



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ *k*-FİBONACCİ VE *k*-LUCAS SAYILARININ YENİ BİR AİLESİ

Ayşe ATALAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Temmuz-2013
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ *k*-FİBONACCİ VE *k*-LUCAS SAYILARININ YENİ BİR AİLESİ

Ayşe ATALAY

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU

2013, 45 Sayfa

Jüri
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

Bu çalışmada öncelikle, Moawwad El Mikkawy ve Tomohiro Sogabe tarafından Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan $F_n^{(k)}$, *k*-Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi tanımlanıp ve bu tanımdan faydalanılarak Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L_n^{(k)}$, *k*-Lucas sayılarının yeni ailesi elde edilmiştir. Bu yeni aileden yararlanılarak *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayıları için $F_{s,n}^{(k)}$ ve $L_{s,n}^{(k)}$ şeklinde gösterilen yeni bir aile tanımlandı. Daha sonra $F_{s,n}^{(k)}$ ve $L_{s,n}^{(k)}$ sayıları için çeşitli teoremler ve özdeşlikler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, *k*-Fibonacci Sayıları, *k*-Lucas Sayıları, *k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesi, *k*-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesi

ABSTRACT

MS THESIS

A NEW FAMİLY OF THE GENERALİZED *k*-FİBONACCİ AND *k*-LUCAS NUMBERS

Ayşe ATALAY

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Kemal USLU

2013 , 45 Pages

Jury

Advisor: Asst. Prof. Dr. Kemal USLU

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Assoc. Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU

In this study, first the A new family of *k*-Fibonacci numbers $F_n^{(k)}$ were defined as a new family of the Fibonacci numbers by Mowwad El-Mikkawy and Tomohiro Sogabe. Using this definition, A new family of *k*-Lucas numbers $L_n^{(k)}$ were obtained as a new family of Lucas numbers. We have using this new family, A new family of *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers $F_{s,n}^{(k)}$ and $L_{s,n}^{(k)}$ were defined.

Finally, for a new family of *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers $F_{s,n}^{(k)}$ and $L_{s,n}^{(k)}$ some theorems and identities were obtained by Binet Formula and some important properties.

Keywords: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, *k*-Fibonacci Numbers, *k*-Lucas Numbers, A New Family of *k*-Fibonacci Numbers, A New Family of *k*-Lucas Numbers

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamıza yardımcı olacak ön bilgilerden bahsedilmiştir. Fibonacci ve Lucas sayıları, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayıları ve bunların yeni ailesi hakkında kısaca bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde; *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesi olan $F_{s,n}^{(k)}$ nın tanımı yapılmıştır. Ardından tanımlanan bu yeni aile ile alakalı çeşitli teoremler ve özdeşlikler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde *k*-Lucas sayılarının yeni ailesi olan $L_{s,n}^{(k)}$, *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesi olan $F_{s,n}^{(k)}$ nın tanımından faydalanılarak elde edilmiş ve bu aile için de çeşitli teorem ve özdeşlikler bulunmuştur.

Çalışmam süresince en içten yardımlarıyla bana yön veren Yrd. Doç.Dr. Kemal USLU hocama ve hem maddi hem manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe ATALAY
KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Fibonacci Sayıları…… .2
1.2. Fibonacci Sayıları İle İlgili Özdeşlikler…….6

1.3. Lucas Sayıları…..…….……6

1.4. Lucas Sayıları ile İlgili Özdeşlikler ……..7
1.5. Fibonacci ve Lucas Sayıları Arasındaki Özdeşlikler …….……..7
1.6. *k*-Fibonacci Sayıları……..……....8
1.7. *k*-Fibonacci Sayıları için Özdeşlikler ….....……..9
1.8. *k*-Lucas Sayıları……..10
1.9. *k*-Lucas Sayıları için Özdeşlikler …..……11
1.10. *k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesi ……...11
1.11. *k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler ……18

1.12. *k*-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesi …….20

2. *k*-FİBONACCİ SAYILARININ FARKLI YENİ BİR AİLESİ ……25
2.1. *k*-Fibonacci Sayılarının Farklı Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler ……...32

3. *k*-LUCAS SAYILARININ FARKLI YENİ BİR AİLESİ ……34
3.1. *k*-Lucas Sayılarının Farklı Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler …….40

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 42

4.1. Sonuçlar **……..**42
4.2. Öneriler ……...42

KAYNAKLAR 43

ÖZGEÇMİŞ 45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada yer alan bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
F_n	n. Fibonacci Sayısı
L_n	n. Lucas Sayısı
$F_{k,n}$	n. k-Fibonacci Sayısı
$L_{k,n}$	n. k-Lucas Sayısı
$F_n^{(k)}$	k-Fibonacci Sayısının Yeni Ailesinin n. Sayısı
$L_n^{(k)}$	k-Lucas Sayısının Yeni Ailesinin n. Sayısı
$F_{s,n}^{(k)}$	k-Fibonacci Sayısının Yeni Bir Ailesinin n. Sayısı
$L_{s,n}^{(k)}$	k-Lucas Sayısının Yeni Bir Ailesinin n. Sayısı
$\{F_n\}$	Fibonacci Dizisi
$\{L_n\}$	Lucas Dizisi
$\{F_{k,n}\}$	k-Fibonacci Dizisi
$\{L_{k,n}\}$	k-Lucas Dizisi
$\{F_n^{(k)}\}$	k-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesinin Dizisi
$\{L_n^{(k)}\}$	k-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesinin Dizisi
$\{F_{s,n}^{(k)}\}$	k-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesinin Dizisi
$\{L_n^{(k)}\}$	k-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesinin Dizisi

1. GİRİŞ

Giriş bölümü, çalışmama yardımcı olan kaynakların verildiği bölümdür. Bu bölümde kaynaklar hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

[5]'te Falcon ve Plaza, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan *k*-Fibonacci sayılarını tanımladılar ve Fibonacci dizisi ile Pell dizisinin bu sayı dizisinden elde edilebileceğinin gösterdiler.

[18]'de K. Uslu, N. Taskara, H. Köse, genelleştirilmiş *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarını tanımladılar. Bu çalışmada $F_{k,n}$ ve $L_{k,n}$ *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayıları genelleştirilmiş *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayıları $G_{k,n}$ adı altında genelleştirildi. Buna göre her k pozitif reel sayısı için $G_{k,0}=a$ ve $G_{k,1}=b$ başlangıç koşulları altında;

$$G_{k,n+1}=kG_{k,n}+G_{k,n-1}\ , \quad n\geq 1$$

olarak tanımlanmıştır.

[4]'de Moawwad El-Mikkawy, Tomohiro Sogabe *k*-Fibonacci sayılarının yeni bir ailesini tanımladılar. Bu çalışmaya göre n ve k $(k\neq 0)$ doğal sayılar olsun. Bu takdirde $n=mk+r$ $(0\leq r<k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$, genelleştirilmiş *k*-Fibonacci sayıları

$$F_n^{(k)}=\frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1})^r(\alpha^m-\beta^m)^{k-r} \quad , \quad n=mk+r \quad (0\leq r<k)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Dolayısıyla *k*-Fibonacci sayılarına yeni bir boyut getirilmiştir.

[21]'de Nazmiye Yılmaz, Yasin Yazlık, Necati Taskara, *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesini genelleştirdiler. Buna göre n ve k $(k\neq 0)$ doğal sayılar olmak üzere genelleştirilmiş *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesini

$$G_n^{(k)}=\frac{1}{(\sqrt{5})^k}(X\alpha^{m+1}-Y\beta^{m+1})^r(X\alpha^m-Y\beta^m)^{k-r} \quad , \quad n=mk+r \quad (0\leq r<k)$$

şeklinde tanımladılar.

Biz ise bu çalışmada *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının yeni ailesini ele alarak farklı bir aile tanımladık ve bu aile ile ilgili çeşitli teoremler ve özdeşlikler elde ettik.

1.1. Fibonacci Sayıları

Leonardo Fibonacci İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuş olan İtalyan bir matematikçidir. Bu nedenle Pisalı Leonardo olarak da anılmaktadır. Fibonacci bir problemi araştırırken bu sayıları buluyor ve kendi adını veriyor:

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,...\}$$

dizisi Fibonacci dizisi olarak geçiyor. Fibonacci dizisinin özelliği kendinden önceki iki ardışık sayının toplamının kendisinden sonraki sayıya eşit olmasıdır.

İtalyan matematikçi Fibonacci yazdığı matematik kitaplarından birinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir problem sorar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapmazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift her ay bir çift yavru yapar. Buna göre Fibonacci'nin arkadaşı bir çift tavşanla başlarsa kaç ay sonra kaç çift tavşanı olur?

İlk ay yeni doğmuş bir çift tavşanımız olsun. Matematik problemlerinde bu yavruların anasız babasız nasıl büyütülecekleri konusuna pek girilmez. İkinci ayda bu tavşanlar henüz yavrulamadıkları için hala bir çift tavşanımız var. Üçüncü ay bunlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşanımız olacak. Yeni doğan çift dördüncü ay doğurmayacak, oysa ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşanımız olacak. Bu şekilde devam edersek pek bir yere varamayacağız galiba. Düşünsenize 100. aya kadar hesabı böyle götürmemiz mümkün mü? Örneğin 100.ayda kaç tavşanımız olacağını doğrudan hesaplamaya çalışalım. 99.ayda kaç tavşanımız varsa onların hepsi 100. ayda da olacak. Bunların bir kısmı yavrulayacak. Yavrulayacak olanların en az iki aylık olması gerektiğine göre 100. ayda yavrulayacak olanlar 98.ayda sahip olduğumuz tavşanların hepsi olacak. Demek ki 100. aydaki tav-şan sayısını bulmak için 98. aydaki tavşan sayısıyla 99. aydaki tavşan sayısını toplamak gerekiyor.

