}{24}k^{15}+135k^{11}(e^k)^4\right)x^4t^3\right\}+\cdots \end{aligned}$$

olup t değişkeninin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü kuvvetlerine göre kapalı formları,

$$u_1(x,t) = -2\frac{k^2 e^{kx}}{1+e^{kx}{}^2},$$

$$u_2(x,t) = \left[-\frac{4k^5 (e^{kx})^2}{1+e^{kx}{}^3} + \frac{2k^5 e^{kx}}{1+e^{kx}{}^2} \right] t,$$

$$u_3(x,t) = \left[\frac{2k^8 (e^{kx})^2}{1+e^{kx}{}^4} - \frac{2k^8 (e^{kx})^3}{1+e^{kx}{}^4} - \frac{k^8 e^{kx}}{1+e^{kx}{}^2} + \frac{4k^8 (e^{kx})^2}{1+e^{kx}{}^3} \right] t^2$$

$$u_3(x,t) = \left[\frac{4k^{11} (e^{kx})^3}{1+e^{kx}{}^4} - \frac{2k^{11} (e^{kx})^2}{1+e^{kx}{}^4} - \frac{2k^{11} (e^{kx})^2}{1+e^{kx}{}^3} + \frac{14}{3}\frac{k^{11} (e^{kx})^3}{1+e^{kx}{}^5} - \frac{8}{3}\frac{k^{11} (e^{kx})^4}{1+e^{kx}{}^5} \right.$$

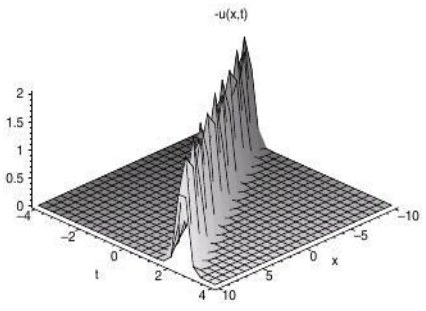
$$\left. -\frac{2}{3}\frac{k^{11} (e^{kx})^2}{1+e^{kx}{}^5} + \frac{1}{3}\frac{k^{11} e^{kx}}{\left(1+e^{kx}{}^2\right)} \right] t^3$$

şeklindedir. Şekil 3.1.5.de $k = 2, -4 \le t \le 4$ *ve* $-10 \le x \le 10$ değerleri için KdV denkleminin tek soliton çözümü, Şekil 3.1.6.de ise $t = 0$ anında $-4 \le x \le 4$ aralığındaki tek soliton çözümü görülmektedir.

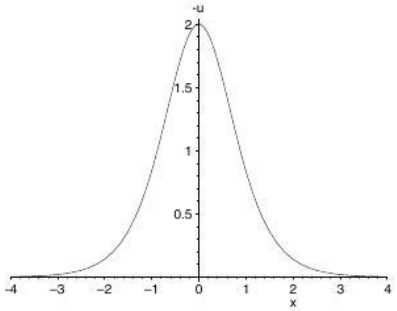
Terimler toplamından hareketle, (3.1.2) başlangıç koşulu altındaki (3.1.1) denkleminin çözüm fonksiyonu için,

$$u(x,t) = -2\frac{k^2 e^{k\,x-k^2 t}}{\left(1+e^{k\,x-k^2 t}\right)^2} \tag{3.1.26}$$

yazılabilir. Şekil 3.1.5.de $k = 2, -4 \le t \le 4$ *ve* $-10 \le x \le 10$ değerleri için KdV denkleminin tek soliton çözümü, Şekil 3.1.6.de ise $t = 0,\ -4 \le x \le 4$ değerleri için tek soliton çözümü görülmektedir.



Şekil 3.1.5: $k = 2, -4 \le t \le 4$ *ve* $-10 \le x \le 10$ için KdV denkleminin tek soliton çözümü (Kangalgil ve Ayaz 2008)



Şekil 3.1.6: $t=0,\ -4\le x\le 4$ için KdV denkleminin tek soliton çözümü (Kangalgil ve Ayaz 2008)

Kangalgil ve Ayaz, (3.1.1) denkleminin (3.1.11)'de verilen ikinci bir başlangıç koşuluna uyan çözümünü aramışlar ve iki-soliton çözüm (*two-soliton solution*) bulmuşlardır. Elde ettikleri sonuçlara göre Şekil 3.1.7'de gerçek çözümün $t=0.08$ değeri ve $-2\le x\le 5$ aralığındaki iki soliton grafiğini, Şekil 3.1.8'de ise yaklaşık çözümün $t=0.08$ değeri ve $-2\le x\le 5$ aralığındaki iki soliton grafiği vermişlerdir.

(3.1.2) başlangıç koşuluna uyan çözüm aranırken uygulanan işlemler (3.1.11) içinde uygulanır. (3.1.11) koşulunun seri açılımı ile (3.1.23) eşitlenerek

$$\begin{aligned} &U\ k,0\ =0,\ k=1,3,5,\ldots \\ &U\ 0,0\ =-6,\ U\ 2,0\ =6,\ U\ 4,0\ =-4,\ldots \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

terimleri elde edilir. (3.1.27)'de elde edilen her bir k değerine karşılık gelen terim (3.1.22)'de verilen rekürans bağıntısında yerine konularak diğer $U(k,h)$ terimleri hesaplanır. Hesaplanan terimlerden bazıları şunlardır:

$$\begin{aligned} &U\ 1,1\ =-336,\ U\ 3,1\ =736,\ U\ 5,1\ =-\frac{4784}{5}, \\ &U\ 7,1\ =\frac{14336}{15},\ U\ 9,1\ =-\frac{765344}{945},\ U\ 11,1\ =\frac{31843232}{51975}, \\ &U\ 0,2\ =3840,\ U\ 2,2\ =-29184,\ U\ 4,2\ =72160, \\ &U\ 6,2\ =-\frac{1720576}{15},\ U\ 8,2\ =-\frac{1720576}{15},\ U\ 10,2\ =-\frac{702484096}{4725} \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Hesaplanan $U(k,h)$ terimleri ile (3.1.23)**'** deki toplam ifadesi düzenlenerek,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \left\{ -6 + 6x^2 - 4x^4 + \frac{34}{5}x^6 - \frac{124}{105}x^8 + \frac{2764}{4725}x^{10} + \cdots \right\} \\
& + \left\{ -336xt + 736x^3t - \frac{4784}{5}x^5t + \frac{14336}{15}x^7t - \frac{765344}{945}x^9t + \cdots \right\} \\
& + \left\{ 3840t^2 - 29184x^2t^2 + 72160x^4t^2 - \frac{1720576}{15}x^6t^2 + \frac{2978912}{21}x^8t^2 + \cdots \right\} \\
& + \left\{ 441088xt^3 - \frac{7132672}{3}x^3t^3 + \frac{97200416}{15}x^5t^3 - \frac{3497237504}{315}x^7t^3 \right. \\
& \left. + \frac{44873881856}{2835}x^9t^3 + \cdots \right\} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.1.29}
$$

yazılıp, t değişkeninin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü kuvvetlerine göre kapalı formları,

$$u_1(x,t) = -24\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}^2, \tag{3.1.30}$$

$$u_2(x,t) = 192\frac{e^{2x}(1+240e^{2x}-25e^{4x}-e^{6x})}{1+e^{2x}}^5 t, \tag{3.1.31}$$

$$u_3(x,t) = -768\frac{e^{2x}(1+240e^{2x}+183e^{4x}-e^{6x})}{1+e^{2x}}^5 t^2, \tag{3.1.32}$$

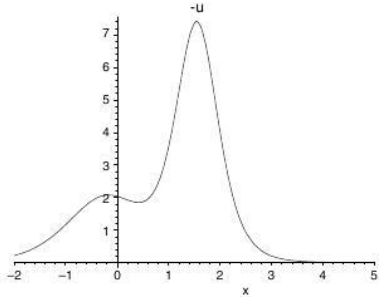
$$u_4(x,t) = 2048\frac{e^{2x}(K_1(x)+K_2(x))}{1+e^{2x}}^{11} t^3, \tag{3.1.33}$$

$$K_1(x) = 1+2011e^{2x}+5288e^{4x}-51488e^{6x}-106606e^{8x},$$
$$K_2(x) = 106606e^{10x}+51488e^{12x}-5288e^{14x}-2011e^{16x}-e^{8x},$$

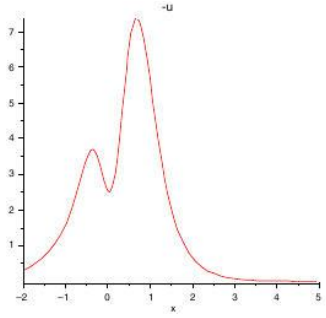
bulunur. (3.1.30)-(3.1.33)'de verilen terimler toplamından çözümün kapalı formu

$$u(x,t) = 12\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{8t-2x}+2e^{64t-4x}+e^{72t-6x}}{1+3e^{8t-2x}+3e^{64t-4x}+e^{72t-6x}}\right) \tag{3.1.34}$$

elde edilebilir.



Şekil 3.1.7. (3.1.34)'de verilen gerçek çözüme ait $t = 0.08$ ve $-2 \le x \le 5$ değerleri için oluşturulan iki soliton (Kangalgil ve Ayaz 2008)



Şekil 3.1.7. (3.1.29)'da verilen gerçek çözüme ait $t = 0.08$ ve $-2 \le x \le 5$ değerleri için oluşturulan iki soliton (Kangalgil ve Ayaz 2008)

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak kurulan çözüm:

Keskin ve Oturanç (2009) çalışmalarında (3.1.1) denkleminin

$$u(x,0) = -\frac{k^2}{2}\sec h^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{3.1.35}$$

başlangıç koşuluna uyan çözümünü indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (RDTM) ile araştırmışlardır. $U_k(x)$, $u(x,t)$ fonksiyonunun t-boyutlu spektrum fonksiyonu olmak üzere, (3.1.1)'e dönüşüm uygulanırsa

$$(k+1)U_{k+1}(x) = 6\sum_{r=0}^{k} U_{k-r}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_r(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x) \tag{3.1.36}$$

ve başlangıç koşulu (3.1.35)'den

$$U_0(x) = -\frac{k^2}{2}\sec h^2\left[\frac{k}{2}x\right] \tag{3.1.37}$$

başlangıç dönüşümü kurulur. (3.1.37), (3.1.36)'da yerine konularak,

$$U_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{k^5\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)}{\cosh^3\left(\frac{kx}{2}\right)}, \quad U_2(x) = -\frac{1}{8}\frac{k^8\left(-3+2\cosh^2\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh^4\left(\frac{kx}{2}\right)},$$

$$U_3(x) = -\frac{1}{12}\frac{k^{11}\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\left(\cosh^2\left(\frac{kx}{2}\right)-3\right)}{\cosh^5\left(\frac{kx}{2}\right)},$$

$$U_4(x) = -\frac{1}{96}\frac{k^{14}\left(2\cosh^4\left(\frac{kx}{2}\right)+15-15\cosh^2\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh^6\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

$U_k(x)$ değerleri elde edilir. İlk beş terime ters dönüşüm uygulanarak

$$\tilde{u}_4(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)t^k$$

$$=-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(15k^{12}-15k^{12}\cosh^2\left(\frac{kx}{2}\right)+2k^{12}\cosh^4\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh^6\left(\frac{kx}{2}\right)}t^4$$

$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(8k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh^3\left(\frac{kx}{2}\right)-24k^9\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)\cosh\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh^6\left(\frac{kx}{2}\right)}t^3$$

$$-\frac{1}{96}\frac{k^2\left(-36k^6\cosh^2\left(\frac{kx}{2}\right)-24k^6\cosh^4\left(\frac{kx}{2}\right)\right)}{\cosh^6\left(\frac{kx}{2}\right)}t^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{k^5\sinh\left(\frac{kx}{2}\right)}{\cosh^3\left(\frac{kx}{2}\right)}t-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\cosh^2\left(\frac{kx}{2}\right)}$$

sonucuna ulaşılır.

