T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Arzu COŞKUN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

DOKTORA TEZİ

Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Arzu COŞKUN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2019, 93 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU
Doç. Dr. Serpil HALICI

Son yıllarda, bilim dünyasının ilgisini çeken ve birçok alanda karşımıza çıkan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, k -Fibonacci ve k -Lucas sayı dizileri ile ilgili pek çok çalışma vardır.

Fibonacci sayıları, özellikle teori ve uygulamalarından dolayı pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu sayıların önemli olmasının sebeplerinden biri de, bilindiği üzere ardışık iki Fibonacci(Lucas) sayısının oranının limitinin Altın Oran olmasıdır. Bu oran özellikle de Fizik, Mühendislik ve Mimarlık gibi pek çok uygulama alanına sahiptir.

Fibonacci sayıları hakkındaki çalışmalar, 13. yüzyılın başlangıcında başladığından bu yana pek çok yazar bu sayı dizisini farklı biçimlerde genelleştirmiştir.

Bu çalışmada, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinden faydalanılarak da yazılabilen ve başlangıç şartları 2 boyutlu matrisler olan matris dizileri tanımlanarak çeşitli özellikleri verilecek ve bu matris dizileri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bu matris dizilerinin negatif indisli olanları da tanımlanarak onların özellikleri de ayrıca verilecektir.

Bunların yanında, Companion(eş) matrislerin Hadamard çarpımları verilecek ve bu çarpımların özellikleri araştırılacaktır.

Anahtar Kelimeler: altın oran, bi-periyodik Fibonacci sayıları, bi-periyodik Lucas sayıları, Hadamard çarpım, matris.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

Bİ-PERİODİC FİBONACCİ AND LUCAS MATRİX SEQUENCES

Arzu COŞKUN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Necati TASKARA

2019, 93 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Necati TASKARA
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN
Prof. Dr. Buğra SARAÇOĞLU
Assoc. Prof. Dr. Serpil HALICI

In recent years, there are so many studies in the literature that are concernes about Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, k -Fibonacci and k -Lucas number sequences encountered in many areas and attracted the interesting of the scientific world.

The Fibonacci numbers have attracted the attention of mathematicians because of their intrinsic theory and applications. As is known, one of the reasons that these numbers are important, the ratio of two consecutive Fibonacci(Lucas) numbers converges to Golden Ratio. This ratio has so many applications, especially in Physics, Engineering and Architecture etc.

After the studies on Fibonacci numbers started at the beginning of the 13. century, many authors have generalized this sequence in different ways.

In this study, the matrix sequences which can be written by using bi-periodic Fibonacci and Lucas number sequences whose initial conditions are 2-dimensional matrices will be defined. Various properties of these matrix sequences will be given and the relations between these matrix sequences will be examined. Also, the matrix sequences with negative indices will introduced and given the properties of their.

In addition, Hadamard products of the Companion matrices will be given and the properties of these products will be investigated.

Keywords: bi-periodic Fibonacci numbers, bi-periodic Lucas numbers, golden ratio, Hadamard product, matrix.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu tez; 1. Bölüm Giriş bölümü, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Temel Kavramlar, 4. Bölüm Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri, 5. Bölüm Sonuç ve Öneriler, 6. Bölüm Kaynaklar olmak üzere altı bölümden oluşmaktadır.

Çalışmalarım boyunca beni yönlendiren ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya ve bu günlere gelmemde büyük paya sahip olan, maddi-manevi desteklerini eksik etmeyen sevgili anne ve babama, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Arzu COŞKUN
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Tezin Yapısı 1
1.2. Tezin Amacı ve Önemi 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **3**

3. TEMEL KAVRAMLAR **10**

3.1. Bi-periyodik Fibonacci Sayıları 11
3.2. Bi-periyodik Lucas Sayıları 13
3.3. Hadamard çarpım 15

4. Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ **16**

4.1. Bi-periyodik Fibonacci ve Bi-periyodik Lucas Matris Dizileri 16
4.1.1. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizisinin üreteç matrisi 35
4.1.2. Matris dizileri arasındaki ilişkiler 42
4.2. Negatif İndisli Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri 55
4.2.1. Negatif indisli matris dizileri arasındaki ilişkiler 67
4.3. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Üreteç Matrislerinin Hadamard Çarpımları 80

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **89**

5.1 Sonuçlar 89
5.2 Öneriler 89

KAYNAKLAR **90**

ÖZGEÇMİŞ **93**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
ϕ	:	Altın Oran
F_n	:	n . Fibonacci sayısı
L_n	:	n . Lucas sayısı
Q	:	Fibonacci sayı dizisinin Companion(eş) matrisi
q_n	:	n . bi-periyodik Fibonacci sayısı
l_n	:	n . bi-periyodik Lucas sayısı
$F_{k,n}$	:	n . k -Fibonacci sayısı
$L_{k,n}$	:	n . k -Lucas sayısı
r_n	:	n . k -periyodik Fibonacci sayısı
$s_n(l)$	:	n . bi-periyodik tamamlanmamış Fibonacci sayısı
j_n	:	n . bi-periyodik Jacobsthal sayısı
$\wp_n(s,t)$	:	(s,t) -Pell matris dizisinin n . terimi
$\ell_n(s,t)$	:	(s,t) -Pell-Lucas matris dizisinin n . terimi
$\mathcal{F}_n$	:	Bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin n . terimi
Q_q	:	Bi-periyodik Fibonacci sayı dizisinin Companion(eş) matrisi
Q_l	:	Bi-periyodik Lucas sayı dizisinin Companion(eş) matrisi
$\mathcal{L}_n$	:	Bi-periyodik Lucas matris dizisinin n . terimi
$G(t)$	:	Bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu

$H(t)$	:	Bi-periyodik Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu
q_{-n}	:	n . negatif indisli bi-periyodik Fibonacci sayısı
l_{-n}	:	n . negatif indisli bi-periyodik Lucas sayısı
$\mathcal{F}_{-n}$	:	Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin n . terimi
$\mathcal{L}_{-n}$	:	Negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisinin n . terimi
$g(t)$	:	Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu
$h(t)$	:	Negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu
$A \circ B$	:	A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı
$adj(A)$	:	A matrisinin adjointi
$iz(A)$	:	A matrisinin izi
$\det A$	:	A matrisinin determinantı
A^{-1}	:	A matrisinin tersi

1. GİRİŞ

Yapılan incelemeler, evrendeki her nesnenin ve doğa yasalarının temelinde sayılar olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, pek çok bilim insanı evrenin matematik dilinde yazıldığını söylemişlerdir. Bu dili ifade etmek için de, pek çok matematikçi sayı dizilerini tanımlayarak bu dizilerin özelliklerini incelemeye başlamıştır. Sanatta ve matematikte çoğu kez karşımıza çıkan Altın oran da, aslında basit bir kural üzerine oturtulmuştur. Pek çok şeyde tutarlı olarak karşımıza çıkan ve 1,618…′e karşılık gelen bu oran, aslında ardışık iki Fibonacci (Lucas) sayı dizisinin oranı olarak bilinir. Bu oran, Leanardo da Vinci tarafından yapılan Mona Lisa tablosunun boyu ile eni arasındaki orandan kaşımızla gözümüz arasındaki uzaklığın birbirine oranına kadar, bizleri evrende var olan sayısız büyüleyici gizeme götürmektedir.

Sayı dizileri ayrıca, yaklaşım teoride, şifre biliminde, grafik çizimlerinde (Mcllroy, 1992), zaman serileri analizinde (Box ve ark., 2008) vb. alanlarda da karşımıza çıkar.

Mühendislik ve istatistik gibi pek çok alanda matrislerle karşılaşıldığından matris teorisinin de ayrı bir önemi vardır.

Bu çalışma, bazı sayı dizilerinin matris dizileri tanımlanarak matris teori ile sayılar teorisi arasında ilişki kurulacak olması nedeniyle oldukça önemlidir.

1.1. Tezin Yapısı

Bu tez; 1. Bölüm Giriş bölümü, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Temel Kavramlar, 4. Bölüm Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri, 5. Bölüm Sonuç ve Öneriler, 6. Bölüm Kaynaklar olmak üzere altı bölümden oluşmaktadır.

1.2. Tezin Amacı ve Önemi

Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin birer genellemesi olan bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için, başlangıç değerleri iki boyutlu matrisler olan matris dizilerini tanımlamak ve tanımlanan matris dizilerinin özelliklerini araştırmak bu çalışmanın temel amacıdır. Böylece sayılar teorisi ile matris teorisi arasında farklı bir köprü kurulacak olması, çalışmanın önemini artırmaktadır. Tanımlanacak olan rekürans ilişkili matris dizileri ile bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizisi arasında bağlantı

kurulacak ve bulunan bu ilişki sayesinde, matris dizilerinin özellikleri araştırılırken aynı zamanda bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin de bilinen ya da bilinmeyen bazı özellikleri hakkında kolayca bilgi sahibi olunacaktır. Bunların yanı sıra, Companion(eş) matrisi veya sayı dizilerinin de üreteç matrisi olarak adlandırılan matrislerin Hadamard çarpımları incelenerek çalışmaya farklı bir bakış açısı getirilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, tez çalışmasının hazırlanması için gerekli olan çalışmalardan bahsedilecektir. Öncelikle sayı dizileri ile ilgili çalışmalar verilmiştir.

Horadam (1961), Fibonacci sayı dizilerinin başlangıç koşullarını değiştirerek, her $p,q \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}, \qquad H_1 = p,\ H_2 = p+q, \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ile yeni bir sayı dizisi tanımlamış ve bazı özelliklerini elde etmiştir.

Koshy (2001), Fibonacci, Lucas ve benzer sayı dizilerini ve onların özelliklerini kitap halinde literatüre kazandıran yazarlardan biridir.

Kılıç ve Taşçı (2006), genelleştirilmiş order *k*-Fibonacci ve Lucas sayılarını dikkate alarak, bu sayıların bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

Kocer ve Tuglu (2007), Pell ve Pell-Lucas *p*-sayılarını tanımlayarak, Pell sayıları için bilinen Binet formülüne benzer şekilde bu sayılar için analitik formüller türetmişlerdir.

Edson ve Yayenie (2009), bi-periyodik Fibonacci sayı dizilerini tanımlayarak bu sayı dizilerinin üreteç fonksiyonunu, Binet formülünü ve bazı özelliklerini vermişlerdir.

Kocer ve ark. (2009), Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerinin de genellemesi olan Fibonacci ve Lucas *p*-sayılarının *m*-genellemesini tanımlamışlardır. Ayrıca, altın *(p,m)*-oranları adı verilen matematiksel sabitlerin yeni bir sınıfını tanıtmışlardır.

Edson ve ark. (2011), *k*-periyodik Fibonacci sayı dizisi adını verdikleri yeni sayı dizilerini, $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 2$ için

$$r_n = \begin{cases} x_1 r_{n-1} + r_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod{k} \\ x_2 r_{n-1} + r_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod{k} \\ \vdots & \\ x_{k-1} r_{n-1} + r_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{k} \\ x_k r_{n-1} + r_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod{k} \end{cases}, \qquad r_0 = 0,\ r_1 = 1, \tag{2.2}$$

bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlayarak bu sayıların özelliklerini incelemişlerdir.

Falcon (2011), k-Lucas sayı dizisinin özelliklerini elde etmiş ve bu özdeşliklerden faydalanarak k-Fibonacci sayı dizisi için de yeni özdeşlikler bulmuştur.

Halıcı (2011), Pell, Pell-Lucas ve Modified Pell dizilerinin terimleri için bazı toplam formülleri elde etmiştir. Ayrıca, bu toplamların bu dizilerin terimlerine göre yazılabileceğini de göstermiştir.

Sahin (2011), $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_{r-1}$ pozitif sayılar olmak üzere, $m \geq 2$ için,

$$q_m = a_t q_{m-1} + q_{m-2},\ m \equiv t(\mathrm{mod}\, r) \qquad q_0 = 0,\ q_1 = 1, \tag{2.3}$$

olacak şekilde, $\{q_m\}$ dizini tanımlamıştır. Bu dizi $r = 2$ için, daha önce tanımlanan bi-periyodik Fibonacci sayı dizisidir. Bu makalede yazar, genel $\{q_m\}$ dizisinin üreteç fonksiyonunu kapalı formda yazmıştır.

Yayenie (2011), daha önce tanımlanmış olan bi-periyodik Fibonacci sayı dizisine ait yeni özellikler elde etmiştir.

Yazlik ve Taskara (2012), genelleştirilmiş k -Horadam dizisini tanımlayarak bu sayı dizisinin özelliklerini incelemişlerdir. Bu özelliklerin bir kısmını determinantla ispat etmişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş k -Horadam dizisi için bir üreteç fonksiyonu bulmuşlardır.

Alp ve ark. (2012), bi-periyodik üçlü rekürans sayı dizisini tanımlamışlar ve bu sayı dizisinin rekürans bağıntısı, Binet formülü gibi özelliklerini incelemişlerdir.

Taşçı ve ark. (2012), Fibonacci ve Lucas sayı dizileri de dahil olmak üzere pek çok sayı dizisinin genel hali olan, tamamlanmamış iki değişkenli Fibonacci ve Lucas p-polinomlarını tanımlayarak üreteç fonksiyonlarını ve özelliklerini bulmuşlardır.

Irmak ve Alp (2013), Lucas sayı dizisini, $a,b \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

$$p_n = \begin{cases} ap_{n-1} + p_{n-2}, & n \text{ çift} \\ bp_{n-1} + p_{n-2}, & n \text{ tek} \end{cases}, \qquad p_0 = 2,\ p_1 = 1, \tag{2.4}$$

bağıntısı ile vererek, tanımladıkları sayı dizisi için Binet formülünü elde etmişlerdir. Ayrıca, bu sayı dizisi ile genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri arasında ilişki kurmuşlardır.

Ramirez (2013), bi-periyodik tamamlanmamış Fibonacci sayı dizisini, $n \geq 1$ için

$$s_n(l) = a^{\varepsilon(n-1)} \sum_{i=0}^{l} \binom{n-i-1}{i} (ab)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - i}, \qquad 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \tag{2.5}$$

ile tanımlamıştır. Ayrıca, bu sayılarla ilişkili olan bazı rekürans bağıntılarını, bu sayıların bazı özelliklerini ve üreteç fonksiyonlarını bulmuştur.

Bilgici (2014), Lucas sayı dizisinin genelleştirilmiş hali olan ve bi-periyodik Lucas sayı dizisi adı verilen sayı dizisini tanımlamıştır. Başlangıç şartlarını değiştirerek,

Lucas sayı dizisini iki farklı biçimde genelleştirmiş ve bu dizilerin özelliklerini incelemiştir. Ayrıca bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasındaki ilişkileri veren formüller geliştirmiştir.

Catarino (2014), k-Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonunu, Binet formülünü, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini elde etmiştir. Ayrıca, üreteç fonksiyonunu dikkate alarak, genel terim için yeni bir özdeşliğin yazılabileceğini göstermiştir.

Koshy (2014), Pell ve Pell-Lucas sayı dizilerini ve onların özelliklerini kitap halinde literatüre kazandıran yazardır.

Uygun ve Owusu (2016), bi-periyodik Jacobsthal sayı dizileri adını verdikleri Jacobsthal sayı dizilerinin yeni bir genellemesini, $n \geq 2$ için,

$$j_n = \begin{cases} aj_{n-1} + 2j_{n-2}, & n \text{ çift} \\ bj_{n-1} + 2j_{n-2}, & n \text{ tek} \end{cases}, \tag{2.6}$$

bağıntısı ve $j_0 = 0,\ j_1 = 1$ başlangıç şartları ile tanıtmışlardır. Daha sonra bu sayı dizileri için Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu, Cassini, Catalan ve D'ocagne özdeşliklerini vermişlerdir. Ayrıca, bunlarla ilgili bazı binomial toplam formülleri de vermişlerdir. Bu sayı dizinin ardışık terimlerinin yakınsaklık özelliklerini de incelemişlerdir.

Gökbas ve Köse (2018), öncelikle kompleks dizileri ve Gauss sayı dizilerini ele almışlardır. Sonra kompleks k-Horadam ve Gauss k-Horadam dizilerini tanımlanmıştır. Kompleks k-Horadam ve Gauss k-Horadam sayıları arasındaki farkı vermişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve Gauss k-Horadam dizilerini de incelemişlerdir. Sonra, ardışık genelleştirilmiş kompleks k-Horadam ve Gauss k-Horadam dizilerinin limitlerini hesaplamışlardır. Kompleks k-Horadam ve Gauss k-Horadam dizilerinin özelliklerini elde etmişlerdir.

Uygun ve Tümbas (2018), çalışmalarında genelleştirilmiş k-Jacobsthal sayı dizileri adı verilen ikinci dereceden sayı dizilerinin yeni bir genellemesini tanıtarak bu dizinin bazı özelliklerini araştırmışlardır.

Yazlik ve ark. (2018), Fibonacci ve Lucas p-sayılarının yeni bir genellemesini tanımlamışlardır. Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas p-dizisi için ağaç diyagramı oluşturmuş ve bu diyagramları kullanarak bu dizilerin rekürans bağıntılarını türetmişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas p-dizilerinin çeşitli sayı dizilerine indirgenebileceğini göstermişlerdir. Son olarak, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas p-sayıları için Binet formülleri geliştirmişler ve a, b ve p'nin özel değerleri

için, Binet formülleri vasıtasıyla elde edilen nümerik ve grafiksel sonuçları sunmuşlardır.

Literatürde matrislerden ve matris dizilerinden faydalanılarak, matris dizileri ile rekürans ilişkili sayı dizileri arasında ilişkiler kurulmuştur. Ayrıca, bu ilişkiler kullanılarak sayı dizilerinin incelendiği çalışmalar oldukça fazladır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

King (1960), yüksek lisans tezinde Fibonacci Q matrisi olarak bilinen

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

matrisi ile Fibonacci sayı dizisi $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ arasında

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

şeklinde bir ilişki elde etmiştir. Bu ilişki sayesinde Fibonacci sayıları için farklı özellikler sunmuştur.

Silvester (1979), King'in (1960) çalışmasındaki Q matrisine benzer olarak

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

matrisini tanımlamış ve $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ile arasında

$$A^n\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n+1}\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

bağıntısını sunmuştur. Bu bağıntıdan hareketle, Fibonacci sayıları için özellikler elde etmiştir.

Er (1984), genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci sayılarının *k*-dizilerini tanımlamış ve bunun matris gösteriminin özelliklerini ispatlamıştır. Ayrıca bu matris temsillerinden hareketle, Fibonacci sayıları için toplam formüllerini göstermiştir.

Karaduman (2004), genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci sayılarının *k*-dizileri ve matris gösterimi ile ilgili bazı ilişkiler bulmuştur.

Öcal ve ark. (2005), *k*-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı matris temsillerini vermişler ve bu dizilerin Binet formüllerini, verilen temsilleri kullanarak elde etmişlerdir.

Civciv (2009), doktora tez çalışmasında (s,t)-Fibonacci ve (s,t)-Lucas matris dizilerini tanıtarak özelliklerini incelemiştir.

Bahsi ve Solak (2010), tanımladıkları circulant matrisin normlarını, özdeğerlerini ve determinantlarını hesaplamışlardır. Ayrıca, circulant matrisin tersinin de özelliklerini araştırmışlardır.

Solak ve Bahşi (2011), Fibonacci ve Lucas sayıları ile tanımlı Hankel matrislerin spektral normları için eşitlikler elde etmişlerdir.

Gulec ve Taskara (2012), (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas matris dizilerini tanımlamışlardır ve bu matris dizilerinin Binet benzeri formüllerini, toplam formüllerini ve arasındaki ilişkileri elde etmişlerdir. $s^2+4t>0,\ s>0,\ t\neq 0$ ve $n\geq 2$ olmak üzere (s,t)-Pell ve (s,t)-Pell Lucas matris dizileri aşağıdaki gibidir:

$$\wp_n(s,t)=2s\wp_{n-1}(s,t)+t\wp_{n-2}(s,t),\quad \wp_0(s,t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\wp_1(s,t)=\begin{pmatrix}2s & 1\\ t & 0\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$\ell_n(s,t)=2s\ell_{n-1}(s,t)+t\ell_{n-2}(s,t),\quad \ell_0(s,t)=\begin{pmatrix}2s & 2\\ 2t & -2s\end{pmatrix},\ell_1(s,t)=\begin{pmatrix}4s^2+2t & 2s\\ 2st & 2t\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Solak ve Bahsi (2013), Fibonacci ve Lucas sayıları ile tanımlı Toeplitz matrislerin spektral normları için eşitlikler bulmuşlardır.

Uslu ve Uygun (2013), (s,t)-Jacobsthal ve (s,t)-Jacobsthal Lucas matris dizilerini tanımlamışlardır ve bu matris dizilerinin özelliklerini elde etmişlerdir.

Yazlik ve Taskara (2013a), elemanları genelleştirilmiş k-Horadam sayıları olan circulant matrisi göz önüne alarak, determinantlarını ve terslerini hesaplamak için yeni bir genelleme sunmuşlardır. Buradaki sonuçların, tüm ikinci mertebe sayı dizilerinin elemanlarına sahip olan circulant matrislerin terslerini ve determinantlarını elde etmek için en genel ifadeler olduğunu söylemişlerdir.

Yazlik ve Taskara (2013b), elemanları genelleştirilmiş k-Horadam sayıları olan bir r-circulant matrisin spektral normu için yeni üst ve alt sınırlar sunmuşlardır. Ayrıca, bu matrisin özdeğerlerini ve determinantını hesaplamak için yeni formüller elde etmişlerdir.

Bahsi ve Solak (2014), hyper-Fibonacci ve hyper-Lucas sayıları vasıtasıyla verilen circulant ve r-circulant matrislerin normlarını çalışmışlardır.

Godase ve Dhakne (2014), k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarının bilinmeyen özelliklerini, tanımladıkları $S=\begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k^2+4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ ve $M=\begin{pmatrix} 0 & k^2+4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinden faydalanarak türetmişlerdir.

Jang ve Jun (2014), genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi için, Companion matris adını verdikleri $Q_q=\begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ matrisini tanımlamışlardır. Bu matrisin *n*. kuvveti ile bi-periyodik Fibonacci sayı dizilerinin ilişkili olduğunu bularak, genelleştirilmiş sayı dizisi için varolan Casssini özdeşliğini bu matristen faydalanarak elde etmişlerdir.

Altınışık ve ark. (2015), Kompleks Fibonacci sayıları ile ilişkili circulant matrisin determinantını vermişlerdir. Dahası, bu matrisin tersinir olduğunu ifade ederek tersinin elemenlarını bulmuşlardır.

Uygun ve Eldogan (2016), ilk olarak k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayı dizilerini tanımlamışlardır. Daha sonra, bu sayı dizilerini kullanarak, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas matris dizilerini tanıtarak özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca, bu matris dizilerinin aralarındaki ilişkileri bulmuşlardır.

Tan ve Ekin (2017), Fibonacci koşullu dizisini ve Lucas koşullu dizisini ele alarak bu dizilerin bazı özelliklerini matris yöntemini kullanarak türetmişlerdir. Elde edilen sonuçların sıradan Fibonacci ve Lucas dizilerinin sonuçlarından daha mükemmel olduğunu göstermişlerdir.

Köme ve Yazlik (2017), elemanları sırasıyla bi- periyodik Fibonacci ve bi-periyodik Lucas sayıları olan r-circulant matrislerin spektral normu için alt ve üst sınırlar vermişlerdir. Ayrıca, bu matrislerin Hadamard ve Kronocker çarpımlarının spektral normu için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

Son olarak, matrislerin Hadamard çarpımları ile ilgili yapılan bazı çalışmalar aşağıdadır.

Horn (1990), Hadamard çarpımın tarihsel gelişimini, Schur'un teoremlerini ve Hadamard çarpımın değişik yollarla kabulünü göstermiştir.

Taşcı (2000), reel elemanlı herhangi bir n-kare A matrisini göz önüne alarak $\varphi(A)=A\circ adjA$ ve $\varphi_T(A)=A\circ(adjA)^T$ matrislerini tanımlamış ve bu matrislerin bazı özelliklerini elde etmiştir.

Nalli (2006), Fibonacci Q^n matrisi ile Fibonacci Q^{-n} matrislerinin Hadamard çarpımlarını

$$Q^n \circ Q^{-n} = \begin{cases} Q^n \circ adjQ^{-n}, & n \text{ çift} \\ -\left(Q^n \circ adjQ^{-n}\right), & n \text{ tek} \end{cases} \tag{2.13}$$

eşitliği ile tanımlayarak bu çarpımın bazı özelliklerini incelemiştir.

Cerda-Morales (2013), $U(p,q) = \begin{pmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile ilgili olarak, $U^n(p,q) \circ U^{-n}(p,q)$ Hadamard çarpımını tanımlayarak bu çarpımın bazı özelliklerini araştırmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile birlikte özellikle Altın Oran, bilim dünyasının oldukça ilgisini çekmiş ve birçok araştırmaya konu olmuştur. İdeal güzelliğin matematiği olarak karşımıza çıkan Altın Oran, 1205 yılında İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından tanımlanmıştır. Liber Abaci adlı çalışmasında, kapalı ortamdaki bir tavşan ailesinin artışını, her tavşan çiftinin bir ay sonra bir yavru yapıp onun da bir ay sonra bir yavru yapacağı gibi ideal varsayımlar altında hesaplayarak tavşan çiftlerinin sayısının artışını gösteren Fibonacci sayı dizisini, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = 1,\ F_1 = 1$$

olarak tanımlamıştır. Daha sonra, bu sayı dizisindeki ardışık sayıların oranı olan ve altın oran olarak tanıtılan $\phi = 1,618033988749894848204586\ldots$ sayısını elde etmiştir. İrrasyonel hali $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ olan bu sayı, kendisine 1 eklendiğinde kendi karesine eşittir

$$\phi = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\phi\cdots}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}\,.$$

Başka hiçbir sayıda olmayan özellikleriyle altın oran, sanattan mimariye ve hatta doğaya kadar pek çok alanda karşımıza çıkmaktadır.

Fibonacci sayı dizisine benzer şekilde on dokuzuncu yüzyıl Fransız matematikçi F. Edouard Lucas (1842-1891), her $n \in \mathbb{N}$ için Lucas dizisini

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \qquad L_0 = 2,\ L_1 = 1$$

bağıntısı ile tanımlamıştır.

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri tanımlandıktan sonra birçok farklı biçimde genelleştirilmiştir. Bu çalışmalardan bazılarında, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayı dizilerinin genelleştirilmiş halleri olan bi-periyodik sayı dizileri tanımlanarak özellikleri incelenmiştir.

Bu bölüm üç alt başlık altında toplanmaktadır. Birinci bölümde bi-periyodik Fibonacci sayıları ve özellikleri verilirken, ikinci bölümde bi-periyodik Lucas sayıları ve bazı özellikleri, üçüncü bölümde ise matrislerin Hadamard çarpımları hakkında kısaca bilgi verilmektedir.

3.1. Bi-periyodik Fibonacci Sayıları

Fibonacci, Pell ve *k*-Fibonacci sayı dizilerinin en genel hali olan ve genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi olarak da bilinen bi-periyodik Fibonacci sayı dizisi, 2009 yılında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için, a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$q_{n+2} = \begin{cases} aq_{n+1} + q_n, & n \text{ çift} \\ bq_{n+1} + q_n, & n \text{ tek} \end{cases} \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ve $q_0 = 0,\ q_1 = 1$ başlangıç şartları ile verilen sayılara *bi-periyodik Fibonacci sayıları* denir (Edson ve Yayenie, 2009).

Bazı bi-periyodik Fibonacci sayıları, çizelgede görüldüğü gibidir.

