T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MAKSİMUMLU VE MİNİMUMLU FARK DENKLEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ VE KARARLILIĞI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

ALİ GELİŞKEN
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
KONYA, 2009

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI MAKSİMUMLU VE MİNİMUMLU FARK DENKLEMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ VE KARARLILIĞI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Ali GELİŞKEN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

2009, 66 Sayfa

Jüri: Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Doç. Dr. Kazım İLARSLAN

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, A pozitif bir reel sayı ve r_{-1} ile r_0 da pozitif rasyonel sayılar olmak üzere, $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç değerleri için $x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_{n-1}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği incelendi.

Dördüncü bölümde ise $A > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x_n = \max\{A/x_{n-1}, 1/x_{n-3}^{\alpha}\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin kararlılığı ve periyodikliği incelendi.

Anahtar Kelimeler: Max Operatörü, Fark Denklemi, Çözüm, Kararlılık, Periyodiklik.

ABSTRACT

PhD Thesis

A STUDY ON THE STABILITY AND PERIODICITY OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS WITH MAXIMUM AND MINIMUM

Ali GELİŞKEN

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

2009, 66 Pages

Jury: Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Assoc. Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Assist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

Assist. Prof . Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

This study consists of four sections. In the first section, information about some difference equations with maximum and minimum studied before is given.

In the second section, general definitions and theorems about difference equations are given.

In the third section, the periodicity of solutions of the difference equation $x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_{n-1}$, where $A > 0$ and initial conditions $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ and $x_0 = A^{r_0}$ for r_{-1}, r_0 are positive rational numbers is investigated.

In the fourth section, the stability and periodicity of positive solutions of the difference equation $x_n = \max\left\{A/x_{n-1}, 1/x_{n-3}^{\alpha}\right\}$, where $A > 0$ and $0 < \alpha < 1$ are investigated.

Key Words : Max Operator, Difference Equation, Solution, Stability, Periodicity.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışmanın sonucunda iki orijinal makale yazılarak uluslararası dergilerde yayımlanmıştır.

Makale 1: "A note on the periodicity of the Lyness max equation", *Advances in Difference Equations*, 2008.

Makale 2: "On the global attractivity of a max-type difference equation", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009.

Doktora çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR' a ve değerli arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA ve Dr. Ramazan KARATAŞ' a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ali GELİŞKEN

Konya, 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET……i
ABSTRACT……ii
ÖNSÖZ……iii
İÇİNDEKİLER……iv

1. BÖLÜM
GİRİŞ……1
1.1 Maksimumlu ve Minimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar….1

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER……...7

3. BÖLÜM
$x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_{n-1}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ..……11
3.1 $A > 1$ Durumu ……..11
3.2 $A < 1$ Durumu ……..22
3.3 Nümerik Sonuçlar ……38

4. BÖLÜM
$x_n = \max\left\{A/x_{n-1}, 1/x_{n-3}^{\alpha}\right\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ……..48
4.1 Nümerik Sonuçlar ……55

SONUÇ VE ÖNERİLER……..……62

KAYNAKLAR ……63

1.BÖLÜM
GİRİŞ

Bu çalışmada, maksimumlu ve minimumlu fark denklemlerinin periyodikliği ve kararlılığı ele alınmıştır.

Maksimumlu ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmaların büyük bir kısmı incelenmiştir. Bu araştırmalar sonucunda, ilk olarak Grove ve Ladas (Periodicities in Nonlinear Difference Equations, *Advances in Discrete Mathematics and Aplications 4*, 2005) tarafından verilen açık problem çözülmüştür:

Açık Problem. *Assume that* $A \in (0,\infty)$, *and that* r_{-1} *and* r_0 *are positive rational numbers. Investigate the periodic nature of the solution of the difference equation*

$$x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}, \; n = 0,1,...$$

with initial conditions $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ *and* $x_0 = A^{r_0}$.