Bu hesaba bazı itirazlar yükselebilir. Biz sadece 100. aydaki sayıyı merak ediyorduk. Şimdi onu bulmak için hem 98. hem de 99. aylardaki sayıyı bulmamız gerekecek. Bu hesabı 100. ayda değil de üçüncü aydan itibaren yapalım. Birinci ve ikinci aylarda birer çift tavşanımız vardı. Demek ki üçüncü ay iki çift tavşanımız olacak. İkinci aydaki bir çift ile üçüncü aydaki iki çifti toplarsak dördüncü ay üç çifti bulacağız.

Buna göre Fibonacci dizisi şöyle tanımlanır:

$F_1 = 1,\ F_2 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ ,\ n > 2$

Buna göre Fibonacci sayılarının ilk birkaç tanesi şöyle sıralanır:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946...

Dizilim içindeki bir sayıyı kendisinden önce gelen sayıya bölerek ilerlersek ulaşacağımız sonuç 1,618 rakamına sürekli yaklaşacak şekilde oluşacaktır.

Peki nedir Fibonacci Sayılarını yüzyıllardır bu kadar önemli yapan?

1. Altın oran sayısının çok önemli bir sayı olması,
2. Dizinin daha küçük elemanlarının doğada karşımıza çıkması,
3. Sayıların sayılar teorisinde farklı birçok kullanımının olması Fibonacci sayılarını oldukça önemli yapmıştır.

Şimdi çoğu insan için karmaşık gelen bu 3 maddeyi biraz daha anlaşılır bir dille ifade edip açıklayalım;

1. Altın Oran'ı eski Mısırlılar ve Yunanlılar bulmuş ve daha çok mimaride kullanmışlardı, basit anlamıyla altın oran; bütünün parçaları arasında olan geometrik ve sayısal bir oran bağlantısıdır.

Bu tanım akıllara şu soruyu getirir; nedir altın oran ve Fibonacci arasındaki bağlantı?

Fibonacci dizisindeki ardışık 2 sayının oranı sayılar büyüdükçe Altın Oran'a (1,618) yaklaşır. Peki altın oranı günlük yaşamda nerelerde görebiliriz?

- <u>İnsanın İşaret Parmağı;</u>

  Bir insanın işaret parmağı (normal standartlardaki parmaklar için geçerli) her bir bölümü bir önceki bölüme oranı Altın Oranı veriyor.

- <u>Akciğerler;</u>

  Akciğeri oluşturan bronş ağacının görülen en belirgin özelliği asimetrik olmasıdır. Soluk borusu, biri uzun (sol) ve diğeri de kısa (sağ) olmak üzere iki ana bronşa ayrılır. Kısa bronşun uzun bronşa olan oranının yaklaşık olarak 1/1,618 değerini verdiği saptanmıştır.

- <u>İnsan Yüzü;</u>

  Kulaklar arasındaki mesafe, gözle üst dudak arasındaki, burnun altı ile çene

arasındaki mesafe altın oran içermektedir.

- Kollar:

  Kolumuzun üst bölümünün alt bölüme oranı altın oranı verir.

- Mısır Piramitleri:

  Her bir piramitin tabanının yüksekliğine oranı altın oranı veriyor.

- Çam Kozalağı:

  Çam kozalağındaki taneler kozalağın altındaki sabit bir noktadan kozalağın tepesindeki başka bir sabit noktaya doğru spiraller oluşturarak çıkarlar. Eğrinin eğrilik açısı altın orandır.

- Tütün Bitkisi:

  Tütün Bitkisinin yapraklarının dizilişinde bir eğrilik söz konusudur. Bu eğriliğin tanjantı altın orandır.

- Eğrelti Otu:

  Tütün Bitkisindeki eğriliğin tanjantı altın orana eşittir.

Doğada Fibonacci sayılarının nasıl karşımıza çıktığını inceleyelim;

Bir bitkinin sapındaki yaprakların, bir ağacın dallarının düzeninde her zaman altın oran kuralı vardır. Yapraklardan biri başlangıç noktası olarak alındığında, bundan başlayarak yukarıya doğru (aşağıya doğru da olabilir) sayılırsa (aynı hizada birden fazla yaprak olabileceği düşünülürse dönme işlemi yapılabilir) farklı bitkiler için farklı sayılar bulunabilir ancak bunların tek ortak özellikleri Fibonacci sayıları olmalarıdır. Bir papatyanın yaprak sayılarının da 21,34,55,89 yani Fibonacci sayılarını verdiği bilinir.

Tüm bunların şaşırtıcı sonuçlarını gördükten sonra birkaç ayrıntıya değinmek gerekirse; Altın Oran'ı sanatta ve mimaride oldukça fazla görmekteyiz. Aynı zamanda resimde, müzik notlarında, şiir, ekonomi gibi birçok alanda altın oran bulunmaktadır. **[3-25]**

Tanım 1.1.1. F_n Fibonacci sayı dizisi;

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots\}$$

şeklindedir. Bu sayı dizisinin her bir elemanına "Fibonacci Sayısı" denir. F_n sayılarının 2. mertebeden lineer rekürans bağıntısı;

$$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} & , \quad n \geq 1 \\ F_0 = 0 & , \quad F_1 = 1 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bazı Fibonacci sayıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_n	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**…**

şeklinde verilebilir.

F_n Fibonacci sayıları için Binet Formülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \quad , \quad n = 0,1,2,... \tag{1.1.2}$$

Burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ve \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Fibonacci sayılarının ayrıca

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ -1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in R^{nxn}$$

özel tridiagonal matris formunun determinantı ile bağlantılı olduğu da bilinmektedir **[4].**

1.2. Fibonacci Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Aşağıda bu çalışma için gerekli olan birtakım özdeşlikler verilmiştir **[3].**

1) **(Cassini's Formülü)**

$$F_{n-1}.F_{n+1}-F_n^{\,2}=(-1)^{n+1} \qquad n\geq 1$$

2) **(Fibonacci Binet Formülü)** $\alpha>0$ ve $\beta<0$ olmak üzere,

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \qquad n\geq 1$$

3) $$F_n+F_{n-2}=\frac{F_{2n-2}}{F_{n-1}}$$

4) **(d'Ocagne Özdeşliği)**

$$F_mF_{n+1}-F_nF_{m+1}=(-1)^nF_{m-n}$$

5) **(Honsberger Formülü)**

$$F_{n+m}=F_{n+1}F_m+F_nF_{m-1}$$

1.3. Lucas Sayıları

Fibonacci rekürans bağıntısı kullanılarak, farklı başlangıç koşulları altında, yeni sayı dizileri elde edilebilir.

Tanım 1.3.1. L_n, Lucas sayıları;

$$\begin{cases} L_n=L_{n-1}+L_{n-2} \\ L_0=2, L_1=1 \end{cases}, n=2,3,... \tag{1.3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Lucas sayıları için Binet Formülü;

$$L_n=\alpha^n+\beta^n, n=0,1,... \tag{1.3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra Lucas sayıları ile Fibonacci sayılarının

$$L_n = F_n + F_{n-2} = \frac{F_{2n-1}}{F_{n-1}} \tag{1.3.3}$$

formülü ile bağlantılı olduğunu görürüz **[4, 24].**

1.4. Lucas Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Bu bölümde yararlanacağımız bazı özdeşlikler aşağıda verilmiştir **[3,5].**

1) $n \geq 2$ için $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+2}$

2) ***(Lucas Binet Formülü)***

$n \geq 1$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$

3) $L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 5.(-1)^n$

4) $L_n^2 = L_{2n} + 2(-1)^n$

1.5. Fibonacci Sayıları ile Lucas Sayıları Arasındaki Özdeşlikler [3]

1) $n > 1$ için $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

2) $n > 2$ için $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

3) $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$

4) $F_{2n} = F_n L_n$

5) $5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n$

6) $m>n$ olmak üzere $2F_{m+n}=F_mL_n+F_nL_m$

1.6. *k*-Fibonacci Sayıları

k-Fibonacci sayıları, Fibonacci sayılarının bir genelleştirilmesi olup Falco'n ve Plaza tarafından geliştirilmiştir. Bu kısımda *k*-Fibonacci sayıları konusunda yararlandığımız tanım ve özdeşlikleri ele alacağız.

Tanım 1.3.1. (*Falco'n ve Plaza, 2007, [9]*) Her $k>0$ reel sayısı için;

$$\begin{cases} F_{k,n+1}=kF_{k,n}+F_{k,n-1} & , \quad n\geq 1 \\ F_{k,0}=0 & , \quad F_{k,1}=1 \end{cases} \tag{1.6.1}$$

denklemi sabit katsayılı ikinci mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi;

$$r^2-kr-1=0$$

şeklindedir. r_1 ve r_2 ; $r_1>r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \qquad \text{ve} \qquad r_2=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olup bu iki kökten hareketle;

$$\begin{aligned} r_1+r_2&=k \\ r_1.r_2&=-1 \\ r_1-r_2&=\sqrt{k^2+4} \\ {r_1}^2+{r_2}^2&=k^2+2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

k-Fibonacci sayıları için Binet Formülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{k,n} = \frac{r_1^{\,n} - r_2^{\,n}}{r_1 - r_2}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.6.2}$$

$\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ k-Fibonacci dizisinde;

- $k=1$ alınırsa $\{F_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,1,2,3,5,8,\ldots\}$ Fibonacci dizisi
- $k=2$ alınırsa $\{F_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,2,5,12,29,70,\ldots\}$ Pell dizisi

elde edilir.