Çizelge 3.1. Bazı bi-periyodik Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	⋯
q_n	0	1	a	$ab+1$	a^2b+2a	$a^2b^2+3ab+1$	…

Bi-periyodik Fibonacci sayılarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Bu sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \frac{x\left(1+ax-x^2\right)}{1-\left(ab+2\right)x^2+x^4}, \tag{3.2}$$

eşitliği ile verilir (Edson ve Yayenie, 2009).

- $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift} \\ 1, & n \text{ tek} \end{cases} \tag{3.3}$$

ve

$\alpha = \dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ ile $\beta = \dfrac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$, $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere, bi-periyodik Fibonacci sayılarının kapalı formu,

$$q_n = \left(\frac{a^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{3.4}$$

eşitliği ile verilir ve bu formül bi-periyodik Fibonacci sayılarının Binet benzeri formülü olarak bilinir (Edson ve Yayenie, 2009).

- $m, n, r \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n \geq r$ için, Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşlikleri,

$$a^{1-\varepsilon(n)} b^{\varepsilon(n)} q_{n-1} q_{n+1} - a^{\varepsilon(n)} b^{1-\varepsilon(n)} q_n^2 = a(-1)^n$$

$$a^{\varepsilon(n-r)} b^{1-\varepsilon(n-r)} q_{n-r} q_{n+r} - a^{\varepsilon(n)} b^{1-\varepsilon(n)} q_n^2 = a^{\varepsilon(r)} b^{1-\varepsilon(r)} (-1)^{n+1-r} q_r^2$$

$$a^{\varepsilon(mn+m)} b^{\varepsilon(mn+n)} q_m q_{n+1} - a^{\varepsilon(mn+n)} b^{\varepsilon(mn+m)} q_{m+1} q_n = (-1)^n a^{\varepsilon(m-n)} q_{m-n}$$

eşitlikleri ile verilir (Edson ve Yayenie, 2009).

- $n \in \mathbb{N}$ için bi-periyodik Fibonacci sayılarının binomial katsayılı toplamları,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{\varepsilon(i)} (ab)^{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor} q_i = q_{2n}, \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{\varepsilon(i+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor} q_{i+1} = a q_{2n+1}$$

şeklindedir (Edson ve Yayenie, 2009).

- Bu sayıların eş (Companion) matrisi

$$A = \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

olarak verilir (Jang ve Jun, 2014). Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının bazı özellikleri bu matristen faydalanılarakta elde edilebildiğinden, *A* matrisine "bi-periyodik Fibonacci sayı dizisinin üreteç matrisi" adı da verilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının negatif indislileri, $m < 0$ olmak üzere

$$q_m = \begin{cases} q_{m+2} - a q_{m+1}, & m \text{ çift} \\ q_{m+2} - b q_{m+1}, & m \text{ tek} \end{cases} \tag{3.6}$$

eşitliği ile bulunur. Bazı negatif indisli bi-periyodik Fibonacci sayıları çizelgede görüldüğü gibidir.

Çizelge 3.2. Bazı negatif indisli bi-periyodik Fibonacci sayıları

m	1	2	3	4	5	⋯
q_{-m}	1	$-a$	$ab+1$	$-a^2b-2a$	$a^2b^2+3ab+1$	…

Şimdi de rekürans bağıntısı bi-periyodik Fibonacci sayıları ile benzer ve başlangıç şartları farklı olan bi-periyodik Lucas sayılarından bahsedilecektir.

3.2. Bi-periyodik Lucas Sayıları

Genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi olarak da bilinen ve Lucas, Pell-Lucas ve *k*-Lucas sayılarının bir genellemesi olan bi-periyodik Lucas sayıları, ilk olarak 2014 yılında aşağıdaki gibi tanımlanarak literatüre kazandırılmıştır.

Tanım 3.2.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için, a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, rekürans bağıntısı

$$l_{n+2} = \begin{cases} bl_{n+1} + l_n, & n \text{ çift} \\ al_{n+1} + l_n, & n \text{ tek} \end{cases} \tag{3.7}$$

ile verilen ve başlangıç şartları $l_0 = 2, l_1 = a$ olan sayılara *bi-periyodik Lucas sayıları* denir (Bilgici, 2014).

Bazı bi-periyodik Lucas sayıları çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.3. Bazı bi-periyodik Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	⋯
l_n	2	a	$ab+2$	a^2b+3a	$a^2b^2+4ab+2$	$a^3b^2+5a^2b+5a$	⋯

Bi-periyodik Lucas sayılarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Bu sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n = \frac{2+ax-(ab+2)x^2+ax^3}{1-(ab+2)x^2+x^4} \tag{3.8}$$

eşitliği ile verilir (Bilgici, 2014).

- $n \in \mathbb{N}$ için, $\varepsilon(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere,

  $\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$ ve $\beta = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$

  $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri iken, bi-periyodik Lucas sayılarının kapalı formu

  $$l_n = \frac{a^{\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \left(\alpha^n + \beta^n\right) \tag{3.9}$$

  olarak verilir ve bu formül bi-periyodik Lucas sayılarının Binet benzeri formülü olarak bilinir (Bilgici, 2014).

- $n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için, Cassini ve Catalan özdeşlikleri,

  $$\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)} l_{n-1} l_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} l_n^2 = (-1)^{n+1}(ab+4),$$

  $$\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+r)} l_{n-r} l_{n+r} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} l_n^2 = \frac{(-1)^{n+r}}{(ab)^r}\left(\alpha^r - \beta^r\right)^2$$

  eşitlikleri ile verilir (Bilgici, 2014).

- $n \in \mathbb{N}$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiler ise,

  $$l_n = q_{n-1} + q_{n+1}, \qquad (ab+4) q_n = l_{n-1} + l_{n+1} \tag{3.10}$$

  şeklindedir (Bilgici, 2014).

Bu sayıların negatif indislileri, $m < 0$ olmak üzere,

$$l_m = \begin{cases} l_{m+2} - b l_{m+1}, & m \text{ çift} \\ l_{m+2} - a l_{m+1}, & m \text{ tek} \end{cases} \tag{3.11}$$

eşitliği ile bulunur.

Bazı negatif indisli bi-periyodik Lucas sayıları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.4. Bazı negatif indisli bi-periyodik Lucas sayıları

m	1	2	3	4	5	⋯
l_{-m}	$-a$	$ab+2$	$-a^2b-3a$	$a^2b^2+4ab+2$	$-a^3b^2-5a^2b-5a$	⋯

Ayrıca, (3.10) ile verilen genelleştirilmiş sayı dizileri arasındaki ilişkilere benzer şekilde, negatif indisli genelleştirilmiş sayı dizileri arasında da ilişki vardır. Yani, aslında her $n \in \mathbb{Z}$ için (3.10) denklemi sağlanır (Bilgici, 2014).

Bunların yanı sıra, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili birçok çalışma (Yayenie, 2011; Irmak ve Alp, 2013) ve diğer kaynaklarda görülebilir.

Şimdi de geçmişten günümüze kadar pekçok yazar tarafından incelenen Hadamard çarpımından kısaca bahsedilecektir.

3.3. Hadamard Çarpım

Hadamard çarpımı ile ilgili cebirsel ve analitik özellikleri inceleyen ilk sistematik çalışma, Schur'un 1911 yılındaki çalışmasıdır. Schur bu çalışmasında, aynı mertebeli iki pozitif yarı tanımlı matrisin Hadamard çarpımın da pozitif yarı tanımlı matris olduğunu ispatlamıştır. Bu çalışmanın orijinalliğinden dolayı, Hadamard çarpımı Schur çarpımı olarak da anılmaktadır (Gümüş ve Taşkara, 2011).

Zaman içinde Hadamard çarpımı, Hadamard-Schur çarpımı, Schur-Hadamard çarpımı gibi değişik biçimlerde adlandırılmıştır. Horn, 1990 yılındaki çalışmasında Hadamard çarpımın tarihsel gelişimini inceleyerek, Schur'un teoremlerini ve Hadamard çarpımın değişik yollarla kabulünü göstermiştir. Horn'un bu çalışması, Hadamard çarpım üzerine çalışan matematikçiler için temel kaynak niteliğindedir.

Tanım 3.3.1. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisleri verilsin.

$$A\circ B=\left[a_{ij}b_{ij}\right]_{m\times n} \tag{3.12}$$

çarpımına, A ile B matrisinin *Hadamard çarpımı* denir (Horn, 1990).

Çarpımın tanımı gereği, iki matrisin Hadamard çarpımının yapılabilmesi için mertebelerinin aynı olması yeterlidir, matrislerin kare matris olması gerekmez. A ve B matrisleri aynı mertebeli fakat kare matris olmadıklarında, AB normal matris çarpımı tanımlı değildir ancak $A\circ B$ Hadamard çarpımı tanımlıdır.

4. Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ VE LUCAS MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin pozitif ve negatif indislileri tanımlanacak ve bu matris dizileri için elde edilen özellikler sunulacaktır. Bu matris dizilerinden faydalanarak, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin üreteç matrisi adı verilen matris tanımlanacak ve bu matristen faydalanarak genelleştirilmiş sayı dizilerinin özellikleri incelenecektir. Ayrıca Companion(eş) matrislerin Hadamard çarpımları tanımlanarak bazı özellikleri araştırılacaktır.

4.1. Bi-periyodik Fibonacci ve Bi-periyodik Lucas Matris Dizileri

Bu bölümde bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının matris dizileri verilerek, bu matris dizilerinin üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve bazı toplamları sunulacaktır.

Tanım 4.1.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $a,b \in \mathbb{R}-\{0\}$ için, bi-periyodik Fibonacci $(\mathcal{F}_n)$ ve bi-periyodik Lucas $(\mathcal{L}_n)$ matris dizileri, sırasıyla

$$\mathcal{F}_{n+2} = \begin{cases} a\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n, & n \text{ çift} \\ b\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n, & n \text{ tek} \end{cases}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}_{n+2} = \begin{cases} b\mathcal{L}_{n+1} + \mathcal{L}_n, & n \text{ çift} \\ a\mathcal{L}_{n+1} + \mathcal{L}_n, & n \text{ tek} \end{cases}, \tag{4.2}$$

rekürans bağıntıları ve

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} b & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} a & 2 \\ \frac{2a}{b} & -a \end{pmatrix},\ \mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a^2b+2a}{b} & a \\ \frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b} \end{pmatrix},$$

başlangıç şartları ile tanımlanır (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

Tanım 4.1.1. deki $\mathcal{F}_1$ matrisi, Fibonacci sayılarında oldukça önemli olan eş Q-matrisi gibi bi-periodic Fibonacci sayıları için varolan eş matristir. Bu matrisin $a \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpılmasıyla literatürde daha önce verilen Q_q Companion(eş) matrisinin elde edildiği görülür (Jang ve Jun, 2014).

Benzer şekilde, Tanım 4.1.1. deki $\mathcal{L}_1$ matrisi de, bi-periodic Fibonacci ve Lucas sayıları için varolan eş matristir. Bu matristen faydalanarak genelleştirilmiş sayı dizileri için bazı özellikler elde edilebilir (Coskun ve Taskara, 2017).

Aşağıdaki teoremde, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin n. genel terimleri, genelleştirilmiş sayı dizileri yardımıyla verilmektedir.

Teorem 4.1.2. $n \geq 0$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin n. genel terimleri, sırasıyla

i) $$\mathcal{F}_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n+1} & \frac{b}{a} q_n \\ q_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

ii) $$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{n+1} & l_n \\ \frac{a}{b} l_n & \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

dir (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. i) İlk olarak, (4.3) denkleminde $n = 0$ alınırsa,

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \frac{b}{a} q_0 \\ q_0 & q_{-1} \end{pmatrix}$$

olup, Çizelge 3.1. den doğru olduğu görülür.

Yine $n = 1$ için Çizelge 3.1. den

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} b & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} q_2 & \frac{b}{a} q_1 \\ q_1 & \frac{b}{a} q_0 \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $n = k \in \mathbb{N}$ için, denklem (4.3) doğru olsun ve $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için denklem (4.1) ve kabulümüzü göz önüne alarak $n = k \in \mathbb{N}$ sayısının tek ve çift olduğu durumları incelemeliyiz: İlk olarak çift olduğu durum için,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k+1} &= b\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_{k-1} \\ &= b\begin{pmatrix} q_{k+1} & \frac{b}{a} q_k \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b}{a} q_k & \frac{b}{a} q_{k-1} \\ q_{k-1} & \frac{b}{a} q_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a}\left(aq_{k+1} + q_k\right) & \frac{b}{a}\left(bq_k + q_{k-1}\right) \\ bq_k + q_{k-1} & \frac{b}{a}\left(aq_{k-1} + q_{k-2}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup, (3.1) denkleminden faydalanılarak,

$$\mathcal{F}_{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{b}{a}q_{k+2} & \frac{b}{a}q_{k+1}\\ q_{k+1} & \frac{b}{a}q_{k}\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $n=k\in\mathbb{N}$ sayısı tek iken

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{k+1}&=a\mathcal{F}_{k}+\mathcal{F}_{k-1}\\ &=a\begin{pmatrix}\frac{b}{a}q_{k+1} & \frac{b}{a}q_{k}\\ q_{k} & \frac{b}{a}q_{k-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q_{k} & \frac{b}{a}q_{k-1}\\ q_{k-1} & q_{k-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bq_{k+1}+q_{k} & \frac{b}{a}\left(aq_{k}+q_{k-1}\right)\\ aq_{k}+q_{k-1} & bq_{k-1}+q_{k-2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

olup, yine (3.1) denkleminden faydalanılarak,

$$\mathcal{F}_{k+1}=\begin{pmatrix}q_{k+2} & \frac{b}{a}q_{k+1}\\ q_{k+1} & q_{k}\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) denklemlerinden

$$\mathcal{F}_{k+1}=\begin{cases}\begin{pmatrix}\frac{b}{a}q_{k+2} & \frac{b}{a}q_{k+1}\\ q_{k+1} & \frac{b}{a}q_{k}\end{pmatrix}, & k \text{ çift}\\ \begin{pmatrix}q_{k+2} & \frac{b}{a}q_{k+1}\\ q_{k+1} & q_{k}\end{pmatrix}, & k \text{ tek}\end{cases}$$

yazılabilir. $\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k \text{ çift}\\ 1, & k \text{ tek}\end{cases}$ fonksiyonu kullanılarak

$$\mathcal{F}_{k+1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(k+1)} q_{k+2} & \frac{b}{a}q_{k+1}\\ q_{k+1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(k+1)} q_{k}\end{pmatrix}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece teoremin ilk kısmının ispatı tamamlanmış olur.

ii) Bi-periyodik Lucas matris dizileri için olan kısmın doğruluğu da bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin ispatına benzer şekilde, *k* çift iken

$$\mathcal{L}_{k+1}=\begin{pmatrix}l_{k+2} & l_{k+1}\\ \frac{a}{b}l_{k+1} & l_{k}\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

ve *k* tek iken

$$\mathcal{L}_{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}l_{k+2} & l_{k+1}\\ \frac{a}{b}l_{k+1} & \frac{a}{b}l_{k}\end{pmatrix} \tag{4.8}$$

bulunur. Böylece istenilen ifadenin elde edildiği görülür. □

Bi-periyodik matris dizilerinin satır ve sütun elemanları genelleştirilmiş sayı dizileri olduğundan, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerine *genelleştirilmiş matris dizileri* adı da verilir.

Şimdi genelleştirilmiş matris dizilerinin özelliklerini inceleyelim.

Teorem 4.1.3. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin determinantları ile ilgili olarak,

$$\det\left(\mathcal{F}_n\right)=\left(-\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} \tag{4.9}$$

$$\det\left(\mathcal{L}_n\right)=\left(-1\right)^{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{1+\varepsilon(n)}\left(ab+4\right) \tag{4.10}$$

eşitlikleri sağlanır (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. Genelleştirilmiş matris dizileri için benzer durumlar söz konusu olduğundan, yalnızca bi-periyodik Fibonacci matris dizisi için varolan eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Tanım 4.1.1. den faydalanarak,

$$\det\left(\mathcal{F}_1\right)=\begin{vmatrix}b & \frac{b}{a}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{b}{a},\ \det\left(\mathcal{F}_2\right)=\begin{vmatrix}ab+1 & b\\ a & 1\end{vmatrix}=1$$

yazılabilir. $n=k\in\mathbb{N}$ sayısının tek ve çift olduğu durumları inceleyelim.

İlk olarak k çift iken, $n=k\in\mathbb{N}$ için denklem (4.9) doğru olsun ve $n=k+2$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için Teorem 4.1.2 i göz önüne alırsak,

$$\det\left(\mathcal{F}_{k+2}\right)=\begin{vmatrix}q_{k+3} & \frac{b}{a}q_{k+2}\\ q_{k+2} & q_{k+1}\end{vmatrix}=q_{k+1}q_{k+3}-\frac{b}{a}q_{k+2}^2$$

olup, (3.1) denkleminden faydalanarak,

$$\begin{aligned}q_{k+1}q_{k+3}-\frac{b}{a}q_{k+2}^2&=q_{k+1}\left(bq_{k+2}+q_{k+1}\right)-\frac{b}{a}\left(aq_{k+1}+q_k\right)^2\\ &=\left(b\left(aq_{k+1}+q_k\right)+q_{k+1}\right)q_{k+1}-\frac{b}{a}\left(a^2q_{k+1}^2+2aq_kq_{k+1}+q_k^2\right)\end{aligned}$$

$$q_{k+1}q_{k+3}-\frac{b}{a}q_{k+2}^2=abq_{k+1}^2+bq_kq_{k+1}+q_{k+1}^2-abq_{k+1}^2-2bq_kq_{k+1}-\frac{b}{a}q_k^2$$
$$=q_{k+1}\left(q_{k+1}-bq_k\right)-\frac{b}{a}q_k^2=q_{k+1}q_{k-1}-\frac{b}{a}q_k^2$$

ve kabulümüzden faydalanarakta

$$\det\left(\mathcal{F}_k\right)=\begin{vmatrix}q_{k+1} & \frac{b}{a}q_k\\ q_k & q_{k-1}\end{vmatrix}=q_{k+1}q_{k-1}-\frac{b}{a}q_k^2=1$$

elde edilir. Böylece, *k* çift ve $\det\left(\mathcal{F}_k\right)=1$ iken $\det\left(\mathcal{F}_{k+2}\right)=1$ olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, *k* tek ve $n=k\in\mathbb{N}$ için denklem (4.9) doğru olsun ve $n=k+2$ için doğru olduğunu gösterelim. (4.1) denklemi göz önüne alınarak,

$$\det\left(\mathcal{F}_{k+2}\right)=\begin{vmatrix}\frac{b}{a}q_{k+3} & \frac{b}{a}q_{k+2}\\ q_{k+2} & \frac{b}{a}q_{k+1}\end{vmatrix}=\left(\frac{b}{a}\right)^2q_{k+1}q_{k+3}-\frac{b}{a}q_{k+2}^2$$

olup, (3.1) denkleminden faydalanılarak,

$$\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}q_{k+1}q_{k+3}-q_{k+2}^2\right)=\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}q_{k+1}\left(aq_{k+2}+q_{k+1}\right)-\left(bq_{k+1}+q_k\right)^2\right)$$
$$=\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}q_{k+1}\left(a\left(bq_{k+1}+q_k\right)+q_{k+1}\right)-\left(b^2q_{k+1}^2+2bq_kq_{k+1}+q_k^2\right)\right)$$
$$=\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(abq_{k+1}^2+aq_kq_{k+1}+q_{k+1}^2-abq_{k+1}^2-2aq_kq_{k+1}-\frac{a}{b}q_k^2\right)$$
$$=\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(q_{k+1}\left(q_{k+1}-aq_k\right)-\frac{a}{b}q_k^2\right)$$

bulunur ve kabulümüzden

$$\det\left(\mathcal{F}_k\right)=\begin{vmatrix}\frac{b}{a}q_{k+1} & \frac{b}{a}q_k\\ q_k & \frac{b}{a}q_{k-1}\end{vmatrix}=\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}q_{k+1}q_{k-1}-q_k^2\right)=-\frac{b}{a}$$

elde edilir. Böylece, *k* tek ve $\det\left(\mathcal{F}_k\right)=-\frac{b}{a}$ iken $\det\left(\mathcal{F}_{k+2}\right)=-\frac{b}{a}$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç olarak, tek ve çift olma durumunu incelediğimiz matris dizisininin determinantını,

$$\det\left(\mathcal{F}_{k+2}\right)=\begin{cases}1, & k \text{ çift}\\ -\dfrac{b}{a}, & k \text{ tek}\end{cases}$$

eşitliği ile verebiliriz. Daha önce tanımlanan $\varepsilon(n)=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ fonksiyonu yardımıyla da

$$\det\left(\mathcal{F}_{k+2}\right)=\left(-\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(k+2)}$$

elde edilir ki istenilendir. Böylece genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi için ispat tamamlanmış olur. □

Genelleştirilmiş sayı dizileri için Cassini özdeşlikleri daha önce bazı çalışmalarda verilmiştir (Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014). Burada da matris dizilerinin determinantlarından faydalanarak ve Teorem 4.1.3. ün bir sonucu olarak bu özdeşliklerin varlığı açıkça görülebilir.

Sonuç 4.1.4. Her $n\in\mathbb{N}$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin Cassini özdeşlikleri sırasıyla, Teorem 4.1.2. ve Teorem 4.1.3. ten faydalanarak,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2\varepsilon(n)} q_{n-1}q_{n+1}-\frac{b}{a}q_n^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2\varepsilon(n)} l_{n-1}l_{n+1}-\frac{a}{b}l_n^2=(-1)^{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{1+\varepsilon(n)}(ab+4)$$

elde edilir ki bu ifadelerde gerekli düzenlemeler yapılarak Cassini özdeşlikleri bulunur. □

Matematikte üreteç fonksiyonu, verilen bir dizinin girdilerinin bilgisini katsayılarında tutan bir biçimsel kuvvet serisidir. Kullanım ve uygulama alanlarına göre çeşitli üreteç fonksiyonları vardır. Aşağıdaki teoremde bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin üreteç fonksiyonları bulunacaktır.

Teorem 4.1.5. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla, $B=a+\left(a^2+2\frac{a}{b}\right)t+at^2-2\frac{a}{b}t^3$, $C=2+at-(ab+2)t^2+at^3$,

$D=-a+2\frac{a}{b}t+(ab+3)at^2-\left(a^2+2\frac{a}{b}\right)t^3$ olmak üzere,

$$\textbf{i)}\ G(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_i t^i=\frac{1}{1-(ab+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix}1+bt-t^2 & \frac{b}{a}t+bt^2-\frac{b}{a}t^3\\ t+at^2-t^3 & 1-(ab+1)t^2+bt^3\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$\textbf{ii)}\ H(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_i t^i=\frac{1}{1-(ab+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix}B & C\\ \frac{a}{b}C & D\end{pmatrix} \tag{4.12}$$

eşitlikleri ile verilir (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. i) $G(t)$ bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$G(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_i t^i=\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_1 t+\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{F}_i t^i$$

olup

$$-btG(t)=-bt\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_i t^i=-b\mathcal{F}_0 t-b\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{F}_{i-1}t^i$$

$$-t^2G(t)=-\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{F}_{i-2}t^i$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanarak

$$(1-bt-t^2)G(t)=\mathcal{F}_0+t(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0)+\sum_{i=2}^{\infty}(\mathcal{F}_i-b\mathcal{F}_{i-1}-\mathcal{F}_{i-2})t^i$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathcal{F}_{2i+1}=b\mathcal{F}_{2i}+\mathcal{F}_{2i-1}$ olduğundan da

$$(1-bt-t^2)G(t)=\mathcal{F}_0+t(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0)+\sum_{i=1}^{\infty}(\mathcal{F}_{2i}-b\mathcal{F}_{2i-1}-\mathcal{F}_{2i-2})t^{2i}$$

olur ki, $\mathcal{F}_{2i}=a\mathcal{F}_{2i-1}+\mathcal{F}_{2i-2}$ olduğundan,

$$(1-bt-t^2)G(t)=\mathcal{F}_0+t(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0)+(a-b)t\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{2i-1}t^{2i-1} \tag{4.13}$$

bulunur. Son eşitlikte $G_1(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{F}_{2i-1}t^{2i-1}$ alalım. İndisleri tek olan bi-periyodik Fibonacci matris dizileri için

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2i-1}&=b\mathcal{F}_{2i-2}+\mathcal{F}_{2i-3}=b(a\mathcal{F}_{2i-3}+\mathcal{F}_{2i-4})+\mathcal{F}_{2i-3}\\ &=(ab+1)\mathcal{F}_{2i-3}+b\mathcal{F}_{2i-4}=(ab+1)\mathcal{F}_{2i-3}+\mathcal{F}_{2i-3}-\mathcal{F}_{2i-5}\\ &=(ab+2)\mathcal{F}_{2i-3}-\mathcal{F}_{2i-5}\end{aligned}$$

dördüncü mertebeden rekürans bağıntısı elde edilir. Buradan da

$$\left(1-\left(ab+2\right)t^2+t^4\right)G_1\left(t\right)=\mathcal{F}_1t+\mathcal{F}_3t^3-\left(ab+2\right)\mathcal{F}_1t^3$$
$$+\sum_{i=3}^{\infty}\left(\mathcal{F}_{2i-1}-\left(ab+2\right)\mathcal{F}_{2i-3}+\mathcal{F}_{2i-5}\right)t^{2i-1}$$

olur ki, son eşitlik düzenlenilerek,

$$G_1\left(t\right)=\frac{\mathcal{F}_1t+\mathcal{F}_3t^3-\left(ab+2\right)\mathcal{F}_1t^3}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}=\frac{\mathcal{F}_1t+\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)\mathcal{F}_1t^3}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$$

bulunur. Bu sonuç, (4.13) denkleminde yerine yazılarak

$$\left(1-bt-t^2\right)G\left(t\right)=\mathcal{F}_0+t\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)+(a-b)t\frac{\mathcal{F}_1t+\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)\mathcal{F}_1t^3}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$$

elde edilir, eşitlik düzenlenir ve Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine yazılırsa

$$G\left(t\right)=\frac{\mathcal{F}_0+t\mathcal{F}_1+t^2\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)+t^3\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$$
$$=\frac{1}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}\begin{pmatrix}1+bt-t^2 & \frac{b}{a}t+bt^2-\frac{b}{a}t^3\\ t+at^2-t^3 & 1-\left(ab+1\right)t^2+bt^3\end{pmatrix}$$

olur ki, böylece istenilen sonuca ulaşılmış olur.

ii) $H\left(t\right)$, bi-periyodik Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere, benzer işlemlerle

$$\left(1-bt-t^2\right)H\left(t\right)=\mathcal{L}_0+t\left(\mathcal{L}_1-b\mathcal{L}_0\right)+(a-b)t\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}_{2i}t^{2i} \qquad (4.14)$$

bulunur. Son eşitlikte $H_1\left(t\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}_{2i}t^{2i}$ alınarak,

$$\mathcal{L}_{2i}=b\mathcal{L}_{2i-1}+\mathcal{L}_{2i-2}=b\left(a\mathcal{L}_{2i-2}+\mathcal{L}_{2i-3}\right)+\mathcal{L}_{2i-2}$$
$$=\left(ab+1\right)\mathcal{L}_{2i-2}+b\mathcal{L}_{2i-3}=\left(ab+1\right)\mathcal{L}_{2i-2}+\mathcal{L}_{2i-2}-\mathcal{L}_{2i-4}$$
$$=\left(ab+2\right)\mathcal{L}_{2i-2}-\mathcal{L}_{2i-4}$$

olduğundan,

$$H_1\left(t\right)=\frac{\mathcal{L}_2t^2+\mathcal{L}_4t^4-\left(ab+2\right)\mathcal{L}_2t^4}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}=\frac{\left(\mathcal{L}_0+b\mathcal{L}_1\right)t^2-\mathcal{L}_0t^4}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$$

bulunur. Bu ifade, denklem (4.14) de yerine yazılarakta

$$H\left(t\right)=\frac{\mathcal{L}_0+t\mathcal{L}_1+t^2\left(b\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_0-ab\mathcal{L}_0\right)+t^3\left(a\mathcal{L}_0-\mathcal{L}_1\right)}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$$

elde edilir, Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır. □

(Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014), genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının üreteç fonksiyonlarını elde etmişlerdir. Burada, yukarıdaki teorem aracılığı ile, bu sayıların üreteç fonksiyonları farklı bir şekilde tekrar verilecektir.