Ayrıca, $A > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere pozitif başlangıç değerleri için $x_n = \max\{A / x_{n-1}, 1 / x_{n-3}^{\alpha}\}$ fark denklemi tanımlanmış ve çözümlerinin ya $\overline{x} = 1$ denge noktasına yakınsadığı ya da er geç 2 periyotlu olduğu gösterilmiştir.

1.1 Maksimumlu Ve Minimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu bölümde, maksimumlu ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Amleh ve ark. (1998), $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{A}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini inceledikleri çalışmada; A ve başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel

sayılar olmak üzere bu fark denkleminin her çözümünün er geç periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Amleh (1998), doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A,B parametreleri ve x_{-1},x_0 başlangıç değerleri için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n-1}x_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığı ve son bölümde ise Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Janowski ve ark. (1998), $x_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n^k,A\right\}}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. A, k parametreleri ve başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere, bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını elde etmişlerdir.

Grove ve ark. (1998), $x_{n+1}=\frac{a_nx_n+b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $y_{n+1}=\frac{\max\left\{a_ny_n,b_n\right\}}{y_{n-1}}$ maksimumlu fark denklemini incelemişlerdir. Katsayılar negatif olmayan $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\left\{b_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri olmak üzere bu fark denklemlerinin her pozitif çözümünün sürekli ve sınırlı olabilmesi için yeter şartlar elde etmişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), A ve başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n,y_n,A\right\}}{x_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n,y_n,A\right\}}{y_{n-1}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Valicenti (1999), doktora tezinde; $x_{n+1}=\frac{a_nx_n+b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1}=\frac{\max\left\{a_nx_n,b_n\right\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Feuer ve ark. (2000), $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,A\}}{x_n x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denkleminde A bir reel sayı ve başlangıç değerleri de sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere çözümlerin asimptotik kararlılığını salınımlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk bölümde A bir reel sayı ve başlangıç değerleri sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. İkinci bölümde ise, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiştir. Son bölümde ise, $y_{n+1}=\frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin pozitif parametreler ve başlangıç değerleri altında asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayıları pozitif sayı dizileri olmak üzere $x_{n+1}=\frac{\max\left\{a_n(\prod_{i=n-k+1}^{n}x_i),b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^{n}x_i}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sürekliliğini, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Mishev ve ark. (2002), $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denklemini incelemişlerdir. A, B katsayıları ile başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere denklemin çözümlerinin er geç periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; A ile B pozitif reel sayılar ve k ile m pozitif tam sayılar olmak üzere $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_{n-k}},\frac{B}{x_{n-m}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir. İkincisinde ise A, B, C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A+B+C>0$ için

$x_n = \max\left\{\frac{A}{x_{n-1}}, \frac{B}{x_{n-3}}, \frac{C}{x_{n-5}}\right\}$ fark denkleminin her çözümünün er geç periyodik olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2003), yaptıkları çalışmada; daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ denkleminin çözümlerinin periyodikliği ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), daha önce Janowski ve arkadaşlarının da incelediği $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada. A ve başlangıç değerlerini pozitif reel sayılar olduğunu kabul ederek denklemin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Çalışmasının sonunda $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denklemiyle ilişkili benzer sonuçlar ortaya koymuştur.