1.7. *k*-Fibonacci Sayıları İçin Özdeşlikler [3]

1) (***Falco'n ve Plaza , 2007 , [9]***)

$$F_{k,n-r}F_{k,n+r} - F_{k,n}^2 = (-1)^{n-r+1}F_{k,r}^2$$

2) (***Falcon ve Plaza , 2007 , [9]***)

$$F_{k,r+s} = F_{k,r+1}F_{k,s} + F_{k,r}F_{k,s-1}$$

3) (***Falcon ve Plaza , 2007 [9])*** $m>n$ olmak üzere

$$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$$

4)
$$F_{k,n-1} + F_{k,n+1} = \frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}} \tag{1.7.1}$$

5)
$$F_{k,2n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i F_{k,i} \tag{1.7.2}$$

6) (***Falco'n ve Plaza , 2007 , [9]***)

$$F_{k,n}^2 - F_{k,n-1}F_{k,n+1} = (-1)^{n+1} \tag{1.7.3}$$

1.8. *k*-Lucas Sayıları

Tanım 1.8.1. Her $k>0$ reel sayısı için;

$$\begin{cases} L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1} & , \quad n \geq 1 \\ L_{k,0} = 2 & , \quad L_{k,1} = 1 \end{cases} \tag{1.8.1}$$

denklemi sabit katsayılı ikinci mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi;

$$r^2 - kr - 1 = 0$$

şeklindedir. r_1 ve r_2 ; $r_1 > r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \qquad \text{ve} \qquad r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olup bu iki kökten hareketle;

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= k \\ r_1 . r_2 &= -1 \\ r_1 - r_2 &= \sqrt{k^2+4} \\ r_1^{\,2} + r_2^{\,2} &= k^2 + 2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. *k*-Lucas sayısı için Binet benzeri formül aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Teorem 1.8.1. $X = \frac{2+r_1}{r_1}$, $Y = \frac{2+r_2}{r_2}$ olmak üzere,

$$L_{k,n} = \frac{Xr_1^{\,n} - Yr_2^{\,n}}{r_1 - r_2} \tag{1.8.2}$$

dir.

$\{L_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ k-Lucas dizisinde;

$k=1$ alınırsa $\{L_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{2,1,3,4,7,11,18,29,\ldots\}$ Lucas dizisi elde edilir **[3].**

1.9. *k*-Lucas Sayıları İçin Özdeşlikler

Bu bölümde araştırmamızda kullanacağımız k-Lucas sayıları ile alakalı bazı özdeşliklere yer verilmiştir **[3].**

1) $L_{k,n-1}L_{k,n+1}-L_{k,n}^2=(-1)^{n+1}(2k+3)$

2) $L_{k,n-r}L_{k,n+r}-L_{k,n}^2=(-1)^{n-r}(2k+3).F_{k,r}^2$

3) $L_{k,m}L_{k,n+1}-L_{k,m+1}L_{k,n}=XY(-1)^n F_{k,m-n}$

1.10. *k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesi

Tanım 1.10.1. (*k*-Fibonacci Sayılar) [4] n ve k $(k\neq 0)$ doğal sayılar olsun. Bu takdirde $n=mk+r$ ($0\leq r<k$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$, genelleştirilmiş k- Fibonacci sayıları

$$F_n^{(k)}=\frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+2}-\beta^{m+2})^r.(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1})^{k-r}, n=mk+r \qquad (1.10.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$k=1$ durumu göz önüne alındığında $0\leq r<1$ olacağından $r=0$ ve $m=n$ bulunur. Bu durumda

$$\{F_n^{(1)}\}_{n=0}^4=\{0,1,1,2,3\}$$

alışılmış Fibonacci sayıları olan F_n elde edilir.

Yeni ailenin $k = 2,3$ için sayı farklı sayı dizileri aşağıdaki şekildedir:

$$\left\{F_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{6} = \{0,0,1,1,1,2,4\}$$

$$\left\{F_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{6} = \{0,0,0,1,1,1,1\}$$

Tanım 1.10.1 ve (1.10.1) denkleminden genelleştirilmiş *k*-Fibonacci ve Fibonacci sayıları arasındaki

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k-r}.(F_{m+1})^r, n = mk + r \qquad (1.10.2)$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 1.10.1. $k, m \in \{1,2,3,...\}$ olsun. *k*, *m* sabit sayıları için genelleştirilmiş *k*-Fibonacci sayıları ve alışılmış Fibonacci sayıları arasında;

i) $$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}.F_m.F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$$

ii) $$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = F_m.F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = F_m.(F_{m+2})^{(k-1)}$$

iii) $$\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \frac{F_m}{F_{m-1}}\left[(F_{m+1})^k - (F_m)^k\right] = \frac{F_m}{F_{m-1}}\left[F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{(k)}\right]$$

eşitlikleri bulunur.

İspat: i)
$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{(k-1)}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(F_m)^{k-i}.(F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1}.F_m\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}.(F_m)^{k-1-i}.(F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1}.F_m\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}.(-F_m)^{k-1-i}.(F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1}.F_m.(F_{m+1} - F_m)^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1}.F_m.(F_{m-1})^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1}.F_m.F^{(k-1)}_{(m-1)(k-1)}$$

ii) Benzer yolla,

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}F^{(k)}_{mk+i} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(F_m)^{k-i}.(F_{m+1})^i \qquad \text{((1.10.2) denkleminden)}$$

$$= F^{(k)}_{mk+i} = (F_m)^{k-i}.(F_{m+1})^i = (\frac{F_{m+1}}{F_m})^i.(F_m)^k$$

$$= F_m.(F_{m+1}+F_m)^{k-1} \qquad \text{(binomial teoremini kullanarak)}$$

$$= F_m.(F_{m+2})^{k-1}$$

$$= F_m.F^{(k-1)}_{(m+2)(k-1)} \qquad \text{(r=0 için (1.10.2) denkleminden)}$$

iii) $F^{(k)}_{mk+i} = (F_m)^{k-i}.(F_{m+1})^i = (\frac{F_{m+1}}{F_m})^i.(F_m)^k$

eşitliğinden faydalanarak;

$$\sum_{i=0}^{k-1}F^{(k)}_{mk+i} = \sum_{i=0}^{k-1}(F_m)^{k-i}.(F_{m+1})^i = \sum_{i=0}^{k-1}(\frac{F_{m+1}}{F_m})^i.(F_m)^k = (F_m)^k\sum_{i=0}^{k-1}(\frac{F_{m+1}}{F_m})^i$$

$$= (F_m)^k.(\frac{(\frac{F_{m+1}}{F_m})^k - 1}{\frac{F_{m+1}}{F_m} - 1})$$

$$= (F_m)^k.\frac{\left[(F_{m+1})^k - (F_m)^k\right]}{(F_m)^k}.\frac{F_m}{F_{m+1}-F_m}$$

$$= \frac{F_m}{F_{m-1}}[(F_{m+1})^k - (F_m)^k]$$

$$= \frac{F_m}{F_{m-1}}(F^{(k)}_{(m+1)k} - F^k_{mk})$$

Fibonacci sayılarının özel tridiagonal matrislerin determinantlarından da elde edildiğini biliyoruz. Benzer şekilde, genelleştrilmiş *k*-Fibonacci sayıları, özel bir *k*-Tridiagonal matrisin determinantından da elde edilebilir. Yani, *k*-Tridiagonal matrisin formu,

$$T_n^{(k)} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-k} & 0 & 0 & \dots & a_{n-k} \\ b_{k+1} & 0 & \dots & 0 & d_{n-k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{k+2} & \dots & 0 & 0 & d_{n-k+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda;

$$d_1 = \dots = d_n = a_1 = \dots = a_{n-k} = 1 \quad \text{ve} \quad b_{k+1} = \dots = b_n = -1$$

için

$$F_n^{(k)} = \begin{cases} 1, n \le k \\ \det T_n^{(k)}, n > k \ge 1 \end{cases}$$

elde ederiz. $T_n^{(k)}$ matrisindeki a_i elemanının i=1, 2, 3, …, n-k değerlerinin her biri için sütun sayısının (k+i) olduğuna dikkat etmeliyiz. Ayrıca $T_n^{(k)}$ matrisinde d_i ve a_i elemanlarının arasında da (k-1) tane sıfır elemanı olduğuna dikkat etmeliyiz. Sonuç olarak k=1 için iyi bilinen tridiagonal matris elde edilir.

Teorem 1.10.2. k=2 için yeni aile $n \ge 0, s \ge 0$ ve $n + s \ge 1$ olduğunda;

$$F_{2(n+s-1)}^{(2)} - F_{(n+s)}.F_{(n+s-2)} = (-1)^{n+s-1}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda Fibonacci matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve (1.10.2) denkleminden

$$\begin{pmatrix} F_{n+s} & F_{n+s-1} \\ F_{n+s-1} & F_{n+s-2} \end{pmatrix} = C.\begin{pmatrix} F_{n+s-1} & F_{n+s-2} \\ F_{n+s-2} & F_{n+s-3} \end{pmatrix} = C^{n+s-1}\begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{pmatrix} = C^{n+s}$$

elde edilir. Her iki tarafın determinantı alınırsa;

$$F_{n+s}.F_{n+s-2} - (F_{n+s-1})^2 = (-1)^{n+s}$$

elde edilir.

$$(F_{n+s-1})^2 = F^{(2)}_{2(n+s-1)}$$

olduğunu k=2 ve r=0 için (1.10.2) denkleminden elde ederiz.

$$F^{(2)}_{2(n+s-1)} - F_{n+s}.F_{n+s-2} = (-1)^{n+s-1}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.10.3. $F_n^{(2)}$ ve $G_n^{(2)}$ üreteç fonksiyonu için

i) $F_n^{(2)} = F_{n-1}^{(2)} + F_{n-3}^{(2)} + F_{n-4}^{(2)}$ **,** n=4,5,…

ii) $G_n^{(2)}(x) = \dfrac{1}{1-x-x^3-x^4}$

eşitlikleri verilebilir.