Sonuç 4.1.6. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla, Teorem 4.1.5. ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla elde edilen matrislerin 2. satır 1. sütun elemanları ve 1. satır 2. sütun elemanları eşleştirilerek,

i) $\sum_{i=0}^{\infty} q_i t^i = \dfrac{t\left(1+at-t^2\right)}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$

ii) $\sum_{i=0}^{\infty} l_i t^i = \dfrac{2+at+\left(a^2-2ab-2\right)t^2+\left(2b-a\right)t^3}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$

olarak elde edilir (Coskun ve Taskara, 2016; 2018). □

Teorem 4.1.7. Her $n\in\mathbb{N}$ için, $\varepsilon(n)=n-2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ iken,

$$K_1=\frac{\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}_1-b\boldsymbol{\mathcal{F}}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(a\boldsymbol{\mathcal{F}}_1-\boldsymbol{\mathcal{F}}_0-ab\boldsymbol{\mathcal{F}}_0\right)^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)},\ L_1=\frac{b^{\varepsilon(n)}\boldsymbol{\mathcal{F}}_0}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}(\alpha-\beta)},$$

$$K_2=\frac{b\boldsymbol{\mathcal{L}}_1+\alpha\boldsymbol{\mathcal{L}}_0-ab\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)},\ L_2=\frac{b\boldsymbol{\mathcal{L}}_1+\beta\boldsymbol{\mathcal{L}}_0-ab\boldsymbol{\mathcal{L}}_0}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)},$$

ve α ile β ise $x^2-abx-ab=0$ denkleminin kökleri olmak üzere, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin Binet benzeri formülleri

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_n=K_1\left(\alpha^n-\beta^n\right)-L_1\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right) \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_n=K_2\alpha^n-L_2\beta^n \tag{4.16}$$

ile verilir (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. Tanım 4.1.1. den, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin karakteristik denklemleri aynı olduğu için sadece bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin Binet benzeri formülünü bulmamız yeterli olacaktır. Bunun için, üreteç fonksiyonundan faydalanılırsa:

$$G(t)=\frac{\boldsymbol{\mathcal{F}}_0+t\boldsymbol{\mathcal{F}}_1+t^2\left(a\boldsymbol{\mathcal{F}}_1-\boldsymbol{\mathcal{F}}_0-ab\boldsymbol{\mathcal{F}}_0\right)+t^3\left(b\boldsymbol{\mathcal{F}}_0-\boldsymbol{\mathcal{F}}_1\right)}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}$$

olduğu bilindiğinden, basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılarak,

$$G(t)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{t\left[\alpha\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)+b\mathcal{F}_0\right]+\alpha\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)+a\mathcal{F}_1-ab\mathcal{F}_0}{t^2-(\alpha+1)} \\ -\dfrac{t\left[\beta\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)+b\mathcal{F}_0\right]+\beta\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)+a\mathcal{F}_1-ab\mathcal{F}_0}{t^2-(\beta+1)}\end{array}\right\}$$

eşitliği yazılabilir.

Maclaurin seri açılımından faydalanılarak $\dfrac{A-Bx}{x^2-C}=\sum_{n=0}^{\infty}BC^{-n-1}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}AC^{-n-1}x^{2n}$ olduğu bilindiğinden de, üreteç fonksiyonu için

$$G(t)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)-b\mathcal{F}_0}{(\alpha+1)^{n+1}(\beta+1)^{n+1}}(\beta+1)^{n+1}t^{2n+1} \\ \quad+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)+b\mathcal{F}_0}{(\alpha+1)^{n+1}(\beta+1)^{n+1}}(\alpha+1)^{n+1}t^{2n+1} \\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)+a\mathcal{F}_1-ab\mathcal{F}_0}{(\alpha+1)^{n+1}(\beta+1)^{n+1}}(\beta+1)^{n+1}t^{2n} \\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta\left(ab\mathcal{F}_0-a\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_0\right)-a\mathcal{F}_1+ab\mathcal{F}_0}{(\alpha+1)^{n+1}(\beta+1)^{n+1}}(\alpha+1)^{n+1}t^{2n}\end{array}\right\}$$

yazılabilir. α ve β, $x^2-abx-ab=0$ denkleminin kökleri olduğundan

i. $\alpha+\beta=ab$,

ii. $\alpha\beta=-ab$,

iii. $(\alpha+1)(\beta+1)=-ab+ab+1=1$,

iv. $-\beta(\alpha+1)=ab-\beta=\alpha$,

v. $-\alpha(\beta+1)=ab-\alpha=\beta$,

vi. $\alpha+1=\dfrac{\alpha}{-\beta}=\dfrac{\alpha^2}{ab}$,

vii. $\beta+1=\dfrac{\beta}{-\alpha}=\dfrac{\beta^2}{ab}$,

olup, verilen özelliklerden faydalanılarakta

$$G(t)=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{\alpha\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)-b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\beta^{2n+2}t^{2n+1}\\ \quad+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{\beta\left(b\mathcal{F}_0-\mathcal{F}_1\right)+b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\alpha^{2n+2}t^{2n+1}\\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{\alpha\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)+a\mathcal{F}_1-ab\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\beta^{2n+2}t^{2n}\\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{\beta\left(ab\mathcal{F}_0-a\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_0\right)-a\mathcal{F}_1+ab\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\alpha^{2n+2}t^{2n}\end{array}\right\}$$

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n}\frac{\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)\left(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}\right)}{\alpha-\beta}t^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{b\mathcal{F}_0\left(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}\right)}{\alpha-\beta}t^{2n+1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n}\frac{\left(ab\mathcal{F}_0-a\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_0\right)\left(\beta^{2n}-\alpha^{2n}\right)}{\alpha-\beta}t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{\mathcal{F}_0\left(\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}\right)}{\alpha-\beta}t^{2n}$$

elde edilir ki, toplamlar birleştirilerek

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\left(\alpha^n-\beta^n\right)\\ -\dfrac{b^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_0}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}(\alpha-\beta)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right)\end{array}\right\}t^n$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, üreteç fonksiyonunun tanımından faydalanılarak

$$\mathcal{F}_n=\frac{\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\left(\alpha^n-\beta^n\right)-\frac{b^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_0}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}(\alpha-\beta)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right)$$

olur ki, böylece Binet formülü elde edilmiş olur. □

Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet benzeri formülleri çeşitli çalışmalarda verilmiştir (Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014). Aşağıdaki sonuçta da matris dizilerinin doğal bir sonucu olarak bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet benzeri formülleri verilir.

Sonuç 4.1.8. $n\geq 0$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet benzeri formülleri, sırasıyla

$$q_n=\left(\frac{a^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$l_n = \frac{a^{\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}}\left(\alpha^n + \beta^n\right)$$

ile verilir (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. Tanım 4.1.1. ve Teorem 4.1.7. nin yardımıyla,

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n}{2}}(\alpha-\beta)}\left\{a\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 - \boldsymbol{\mathcal{F}}_0 - ab\boldsymbol{\mathcal{F}}_0\right\} - \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}(\alpha-\beta)}\boldsymbol{\mathcal{F}}_0, n \text{ çift} \\ \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}(\alpha-\beta)}\left\{\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 - b\boldsymbol{\mathcal{F}}_0\right\} - \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}(\alpha-\beta)}b\boldsymbol{\mathcal{F}}_0, n \text{ tek} \end{cases}$$

olur ki başlangıç değerleri yerine yazılarak

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n}{2}}(\alpha-\beta)}\left\{a\begin{pmatrix} b & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ab\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} - \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \text{ çift} \\ \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}(\alpha-\beta)}\left\{\begin{pmatrix} b & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\} - \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, n \text{ tek} \end{cases}$$

bulunur. Burada α ve β, $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri olduğundan bu denklemi sağlarlar ve Teorem 4.1.2. den de

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n+1} & \frac{b}{a}q_n \\ q_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n}{2}}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} -1 & b \\ a & -ab-1 \end{pmatrix} - \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \text{ çift} \\ \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ 1 & -b \end{pmatrix} - \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, n \text{ tek} \end{cases}$$

olur. Burada matrislerin 2. satır 1. sütun elemanları eşleştirilirse,

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{a\left(\alpha^n - \beta^n\right)}{(ab)^{\frac{n}{2}}(\alpha-\beta)}, n \text{ çift} \\ \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}(\alpha-\beta)}, n \text{ tek} \end{cases}$$

bulunur. Böylece, bi-periyodik Fibonacci sayılarının Binet benzeri formülü

$$q_n = \left(\frac{a^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Tanım 4.1.1. ve Teorem 4.1.7. göz önüne alınarak, Teorem 4.1.2. den de,

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{n+1} & l_n \\ \frac{a}{b} l_n & \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)} \begin{pmatrix} 2a+\alpha a & 2\alpha-ab \\ \frac{2a}{b}\alpha - a^2 & 2a-a\alpha+a^2 b \end{pmatrix}$$

$$- \frac{\beta^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)} \begin{pmatrix} 2a+a\beta & 2\beta-ab \\ \frac{2a}{b}\beta - a^2 & 2a-a\beta+a^2 b \end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 1. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse,

$$l_n = \frac{\alpha^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)}(2\alpha-ab) - \frac{\beta^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)}(2\beta-ab)$$

bulunur. α ve β, $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri olduğundan bu denklemi sağlayıp, $\alpha+\beta = ab$ özelliğinden faydalanılarak

$$l_n = \frac{\alpha^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta) + \frac{\beta^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta)$$

elde edilir. Böylece, bi-periyodik Lucas sayılarının Binet benzeri formülü

$$l_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\alpha-\beta)} = \frac{a^{\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}}(\alpha^n + \beta^n)$$

olur. □

Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin genel toplamlarını veren formüller aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 4.1.9. $n \geq 1$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin genel toplamları, sırasıyla

i) $$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}_k = \frac{a^{\varepsilon(n)} b^{1-\varepsilon(n)} \mathcal{F}_n + a^{1-\varepsilon(n)} b^{\varepsilon(n)} \mathcal{F}_{n-1} - a\mathcal{F}_1 + ab\mathcal{F}_0 - b\mathcal{F}_0}{ab}$$

ii) $$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_k = \frac{a^{1-\varepsilon(n)} b^{\varepsilon(n)} \mathcal{L}_n + a^{\varepsilon(n)} b^{1-\varepsilon(n)} \mathcal{L}_{n-1} - b\mathcal{L}_1 + ab\mathcal{L}_0 - a\mathcal{L}_0}{ab}$$

dır (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. İspat yaparken Teorem 4.1.7. den, başka bir deyişle matris dizilerinin Binet benzeri formüllerinden yararlanılacaktır.

i) Teorem 4.1.7. ten,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(k)}\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\left(\alpha^k-\beta^k\right)\\ -\dfrac{b^{\varepsilon(k)}\mathcal{F}_0}{(ab)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1}(\alpha-\beta)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+2}-\beta^{2\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+2}\right)\end{array}\right\}$$

yazılabilir. Burada *n* sayısının tek ve çift olma durumu göz önüne alınarak ispat yapılacaktır. Öncelikle *n* sayısının çift olma durumu göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\mathcal{F}_{2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\mathcal{F}_{2k+1}$$

olup,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\frac{a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\alpha^2}{ab}-1}-\frac{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\beta^2}{ab}-1}\right)+\frac{\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\frac{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\alpha^2}{ab}-1}-\frac{\beta^2}{ab}\frac{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\beta^2}{ab}-1}\right)$$

$$+\frac{\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\alpha\frac{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\alpha^2}{ab}-1}-\beta\frac{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\beta^2}{ab}-1}\right)+\frac{b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\frac{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\alpha^2}{ab}-1}-\frac{\beta^2}{ab}\frac{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}-1}{\frac{\beta^2}{ab}-1}\right)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\frac{a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0}{(\alpha-\beta)(ab)^{\frac{n}{2}-1}(\alpha^2-ab)(\beta^2-ab)}\left\{\begin{array}{c}\alpha^n\beta^2-ab\alpha^n-\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}}+(ab)^{\frac{n}{2}+1}-\beta^n\alpha^2\\+ab\beta^n+\alpha^2(ab)^{\frac{n}{2}}-(ab)^{\frac{n}{2}+1}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\mathcal{F}_0}{(\alpha-\beta)(ab)^{\frac{n}{2}}(\alpha^2-ab)(\beta^2-ab)}\left\{\begin{array}{c}\alpha^n\alpha^2\beta^2-ab\alpha^{n+2}-\alpha^2\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}}\\+\alpha^2(ab)^{\frac{n}{2}+1}-\beta^n\alpha^2\beta^2+ab\beta^{n+2}\\+\alpha^2\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}}-\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}+1}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0}{(\alpha-\beta)(ab)^{\frac{n}{2}-1}(\alpha^2-ab)(\beta^2-ab)}\left\{\begin{array}{c}\alpha^{n-1}\alpha^2\beta^2-ab\alpha^{n+1}-\alpha\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}}\\+\alpha(ab)^{\frac{n}{2}+1}-\beta^{n-1}\alpha^2\beta^2+ab\beta^{n+1}\\+\alpha^2\beta(ab)^{\frac{n}{2}}-\beta(ab)^{\frac{n}{2}+1}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{b\mathcal{F}_0}{(\alpha-\beta)(ab)^{\frac{n}{2}}(\alpha^2-ab)(\beta^2-ab)}\left\{\begin{array}{c}\alpha^n\alpha^2\beta^2-ab\alpha^{n+2}-\alpha^2\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}}\\+\alpha^2(ab)^{\frac{n}{2}+1}-\beta^n\alpha^2\beta^2+ab\beta^{n+2}\\+\alpha^2\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}}-\beta^2(ab)^{\frac{n}{2}+1}\end{array}\right\}$$

elde edilir ki,

$$(\alpha^2-ab)(\beta^2-ab)=\alpha^2\beta^2-ab(\alpha^2+\beta^2)+a^2b^2=a^2b^2-ab(a^2b^2+2ab)+a^2b^2=-a^3b^3$$

olduğundan faydalanılarakta

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\frac{\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{-\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}}{(ab)^{\frac{n}{2}}}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}\right)+\frac{\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{-\alpha^n+\beta^n}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}+\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{(ab)^{\frac{n}{2}+2}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2b^2}\right)$$

$$+\frac{a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{-\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}}{(ab)^{\frac{n}{2}}}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2b^2}\right)$$

$$+\frac{b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{-\alpha^n+\beta^n}{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}+\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{(ab)^{\frac{n}{2}+2}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2b^2}\right)$$

olur. Ayrıca, bi- periyodik Fibonacci matris dizilerinin Binet benzeri formülünden yararlanarak

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=-\frac{\mathcal{F}_{n-2}}{ab}+\frac{\mathcal{F}_n}{ab}-\frac{a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0}{ab}-\frac{\mathcal{F}_0}{ab}-\frac{\mathcal{F}_{n-1}}{ab}+\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{ab}-\frac{b\mathcal{F}_0}{ab}$$

$$=\frac{b\mathcal{F}_n+a\mathcal{F}_{n-1}-a\mathcal{F}_1+ab\mathcal{F}_0-b\mathcal{F}_0}{ab}$$

bulunur. *n* sayısının tek olma durumu incelenildiğinde de

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{F}_{2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}\mathcal{F}_{2k+1}$$

olup, benzer işlemlerle

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\frac{a\mathcal{F}_n+b\mathcal{F}_{n-1}-a\mathcal{F}_1+ab\mathcal{F}_0-b\mathcal{F}_0}{ab}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla *n* sayısının çift veya tek olma durumu birleştirilerek, her *n* sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k=\frac{a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}\mathcal{F}_n+a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{n-1}-a\mathcal{F}_1+ab\mathcal{F}_0-b\mathcal{F}_0}{ab}$$

elde edilir.

ii) Yine Teorem 4.1.7. ten,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{b\mathcal{L}_1+\alpha\mathcal{L}_0-ab\mathcal{L}_0}{b^{\varepsilon(k)}(ab)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\alpha^k-\frac{b\mathcal{L}_1+\beta\mathcal{L}_0-ab\mathcal{L}_0}{b^{\varepsilon(k)}(ab)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\beta^k\right\}$$

yazılabilir, *n* sayısının çift ve tek olma durumlarına göre inceleme yapılarak, paydalar eşitlenip gerekli düzenleme işlemleri ile

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k=\begin{cases}\dfrac{a\mathcal{L}_n+b\mathcal{L}_{n-1}-b\mathcal{L}_1+ab\mathcal{L}_0-a\mathcal{L}_0}{ab}, n \text{ çift}\\ \dfrac{b\mathcal{L}_n+a\mathcal{L}_{n-1}-b\mathcal{L}_1+ab\mathcal{L}_0-a\mathcal{L}_0}{ab}, n \text{ tek}\end{cases}$$

elde edilir. □

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, matris dizilerinden faydalanılarak, kolayca normal dizilere ait özellikler elde edilebilir.

Sonuç 4.1.10. $n\geq 1$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının toplam formülleri Teorem 4.1.9. ve Teorem 4.1.2 nin yardımıyla elde edilen matrislerin 2. satır 1. sütun elemanları eşleştirilirse, bi-periyodik Fibonacci sayılarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n-1}q_k=\frac{a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}q_n+a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}q_{n-1}-a}{ab}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 4.1.9. ve Teorem 4.1.2. göz önüne alınarak buradaki matrislerin 1. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, bi-periyodik Lucas sayılarının toplam formülü

$$\sum_{k=0}^{n-1}l_k=\frac{a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}l_n+a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}l_{n-1}+ab-2a}{ab}$$

bulunur (Coskun ve Taskara, 2016; 2018). □

Teorem 4.1.11. $n \geq 1$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin toplamları ile ilgili olarak

i) $$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k t^{-k} = \frac{1}{t^4 - t^2(ab+2)+1} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{F}_{n-1} t^{1-n} - \mathcal{F}_{n+1} t^{3-n} + \mathcal{F}_n t^{-n} - \mathcal{F}_{n+2} t^{2-n} + \mathcal{F}_0 t^4 + \mathcal{F}_1 t^3 \\ + t^2 \left(a\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 - ab\mathcal{F}_0 \right) - t\left(\mathcal{F}_1 - b\mathcal{F}_0 \right) \end{array} \right\}$$

ii) $$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k} = \frac{1}{t^4 - t^2(ab+2)+1} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{L}_{n-1} t^{1-n} - \mathcal{L}_{n+1} t^{3-n} + \mathcal{L}_n t^{-n} - \mathcal{L}_{n+2} t^{2-n} + t^4 \mathcal{L}_0 + t^3 \mathcal{L}_1 \\ + t^2 \left(b\mathcal{L}_1 - ab\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0 \right) - t\left(\mathcal{L}_1 - a\mathcal{L}_0 \right) \end{array} \right\}$$

ifadeleri doğrudur (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

İspat. İspat yaparken Teorem 4.1.7. den, başka bir deyişle matris dizilerinin Binet benzeri formüllerinden yararlanılacaktır.

i) Teorem 4.1.7. ten,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{F}_k t^{-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\left(\mathcal{F}_1 - b\mathcal{F}_0 \right)^{\varepsilon(k)} \left(a\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 - ab\mathcal{F}_0 \right)^{1-\varepsilon(k)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} (\alpha - \beta)} \left(\alpha^k - \beta^k \right) \\ - \frac{b^{\varepsilon(k)} \mathcal{F}_0}{(ab)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1} (\alpha - \beta)} \left(\alpha^{2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2} - \beta^{2\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2} \right) \end{array} \right\} t^{-k}$$

yazılabilir. Burada *n* sayısının tek ve çift olma durumunu göz önüne alarak ispat yapılacaktır. Öncelikle *n* sayısının tek olma durumu göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k t^{-k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_{2k} t^{-2k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_{2k+1} t^{-2k-1}$$

olup,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k t^{-k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{a\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 - ab\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^{2k} - \beta^{2k}}{\left(abt^2 \right)^k} \right) - \frac{\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^{2k+2} - \beta^{2k+2}}{(ab)^{k+1} t^{2k}} \right) \right\}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{\mathcal{F}_1 - b\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{\left(abt^2 \right)^k} \right) t^{-1} - \frac{b\mathcal{F}_0}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha^{2k+2} - \beta^{2k+2}}{(ab)^{k+1} t^{2k}} \right) t^{-1} \right\}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k}=\frac{a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{a^2b^2\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)-abt^2\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)+(ab)^{\frac{n+1}{2}}t^{n+1}\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}t^{n-1}\left(\alpha^2-ab\right)\left(\beta^2-ab\right)}\right)$$

$$+\frac{\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{a^2b^2\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-abt^2\left(\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}\right)+(ab)^{\frac{n+3}{2}}t^{n+3}\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}t^{n-1}\left(\alpha^2-ab\right)\left(\beta^2-ab\right)}\right)$$

$$+\frac{\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{\left\{\begin{array}{c}a^2b^2\left(\alpha^{n}-\beta^{n}\right)-abt^2\left(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}\right)-(ab)^{\frac{n+1}{2}}t^{n+1}\left(\alpha\beta^2-\beta\alpha^2\right)\\+(ab)^{\frac{n+3}{2}}t^{n+3}\left(\alpha-\beta\right)\end{array}\right\}}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}t^{n-1}\left(\alpha^2-ab\right)\left(\beta^2-ab\right)}\right)$$

$$+\frac{b\mathcal{F}_0}{\alpha-\beta}\left(\frac{a^2b^2\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)-abt^2\left(\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}\right)+(ab)^{\frac{n+3}{2}}t^{n+3}\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}t^{n-1}\left(\alpha^2-ab\right)\left(\beta^2-ab\right)}\right)$$

olup,

$$\left(\alpha^2-abt^2\right)\left(\beta^2-abt^2\right)=\alpha^2\beta^2-abt^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)+a^2b^2t^4=a^2b^2\left(t^4-t^2\left(ab+2\right)+1\right)$$

olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k}=\frac{a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0}{\left(\alpha-\beta\right)\left(t^4-t^2\left(ab+2\right)+1\right)}\left(\frac{\alpha^{n-1}\beta^{n-1}}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}t^{1-n}-\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}t^{3-n}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{ab}t^2\right)$$

$$+\frac{\mathcal{F}_0}{\left(\alpha-\beta\right)\left(t^4-t^2\left(ab+2\right)+1\right)}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}t^{1-n}-\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{(ab)^{\frac{n+3}{2}}}t^{3-n}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{a^2b^2}t^4\right)$$

$$+\frac{\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0}{\left(\alpha-\beta\right)\left(t^4-t^2\left(ab+2\right)+1\right)}\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}t^{-n}-\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}t^{2-n}-\left(\alpha-\beta\right)t+\left(\alpha-\beta\right)t^3\right)$$

$$+\frac{b\mathcal{F}_0}{\left(\alpha-\beta\right)\left(t^4-t^2\left(ab+2\right)+1\right)}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}t^{-n}-\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{(ab)^{\frac{n+3}{2}}}t^{2-n}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{ab}t^3\right)$$

olur. Genelleştirilmiş matris dizisinin Binet benzeri formülünden de

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k}=\frac{1}{t^4-t^2\left(ab+2\right)+1}\left\{\begin{array}{c}\mathcal{F}_{n-1}t^{1-n}-\mathcal{F}_{n+1}t^{3-n}+\mathcal{F}_n t^{-n}-\mathcal{F}_{n+2}t^{2-n}+\mathcal{F}_0 t^4+\mathcal{F}_1 t^3\\+t^2\left(a\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_0-ab\mathcal{F}_0\right)-t\left(\mathcal{F}_1-b\mathcal{F}_0\right)\end{array}\right\}$$

bulunur. *n* sayısının çift olma durumu incelenildiğinde de

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k}=\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\mathcal{F}_{2k}t^{-2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\mathcal{F}_{2k+1}t^{-2k-1}$$

olacağından, aynı sonuca ulaşılır. Dolayısıyla n sayısının çift veya tek olma durumuna göre değişmeksizin, istenilen sonuç elde edilir.

ii) Teorem 4.1.7. den faydalanarak,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_k t^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{b\mathcal{L}_1+\alpha\mathcal{L}_0-ab\mathcal{L}_0}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\alpha^n-\frac{b\mathcal{L}_1+\beta\mathcal{L}_0-ab\mathcal{L}_0}{b^{\varepsilon(n)}(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)}\beta^n\right\}t^{-k}$$

yazılabilir, Yine n sayısının çift ve tek olma durumlarına göre inceleme yapılarak, paydalar eşitlenip gerekli düzenleme işlemleri ile

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_k t^{-k}=\frac{1}{t^4-t^2(ab+2)+1}\left\{\begin{array}{c}\mathcal{L}_{n-1}t^{1-n}-\mathcal{L}_{n+1}t^{3-n}+\mathcal{L}_n t^{-n}-\mathcal{L}_{n+2}t^{2-n}+t^4\mathcal{L}_0+t^3\mathcal{L}_1\\+t^2(b\mathcal{L}_1-ab\mathcal{L}_0-\mathcal{L}_0)-t(\mathcal{L}_1-a\mathcal{L}_0)\end{array}\right\}$$

elde edilir. □

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, matris dizilerinden faydalanılarak, sayı dizilerine ait özellikler elde edilebilir.

Sonuç 4.1.12. $n\geq 0$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının toplam formülleri, Teorem 4.1.11. ve Teorem 4.1.2. nin yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{n}q_k t^{-k}=\frac{q_{n-1}t^{1-n}-q_{n+1}t^{3-n}+q_n t^{-n}-q_{n+2}t^{2-n}+t^3+at^2-t}{t^4-t^2(ab+2)+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}l_k t^{-k}=\frac{l_{n-1}t^{1-n}-l_{n+1}t^{3-n}+l_n t^{-n}-l_{n+2}t^{2-n}+2t^4+at^3-t^2(ab+2)+at}{t^4-t^2(ab+2)+1}$$

bulunur (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

Verilen toplam formüllerinde n sonsuza giderken limit alınarak aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.1.13. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin ve sayı dizilerinin sonsuz toplamları ile ilgili olarak

i) $$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k t^{-k}=\frac{t}{t^4-t^2(ab+2)+1}\left\{t^3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}b&\frac{b}{a}\\1&0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&b\\a&-1-ab\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}\\1&-b\end{pmatrix}\right\}$$

ii) $$\sum_{k=0}^{\infty}q_k t^{-k}=\frac{t^3+at^2-t}{t^4-t^2(ab+2)+1}$$

iii) $$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}_k t^{-k}=\frac{t}{t^4-t^2\left(ab+2\right)+1}\left\{\begin{pmatrix} a & 2 \\ \frac{2a}{b} & -a \end{pmatrix}t^3+\begin{pmatrix} \frac{a^2b+2a}{b} & a \\ \frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b} \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} a & -ab-2 \\ -a^2-\frac{2a}{b} & 3a+a^2b \end{pmatrix}t-\begin{pmatrix} \frac{2a}{b} & -a \\ -\frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b}+a^2 \end{pmatrix}\right\}$$

iv) $$\sum_{k=0}^{\infty}l_k t^{-k}=\frac{2t^4+at^3-t^2\left(ab+2\right)+at}{t^4-t^2\left(ab+2\right)+1}$$

eşitlikleri sağlanır (Coskun ve Taskara, 2016; 2018).

4.1.1. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizisinin üreteç matrisi

Bu alt başlıkta, daha önce bi-periyodik Lucas matris dizisinin başlangıç şartı olarak verilen $\mathcal{L}_1$ matrisinden faydalanılarak, genelleştirilmiş sayı dizilerinin özellikleri incelenecektir. Bunun için, Companion(eş) matris olarak da bilinen matrisi tanıtalım.