3.2. KdV Tipi Denklem Sistemleri

Örnek 3.2.1: Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma Coupled KdV Denklemleri

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3u\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial\ vw}{\partial x}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-3u\frac{\partial v}{\partial x}=0\\&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-3u\frac{\partial w}{\partial x}=0\end{aligned}\qquad(3.2.1)$$

(3.2.1)'de verilen denklem sistemi genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denklem sistemi olarak adlandırılır. Ryogo Hirota ve J. Satsuma 1981'de farklı dağılım bağıntılarına sahip iki uzun dalganın etkileşiminin modellenmesini sunan *Hirota Satsuma Coupled KdV Denklem Sistemi*'ni tanıttılar. (3.2.1) sistemide Hirota ve Satsuma modellemesinin genelleştirilmesi olarak Yongtang Wu ve arkadaşları

(1999) tarafından tanıtıldı. Bu denklemin soliton çözümlerini ise ilk defa Engui Fan kurdu(2001). Fan'ın çalışmalarından hareketle literatürde bu sistemin nümerik çözümleri araştırılırken $k, C_0, C_1, C_2 \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} u\ x,0\ &= \frac{1}{3}\ \beta - 2k^2\ + 2k^2 \tanh^2(kx) \\ v(x,0) &= -\frac{4}{3}\frac{k^2 C_0\ \beta + k^2}{C_1^{\,2}} + \frac{4}{3}\frac{k^2\ \beta + k^2}{C_1} \tanh\ kx \\ w\ x,0\ &= C_0 + C_1 \tanh\ kx \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

ve

$$\begin{aligned} u\ x,0\ &= \frac{1}{3}\ \beta - 8k^2\ + 4k^2 \tanh^2(kx) \\ v(x,0) &= -\frac{4}{3}\frac{(3k^4 C_0 - 2\beta k^2 C_2 + 4k^4 C_2}{C_2^{\,2}} + \frac{4k^2}{C_2} \tanh^2\ kx \\ w\ x,0\ &= C_0 + C_2 \tanh^2\ kx \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

olarak iki farklı başlangıç sistemi kullanılmıştır. (3.2.1) sisteminin yaklaşım metotları ile çözümlerini inceleyelim.

Adomian ayrışım metodu kullanılarak kurulan çözüm:

(3.2.1) denklem sisteminin Adomian ayrışım metodu yardımıyla (3.2.2) ve (3.2.3) başlangıç koşullarına uyan çözümleri D. Kaya tarafından 2004'de, (3.2.3) başlangıç koşuluna uyan çözümü ise K. R. Raslan tarafından 2004'de literatüre sunulmuştur. Bu çalışmalara göre çözüm aranırken öncelikle (3.2.1) sistemi operatör forma getirilir. $L_t = \partial / \partial t$ ve $L_x = \partial^3 / \partial x^3$ notasyonları lineer diferansiyel operatörleri ve M_1, M_2, M_3 ve M_4 ise lineer olmayan operatörleri sembolize etmek üzere,

$$\begin{aligned} L_t u &= \frac{1}{2} L_x u - 3M_1(u,u) + 3M_2(v,w) \\ L_t v &= -L_x v + 3M_3(u,v) \\ L_t w &= -L_x w + 3M_4(u,w) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

sistemi (3.2.1)'in operatör formudur. (3.2.4) sistemine $L_t^{-1} = \int_0^t (.)dt$ ters operatörü uygulanarak

$$
\begin{aligned}
u\ x,t\ &= u\ x,0\ + L_t^{-1}\left[\frac{1}{2}L_x u - 3M_1\ u,u\ + 3M_2\ v,w\ \right],\\
v\ x,t\ &= v\ x,0\ - L_t^{-1}\left[L_x v - 3M_3\ u,v\ \right],\\
w\ x,t\ &= w\ x,0\ - L_t^{-1}\left[L_x w - 3M_4\ u,w\ \right]
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

bağıntısı kurulur. Adomian Ayrışım metoduna göre bilinmeyen fonksiyonlar $u(x,t)$, $v(x,t)$ ve $w(x,t)$'lerin sonsuz seri çözümlerini

$$
u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\ x,t\ ,\quad v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\ x,t\ ,\quad w\ x,t\ =\sum_{n=0}^{\infty}w_n\ x,t \tag{3.2.6}
$$

ve lineer olmayan operatörler M_1, M_2, M_3 ve M_4'ü ise uygun seçilmiş A_n, B_n, C_n ve D_n Adomian polinomlarının sonsuz serileri

$$
\begin{aligned}
M_1\ u,u\ &= \sum_{n=0}^{\infty}A_n, \qquad M_2\ v,w\ = \sum_{n=0}^{\infty}B_n,\\
M_3\ u,v\ &= \sum_{n=0}^{\infty}C_n, \qquad M_4\ u,w\ = \sum_{n=0}^{\infty}D_n
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

olarak alırız. (3.2.5) sistemi, uygun Adomian polinomları ve verilen başlangıç koşullarına göre yeniden düzenlenerek, çözüm için

$$
\begin{aligned}
&u_0\ x,t\ = u\ x,0\ ,\ u_{n+1}\ x,t\ = L_t^{-1}\left[\frac{1}{2}L_x\ u_n\ - 3A_n + 3B_n\right],\ n\geq 0,\\
&v_0\ x,t\ = v\ x,0\ ,\ v_{n+1}\ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ v_n\ - 3C_n\right],\ n\geq 0,\\
&w_0\ x,t\ = w\ x,0\ ,w_{n+1}\ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ w_n\ - 3D_n\right],\ n\geq 0
\end{aligned}
\tag{3.2.8}
$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Rekürans bağıntısından $n\geq 0$ için,

$$
\phi_n\ x,t\ =\sum_{k=0}^{n-1}u_k\ x,t\ ,\quad \varphi_n\ x,t\ =\sum_{k=0}^{n-1}v_k\ x,t\ ,\quad \psi_n\ x,t\ =\sum_{k=0}^{n-1}w_k\ x,t \tag{3.2.9}
$$

olup aranan çözümlere,

$$
\lim_{n\to\infty}\phi_n = u\ x,t\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n = v\ x,t\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n = w\ x,t \tag{3.2.10}
$$

limit değerlerinden ulaşılır.

Buna göre (3.2.1) sisteminin (3.2.2) başlangıç koşullarını, kurulan (3.2.8) rekürans bağıntısında uygulayarak u_n, v_n ve w_n terimleri hesaplanır.

$$
u_0\ x,t\ = \frac{1}{3}\ \beta - 2k^2\ + 2k^2\tanh^2(kx),
$$

$$u_1\ x,t\ = L_t^{-1}\left[\frac{1}{2}L_x\ u_o\ -3\ u_0u_{0_x}\ +3\ v_0w_0\ _x\right] = 4\beta k^3 t\sec h^2(kx)\tanh(kx),$$

$$u_2\ x,t\ = L_t^{-1}\left[\frac{1}{2}L_x\ u_1\ -3\ u_1u_{0_x}+u_0u_{1_x}\ +3\ v_1w_0+v_0w_1\ _x\right]$$
$$= 2\beta^2k^4t^2\ \ 2-\cosh(2kx)\ \ \sec h^4(kx)\ ,$$

$$u_3\ x,t\ = L_t^{-1}\left[\frac{1}{2}L_x\ u_2\ -3\ u_2u_{0_x}+u_1u_{1_x}+u_0u_{2_x}\ +3\ v_2w_0+v_1w_1+v_0w_2\ _x\right]$$
$$= \frac{2\beta^3k^5t^3\sec h^5(kx)\ \ -11\sinh(kx)+\sinh(3kx)}{3}\ ,$$

$$v_0(x,t) = -\frac{4}{3}\frac{k^2C_0\ \ \beta+k^2}{C_1^{\ 2}}+\frac{4}{3}\frac{k^2\ \ \beta+k^2}{C_1}\tanh\ \ kx\ \ ,$$

$$v_1\ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ \ v_0\ \ -3\ \ u_0v_{0_x}\ \right] = \frac{4\beta k^3\ \ \beta+k^2\ \ t\sec h^5\ \ kx}{3C_1}\ \ ,$$

$$v_2\ \ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ \ v_1\ \ -3\ \ u_1v_{0_x}+u_0v_{1_x}\ \right]$$
$$= -\frac{4\beta^2k^4\ \ \beta+k^2\ \ t^2\sec h^4\ \ kx\ \ \tanh\ \ kx}{3C_1}\ ,$$

$$v_3\ \ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ \ v_2\ \ -3\ \ u_2v_{0_x}+u_1v_{1_x}+u_0v_{2_x}\ \right]$$
$$= \frac{4\beta^3k^5\ \ \beta+k^2\ \ t^3\ \ -2+\cosh\ \ 2kx\ \ \ \sec h^4\ \ kx}{9C_1}\ ,$$

$$w_0\ \ x,t\ = C_0+C_1\tanh\ \ kx\ \ ,$$

$$w_1\ \ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ \ w_0\ \ -3\ \ u_0w_{0_x}\ \right] = C_1kt\beta\sec h^4\ \ kx\ \ ,$$

$$w_2\ \ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ \ w_1\ \ -3\ \ u_1w_{0_x}+u_0w_{1_x}\ \right]$$
$$= -C_1k^2t^2\beta^2\sec h^4\ \ kx\ \ \tanh\ \ kx\ \ ,$$

$$w_3\ \ x,t\ = -L_t^{-1}\left[L_x\ \ w_2\ \ -3\ \ u_2w_{0_x}+u_1w_{1_x}+u_0w_{2_x}\ \right]$$
$$= \frac{C_1k^3t^3\beta^3\ \ -2+\cosh\ \ 2kx\ \ \ \sec h^4\ \ kx}{3}\ ,$$

Benzer biçimde ayrışım serisinin diğer terimleri de rekürans bağıntısından kolayca elde edilir. Bu terimler (3.2.6)'da yerine yazılarak,

$$
\begin{aligned}
u\ x,t\ =&\frac{1}{3}\ \beta-2k^2\ +2k^2\tanh^2(kx)+4\beta k^3 t\sec h^2(kx)\tanh(kx)\\
&+2\beta^2k^4t^2\ \ 2-\cosh(2kx)\ \ \sec h^4(kx)\\
&+\frac{2\beta^3k^5t^3\sec h^5(kx)\ \ -11\sinh(kx)+\sinh(3kx)}{3}+\cdots,
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x,t)=&-\frac{4}{3}\frac{k^2C_0\ \ \beta+k^2}{C_1^{\ 2}}+\frac{4}{3}\frac{k^2\ \ \beta+k^2}{C_1}\tanh\ \ kx\\
&+\frac{4\beta k^3C_0\ \ \beta+k^2\ \ t\sec h^5\ \ kx}{3C_1}\\
&-\frac{4\beta^2k^4\ \ \beta+k^2\ \ t^2\sec h^4\ \ kx\ \ \tanh\ \ kx}{3C_1}\\
&+\frac{4\beta^3k^5\ \ \beta+k^2\ \ t^3\ \ -2+\cosh\ \ 2kx\ \ \ \sec h^4\ \ kx}{9C_1}+\cdots,
\end{aligned}
\tag{3.2.12}
$$

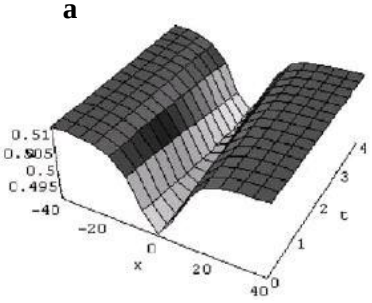
$$
\begin{aligned}
w\ \ x,t\ \ =&C_0+C_1\tanh\ \ kx\ \ +C_1kt\beta\sec h^4\ \ kx\ \ -C_1k^2t^2\beta^2\sec h^4\ \ kx\ \ \tanh\ \ kx\\
&+\frac{C_1k^3t^3\beta^3\ \ -2+\cosh\ \ 2kx\ \ \ \sec h^4\ \ kx}{3}+\cdots,
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

aranan çözümler seri formda elde edilir. Taylor serileri kullanılarak, çözümlerin kapalı formları (Fan 2001),