İspat: ***i)*** Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyeceğiz.

$$F_{2m}^{(2)} = F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} + F_{2m-4}^{(2)}$$

yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için;

$$F_{2m}^{(2)} = (F_m)^2 \qquad (1.10.3)$$

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_m.F_{m+1} \tag{1.10.4}$$

eşitliklerinden yararlanacağız. Bu bağıntılar Tanım 1.10.1 den kolaylıkla elde edilir.

$$\begin{aligned} F_{2m}^{(2)} = (F_m)^2 &= F_m.(F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= F_{m-1}.F_m + F_{m-2}.F_m \\ &= F_{m-1}.F_m + F_{m-2}.(F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= F_{m-1}.F_m + F_{m-2}.F_{m-1} + (F_{m-2})^2 \\ &= F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} + F_{2m-4}^{(2)} \end{aligned}$$

Benzer şekilde, *n* sayısının tek sayı olması durumu için inceleyeceğiz. Yani;

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)}$$

Yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için sol kısmını yazalım:

$$\begin{aligned} F_{2m+1}^{(2)} &= F_m.F_{m+1} \\ &= F_m.(F_m + F_{m-1}) \\ &= (F_m)^2 + F_m.F_{m-1} \\ &= (F_m)^2 + F_{m-1}(F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= (F_m)^2 + (F_{m-1})^2 + F_{m-1}.F_{m-2} \\ &= F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

ii) $$G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)}.x^n \tag{1.10.5}$$

olsun.

$$x.G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(2)}.x^n \tag{1.10.6}$$

$$x^3.G_n^{(2)}(x)=\sum_{n=3}^{\infty}F_{n-3}^{(2)}.x^n \qquad (1.10.7)$$

$$x^4.G_n^{(2)}(x)=\sum_{n=4}^{\infty}F_{n-4}^{(2)}.x^n \qquad (1.10.8)$$

$(1.10.5)-\{(1.10.6)+(1.10.7)+(1.10.8)\}$ işlemini ve Teorem 1.10.3' ü kullanarak;

$$\begin{aligned}(1-x-x^3-x^4).G_n^{(2)}(x)&=(F_0^{(2)}+F_1^{(2)}x+F_2^{(2)}x^2+F_3^{(2)}x^3)-(F_0^{(2)}x+F_1^{(2)}x^2+F_2^{(2)}x^3)-(F_0^{(2)}x^3)\\&\quad+\sum_{n=4}^{\infty}(F_n^{(2)}-F_{n-1}^{(2)}-F_{n-3}^{(2)}-F_{n-4}^{(2)})x^n\\&=(1+x+x^2+2x^3)-(x+x^2+x^3)-x^3+0\\&=1\end{aligned}$$

$$G_n^{(2)}(x)=\frac{1}{1-x-x^3-x^4}$$

denklemi elde edilip ispat tamamlanmış olur.

$$F_{2m+1}^{(2)}=F_{2m}^{(2)}+F_{2m-1}^{(2)}$$

rekürans bağıntısını kolayca elde edebiliriz. Burada $n=2m+1$ sayısının tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz.

Benzer şekilde $n=2m$ durumunda da

$$F_{2m}^{(2)}=\begin{cases}F_{2m-1}^{(2)}+F_{2m-2}^{(2)}-1 & , \quad m \quad tek\\ F_{2m-1}^{(2)}+F_{2m-2}^{(2)} & , \quad m \quad çift\end{cases}$$

elde ederiz.

(*i*) $F_n^{(3)}=F_{n-1}^{(3)}+F_{n-2}^{(3)}-F_{n-3}^{(3)}+F_{n-4}^{(3)}+F_{n-5}^{(3)}+F_{n-6}^{(3)}-F_{n-7}^{(3)}-F_{n-8}^{(3)} \quad , \quad n\geq 7$

(*ii*) $G_n^{(3)} = \dfrac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3-x^4-x^5-x^6+x^7+x^8}$

ile verilen $F_n^{(3)}$ ün üreteç fonksiyonu $G_n^{(3)}(x)$ ve rekürans bağıntısını Teorem 1.10.3.' ün ispatına benzer bir yolla gösterebiliriz.

Burada $F_{-1}^{(3)} = 0$ olduğuna dikkat etmeliyiz. Daha genel haliyle, k=1,2,… için $F_{-1}^{(k)} = 0$ olması durumuna dikkat etmeliyiz. k=4, 5, … için $F_n^{(k)}$ yeni ailesinin üreteç fonksiyonu ve rekürans bağıntılarını ifade edecğiz.

(i, j). elemanları $F_i^{(j)}$ olan A matrisi $A = \left[F_i^{(j)} \right]_{1 \le i, j \le n}$ ise

$$\det A = \begin{cases} 1 & , \quad n \quad tek \\ -1 & , \quad n \quad çift \end{cases}$$

olur. $k = n-1$ olduğunda $m = r = 1$ olup $F_n^{(n-1)} = 2$ olduğunu kolayca gösteririz.

1.11. *k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler

Son olarak bu teoremlerin dışında ispatları verilmeden bazı özdeşlikleri sıralayalım**[4]:**

- $2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n}^{(2)} = F_{2n+1}$

- $F_{2n}^{(2)} + F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n} = 1 + \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$

- $F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} F_{2i}$

- $F_{2n}^{(2)} - F_{n-i}.F_{n+i} = (-1)^{n-i+1}.F_{2i-2}^{(2)} \quad , \quad i = 1, 2, ..., n$

- $F_{2n}^{(2)} = (F_n)^2 = \begin{cases} F_{n-1}.F_{n+1} - 1 & , \quad n \quad tek \\ F_{n-1}.F_{n+1} + 1 & , \quad n \quad çift \end{cases}$

- $F_{3n+3}^{(3)} + F_{3n}^{(3)} - F_{3n-3}^{(3)} = F_{3n+2}$

- $F_{2n}^{(2)} = \frac{1}{5}\left[2L_{2n+2} - (L_{n+1})^2 \right]$

- $F_{4n+1}^{(2)} = L_{n+1}.F_n.F_{2n}$

- $F_{2n-2}^{(2)} = F_n.F_{n-2} + \frac{1}{5}(L_{n+1}.L_{n-1} - (L_n)^2)$

1.12. *k*-Lucas Sayılarının Yeni Ailesi

Tanım 1.12.1. (*k*-Lucas Sayılar) [4] n ve k $(k \neq 0)$ doğal sayılar olsun. Bu takdirde $n = mk + r \quad (0 \leq r < k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $L_n^{(k)}$, genelleştirilmiş *k*- Lucas sayıları

$$L_n^{(k)} = (\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})^r (\alpha^m + \beta^m)^{k-r} \tag{1.12.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$k = 1$ durumu göz önüne alındığında $0 \leq r < 1$ olacağından $r = 0$ ve $m = n$ bulunur. Bu durumda

$$\left\{L_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{4} = \{2,1,3,4,7\}$$

olup alışılmış Lucas sayıları olan L_n elde edilir.

Yeni ailenin k=2,3 değerleri için aşağıdaki sayı dizileri elde edilir:

$$\left\{L_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{7} = \{4,2,1,3,9,12,16,28\}$$
$$\left\{L_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{7} = \{8,4,2,1,3,9,27,36\}$$

Tanım 1.6.1 ve (1.6.1) denkleminden genelleştirilmiş *k*-Lucas ve Lucas sayıları arasında

$$L_n^{(k)} = (L_{m+1})^r (L_m)^{k-r}, \quad n = mk + r \tag{1.12.2}$$

bağıntısı yazılabilir.

Teorem 1.11.1. $k, m \in \{1, 2, 3, ...\}$ olsun. *k, m* sabit sayıları için genelleştirilmiş *k*-Lucas sayıları ve alışılmış Lucas sayıları arasında;

i) $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)}=(-1)^{k-1}L_mL_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii) $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)}=L_mL_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)}=L_m(L_{m+2})^{k-1}$

iii) $\sum_{i=0}^{k-1}L_{mk+i}^{(k)}=\frac{L_m}{L_{m-1}}[(L_{m+1})^k-(L_m)^k]=\frac{L_m}{L_{m-1}}[L_{(m+1)k}^{(k)}-L_{mk}^{(k)}]$

eşitlikleri bulunur.

İspat: ***i)*** $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)}=(-1)^k\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(L_m)^{k-i}(L_{m+1})^i$

$=(-1)^{k-1}L_m\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(L_m)^{k-1-i}(L_{m+1})^i$

$=(-1)^{k-1}L_m\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(L_{m+1})^i(-L_m)^{k-1-i}$

$=(-1)^{k-1}L_m(L_{m+1}-L_m)^{k-1}$ (Binomial Teoreminden)

$=(-1)^{k-1}L_m(L_{m-1})^{k-1}$

$=(-1)^{k-1}L_mL_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$ $(r=0 \quad için)$

ii) $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(L_m)^{k-i}(L_{m+1})^i$

$=L_m\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(L_m)^{k-1-i}(L_{m+1})^i$

$=L_m(L_m+L_{m+1})^{k-1}$

$=L_m(L_{m+2})^{k-1}$

$=L_mL_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)}$ $(r=0 \quad için)$

iii) Benzer yolla ,

$\sum_{i=0}^{k-1}L_{mk+i}^{(k)}=\sum_{i=0}^{k-1}(L_{m+1})^i(L_m)^{k-i}$ ((1.12.2) denkleminden)

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{m+1}}{L_m} \right)^i (L_m)^k$$

$$= (L_m)^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{m+1}}{L_m} \right)^i$$

$$= (L_m)^k \left(\frac{\left(\frac{L_{m+1}}{L_m} \right)^k - 1}{\frac{L_{m+1}}{L_m} - 1} \right)$$

$$= (L_m)^k \frac{[(L_{m+1})^k - (L_m)^k]}{(L_m)^k} \cdot \frac{L_m}{L_{m+1} - L_m}$$

$$= \frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1})^k - (L_m)^k]$$

$$= \frac{L_m}{L_{m-1}} [L^{(k)}_{(m+1)k} - L^{(k)}_{mk}] \qquad \text{(r=0 için (1.12.2) denkleminden)}$$