Papaschinopoulos ve ark. (2003), yaptıkları çalışmanın birinci bölümünde $x_{n+1} = \frac{\max\{\beta_n x_n, \gamma_n x_{n-1}, \alpha_n\}}{x_n x_{n-1} x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. İkinci bölümde ise $x_{n+1} = \frac{\max\{a_n y_n, b_n\}}{y_n x_{n-1}}$, $y_{n+1} = \frac{\max\{c_n x_n, d_n\}}{x_n y_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada; A_n ve B_n, 3 periyotlu pozitif sayı dizileri olmak üzere $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar ve ark. (2005), $A, B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç değerleri için $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ ve $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1} \ldots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \ldots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Elabbasy ve ark. (2005), A_n 2 periyotlu bir pozitif sayı dizisi olmak üzere $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{A_n}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Şimsek ve ark. (2006), pozitif başlangıç değerleri için $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-1}, x_{n-1}\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yang ve ark. (2006), $A > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için $x_n = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}^{\alpha}}, \frac{A}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Berenhaut ve ark. (2006), *k* ve *m* doğal sayıları için $y_n = \max\left\{c, \frac{y_{n-k}}{y_{n-m}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını incelemişlerdir. $c \geq 1$ için çözümlerin sınırlı olduğu ve $c \in (0,1)$ için çözümlerin sınırlı olmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006), A_0, A_1 ve başlangıç değerleri pozitif fuzzy sayıları, *k* ve *m* parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere $x_n = \max\left\{\frac{A_0}{x_{n-k}}, \frac{A_1}{x_{n-m}}\right\}$ fuzzy fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve ark. (2007), *A* bir reel sayı ve başlangıç değerleri de sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\}$ fark denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Stevic (2008), p ve c pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve kararlılığını incelemiştir.

Sun (2008), $A, B > 0$ ve $0 < \alpha, \beta < 1$ olmak üzere $x_n = \max\left\{\frac{A}{x_{n-1}^{\alpha}}, \frac{B}{x_{n-2}^{\beta}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin $\bar{x} = \max\left\{A^{\frac{1}{\alpha+1}}, B^{\frac{1}{\beta+1}}\right\}$ denge noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Stevic (2009), k pozitif bir tamsayı $A_1, A_2, ..., A_k > 0$ ve $0 < \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k < 1$ olmak üzere $x_n = \max\left\{\frac{A_1}{x_{n-1}^{\alpha_1}}, \frac{A_2}{x_{n-2}^{\alpha_2}}, ..., \frac{A_k}{x_{n-k}^{\alpha_k}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin $\bar{x} = \max\left\{A_1^{\frac{1}{\alpha_1+1}}, A_2^{\frac{1}{\alpha_2+1}}, ..., A_k^{\frac{1}{\alpha_k+1}}\right\}$ denge noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Elsayed ve Stevic (2009), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, x_{n-2}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin er geç 3 periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$$

gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

Fark denklemlerinin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir.

Teorem 1.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ başlangıç değerleri için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \quad n = 0,1,2,... \tag{1.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.2. (1.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x})$$

şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 1.3. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ olmak üzere:

(**i**) Her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(**ii**) $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde,

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(**iii**) Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(**iv**) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(**v**) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(**vi**) Eğer

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < r$$

ve bazı $N \geq 1$ sayıları için

$$|x_N - \bar{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.4. (1.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x},...,\bar{x}) y_{n-i} \tag{1.2}$$

denklemine, $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x},...,\bar{x}) \lambda^{k-i} = 0 \tag{1.3}$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(**i**) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(**ii**) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\bar{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde bu çözümlere salınımlı değildir denir.

Tanım 1.6. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \le x_n \le Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir.

Tanım 1.7. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \ge -k$, $m \le \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \ge -k$, $m \le \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} \ge \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \ge \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 1.8. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $n \ge -k$ olmak üzere her n tamsayısı için

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı var ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük p pozitif tam sayısına ise esas periyot denir.

Tanım 1.9. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_{n-1}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Grove ve Ladas (2005) tarafından açık problem olarak verilen,

$$x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}, \; n = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği, A pozitif bir reel sayı ve r_{-1} ile r_0 da pozitif rasyonel sayılar olmak üzere, $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç değerleri altında incelenmiştir.

Grove ve Ladas (2005), $A = 1$ için (3.1) denkleminin çözümlerinin 5 periyotlu olduğunu göstermişlerdir. (3.1) denkleminin çözümlerinin periyodikliği $A > 1$ ve $A < 1$ durumları için incelenecektir.