Tanım 4.1.1.1. Bi-periyodik Lucas matris dizisinin başlangıç değerlerinden biri olan

$$Q_l=\begin{pmatrix} \frac{a^2b+2a}{b} & a \\ \frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

matrisine, bi-periyodik Lucas sayı dizisinin *Companion (eş) matrisi* adı verilir.

Bu matristen faydalanılarak, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin özellikleri elde edilebileceğinden, Q_l matrisine *bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin üreteç matrisi* adı da verilir (Coskun ve Taskara, 2017).

Aşağıdaki teoremde, Companion matrisinin n inci kuvveti, genelleştirilmiş sayı dizileri yardımıyla verilmektedir.

Teorem 4.1.1.2. q_n, n inci bi-periyodik Fibonacci sayısı ve l_n, n inci bi-periyodik Lucas sayısını göstermek üzere, $n\geq 1$ için

$$Q_l^n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^n (ab+4)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} q_{n+1} & \frac{b}{a}q_n \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}, n \text{ çift} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n (ab+4)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} l_{n+1} & \frac{b}{a}l_n \\ l_n & l_{n-1} \end{pmatrix}, n \text{ tek} \end{cases} \tag{4.18}$$

ile verilir (Coskun ve Taskara, 2017).

İspat. n üzerinden tümevarımla ispat yapalım. $n=1$ ve $n=2$ için,

$$Q_l = \begin{pmatrix} \frac{a^2b+2a}{b} & a \\ \frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{b}\right)^1 (ab+4)^0 \begin{pmatrix} l_2 & \frac{b}{a}l_1 \\ l_1 & l_0 \end{pmatrix},$$

$$Q_l^2 = \begin{pmatrix} \frac{a^4b^2+5a^3b+4a^2}{b^2} & \frac{a^4b+4a^3}{b^2} \\ \frac{a^3b+4a^2}{b} & \frac{a^3b+4a^2}{b^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 (ab+4)^1 \begin{pmatrix} q_3 & \frac{b}{a}q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

olup, ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur. Şimdi de her $n=k\in\mathbb{N}$ sayısı için teoremin doğru olduğu varsayılarak $(k+1)\in\mathbb{N}$ sayısı için, teoremin doğru olduğu gösterilmelidir. Bunun için k doğal sayısının tek ve çift olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmelidir.

Her $n=k\in\mathbb{N}$ çift doğal sayısı için,

$$Q_l^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k (ab+4)^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} q_{k+1} & \frac{b}{a}q_k \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğu kabul edilerek $(k+2)\in\mathbb{N}$ sayısı için de teoremin doğruluğu gösterilmelidir. Bunun için $Q_l^{k+2} = Q_l^k Q_l^2$ özdeşliğinden faydalanarak,

$$Q_l^{k+2} = \left(\frac{a}{b}\right)^k (ab+4)^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} q_{k+1} & \frac{b}{a}q_k \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^2 (ab+4)^1 \begin{pmatrix} q_3 & \frac{b}{a}q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{k+2} (ab+4)^{\frac{k}{2}+1} \begin{pmatrix} q_{k+1}q_3 + \frac{b}{a}q_kq_2 & \frac{b}{a}q_{k+1}q_2 + \frac{b}{a}q_kq_1 \\ q_kq_3 + q_{k-1}q_2 & \frac{b}{a}q_kq_2 + q_{k-1}q_1 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Ayrıca, bi- periyodik Fibonacci sayı dizisi için $q_3 = ab+1, q_2 = a$ ve $q_1 = 1$ olduğundan faydalanılarak

$$q_{k+1}q_3+\frac{b}{a}q_kq_2=q_{k+1}(ab+1)+bq_k=b(aq_{k+1}+q_k)+q_{k+1}=bq_{k+2}+q_{k+1}=q_{k+3}$$

$$q_{k+1}q_2+q_kq_1=aq_{k+1}+q_k=q_{k+2}$$

$$\frac{b}{a}q_k(ab+1)+bq_{k-1}=b\left(bq_k+q_{k-1}\right)+\frac{b}{a}q_k=\frac{b}{a}\left(aq_{k+1}+q_k\right)=\frac{b}{a}q_{k+2}$$

$$\frac{b}{a}q_kq_2+q_{k-1}q_1=bq_k+q_{k-1}=q_{k+1}$$

elde edildiğinden, bu eşitlikler yerlerine yazılarak

$$Q_l^{k+2}=\left(\frac{a}{b}\right)^{k+2}\left(ab+4\right)^{\frac{k+2}{2}}\begin{pmatrix}q_{k+3} & \frac{b}{a}q_{k+2}\\ q_{k+2} & q_{k+1}\end{pmatrix}$$

olur ki her $k\in\mathbb{N}$ çift doğal sayısı için doğruluğu görülür.

Şimdi, her $n=k\in\mathbb{N}$ tek doğal sayısı için,

$$Q_l^{k}=\left(\frac{a}{b}\right)^{k}\left(ab+4\right)^{\frac{k-1}{2}}\begin{pmatrix}l_{k+1} & \frac{b}{a}l_k\\ l_k & l_{k-1}\end{pmatrix}$$

olduğunu kabul ederek, $(k+2)\in\mathbb{N}$ sayısı için de teoremin doğruluğunu gösterelim. Bunun için $Q_l^{k+2}=Q_l^kQ_l^2$ özdeşliğinden faydalanarak,

$$Q_l^{k+2}=\left(\frac{a}{b}\right)^{k}\left(ab+4\right)^{\frac{k-1}{2}}\begin{pmatrix}l_{k+1} & \frac{b}{a}l_k\\ l_k & l_{k-1}\end{pmatrix}\left(\frac{a}{b}\right)^{2}\left(ab+4\right)^{1}\begin{pmatrix}q_3 & \frac{b}{a}q_2\\ q_2 & q_1\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{k+2}\left(ab+4\right)^{\frac{k+1}{2}}\begin{pmatrix}l_{k+1}q_3+\frac{b}{a}l_kq_2 & \frac{b}{a}l_{k+1}q_2+\frac{b}{a}l_kq_1\\ l_kq_3+l_{k-1}q_2 & \frac{b}{a}l_kq_2+l_{k-1}q_1\end{pmatrix}$$

elde edilir. Bi- periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için

$$l_{k+1}q_3+\frac{b}{a}l_kq_2=l_{k+1}\left(ab+1\right)+bl_k=b\left(al_{k+1}+l_k\right)+l_{k+1}=bl_{k+2}+l_{k+1}=l_{k+3}$$

$$al_{k+1}+l_k=l_{k+2}$$

$$\frac{b}{a}l_k\left(ab+1\right)+bl_{k-1}=\frac{b}{a}\left(a\left(bl_k+l_{k-1}\right)+l_k\right)=\frac{b}{a}\left(al_{k+1}+l_k\right)=\frac{b}{a}l_{k+2}$$

$$\frac{b}{a}l_kq_2+l_{k-1}q_1=bl_k+l_{k-1}=l_{k+1}$$

eşitlikleri yazılabildiğinden,

$$Q_l^{k+2}=\left(\frac{a}{b}\right)^{k+2}(ab+4)^{\frac{k+2}{2}}\begin{pmatrix} l_{k+3} & \frac{b}{a}l_{k+2} \\ l_{k+2} & l_{k+1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.1.1.3. $n\geq 1$ için, (4.18) denklemi ile verilen üreteç matrisinin determinantı

$$\det\left(Q_l^n\right)=\left(\frac{a^2}{b^2}(ab+4)\right)^n$$

eşitliğini sağlar (Coskun ve Taskara, 2017).

İspat. Teorem 4.1.1.2 ve bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin Cassini özdeşlikleri kullanılarak, tümevarımla kolayca görülür. □

Genelleştirilmiş sayı dizilerinin Binet formülleri, önceki çalışmalarda (Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014) verilmiştir. Aşağıdaki teoremde ise, (4.17) ile verilen eş matristen yararlanarak, yeni bir bakış açısıyla tekrar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1.4. α ve β, $x^2-abx-ab=0$ denkleminin kökleri olmak üzere, genelleştirilmiş sayı dizilerinin Binet formülleri,

$$q_n=\left(\frac{a^{1-\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$l_n=\frac{a^{\varepsilon(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\left(\alpha^n+\beta^n\right)$$

eşitlikleri ile verilir (Coskun ve Taskara, 2017).

İspat. Q_l matrisinin karakteristik denklemi

$$\left(\lambda-a^2-2\frac{a}{b}\right)\left(\lambda-2\frac{a}{b}\right)-\frac{a^3}{b}=0$$

olup, özdeğerleri

$$\lambda_1=\frac{a^2+4\frac{a}{b}+\sqrt{a^4+4\frac{a^3}{b}}}{2}=\frac{a}{b}(ab+4)^{1/2}\frac{\alpha}{(ab)^{1/2}},$$

$$\lambda_2=\frac{a^2+4\frac{a}{b}-\sqrt{a^4+4\frac{a^3}{b}}}{2}=\frac{a}{b}(ab+4)^{1/2}\frac{-\beta}{(ab)^{1/2}}$$

olarak elde edilir ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $u_1=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}^T$ ve $u_2=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}^T$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix}\lambda_1-a^2-2\frac{a}{b} & -\frac{a^2}{b}\\ -a & \lambda_1-2\frac{a}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=0,\quad \begin{pmatrix}\lambda_2-a^2-2\frac{a}{b} & -\frac{a^2}{b}\\ -a & \lambda_2-2\frac{a}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}=0$$

olacağından,

$$a_1=\frac{a^2}{b},\ a_2=\frac{a}{b}(-\beta),\qquad b_1=\frac{a^2}{b},\ b_2=\frac{a}{b}(-\alpha)$$

elde edilir. Ayrıca, $U=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}$ ve $V=diag(\lambda_1,\lambda_2)$ olmak üzere, Q_l-üreteç matrisi $V=U^{-1}Q_lU$ eşitliğinden faydalanılarak köşegenleştirilebilir. Benzer matrislerin özelliklerinden de $Q_l^n=UV^nU^{-1}$ yazılabilir. Böylece

$$U=\begin{pmatrix}\frac{a^2}{b} & \frac{a^2}{b}\\ \frac{a}{b}(-\beta) & \frac{a}{b}(-\alpha)\end{pmatrix},\quad U^{-1}=\frac{b}{a(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{a} & 1\\ \frac{-\beta}{a} & -1\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Q_l^n=\frac{a^{\frac{n}{2}}(ab+4)^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{3n}{2}}(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix}\alpha^{n+1}-(-\beta)^n\beta & a\alpha^n-a(-\beta)^n\\ b\alpha^n-b(-\beta)^n & -\beta\alpha^n+\alpha(-\beta)^n\end{pmatrix}$$

olup, $\alpha-\beta=\sqrt{ab}\sqrt{ab+4}$ olduğundan

$$Q_l^n=\frac{a^{\frac{n-1}{2}}(ab+4)^{\frac{n-1}{2}}}{b^{\frac{3n+1}{2}}}\begin{pmatrix}\alpha^{n+1}-(-\beta)^n\beta & a\alpha^n-a(-\beta)^n\\ b\alpha^n-b(-\beta)^n & -\beta\alpha^n+\alpha(-\beta)^n\end{pmatrix}$$

elde edilir. Teorem 4.1.1.2. dikkate alınarak, *n* çift iken

$$q_n=\frac{a}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n}{2}}}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ve *n* tek iken,

$$l_n=\frac{a}{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}(\alpha^n+\beta^n)=\frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}}(\alpha^n+\beta^n)$$

yazılabilir. Ayrıca, bi-periyodik Fibonacci sayıları için (3.1) rekürans bağıntısından faydalanılarak da

$$q_{2n+1}=\frac{1}{(ab)^n}\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}$$

ve bi-periyodik Lucas sayıları için (3.7) rekürans bağıntısından faydalanılarak da

$$l_{2n}=\frac{1}{(ab)^n}\left(\alpha^{2n}+\beta^{2n}\right)$$

elde edilir ki istenilen ifadeler bulunmuş olur. □

Aşağıdaki teoremde, genelleştirilmiş sayı dizileri arasındaki bağıntılar bulunmuştur. Bu teoremde verilen ii) ve iii) şartları, daha önce (Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014) çalışmalarında verilen özelliklerin özel durumlarıdır. Burada ise, Companion(eş) matristen faydalanılarak bu özelliklere ek olarak, yeni özellikler elde edilir.

Teorem 4.1.1.5. Her $m,n\in\mathbb{Z}^+$ için, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $(ab+4)q_{2(m+n+1)}=l_{2m+1}l_{2(n+1)}+l_{2m}l_{2n+1}$,

ii) $q_{2(m+n)}=q_{2m}q_{2n+1}+q_{2m-1}q_{2n}$,

iii) $l_{2(m+n)+1}=l_{2m+1}q_{2n+1}+l_{2m}q_{2n}$,

iv) $(ab+4)q_{2(m-n)}=l_{2m+1}l_{2(n+1)}-l_{2(m+1)}l_{2n+1}$,

v) $q_{2(m-n)}=q_{2m}q_{2n+1}-q_{2m+1}q_{2n}$,

vi) $l_{2(m-n)+1}=q_{2m+1}l_{2n+1}-q_{2(m+1)}l_{2n}$

(Coskun ve Taskara, 2017).

İspat. i) Teorem 4.1.1.2 den,

$$Q_l^{m+n}=\begin{cases}\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}(ab+4)^{\frac{m+n}{2}}\begin{pmatrix}q_{m+n+1} & q_{m+n}\\ \frac{b}{a}q_{m+n} & q_{m+n-1}\end{pmatrix}, m+n \text{ çift}\\ \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}(ab+4)^{\frac{m+n-1}{2}}\begin{pmatrix}l_{m+n+1} & l_{m+n}\\ \frac{b}{a}l_{m+n} & l_{m+n-1}\end{pmatrix}, m+n \text{ tek}\end{cases} \tag{4.19}$$

yazılabilir. *m* ve *n* sayılarının tek olması durumunda,

$$Q_l^m Q_l^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}(ab+4)^{\frac{m+n}{2}-1}\begin{pmatrix}l_{m+1}l_{n+1}+\frac{b}{a}l_m l_n & l_{m+1}l_n+l_m l_{n-1}\\ \frac{b}{a}\{l_m l_{n+1}+l_{m-1}l_n\} & \frac{b}{a}l_m l_n+l_{m-1}l_{n-1}\end{pmatrix} \tag{4.20}$$

elde edilir.

(4.19) ve (4.20) denklemlerindeki matrislerin 2. satır ve 1. sütun elemanlarının eşitliğinden

$$(ab+4)q_{m+n} = l_m l_{n+1} + l_{m-1} l_n$$

bulunur. Ayrıca 1. satır ve 2. sütun elemanlarından

$$(ab+4)q_{m+n} = l_{m+1} l_n + l_m l_{n-1}$$

yazılabilir ki bu istenilendir.

ii) *m* ve *n* sayılarının çift olması durumunda,

$$Q_l^m Q_l^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} (ab+4)^{\frac{m+n}{2}} \begin{pmatrix} q_{m+1}q_{n+1} + \frac{b}{a} q_m q_n & q_{m+1}q_n + q_m q_{n-1} \\ \frac{b}{a}\{q_m q_{n+1} + q_{m-1} q_n\} & \frac{b}{a} q_m q_n + q_{m-1} q_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Böylece, (4.19) ve (4.21) denklemlerindeki matrislerin 2. satır ve 1. sütun elemanları kıyaslanarak

$$q_{m+n} = q_{m+1}q_n + q_m q_{n-1}$$

elde edilir. Ayrıca 1. satır ve 2. sütun elemanları kıyaslanarak da

$$q_{m+n} = q_m q_{n+1} + q_{m-1} q_n$$

yazılabilir.

iii) i) ve ii) kısımlarında olduğu gibi, bu kısımda da *m* çift ve *n* tek (veya *m* tek ve *n* çift) iken inceleme yapılarak istenilen ifadeye ulaşılır.

iv), v) ve vi) ifadelerinde de *m* ve *n* in durumlarına göre değerlendirme yapılacağından, yalnızca iv) için ispat yapmak yeterli olacaktır. Aslında, *m* ve *n* tek iken iv), *m* ve *n* çift iken v), *m* ve *n* den biri tek ve diğeri çift iken de vi) durumları elde edilir.

iv) Teorem 4.1.1.2 deki Q_l^n matrisinin tersi

$$Q_l^{-n} = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} (ab+4)^{-\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} q_{n-1} & -q_n \\ -\frac{b}{a} q_n & q_{n+1} \end{pmatrix}, n \text{ çift} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} (ab+4)^{-\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} l_{n-1} & -l_n \\ -\frac{b}{a} l_n & l_{n+1} \end{pmatrix}, n \text{ tek} \end{cases}$$

matrisidir. $Q_l^{m-n} = Q_l^m Q_l^{-n}$ eşitliğinden faydalanarak ve matrislerin satır sütun elemanlarını kıyaslayarak istenilen ifade bulunur. □

4.1.2. Matris dizileri arasındaki ilişkiler

Bu bölümde, daha önce tanımlanan ve bazı özellikleri verilen genelleştirilmiş matris dizileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki lemmada bi-periyodik Fibonacci matris dizileri cinsinden bi-periyodik Lucas matris dizisi verilmektedir.

Teorem 4.1.2.1. $n \geq 1$ olmak üzere $\left(\mathcal{F}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\left(\mathcal{L}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ matris dizileri için

i) $\mathcal{L}_n = \frac{a}{b}\left(\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n-1}\right),$

ii) $\mathcal{L}_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\mathcal{F}_n\mathcal{L}_0\right),$

iii) $\mathcal{L}_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\mathcal{L}_{n-1}\mathcal{F}_1\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\mathcal{F}_1\mathcal{L}_{n-1}\right),$

eşitlikleri sağlanır (Coskun ve Taskara, 2018).

İspat. i) Verilen eşitliğin sağ tarafı ve Teorem 4.1.2. göz önüne alınarak,

$$\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_{n+2} & \frac{b}{a}q_{n+1} \\ q_{n+1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_n & \frac{b}{a}q_{n-1} \\ q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(q_{n+2} + q_n\right) & \frac{b}{a}\left(q_{n+1} + q_{n-1}\right) \\ q_{n+1} + q_{n-1} & \frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(q_n + q_{n-2}\right) \end{pmatrix}$$

yazılır ve denklem (3.10) ile Teorem 4.1.2. de dikkate alınırsa,

$$\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)-1} l_{n+1} & \frac{b}{a}l_n \\ l_n & \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)-1} l_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{b}{a}\mathcal{L}_n$$

elde edilir.

ii) Tanım 4.1.1. göz önüne alınarak,

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2\dfrac{a}{b} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n+1} & \dfrac{b}{a}q_n \\ q_n & \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{cases} \begin{pmatrix} aq_{n+1}+2q_n & bq_n+2q_{n-1} \\ 2\dfrac{a}{b}q_{n+1}-aq_n & 2q_n-aq_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \\ \begin{pmatrix} bq_{n+1}+2q_n & bq_n+2\dfrac{b}{a}q_{n-1} \\ 2q_{n+1}-aq_n & 2q_n-bq_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n=\begin{cases} \begin{pmatrix} q_{n+2}+q_n & q_{n+1}+q_{n-1} \\ \dfrac{a}{b}\left(q_{n+1}+q_{n-1}\right) & q_n+q_{n-2} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\ \begin{pmatrix} q_{n+2}+q_n & \dfrac{b}{a}\left(q_{n+1}+q_{n-1}\right) \\ q_{n+1}+q_{n-1} & q_n+q_{n-2} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases} =\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n+1)}\left(\mathcal{F}_{n+1}+\mathcal{F}_{n-1}\right)$$

ve ayrıca

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n=\begin{pmatrix} l_{n+1} & \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} l_n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n+1)} l_n & l_{n-1} \end{pmatrix}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n$$

elde edilir. Benzer işlemlerle $\mathcal{F}_n\mathcal{L}_0$ matrisi de hesaplanarak eşitliğin sağlandığı gösterilebilir.

iii) Eşitliğin en sağı dikkate alınarak,

$$\mathcal{F}_1\mathcal{L}_{n-1}=\begin{pmatrix} b & \dfrac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n-1)} l_n & l_{n-1} \\ \dfrac{a}{b}l_{n-1} & \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n-1)} l_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_1\mathcal{L}_{n-1}=\begin{cases} \begin{pmatrix} bl_n+l_{n-1} & bl_{n-1}+\dfrac{b}{a}l_{n-2} \\ l_n & l_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \\ \begin{pmatrix} al_n+l_{n-1} & bl_{n-1}+l_{n-2} \\ \dfrac{a}{b}l_n & l_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \end{cases} =\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n$$

olur. Denklem (3.10) ve Teorem 4.1.2. den, ayrıca,

$$\mathcal{L}_{n-1}\mathcal{F}_1=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bi-periyodik Lucas matris dizileri cinsinden bi-periyodik Fibonacci matris dizisi aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 4.1.2.2. $n \geq 1$ olmak üzere, genelleştirilmiş matris dizileri için

$$\mathcal{F}_n = \frac{b}{a(ab+4)}\left(\mathcal{L}_{n+1} + \mathcal{L}_{n-1}\right),$$

ifadesi sağlanır (Coskun ve Taskara, 2018).

İspat. Eşitliğin sağ tarafından,

$$\mathcal{L}_{n+1} + \mathcal{L}_{n-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{n+2} & l_{n+1} \\ \frac{a}{b} l_{n+1} & \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_n & l_{n-1} \\ \frac{a}{b} l_{n-1} & \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{n-2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. (3.10) denklemi dikkate alınarak da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n+1} + \mathcal{L}_{n-1} &= \begin{pmatrix} \frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} (ab+4) q_{n+1} & (ab+4) q_n \\ \frac{a}{b}(ab+4) q_n & \frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} (ab+4) q_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{a}{b}(ab+4)\mathcal{F}_n \end{aligned}$$

bulunur ki böylece istenilen ifadeye ulaşılmış olur. □

Teorem 4.1.2.3. $m, n \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $\mathcal{F}_m \mathcal{F}_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{F}_{m+n}$,

ii) $\mathcal{F}_m \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n \mathcal{F}_m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)} \mathcal{L}_{m+n}$,

iii) $\mathcal{L}_m \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_m = \left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(\mathcal{F}_{m+n+2} + 2\mathcal{F}_{m+n} + \mathcal{F}_{m+n-2}\right)$,

iv) $\mathcal{L}_m \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_m = \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(\mathcal{L}_{m+n+1} + \mathcal{L}_{m+n-1}\right)$

(Coskun ve Taskara, 2018).

İspat. Teorem 4.1.7. göz önüne alınarak,

$$\mathcal{F}_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{a\mathcal{F}_1 - ab\mathcal{F}_0 + \alpha\mathcal{F}_0}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\alpha^n - \dfrac{a\mathcal{F}_1 - ab\mathcal{F}_0 + \beta\mathcal{F}_0}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\beta^n \right), & n \text{ çift} \\ \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{\alpha\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_0}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\alpha^{n-1} - \dfrac{\beta\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_0}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\beta^{n-1} \right), & n \text{ tek} \end{cases}$$

yazılabilir. Varsayalım ki $A_1 = a\mathcal{F}_1 - ab\mathcal{F}_0 + \alpha\mathcal{F}_0$, $B_1 = a\mathcal{F}_1 - ab\mathcal{F}_0 + \beta\mathcal{F}_0$, $A_2 = \alpha\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_0$, $B_2 = \beta\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_0$ olsun.

i) Verilen eşitliğin sol tarafını ve yukarıdaki özdeşliği dikkate alarak *m* ve *n* nin durumlarına göre inceleme yapalım:

m ve *n* çift iken

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{A_1^2\alpha^{m+n} - A_1B_1\alpha^m\beta^n - A_1B_1\alpha^n\beta^m + B_1^2\beta^{m+n}}{(ab)^{\frac{m+n}{2}}} \right)$$

yazılabilir ve α ile β nın özelliklerinden de faydalanılarak aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \alpha-ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \alpha-ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+ab & b(2\alpha-ab) \\ a(2\alpha-ab) & ab+\alpha^2-2ab\alpha+a^2b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\left(\alpha+\dfrac{-\alpha\beta}{\alpha}\right) & b(2\alpha-\alpha-\beta) \\ a(2\alpha-\alpha-\beta) & (\alpha-ab)^2+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-\beta) & b(\alpha-\beta) \\ a(\alpha-\beta) & \alpha^2+ab-ab\alpha+ab(ab-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-\beta) & b(\alpha-\beta) \\ a(\alpha-\beta) & \alpha^2-\alpha\beta-ab\alpha+ab\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-\beta) & b(\alpha-\beta) \\ a(\alpha-\beta) & (\alpha-ab)(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

$$A_1^2 = (\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & (\alpha-ab) \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)A_1$$

ve

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} \beta & b \\ a & \beta-ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & b \\ a & \beta-ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2+ab & b(2\beta-ab) \\ a(2\beta-ab) & ab+\beta^2-2ab\beta+a^2b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta\left(\beta+\dfrac{-\alpha\beta}{\beta}\right) & b(2\beta-\alpha-\beta) \\ a(2\beta-\alpha-\beta) & \beta^2+ab-ab\beta+ab(ab-\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta(\alpha-\beta) & -b(\alpha-\beta) \\ -a(\alpha-\beta) & -(\beta-ab)(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

$$B_1^2 = -(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \beta & b \\ a & (\beta-ab) \end{pmatrix} = -(\alpha-\beta)B_1$$

dir. Ayrıca,

$$A_1B_1 = B_1A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \alpha - ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & b \\ a & \beta - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta + ab & b(\alpha+\beta) - ab^2 \\ a(\alpha+\beta) - a^2b & ab + (\alpha - ab)(\beta - ab) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -ab + ab & ab^2 - ab^2 \\ a^2b - a^2b & ab - ab - a^2b^2 + a^2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Böylece, *m* ve *n* çift iken

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{(\alpha-\beta)A_1\alpha^{m+n} - (\alpha-\beta)B_1\beta^{m+n}}{(ab)^{\frac{m+n}{2}}}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{A_1\alpha^{m+n} - B_1\beta^{m+n}}{(ab)^{\frac{m+n}{2}}}\right)$$

$$= \mathcal{F}_{m+n}$$

bulunur.

m ve *n* tek iken ise

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{A_2^2\alpha^{m+n-2} - A_2B_2\alpha^{m-1}\beta^{n-1} - A_2B_2\alpha^{n-1}\beta^{m-1} + B_2^2\beta^{m+n-2}}{(ab)^{\frac{m+n}{2}-1}}\right)$$

olup

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} b(\alpha+1) & \alpha\frac{b}{a} \\ \alpha & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b(\alpha+1) & \alpha\frac{b}{a} \\ \alpha & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2(\alpha+1)^2 \alpha^2\frac{b}{a} & \frac{b^2}{a}\alpha(\alpha+1) + \frac{b^2}{a}\alpha \\ \alpha b(\alpha+1) + \alpha b & \alpha^2\frac{b}{a} + b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b^2(\alpha+1)(\alpha+2) & \frac{b^2}{a}\alpha(\alpha+2) \\ \alpha b(\alpha+2) & \frac{b}{a}(ab+\alpha^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2\frac{\alpha^2}{ab}\left(\frac{\alpha^2}{ab}+1\right) & \frac{b^2}{a}\alpha\left(\frac{\alpha^2}{ab}+1\right) \\ \alpha b\left(\frac{\alpha^2}{ab}+1\right) & \frac{b}{a}(ab+\alpha^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha^3(\alpha-\beta)}{a^2} & \frac{\alpha^2 b}{a^2}(\alpha-\beta) \\ \frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{a} & \frac{\alpha b(\alpha-\beta)}{a} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^2}{a^2}(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \frac{\alpha b}{a} \end{pmatrix}$$

$$A_2^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \alpha\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \frac{\alpha^2}{a^2}(\alpha-\beta)A_2$$

ve

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} b(\beta+1) & \beta\frac{b}{a} \\ \beta & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b(\beta+1) & \beta\frac{b}{a} \\ \beta & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2(\beta+1)(\beta+2) & \frac{b^2}{a}\beta(\beta+2) \\ \beta b(\beta+2) & \frac{b}{a}(ab+\beta^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\beta^3(\alpha-\beta)}{a^2} & -\frac{\beta^2 b}{a^2}(\alpha-\beta) \\ -\frac{\beta^2(\alpha-\beta)}{a} & -\frac{\beta b(\alpha-\beta)}{a} \end{pmatrix} = -\frac{\beta^2}{a^2}(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{a} & \beta\frac{b}{a} \\ \beta & b \end{pmatrix}$$

$$B_2^2 = -\frac{\beta^2}{a^2}(\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{a} & \beta\frac{b}{a} \\ \beta & b \end{pmatrix} = -\frac{\beta^2}{a^2}(\alpha-\beta)B_2$$

dir. Aynı zamanda,

$$A_2B_2 = B_2A_2 = \begin{pmatrix} b(\alpha+1) & \alpha\frac{b}{a} \\ \alpha & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b(\beta+1) & \beta\frac{b}{a} \\ \beta & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b^2(\alpha+1)(\beta+1)+\alpha\beta\frac{b}{a} & \frac{b^2}{a}\left(\beta(\alpha+1)+\alpha\right) \\ b\left(\alpha(\beta+1)+\beta\right) & \alpha\beta\frac{b}{a}+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A_2B_2 = B_2A_2 = \begin{pmatrix} b^2-ab\frac{b}{a} & \frac{b^2}{a}(ab-ab) \\ b(ab-ab) & -ab\frac{b}{a}+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{a^2}(\alpha-\beta)A_2\alpha^{m+n-2} - \frac{\beta^2}{a^2}(\alpha-\beta)B_2\beta^{m+n-2} \\ (ab)^{\frac{m+n}{2}-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \frac{b}{a}A_2\alpha^{m+n} - \frac{b}{a}B_2\beta^{m+n} \\ (ab)^{\frac{m+n}{2}} \end{pmatrix} = \frac{b}{a}\mathcal{F}_{m+n}$$

elde edilir.