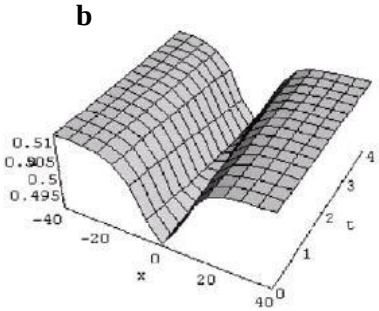
$$
\begin{aligned}
u\ \ x,t\ \ =&\frac{1}{3}\ \beta-2k^2\ +2k^2\tanh^2(k\ \ x+\beta t\ )\\
v(x,t)=&-\frac{4}{3}\frac{k^2C_0\ \ \beta+k^2}{C_1^{\ 2}}+\frac{4}{3}\frac{k^2\ \ \beta+k^2}{C_1}\tanh\ \ k\ \ x+\beta t\\
w\ \ x,t\ \ =&C_0+C_1\tanh\ \ k\ \ x+\beta t
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

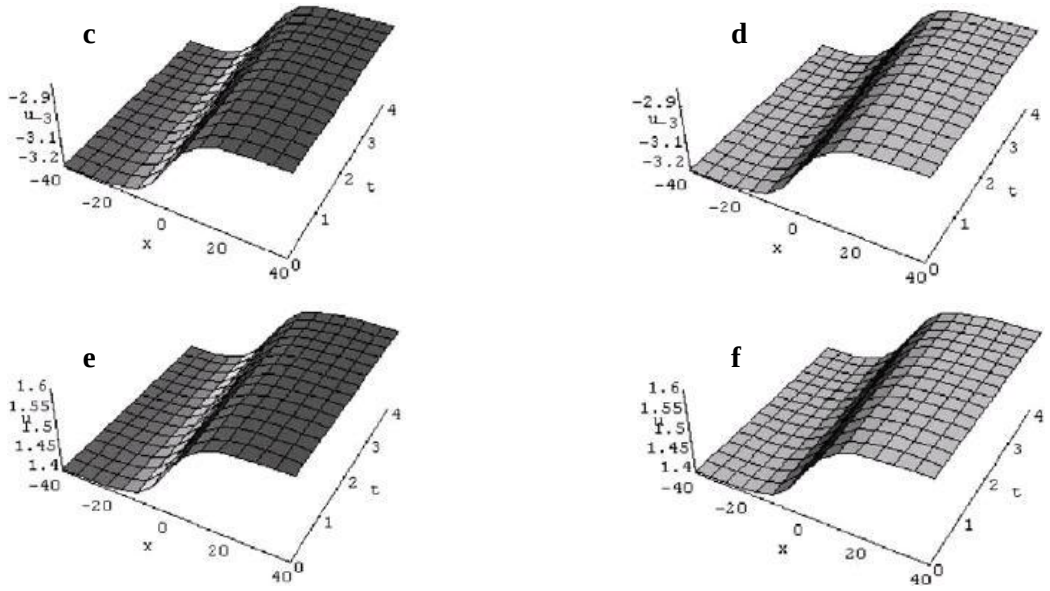
bulunur.

a



b





Şekil 3.2.1. (a), (c), (e). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5 \text{ve} k = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan $\phi_n(x,t), \varphi_n(x,t) \text{ve} \psi_n(x,t)$ nümerik çözümleri (Kaya 2004)

(b), (d), (f). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5 \text{ve} k = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan $u(x,t), v(x,t) \text{ve} w(x,t)$ analitik çözümleri (Kaya 2004)

(x,t)	$\lvert u(x,t) - \phi_5(x,t) \rvert$	$\lvert v(x,t) - \varphi_5(x,t) \rvert$	$\lvert w(x,t) - \psi_5(x,t) \rvert$
(0.1, 0.1)	4.29934E−13	2.03570E−11	1.01110E−11
(0.1, 0.2)	1.65012E−11	6.50974E−10	3.23332E−10
(0.1, 0.3)	1.46077E−10	4.93899E−09	2.45314E−09
(0.2, 0.1)	7.72604E−13	2.02967E−11	1.00813E−11
(0.2, 0.2)	2.74488E−11	6.48761E−10	3.22233E−10
(0.2, 0.3)	2.29054E−10	4.92010E−09	2.44376E−09
(0.3, 0.1)	1.11300E−12	2.02021E−11	1.00340E−11
(0.3, 0.2)	3.83165E−11	6.45452E−10	3.20588E−10
(0.3, 0.3)	3.11366E−10	4.89289E−09	2.43025E−09

Tablo 3.2.1..(3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5 \text{ve} k = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan $\phi_n(x,t), \varphi_n(x,t) \text{ve} \psi_n(x,t)$ nümerik çözümleri ile $u(x,t), v(x,t) \text{ve} w(x,t)$ analitik çözümlerinin nümerik karşılaştırması (Kaya 2004)

(3.2.1) sisteminin (3.2.3)'de verilen ikinci tür başlangıç koşullarına uyan çözümünün hesaplanmasında da (3.2.2) için uygulanan işlem basamakları (3.2.3) için uygulanır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
u\ x,t\ &= \frac{1}{3}\ \beta - 2k^2\ + 2k^2 \tanh^2(kx) + 4\beta k^3 t \sec h^2(kx)\tanh(kx) \\
&\quad + 2\beta^2 k^4 t^2\ \ 2 - \cosh(2kx)\ \ \sec h^4(kx) \\
&\quad + \frac{2\beta^3 k^5 t^3 \sec h^5(kx)\ \ -11\sinh(kx) + \sinh(3kx)}{3} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

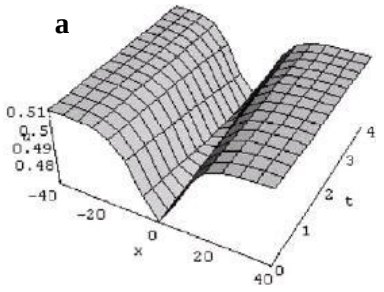
$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= -\frac{4}{3}\frac{k^2 C_0\ \ \beta + k^2}{C_1^{\,2}} + \frac{4}{3}\frac{k^2\ \ \beta + k^2}{C_1}\tanh\ \ kx \\
&\quad + \frac{4\beta k^3 C_0\ \ \beta + k^2\ \ t\sec h^5\ \ kx}{3C_1} \\
&\quad - \frac{4\beta^2 k^4\ \ \beta + k^2\ \ t^2 \sec h^4\ \ kx\ \ \tanh\ \ kx}{3C_1} \\
&\quad + \frac{4\beta^3 k^5\ \ \beta + k^2\ \ t^3\ \ -2 + \cosh\ \ 2kx\ \ \ \sec h^4\ \ kx}{9C_1} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

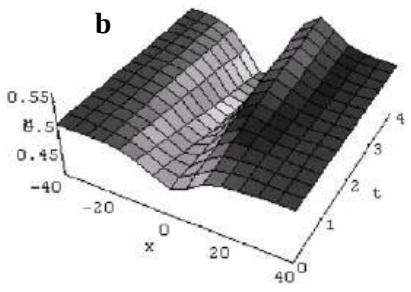
$$
\begin{aligned}
w\ \ x,t\ \ &= C_0 + C_1 \tanh\ \ kx\ + C_1 kt\beta \sec h^4\ \ kx\ - C_1 k^2 t^2 \beta^2 \sec h^4\ \ kx\ \ \tanh\ \ kx \\
&\quad + \frac{C_1 k^3 t^3 \beta^3\ \ -2 + \cosh\ \ 2kx\ \ \ \sec h^4\ \ kx}{3} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

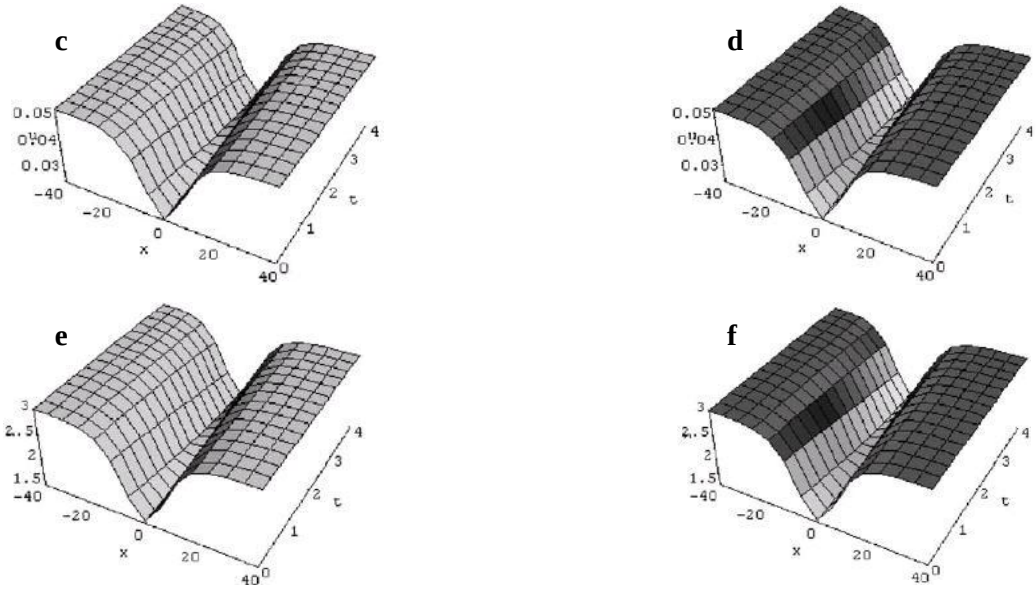
seri formda çözüm takımı bulunur. Seri çözümlerin kapatılmasıyla

$$
\begin{aligned}
u\ \ x,t\ \ &= \frac{1}{3}\ \ \beta - 8k^2\ \ + 4k^2 \tanh^2\ \ k\ \ x + \beta t \\
v(x,t) &= -\frac{4}{3}\frac{(3k^4 C_0 - 2\beta k^2 C_2 + 4k^4 C_2}{C_2^{\,2}} + \frac{4k^2}{C_2}\tanh^2\ \ k\ \ x + \beta t \\
w\ \ x,t\ \ &= C_0 + C_2 \tanh^2\ \ k\ \ x + \beta t
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

olarak Fan'ın (2001) kurduğu çözüm takımına ulaşılır.







Şekil 3.2.2. (a), **(c)**, **(e).** (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_2 = 0.1, \beta = 1.5$ ve $k = 0.1$ değerleri için (3.2.3) koşuluna uyan $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümleri (Kaya 2004)

(b), (d), (f). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_2 = 0.1, \beta = 1.5$ ve $k = 0.1$ değerleri için (3.2.3) koşuluna uyan $\phi_n(x,t), \varphi_n(x,t)$ ve $\psi_n(x,t)$ nümerik çözümleri (Kaya 2004)

Varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak kurulan çözüm:

(3.2.2) başlangıç koşulları için varyasyonel iterasyon metodu ile çözümü Soliman ve arkadaşları tarafından 2007'de incelenmiştir. Belirtilen çalışmaya göre (3.2.1) denklemi önce varyasyonel fonksiyona göre yeniden kurulur:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda_1 \ \xi \ \left\{ u_{nt} - \frac{1}{2} u_{nxxx} + 3u_n u_{nx} - 3 \ v_n w_n \ _x \right\} d\xi \qquad (3.2.19)$$

$$v_{n+1}(x,t) = v_n(x,t) + \int_0^t \lambda_2 \ \xi \ \ v_{nt} + v_{nxxx} - 3u_n v_{nx} \ d\xi \qquad (3.2.20)$$

$$w_{n+1}(x,t) = w_n(x,t) + \int_0^t \lambda_3 \ \xi \ \ w_{nt} + w_{nxxx} - 3u_n w_{nx} \ d\xi \qquad (3.2.21)$$

Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genel Lagrange çarpanıdır. Mapple paket programı kullanılarak bu çarpanlar hesaplanabilmektedir. $u_n u_{nx}$, $v_n w_n \ _x, u_n v_{nx}, u_n w_{nx}$ sınırlı varyasyonlar olup, $\delta u_n u_{nx} = \delta \ u_n v_n \ _x = \delta v_n v_{nx} = 0$ olarak verilmiştir.