Teorem 1.11.2. k=2 için yeni aile $n \geq 0, s \geq 0$ ve $n+s \geq 1$ olduğunda;

$$L^{(2)}_{2(n+s-1)} - L_{(n+s)} L_{(n+s-2)} = 5.(-1)^{n+s-1}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda Lucas matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve (1.12.2) denkleminden

$$\begin{pmatrix} L_{n+s} & L_{n+s-1} \\ L_{n+s-1} & L_{n+s-2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} L_{n+s-1} & L_{n+s-2} \\ L_{n+s-2} & L_{n+s-3} \end{pmatrix} = C^{n+s-1} \begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ L_0 & L_{-1} \end{pmatrix} = C^{n+s-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Her iki tarafın determinantını alırsak;

$$L_{n+s} L_{n+s-2} - (L_{n+s-1})^2 = (-5).(-1)^{n+s-1}$$

$$L_{n+s} L_{n+s-2} - (L_{n+s-1})^2 = 5.(-1)^{n+s}$$

elde ederiz.

$$(L_{n+s-1})^2 = L^{(2)}_{2(n+s-1)}$$

olduğunu k=2 ve r=0 için (1.12.2) denkleminden elde ederiz.

$$L^{(2)}_{2(n+s-1)} - L_{n+s}L_{n+s-2} = 5.(-1)^{n+s-1}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.11.3. $L^{(2)}_n$ ve $G^{(2)}_n$ için

i) $L^{(2)}_n = L^{(2)}_{n-1} + L^{(2)}_{n-3} + L^{(2)}_{n-4}$ **,** n= 4, 5, …

ii) $G^{(2)}_n = \dfrac{4-2x-x^2-2x^3}{1-x-x^3-x^4}$

eşitlikleri verilebilir.

İspat: ***i)*** Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyeceğiz.

$$L^{(2)}_{2m} = L^{(2)}_{2m-1} + L^{(2)}_{2m-3} + L^{(2)}_{2m-4}$$

yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için;

$$L^{(2)}_{2m} = (L_m)^2 \tag{1.11.3}$$

$$L^{(2)}_{2m+1} = L_m L_{m+1} \tag{1.11.4}$$

şeklinde iki bağıntıyı kullanacağız. Bu bağıntılar Tanım 1.11.1 den kolayca elde edilir.

$$\begin{aligned} L^{(2)}_{2m} &= (L_m)^2 \\ &= L_m(L_{m-1} + L_{m-2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L_m L_{m-1} + L_m L_{m-2} \\
&= L_m L_{m-1} + L_{m-2}(L_{m-1} + L_{m-2}) \\
&= L_m L_{m-1} + L_{m-1} L_{m-2} + (L_{m-2})^2 \\
&= L^{(2)}_{2m-1} + L^{(2)}_{2m-3} + L^{(2)}_{2m-4} \qquad \text{((1.12.2) denkleminden)}
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde, *n* sayısının tek sayı olması durumu için inceleyeceğiz. Yani;

$$L^{(2)}_{2m+1} = L^{(2)}_{2m} + L^{(2)}_{2m-2} + L^{(2)}_{2m-3}$$

Yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için sol kısmını yazalım:

$$
\begin{aligned}
L^{(2)}_{2m+1} &= L_m L_{m+1} \\
&= L_m(L_m + L_{m-1}) \\
&= (L_m)^2 + L_m L_{m-1} \\
&= (L_m)^2 + L_{m-1}(L_{m-1} + L_{m-2}) \\
&= (L_m)^2 + (L_{m-1})^2 + L_{m-1} L_{m-2} \\
&= L^{(2)}_{2m} + L^{(2)}_{2m-2} + L^{(2)}_{2m-3}
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanmış olur.

ii) $$G^{(2)}_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L^{(2)}_n x^n \qquad (1.11.5)$$

olsun. Teorem(1.12.3) ün (*i*) bağıntısından

$$xG^{(2)}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L^{(2)}_{n-1} x^n \qquad (1.11.6)$$

$$x^3 G^{(2)}_n(x) = \sum_{n=3}^{\infty} L^{(2)}_{n-3} x^n \qquad (1.11.7)$$

$$x^4 G^{(2)}_n(x) = \sum_{n=4}^{\infty} L^{(2)}_{n-4} x^n \qquad (1.11.8)$$

$(1.11.5) - \{(1.11.6) + (1.11.7) + (1.11.8)\}$ işlemini ve Teorem 1.12.3' ü kullanarak;

$$(1-x-x^3-x^4)G_n^{(2)}(x)=(L_0^{(2)}+L_1^{(2)}x+L_2^{(2)}x^2+L_3^{(2)}x^3)-(L_0^{(2)}x+L_1^{(2)}x^2+L_2^{(2)}x^3+L_0^{(2)}x^3)$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty}(L_n^{(2)}-L_{n-1}^{(2)}-L_{n-3}^{(2)}-L_{n-4}^{(2)})x^n$$

$$(1-x-x^3-x^4)G_n^{(2)}(x)=(4+2x+x^2+3x^3)-(4x+2x^2+x^3+4x^3)$$

$$(1-x-x^3-x^4)G_n^{(2)}(x)=4-2x-x^2-2x^3$$

$$G_n^{(2)}(x)=\frac{4-2x-x^2-2x^3}{1-x-x^3-x^4}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

- $L_{2m+1}^{(2)}=L_{2m}^{(2)}+L_{2m-1}^{(2)}$

rekürans bağıntısını kolayca elde edebiliriz. Burada $n=2m+1$ sayısının tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz.

- Benzer şekilde $n=2m$ durumunda da

$$L_{2m}^{(2)}=\begin{cases}L_{2m-1}^{(2)}+L_{2m-2}^{(2)}-5 & , \quad m \quad tek \quad ise\\ L_{2m-1}^{(2)}+L_{2m-2}^{(2)}+5 & , \quad m \quad çift \quad ise\end{cases}$$

bağıntısı elde edilir.

2. *k*-FİBONACCİ SAYILARININ FARKLI YENİ BİR AİLESİ

Tanım 2.1. $n,s \quad (s\neq 0)$ ve $k \quad (k\neq 0)$ doğal sayılar olsun. Bu takdirde $n=mk+r$ $(0\le r<k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_{s,n}^{(k)}$ *k*-Fibonacci sayıları;

$$F_{s,n}^{(k)}=\frac{1}{(r_1-r_2)^k}(r_1^{m+1}-r_2^{m+1})^r(r_1^m-r_2^m)^{k-r} \quad , \quad n=mk+r \quad (0\le r<k) \qquad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Yeni ailenin $k=1,2,3$ için sayılarını aşağıdaki gibi buluruz:

- $k=1$ durumu göz önüne alındığında $n=m+r$ ve $0\le r<1$ olup
  - $n=0$ için $0=m+r$ olup $m=0$, $r=0$

$$F_{s,0}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1 - r_2)^0 (r_1^0 - r_2^0) = 0$$

- $n = 1$ için $1 = m + r$ olup $m = 1$, $r = 0$

$$F_{s,1}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{\,2} - r_2^{\,2})^0 (r_1 - r_2) = 1$$

- $n = 2$ için $2 = m + r$ olup $m = 2$, $r = 0$

$$F_{s,2}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{\,3} - r_2^{\,3})^0 (r_1^2 - r_2^2) = s$$

- $n = 3$ için $3 = m + r$ olup $m = 3$, $r = 0$

$$F_{s,3}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{\,4} - r_2^{\,4})^0 (r_1^3 - r_2^3) = s^2 + 1$$

- $n = 4$ için $4 = m + r$ olup $m = 4$, $r = 0$

$$F_{s,4}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^{\,5} - r_2^{\,5})^0 (r_1^4 - r_2^4) = s^3 + 2s$$

$$\left\{F_{s,n}^{(1)}\right\}_{n=0}^{4} = \left\{0, 1, s, s^2 + 1, s^3 + 2s\right\}$$

olup alışılmış *k*-Fibonacci sayıları elde edilir. Yani

✓ $s = 1$ için $\{0,1,1,2,3,\ldots\}$ Fibonacci sayıları

ve

✓ $s = 2$ için $\{0,1,2,5,12,\ldots\}$ Pell dizisi

elde edilir.

- $k = 2$ durumu göz önüne alındığında $n = 2m + r$ ve $0 \le r < 2$ olup
  - $n = 0$ için $0 = 2m + r$ olup $m = 0$, $r = 0$

$$F_{s,0}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1 - r_2)^0 (r_1^0 - r_2^0)^2 = 0$$

  - $n = 1$ için $1 = 2m + r$ olup $m = 1$, $r = 1$

$$F_{s,1}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1 - r_2)(r_1^{\,0} - r_2^{\,0}) = 0$$

- $n = 2$ için $2 = 2m + r$ olup $m = 1$, $r = 0$

$$F_{s,2}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1^{\,2} - r_2^{\,2})^0 (r_1 - r_2)^2 = 1$$

- $n = 3$ için $3 = 2m + r$ olup $m = 1$, $r = 1$

$$F_{s,3}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1^{\,2} - r_2^{\,2})(r_1 - r_2) = s$$

- $n = 4$ için $4 = 2m + r$ olup $m = 2$, $r = 0$

$$F_{s,4}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1^{\,3} - r_2^{\,3})^0 (r_1^2 - r_2^2)^2 = s^2$$

$$\left\{F_{s,n}^{(2)}\right\}_{n=0}^{6} = \left\{0,0,1,s,s^2,s^3 + s,s^4 + 2s^2 + 1\right\}$$

- Yeni ailenin $k = 3$ için aşağıdaki sayı dizisi elde edilir:
-

$$\left\{F_{s,n}^{(3)}\right\}_{n=0}^{4} = \left\{0,0,0,1,s,s^2,s^3,s^4 + s^2\right\}$$

(1.6.2) ve (2.1.1) denklemlerinden hareketle;

$$F_{s,n}^{(k)} = (F_{s,m+1})^r (F_{s,m})^{k-r} \quad , \quad n = mk + r \quad (0 \le r < k) \tag{2.1.2}$$

bağıntısını elde ederiz.