3.1 $A > 1$ Durumu

(3.1) fark denkleminde $A > 1$ olmak üzere $x_n = A^{r_n}$ dönüşümü uygulanırsa

$$A^{r_{n+1}} = \frac{\max\{A^{r_n}, A\}}{A^{r_{n-1}}}$$

denklemi ve bu denklemden de

$$r_{n+1} = \max\{r_n, 1\} - r_{n-1}, \; n = 0,1,2,... \tag{3.2}$$

fark denklemi elde edilir.

Aşağıda verilen lemma, (3.2) fark denkleminin çözümlerinin bazı ardışık terimleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Lemma 3.1. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.2) fark denkleminin bir çözümü olsun. r_{-1} ile r_0 pozitif rasyonel sayılar, $r=\max\{r_{-1},r_0\}$ ve $r>1$ olmak üzere bazı $N\geq -1$ tamsayıları için aşağıda verilen ifadeler doğrudur:

i) Eğer $r_N=r$ ise $0\leq r_{N-1}<r_N$ dir.

ii) Eğer $r_N=r$ ise $r_N=r_{N+4}$ veya $r_N=r_{N+5}$ dir.

iii) Eğer $r_N=r$ ve $r_{N+1}\leq 1$ ise $r_N=r_{N+4}$ ve $r_{N+5}=r_{N+1}+r_N-1$ dir.

iv) Eğer $r_N=r$ ve $r_{N+1}>1$ ise $r_N=r_{N+5}$ ve $r_{N+6}=r_{N+1}-1$ dir.

İspat. i) $r=r_0$ olduğunu kabul edelim. Bu kabulden dolayı $r_0>1$ ve $r_{-1}<r_0$ olur. (3.2) denkleminden

$$r_1=\max\{r_0,1\}-r_{-1}=r_0-r_{-1}$$

elde edilir.

Eğer $r_1>1$ ise

$$r_2=\max\{r_1,1\}-r_0=-r_{-1}<0,$$
$$r_3=\max\{r_2,1\}-r_1=1-r_0+r_{-1}<1,$$
$$r_4=\max\{r_3,1\}-r_2=1+r_{-1}>1,$$
$$r_5=\max\{r_4,1\}-r_3=r_0$$

elde edilir. $r_1=r_0-r_{-1}>1$ olduğundan $1+r_{-1}<r_0$ ve $r_5>r_4$ elde edilir.

Eğer $r_1\leq 1$ ise

$$r_2=\max\{r_1,1\}-r_0=1-r_0<1,$$
$$r_3=\max\{r_2,1\}-r_1=1-r_0+r_{-1}\leq 1,$$
$$r_4=\max\{r_3,1\}-r_2=r_0$$

elde edilir. $1-r_0+r_{-1}\leq 1<r_0$ olduğundan $0\leq r_3<r_4$ elde edilir.

Benzer şekilde $r = r_{-1}$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $r_{-1} > 1$ olur.

Eğer $r_0 > 1$ ise

$$r_1 = \max\{r_0, 1\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} < 0,$$
$$r_2 = \max\{r_1, 1\} - r_0 = 1 - r_0 < 0,$$
$$r_3 = \max\{r_2, 1\} - r_1 = 1 - r_0 + r_{-1} > 1,$$
$$r_4 = \max\{r_3, 1\} - r_2 = r_{-1},$$

olup $1 - r_0 + r_{-1} < r_{-1}$ eşitsizliğinden $r_3 < r_4$ elde edilir.