Lagrange çarpanları, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ olarak belirlenmiştir. Lagrange çarpanlarına göre, (3.2.19)- (3.2.21) denklemleri yeniden

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left\{ u_{nt} - \frac{1}{2} u_{nxxx} + 3u_n u_{nx} - 3\ v_n w_n\ _x \right\} d\xi \tag{3.2.22}$$

$$v_{n+1}(x,t) = v_n(x,t) - \int_0^t \ v_{nt} + v_{nxxx} - 3u_n v_{nx}\ \ d\xi \tag{3.2.23}$$

$$w_{n+1}(x,t) = w_n(x,t) - \int_0^t \ w_{nt} + w_{nxxx} - 3u_n w_{nx}\ \ d\xi \tag{3.2.24}$$

şeklinde düzenlenir. (3.2.2)'de verilen koşullardan hareketle başlangıç yaklaşımları

$$\begin{aligned} u_0\ \ x,t\ &= \frac{1}{3}\ \beta - 2k^2\ + 2k^2 \tanh^2(kx) \\ v_0(x,t) &= -\frac{4}{3}\frac{k^2 C_0\ \ \beta + k^2\ }{C_1^{\,2}} + \frac{4}{3}\frac{k^2\ \ \beta + k^2\ }{C_1} \tanh\ \ kx \\ w_0\ \ x,t\ &= C_0 + C_1 \tanh\ \ kx \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

ve (3.2.22)- (3.2.24)'de verilen iterasyon formülü yardımı ile seri çözüm bileşenleri elde edilir.

$$u_1(x,t) = -2\frac{\cosh x + 2t\sinh x}{\cosh^3 x},$$

$$v_1(x,t) = \frac{\cosh^2 x + \cosh x + t\sinh x}{\cosh^2 x},$$

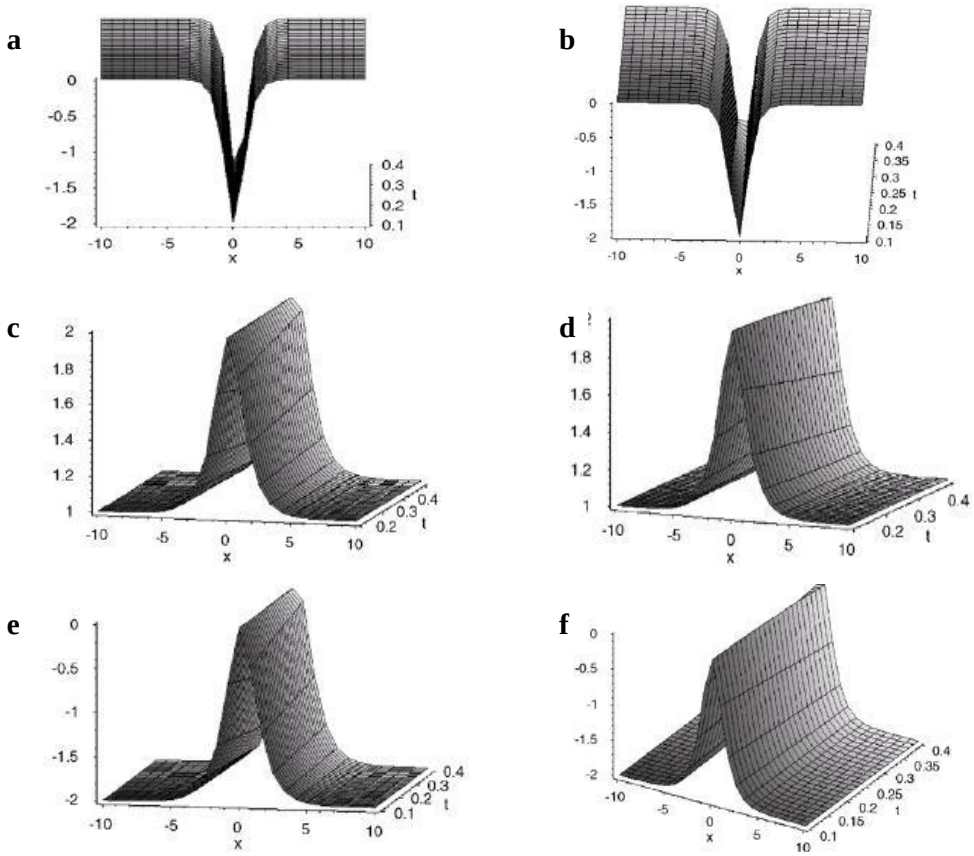
$$w_1(x,t) = 2\left(\frac{-\cosh^2 x + \cosh x + t\sinh x}{\cosh^2 x}\right),$$

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = -\frac{2}{\cosh^7 x}(&\cosh^5 x - 3t^2\cosh^3 x + 2t\sinh x\cosh^4 x + 2t^3\sinh x\cosh^4 x \\ &- 20t^3\sinh x\cosh^2 x + 2t^2\cosh^5 x + 24t^3\sinh x) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} v_2(x,t) = \frac{1}{\cosh 6x}(&\cosh^5 x + 4t^3\cosh^2 x\sinh x - 8t^3\sinh x + t\sinh x\cosh^4 x \\ &+ t^2\cosh^5 x - 2t^2\cosh^3 x + 2\cosh^6 x) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} w_2(x,t) = \frac{1}{\cosh 6x}(&2\cosh^5 x + t^2\cosh^5 x - 2t^2\cosh^3 x + 2t\sinh x\cosh^4 x \\ &+8t^3\cosh^2 x\sinh x - 2\cosh^6 x - 16t^3\sinh x) \end{aligned},$$

Benzer şekilde $u_n(x,t), v_n(x,t)$ ve $w_n(x,t)$ terimleri hesaplanabilir. Elde edilen terimlerin toplamından çözüme gidilir (Şekil 3.2.3).



Şekil 3.2.3. (a), (c), (e). (3.2.1) denkleminin $C_0 = C_1 = \beta = k = 1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan $\phi_n(x,t), \varphi_n(x,t)$ ve $\psi_n(x,t)$ nümerik çözümleri (Soliman ve Abdou 2007)
(b), (d), (f). (3.2.1) denkleminin $C_0 = C_1 = \beta = k = 1$ değerleri için (3.2.14)'de verilen $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümleri (Soliman ve Abdou 2007)

Örnek 3.2.2: Coupled MKdV Denklem Sistemi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{2}\frac{d^2 v}{dx^2} - 3\frac{\partial\ uv}{\partial x} + 3\lambda\frac{du}{dx} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3v\frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - 3u^2\frac{\partial v}{\partial x} - 3\lambda\frac{du}{dx} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

(3.2.26) sistemi literatürde Coupled MKdV denklem sistemi olarak geçer ve

$$\begin{aligned} u\ \ x,0\ \ &= \frac{b_1}{2k} + k\tanh(kx) \\ v(x,0) &= \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{k}{b_1}\right) + b_1\tanh\ \ kx \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

ve

$$\begin{aligned} u\ \ x,0\ \ &= k\tanh(kx) \\ v(x,0) &= \frac{1}{2}\ \ 4k^2 + \lambda\ \ - 2k^2\tanh^2\ \ kx \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

olmak üzere iki farklı başlangıç koşuluna sahiptir (Engui Fan 2001). Verilen başlangıç koşullarına göre sistemin farklı metotlarla çözümlerini inceleyelim.

Adomian ayrışım metodu kullanılarak kurulan çözüm:

K. R. Raslan 2004'de, Soliman ve Abdou ise 2008'de (3.2.26) sisteminin çözümlerini Adomian ayrışım metodunu ile oluşturmuşlar ve çözüm sistemine ait hata değerlendirmesini de vermişlerdir.

Metodun ilk adımı olarak (3.2.23) sistemi operatör formda yazılır.

$$\begin{aligned} L_t u &= -3A\ u\ + 3C\ u,v\ + F\ x,t\ , \\ L_t v &= -3B\ v\ - 3H\ u,v\ + 3D\ u,v\ + G\ x,t \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

$L_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$ linner diferansiyel operatörleri olmak üzere (3.2.29)'deki eşitliklerin her iki yanına $L_t^{-1} = \int_0^t (.)du$ ters operatörü uygulanarak,

$$\begin{aligned} u_{n+1}\ x,t\ &= u\ x,0\ + L_t^{-1}\ -3A_n\ u\ + 3C_n\ u,v\ + F_n\ x,t\ , \\ v_{n+1}\ x,t\ &= v\ x,0\ + L_t^{-1}\ -3B_n\ v\ - 3H_n\ u,v\ + 3D_n\ u,v\ + G_n\ x,t \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

rekürans bağıntısı oluşturulur. Sırasıyla $A\ u\ = u^2 u_x$, $B\ v\ = v v_x$, $C\ u,v\ = uv_{\ x}$, $H\ u,v\ = u_x v_x$, ve $D\ u,v\ = u^2 v_x$, sistemdeki nonlineer terimlere karşılık gelen fonksiyonlar olup $A\ u\ = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $B\ v\ = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$, $C\ u,v\ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$, $H\ u,v\ = \sum_{n=0}^{\infty} H_n$ ve $D\ u,v\ = \sum_{n=0}^{\infty} D_n$ ise A_n, B_n, C_n, H_n ve D_n Adomian polinomlarının seri açılımlarını ifade etmektedir.

$$u_0 = \frac{1}{2} + \tanh\ x\ ,$$

$$v_0 = 1 + \tanh\ x\ ,$$

$$u_1 = (-1 + \tanh^2 x)\frac{t}{4}, \quad v_1 = (-1 + \tanh^2 x)\frac{t}{4},$$

$$u_2 = [-\tanh x + \tanh^3 x]\left(\frac{t}{4}\right)^2, \quad v_2 = [-\tanh x + \tanh^3 x]\left(\frac{t}{4}\right)^2$$

olup her bir terim bir önceki terim tarafından belirlenmek suretiyle tüm $u_n\ x,t$ ve $v_n\ x,t\ , (n > 0)$ bileşenleri elde edilebilir. Ve bu bileşenler

$$u\ x,t\ =\sum_{n=0}^{\infty}u_n\ x,t\ , \tag{3.2.31}$$

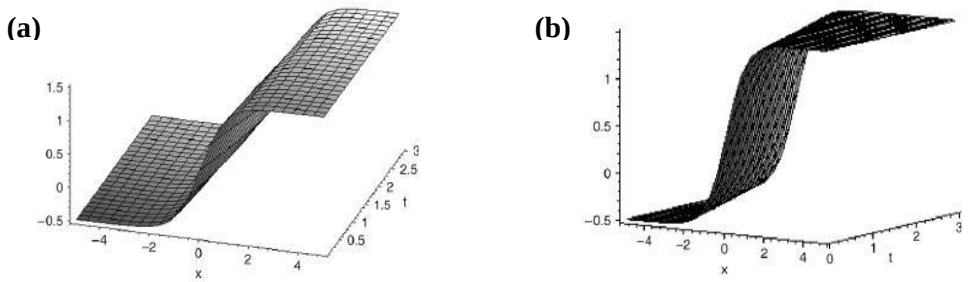
$$v\ x,t\ =\sum_{n=0}^{\infty}v_n\ x,t \tag{3.2.32}$$

seri formunda yerine konularak aranan çözüm fonksiyonlarının seri açılımları elde edilir (Şekil 3.2.4-(a),(c)). Çözüm fonksiyonu,

$$u\ x,t\ =\frac{1}{2}+\tanh\ x+ct \tag{3.2.33}$$

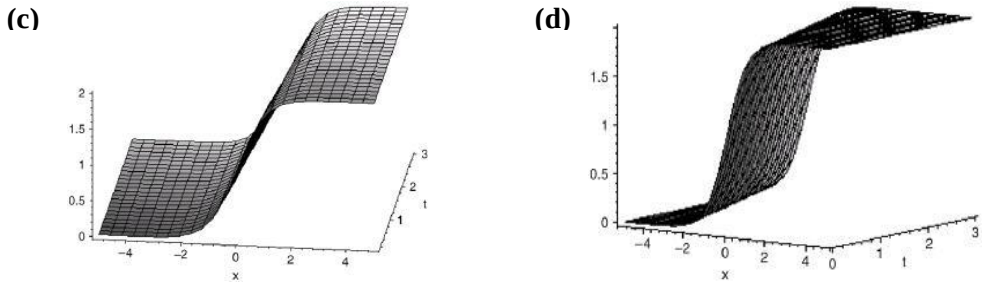
$$v\ x,t\ =1+\tanh\ x+ct \tag{3.2.34}$$

olarak bulunur (Şekil 3.2.4-(b),(d)).