Teorem 2.1. $k, m \in \{1,2,3,..\}$ olsun. k, m sabit sayıları için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile alışılmış Fibonacci sayıları arasında;

i) $\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i s^{k-1-i} \binom{k-1}{i} F_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} . F_{s,m} . F_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii) $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i F_{s,mk+i}^{(k)} = F_{s,m}.(F_{s,m+2})^{k-1} = F_{s,m}F_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)}$

iii) $\sum_{i=0}^{k-1}s^{-i}F_{s,mk+i}^{(k)} = s^{1-k}\frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}}\left[(F_{s,m+1})^k - (sF_{s,m})^k\right] = s^{1-k}\frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}}\left[F_{s,(m+1)k}^{(k)} - sF_{s,mk}^{(k)}\right]$

<u>İspat</u>: *i)* $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}F_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(F_{s,m+1})^i(F_{s,m})^{k-i}$

$$= (-1)^{k-1}F_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(F_{s,m+1})^i(-s)^{k-1-i}(F_{s,m})^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1}F_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(F_{s,m+1})^i(-sF_{s,m})^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1}F_{s,m}(F_{s,m+1} - sF_{s,m})^{k-1} \qquad \text{(Binomial teo.)}$$

$$= (-1)^{k-1}F_{s,m}(F_{s,m-1})^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1}F_{s,m}F_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)} \qquad (r=0 \quad için)$$

ii) $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i F_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i(F_{s,m+1})^i(F_{s,m})^{k-i}$

$$= F_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(sF_{s,m+1})^i(F_{s,m})^{k-1-i}$$

$$= F_{s,m}(sF_{S,m+1} + F_{s,m})^{k-1} \qquad \text{(Binomial teoreminden)}$$

$$= F_{s,m}(F_{s,m+2})^{k-1}$$

$$= F_{s,m}F_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)} \qquad \text{(r=0 için)}$$

iii) $\sum_{i=0}^{k-1}s^{-i}F_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1}s^{-i}(F_{s,m+1})^i(F_{s,m})^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}}\right)^i(F_{s,m})^k$$

$$= (F_{s,m})^k\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}}\right)^i$$

$$= (F_{s,m})^k \left(\frac{\left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}} \right)^k - 1}{\left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}} \right) - 1} \right)$$

$$= s^{1-k} \frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}} \left[(F_{s,m+1})^k - (sF_{s,m})^k \right]$$

$$= s^{1-k} \frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}} \left[F^{(k)}_{s,(m+1)k} - s^k F^{(k)}_{s,mk} \right]$$

Teorem 2.2. $k = 2$ için yeni aile $n \geq 0$, $t \geq 0$, $n + t \geq 1$ olduğunda;

$$F^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - F_{s,n+t} F_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t} \tag{2.1.3}$$

dır.

İspat: $C = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda *k*-Fibonacci matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve tanımdan hareketle

$$\begin{pmatrix} F_{s,n+t} & F_{s,n+t-1} \\ F_{s,n+t-1} & F_{s,n+t-2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} F_{s,n+t-1} & F_{s,n+t-2} \\ F_{s,n+t-2} & F_{s,n+t-3} \end{pmatrix} = C^{n+t-1} \begin{pmatrix} F_{s,1} & F_{s,0} \\ F_{s,0} & F_{s,-1} \end{pmatrix}$$

olup her iki tarafın determinantını alırsak;

$$(F_{s,n+t-1})^2 - F_{s,n+t} F_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t}$$

$$F^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - F_{s,n+t} F_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t} \qquad \text{(r=0 için)}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2.3. $F^{(2)}_{s,n}$ için $G^{(2)}_{s,n}$ için

i) $F^{(2)}_{s,n} = sF^{(2)}_{s,n-1} + sF^{(2)}_{s,n-3} + F^{(2)}_{s,n-4}$, $n = 4,5,\ldots$

ii) $G_{s,n}^{(2)} = \dfrac{x^2}{1 - sx - sx^3 - x^4}$

İspat: ***i)*** Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyeceğiz:
$n = 2m$ için;

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,2m-1}^{(2)} + sF_{s,2m-3}^{(2)} + F_{s,2m-4}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} F_{s,2m}^{(2)} &= (F_{s,m})^2 \\ &= F_{s,m}(sF_{s,m-1} + F_{s,m-2}) \\ &= sF_{s,m-1}F_{s,m} + F_{s,m-2}F_{s,m} \\ &= sF_{s,m-1}F_{s,m} + F_{s,m-2}(sF_{s,m-1}F_{s,m-2}) \\ &= sF_{s,m-1}F_{s,m} + sF_{s,m-2}F_{s,m-1} + (F_{s,m-2})^2 \\ &= sF_{s,2m-1}^{(2)} + sF_{s,2m-3}^{(2)} + F_{s,2m-4}^{(2)} \end{aligned}$$

Benzer şekilde *n* sayısının tek olması durumunu inceleyelim:
$n = 2m+1$ için;

$$F_{s,2m+1}^{(2)} = sF_{s,2m}^{(2)} + sF_{s,2m-2}^{(2)} + F_{s,2m-3}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} F_{s,2m+1}^{(2)} &= (F_{s,m+1})(F_{s,m}) \\ &= F_{s,m}(sF_{s,m} + F_{s,m-1}) \\ &= s(F_{s,m})^2 + F_{s,m-1}F_{s,m} \\ &= s(F_{s,m})^2 + F_{s,m-1}(sF_{s,m-1} + F_{s,m-2}) \\ &= s(F_{s,m})^2 + s(F_{s,m-1})^2 + F_{s,m-1}F_{s,m-2} \\ &= sF_{s,2m}^{(2)} + sF_{s,2m-2}^{(2)} + F_{s,2m-3}^{(2)} \end{aligned}$$

ii) $G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{s,n}^{(2)}x^n$

$$sxG_{s,n}^{(2)}(x)=s\sum_{n=1}^{\infty}F_{s,n-1}^{(2)}x^n$$

$$sx^3G_{s,n}^{(2)}(x)=s\sum_{n=3}^{\infty}F_{s,n-3}^{(2)}x^n$$

$$x^4G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=4}^{\infty}F_{s,n-4}^{(2)}x^n$$

$$(1-sx-sx^3-x^4)G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=4}^{\infty}(F_{s,n}^{(2)}-sF_{s,n-1}^{(2)}-sF_{s,n-3}^{(2)}-F_{s,n-4}^{(2)})x^n$$

$$=(0+0x+1x^2+sx^3)-(s0x+s0x^2+sx^3+s0x^3)$$

$$=x^2$$

$$G_{s,n}^{(2)}(x)=\frac{x^2}{1-sx-sx^3-x^4}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

- $F_{s,2m+1}^{(2)}=sF_{s,2m}^{(2)}+F_{s,2m-1}^{(2)}$

olup burada $n=2m+1$ in tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz.

$$F_{s,2m+1}^{(2)}=F_{s,m}F_{s,m+1}$$

$$=F_{s,m}(sF_{s,m}+F_{s,m-1})$$

$$=s(F_{s,m})^2+F_{s,m-1}F_{s,m}$$

$$=sF_{s,2m}^{(2)}+F_{s,2m-1}^{(2)}$$

- Benzer şekilde $n=2m$ durumunda da;
-

$$F_{s,2m}^{(2)}=\begin{cases}sF_{s,2m-1}^{(2)}+F_{s,2m-2}^{(2)}+1 & , \quad m \quad tek\\ sF_{s,2m-1}^{(2)}+F_{s,2m-2}^{(2)}-1 & , \quad m \quad çift\end{cases}$$

bağıntısı elde edilir.

$$F_{s,2m}^{(2)} - F_{s,m+1}F_{s,m-1} = (-1)^{m+1}$$

$$F_{s,2m}^{(2)} = F_{s,m+1}F_{s,m-1} + (-1)^{m+1}$$

$$F_{s,2m}^{(2)} = F_{s,m-1}(sF_{s,m} + F_{s,m-1}) + (-1)^{m+1}$$

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,m-1}F_{s,m} + (F_{s,m-1})^2 + (-1)^{m+1}$$

- m tek sayı ise;

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,m-1}F_{s,m} + (F_{s,m-1})^2 + 1$$

- m çift sayı ise;

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,m-1}F_{s,m} + (F_{s,m-1})^2 - 1$$

2.1. *k*-Fibonacci Sayılarının Farklı Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler

1) $2F_{s,2n-1}^{(2)} + F_{s,2n}^{(2)} = F_{s,n}L_{s,n}$

İspat: $2F_{s,2n-1}^{(2)} + F_{s,2n}^{(2)} = 2F_{s,n}F_{s,n-1} + F_{s,n}F_{s,n}$

$$= F_{s,n}(2F_{s,n-1} + F_{s,n})$$

$$= F_{s,n}L_{s,n}$$

($L_{s,n} = 2F_{s,n-1} + F_{s,n}$ olduğu Binet Formülünden açıktır.)