Son olarak *m* çift ve *n* tek (veya *m* tek ve *n* çift) iken de

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ a & \alpha-ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b(\alpha+1) & \alpha\frac{b}{a} \\ \alpha & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\alpha(\alpha+1)+b\alpha & \alpha^2\frac{b}{a}+b^2 \\ ab(\alpha+1)+\alpha(\alpha-ab) & \alpha b+b(\alpha-ab) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b\alpha(\alpha+2) & \frac{b}{a}(\alpha^2+ab) \\ \alpha^2+ab & b(2\alpha-ab) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\alpha\left(\frac{\alpha^2}{ab}+1\right) & \frac{b}{a}(\alpha^2+ab) \\ \alpha^2+ab & b(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{a}\alpha(\alpha-\beta) & \frac{b}{a}\alpha(\alpha-\beta) \\ \alpha(\alpha-\beta) & b(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)A_2$$

ve

$$A_1B_2=\begin{pmatrix}\alpha & b\\ a & \alpha-ab\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b(\beta+1) & \beta\dfrac{b}{a}\\ \beta & b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha b(\beta+1)+b\beta & \alpha\beta\dfrac{b}{a}+b^2\\ ab(\beta+1)+\beta(\alpha-ab) & b\beta+b(\alpha-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca,

$$B_1A_2=\begin{pmatrix}\beta & b\\ a & \beta-ab\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b(\alpha+1) & \alpha\dfrac{b}{a}\\ \alpha & b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\beta b(\alpha+1)+b\alpha & \alpha\beta\dfrac{b}{a}+b^2\\ ab(\alpha+1)+\alpha(\beta-ab) & b\alpha+b(\beta-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ve

$$B_1B_2=\begin{pmatrix}\beta & b\\ a & \beta-ab\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b(\beta+1) & \beta\dfrac{b}{a}\\ \beta & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\beta(\beta+1)+b\beta & \beta^2\dfrac{b}{a}+b^2\\ ab(\beta+1)+\beta(\beta-ab) & b\beta+b(\beta-ab)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b\beta(\beta+2) & \dfrac{b}{a}(ab+\beta^2)\\ ab+\beta^2 & b(2\beta-ab)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta}{a}\beta(\alpha-\beta) & -\dfrac{b}{a}\beta(\alpha-\beta)\\ -\beta(\alpha-\beta) & -b(\alpha-\beta)\end{pmatrix}=-(\alpha-\beta)B_2$$

olduğundan

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{A_1A_2\alpha^{m+n-1}-A_1B_2\alpha^m\beta^{n-1}-A_2B_1\alpha^{n-1}\beta^m+B_1B_2\beta^{m+n-1}}{(ab)^{\frac{m+n-1}{2}}}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{A_2\alpha^{m+n-1}-B_2\beta^{m+n-1}}{(ab)^{\frac{m+n-1}{2}}}\right)=\mathcal{F}_{m+n}$$

elde edilir. O halde,

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n=\begin{cases}\mathcal{F}_{m+n}, & m,n \text{ çift}\\ \dfrac{b}{a}\mathcal{F}_{m+n}, & m,n \text{ tek}\\ \mathcal{F}_{m+n}, & m \text{ çift ve } n \text{ tek(veya } m \text{ tek ve } n \text{ çift)}\end{cases}$$

eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{m+n}$$

olur.

ii) Burada öncelikle $\mathcal{F}_m\mathcal{L}_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)} \mathcal{L}_{m+n}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Eşitliğin diğer kısmı benzer şekilde yapılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.1.2.1.ii) şartı yardımıyla,

$$\mathcal{F}_m\mathcal{L}_n = \mathcal{F}_m\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} \mathcal{F}_n\mathcal{L}_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} \mathcal{F}_m\mathcal{F}_n\mathcal{L}_0$$

yazılabilir. Diğer yandan Teorem 4.1.2.3.i) şartı ve yine Teorem 4.1.2.1.ii) şartından,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m\mathcal{L}_n &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{F}_{m+n}\mathcal{L}_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)-\varepsilon(mn)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m+n)} \mathcal{L}_{m+n} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)-\varepsilon(mn)-\varepsilon(m+n)} \mathcal{L}_{m+n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)} \mathcal{L}_{m+n}\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Bu eşitlikte de sadece $\mathcal{L}_m\mathcal{L}_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(\mathcal{F}_{m+n+2} + 2\mathcal{F}_{m+n} + \mathcal{F}_{m+n-2}\right)$ kısmının doğruluğunu gösterelim, diğer kısım benzer şekilde görülür. Böylece, Teorem 4.1.2.1.i) şartından,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m\mathcal{L}_n &= \frac{a}{b}\left(\mathcal{F}_{m+1} + \mathcal{F}_{m-1}\right)\frac{a}{b}\left(\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \frac{a^2}{b^2}\left(\mathcal{F}_{m+1}\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{m-1}\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{m+1}\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{m-1}\mathcal{F}_{n-1}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir ve Teorem 4.1.2.3.i) şartından

$$\mathcal{L}_m\mathcal{L}_n = \frac{a^2}{b^2}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m+1)(n+1))} \mathcal{F}_{m+n+2} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m+1)(n-1))} \mathcal{F}_{m+n} \\ &+ \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n+1))} \mathcal{F}_{m+n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n-1))} \mathcal{F}_{m+n-2}\end{aligned}\right\}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılarak istenilen sonuç bulunur.

iv) iii) şartında olduğu gibi, bu eşitlikte de $\mathcal{L}_m\mathcal{L}_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(\mathcal{L}_{m+n+1} + \mathcal{L}_{m+n-1}\right)$ kısmını gösterelim diğer kısım benzer şekilde görülebilir. Böylece, Teorem 4.1.2.3.iii) şartından,

$$\mathcal{L}_m\mathcal{L}_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(\mathcal{F}_{m+n+2} + \mathcal{F}_{m+n} + \mathcal{F}_{m+n} + \mathcal{F}_{m+n-2}\right)$$

yazılabilir ve Teorem 4.1.2.1.i) şartından

$$\mathcal{L}_m\mathcal{L}_n=\left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(\frac{b}{a}\mathcal{L}_{m+n+1}+\frac{b}{a}\mathcal{L}_{m+n-1}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(\mathcal{L}_{m+n+1}+\mathcal{L}_{m+n-1}\right)$$

sonucu elde edilir. □

Teorem 4.1.2. ve Teorem 4.1.2.3. kullanılarak matris elemanları eşleştirilirse, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarına ait özellikler de elde edilebilir.

Yukarıda bulunan sonuçların ışığında, bu matris dizilerinin kuvvetlerinin değişik özellikleri aşağıda verilmektedir.

Teorem 4.1.2.4. $m,n,r\in\mathbb{N}$ ve $n\geq r$ için,

i) $\mathcal{F}_n^m=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{mn}$

ii) $\mathcal{F}_{n+1}^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{F}_1^m\mathcal{F}_{mn}$

iii) $\mathcal{F}_{n-r}\mathcal{F}_{n+r}=\left(\frac{b}{a}\right)^{(-1)^{\varepsilon(n)}\varepsilon(r)}\mathcal{F}_n^2=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-r)}\mathcal{F}_2^n$

dır (Coskun ve Taskara, 2018).

İspat. i) Eşitliğin sol tarafı,

$$\mathcal{F}_n^m=\underbrace{\mathcal{F}_n\mathcal{F}_n\ldots\mathcal{F}_n}_{m\text{ tane}}$$

biçiminde yazılabilir. Teorem 4.1.2.3. i) şartından

$$\mathcal{F}_n^m=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}\underbrace{\mathcal{F}_n\mathcal{F}_n\ldots\mathcal{F}_n}_{m-2\text{ tane}}$$

$$=\begin{cases}\underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}\ldots\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}}_{\frac{m}{2}\text{ tane}}, & m\text{ çift}\\ \underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}\ldots\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{2n}}_{\frac{m-1}{2}\text{ tane}}\mathcal{F}_n, & m\text{ tek}\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_n^m=\begin{cases}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\frac{m}{2}}\mathcal{F}_{mn}, & m\text{ çift}\\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\frac{m-1}{2}}\mathcal{F}_{mn}, & m\text{ tek}\end{cases}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{mn}$$

olur.

ii) Eşitliğin sol tarafını ve Teorem 4.1.2.3. i) şartını göz önüne alalım. O zaman,

$$\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_{n+1}\ldots\mathcal{F}_{n+1}$$

olduğundan faydalanarak

$$\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\begin{cases}\underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{2n+2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{2n+2}\ldots\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{2n+2}}_{\frac{m}{2}\text{ tane}}, & m \text{ çift}\\ \underbrace{\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{2n+2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{2n+2}\ldots\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{2n+2}}_{\frac{m-1}{2}\text{ tane}}\mathcal{F}_{n+1}, & m \text{ tek}\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\begin{cases}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\frac{m}{2}}\mathcal{F}_{m(n+1)}, & m \text{ çift}\\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\frac{m-1}{2}}\mathcal{F}_{m(n+1)}, & m \text{ tek}\end{cases}$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{m(n+1)}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)}\mathcal{F}_{mn+m}$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{m}\mathcal{F}_{mn}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)-\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{mn}\mathcal{F}_{m-1+1}$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)-\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{mn}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-1)}\mathcal{F}_{m-1}\mathcal{F}_{1}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, $\mathcal{F}_{m-1}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-2)}\mathcal{F}_{1}\mathcal{F}_{m-2}$ olduğundan, bu iterasyon devam ettirilirse, böylece

$$\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)-\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{mn}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-2)}\mathcal{F}_{m-2}\mathcal{F}_{1}\mathcal{F}_{1}$$

$$\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n+1)-\varepsilon(mn)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}\mathcal{F}_{mn}\mathcal{F}_{1}^{m}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılarakta

$$\mathcal{F}_{n+1}^{m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{mn}\mathcal{F}_{1}^{m}$$

elde edilir.

iii) Yine eşitliğin sol tarafını ve Teorem 4.1.2.3. i) şartını ele alalım

$$\mathcal{F}_{n-r}\mathcal{F}_{n+r}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))}\mathcal{F}_{2n}$$

elde edilir. $\mathcal{F}_{mn}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{F}_n^m$ olduğundan da $\mathcal{F}_{2n}=\mathcal{F}_2^n$ olup

$$\mathcal{F}_{n-r}\mathcal{F}_{n+r}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))}\mathcal{F}_2^n$$

yazılabilir. Benzer şekilde, $\mathcal{F}_{2n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_n^2$ olduğundan,

$$\mathcal{F}_{n-r}\mathcal{F}_{n+r}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_n^2=\left(\frac{b}{a}\right)^{(-1)^{\varepsilon(n)}\varepsilon(r)}\mathcal{F}_n^2$$

bulunur. □

Teorem 4.1.2.5. $m,n,r\in\mathbb{N}$ ve $n\geq r$ için,

i) $\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}=\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2$

ii) $\mathcal{L}_n^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\left(\mathcal{L}_0^m\mathcal{F}_{mn}\right)$

dir (Coskun ve Taskara, 2018).

İspat. i) Teorem 4.1.7 den, başka bir deyişle bi-periyodik Lucas matris dizisinin Binet benzeri formülünden,

$$\mathcal{L}_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{b\mathcal{L}_1-ab\mathcal{L}_0+\alpha\mathcal{L}_0}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\alpha^n-\dfrac{b\mathcal{L}_1-ab\mathcal{L}_0+\beta\mathcal{L}_0}{(ab)^{\frac{n}{2}}}\beta^n\right), & n \text{ çift}\\ \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{\alpha\mathcal{L}_1+a\mathcal{L}_0}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\alpha^{n-1}-\dfrac{\beta\mathcal{L}_1+a\mathcal{L}_0}{(ab)^{\frac{n-1}{2}}}\beta^{n-1}\right), & n \text{ tek}\end{cases}$$

yazılabilir. Varsayalım ki $C_1=b\mathcal{L}_1-ab\mathcal{L}_0+\alpha\mathcal{L}_0$, $D_1=b\mathcal{L}_1-ab\mathcal{L}_0+\beta\mathcal{L}_0$, $C_2=\alpha\mathcal{L}_1+a\mathcal{L}_0$, $D_2=\beta\mathcal{L}_1+a\mathcal{L}_0$ olsun. Bu durumda n ve r sayılarının tek ve çift olma durumlarına göre inceleme yapılmalıdır. İlk olarak n ve r çift iken

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{C_1^2\alpha^{2n}+D_1^2\beta^{2n}-C_1D_1\left(\alpha^{n-r}\beta^{n+r}+\alpha^{n+r}\beta^{n-r}\right)}{(ab)^n}\right)$$
$$-\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{C_1^2\alpha^{2n}+D_1^2\beta^{2n}-2C_1D_1\alpha^n\beta^n}{(ab)^n}\right)$$

bulunur ve

$$C_1 = b\mathcal{L}_1 - ab\mathcal{L}_0 + \alpha\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} a^2b+2a-a^2b+a\alpha & ab-2ab+2\alpha \\ a^2-2a^2+2\frac{a}{b}\alpha & 2a+a^2b-a\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(\alpha+2) & 2\alpha-ab \\ -a^2+2\frac{a}{b}\alpha & a(2+ab-\alpha) \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{b} & 1 \\ \frac{a}{b} & -\frac{\beta}{b} \end{pmatrix},$$

$$D_1 = b\mathcal{L}_1 - ab\mathcal{L}_0 + \beta\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} a(\beta+2) & 2\beta-ab \\ \frac{a}{b}(2\beta-ab) & a(2+ab-\beta) \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{b} & -1 \\ -\frac{a}{b} & \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix},$$

$$C_1D_1 = (\alpha-\beta)^2\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{b} & 1 \\ \frac{a}{b} & -\frac{\beta}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\beta}{b} & -1 \\ -\frac{a}{b} & \frac{\alpha}{b} \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)^2\begin{pmatrix} -\frac{\alpha\beta}{b^2}-\frac{a}{b} & -\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{b} \\ -\frac{a\beta}{b^2}+\frac{a\beta}{b^2} & -\frac{a}{b}-\frac{\alpha\beta}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1^2 = (\alpha-\beta)^2\begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{b^2}+\frac{a}{b} & \frac{\alpha}{b}-\frac{\beta}{b} \\ \frac{a\alpha}{b^2}-\frac{a\beta}{b^2} & \frac{a}{b}+\frac{\beta^2}{b^2} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{b}\begin{pmatrix} \frac{\alpha^2+ab}{b} & \alpha-\beta \\ \frac{a(\alpha-\beta)}{b} & \frac{ab+\beta^2}{b} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{b}C_1,$$

$$D_1^2 = (\alpha-\beta)^2\begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{b^2}+\frac{a}{b} & \frac{\beta}{b}-\frac{\alpha}{b} \\ \frac{a\beta}{b^2}-\frac{a\alpha}{b^2} & \frac{a}{b}+\frac{\alpha^2}{b^2} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{b}D_1$$

eşitliklerinden faydalanılarak elemanter işlemlerle,

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r} - \left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{C_1^2\alpha^{2n}+D_1^2\beta^{2n}}{(ab)^n}\right) - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{C_1^2\alpha^{2n}+D_1^2\beta^{2n}}{(ab)^n}\right) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde n ve r tek iken

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r} - \left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{C_1^2\alpha^{2n}+D_1^2\beta^{2n}-C_1D_1\left(\alpha^{n-r}\beta^{n+r}+\alpha^{n+r}\beta^{n-r}\right)}{(ab)^n}\right)$$
$$-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{C_2^2\alpha^{2n-2}+D_2^2\beta^{2n-2}-2C_2D_2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}}{(ab)^{n-1}}\right)$$

bulunur ve

$$C_2=\alpha\mathcal{L}_1+a\mathcal{L}_0=\begin{pmatrix}\alpha\left(a^2+2\frac{a}{b}\right)+a^2 & \alpha a+2a\\ \alpha\frac{a^2}{b}+2\frac{a^2}{b} & 2\frac{a}{b}\alpha-a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2(\alpha+1)+2\frac{a}{b}\alpha & a(\alpha+2)\\ \frac{a^2}{b}(\alpha+2) & \frac{a}{b}(2\alpha-ab)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}\alpha(\alpha+2) & a(\alpha+2)\\ \frac{a^2}{b}(\alpha+2) & \frac{a}{b}(\alpha-\beta)\end{pmatrix}=(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}\frac{\alpha^2}{b^2} & \frac{\alpha}{b}\\ a\frac{\alpha}{b^2} & \frac{a}{b}\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{b}C_1$$

$$D_2=\beta\mathcal{L}_1+a\mathcal{L}_0=(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}-\frac{\beta^2}{b^2} & -\frac{\beta}{b}\\ -a\frac{\beta}{b^2} & -\frac{a}{b}\end{pmatrix}=\frac{\beta}{b}D_1,$$

$$C_2D_2=\frac{\alpha\beta}{b^2}C_1D_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$C_2^2=\frac{\alpha^2}{b^2}C_1^2=\frac{\left(\alpha(\alpha-\beta)\right)^2}{b^3}C_1=\frac{\alpha(\alpha-\beta)^2}{b^2}C_2,$$

$$D_2^2=\frac{\beta^2}{b^2}D_1^2=\frac{\left(\beta(\alpha-\beta)\right)^2}{b^3}D_1=\frac{\beta(\alpha-\beta)^2}{b^2}D_2$$

eşitliklerinden faydalanılarak elemanter işlemlerle,

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\frac{(\alpha-\beta)^2}{b}C_1\alpha^{2n}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{b}D_1\beta^{2n}}{(ab)^n}\right)$$

$$-\frac{b}{a}\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\frac{\frac{\alpha(\alpha-\beta)^2}{b^2}\frac{\alpha}{b}C_1\alpha^{2n-2}+\frac{\beta(\alpha-\beta)^2}{b^2}\frac{\beta}{b}D_1\beta^{2n-2}}{(ab)^{n-1}}\right)$$

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2=\frac{C_1\alpha^{2n}+D_1\beta^{2n}}{b(ab)^n}-\frac{C_1\alpha^{2n}+D_1\beta^{2n}}{b(ab)^n}=0$$

elde edilir. Benzer durumlar incelenerek, *n* çift ve *r* tek iken

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2=\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\frac{a}{b}\mathcal{L}_n^2=0$$

ve *r* çift, *n* tek iken

$$\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2=\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\mathcal{L}_n^2=0$$

bulunur ki böylece, $\mathcal{L}_{n-r}\mathcal{L}_{n+r}-\left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)^n\varepsilon(r)}\mathcal{L}_n^2=0$ elde edilmiş olur.

ii) Verilen eşitliğin sol tarafını ve Teorem 4.1.2.4.i) şartını dikkate alırsak,

$$\mathcal{L}_0^m\mathcal{F}_{mn}=\underbrace{\mathcal{L}_0\mathcal{L}_0\ldots\mathcal{L}_0}_{m\text{ tane}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\underbrace{\mathcal{F}_n\mathcal{F}_n\ldots\mathcal{F}_n}_{m\text{ tane}}$$

yazılabilir. Teorem 4.1.2.1.ii) şartından da,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^m\mathcal{F}_{mn}&=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n\ldots\mathcal{L}_0\mathcal{F}_n=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n\right)^m\\&=\left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\left(\frac{a}{b}\right)^{-m\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n^m=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left(m-\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n^m\\&=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor\varepsilon(n)}\mathcal{L}_n^m\end{aligned}$$

olur. □

4.2. Negatif İndisli Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri

Bu bölümde bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının negatif indisli matris dizileri verilerek, bu matris dizilerinin Binet formülleri, toplamları ve üreteç fonksiyonları sunulacaktır.

Tanım 4.2.1. $n\in\mathbb{N}$ için, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci $\left(\mathcal{F}_{-n}\right)$ ve Lucas $\left(\mathcal{L}_{-n}\right)$ matris dizileri, sırasıyla

$$\mathcal{F}_{-n}=\begin{cases}\mathcal{F}_{-n+2}-a\mathcal{F}_{-n+1}, & n\text{ çift}\\ \mathcal{F}_{-n+2}-b\mathcal{F}_{-n+1}, & n\text{ tek}\end{cases}\tag{4.22}$$

$$\mathcal{L}_{-n}=\begin{cases}\mathcal{L}_{-n+2}-b\mathcal{L}_{-n+1}, & n\text{ çift}\\ \mathcal{L}_{-n+2}-a\mathcal{L}_{-n+1}, & n\text{ tek}\end{cases}\tag{4.23}$$

rekürans bağıntıları ve

$$\mathcal{F}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \mathcal{F}_{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{b}{a}\\1&-b\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_0=\begin{pmatrix}a&2\\\frac{2a}{b}&-a\end{pmatrix},\ \mathcal{L}_{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2a}{b}&-a\\-\frac{a^2}{b}&\frac{a^2b+2a}{b}\end{pmatrix},$$

başlangıç şartları ile tanımlanır.

Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin negatif indisli n. genel terimleri, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayıları yardımıyla aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 4.2.2. $n \geq 0$ için, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin n. genel terimleri, sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\textbf{i)}\ \mathcal{F}_{-n} = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{-n+1} & \frac{b}{a} q_{-n} \\ q_{-n} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{-n-1} \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

$$\textbf{ii)}\ \mathcal{L}_{-n} = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-n+1} & l_{-n} \\ \frac{a}{b} l_{-n} & \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-n-1} \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

İspat. i) İlk olarak negatif indisli bi-periyodik Fibonacci dizisi için olan (4.24) denkleminde $n = 0$ alınırsa,

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \frac{b}{a} q_0 \\ q_0 & q_{-1} \end{pmatrix}$$

olup, Çizelge 3.2. den doğru olduğu görülür. Yine $n = 1$ için Çizelge 3.2. den

$$\mathcal{F}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} q_0 & \frac{b}{a} q_{-1} \\ q_{-1} & \frac{b}{a} q_{-2} \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi $n = k \in \mathbb{N}$ için, denklem (4.24) doğru olsun ve $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için (4.22) denklemini ve kabulümüzü göz önüne alırsak

$$\mathcal{F}_{-k-1} = \begin{cases} \mathcal{F}_{-k+1} - a\mathcal{F}_{-k}, & k+1 \text{ çift} \\ \mathcal{F}_{-k+1} - b\mathcal{F}_{-k}, & \text{k+1 tek} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathcal{F}_{-k+1} - a\mathcal{F}_{-k}, & k \text{ tek} \\ \mathcal{F}_{-k+1} - b\mathcal{F}_{-k}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{-k-1}=\begin{cases}\begin{pmatrix} q_{-k+2} & \frac{b}{a}q_{-k+1} \\ q_{-k+1} & q_{-k}\end{pmatrix}-a\begin{pmatrix} \frac{b}{a}q_{-k+1} & \frac{b}{a}q_{-k} \\ q_{-k} & \frac{b}{a}q_{-k-1}\end{pmatrix}, & k \text{ tek} \\ \begin{pmatrix} \frac{b}{a}q_{-k+2} & \frac{b}{a}q_{-k+1} \\ q_{-k+1} & \frac{b}{a}q_{-k}\end{pmatrix}-b\begin{pmatrix} q_{-k+1} & \frac{b}{a}q_{-k} \\ q_{-k} & q_{-k-1}\end{pmatrix}, & k \text{ çift}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\begin{pmatrix} q_{-k+2}-bq_{-k+1} & \frac{b}{a}\left(q_{-k+1}-aq_{-k}\right) \\ q_{-k+1}-aq_{-k} & q_{-k}-bq_{-k-1}\end{pmatrix}, & k \text{ tek} \\ \begin{pmatrix} \frac{b}{a}\left(q_{-k+2}-aq_{-k+1}\right) & \frac{b}{a}\left(q_{-k+1}-bq_{-k}\right) \\ q_{-k+1}-bq_{-k} & \frac{b}{a}\left(q_{-k}-abq_{-k-1}\right)\end{pmatrix}, & k \text{ çift}\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{-k-1}=\begin{cases}\begin{pmatrix} q_{-k} & \frac{b}{a}q_{-k-1} \\ q_{-k-1} & q_{-k-2}\end{pmatrix}, & k \text{ tek} \\ \begin{pmatrix} \frac{b}{a}q_{-k} & \frac{b}{a}q_{-k-1} \\ q_{-k-1} & \frac{b}{a}q_{-k-2}\end{pmatrix}, & k \text{ çift}\end{cases} =\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(k+1)} q_{-k} & \frac{b}{a}q_{-k-1} \\ q_{-k-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(k+1)} q_{-k-2}\end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

ii) Negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizileri için olan kısmın doğruluğu da negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Negatif indisli genelleştirilmiş matris dizilerinin determinantları aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.2.3. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin determinantları

$$\det\left(\mathcal{F}_{-n}\right)=\left(-\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}$$

$$\det\left(\mathcal{L}_{-n}\right)=\left(ab+4\right)\left(-\frac{a}{b}\right)^{1+\varepsilon(n)}$$

ile verilir.

İspat. Tanım 4.2.1. ve Teorem 4.2.2 den faydalanılarak tümevarım yöntemiyle gösterilebilir. □

Şimdi de (4.22) ve (4.23) denklemleri ile verilen matris dizilerinden faydalanarak, negatif indisli genelleştirilmiş sayı dizileri için Cassini özdeşliklerini elde edelim.

Sonuç 4.2.4. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizileri için Cassini özdeşlikleri

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{-n-1}q_{-n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_{-n}^2 = (-1)^n,$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{-n-1}l_{-n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-n}^2 = (-1)^{n+1}(ab+4)$$

eşitlikleri ile verilir.

İspat. Matris dizilerinin determinantlarından faydalanılarak, başka bir ifadeyle Teorem 4.2.3. ve Tanım 4.2.1. deki matrislerin determinantlarından,

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{-n-1}q_{-n+1} - b\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} q_{-n}^2 = a(-1)^n$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{-n-1}l_{-n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-n}^2 = (-1)^{n+1}(ab+4)$$

olduğu kolayca görülür. Gerekli düzenlemeler yapılarak istenilen eşitlikler elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde, negatif indisli genelleştirilmiş matris dizilerinin üreteç fonksiyonları bulunacaktır.