Eğer $r_0 \le 1$ ise

$$r_1 = \max\{r_0, 1\} - r_{-1} = 1 - r_{-1} < 0,$$
$$r_2 = \max\{r_1, 1\} - r_0 = 1 - r_0 < 1,$$
$$r_3 = \max\{r_2, 1\} - r_1 = r_{-1}$$

olup $1 - r_0 < 1 < r_{-1}$ eşitsizliğinden $0 \le r_2 < r_3$ elde edilir. İşleme bu şekilde devam edildiğinde, genel olarak $N \ge -1$ olmak üzere, bazı N tamsayıları için $r_N = r$ ise $0 \le r_{N-1} < r_N$ olduğu görülür.

ii) $N \ge -1$ olmak üzere $r_N = r$ olsun. O zaman, (i) den $0 \le r_{N-1} < r_N$ olup (3.2) denkleminden

$$r_{N+1} = \max\{r_N, 1\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1} > 0$$

elde edilir.

Eğer $r_{N+1} \le 1$ ise

$$r_{N+2} = \max\{r_{N+1}, 1\} - r_N = 1 - r_N < 0,$$
$$r_{N+3} = \max\{r_{N+2}, 1\} - r_{N+1} = 1 - r_{N+1} < 1,$$
$$r_{N+4} = \max\{r_{N+3}, 1\} - r_{N+2} = r_N$$

elde edilir.

Eğer $r_{N+1} > 1$ ise

$$r_{N+2} = \max\{r_{N+1}, 1\} - r_N = -r_{N-1} \le 0,$$
$$r_{N+3} = \max\{r_{N+2}, 1\} - r_{N+1} = 1 - r_{N+1} < 1,$$
$$r_{N+4} = \max\{r_{N+3}, 1\} - r_{N+2} = 1 - r_{N+2} \ge 1,$$
$$r_{N+5} = \max\{r_{N+4}, 1\} - r_{N+3} = r_N,$$

elde edilir ki iddia doğrudur.

iii) $N \ge -1$ olmak üzere $r_N = r$ ve $r_{N+1} \le 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, (i) den $0 \le r_{N-1} < r_N$ olup (ii) nin ispatındaki işlemlere benzer işlemler yapılırsa $r_N = r_{N+4}$ ve

$$r_{N+5} = \max\{r_{N+4}, 1\} - r_{N+3} = r_{N+1} + r_N - 1$$

elde edilir.

iv) $N \ge -1$ olmak üzere $r_N = r$ ve $r_{N+1} > 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, (i) den $0 \le r_{N-1} < r_N$ olup (ii) nin ispatındaki işlemlere benzer işlemler yapılırsa $r_N = r_{N+5}$ ve

$$r_{N+6} = \max\{r_{N+5}, 1\} - r_{N+4} = r_{N+1} - 1$$

elde edilir.

Lemma 3.1 (ii) nin ispatından; Lemma 3.1 (iii) nin "Eğer $r_N = r_{N+4} = r$ ise $r_{N+1} \le 1$ ve $r_{N+5} = r_{N+1} + r_N - 1$ dir." şeklinde, Lemma 3.1 (iv) nin de "Eğer $r_N = r_{N+5} = r$ ise $r_{N+1} > 1$ ve $r_{N+6} = r_{N+1} - 1$ dir." şeklinde de ifade edilebileceği görülür.

(3.2) denkleminin Lemma 3.1 deki şartları sağlayan her çözümü, değeri *r* ye eşit olan sonsuz sayıda terime sahiptir. Gerçekten, $r = \max\{r_{-1}, r_0\}$ kabulünden

$j=-1$ ya da $j=0$ için $r_j = r$ dir. Lemma 3.1 (ii) den ya $r_{j+4} = r$ ya da $r_{j+5} = r$ olur. Eğer $r_{j+4} = r$ ise, ya $r_{j+8} = r$ ya da $r_{j+9} = r$ dir. Eğer $r_{j+5} = r$ ise, ya $r_{j+9} = r$ ya da $r_{j+10} = r$ dir. Bu işlem ardışık olarak tekrar edeceğinden değeri r ye eşit olan sonsuz sayıda terim bulunur.