2) $2F_{s,2n-1}^{(2)} + sF_{s,2n}^{(2)} = F_{s,2n}$

İspat: $2F_{s,2n-1}^{(2)} + sF_{s,2n}^{(2)} = 2F_{s,n-1}F_{s,n} + sF_{s,n}F_{s,n}$

$$= F_{s,n}(2F_{s,n-1} + sF_{s,n})$$

$$= F_{s,n}(F_{s,n-1} + F_{s,n-1} + sF_{s,n})$$

$$= F_{s,n}(F_{s,n-1} + F_{s,n+1})$$

$$= F_{s,n}\frac{F_{s,2n}}{F_{s,n}}$$

$$= F_{s,2n}$$

3) $F^{(2)}_{s,2n+2} - F^{(2)}_{s,2n-2} = sF_{s,2n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^{i+1}F_{s,i}$

İspat: $F^{(2)}_{s,2n+2} - F^{(2)}_{s,2n-2} = (F_{s,n+1})^2 - (F_{s,n-1})^2$

$$= (F_{s,n+1} - F_{s,n-1})(F_{s,n+1} + F_{s,n-1})$$

$$= sF_{s,n}\frac{F_{s,2n}}{F_{s,n}}$$

$$= sF_{s,2n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^{i+1}F_{s,i}$$

4) $F^{(2)}_{s,2n} = (F_{s,n})^2 = \begin{cases} F_{s,n-1}F_{s,n+1} + 1 & , \quad n \quad tek \quad ise \\ F_{s,n-1}F_{s,n+1} - 1 & , \quad n \quad çift \quad ise \end{cases}$

İspat: $F^2_{s,n} - F_{s,n-1}F_{s,n+1} = (-1)^{n+1}$ $\qquad (r = 0 \quad için)$

$$F^{(2)}_{s,2n} - F_{s,n-1}F_{s,n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$F^{(2)}_{s,2n} = F_{s,n-1}F_{s,n+1} + (-1)^{n+1}$$

$$F^{(2)}_{s,2n} = (F_{s,n})^2 = \begin{cases} F_{s,n-1}F_{s,n+1} + 1 & , \quad n \quad tek \quad ise \\ F_{s,n-1}F_{s,n+1} - 1 & , \quad n \quad çift \quad ise \end{cases}$$

5) $F^{(2)}_{s,2n} - F_{s,n-r}F_{s,n+r} = (-1)^{n-r}F^{(2)}_{s,2r}$

İspat: $(F_{s,n})^2 - F_{s,n-r}F_{s,n+r} = (-1)^{n-r}F^2_{s,r}$ (r=0 için)

$$F^{(2)}_{s,2n} - F_{s,n-r}F_{s,n+r} = (-1)^{n-r}F^{(2)}_{s,2r}$$

6) $F_{s,2n}^{(2)} + F_{s,2n-2}^{(2)} = F_{s,2n-1}$

İspat: $F_{s,2n}^{(2)} + F_{s,2n-2}^{(2)} = (F_{s,n})^2 + (F_{s,n-1})^2$

$$= (\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2})^2 + (\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2})^2 \quad \text{(Binet Formülü'nden)}$$

$$= \frac{r_1^{2n-1} - r_2^{2n-1}}{r_1 - r_2}$$

$$= F_{s,2n-1}$$

3. *k*-LUCAS SAYILARININ FARKLI YENİ BİR AİLESİ

Tanım 3.1. $n, s \quad (s \neq 0)$ ve $k \quad (k \neq 0)$ doğal sayılar olsun. Bu takdirde $n = mk + r$ $(0 \leq r < k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $L_{s,n}^{(k)}$ *k*-Lucas sayıları;

$$L_{s,n}^{(k)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^k} (Xr_1^{m+1} - Yr_2^{m+1})^r (Xr_1^m - Yr_2^m)^{k-r} \quad , \quad n = mk + r \quad (0 \leq r < k) \qquad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

- $k = 1$ durumu göz önüne alındığında $n = m + r$ ve $0 \leq r < 1$ olup
  - $n = 0$ için $0 = m + r$ olup $m = 0$, $r = 0$

$$L_{s,0}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2} (Xr_1 - Yr_2)^0 (Xr_1^0 - Yr_2^0) = 2$$

  - $n = 1$ için $1 = m + r$ olup $m = 1$, $r = 0$

$$L_{s,1}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2} (Xr_1^2 - Yr_2^2)^0 (Xr_1 - Yr_2) = 1$$

  - $n = 2$ için $2 = m + r$ olup $m = 2$, $r = 0$

$$L_{s,2}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2} (Xr_1^3 - Yr_2^3)^0 (Xr_1^2 - Yr_2^2) = s + 2$$

- $n=3$ için $3=m+r$ olup $m=3$, $r=0$

$$L_{s,3}^{(1)}=\frac{1}{r_1-r_2}(Xr_1^{\,4}-Yr_2^{\,4})^0(Xr_1^3-Yr_2^3)=s^2+2s+1$$

- $n=4$ için $4=m+r$ olup $m=4$, $r=0$

$$L_{s,4}^{(1)}=\frac{1}{r_1-r_2}(Xr_1^{\,5}-Yr_2^{\,5})^0(Xr_1^4-Yr_2^4)=s^3+2s^2+2s+2$$

$$\left\{L_{s,n}^{(1)}\right\}_{n=0}^{4}=\left\{2,1,s+2,s^2+2s+1,s^3+2s^2+2s+2\right\}$$

- Yeni ailenin $k=2$ ve $k=3$ için Lucas sayıları benzer şekilde bulunur:

$$\left\{L_{s,n}^{(2)}\right\}_{n=0}^{4}=\left\{4,2,1,s+2,s^2+4s+4\right\}$$
$$\left\{L_{s,n}^{(3)}\right\}_{n=0}^{4}=\left\{8,4,2,1,s+2\right\}$$

(1.4.2) ve (3.1.1) denklemlerinden hareketle

$$L_{s,n}^{(k)}=(L_{s,m+1})^r(L_{s,m})^{k-r}\quad,\quad n=mk+r\quad,\quad(0\le r<k)\qquad(3.1.2)$$

bağıntısını elde ederiz.

Teorem 3.1. $k,m\in\{1,2,3,..\}$ olsun. k,m sabit sayıları için *k*-Lucas sayılarının yeni ailesi ile alışılmış Lucas sayıları arasında;

i) $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}L_{s,mk+i}^{(k)}=(-1)^{k-1}.L_{s,m}.L_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii) $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i L_{s,mk+i}^{(k)}=L_{s,m}.(L_{s,m+2})^{k-1}=L_{s,m}L_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)}$

iii) $\sum_{i=0}^{k-1}s^{-i}L_{s,mk+i}^{(k)}=s^{1-k}\frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}}\left[(L_{s,m+1})^k-(sL_{s,m})^k\right]=s^{1-k}\frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}}\left[L_{s,(m+1)k}^{(k)}-sL_{s,mk}^{(k)}\right]$

İspat: *i*) $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}L_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(L_{s,m+1})^i(L_{s,m})^{k-i}$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(L_{s,m+1})^i(-s)^{k-1-i}(L_{s,m})^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(L_{s,m+1})^i(-sL_{s,m})^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}(L_{s,m+1}-sL_{s,m})^{k-1} \qquad \text{(Binomial teo.)}$$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}(L_{s,m-1})^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}L_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)} \qquad (r=0 \quad için)$$

***ii*)** $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i L_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i(L_{s,m+1})^i(L_{s,m})^{k-i}$

$$= L_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(sL_{s,m+1})^i(L_{s,m})^{k-1-i}$$

$$= L_{s,m}(sL_{S,m+1}+L_{s,m})^{k-1} \qquad \text{(Binomial teoreminden)}$$

$$= L_{s,m}(L_{s,m+2})^{k-1}$$

$$= L_{s,m}L_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)} \qquad \text{(r=0 için)}$$

***iii*)** $\sum_{i=0}^{k-1}s^{-i}L_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1}s^{-i}(L_{s,m+1})^i(L_{s,m})^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)^i(L_{s,m})^k$$

$$= (L_{s,m})^k\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)^i$$

$$= (L_{s,m})^k\left(\frac{\left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)^k-1}{\left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)-1}\right)$$

$$= s^{1-k}\frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}}\left[(L_{s,m+1})^k - (sL_{s,m})^k\right]$$

$$= s^{1-k}\frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}}\left[L^{(k)}_{s,(m+1)k} - s^k L^{(k)}_{s,mk}\right]$$

Teorem 3.2. $k=2$ için yeni aile $n\geq 0$, $t\geq 0$, $n+t\geq 1$ olduğunda;

$$L^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - L_{s,n+t}L_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t-1}(2s+3) \tag{3.1.3}$$

dır.

İspat: $C=\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda *k*-Lucas matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve *k*-Lucas sayılarının tanımından hareketle

$$\begin{pmatrix} L_{s,n+t} & L_{s,n+t-1} \\ L_{s,n+t-1} & L_{s,n+t-2} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} L_{s,n+t-1} & L_{s,n+t-2} \\ L_{s,n+t-2} & L_{s,n+t-3} \end{pmatrix} = C^{n+t-1}\begin{pmatrix} L_{s,1} & L_{s,0} \\ L_{s,0} & L_{s,-1} \end{pmatrix}$$

olup her iki tarafın determinantını alırsak;

$$(L_{s,n+t-1})^2 - L_{s,n+t}L_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t-1}(2s+3)$$
$$L^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - L_{s,n+t}L_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t-1}(2s+3)$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.2. $L^{(2)}_{s,n}$ ve $G^{(2)}_{s,n}$ üreteç fonksiyonu için;

i) $L^{(2)}_{s,n} = sL^{(2)}_{s,n-1} + sL^{(2)}_{s,n-3} + L^{(2)}_{s,n-4}$, $n = 4,5,\ldots$

ii) $G^{(2)}_{s,n} = \dfrac{(2-4s)x^3 + (1-2s)x^2 + (2-4s)x + 4}{1 - sx - sx^3 - x^4}$

şeklindedir.