Şekil 3.2.4. (a).(3.2.26) denkleminin $0 \le t \le 3$ zaman aralığında $b_1 = \lambda = k = 1$ değerleri için (3.2.27) koşuluna uyan $u_n(x,t)$ nümerik çözümü (Soliman ve Abdou 2008)

(b).(3.2.26) denkleminin $0 \le t \le 3$ zaman aralığında $b_1 = \lambda = k = 1$ değerleri için (3.2.27) koşuluna uyan $u(x,t)$ analitikik çözümü (Soliman ve Abdou 2008)



Şekil 3.2.4. (c).(3.2.26) denkleminin $0 \le t \le 3$ zaman aralığında $b_1 = \lambda = k = 1$ değerleri için (3.2.27) koşuluna uyan $v_n(x,t)$ nümerik çözümü (Soliman ve Abdou 2008)

(d).(3.2.26) denkleminin $0 \le t \le 3$ zaman aralığında $b_1 = \lambda = k = 1$ değerleri için (3.2.27) koşuluna uyan $v(x,t)$ analitikik çözümü (Soliman ve Abdou 2008)

Varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak kurulan çözüm:

(3.2.27) başlangıç koşulları için varyasyonel iterasyon metodu ile çözümü D.D. Ganji ve arkadaşları tarafından 2007 de incelenmiştir. Çalışmaya göre (3.2.26) denklemlerinin önce varyasyonel fonksiyon sistemi oluşturulur.

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,t) &= u_n(x,t) + \int_0^t \lambda_1 \; \xi \left\{ u_{nt} - \frac{1}{2}u_{nxxx} + 3u_n^2 u_{nx} - \frac{3}{2}v_{nxx} - 3(u_n v_n)_x + 3\lambda u_{nx} \right\} d\xi \\ v_{n+1}(x,t) &= v_n(x,t) + \int_0^t \lambda_2 \; \xi \quad v_{nt} + v_{nxxx} + 3v_n v_{nx} + 3u_{nx} v_{nx} - 3u_n^2 v_{nx} - 3\lambda v_{nx} \; d\xi \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Burada λ_1, λ_2 genel Lagrange çarpanları olup Mapple paket programı yardımıyla bu çarpanlar $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ elde edilir. (3.2.35) ile verilen sistemin Langrange çarpanlarına göre düzenlenmesiyle oluşan

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,t) &= u_n(x,t) - \int_0^t \left\{ u_{nt} - \frac{1}{2}u_{nxxx} + 3u_n^2 u_{nx} - \frac{3}{2}v_{nxx} - 3(u_n v_n)_x + 3\lambda u_{nx} \right\} d\xi \\ v_{n+1}(x,t) &= v_n(x,t) - \int_0^t \; v_{nt} + v_{nxxx} + 3v_n v_{nx} + 3u_{nx} v_{nx} - 3u_n^2 v_{nx} - 3\lambda v_{nx} \; d\xi \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

iterasyon formülü ve (3.2.28) koşulları kullanılarak,

$n = 0$ için,

$$u\;\; x,0 \;\; = \frac{b_1}{2k} + k\tanh(kx)$$

$$v(x,0) = \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{k}{b_1}\right) + b_1 \tanh\;\; kx$$

$n = 1$ için,

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \left\{ u_{0t} - \frac{1}{2}u_{0xxx} + 3u_0^2 u_{0x} - \frac{3}{2}v_{0xx} - 3(u_0 v_0)_x + 3\lambda u_{0x} \right\} d\xi$$

$$= \frac{1}{4b_1 k}\left(\begin{array}{l} 2\lambda k b_1 + 2\lambda k^2 + 4b_1^2 k \tanh(kx) - 4b_1^2 k^4 t + 4b_1^2 k^4 t \tanh^2(kx) + 6k^2 t\lambda b_1^2 \\ -6k^2 t\lambda b_1^2 \tanh^2(kx) - 6k^3 t\lambda b_1 + 6k^3 b_1 t\lambda \tanh^2(kx) + 3b_1^4 t - 3b_1^4 t \tanh^2(kx) \end{array} \right)$$

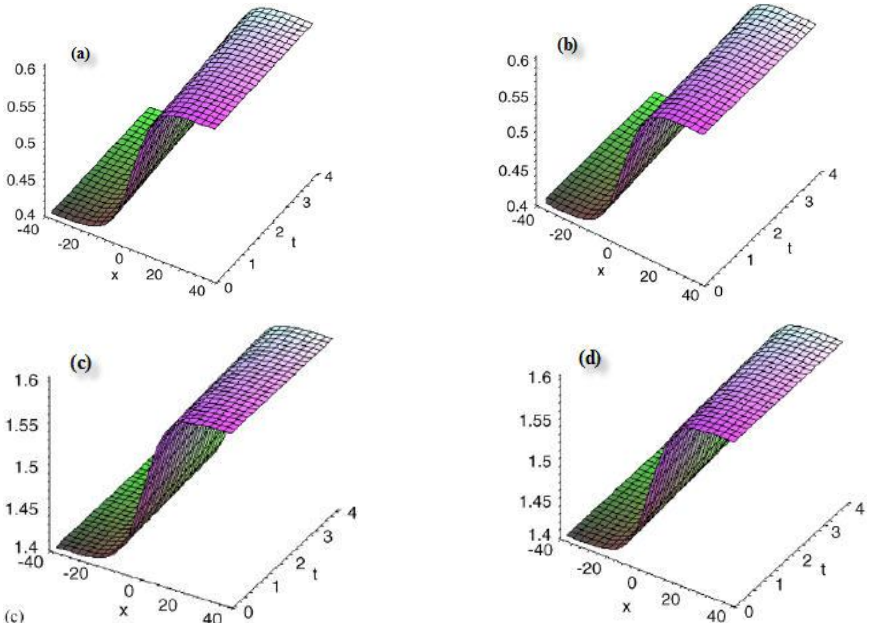
$$v_1(x,t) = v_0(x,t) - \int_0^t \; v_{0t} + v_{0xxx} + 3v_0 v_{0x} + 3u_{0x} v_{0x} - 3u_0^2 v_{0x} - 3\lambda v_{0x} \; d\xi$$

$$= \frac{1}{b_1 k}\left(\begin{array}{l} 0.75tkb_1^3 - 1.125b_1^5 t^2 \tanh(kx) + 1.125b_1^5 t^2 \tanh^3(kx) \\ +1.5b_1^3 t^2 k^4 \tanh(kx) - 1.5b_1^3 t^2 k^4 \tanh^3(kx) - k^5 t b_1 \end{array} \right)$$

$\vdots$

seri çözüm bileşenleri elde edilir.

Ganji ve ekibi, $\lambda = 1.5,\ b_1 = 0.1$ ve $k = 0.1$ için coupled MKdV denklemlerinin çözüm grafiğini (Şekil 3.2.5)'deki haliyle sunmuşlardır.



Şekil 3.2.5. (a), (c).(3.2.26) denkleminin $b_1 = 0.1, \lambda = 1.5$ ve $k = 0.1$ değerleri için (3.2.27) koşuluna uyan $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ analitik çözümü (Ganji ve Ark. 2008)

(b), (d).(3.2.26) denkleminin $b_1 = 0.1, \lambda = 1.5$ ve $k = 0.1$ değerleri için (3.2.27) koşuluna uyan $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ nümerik çözümü (Ganji ve Ark. 2008)

4. İNDİRGENMİŞ DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE SOLİTON ÇÖZÜMLERİN ARAŞTIRILMASI

Üçüncü bölümde mevcut çözümler incelenmişti. Bu bölümde ise indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ilk defa KdV tipi denklem sistemlerine (genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV ve Modifiye Coupled KdV denlem sistemleri) uygulanacaktır. Elde edilen sonuçlar, üçüncü bölümde bahsedilen nümerik metotların sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

4.1. KdV Tipi Denklem Sistemleri İçin Soliton Çözümler

Örnek 4.1.1:

(3.2.1) sisteminin çözümünü indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Reduced Differential Transform Metot) kullanarak oluşturalım.

$u(x,t)$, $w(x,t)$ ve $w(x,t)$ fonksiyonlarına karşılık gelen dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $U(x)$, $V(x)$ ve $W(x)$ olmak üzere verilen sisteme indirgenmiş diferansiyel dönüşüm uygulanırsa

$$\begin{aligned} k+1\ U_{k+1}\ x\ &= \frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3}U_k\ x\ -3\sum_{r=0}^{k}U_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}U_r\ x \\ &\quad +3\sum_{r=0}^{k}\frac{d}{dx}V_{k-r}\ x\ W_r\ x\ +3\sum_{r=0}^{k}V_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}W_r\ x \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$$k+1\ V_{k+1}\ x\ = -\frac{d^3}{dx^3}V_k\ x\ +3\sum_{r=0}^{k}U_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}V_r\ x \tag{4.1.2}$$

$$k+1\ W_{k+1}\ x\ = -\frac{d^3}{dx^3}W_k\ x\ +3\sum_{r=0}^{k}U_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}W_r\ x \tag{4.1.3}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. (3.2.2) başlangıç koşullarına ait başlangıç transformu

$$\begin{aligned} U_0\ x\ &= \frac{1}{3}\ \beta-2K^2\ +2K^2\tanh^2(Kx) \\ V_0(x) &= -\frac{4}{3}\frac{K^2C_0\ \beta+K^2}{C_1^{\,2}}+\frac{4}{3}\frac{k^2\ \beta+K^2}{C_1}\tanh\ Kx \\ W_0\ x\ &= C_0+C_1\tanh\ Kx \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

formundadır. $k=0$ için (4.1.4) kullanılmak üzere (4.1.1)-(4.1.3) rekürans bağıntısından

$$U_1(x)=\frac{4K^3B\sinh\ Kx}{\cosh^3\ Kx}$$

$$V_1(x)=\frac{4}{3}\frac{K^3\beta\ \ \beta+K^2}{C_1\cosh^2\ Kx}$$

$$W_1(x)=\frac{C_1K\beta}{\cosh^2\ Kx}$$

$$U_2(x)=\frac{2K^4\beta^2\ \ 2\cosh^2\ Kx\ -3}{\cosh^4\ Kx}$$

$$V_2(x)=-\frac{4}{3}\frac{K^4\ \ \beta+K^2\ \ \beta^2\sinh\ Kx}{C_1\cosh^3\ Kx}$$

$$W_2(x)=-\frac{C_1K^2\beta^2\sinh\ Kx}{\cosh^3\ Kx}$$

$\vdots$

şeklinde $n\geq 1$ için $U_n(x),V_n(x)$ ve $W_n(x)$ terimleri elde edilir. $n\geq 0$ için ilk beş terim,

$$u\ \ x,t\ =\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)t^k\ ,\quad v\ \ x,t\ =\sum_{k=0}^{\infty}V_k(x)t^k\ ,\quad w\ \ x,t\ =\sum_{k=0}^{\infty}W_k(x)t^k \tag{4.1.5}$$