Teorem 4.2.5. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin sırasıyla üreteç fonksiyonları, $E = a + 2\frac{a}{b}t - \left(a^2b+3a\right)t^2 - \left(a^2+2\frac{a}{b}\right)t^3$, $F = 2 - at - \left(ab+2\right)t^2 - at^3$, $G = -a + \left(a^2+2\frac{a}{b}\right)t - at^2 - 2\frac{a}{b}t^3$ olmak üzere,

i) $$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_{-i}t^i = \frac{1}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}\begin{pmatrix} 1-t^2\left(ab+1\right)-t^3b & \frac{b}{a}\left(t-t^2a-t^3\right) \\ t-t^2a-t^3 & 1-bt-t^2 \end{pmatrix}$$

ii) $$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_{-i}t^i = \frac{1}{1-\left(ab+2\right)t^2+t^4}\begin{pmatrix} E & F \\ \frac{a}{b}F & G \end{pmatrix}$$

dır.

İspat. i) $g(t)$ negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun.

$$g(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-i}t^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-2i}t^{2i}+\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-2i-1}t^{2i+1}$$

yazılabilir. O halde son eşitlikte $g_0(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-2i}t^{2i}$ ve $g_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-2i-1}t^{2i+1}$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{-2i+1}&=\mathcal{F}_{-2i+3}-b\mathcal{F}_{-2i+2}=\mathcal{F}_{-2i+3}-b\left(\mathcal{F}_{-2i+4}-a\mathcal{F}_{-2i+3}\right)\\&=(ab+1)\mathcal{F}_{-2i+3}-b\mathcal{F}_{-2i+4}=(ab+1)\mathcal{F}_{-2i+3}+\mathcal{F}_{-2i+3}-\mathcal{F}_{-2i+5}\\&=(ab+2)\mathcal{F}_{-2i+3}-b\mathcal{F}_{-2i+5}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\left(1-(ab+2)t^2+t^4\right)g_0(t)=\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-2}t^2-(ab+2)t^2\mathcal{F}_0$$

ve

$$\left(1-(ab+2)t^2+t^4\right)g_1(t)=\mathcal{F}_{-1}t+\mathcal{F}_{-3}t^3-(ab+2)\mathcal{F}_{-1}t^3$$

olur. Elde edilen ifadeler, üreteç fonksiyonunda yerine yazılarak

$$g(t)=g_0(t)+g_1(t)=\frac{\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}t-\left(\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+ab\mathcal{F}_0\right)t^2+\mathcal{F}_0t^3-\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)t^3}{1-(ab+2)t^2+t^4}$$

elde edilir ve burada Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları da yerine koyulursa istenilen sonuca ulaşılmış olur.

ii) $h(t)$ negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisinin üreteç fonksiyonu olsun.

$$h(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_{-i}t^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i}t^{2i}+\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i-1}t^{2i+1}$$

yazılabilir. Son eşitlikte $h_0(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i}t^{2i}$ ve $h_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i-1}t^{2i+1}$ olduğu varsayılarak,

$$h_0(t)=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-2}t^2+\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i}t^{2i}$$

$$-(ab+2)t^2h_0(t)=-(ab+2)t^2\mathcal{L}_0-(ab+2)\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i+2}t^{2i}$$

$$t^4h_0(t)=\sum_{i=2}^{\infty}\mathcal{L}_{-2i+4}t^{2i}$$

olup,

$$\left(1-(ab+2)t^2+t^4\right)h_0(t)=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-2}t^2-(ab+2)t^2\mathcal{L}_0$$

ve

$$h_0(t)=\frac{\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-2}t^2-(ab+2)t^2\mathcal{L}_0}{1-(ab+2)t^2+t^4}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$(1-(ab+2)t^2+t^4)h_1(t)=\mathcal{L}_{-1}t+\mathcal{L}_{-3}t^3-(ab+2)\mathcal{L}_{-1}t^3$$

olup

$$h_1(t)=\frac{\mathcal{L}_{-1}t-(a\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-1})t^3}{1-(ab+2)t^2+t^4}$$

bulunur. Bu eşitlikler ile $h(t)=h_0(t)+h_1(t)$ olduğundan

$$h(t)=\frac{\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-1}t-(\mathcal{L}_0+b\mathcal{L}_{-1}+ab\mathcal{L}_0)t^2+\mathcal{L}_0t^3-(a\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-1})t^3}{1-(ab+2)t^2+t^4}$$

yazılabilir ve burada Tanım 4.1.1. deki başlangıç şartları yerine koyulursa istenilen sonuca ulaşılmış olur. □

Aşağıdaki sonuçta yukarıdaki teorem aracılığı ile negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları sunulmaktadır.

Sonuç 4.2.6. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla

i) $\sum_{i=0}^{\infty}q_{-i}t^i=\frac{t-at^2-t^3}{1-(ab+2)t^2+t^4}$

ii) $\sum_{i=0}^{\infty}l_{-i}t^i=\frac{2-at-(ab+2)t^2-at^3}{1-(ab+2)t^2+t^4}$

dır.

İspat. i) Teorem 4.2.5. ve Teorem 4.2.2. yardımıyla,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-i}t^i=\frac{1}{1-(ab+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix}1-t^2(ab+1)-t^3b & \frac{b}{a}(t-t^2a-t^3)\\ t-t^2a-t^3 & 1-bt-t^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(i)}q_{-i+1}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}\frac{b}{a}q_{-i}t^i\\ \sum_{i=0}^{\infty}q_{-i}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(i)}q_{-i-1}t^i\end{pmatrix}=\frac{1}{1-(ab+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix}1-t^2(ab+1)-t^3b & \frac{b}{a}(t-t^2a-t^3)\\ t-t^2a-t^3 & 1-bt-t^2\end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 2. satır 1. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu bulunur.

ii) İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Teorem 4.2.7. ve Teorem 4.2.2. göz önüne

alınırsa

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(i)} l_{-i+1}t^i & \sum_{i=0}^{\infty} l_{-i}t^i \\ \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a}{b}l_{-i}t^i & \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(i)} l_{-i-1}t^i \end{pmatrix} = \frac{1}{1-(ab+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} E & F \\ \frac{a}{b}F & G \end{pmatrix}$$

olur. Burada matrislerin 1. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli bi-periyodik Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty} l_{-i}t^i = \frac{F}{1-(ab+2)t^2+t^4}$$

bulunur ki istenilendir. □

Teorem 4.2.7. Her $n\in\mathbb{N}$ için, $\varepsilon(n)=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ iken,

$$K_3=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)(-a)^{1-\varepsilon(n)},\ L_3=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left(-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(n)},$$

$$K_4=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left(\mathcal{L}_{-1}+a\mathcal{L}_0\right)(-b)^{1-\varepsilon(n)},\ L_4=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left(-a\mathcal{L}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(b\mathcal{L}_{-1}+\mathcal{L}_0+ab\mathcal{L}_0\right)^{1-\varepsilon(n)}.$$

Ayrıca γ ile θ, $x^2+abx-ab=0$ denkleminin kökleri olmak üzere, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin Binet benzeri formülleri sırasıyla,

$$\mathcal{F}_{-n}=K_3\left(\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}+\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}\right)+L_3\left(\gamma^{-n-1}+\theta^{-n-1}\right) \tag{4.26}$$

$$\mathcal{L}_{-n}=K_4\left(\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}+\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}\right)+L_4\left(\gamma^{-n-1}+\theta^{-n-1}\right) \tag{4.27}$$

ile verilir.

İspat. Tanım 4.2.1. den, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin karakteristik denklemleri aynı olduğu için, sadece negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin Binet benzeri formülünü bulmamız yeterli olacaktır. Bunun için, $x^2+abx-ab=0$ denkleminin ayrık kökleri γ, θ olmak üzere, matris dizisinin genel çözümünü üreteç fonksiyonundan faydalanarak bulalım. Teorem 4.2.5. kullanılarak

$$g(t)=\frac{\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}t-\left(\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+ab\mathcal{F}_0\right)t^2+\mathcal{F}_0t^3-\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)t^3}{1-(ab+2)t^2+t^4}$$

olup, basit kesirlere ayırma yöntemiyle

$$g(t)=\frac{1}{\gamma-\theta}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a\mathcal{F}_{-1}+ab\mathcal{F}_0-\gamma\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)-t\left[\gamma\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)-b\mathcal{F}_0\right]}{t^2-(1-\gamma)} \\ \quad+\dfrac{\theta\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)-a\mathcal{F}_{-1}-ab\mathcal{F}_0-t\left[b\mathcal{F}_0-\theta\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)\right]}{t^2-(1-\theta)}\end{array}\right\}$$

yazılabilir. Maclaurin seri açılımından

$$\frac{A-Bx}{x^2-C}=\sum_{n=0}^{\infty}BC^{-n-1}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}AC^{-n-1}x^{2n}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$g(t)=\frac{1}{\gamma-\theta}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)-b\mathcal{F}_0}{(1-\gamma)^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}(1-\theta)^{n+1}t^{2n+1} \\ \quad+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b\mathcal{F}_0-\theta\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)}{(1-\gamma)^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}(1-\gamma)^{n+1}t^{2n+1} \\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a\mathcal{F}_{-1}+ab\mathcal{F}_0-\gamma\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)}{(1-\gamma)^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}(1-\theta)^{n+1}t^{2n} \\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta\left(ab\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0\right)-a\mathcal{F}_{-1}-ab\mathcal{F}_0}{(1-\gamma)^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}(1-\gamma)^{n+1}t^{2n}\end{array}\right\}$$

elde ederiz ve γ ile θ için

i. $\gamma+\theta=-ab$, $\quad\gamma\theta=-ab$,

ii. $(1-\gamma)(1-\theta)=1-ab+ab=1$,

iii. $-\theta(1-\gamma)=-ab-\theta=\gamma$,

iv. $-\gamma(1-\theta)=-ab-\gamma=\theta$,

v. $1-\gamma=-\dfrac{\gamma}{\theta}=\dfrac{\gamma^2}{ab}$,

vi. $1-\theta=-\dfrac{\theta}{\gamma}=\dfrac{\theta^2}{ab}$,

eşitliklerinden faydalanılarak

$$g(t)=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ab)^{n+1}\frac{\gamma\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)-b\mathcal{F}_0}{\gamma-\theta}\gamma^{-2n-2}t^{2n+1}\\ \quad+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ab)^{n+1}\frac{b\mathcal{F}_0-\theta\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)}{\gamma-\theta}\theta^{-2n-2}t^{2n+1}\\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ab)^{n+1}\frac{a\mathcal{F}_{-1}+ab\mathcal{F}_0-\gamma\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)}{\gamma-\theta}\gamma^{-2n-2}t^{2n}\\ \quad-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n+1}\frac{\theta\left(ab\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0\right)-a\mathcal{F}_{-1}-ab\mathcal{F}_0}{\gamma-\theta}\theta^{-2n-2}t^{2n}\end{array}\right\}$$

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ab)^{n+1}\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)}{\gamma-\theta}\left\{\left(\gamma^{-2n-1}-\theta^{-2n-1}\right)t^{2n+1}-a\left(\gamma^{-2n-2}-\theta^{-2n-2}\right)t^{2n}\right\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ab)^{n+1}}{\gamma-\theta}\left\{-b\mathcal{F}_0\left(\gamma^{-2n-2}-\theta^{-2n-2}\right)t^{2n+1}+\left(ab\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0\right)\left(\gamma^{-2n-1}-\theta^{-2n-1}\right)t^{2n}\right\}$$

elde edilir ki, toplamlar birleştirilerek

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)(-a)^{1-\varepsilon(n)}\left(\dfrac{\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}-\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}}{\gamma-\theta}\right)\\ \quad+(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\left(-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(n)}\left(\dfrac{\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}}{\gamma-\theta}\right)\end{array}\right\}t^n$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, üreteç fonksiyonunun tanımından

$$\mathcal{F}_{-n}=(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\left\{\begin{array}{l}(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)(-a)^{1-\varepsilon(n)}\left(\dfrac{\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}-\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}}{\gamma-\theta}\right)\\ \quad+(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\left(-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(n)}\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(n)}\left(\dfrac{\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}}{\gamma-\theta}\right)\end{array}\right\}$$

olur. Böylece istenilen ifade elde edilmiş olur. □

Aşağıdaki sonuçta Teorem 4.2.7. yardımıyla negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet benzeri formülleri verilmektedir.

Sonuç 4.2.8. $n>0$ için, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet benzeri formülleri, sırasıyla

$$q_{-n}=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left\{(-a)^{1-\varepsilon(n)}\left(\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}-\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}\right)+a\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\left(1-\varepsilon(n)\right)\right\}$$

$$l_{-n}=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left\{a(-b)^{1-\varepsilon(n)}\left(\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}-\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}\right)+(-2a)^{\varepsilon(n)}(ab+2)^{1-\varepsilon(n)}\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}$$

dır.

İspat. Tanım 4.2.1. ve Teorem 4.2.7. ün yardımıyla,

$$\mathcal{F}_{-n}=\begin{cases}\dfrac{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}{\gamma-\theta}\left\{\left(-a\mathcal{F}_{-1}-ab\mathcal{F}_0\right)\left(\gamma^{-n-2}-\theta^{-n-2}\right)+\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ çift}\\ \dfrac{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}{\gamma-\theta}\left\{\left(b\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_{-1}\right)\left(\gamma^{-n}-\theta^{-n}\right)-b\mathcal{F}_0\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ tek}\end{cases}$$

olur. Ayrıca Teorem 4.2.2. deki matris ile bu matrisin 2. satır 1. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci sayılarının Binet benzeri formülü

$$q_{-n}=\begin{cases}\dfrac{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}{\gamma-\theta}\left\{-a\left(\gamma^{-n-2}-\theta^{-n-2}\right)+a\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ çift}\\ \dfrac{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}{\gamma-\theta}\left(\gamma^{-n}-\theta^{-n}\right), n \text{ tek}\end{cases}$$

bulunur ki $\varepsilon(n)=n-2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$ kullanılarak istenilen ifade elde edilmiş olur.

İspatın ikinci kısmı için, benzer şekilde Tanım 4.2.1. ve Teorem 4.2.7. göz önüne alınırsa

$$\mathcal{L}_{-n}=\begin{cases}\dfrac{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}{\gamma-\theta}\left\{\left(-b\mathcal{L}_{-1}-ab\mathcal{L}_0\right)\left(\gamma^{-n-2}-\theta^{-n-2}\right)+\left(b\mathcal{L}_{-1}+\mathcal{L}_0+ab\mathcal{L}_0\right)\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ çift}\\ \dfrac{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}{\gamma-\theta}\left\{\left(a\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{-1}\right)\left(\gamma^{-n}-\theta^{-n}\right)-a\mathcal{L}_0\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ tek}\end{cases}$$

olur. Teorem 4.2.2. ile bu matrisin 1. satır 2. sütun elemanları eşleştirilirse, negatif indisli bi-periyodik Lucas sayılarının Binet benzeri formülü

$$l_{-n}=\begin{cases}\dfrac{(ab)^{\frac{n}{2}+1}}{\gamma-\theta}\left\{-ab\left(\gamma^{-n-2}-\theta^{-n-2}\right)+(ab+2)\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ çift}\\ \dfrac{(ab)^{\frac{n+1}{2}}}{\gamma-\theta}\left\{a\left(\gamma^{-n}-\theta^{-n}\right)-2a\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}, n \text{ tek}\end{cases}$$

bulunur ve

$$l_{-n}=\frac{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}}{\gamma-\theta}\left\{a(-b)^{1-\varepsilon(n)}\left(\gamma^{-n-2+2\varepsilon(n)}-\theta^{-n-2+2\varepsilon(n)}\right)+(-2a)^{\varepsilon(n)}(ab+2)^{1-\varepsilon(n)}\left(\gamma^{-n-1}-\theta^{-n-1}\right)\right\}$$

elde edilir. □

Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin genel toplamlarını veren formüller aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 4.2.9. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin genel toplamları, sırasıyla

i) $\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_{-k}=\dfrac{ab\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0-a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{-n}-a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{-n+1}}{ab}$

ii) $\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_{-k}=\dfrac{ab\mathcal{L}_0+b\mathcal{L}_{-1}+a\mathcal{L}_0-a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}\mathcal{L}_{-n+1}-a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_{-n}}{ab}$

dır.

İspat. Teorem 4.2.7. den, başka bir deyişle negatif indisli matris dizilerinin Binet benzeri formüllerinden yararlanılarak elde edilir. □

Yukarıda verilen Sonuç 4.2.8. deki gibi, Teorem 4.2.9. dan da aşağıdaki sonuç yazılabilir. Yani, negatif indisli matris dizilerinden kolayca negatif indisli dizilere ait özellikler elde edilebilir.

Sonuç 4.2.10. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin toplamları için, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $\sum_{k=0}^{n-1}q_{-k}=\dfrac{a-a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}q_{-n}-a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}q_{-n+1}}{ab}$,

ii) $\sum_{k=0}^{n-1}l_{-k}=\dfrac{a(b+2)-a^{\varepsilon(n)}b^{1-\varepsilon(n)}l_{-n+1}-a^{1-\varepsilon(n)}b^{\varepsilon(n)}l_{-n}}{ab}$. □

Teorem 4.2.11. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin toplamları ile ilgili olarak

i) $\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\dfrac{1}{t^4-t^2(ab+2)+1}\left\{\begin{array}{c}\mathcal{F}_{-n+1}t^{1-n}-\mathcal{F}_{-n-1}t^{3-n}+\mathcal{F}_{-n}t^{-n}-\mathcal{F}_{-n-2}t^{2-n}+\mathcal{F}_0t^4+\mathcal{F}_{-1}t^3\\ -t^2\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)-t\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)\end{array}\right\}$

ii) $\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{-k}t^{-k}=\dfrac{1}{t^4-t^2(ab+2)+1}\left\{\begin{array}{c}\mathcal{L}_{-n+1}t^{1-n}-\mathcal{L}_{-n-1}t^{3-n}-\mathcal{L}_{-n-2}t^{2-n}+\mathcal{L}_{-n}t^{-n}+\mathcal{L}_0t^4\\ +\mathcal{L}_{-1}t^3-\left(\mathcal{L}_0+b\mathcal{L}_{-1}+ab\mathcal{L}_0\right)t^2-\left(\mathcal{L}_{-1}+a\mathcal{L}_0\right)t\end{array}\right\}$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. İspatı yaparken Teorem 4.2.7. den, başka bir deyişle negatif indisli matris dizilerinin Binet benzeri formüllerinden yararlanılacaktır.

i) Teorem 4.2.7. den,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\sum_{k=0}^{n-1}(ab)^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1}\left\{\begin{array}{c}\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)(-a)^{1-\varepsilon(k)}\left(\dfrac{\gamma^{-k-2+2\varepsilon(k)}-\theta^{-n-2+2\varepsilon(k)}}{\gamma-\theta}\right)\\ +\left(-b\mathcal{F}_0\right)^{\varepsilon(k)}\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)^{1-\varepsilon(k)}\left(\dfrac{\gamma^{-k-1}-\theta^{-k-1}}{\gamma-\theta}\right)\end{array}\right\}t^{-k}$$

yazılabilir. Burada, *n* sayısının tek ve çift olma durumunu göz önüne alınarak ispat yapılacaktır. Öncelikle *n* sayısının tek olma durumu göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{F}_{-2k}t^{-2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{F}_{-2k-1}t^{-2k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\left(-ab\mathcal{F}_0-a\mathcal{F}_{-1}\right)\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{ab\gamma^{-2}\left(ab\gamma^{-2}t^{-2}\right)^k-ab\theta^{-2}\left(ab\theta^{-2}t^{-2}\right)^k}{\gamma-\theta}$$

$$-b\mathcal{F}_0\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{ab\gamma^{-2}t^{-1}\left(ab\gamma^{-2}t^{-2}\right)^k-ab\theta^{-2}t^{-1}\left(ab\theta^{-2}t^{-2}\right)^k}{\gamma-\theta}$$

$$+\left(\mathcal{F}_0+a\mathcal{F}_{-1}+ab\mathcal{F}_0+\right)\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{ab\gamma^{-1}\left(ab\gamma^{-2}t^{-2}\right)^k-ab\theta^{-1}\left(ab\theta^{-2}t^{-2}\right)^k}{\gamma-\theta}$$

$$+\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{ab\gamma^{-1}t^{-1}\left(ab\gamma^{-2}t^{-2}\right)^k-ab\theta^{-1}t^{-1}\left(ab\theta^{-2}t^{-2}\right)^k}{\gamma-\theta}$$

olur. Ayrıca,

i. $(\gamma-1)(\theta-1)=1-ab+ab=1,$

ii. $1-\gamma=-\frac{\gamma}{\theta}=\frac{\gamma^2}{ab},\quad 1-\theta=-\frac{\theta}{\gamma}=\frac{\theta^2}{ab},$

iii. $-\theta(1-\gamma)=-ab-\theta=\gamma,\quad -\alpha(1-\theta)=-ab-\gamma=\theta,$

iv. $\theta^{-2}=\frac{\gamma^2}{a^2b^2},\quad \gamma^{-2}=\frac{\theta^2}{a^2b^2},$

v. $\left(\gamma^2t^2-ab\right)\left(\theta^2t^2-ab\right)=\gamma^2\theta^2t^4-abt^2\left(\gamma^2+\theta^2\right)+a^2b^2=a^2b^2\left(t^4-t^2\left(ab+2\right)+1\right)$

özdeşlikleri ve Binet benzeri formülü kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\frac{1}{t^4-t^2\left(ab+2\right)+1}\left\{\begin{matrix}\mathcal{F}_{-n+1}t^{1-n}-\mathcal{F}_{-n-1}t^{3-n}+\mathcal{F}_{-n}t^{-n}-\mathcal{F}_{-n-2}t^{2-n}+\mathcal{F}_0t^4+\mathcal{F}_{-1}t^3\\ -t^2\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)-t\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)\end{matrix}\right\}$$

bulunur. *n* sayısının çift olma durumu incelenildiğinde de

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}_{-2k}t^{-2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\mathcal{F}_{-2k-1}t^{-2k-1}$$

olacağından, aynı sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, *n* sayısının çift veya tek olma durumu birleştirilerek, her *n* sayısı için,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{-k}t^{-k}=\frac{1}{t^4-t^2\left(ab+2\right)+1}\left\{\begin{matrix}\mathcal{F}_{-n+1}t^{1-n}-\mathcal{F}_{-n-1}t^{3-n}+\mathcal{F}_{-n}t^{-n}-\mathcal{F}_{-n-2}t^{2-n}+\mathcal{F}_0t^4+\mathcal{F}_{-1}t^3\\ -t^2\left(a\mathcal{F}_{-1}+\mathcal{F}_0+ab\mathcal{F}_0\right)-t\left(\mathcal{F}_{-1}+b\mathcal{F}_0\right)\end{matrix}\right\}$$

elde edilir.

ii) Yine Teorem 4.2.7. kullanılıp, *n* sayısının çift ve tek olma durumlarına göre inceleme

yapılarak, paydalar eşitlenip gerekli düzenleme işlemleri ile istenilen sonuca ulaşılır. □

Teorem 4.2.11. in bir sonucu olarak, matris dizilerinin özelliklerinden sayı dizilerinin özellikleri elde edilebilir.

Sonuç 4.2.12. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizilerinin toplamları için

i) $$\sum_{k=0}^{n} q_{-k}t^{-k} = \frac{q_{-n+1}t^{1-n} - q_{-n-1}t^{3-n} - q_{-n-2}t^{2-n} + q_{-n}t^{-n} + t^3 - at^2 - t}{1 - t^2(ab+2) + t^4}$$

ii) $$\sum_{k=0}^{n} l_{-k}t^{-k} = \frac{l_{-n+1}t^{1-n} - l_{-n-1}t^{3-n} - l_{-n-2}t^{2-n} + l_{-n}t^{-n} + 2t^4 - at^3 - (ab+2)t^2 - at}{1 - t^2(ab+2) + t^4}$$

ifadeleri doğrudur. □

Sonuç 4.2.13. $n \geq 0$ için, bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin ve sayı dizilerinin sonsuz toplamları ile ilgili olarak

i) $$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{-k}t^{-k} = \frac{t}{t^4 - t^2(ab+2) + 1}\left\{t^3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}0 & \frac{b}{a}\\ 1 & 0\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}1+ab & b\\ a & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b & \frac{b}{a}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

ii) $$\sum_{k=0}^{\infty} q_{-k}t^{-k} = \frac{t^3 - at^2 - t}{t^4 - t^2(ab+2) + 1}$$

iii) $$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{-k}t^{-k} = \frac{t}{t^4 - t^2(ab+2) + 1}\left\{\begin{pmatrix}a & 2\\ \frac{2a}{b} & -a\end{pmatrix}t^3 + \begin{pmatrix}\frac{2a}{b} & -a\\ -\frac{a^2}{b} & a^2 + \frac{2a}{b}\end{pmatrix}t^2 - \begin{pmatrix}3a + a^2b & ab+2\\ a^2 + \frac{2a}{b} & a\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}\frac{2a}{b} + a^2 & a\\ \frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b}\end{pmatrix}\right\}$$

iv) $$\sum_{k=0}^{\infty} l_{-k}t^{-k} = \frac{2t^4 - at^3 - t^2(ab+2) - at}{t^4 - t^2(ab+2) + 1}$$

eşitlikleri sağlanır. □

4.2.1. Negatif indisli matris dizileri arasındaki ilişkiler

Bu bölümde, yukarıda tanımlanan özelliklerini verdiğimiz negatif indisli matris dizileri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Aşağıdaki teoremde, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizileri

cinsinden negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisi verilmektedir.

Teorem 4.2.1.1. $\left(\mathcal{F}_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\left(\mathcal{L}_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ negatif indisli matris dizileri için,

i) $\mathcal{L}_{-n}=\frac{a}{b}\left(\mathcal{F}_{-n+1}+\mathcal{F}_{-n-1}\right)$,

ii) $\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{-n}\mathcal{L}_0$,

iii) $\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_{-n-1}\mathcal{F}_1=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_1\mathcal{L}_{-n-1}$

dir.