İspat: ***i)*** Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyeceğiz:
$n=2m$ için;

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + sL_{s,2m-3}^{(2)} + L_{s,2m-4}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} L_{s,2m}^{(2)} &= (L_{s,m})^2 \\ &= L_{s,m}(sL_{s,m-1} + L_{s,m-2}) \\ &= sL_{s,m-1}L_{s,m} + L_{s,m-2}L_{s,m} \\ &= sL_{s,m-1}L_{s,m} + L_{s,m-2}(sL_{s,m-1}L_{s,m-2}) \\ &= sL_{s,m-1}L_{s,m} + sL_{s,m-2}L_{s,m-1} + (L_{s,m-2})^2 \\ &= sL_{s,2m-1}^{(2)} + sL_{s,2m-3}^{(2)} + L_{s,2m-4}^{(2)} \end{aligned}$$

Benzer şekilde *n* sayısının tek olması durumunu inceleyelim:
$n=2m+1$ için;

$$L_{s,2m+1}^{(2)} = sL_{s,2m}^{(2)} + sL_{s,2m-2}^{(2)} + L_{s,2m-3}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} L_{s,2m+1}^{(2)} &= (L_{s,m+1})(L_{s,m}) \\ &= L_{s,m}(sL_{s,m} + L_{s,m-1}) \\ &= s(L_{s,m})^2 + L_{s,m-1}L_{s,m} \\ &= s(L_{s,m})^2 + L_{s,m-1}(sL_{s,m-1} + L_{s,m-2}) \\ &= s(L_{s,m})^2 + s(L_{s,m-1})^2 + L_{s,m-1}L_{s,m-2} \\ &= sL_{s,2m}^{(2)} + sL_{s,2m-2}^{(2)} + L_{s,2m-3}^{(2)} \end{aligned}$$

ii) $G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{s,n}^{(2)}x^n$

$$sxG_{s,n}^{(2)}(x)=s\sum_{n=1}^{\infty}L_{s,n-1}^{(2)}x^n$$

$$sx^3G_{s,n}^{(2)}(x)=s\sum_{n=3}^{\infty}L_{s,n-3}^{(2)}x^n$$

$$x^4G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=4}^{\infty}L_{s,n-4}^{(2)}x^n$$

$$(1-sx-sx^3-x^4)G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=4}^{\infty}(L_{s,n}^{(2)}-sL_{s,n-1}^{(2)}-sL_{s,n-3}^{(2)}-L_{s,n-4}^{(2)})x^n$$

$$=(4+2x+x^2+sx^3+2x^3)-(4sx+2sx^2+sx^3+4sx^3)$$

$$=(2-4s)x^3+(1-2s)x^2+(2-4s)x+4$$

$$G_{s,n}^{(2)}(x)=\frac{(2-4s)x^3+(1-2s)x^2+(2-4s)x+4}{1-sx-sx^3-x^4}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

$$L_{s,2m+1}^{(2)}=sL_{s,2m}^{(2)}+L_{s,2m-1}^{(2)}$$

olup burada $n=2m+1$ in tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz.

$$L_{s,2m+1}^{(2)}=L_{s,m}L_{s,m+1}$$

$$=L_{s,m}(sL_{s,m}+L_{s,m-1})$$

$$=s(L_{s,m})^2+L_{s,m}L_{s,m-1}$$

$$=sL_{s,2m}^{(2)}+L_{s,2m-1}^{(2)}$$

Benzer şekilde $n=2m$ durumunda da;

$$L_{s,2m}^{(2)}=\begin{cases}sL_{s,2m-1}^{(2)}+L_{s,2m-2}^{(2)}-(2s+3) & , \quad m \quad tekise\\ sL_{s,2m-1}^{(2)}+L_{s,2m-2}^{(2)}+(2s+3) & , \quad m \quad çiftise\end{cases}$$

bağıntısını elde ederiz.

- m in tek olması durumunu inceleyelim:

$$L_{s,2m}^{(2)} - L_{s,m+1}L_{s,m-1} = (-1)^m(2s+3)$$
$$L_{s,2m}^{(2)} = L_{s,m+1}L_{s,m-1} + (-1)^m(2s+3)$$
$$L_{s,2m}^{(2)} = L_{s,m-1}(sL_{s,m} + L_{s,m-1}) + (-1)^m(2s+3)$$
$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,m-1}L_{s,m} + (L_{s,m-1})^2 + (-1)^m(2s+3)$$
$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + L_{s,2m-2}^{(2)} + (-1)^m(2s+3)$$

olup m tek olduğundan;

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + L_{s,2m-2}^{(2)} - (2s+3)$$

- m in çift olması durumunda ise;

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + L_{s,2m-2}^{(2)} + (2s+3)$$

olur.

3.1. *k*-Lucas Sayılarının Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler

1) $$L_{s,2n}^{(2)} = (L_{s,n})^2 = \begin{cases} L_{s,n-1}L_{s,n+1} - (2s+3) & , \quad n \quad tek \quad ise \\ L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (2s+3) & , \quad n \quad çift \quad ise \end{cases}$$

İspat: $L_{s,n}^2 - L_{s,n-1}L_{s,n+1} = (-1)^n(2s+3)$

bağıntısından faydalanarak

$$L_{s,n}^2 = L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (-1)^n(2s+3)$$
$$L_{s,2n}^{(2)} = L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (-1)^n(2s+3)$$

eşitliğinden

$$L_{s,2n}^{(2)} = (L_{s,n})^2 = \begin{cases} L_{s,n-1}L_{s,n+1} - (2s+3) & , \quad n \quad tek \quad ise \\ L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (2s+3) & , \quad n \quad çift \quad ise \end{cases}$$

2) $L_{s,2n}^{(2)} - L_{s,n-r}L_{s,n+r} = (2s+3)(-1)^{n-r+1}F_{s,2r}^{(2)}$

İspat: $L_{s,2n}^{2} - L_{s,n-r}L_{s,n+r} = (2s+3)(-1)^{n-r+1}F_{s,2r}^{2}$

bağıntısını kullanarak;

$$L_{s,2n}^{(2)} - L_{s,n-r}L_{s,n+r} = (2s+3)(-1)^{n-r+1}F_{s,2r}^{(2)} \qquad (r=0 \text{ için})$$

elde ederiz.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada *k*-Fibonacci and *k*-Lucas sayılarının yeni bir ailesi tanımlandı ve *k*-Fibonacci, *k*-Lucas sayılarından faydalanılarak yeni aile hakkında bazı teorem ve özdeşlikler elde edildi. Ayrıca bu ailenin tanımından yararlanarak bir takım sonuçlara varıldı.

4.2. Öneriler

Bulunan bu yeni aile başlangıç değerleri genelleştirilerek genel teorem ve özdeşlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Akçağıl Ş., 2005, Fibonacci Sayıları ve Altın Oran, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Balıkesir.

[2] Akbulak M., Bozkurt D., 2009, On the Order-m Generalized Fibonacci *k*-Numbers, C*haos Solitons and Fractals*, 42, 1347-1355.

[3] Bolat C., 2008, *k*-Fibonacci, *k*-Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

[4] El-Mikkawy M. and Sogabe T., 2010, A new family of *k*-Fibonacci numbers, Applied Mathematics and Computation, 215, 4456-4461.

[5] Falcon S., Plaza A., 2007, On the Fibonacci *k*-Numbers, Chaos, Solitons & Fractals, 32(2), 1615-1624.

[6] Falcon S. and Plaza A., 2007, the *k*-Fibonacci sequence and the Pascal 2- triangle, Chaos, Solitons & Fractals , 33, 38-49.

[7] Falcon S. and Plaza A., 2009, On *k*-Fibonacci numbers of arithmetic indexes, *Applied Mathematics and Computation*, 208, 180-185.

[8] Falcon S., 2011, On the *k*-Lucas Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 6, no. 21, 1039 – 1050.

[9] Grabowski A., Wojtecki P., 2004, Lucas Numbers and Generalized Fibonacci Numbers, *Form. Math.*, 12 , 329-334.

[10] Karaduman E., 2005, On determinants of matrices with general Fibonacci numbers Entries, *Appl. Math. Comput*, 167, 670-676.

[11] Kilic E., 2008, The Binet Formula, Sums and Representations of Generalized Fibonacci *p*-Numbers, *Eur. J. Combin*, 29, 701-711.

[12] Kilic E., The generalized order *k*-Fibonacci–Pell sequence by matrix methods, 2007, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209, 133-145.

[13] Kilic E., Tasci D., 2008, Generalized order-*k* Fibonacci and Lucas Numbers, *Rocky Montain J. Math*. 38, 1991-2008.

[14] Koshy T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *John Wiley* and Sons Inc. NY.

[15] Nalli A., Civciv H., 2009, A generalized of Tridiagonal Matrix Determinants, Fibonacci and Lucas Numbers, *Chaos Solitons and Fractals*, 40, 355-361.

[16] Öcal A., Tuglu N., Altinişik E., 2005, On the representation of *k*-generalized Fibonacci and *k*-Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 170, 584-596.

[17] Stanimirovic P. S., Nikolov J., Stanimirovic I., 2008, A generalization of Fibonacci and Lucas matrices, *Discrete Appl. Math*., 156, 2606-2619.

[18] Uslu K., Taskara N., Kose H., 2011, The Generalized *k*-Fibonacci and *k*-Lucas Numbers, *Ars Combinatoria*, 99, 25-32.

[19] Vajda S., 1989, Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section, *Ellis Horwood Limited*, Chicester, England.

[20] Yang S. L., 2008, On the *k*-generalized Fibonacci Numbers and High-Order Linear Recurrence Relations, *Appl. Math. Comput*., 196, 850-857.

[21] Yilmaz N., Yazlik Y., Taskara N., 2012, On the *k*-Generalized Fibonacci Numbers.

[22] Yosma Z., 2008, Fibonacci ve Lucas Sayıları, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

[23] http:// mathworld.wolfram.com / FibonacciNumber.html.

[24] http:// mathworld.wolfram.com / LucasSequence.html.

[25] http:// www.bilgiustam.com/fibonacci sayilari-ve-altin-oran-nedir.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşe ATALAY
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : ANKARA – 03.02.1988
Telefon : 05078361106
Faks :
e-mail : sandy_place@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Aydınlıkevler Lisesi, Keçiören, Ankara	2005
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2010
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	-
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2012	Gaziantep Mimar Sinan Lisesi	Öğretmen

UZMANLIK ALANI: Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR : New families of s-Fibonacci and s-Lucas numbers, Ayse Atalay, Kemal Uslu, Havva Gökkaya, Selcuk Journal of Applied Mathematics, In press.