diferansiyel ters dönüşüm bağıntılarında kullanılarak

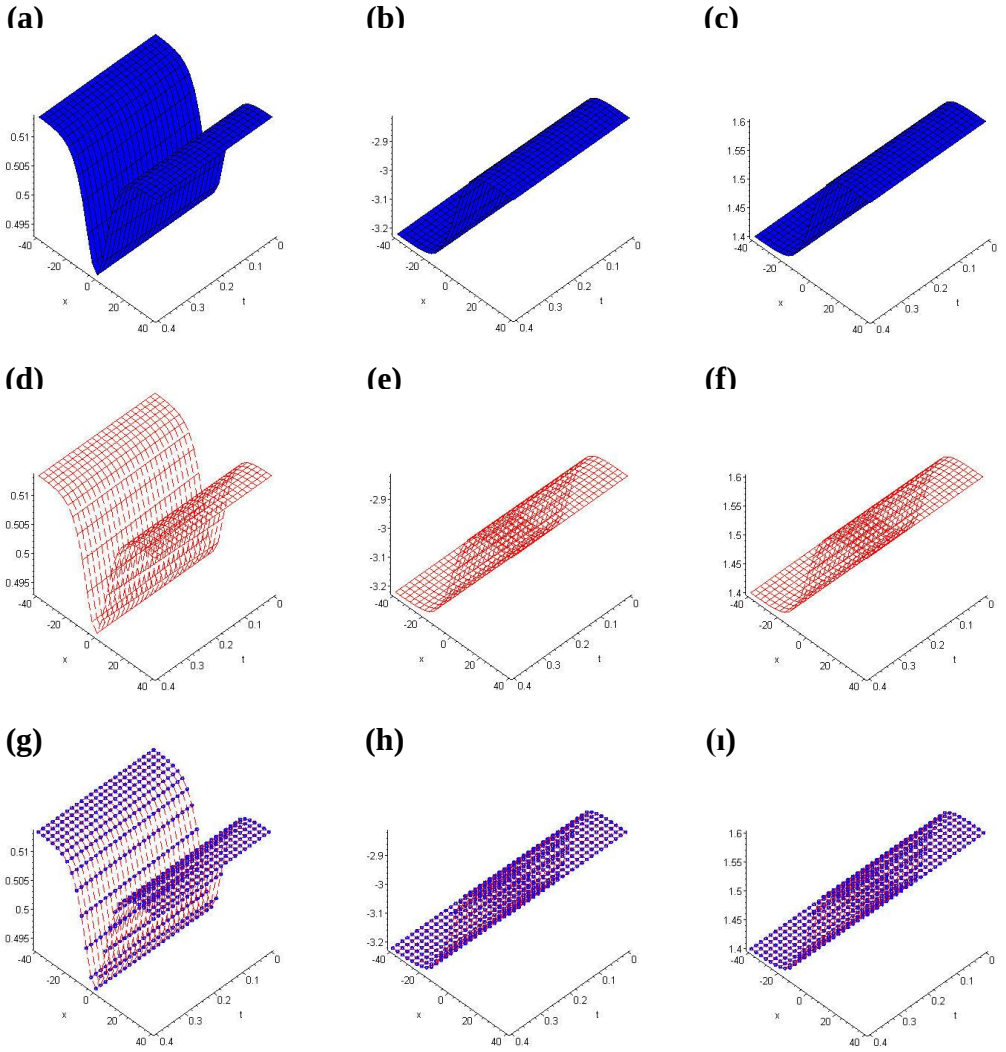
$$\begin{aligned}\tilde{u}_4\ \ x,t\ &=\frac{\beta}{3}-\frac{2K^2}{3}+2K^2\tanh^2\ Kx\ +\frac{4K^3Bt\sinh\ Kx}{\cosh^3\ Kx}\\&\quad-\frac{2K^4\beta^2t^2\ \ 2\cosh^2\ Kx\ -3}{\cosh^4\ Kx}+\cdots\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}_4(x,t)&=-\frac{4}{3}\frac{K^2C_0\ \ \beta+K^2}{C_1^{\ 2}}+\frac{4}{3}\frac{K^2\ \ \beta+K^2}{C_1}\tanh\ Kx\\&\quad+\frac{4}{3}\frac{K^3\beta t\ \ \beta+K^2}{C_1\cosh^2\ Kx}-\frac{4}{3}\frac{K^4\ \ \beta+K^2\ \ \beta^2\sinh\ Kx}{C_1\cosh^3\ Kx}+\cdots\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

$$\tilde{w}_4\ \ x,t\ =C_0+C_1\tanh\ Kx\ +\frac{C_1K\beta}{\cosh^2\ Kx}-\frac{C_1K^2\beta^2\sinh\ Kx}{\cosh^3\ Kx}+\cdots \tag{4.1.8}$$

seri formdaki çözüm fonksiyonları elde edilir. $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için nümerik çözümlere ait grafikler (Şekil 4.1.1-(d),(e),(f))'de verilmiştir.

Böylece seri formdaki çözüm fonksiyonlarından yola çıkarak (3.2.14)'deki Fan'ın kapalı formdaki çözüm takımına ulaşılır. $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için analitik çözüme ait grafikler de (Şekil 4.1.1-(a), (b), (c))'de verilmiştir. Yine nümerik çözümün analitik çözüme yakınlığının daha iyi anlaşılabilmesi için (Şekil 4.1.2.-(g),(h),(ı))'da analitik ve nümerik çözümler birlikte verilmiştir.



Şekil 4.1.1. (a), (b), (c). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan sırasıyla $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümleri (Fan 2001)
(d), (e), (f). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan sırasıyla $\tilde{u}_4(x,t), \tilde{v}_4(x,t)$ ve $\tilde{w}_4(x,t)$ nümerik çözümleri
(g), (h), (ı). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan sırasıyla $\tilde{u}_4(x,t), \tilde{v}_4(x,t)$ ve $\tilde{w}_4(x,t)$ nümerik çözümleri ile $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x,t	$\lvert u(x,t)-\tilde{u}_4(x,t)\rvert$	$\lvert v(x,t)-\tilde{v}_4(x,t)\rvert$	$\lvert w(x,t)-\tilde{w}_4(x,t)\rvert$
0.1,0.1	0.4882E-16	0.18474E-14	0.9202E-15
0.1,0.2	0.942417E-14	0.2369378E-12	0.1176843E-12
0.1,0.3	0.18337583E-12	0.40442564E-11	0.20087341E-11
0.2,0.1	0.10225E-15	0.18285E-14	0.9157E-15
0.2,0.2	0.1625468E-13	0.2356320E-12	0.1170408E-12
0.2,0.3	0.29985373E-12	0.40199101E-11	0.19966466E-11
0.3,0.1	0.15516E-15	0.18038E-14	0.9084E-15

Tablo 4.1.1..(3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5$ ve $K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan $\tilde{u}_5(x,t), \tilde{v}_5(x,t)$ ve $\tilde{w}_5(x,t)$ nümerik çözümleri ile $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümlerinin nümerik karşılaştırılması

(Tablo4.1.1)'de verilen $C_0 = 1.5, C_1 = 0.1, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.1) denkleminin (3.2.2) koşuluna uyan, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metoduyla elde edilen çözümlere ait hata değerlendirmesi, (Tablo 3.2.1)'de verilen Adomian ayrışım metoduyla oluşturulan çözümlerine ait hata değerlendirmesine göre daha iyi sonuçlar vermiştir.

Şimdide (3.2.1) genelleştirilmiş Hirota-Satsuma coupled KdV denkleminin (3.2.3) koşuluna uyan çözümünü inceleyelim. (3.2.3) koşulundan hareketle başlangıç transformları,

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \frac{1}{3}\left(\beta - 8K^2 + 4k^2\tanh^2(Kx)\right) \\ V_0(x) &= -\frac{4}{3}\frac{(3K^4C_0 - 2\beta K^2C_2 + 4K^4C_2}{C_2^{\,2}} + \frac{4K^2}{C_2}\tanh^2 Kx \\ W_0(x) &= C_0 + C_2\tanh^2 Kx \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

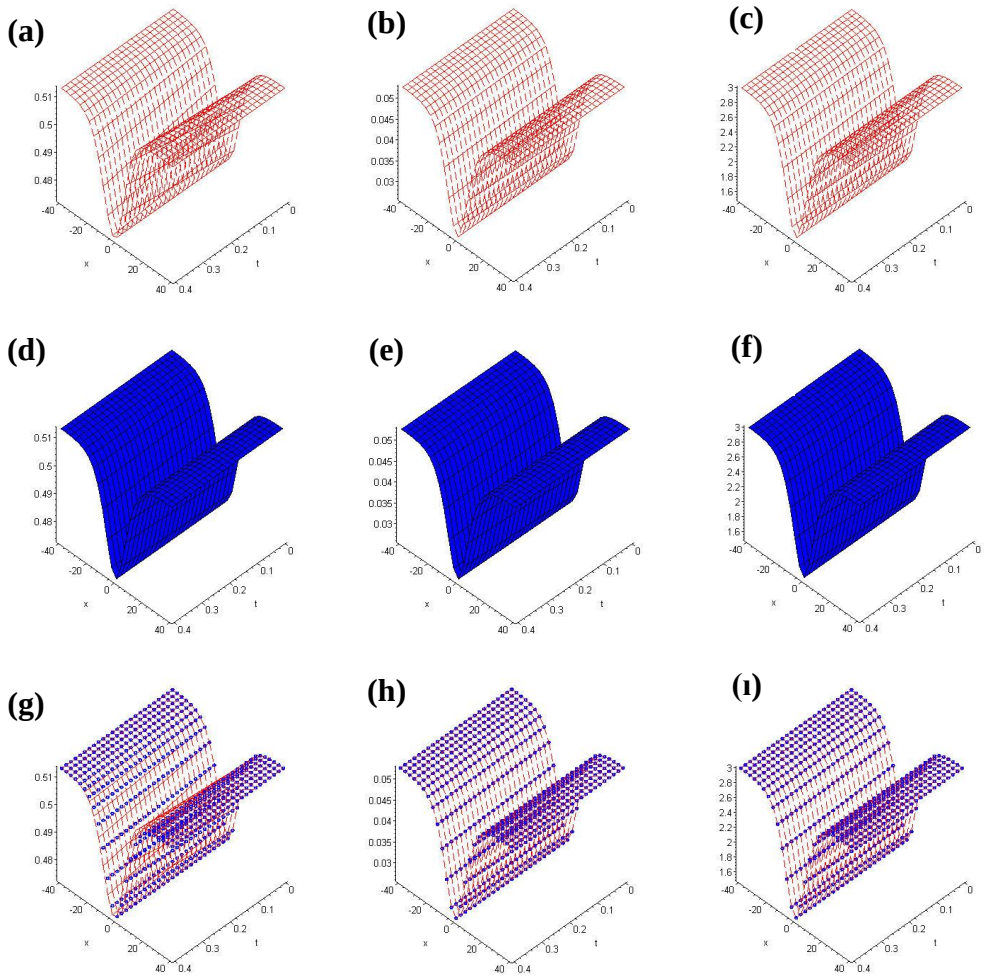
belirlenir. (4.1.1)-(4.1.3)'de kurduğumuz rekürans bağıntısında ilk terimler için başlangıç transformları (4.1.9) kullanılarak $n \geq 1$ için $U_n(x), V_n(x)$ ve $W_n(x)$ terimleri elde edilir. $n \geq 0$ olmak üzere bulunan ilk beşer terim yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{u}_4(x,t) &= \frac{1}{3}\left(\beta - 8K^2 + 4k^2\tanh^2(Kx) + 8K^3 t\sinh(Kx)\right) - 6K^2C_2\cosh^2 Kx \\ &\quad + 6K^2C_2 + \beta C_2\cosh^2 Kx + 3C_0\cosh^2 Kx + 6C_2\cosh^2 Kx - 6C_2 \\ &\quad - 3K^2C_0\cosh^2 Kx \;/\; C_2\cosh^5 Kx + \cdots \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_4(x,t) &= -\frac{4}{3}\frac{(3K^4C_0 - 2\beta K^2C_2 + 4K^4C_2}{C_2^{\,2}} \\ &\quad + \frac{4K^2}{C_2}\tanh^2 Kx + \frac{8K^3\beta t\sinh Kx}{C_2\cosh^3 Kx} + \cdots \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

$$\tilde{w}_4\ \ x,t\ \ = C_0 + C_2 \tanh^2\ \ Kx\ \ + \frac{2C_2 K\beta t \sinh\ \ Kx}{\cosh^3\ \ Kx} + \cdots \qquad (4.1.12)$$

nümerik çözümleri elde edilir. $C_0 = 1.5, C_2 = 1.5, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için nümerik çözümlere ait grafikler (Şekil 4.1.2.-(a),(b),(c))'de verilmiştir. Seri formdaki nümerik çözümler kapalı forma getirilirse (3.2.18)'de verilen Fan'ın çözüm takımına ulaşılır. Yine $C_0 = 1.5, C_2 = 1.5, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için analitik çözüme ait grafikler de (Şekil 4.1.2.-(d),(e),(f))'de verilmiştir. Nümerik çözümün analitik çözüme yakınlığının daha iyi anlaşılabilmesi için (Şekil 4.1.2.-(g),(h),(ı))'da analitik ve nümerik çözümler birlikte verilmiştir.