(3.2) denkleminin Lemma 3.1 deki şartları sağlayan herhangi bir çözümünün sonlu sayıdaki terimlerini göz önüne alalım ve değeri r ye eşit olan terimlerin tam olarak bilindiğini varsayalım. Şöyle ki $r_N = r_{N+4} = r$ olacak şekilde iki tane N tamsayısı ve $r_N = r_{N+5} = r$ olacak şekilde de iki tane N tamsayısı olduğunu varsayalım.

Eğer $r_j = r_{j+4} = r_{j+8} = r_{j+13} = r_{j+18} = r$ ise Lemma 3.1 (iii)-(iv) den

$r_j = r_{j+4} = r$ ise $r_{j+5} = r_{j+1} + r_j - 1$,
$r_{j+4} = r_{j+8} = r$ ise $r_{j+9} = r_{j+5} + r_{j+4} - 1$ ve $r_{j+9} = r_{j+1} + 2r_j - 2$,
$r_{j+8} = r_{j+13} = r$ ise $r_{j+14} = r_{j+9} - 1$ ve $r_{j+14} = r_{j+1} + 2r_j - 3$,
$r_{j+13} = r_{j+18} = r$ ise $r_{j+19} = r_{j+14} - 1$ ve $r_{j+19} = r_{j+1} + 2r_j - 4$

elde edilir.

Eğer $r_j = r_{j+4} = r_{j+9} = r_{j+13} = r_{j+18} = r$ ise Lemma 3.1 (iii)-(iv) den

$r_j = r_{j+4} = r$ ise $r_{j+5} = r_{j+1} + r_j - 1$,
$r_{j+4} = r_{j+9} = r$ ise $r_{j+10} = r_{j+5} - 1$ ve $r_{j+10} = r_{j+1} + r_j - 2$,
$r_{j+9} = r_{j+13} = r$ ise $r_{j+14} = r_{j+10} + r_{j+9} - 1$ ve $r_{j+14} = r_{j+1} + 2r_j - 3$,
$r_{j+13} = r_{j+18} = r$ ise $r_{j+19} = r_{j+14} - 1$ ve $r_{j+19} = r_{j+1} + 2r_j - 4$

elde edilir.

Eğer $r_j = r_{j+4} = r_{j+9} = r_{j+14} = r_{j+18} = r$ ise Lemma 3.1 (iii)-(iv) den

$r_j = r_{j+4} = r$ ise $r_{j+5} = r_{j+1} + r_j - 1$,

$r_{j+4} = r_{j+9} = r$ ise $r_{j+10} = r_{j+5} - 1$ ve $r_{j+10} = r_{j+1} + r_j - 2$,

$r_{j+9} = r_{j+14} = r$ ise $r_{j+15} = r_{j+10} - 1$ ve $r_{j+15} = r_{j+1} + r_j - 3$,

$r_{j+14} = r_{j+18} = r$ ise $r_{j+19} = r_{j+15} + r_{j+14} - 1$ ve $r_{j+19} = r_{j+1} + 2r_j - 4$

elde edilir.

Eğer $r_j = r_{j+5} = r_{j+9} = r_{j+14} = r_{j+18} = r$ ise Lemma 3.1 (iii)-(iv) den

$r_j = r_{j+5} = r$ ise $r_{j+6} = r_{j+1} - 1$,

$r_{j+5} = r_{j+9} = r$ ise $r_{j+10} = r_{j+6} + r_{j+5} - 1$ ve $r_{j+10} = r_{j+1} + r_j - 2$,

$r_{j+9} = r_{j+14} = r$ ise $r_{j+15} = r_{j+10} - 1$ ve $r_{j+15} = r_{j+1} + r_j - 3$,

$r_{j+14} = r_{j+18} = r$ ise $r_{j+19} = r_{j+15} + r_{j+14} - 1$ ve $r_{j+19} = r_{j+1} + 2r_j - 4$

elde edilir.