İspat. i) Verilen eşitliğin sağ tarafını ve Teorem 4.2.2. yi göz önüne alarak,

$$\mathcal{F}_{-n+1}+\mathcal{F}_{-n-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} & q_{-n+2} & \frac{b}{a}q_{-n+1}\\ q_{-n+1} & & \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} & q_{-n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} & q_{-n} & \frac{b}{a}q_{-n-1}\\ q_{-n-1} & & \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} & q_{-n-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(q_{-n+2}+q_{-n}\right) & \frac{b}{a}\left(q_{-n+1}+q_{-n-1}\right)\\ q_{-n+1}+q_{-n-1} & \frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(q_{-n}+q_{-n-2}\right)\end{pmatrix}$$

yazılır ve denklem (3.10) ile Teorem 4.2.2. dikkate alınırsa,

$$\mathcal{F}_{-n+1}+\mathcal{F}_{-n-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)-1} & l_{-n+1} & \frac{b}{a}l_{-n}\\ l_{-n} & & \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)-1} & l_{-n-1}\end{pmatrix}=\frac{b}{a}\mathcal{L}_{-n}$$

elde edilir.

ii) Tanım 4.2.1. ve Teorem 4.2.2. göz önüne alınarak,

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-n}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2\frac{a}{b} & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} & q_{-n+1} & \frac{b}{a}q_{-n}\\ q_{-n} & & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} & q_{-n-1}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-n}=\begin{cases}\begin{pmatrix} aq_{-n+1}+2q_{-n} & bq_{-n}+2q_{-n-1}\\ 2\dfrac{a}{b}q_{-n+1}-aq_{-n} & 2q_{-n}-aq_{-n-1}\end{pmatrix}, & n \text{ tek}\\ \begin{pmatrix} bq_{-n+1}+2q_{-n} & bq_{-n}+2\dfrac{b}{a}q_{-n-1}\\ 2q_{-n+1}-aq_{-n} & 2q_{-n}-bq_{-n-1}\end{pmatrix}, & n \text{ çift}\end{cases}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-n}=\begin{cases}\begin{pmatrix} q_{-n+2}+q_{-n} & q_{-n+1}+q_{-n-1}\\ \dfrac{a}{b}\left(q_{-n+1}+q_{-n-1}\right) & q_{-n}+q_{-n-2}\end{pmatrix}, & n \text{ çift}\\ \begin{pmatrix} q_{-n+2}+q_{-n} & \dfrac{b}{a}\left(q_{-n+1}+q_{-n-1}\right)\\ q_{-n+1}+q_{-n-1} & q_{-n}+q_{-n-2}\end{pmatrix}, & n \text{ tek}\end{cases}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n+1)}\left(\mathcal{F}_{-n+1}+\mathcal{F}_{-n-1}\right)$$

ve ayrıca

$$\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-n}=\begin{pmatrix} l_{-n+1} & \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}l_{-n}\\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n+1)}l_{-n} & l_{-n-1}\end{pmatrix}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_{-n}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle $\mathcal{F}_{-n}\mathcal{L}_0$ matrisi de hesaplanarak eşitliğin sağlandığı gösterilebilir.

iii) Eşitliğin en sağını ele alalım,

$$\mathcal{F}_1\mathcal{L}_{-n-1}=\begin{pmatrix} b & \dfrac{b}{a}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n-1)}l_{-n} & l_{-n-1}\\ \dfrac{a}{b}l_{-n-1} & \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n-1)}l_{-n-2}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_1\mathcal{L}_{-n-1}=\begin{cases}\begin{pmatrix} bl_{-n}+l_{-n-1} & bl_{-n-1}+\dfrac{b}{a}l_{-n-2}\\ l_{-n} & l_{-n-1}\end{pmatrix}, & n \text{ tek}\\ \begin{pmatrix} al_{-n}+l_{-n-1} & bl_{-n-1}+l_{-n-2}\\ \dfrac{a}{b}l_{-n} & l_{-n-1}\end{pmatrix}, & n \text{ çift}\end{cases}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_{-n}$$

olur. Denklem (3.10) ve Teorem 4.2.2. den, ayrıca,

$$\mathcal{L}_{-n-1}\mathcal{F}_1=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{L}_{-n}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıdaki teorem, negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisi ile negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisi arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 4.2.1.2. Negatif indisli bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisi cinsinden ifadesi

$$\mathcal{F}_{-n}=\frac{b}{a(ab+4)}\left(\mathcal{L}_{-n+1}+\mathcal{L}_{-n-1}\right)$$

dir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafını ele alalım ve Teorem 4.2.2. den

$$\mathcal{L}_{-n+1}+\mathcal{L}_{-n-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{-n+2} & l_{-n+1}\\ \frac{a}{b}l_{-n+1} & \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{-n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{-n} & l_{-n-1}\\ \frac{a}{b}l_{-n-1} & \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon(n)} l_{-n-2}\end{pmatrix}$$

elde edilir. (3.10) denklemi dikkate alınarakta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-n+1}+\mathcal{L}_{-n-1}&=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}(ab+4)q_{-n+1} & (ab+4)q_{-n}\\ \frac{a}{b}(ab+4)q_{-n} & \frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}(ab+4)q_{-n-1}\end{pmatrix}\\ &=\frac{a}{b}(ab+4)\mathcal{F}_{-n}\end{aligned}$$

bulunur ki böylece istenilen ifadeye ulaşılmış olur. □

Teorem 4.2.1.3. $n\geq 0$ için,

$$\mathcal{F}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\mathcal{F}_{n}\right)^{-1} \tag{4.28}$$

dir.

İspat. Tanım 4.2.1. ve Tanım 4.1.1. den

$$\mathcal{F}_{0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(0)}\left(\mathcal{F}_{0}\right)^{-1}$$

$$\mathcal{F}_{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{b}{a}\\ 1 & -b\end{pmatrix}=\frac{b}{a}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{a}{b} & -a\end{pmatrix}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(1)}\left(\mathcal{F}_{1}\right)^{-1}$$

olduğu açıktır. Denklem (4.28) in $n=k\in\mathbb{N}$ için sağladığını kabul edelim ve $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için, $k\in\mathbb{N}$ sayısının tek ve çift olma durumu ayrı ayrı incelenmelidir. O halde k tek iken, Teorem 4.1.2.2. i) şartından ve kabulümüzden

$$\left(\mathcal{F}_{k+1}\right)^{-1}=\left(\mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_{2}\right)^{-1}=\left(\mathcal{F}_{2}\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_{k-1}\right)^{-1}$$
$$=\mathcal{F}_{-2}\mathcal{F}_{-k+1}$$

$$\left(\mathcal{F}_{k+1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -b\\ -a & ab+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{-k+2} & \frac{b}{a}q_{-k+1}\\ q_{-k+1} & q_{-k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{-k} & \frac{b}{a}q_{-k-1}\\ q_{-k-1} & q_{-k-2}\end{pmatrix}=\mathcal{F}_{-k-1}$$

ve k çift iken,

$$\left(\mathcal{F}_{k+1}\right)^{-1}=\left(\mathcal{F}_{k}\mathcal{F}_{1}\right)^{-1}=\left(\mathcal{F}_{1}\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_{k}\right)^{-1}=\frac{a}{b}\mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}_{-k}$$
$$=\frac{a}{b}\begin{pmatrix}0 & \frac{b}{a}\\ 1 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{-k+1} & \frac{b}{a}q_{-k}\\ q_{-k} & q_{-k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{-k} & q_{-k-1}\\ \frac{a}{b}q_{-k-1} & q_{-k-2}\end{pmatrix}=\frac{a}{b}\mathcal{F}_{-k-1}$$

olur. Her iki durum birleştirilerek,

$$\mathcal{F}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\mathcal{F}_{n}\right)^{-1}$$

yazılır. □

Teorem 4.2.1.4. $m,n\in\mathbb{N}$ için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır

i) $\mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{-m-n}$,

ii) $\mathcal{F}_{m}\mathcal{F}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{m-n}$,

iii) $\mathcal{F}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\mathcal{L}_{-n}\mathcal{F}_{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)}\mathcal{L}_{-m-n}$,

iv) $\mathcal{F}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\mathcal{L}_{m}\mathcal{F}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)}\mathcal{L}_{m-n}$,

v)
$$\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(\mathcal{F}_{-m-n+2}+2\mathcal{F}_{-m-n}+\mathcal{F}_{-m-n-2}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(\mathcal{L}_{-m-n+1}+\mathcal{L}_{-m-n-1}\right),$$

vi) $\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(ab+4\right)\mathcal{F}_{-m-n}$,

vii) $\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)}\mathcal{L}_{0}\mathcal{L}_{-m-n}$,

viii) $\mathcal{L}_m\mathcal{L}_{-n} = \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_m = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{L}_0\mathcal{L}_{m-n}$.

İspat. i) Teorem 4.2.1.3. ve Teorem 4.1.2.3. i) şartından faydalanarak, *m* ve *n* nin tek veya çift olma durumlarına göre inceleme yapalım:

m ve *n* çift iken

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-n} = \left(\mathcal{F}_m\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_n\right)^{-1} = \left(\mathcal{F}_n\mathcal{F}_m\right)^{-1} = \left(\mathcal{F}_{m+n}\right)^{-1} = \mathcal{F}_{-m-n},$$

m ve *n* tek iken

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-n} = \frac{b^2}{a^2}\left(\mathcal{F}_m\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_n\right)^{-1} = \frac{b^2}{a^2}\left(\mathcal{F}_n\mathcal{F}_m\right)^{-1} = \frac{b}{a}\left(\mathcal{F}_{m+n}\right)^{-1} = \frac{b}{a}\mathcal{F}_{-m-n},$$

m çift ve *n* tek (*n* çift ve *m* tek) iken

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-n} = \frac{b}{a}\left(\mathcal{F}_m\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_n\right)^{-1} = \frac{b}{a}\left(\mathcal{F}_n\mathcal{F}_m\right)^{-1} = \frac{b}{a}\left(\mathcal{F}_{m+n}\right)^{-1} = \mathcal{F}_{-m-n}.$$

Bu dört durum tek denklemde birleştirilerek

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{F}_{-m-n}$$

elde edilir.

ii) Teorem 4.1.7. ve Teorem 4.2.7. den, başka bir ifadeyle Binet formüllerinden faydalanılarak ve *m* ile *n* nin durumlarına göre inceleme yapılarak sonuç elde edilir.

iii) Burada öncelikle $\mathcal{F}_{-m}\mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)} \mathcal{L}_{-m-n}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim, diğer kısmı benzer şekilde yapılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.2.1.1.ii) şartı yardımıyla,

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{L}_{-n} = \mathcal{F}_{-m}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} \mathcal{F}_{-n}\mathcal{L}_0$$

yazılabilir. Diğer yandan, Teorem 4.2.1.4.i) şartı ve yine Teorem 4.2.1.1.ii) şartından,

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{F}_{-m-n}\mathcal{L}_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m+n)} \mathcal{L}_{-m-n}$$

elde edilir. Böylece,

$$\mathcal{F}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)}\mathcal{L}_{-m-n}$$

yazılır.

iv) iii) şartında olduğu gibi, $\mathcal{F}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)}\mathcal{L}_{m-n}$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim, diğer kısmı benzer şekilde yapılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı ve Teorem 4.2.1.1.ii) şartı yardımıyla,

$$\mathcal{F}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\mathcal{F}_{m}\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\mathcal{F}_{-n}\mathcal{L}_{0}$$

yazılır. Diğer yandan, Teorem 4.2.1.4.ii) şartından ve yine Teorem 4.2.1.1.ii) şartından,

$$\mathcal{F}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)}\mathcal{F}_{m-n}\mathcal{L}_{0}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m-n)}\mathcal{L}_{m-n}$$

olup,

$$\mathcal{F}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)}\mathcal{L}_{m-n}$$

bulunur.

v) Teorem 4.2.1.1.i) ve Teorem 4.2.1.4.ii) şartları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}&=\frac{a^2}{b^2}\left(\mathcal{F}_{-m+1}+\mathcal{F}_{-m-1}\right)\left(\mathcal{F}_{-n+1}+\mathcal{F}_{-n-1}\right)\\&=\frac{a^2}{b^2}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n-1))}\mathcal{F}_{-m-n+2}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n+1))}\mathcal{F}_{-m-n}\\+\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n+1))}\mathcal{F}_{-m-n}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m+1)(n+1))}\mathcal{F}_{-m-n-2}\end{array}\right\}\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}&=\frac{a^2}{b^2}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n-1))}\mathcal{F}_{-m-n+2}+2\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m-1)(n+1))}\mathcal{F}_{-m-n}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon((m+1)(n+1))}\mathcal{F}_{-m-n-2}\right\}\\&=\left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(\mathcal{F}_{-m-n+2}+2\mathcal{F}_{-m-n}+\mathcal{F}_{-m-n-2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\mathcal{L}_{-n}=\left(\mathcal{F}_{-n-1}+\mathcal{F}_{-n+1}\right)$ olduğundan eşitliğin sağ tarafının doğru olduğu kolayca görülür.

vi) Sırasıyla, Teorem 4.2.1.4. v) ile Teorem 4.2.1.1.i) şartından, sonrasında da Teorem 4.2.1.2. den

$$\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(\mathcal{L}_{-m-n+1}+\mathcal{L}_{-m-n-1}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))}\left(ab+4\right)\mathcal{F}_{-m-n}$$

elde edilir.

vii) Teorem 4.2.1.1.ii) şartından

$$\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)}\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-m}\mathcal{L}_{-n}$$

yazılır ve Teorem 4.2.1.4.iii) şartından

$$\mathcal{L}_{-m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\varepsilon(m)}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_{-m-n}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak istenilen ifadeye geçiş yapılır.

viii) Teorem 4.1.2.1.ii) şartından

$$\mathcal{L}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)}\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{m}\mathcal{L}_{-n}$$

bulunur. Teorem 4.2.1.4.iv) şartından ise

$$\mathcal{L}_{m}\mathcal{L}_{-n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\varepsilon(m)}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_{m-n}$$

elde edilir. □

Teorem 4.2.1.4. ve Teorem 4.2.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1.5. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizileri için

i)
$$\begin{cases} q_{-2m-2n}=q_{-2m}q_{-2n+1}+q_{-2n}q_{-2m-1} \\ q_{-2m-2n-2}=q_{-2m-1}q_{-2n}+q_{-2n-1}q_{-2m-2} \\ q_{-2m-2n-1}=\dfrac{b}{a}q_{-2m}q_{-2n}+q_{-2n-1}q_{-2m-1}=q_{-2m-1}q_{-2n+1}+\dfrac{b}{a}q_{-2n}q_{-2m-2} \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} q_{2m-2n}=q_{2m}q_{-2n+1}+q_{-2n}q_{2m-1}=q_{2m+1}q_{-2n}+q_{-2n-1}q_{2m} \\ q_{2m-2n-1}=\dfrac{b}{a}q_{2m}q_{-2n}+q_{-2n-1}q_{2m-1} \\ q_{2m-2n+1}=q_{2m+1}q_{-2n+1}+\dfrac{b}{a}q_{-2n}q_{2m} \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} l_{-2m-2n} = q_{-2m+1}l_{-2n} + \dfrac{b}{a}q_{-2m}l_{-2n-1} \\ l_{-2m-2n-2} = \dfrac{b}{a}q_{-2m}l_{-2n-1} + q_{-2m-1}l_{-2n-2} \\ l_{-2m-2n-1} = q_{-2m+1}l_{-2n-1} + q_{-2m}l_{-2n-2} = q_{-2m}l_{-2n} + q_{-2m-1}l_{-2n-1} \end{cases}$$

iv)
$$\begin{cases} l_{2m-2n} = q_{2m+1}l_{-2n} + \dfrac{b}{a}q_{2m}l_{-2n-1} = \dfrac{b}{a}q_{2m+2}l_{-2n-1} + q_{2m+1}l_{-2n-2} \\ l_{2m-2n-1} = q_{2m+1}l_{-2n-1} + q_{2m}l_{-2n-2} \\ l_{2m-2n+1} = q_{2m+2}l_{-2n} + q_{2m+1}l_{-2n-1} \end{cases}$$

v)
$$\begin{cases} l_{-2m-2n+1} + l_{-2m-2n-1} = l_{-2m+1}l_{-2n} + l_{-2m}l_{-2n-1} \\ l_{-2m-2n-1} + l_{-2m-2n-3} = l_{-2m}l_{-2n-1} + l_{-2m-1}l_{-2n-2} \\ \dfrac{a}{b}\left(l_{-2m-2n} + l_{-2m-2n-2}\right) = l_{-2m+1}l_{-2n-1} + \dfrac{a}{b}l_{-2m}l_{-2n-2} = \dfrac{a}{b}l_{-2m}l_{-2n} + l_{-2m-1}l_{-2n-1} \end{cases}$$

vi)
$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}\left(ab+4\right)q_{-2m-2n} = l_{-2m+1}l_{-2n} + l_{-2m}l_{-2n-1} \\ \dfrac{a}{b}\left(ab+4\right)q_{-2m-2n-2} = l_{-2m}l_{-2n-1} + l_{-2m-1}l_{-2n-2} \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^2\left(ab+4\right)q_{-2m-2n-1} = l_{-2m+1}l_{-2n-1} + \dfrac{a}{b}l_{-2m}l_{-2n-2} = \dfrac{a}{b}l_{-2m}l_{-2n} + l_{-2m-1}l_{-2n-1} \end{cases}$$

vii)
$$\begin{cases} al_{-2m-2n} + 2l_{-2m-2n-1} = l_{-2m+1}l_{-2n} + l_{-2m}l_{-2n-1} \\ al_{-2m-2n-2} + 2l_{-2m-2n-3} = l_{-2m}l_{-2n-1} + l_{-2m-1}l_{-2n-2} \\ a\left(l_{-2m-2n-1} + \dfrac{2}{b}l_{-2m-2n-2}\right) = l_{-2m+1}l_{-2n-1} + \dfrac{a}{b}l_{-2m}l_{-2n-2} = \dfrac{a}{b}l_{-2m}l_{-2n} + l_{-2m-1}l_{-2n-1} \end{cases}$$

viii)
$$\begin{cases} al_{2m-2n} + 2l_{2m-2n-1} = l_{2m+1}l_{-2n} + l_{2m}l_{-2n-1} = l_{2m+2}l_{-2n-1} + l_{2m+1}l_{-2n-2} \\ al_{-2m-2n-2} + 2l_{-2m-2n-3} = l_{2m+1}l_{-2n-1} + \dfrac{a}{b}l_{2m}l_{-2n-2} \\ a\left(l_{-2m-2n-1} + \dfrac{2}{b}l_{-2m-2n-2}\right) = \dfrac{a}{b}l_{2m+2}l_{-2n} + l_{2m+1}l_{-2n-1} \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.1.4. ve Teorem 4.2.2 yi kullanarak ispatlar için

i) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_{-m}q_{-n+1} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)} q_{-n}q_{-m-1} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} q_{-m-n}$

ii) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} q_m q_{-n+1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)} q_{-n} q_{m-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} q_{m-n}$

iii) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)} q_{-m+1} l_{-n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_{-m} l_{-n-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)} l_{-m-n}$

iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)} q_{m+1} l_{-n} + \left(\frac{b}{a}\right)^{1-\varepsilon(n)} q_m l_{-n-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(m)\varepsilon(n+1)} l_{m-n}$

v) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)} l_{-m+1} l_{-n} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-m} l_{-n-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(l_{-m-n+1} + l_{-m-n-1}\right)$

vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)} l_{-m+1} l_{-n} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-m} l_{-n-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2-\varepsilon((m+1)(n+1))} \left(ab+4\right) q_{-m-n}$

vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)} l_{-m+1} l_{-n} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_{-m} l_{-n-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)} \left(a l_{-m-n} + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m+n)} l_{-m-n-1} \right)$

viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m)} l_{m+1} l_{-n} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} l_m l_{-n-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)} \left(a l_{m-n} + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m+n)} l_{m-n-1} \right)$

eşitlikleri yazılabileceğinden, sonuçlar kolayca görülebilir. □

Aşağıdaki teorem negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisinin kuvvetleri arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 4.2.1.6. $n \geq 0$ için,

$$\mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\mathcal{L}_0\right)^{1-n} \left(\mathcal{L}_{-1}\right)^n$$

dır.

İspat. Teorem 4.2.1.4. vii) şartını kullanarak

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-1)} \mathcal{L}_{-n+1} \mathcal{L}_{-1}$$

bulunur. Bu son eşitlik $\mathcal{L}_0$ ile soldan çarpılır ve Teorem 4.2.1.4. vii) şartını tekrar kullanılırsa, o zaman

$$\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-1)} \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{-n+1} \mathcal{L}_{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-1)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-2)} \mathcal{L}_{-n+2} \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-1}$$

olur. Bu işlem n kez sürekli tekrarlanırsa,

$$\mathcal{L}_0^{n-1} \mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-1)+\varepsilon(n-2)+\cdots+\varepsilon(1)} \mathcal{L}_{-1}^n$$

elde edilir. Son eşitlik $\mathcal{L}_0^{1-n}$ ile soldan çarpılırsa

$$\mathcal{L}_{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \mathcal{L}_0^{1-n} \mathcal{L}_{-1}^{n}$$

olur ki, istenendir. □

Ayrıca, Teorem 4.2.1.6. de, Teorem 4.2.1.4.iv) şartı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\varepsilon(n+1)} \left(\mathcal{L}_n \mathcal{F}_{-n}\right)^{1-n} \mathcal{L}_{-1}^{n} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \mathcal{F}_{-n}^{1-n} \mathcal{L}_n^{1-n} \mathcal{L}_{-1}^{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} \mathcal{F}_n^{n-1} \mathcal{L}_n^{1-n} \mathcal{L}_{-1}^{n} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \varepsilon(n)} \left(\mathcal{F}_n \mathcal{L}_n^{-1} \mathcal{L}_{-1}\right)^{n-1} \mathcal{L}_{-1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri de elde edilir ki bu eşitlikler de bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizileri cinsinden negatif indisli bi-periyodik Lucas matris dizisini ifade eder.

Yukarıdaki sonuçların ışığında, aşağıdaki teoremlerde negadif indisli bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerinin kuvvetleri elde edilmektedir.

Teorem 4.2.1.7. $m, n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için,

i) $\left(\mathcal{F}_{-n}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \mathcal{F}_{-mn}$

ii) $\left(\mathcal{F}_{-n-1}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor} \left(\mathcal{F}_{-1}\right)^m \mathcal{F}_{-mn}$

iii) $\mathcal{F}_{-n-r}\mathcal{F}_{-n+r} = \left(\frac{b}{a}\right)^{(-1)^{\varepsilon(n)}\varepsilon(r)} \left(\mathcal{F}_{-n}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-r)} \left(\mathcal{F}_{-2}\right)^n$

dır.

İspat. i) Teorem 4.2.1.3. ten

$$\left(\mathcal{F}_{-n}\right)^m = \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)} \left(\mathcal{F}_n\right)^{-1}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{m\varepsilon(n)} \left(\left(\mathcal{F}_n\right)^m\right)^{-1}$$

yazılır ve Teorem 4.1.2.4.i) şartı ile tekrar Teorem 4.2.1.3. ten

$$\left(\mathcal{F}_{-n}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{m\varepsilon(n)} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \varepsilon(n)} \mathcal{F}_{mn}\right)^{-1}$$

$$\left(\mathcal{F}_{-n}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{m\varepsilon(n)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \varepsilon(n)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{F}_{-mn}$$

olur ki, gerekli düzenlemelerle

$$\left(\mathcal{F}_{-n}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \mathcal{F}_{-mn}$$

bulunur.

ii) Eşitliğin sol tarafını göz önüne alalım. Teorem 4.2.1.7. i) ve Teorem 4.2.1.4. i) şartından

$$\left(\mathcal{F}_{-n-1}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \mathcal{F}_{m(-n-1)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mnm)} \mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-mn}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-1)} \mathcal{F}_{-m}\mathcal{F}_{-m+1}\mathcal{F}_{-mn}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Teorem 4.2.1.4. i) şartından $\mathcal{F}_{-m+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-2)} \mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}_{-m+2}$

yazılır ve iterasyona bu şekilde devam edilirse,

$$\left(\mathcal{F}_{-n-1}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n+1)\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(mn)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(m-1)+\varepsilon(m-2)+\cdots+\varepsilon(1)} \left(\mathcal{F}_{-1}\right)^m \mathcal{F}_{-mn}$$

elde edilir. Böylece de

$$\left(\mathcal{F}_{-n-1}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor} \left(\mathcal{F}_{-1}\right)^m \mathcal{F}_{-mn}$$

yazılır.

iii) Eşitliğin sol tarafını göz önüne alalım. Teorem 4.2.1.4. i) ve Teorem 4.2.1.7. i) şartından

$$\mathcal{F}_{-n-r}\mathcal{F}_{-n+r} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n-r)} \mathcal{F}_{-2}^n$$

olarak bulunur.

Ayrıca, ii) şartının ispatına benzer şekilde iterasyon yapılırsa

$$\mathcal{F}_{-n-r}\mathcal{F}_{-n+r} = \left(\frac{b}{a}\right)^{(-1)^{\varepsilon(n)}\varepsilon(r)} \mathcal{F}_{-n}^2$$

elde edilir. □

Teorem 4.2.1.8. $m,n,r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ için,

i) $\mathcal{L}_{-n-r}\mathcal{L}_{-n+r} = \left(\frac{b}{a}\right)^{(-1)^{\varepsilon(n)}\varepsilon(r)} \left(\mathcal{L}_{-n}\right)^2$

ii) $\left(\mathcal{L}_{-n}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left(m-\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)} \mathcal{L}_0^m \mathcal{F}_{-mn} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \mathcal{L}_0^{m-1}\mathcal{L}_{-mn}$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. i) Eşitliğin sol tarafını ve Teorem 4.2.1.5. vi) şartını göz önüne alalım

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{-n-r}\mathcal{L}_{-n+r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))} \mathcal{L}_0\mathcal{L}_{-2n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))} \mathcal{L}_0\mathcal{L}_{-n-n} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(nn)} \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-n} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon((n-r)(n+r))-\varepsilon(n)} \left(\mathcal{L}_{-n}\right)^2\end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii) Eşitliğin sol tarafını ele alalım. Teorem 4.2.1.1. ii) şartından

$$\left(\mathcal{L}_{-n}\right)^m = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)} \mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-n}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\varepsilon(n)} \mathcal{L}_0^m \left(\mathcal{F}_{-n}\right)^m$$

olur ve Teorem 4.2.1.7. i) şartından

$$\left(\mathcal{L}_{-n}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\varepsilon(n)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \mathcal{L}_0^m \mathcal{F}_{-mn}$$

elde edilir. Böylece, ispatın ilk kısmı bitmiş olur. İkinci kısım için bu son eşitlikten devam edilerek Teorem 4.2.1.1. ii) şartı kullanılırsa, yani

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_{-n}\right)^m &= \left(\frac{a}{b}\right)^{m\varepsilon(n)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \mathcal{L}_0^m \mathcal{F}_{-mn} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\varepsilon(n)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \mathcal{L}_0^{m-1}\mathcal{L}_0\mathcal{F}_{-mn} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left(m-\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)} \mathcal{L}_0^{m-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(mn)} \mathcal{L}_{-mn} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left(m-\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)-\varepsilon(mn)} \mathcal{L}_0^{m-1}\mathcal{L}_{-mn}\end{aligned}$$

olur ki böylece

$$\left(\mathcal{L}_{-n}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor} \mathcal{L}_0^{m-1}\mathcal{L}_{-mn}$$

elde edilir. □

Ayrıca, bu teoremin bir sonucu olarak,

$$\mathcal{L}_0^{m-1}\mathcal{L}_{-mn}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}\left(\mathcal{L}_{-n}\right)^m$$

yazılabilir.

Bu alt başlığın sonucu olarak görülür ki, pozitif indisli genelleştirilmiş matris dizileri ile negatif indisli genelleştirilmiş matris dizilerinin sağladığı bazı özellikler benzerlik göstermektedir. Dolayısıyla, bu özelliklerin her $n\in\mathbb{Z}$ için sağlandığı söylenir.

4.3. Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Sayı Dizilerinin Üreteç Matrislerinin Hadamard Çarpımları

Bu bölümde öncelikle bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin üreteç matrisleri ile ilgili bazı özellikler verilecektir. Daha sonra bu matrislerin Hadamard çarpımları tanımlanarak, determinantları, özdeğerleri ve özvektörleri bulunacaktır.

Teorem 4.3.1. $Q_q=\begin{pmatrix} b & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Q_l=\begin{pmatrix} \frac{a^2b+2a}{b} & a \\ \frac{a^2}{b} & \frac{2a}{b} \end{pmatrix}$ üreteç matrisleri verilsin:

i) $n\geq 2$ için,

$$Q_q^n=bQ_q^{n-1}+\frac{b}{a}Q_q^{n-2}$$

ii) $n\geq 1$ için,

$$Q_l^n=\frac{b}{a(ab+4)}Q_l^{n+1}+\frac{a}{b}Q_l^{n-1}$$

eşitlikleri sağlanır (Coşkun ve Taşkara, 2018).