Şekil 4.1.2. (a), (b), (c). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_2 = 1.5, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan sırasıyla $\tilde{u}_4(x,t), \tilde{v}_4(x,t)$ ve $\tilde{w}_4(x,t)$ nümerik çözümleri
(d), (f), (e). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_2 = 1.5, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan sırasıyla $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümleri (Fan 2001)
(g), (h), (ı). (3.2.1) denkleminin $C_0 = 1.5, C_2 = 1.5, \beta = 1.5, K = 0.1$ değerleri için (3.2.2) koşuluna uyan sırasıyla $\tilde{u}_4(x,t), \tilde{v}_4(x,t)$ ve $\tilde{w}_4(x,t)$ nümerik çözümleri ile $u(x,t), v(x,t)$ ve $w(x,t)$ analitik çözümlerinin karşılaştırılması

Örnek 4.1.2:

(3.2.26)de verilen coupled MKdV denklem sisteminin çözümünü indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (RDTM)'ni kullanarak oluşturalım.

Öncelikle, $u(x,t)$ ve $w(x,t)$ fonksiyonlarına karşılık gelen dönüşüm fonksiyonları sırasıyla $U(x)$ ve $V(x)$ olmak üzere verilen sisteme indirgenmiş diferansiyel dönüşüm uygulanarak

$$\begin{aligned} k+1\ U_{k+1}\ x\ &= \frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3}U_k\ x\ -3\sum_{r=0}^{k} N_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}U_r\ x\ +\frac{3}{2}\frac{d^2}{dx^2}V_k\ x \\ &\quad +3\frac{d}{dx}\left(\sum_{r=0}^{k} U_{k-r}\ x\ V_r\ x\ \right)-3\lambda\frac{d}{dx}U_k\ x \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

$$\begin{aligned} k+1\ V_{k+1}\ x\ &= -\frac{d^3}{dx^3}V_k\ x\ -3\sum_{r=0}^{k} V_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}V_r\ x\ -3\sum_{r=0}^{k}\frac{d}{dx}U_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}V_r\ x \\ &\quad +3\sum_{r=0}^{k} N_{k-r}\ x\ \frac{d}{dx}V_r\ x\ +3\lambda\frac{d}{dx}V_k\ x \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

dönüşüm fonksiyonlarının rekürans bağıntısı elde edilir. Rekürans bağıntısında $k=0$ için (3.2.27)'deki başlangıç koşulları alınmak üzere,

$$U_0\ x\ = \frac{b_1}{2K} + K\tanh(Kx)$$

$$V_0(x) = \frac{\lambda}{2}\left(1+\frac{K}{b_1}\right)+b_1\tanh\ Kx$$

$$U_1\ x\ = (3b_1^{\,3} - 6\lambda K^2 b_1 + 6K^3\lambda - 4K^4 b_1)/(4b_1\cosh^2(Kx)),$$

$$\begin{aligned} V_1\ x\ &= (6\lambda K^2 b_1\cosh^2(Kx) - 6K^3\lambda\cosh^2(Kx) - 4K^4 b_1\cosh^2(Kx) \\ &\quad -24K^4 b_1 + 3b_1^{\,3}\cosh^2(Kx))/(4K\cosh^4(Kx)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2\ x\ &= -(9b_1^{\,6}\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) + 576b_1^{\,3}K^6\cosh^2(Kx) \\ &\quad -720b_1^{\,3}K^6 - 24b_1^{\,4}K^4\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) \\ &\quad -288b_1^{\,4}K^4\sinh\ Kx\ \cosh\ Kx\ +36\lambda^2K^6\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) \\ &\quad +16b_1^{\,2}K^8\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) + 36b_1^{\,4}\lambda K^2\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) \\ &\quad -36b_1^{\,3}\lambda K^3\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) + 36b_1^{\,2}\lambda^2K^4\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) \\ &\quad +48b_1^{\,2}\lambda K^6\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) - 48b_1\lambda K^7\sinh(Kx)\cosh^3(Kx) \\ &\quad -72b_1\lambda^2K^5\sinh(Kx)\cosh^3(Kx))/(16b_1^{\,2}K\cosh^6(Kx)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_2\ x\ =& -(36\lambda^2K^6\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)+16b_1^{\,2}K^8\sinh\ Kx\ \cosh^4(Kx)\\
&-24b_1^{\,4}K^4\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)+2688b_1^{\,2}K^8\sinh\ Kx\ \cosh^2\ Kx\\
&-288b_1^{\,4}K^4\sinh\ Kx\ \cosh\ Kx\ +9b_1^{\,6}\sinh\ Kx\ \cosh^4\ Kx\\
&+36b_1^{\,2}\lambda^2K^4\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)-48b_1^{\,2}\lambda K^6\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&+36b_1^{\,4}\lambda K^2\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)+48b_1\lambda K^7\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&-36b_1^{\,3}\lambda K^3\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)-72b_1\lambda^2K^5\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&-3456b_1^{\,2}K^8\sinh(Kx)-144b_1^{\,3}K^6\cosh(Kx)+72b_1^{\,3}\lambda K^4\cosh^3(Kx)\\
&-72b_1^{\,2}\lambda K^5\cosh^3(Kx))/(16b_1K^2\cosh^7(Kx))\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunan terimler ters dönüşüm bağıntılarında kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
u\ x,t\ =& \frac{b_1}{2K}+K\tanh(Kx)+\frac{1}{4}\frac{(3b_1^{\,3}-6\lambda K^2b_1+6K^3\lambda-4K^4b_1)t}{b_1\cosh^2(Kx)}\\
&-\frac{1}{16b_1^{\,2}K\cosh^6(Kx)}(9b_1^{\,6}\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&+576b_1^{\,3}K^6\cosh^2(Kx)-720b_1^{\,3}K^6-24b_1^{\,4}K^4\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&-288b_1^{\,4}K^4\sinh\ Kx\ \cosh\ Kx\ +36\lambda^2K^6\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&+16b_1^{\,2}K^8\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)+36b_1^{\,4}\lambda K^2\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&-36b_1^{\,3}\lambda K^3\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)+36b_1^{\,2}\lambda^2K^4\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&+48b_1^{\,2}\lambda K^6\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)-48b_1\lambda K^7\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&-72b_1\lambda^2K^5\sinh(Kx)\cosh^3(Kx))t^2+...
\end{aligned}
\qquad (4.1.15)
$$

$$
\begin{aligned}
v\ x,t\ =& \frac{\lambda}{2}\left(1+\frac{K}{b_1}\right)+b_1\tanh\ Kx\ +\frac{1}{4K\cosh^4(Kx)}(6\lambda K^2b_1\cosh^2(Kx)\\
&-6K^3\lambda\cosh^2(Kx)-4K^4b_1\cosh^2(Kx)-24K^4b_1+3b_1^{\,3}\cosh^2(Kx))t\\
&-\frac{1}{16b_1K^2\cosh^7(Kx)}(36\lambda^2K^6\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&+16b_1^{\,2}K^8\sinh\ Kx\ \cosh^4(Kx)-24b_1^{\,4}K^4\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&+2688b_1^{\,2}K^8\sinh(Kx)\cosh^2(Kx)+288b_1^{\,4}K^4\sinh(Kx)\cosh(Kx)\\
&+9b_1^{\,6}\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)+36b_1^{\,2}\lambda^2K^4\sinh(Kx)\cosh^3(Kx)\\
&-48b_1^{\,2}\lambda K^6\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)+36b_1^{\,4}\lambda K^2\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&+48b_1\lambda K^7\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)-36b_1^{\,3}\lambda K^3\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)\\
&-72b_1\lambda^2K^5\sinh(Kx)\cosh^4(Kx)-3456b_1^{\,2}K^8\sinh(Kx)\\
&-144b_1^{\,3}K^6\cosh(Kx)+72b_1^{\,3}\lambda K^4\cosh^3(Kx)\\
&-72b_1^{\,2}\lambda K^5\cosh^3(Kx))t^2+\ldots
\end{aligned}
\qquad (4.1.16)
$$

seri formdaki çözüm fonksiyonlarını elde ederiz. Bu durumda seri çözüm kapatılabildiği takdirde kapalı formu Fan (2001)tarafından verilen

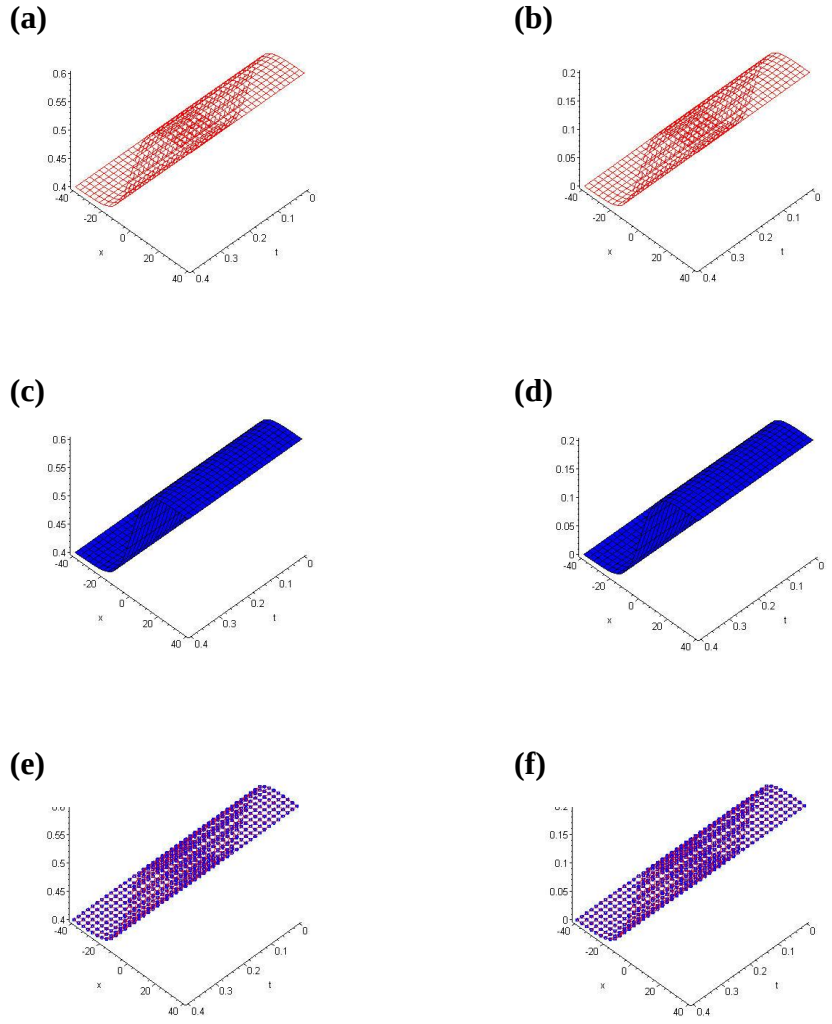
$$\xi = x + \frac{1}{4}\left(-4K^2 - 6\lambda + \frac{6K\lambda}{b_1} + \frac{3b_1^2}{K^2} \right) t \tag{4.1.17}$$

olmak üzere,

$$u\ \ x,t\ \ = \frac{b_1}{2K} + K\tanh(K\xi) \tag{4.1.19}$$

$$v\ \ x,t\ \ = \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{K}{b_1} \right) + b_1 \tanh\ \ K\xi \tag{4.1.20}$$

çözümü ile örtüşmektedir.



Şekil 4.1.3. (3.2.26) denkleminin $b_1 = 0.1, K = 0.1$ ve $\lambda = 0.1$ değerleri için,
(a) ve **(b).**(3.2.27) koşullarına uyan sırasıyla (4.1.15) ve (4.1.16) nümerik çözümleri
(c) ve **(d).** (3.2.27) koşullarına uyan sırasıyla (4.1.19) ve (4.1.20) analitik çözümleri
(e) ve **(f).** Sırasıyla (4.1.19) ve (4.1.20) analitik çözümleri ile (4.1.15) ve (4.1.16) nümerik çözümlerinin karşılaştırması

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada geniş bir yelpazede uygulama alanına sahip olan, dolayısıyla hem matematikçilerin hem de mühendisler tarafından yoğun ilgi gören Soliton teorisi ele alınmıştır. Soliton çözüm elde etmek için kullanılan literatürde mevcut olan Adomian ayrışım yöntemi, Varyasyonel iterasyon yöntemi, Diferansiyel dönüşüm yöntemi verilmiştir. Adomian ayrışım ve varyasyonel iterasyon gibi integral dönüşümlerin aksine diferansiyel dönüşüm yöntemi yalnızca türev operatörüne bağlıdır. Dolayısıyla çok zor integrallenebilen ifadelerle karşılaşılma durumunda diferansiyel dönüşüm metodu daha avantajlı olmaktadır.

Klasik diferansiyel dönüşüm yönteminin geliştirilmiş şekli olan İndirgenmiş Diferansiyel dönüşüm yöntemi kısmi türevli denklemlerde çözüme ulaşmak için gerekli iterasyon sayısını oldukça azaltmaktadır ve tamamen cebirsel bir dönüşüm olmayıp yarı cebirsel bir dönüşümdür. Bu çalışmada, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, ilk defa, KdV tipi denklem sistemlerine uygulanmıştır. Bu tip denklemlerin çözümünde klasik diferansiyel dönüşüm metodu çok zor uygulanabilmekte ve çözümler ıraksamaktadır. KdV tipi denklem sistemlerinin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm ile elde edilen sonuçları gerçek çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

KAYNAKLAR

Russel, J. S., 1844. Report On Waves, Report of The 14th Meeting of The British Association For The Advancement Of Science, John Murray, London, 311-390.
Korteweg, D.J., De Vries , G., 1895. On The Change of Form of Long Waves Advancing In A Rectangular Canal And On A New Type of Long Stationary Waves, Philosophical Magazine 5th Series 36, 422–443.
Fermi, A., Pasta, J.R., Ulam, S.M., 1955. Studies of Nonlinear Problems, I. Los Alamos Report La-1940, Los Alamos Scientific Laboratory.
Kruskal, M. D., Zabusky, N. J., 1963. Progress On The Fermi-Pasta-Ulam Non-Linear String Problem, Princeton Plasma Physics Laboratory Annual Rept. Matt-Q-21, Princeton, Nj, 301-308.
Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., 1965. Interaction of "Solitons" In A Collisionless Plasma And The Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett. 15, 240–243.
Kruskal, M. D., 1978. The Birth of The Soliton, In Calogero, F. (Ed.). Nonlinear Evolution Equations Solvable By The Spectral Transform, Research Notes In Mathematics, 26, Pitman, 1–8.
Lax, P. D., 1968. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution And Solitary Waves, Comm. Pure Appl. Math., 21, 467-490.
Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., 1974. Korteweg-De Vries Equation And Generalization. Vı. Methods Of Exact Solutions, Comm. Pure Appl. Math., 27, 97–133.
Wahlquist, H.D., Estabrook, F.B., 1973. Bäcklund Transformation For Solutions Of The KdV Equation, Phys. Rev. Lett., 31, 1386–1390.
Ablowitz, M.J., Segur, H., 1981, Solitons And The Inverse Scattering Transforms, Sıam, Philadelphia.
Ablowitz, M.J., Clarkson, P., 1991. Solitons, Nonlinear Evolution Equations And Inverse Scattering. New York: Cambridge University;.
Dodd, R. K., Eilbeck, J. C, Gibbon, J. D., Morris, H. C., 1982. Solitons And Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London.
Drazin, P.G., Johnson, R.S., 1996. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
Hirota, R. , 2004. The Direct Method In Soliton Theory, Cambridge University Press, Cambridge.
Allen, **J.E.,** 1993. The Early History of Solitons (Solitary Waves), Phys. Scripta, 57, 436-441.
Munteanu, L., Donescu, S., 2004. Introduction To Soliton Theory: Applications To Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Newell, A.C., 1985. Solitons In Mathematics And Physics, Siam, Philadelphia.
Nuriyev, B., 1996. A First Course In Soliton Theory, Metu, Ankara.
Wazwaz A. M., 2002. Partial Differential Equations: Methods And Applications, Balkema Publishers, Netherlands.

Wazwaz A. M., 2008. The KdV Equation, Handbook of Differential Equations (Evolutionary Equations), Vol: 4, Chap: 9, (Ed. Dafermos C. M., Pokorny M.), Elsevier

Vvedenskii, D., 1992. Partial Differential Equations With Mathematica. Wokingham (England) Etc.,Addison-Wesley.

Hirota, R., Satsuma, J., 1981. Soliton Solutions of A Coupled Korteweg–De Vries Equation, Phys.Lett. A 85, 407–408.

Fan, **E.,** 2001. Soliton Solutions For A Generalized Hirota–Satsuma Coupled KdV Equation And A Coupled MKdV Equation, Phys.Lett.A 282, 18–22.

Wu, Y.T., Geng, X.G., Hu, X.B., Zhu, S.M., 1999. A Generalized Hirota–Satsuma Coupled Korteweg- De Vries Equation And Miura Transformations, Phys. Lett. A., 255, 259–264.

Wolfram, S., 1999. The Mathematica Book, Cambridge(Uk): Cambridge University Press.

Adomian, G., 1984. New Approach To Nonlinear Partial Differential Equations. J. Math. Anal. Appl, 135,420–434.

Adomian, G., 1988. Review of The Decomposition Method In Applied Mathematics., J. Math. Anal. Appl., 135,501-544.

Adomian, G., 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method., Boston, Ma: Kluwer Academic Publishers.

Wazwaz, A. M., 2000. A New Algorithm For Calculating Adomian Polynomials For Nonlinear Operators. Appl. Math. Comput,111, 53-69.

Abbaoui, K., Cherruault, Y., Seng, V., 1995. Practical Formulae For The Calculus Of Multivariate Adomian Polynomials, Math.Comp.Model.,22 , 89–93.

Cherruault, Y., Adomian, G., 1993. Decomposition Methods: A New Proof Of Convergence, Math. Comput.Model.18, 103–106.

Wazwaz A. M., 1999. A Reliable Modification of Adomian Decomposition Method, Appl. Math. Comp.102, 77–86.

D.Kaya, 1998, A New Approach To Solve A Nonlinear Wave Equation, Bull. Malaysian Math.Soc.21, 95–100.

D.Kaya, 2004, Solitary Wave Solutions For A Generalized Hirota-Satsuma Coupled KdV Equation, J.Appl.Math.147 ,69-78.

Soliman A.A., Abdou M.A., 2008, The Decomposition Method For Solving The Coupled Modified KdV Equation, Math. Comput. Model.,47,1035-1041

Raslan K. R., 2004, The Decomposition Method For A Hirota-Satsuma Coupled KdV Equation And Coupled MKdV Equation, Int. J. Comput. Math., 81, 1497-1505

Inokuti, M., 1978. General Use of The Lagrange Multiplier In Non-linear Mathematical Physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, Oxford, 156-162.

He, J.H., 1997. A New Approach To Nonlinear Partial Differential Equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2, 203–205.

He, J.H., 1998. A Variational Iteration Approach To Nonlinear Problems And Its Applications, Mech. Appl. 20, 30–31.

He, J.H., 1999. Variational Iteration Method—A Kind Of Nonlinear Analytical Technique: Some Examples, Int. J. Non-Linear Mech. 34, 708–799.

He, J.H., 2000. Variational Iteration Method For Autonomous Ordinary Differential Systems, Appl. Math. Comput. 114, 115 –123.

He, J.H., 2004. Variational Principles For Some Nonlinear Partial Differential Equations With Variable Coefficients, Chaos, Solitons And Fractals, 19, 847–851.
He, J.H., 2005. A Generalized Variational Principle In Micromorphic Thermoelasticity, Mech. Res. Comm. 32, 93–98.
He, J.H., 2006. Some Asymptotic Methods For Strongly Nonlinearly Equations, Inter. J. Modern Math. 20, 1141–1199.
He, J.H., Wu X.H., 2006, Construction of Solitary Solution And Compaction-Like Solution By Variational İteration Method, Chaos, Solitons & Fractals, 29, 108-113.
Zhou, J. K., 1986. Differential transformation and Its Aplications for Electical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan China (in Chinese).
Chen, C. K., Ho, S. H., 1996. Application of Differential Transformation To Eigenvalue Problems, App. Math.Comp., 79, 173-188.
Chen, C. L., Liu, Y. C., 1998. Differential Transformation Techniqeu For Steady Nonlinear Heat Conduction Problems, App. Math.Comp., 95, 155-1164,
Chen, C. K., Ho, S. H., 1999. Solving Partial Diferential Equations By Two-Dimensional Differential Transform Method, App. Math.Comp., 106, 171-179.
Abdel-Halim Hassan, I.H., 2004. Differential Transformation Technique For Solving Higher-Orden Initial Value Problems, App. Math.Comp., 154, 299-311.
Arıkoglu, A., Özkol, I., 2004. Solution of Boundary Value Problems For Integro-Differential Equations By Using Differantial Transform Method, App. Math.Comp.
Bildik, N., Konuralp, A., 2006. The Use of Variational Iteration Method, Differential Transform Method And Adomian Decomposition Method For Solving Different Types of Nonlinear Partial Differential Equations, Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 7, 65–70.
Wazwaz A.M., 2007, The Variational Iteration Method For Solving Linear And Nonlinear Systems of PDEs., Comput. Math. Appl., 54, 895–902.
Wazwaz, A.M., 2007, The Variational Iteration Method: A Reliable Analytic Tool For Solving Linear And Nonlinear Wave Equations, Comput. Math. Appl. 54, 926–32.
Yusufoglu, E., Bekir, A., 2007. The Variational Iteration Method For Solitary Patterns Solutions Of GBBM Equation., Phys Lett A., 367, 461–464.
Odibat, Z.M., Momani, S., 2006. Application Of Variational Iteration Method To Nonlinear Differential Equations Of Fractional Order, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 7, 27–34.
Wazwaz, A.M., 2007. The Variational Iteration Method For Rational Solutions For KdV, K(2,2), Burgers, And Cubic Boussinesq Equations, J.Comput.Apl. Math., 207, 111-120.
Soliman, A.A., Abdou, M.A., 2007. Numerical Solutions of Nonlinear Evolution Equations Using Variational Iteration Method, Intern. J. Comput.Math., 47,1035-1041
Ganji, D.D., Nourollahi, M., Rostamian, M., 2007. A Comparison of Variational Iteration Method With Adomian's Decomposition Method In Some Highly Nonlinear Eq.s, Int. J. Sci. Tech., 2, 179-188.
Ganji, D.D., Jannatabadi M., Mohseni E., 2007, Application Of He's Variational Iteration Method To Nonlinear Jaulent-Miodek Equations And Comparing It With Adm, J. Comput. Apl. Math., 207, 35-45.

Kurnaz, A. and Oturanç, G., 2005. The Differential Transform Approximation For The System of Ordinary Differential Equations. Int. J. Comp. Mathematics, 82, (2005) 709-719.

Kurnaz,A, Oturanc,G, Kiris,M.E.,2005. N-Dimensional Differential Transformation Method For Solving Linear And Nonlinear PDE's, Intern. J. Comp. Math., 82, 369–80.

Keskin,Y., Kurnaz, A., Kiris, M.E., Oturanc, G., 2007. Approximate Solutions of Generalized Pantograph Equations By The Differential Transform Method, International Journal of Nonlinear Sciences And Numerical Simulation, 8, 159-164.

Keskin Y., Oturanc G., Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation (In Press).

Keskin Y., Oturanc G., Numerical simulations of systems of PDEs by reduced differential transform method, Communications In Nonlinear Science And Numerical Simulations (In Press).

Keskin Y., 2005 Diferansiyel dönüşüm yöntemiyle diferansiyel denklemlerin çözülmesi, Yüksek lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.