İspat. i) Q_q matrisi ve $n\geq 1$ için

$$Q_q^n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}q_{n+1} & \frac{b}{a}q_n \\ q_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}q_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğu tümevarımla kolayca görülür. Buradan hareketle,

$$Q_q^n = \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} bq_n + q_{n-1} & \frac{b}{a}\left(aq_{n-1} + q_{n-2}\right) \\ aq_{n-1} + q_{n-2} & bq_{n-2} + q_{n-3} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{b}{a}\left(aq_n + q_{n-1}\right) & \frac{b}{a}\left(bq_{n-1} + q_{n-2}\right) \\ bq_{n-1} + q_{n-2} & \frac{b}{a}\left(aq_{n-2} + q_{n-3}\right) \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}-1+1} a \begin{pmatrix} \frac{b}{a}q_n + \frac{1}{a}q_{n-1} & \frac{b}{a}q_{n-1} + \frac{b}{a^2}q_{n-2} \\ q_{n-1} + \frac{1}{a}q_{n-2} & \frac{b}{a}q_{n-2} + \frac{1}{a}q_{n-3} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} b \begin{pmatrix} q_n + \frac{1}{a}q_{n-1} & \frac{b}{a}q_{n-1} + \frac{1}{a}q_{n-2} \\ q_{n-1} + \frac{1}{b}q_{n-2} & q_{n-2} + \frac{1}{a}q_{n-3} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

olup, gerekli düzenlemelerle

$$Q_q^n = \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}-1} b \begin{pmatrix} \frac{b}{a}q_n & \frac{b}{a}q_{n-1} \\ q_{n-1} & \frac{b}{a}q_{n-2} \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}-1} \frac{b}{a} \begin{pmatrix} q_{n-1} & \frac{b}{a}q_{n-2} \\ q_{n-2} & q_{n-3} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} b \begin{pmatrix} q_n & \frac{b}{a}q_{n-1} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{b}{a} \begin{pmatrix} \frac{b}{a}q_{n-1} & \frac{b}{a}q_{n-2} \\ q_{n-2} & \frac{b}{a}q_{n-3} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$= bQ_q^{n-1} + \frac{b}{a}Q_q^{n-2}$$

elde edilir.

ii) i) şartına benzer şekilde, (4.18) denkleminden faydalanılarak

$$Q_l^n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(ab+4\right)^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \begin{pmatrix} l_{n+2} & l_{n+1} \\ \frac{b}{a}l_{n+1} & l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_n & l_{n-1} \\ \frac{b}{a}l_{n-1} & l_{n-2} \end{pmatrix} \right\}, & n \text{ çift} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(ab+4\right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \begin{pmatrix} q_{n+2} & q_{n+1} \\ \frac{b}{a}q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ \frac{b}{a}q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \right\}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$= \frac{b}{a\left(ab+4\right)}Q_l^{n+1} + \frac{a}{b}Q_l^{n-1}$$

olduğu kolayca görülür.

Bir matrisin tersi için, $A^{-1}=\dfrac{adj(A)}{\det A}$ eşitliği yazılabileceğinden, üreteç matrisleri ile onların tersi olan matrislerin Hadamard çarpımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.3.2. $n>0$ için,

$$Q_q^n \circ Q_q^{-n}=\begin{cases}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \left(Q_q^n \circ adjQ_q^n\right), & n \text{ çift}\\ -\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \left(Q_q^n \circ adjQ_q^n\right), & n \text{ tek}\end{cases} \tag{4.29}$$

$$Q_l^n \circ Q_l^{-n}=\begin{cases}\left(\dfrac{b^2}{a^2(ab+4)}\right)^n \left(Q_l^n \circ adjQ_l^n\right), & n \text{ çift}\\ \left(\dfrac{b^2}{a^2(ab+4)}\right)^n \left(Q_l^n \circ adjQ_l^n\right), & n \text{ tek}\end{cases} \tag{4.30}$$

(Coşkun ve Taşkara, 2018).

Teorem 4.3.3. $n\geq 1$ için, Hadamard çarpımların determinantları

i) $\det\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right)=\begin{cases}\left(1+2\dfrac{b}{a}q_n^2\right), & n \text{ çift}\\ \left(1-2q_n^2\right), & n \text{ tek}\end{cases}$

ii) $\det\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right)=\begin{cases}\left(1+2\dfrac{b}{a}q_n^2\right), & n \text{ çift}\\ \left(1+2\dfrac{b}{a(ab+4)}l_n^2\right), & n \text{ tek}\end{cases}$

ile verilir (Coşkun ve Taşkara, 2018).

İspat. i) Öncelikle, matris ile adjointi çarpılarak

$$Q_q^n \circ adjQ_q^n=\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}q_{n+1} & \dfrac{b}{a}q_n\\ q_n & \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}q_{n-1}\end{pmatrix}\right\}\circ\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}q_{n-1} & -\dfrac{b}{a}q_n\\ -q_n & \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\varepsilon(n)}q_{n+1}\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1} & -\dfrac{b^2}{a^2}q_n^2\\ -q_n^2 & \left(\dfrac{b}{a}\right)^{2\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1}\end{pmatrix}$$

bulunur ki, Tanım 4.3.2 den faydalanarak

$$Q_q^n \circ Q_q^{-n} = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\begin{pmatrix} q_{2k+1}q_{2k-1} & -\frac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ -q_{2k}^2 & q_{2k+1}q_{2k-1}\end{pmatrix}, \ n=2k \\ -\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^2 q_{2k+2}q_{2k} & -\frac{b^2}{a^2}q_{2k+1}^2 \\ -q_{2k+1}^2 & \left(\frac{b}{a}\right)^2 q_{2k+2}q_{2k}\end{pmatrix}, \ n=2k+1 \end{cases} \tag{4.31}$$

yazılabilir. Böylece

$$\det\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{cases} \left(q_{2k+1}q_{2k-1}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}q_{2k}^2\right)^2, \ n=2k \\ \left(\frac{b}{a}q_{2k+2}q_{2k}\right)^2 - \left(q_{2k+1}^2\right)^2, \ n=2k+1 \end{cases}$$

olur. Cassini özdeşliğinden de faydalanılarak

$$\det\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{cases} 1+2\frac{b}{a}q_{2k}^2, \ n=2k \\ 1-2q_{2k+1}^2, \ n=2k+1 \end{cases}$$

sonucu elde edilir.

ii) i) şartına benzer şekilde,

$$Q_l^n \circ adjQ_l^n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\left(ab+4\right)^n\begin{pmatrix} q_{n+1}q_{n-1} & -q_n^2 \\ -\frac{b^2}{a^2}q_n^2 & q_{n+1}q_{n-1}\end{pmatrix}, n \text{ çift} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\left(ab+4\right)^{n-1}\begin{pmatrix} l_{n+1}l_{n-1} & -l_n^2 \\ -\frac{b^2}{a^2}l_n^2 & l_{n+1}l_{n-1}\end{pmatrix}, n \text{ tek} \end{cases}$$

$$Q_l^n \circ Q_l^{-n} = \begin{cases} \left(\frac{b^2}{a^2\left(ab+4\right)}\right)^{2k}\left(\frac{a}{b}\right)^{4k}\left(ab+4\right)^{2k}\begin{pmatrix} q_{2k+1}q_{2k-1} & -q_{2k}^2 \\ -\frac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 & q_{2k+1}q_{2k-1}\end{pmatrix}, \ n=2k \\ \left(\frac{b^2}{a^2\left(ab+4\right)}\right)^{2k+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2(2k+1)}\left(ab+4\right)^{2k}\begin{pmatrix} l_{2k+2}l_{2k} & -l_{2k+1}^2 \\ -\frac{b^2}{a^2}l_{2k+1}^2 & l_{2k+2}l_{2k}\end{pmatrix}, \ n=2k+1 \end{cases} \tag{4.32}$$

olup,

$$\det\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right) = \begin{cases} \left(1+2\frac{b}{a}q_{2k}^2\right), \ n=2k \\ \left(1+2\frac{b}{a\left(ab+4\right)}l_{2k+1}^2\right), \ n=2k+1 \end{cases}$$

sonucu bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.3.4. Hadamard çarpımın izleri

i) $$iz\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{cases} 2q_{n+1}q_{n-1}, & n \text{ çift} \\ -2\dfrac{b}{a}q_{n+1}q_{n-1}, & n \text{ tek} \end{cases} = \begin{cases} 2\left(1+\dfrac{b}{a}q_n^2\right), & n \text{ çift} \\ 2\left(1-q_n^2\right), & n \text{ tek} \end{cases}$$

ii) $$iz\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right) = \begin{cases} 2q_{n+1}q_{n-1}, & n \text{ çift} \\ \dfrac{2}{ab+4}l_{n+1}l_{n-1}, & n \text{ tek} \end{cases} = \begin{cases} 2\left(1+\dfrac{b}{a}q_n^2\right), & n \text{ çift} \\ 2\left(1+\dfrac{b}{a(ab+4)}l_n^2\right), & n \text{ tek} \end{cases}$$

(Coşkun ve Taşkara, 2018).

İspat. $Q_q^n \circ Q_q^{-n}$ ve $Q_l^n \circ Q_l^{-n}$ matrislerinin köşegenleri toplamı bulunacağından, yalnızca $Q_q^n \circ Q_q^{-n}$ çarpımı için ispat yapmak yeterli olacaktır. Bunun için, (4.31) denkleminden

$$Q_q^n \circ Q_q^{-n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} q_{2k+1}q_{2k-1} & -\dfrac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ -q_{2k}^2 & q_{2k+1}q_{2k-1} \end{pmatrix}, & n = 2k \\ -\left(\dfrac{a}{b}\right)\begin{pmatrix} \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 q_{2k+2}q_{2k} & -\dfrac{b^2}{a^2}q_{2k+1}^2 \\ -q_{2k+1}^2 & \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 q_{2k+2}q_{2k} \end{pmatrix}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

yazılabileceğinden,

$$iz\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{cases} 2q_{2k+1}q_{2k-1}, & n = 2k \\ -2\left(\dfrac{b}{a}\right)q_{2k+2}q_{2k}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

bulunur ve $q_{2k+1}q_{2k-1} = 1+\dfrac{b}{a}q_{2k}^2$, $\dfrac{b}{a}q_{2k+2}q_{2k} = q_{2k+1}^2 - 1$ eşitlikleri sağlandığından

$$iz\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{cases} 2\left(1+\dfrac{b}{a}q_{2k}^2\right), & n = 2k \\ 2\left(1-q_{2k+1}^2\right), & n = 2k+1 \end{cases}$$

olur ki böylece istenilen elde edilir. □

Şimdi de, Hadamard çarpımların özdeğerlerini ve özvektörlerini verelim.

Teorem 4.3.5. $Q_q^n \circ Q_q^{-n}$ ve $Q_l^n \circ Q_l^{-n}$ matrislerinin özdeğerleri sırasıyla

i) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + 2\dfrac{b}{a}q_n^2,\ n$ çift

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 - 2q_n^2,\ n$ tek

ii) $\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 1 + 2\dfrac{b}{a}q_n^2,\ n$ çift

$\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 1 + 2\dfrac{b}{a(ab+4)}l_n^2,\ n$ tek

dır (Coşkun ve Taşkara, 2018).

İspat. i) $Q_q^n \circ Q_q^{-n}$ matrisinin karakteristik polinomunu inceleyelim:

$$\det\left(\lambda I - \left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right)\right) = \begin{cases} \begin{vmatrix} \lambda - q_{2k+1}q_{2k-1} & \dfrac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ q_{2k}^2 & \lambda - q_{2k+1}q_{2k-1} \end{vmatrix}, & n = 2k \\ \begin{vmatrix} \lambda + \dfrac{b}{a}q_{2k+2}q_{2k} & -\dfrac{b}{a}q_{2k+1}^2 \\ -\dfrac{a}{b}q_{2k+1}^2 & \lambda + \dfrac{b}{a}q_{2k+2}q_{2k} \end{vmatrix}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\lambda - q_{2k+1}q_{2k-1} + \dfrac{b}{a}q_{2k}^2\right)\left(\lambda - q_{2k+1}q_{2k-1} - \dfrac{b}{a}q_{2k}^2\right), & n = 2k \\ \left(\lambda + \dfrac{b}{a}q_{2k+2}q_{2k} + q_{2k+1}^2\right)\left(\lambda + \dfrac{b}{a}q_{2k+2}q_{2k} - q_{2k+1}^2\right), & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\lambda - (-1)^{2k}\right)\left(\lambda - \left(1 + 2\dfrac{b}{a}q_{2k}^2\right)\right), & n = 2k \\ \left(\lambda + (-1)\right)\left(\lambda + \left(-1 + 2q_{2k+1}^2\right)\right), & n = 2k+1 \end{cases}$$

olup, $Q_q^n \circ Q_q^{-n}$ matrisinin özdeğerleri

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + 2\dfrac{b}{a}q_{2k}^2,\ n = 2k$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 - 2q_{2k+1}^2,\ n = 2k+1$

sonucuna ulaşılır.

ii) $Q_l^n \circ Q_l^{-n}$ matrisinin karakteristik polinomu:

$$\det\left(\lambda I - \left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right)\right) = \begin{cases} (\lambda - 1)\left(\lambda - \left(1 + 2\dfrac{b}{a}q_{2k}^2\right)\right), & n = 2k \\ (\lambda - 1)\left(\lambda - \left(1 + 2\dfrac{b}{a(ab+4)}l_{2k+1}^2\right)\right), & n = 2k+1 \end{cases}$$

olur ki, $Q_l^n \circ Q_l^{-n}$ matrisinin özdeğerleri de

$$\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 1 + 2\frac{b}{a}q_{2k}^2,\ n = 2k$$

$$\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 1 + 2\frac{b}{a(ab+4)}l_{2k+1}^2,\ n = 2k+1$$

elde edilir. □

Teorem 4.3.6. Teorem 4.3.5.ile verilen özdeğerlere karşılık gelen özvektörler, sırasıyla,

i) $y_1 = \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix},\ y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) $y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix},\ y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$

dır (Coşkun ve Taşkara, 2018).

İspat. $Q_q^n \circ Q_q^{-n}$ matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler y_1 ve y_2, $Q_l^n \circ Q_l^{-n}$ matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler de y_3 ve y_4 olsun. Bu durumda, özdeğerlere karşılık gelen özvektörler bulunurken benzer işlemler yapılacağından yalnızca $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen $y_1 = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ özvektörünü bulalım

$$\lambda I - \left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda - q_{2k+1}q_{2k-1} & \frac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ q_{2k}^2 & \lambda - q_{2k+1}q_{2k-1} \end{pmatrix}, & n = 2k \\ \begin{pmatrix} \lambda + \frac{b^2}{a^2}q_{2k+2}q_{2k} & -\frac{b^2}{a^2}q_{2k+1}^2 \\ -q_{2k+1}^2 & \lambda + \frac{b^2}{a^2}q_{2k+2}q_{2k} \end{pmatrix}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

olduğundan, $\lambda_1 = 1$ ve $n = 2k$ için

$$I - \left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right) = \begin{pmatrix} 1 - q_{2k+1}q_{2k-1} & \frac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ q_{2k}^2 & 1 - q_{2k+1}q_{2k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}q_{2k}^2 & \frac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ q_{2k}^2 & -\frac{b}{a}q_{2k}^2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{a}q_{2k}^2 & \frac{b^2}{a^2}q_{2k}^2 \\ q_{2k}^2 & -\frac{b}{a}q_{2k}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olacağından,

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & \frac{b^2}{a^2} \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır ve gerekli düzenlemelerle de

$m=\frac{b}{a},\ n=1$

olup, $y_1=\begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$ elde edilir ki benzer biçimde, istenilen sonuçlar kolayca bulunabilir. □

Üreteç matrislerinin Hadamard çarpımlarının tersi vardır. Bu matrislerin tersleri de aşağıdaki gibi verilir.

Sonuç 4.3.7. Tanım 4.2.1. ile verilen matrislerin tersleri

i)

$$\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right)^{-1}=\begin{cases} \begin{pmatrix} 1-\frac{\frac{b}{a}q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} & \frac{\frac{b^2}{a^2}q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} \\ \frac{q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} & 1-\frac{\frac{b}{a}q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\ \begin{pmatrix} 1+\frac{q_n^2}{1-2q_n^2} & \frac{-\frac{b}{a}q_n^2}{1-2q_n^2} \\ \frac{-\frac{a}{b}q_n^2}{1-2q_n^2} & 1-\frac{q_n^2}{1-2q_n^2} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

ii)

$$\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right)^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\frac{b}{a}q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} & \dfrac{\frac{b^2}{a^2}q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} \\ \dfrac{q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} & 1-\dfrac{\frac{b}{a}q_n^2}{1+2\frac{b}{a}q_n^2} \end{pmatrix}, & n \text{ çift} \\ \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\frac{b}{a(ab+4)}l_n^2}{1+2\frac{b}{a(ab+4)}l_n^2} & \dfrac{-\frac{1}{ab+4}l_n^2}{1+2\frac{b}{a(ab+4)}l_n^2} \\ \dfrac{\frac{b^2}{a^2(ab+4)}l_n^2}{1+2\frac{b}{a(ab+4)}l_n^2} & 1-\dfrac{\frac{b}{a(ab+4)}l_n^2}{1+2\frac{b}{a(ab+4)}l_n^2} \end{pmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

dır (Coşkun ve Taşkara, 2018).

İspat. $\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right)^{-1} = \dfrac{adj\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right)}{\det\left(Q_q^n \circ Q_q^{-n}\right)}$ ve $\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right)^{-1} = \dfrac{adj\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right)}{\det\left(Q_l^n \circ Q_l^{-n}\right)}$ olup, Teorem 4.3.3. ve (4.31) ile (4.32) denklemlerinden de faydalanılarak istenilen sonuçlar kolayca bulunur. □

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Çalışmada, öncelikle genelleştirilmiş bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizileri kavramları tanımlanmıştır. Bu tanımlar ve buna bağlı bazı sonuçlar ile literatüre yeni kavramlar ve sonuçlar kazandırılmıştır. Çalışmanın içeriğinden de görülmektedir ki, bi-periyodik Fibonacci matris dizileri, bi-periyodik Fibonacci sayı dizileri ile ve bi-periyodik Lucas matris dizileri de bi-periyodik Lucas sayı dizileri ile ilişkilidir. Dolayısıyla tanımladığımız matris dizileri, hem Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas matris dizilerinin hem de sayı dizilerinin en genel halidir. Ayrıca, genelleştirilmiş matris dizilerinin pozitif ve negatif indislilerinin bazı benzer özellikleri sağladığı görülür. Böylece bu özelliklerin her $n \in \mathbb{Z}$ için doğru olduğu söylenir.

Çalışmanın son bölümünde, tanımlanan matris dizilerinin başlangıç koşullarından biri olan ve sayı dizilerinin üreteç matrisi olarak adlandırılan matrislerin Hadamard çarpımı ile ilgili bazı özellikler incelenerek çalışmaya farklı bir bakış açısı kazandırılmıştır.

5.2 Öneriler

Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin her ikisi ile de ilişkili olan genel bir matris dizisi tanımlamak ve sonuçlar elde etmek için araştırma yapılabilir. Genel matris dizisi ile bu çalışmada verilen matris dizileri arasındaki ilişkiler incelenebilir. Tanımlanacak olan matris dizisi ile ilgili olarak üreteç matrisi adı verilen matris tanımlanarak özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Alp, M., Irmak, N. ve Szalay, L., 2012, Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 81 (2), 227-232.

Altınışık, E., Yalçın, N. F. ve Büyükköse, Ş., 2015, Determinants and inverses of circulant matrices with complex Fibonacci numbers, *Special Matrices*, 3 (1).

Bahsi, M. ve Solak, S., 2010, On the circulant matrices with arithmetic sequence, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5 (25), 1213-1222.

Bahsi, M. ve Solak, S., 2014, On the norms of r-circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers, *J. Math. Inequal*, 8 (4), 693-705.

Bilgici, G., 2014, Two generalizations of Lucas sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526-538.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. ve Reinsel, G. C., 2008, Time Series Analysis: Forecasting and Control, Wiley, p.

Catarino, P., 2014, On Some Identities for k-Fibonacci Sequence, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 9 (1), 37 - 42

Cerda-Morales, G., 2013, The Hadamard Product in Generalized U^n(p, q)-matrices, *Acta Universitatis Apulensis* (34), 115-124.

Civciv, H., 2009, Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özellikleri, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Coskun, A. ve Taskara, N., 2016, The matrix sequence in terms of bi-periodic Fibonacci numbers, *arXiv preprint arXiv:1603.07487*.

Coskun, A. ve Taskara, N., 2017, Generating matrix of the bi-periodic Lucas numbers, *AIP Conference Proceedings*, 310004.

Coskun, A. ve Taskara, N., 2018, A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences, *Applied Mathematics and Computation*, 320, 400-406.

Coşkun, A. ve Taşkara, N., 2018, The Hadamard Products for Bi-periodic Fibonacci and Bi-periodic Lucas Generating Matrices, *Konuralp Journal of Mathematics*, 6 (2), 272-278.

Edson, M. ve Yayenie, O., 2009, A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula, *Integers*, 9 (6), 639-654.

Edson, M., Lewis, S. ve Yayenie, O., 2011, The k-Periodic Fibonacci Sequence and an Extended Binet's Formula, *Integers*, 11 (6), 739-751.

Er, M. C., 1984, Sums Of Fibonacci Numbers By Matrix Methods, *Fibonacci Quarterly*, 22 (3), 204-207.

Falcon, S., 2011, On the k-Lucas numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 6, 1039-1050.

Godase, A. D. ve Dhakne, M. B., 2014, On the properties of k-Fibonacci and k-Lucas numbers, *Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech.*, 2 (1), 100-106.

Gökbas, H. ve Köse, H., 2018, On Complex k-Horadam and Gaussian k-Horadam Sequences, *International Journal Of Mathematics And Computer Research*, 6 (11), 1938-1942.

Gulec, H. H. ve Taskara, N., 2012, On The (s,t)-Pell And (s,t)-Pell–Lucas Sequences And Their Matrix Representations, *Applied Mathematics Letters*, 25 (10), 1554-1559.

Gümüş, İ. H. ve Taşkara, N., 2011, Matrislerin Hadamard Çarpımı Üzerine, *Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi*, 2 (37), 9-14.

Halıcı, S., 2011, Some Sums Formulae for Products of terms of Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Sequences, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 15 (2), 151-155.

Horadam, A., 1961, A generalized Fibonacci sequence, *The American Mathematical Monthly*, 68 (5), 455-459.

Horn, R. A., 1990, The hadamard product, *Proc. Symp. Appl. Math*, 87-169.

Irmak, N. ve Alp, M., 2013, Some identities for generalized Fibonacci and Lucas sequences, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 (4), 331-328.

Jang, Y. H. ve Jun, S. P., 2014, Linearlization of generalized Fibonacci sequences, *The Korean Journal of Mathematics*, 22 (3), 443-454.

Karaduman, E., 2004, An application of Fibonacci numbers in matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 147 (3), 903-908.

Kılıç, E. ve Taşçı, D., 2006, On the Generalized order-k Fibonacci and Lucas Numbers, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 36 (6), 1915-1926.

King, C. H., 1960, Some Further Properties of the Fibonacci Numbers, *San Jose: CA*, San Jose State.

Kocer, E. G. ve Tuglu, N., 2007, The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas *p*-numbers, *Ars Combinatoria*, 85, 3-17.

Kocer, E. G., Tuglu, N. ve Stakhov, A., 2009, On the *m*-extension of the Fibonacci and Lucas *p*-numbers, *Chaos Solitons & Fractals*, 40 (4), 1890-1906.

Koshy, T., 2001, Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley & Sons, p.

Koshy, T., 2014, Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications, Springer, New York, NY, p.

Köme, C. ve Yazlik, Y., 2017, On the spectral norms of r-circulant matrices with the biperiodic Fibonacci and Lucas numbers, *Journal of Inequalities and applications*, 2017 (1), 192.

Mcllroy, M. D., 1992, Number Theory in Computer Graphics, In: The Unreasonable Effectiveness of Number Theory, Eds: Stefan, A. B., *Orono,ME*: Amer. Math. Soc., p. 105-121.

Nalli, A., 2006, On the Hadamard Product of Fibonacci Qn matrix and Fibonacci Q-n matrix, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 1 (16), 753-761.

Öcal, A. A., Tuglu, N. ve Altinişik, E., 2005, On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 170 (1), 584-596.

Ramirez, J. L., 2013, Bi-periodic incomplete Fibonacci Sequences, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 42, 83-92.

Sahin, M., 2011, The generating function of a family of the sequences in terms of the continuant, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5416-5420.

Silvester, J., 1979, Fibonacci Properties by Matrix Methods, *The Mathematical Gazette*, 188-191.

Solak, S. ve Bahşi, M., 2011, On the spectral norms of Hankel matrices with Fibonacci and Lucas numbers.

Solak, S. ve Bahsi, M., 2013, On the spectral norms of Toeplitz matrices with Fibonacci and Lucas numbers, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42 (1), 15-19.

Spivey, M. Z. ve Steil, L. L., 2006, The k-binomial transforms and the Hankel transform, *J. Integer Seq*, 9 (1), 19.

Tan, E. ve Ekin, A. B., 2017, Some Identities On Conditional Sequences By Using Matrix Method, *Miskolc Mathematical Notes*, 18 (1), 469-477.

Taşcı, D., 2000, On the Hadamard Products of its Adjoint matrix with a square matrix, *Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi*, 1 (17), 43-53.

Taşçı, D., Firengiz, M. C. ve Tuğlu, N., 2012, Incomplete Bivariate Fibonacci and Lucas *p*-polynomials, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012.

Uslu, K. ve Uygun, S., 2013, The (s, t) Jacobsthal and (s, t) Jacobsthal-Lucas Matrix sequences, *Ars Combinatoria*, 108, 13-22.

Uygun, S. ve Owusu, E., 2016, A New Generalization of Jacobsthal Numbers (Bi-Periodic Jacobsthal Sequences), *Journal of Mathematical Analysis*, 7 (5), 28-39.

Uygun, S. ve Tümbas, A., 2018, Generalized k-Jacobsthal Sequence, *Asian Journal of Mathematics and Physics*, 2 (2), 45-50.

Uygun, Ş. ve Eldogan, H., 2016, k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas matrix sequences, *Int. Math. Forum*, 145-154.

Yayenie, O., 2011, A note on generalized Fibonacci sequences, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5603-5611.

Yazlik, Y. ve Taskara, N., 2012, A note on generalized k-Horadam sequence, *Computers & Mathematics with Applications*, 63 (1), 36-41.

Yazlik, Y. ve Taskara, N., 2013a, On the inverse of circulant matrix via generalized k-Horadam numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 223, 191-196.

Yazlik, Y. ve Taskara, N., 2013b, On the norms of an r-circulant matrix with the generalized k-Horadam numbers, *Journal of Inequalities and applications*, 2013 (1), 394.

Yazlik, Y., Köme, C. ve Madhusudanan, V., 2018, A new generalization of Fibonacci and Lucas p− numbers, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 25 (4), 657-669.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Arzu COŞKUN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Sivas / 30.03.1990
Telefon	**:**	+90 (545) 6204952
Faks	**:**	
e-mail	**:**	arzucoskun58@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Yenişehir Lisesi, Merkez, SİVAS	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Selçuklu, KONYA	2011
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Selçuklu, KONYA	2013
Doktora	:	Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Selçuklu, KONYA	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**

YABANCI DİLLER

2017 YDS (İngilizce): 81.25

YAYINLAR

1- A. Coskun, N. Taskara, 2018, On the Some Properties of Circulant Matrices with Third Order Linear Recurrent Sequences, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 6(1), 12-18.
2- A. Coskun, N. Taskara, 2017, Generating matrix of the bi-periodic Lucas numbers, *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1863, no. 1, p. 310004.
3- A. Coskun, N. Taskara, 2018, A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences, *Applied Mathematics and Computation*, 320, 400-406.
4- A. Coskun, N. Taskara, 2018, The Hadamard Products for bi-periodic Fibonacci and bi-periodic Lucas Generating matrices, *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(2), 272-278.
5- A. Coskun, N. Taskara, 2019, The matrix sequence in terms of bi-periodic Fibonacci numbers, *Communications, Series A1: Mathematics and Statistics* (Accepted).