Eğer $r_j = r_{j+5} = r_{j+9} = r_{j+13} = r_{j+18} = r$ ise Lemma 3.1 (iii)-(iv) den

$r_j = r_{j+5} = r$ ise $r_{j+6} = r_{j+1} - 1$,

$r_{j+5} = r_{j+9} = r$ ise $r_{j+10} = r_{j+6} + r_{j+5} - 1$ ve $r_{j+10} = r_{j+1} + r_j - 2$,

$r_{j+9} = r_{j+13} = r$ ise $r_{j+14} = r_{j+10} + r_{j+9} - 1$ ve $r_{j+14} = r_{j+1} + 2r_j - 3$,

$r_{j+13} = r_{j+18} = r$ ise $r_{j+19} = r_{j+14} - 1$ ve $r_{j+19} = r_{j+1} + 2r_j - 4$

elde edilir.

Eğer $r_j = r_{j+5} = r_{j+10} = r_{j+14} = r_{j+18} = r$ ise Lemma 3.1 (iii)-(iv) den

$r_j = r_{j+5} = r$ ise $r_{j+6} = r_{j+1} - 1$,

$r_{j+5} = r_{j+10} = r$ ise $r_{j+11} = r_{j+6} - 1$ ve $r_{j+11} = r_{j+1} - 2$,

$r_{j+10} = r_{j+14} = r$ ise $r_{j+15} = r_{j+11} + r_{j+10} - 1$ ve $r_{j+15} = r_{j+1} + r_j - 3$,

$r_{j+14} = r_{j+18} = r$ ise $r_{j+19} = r_{j+15} + r_{j+14} - 1$ ve $r_{j+19} = r_{j+1} + 2r_j - 4$

elde edilir.

Yukarıda, (3.2) denkleminin kabul edilen şartlardaki muhtemel çözümlerinin ilk (j+19) terimi göz önüne alınmıştır. Altı farklı çözüm r_{-1} ile r_0 başlangıç değerlerinin seçiminden kaynaklanır. Yani, (3.2) denkleminin kabul edilen şartlar altındaki bir çözümü, yukarıdaki altı farklı durumdan birine karşılık gelir.

Yukarıdaki altı farklı durum için yapılan işlemler sonucunda elde edilen çözümlerin karşılıklı son iki terimlerinin eşit olduğu açıktır. O halde, (3.2) denkleminin sonlu sayıda terime sahip bir çözümünde, değeri r ye eşit olan terimler tam olarak belirlenebilirse lemma 3.1 (iii)-(iv) deki işlemler sırasına bakılmaksızın ardışık olarak uygulandığında son iki teriminin değeri tam olarak hesaplanabilir.

Aşağıdaki lemma, (3.2) denkleminin sonlu sayıda terime sahip bir çözümünde, değeri r ye eşit olan terimlerin sayısını göstermektedir.

Lemma 3.2. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.2) fark denkleminin bir çözümü olsun. r_{-1} ile r_0 pozitif rasyonel sayılar, $r = \max\{r_{-1}, r_0\}$, $r = \frac{k}{m} > 1$, $(k,m) = 1$ ve $(-1) \le N < (5k - m - 2)$ olmak üzere $r_N = r_{N+4} = r$ olacak şekilde m tane N tamsayısı ve $r_N = r_{N+5} = r$ olacak şekilde de (k-m) tane N tamsayısı vardır.

İspat. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, Lemma 3.2 de bahsedilen şartları gerçekleyen (3.2) denkleminin bir çözümü olsun. $r = \frac{k}{m} > 1$ olduğundan m ve (k-m) birer pozitif tamsayıdır.

Şimdi $r_N = r_{N+4} = r$ olacak şekilde (m+1) tane N tamsayısı var olduğunu kabul edelim. Bu kabulden dolayı Lemma 3.1 (*iii*) deki işlemleri (m+1) kere ardışık olarak uygulayabiliriz. $j \in \{-1,0\}$ için $r_j = r$ olduğunu biliyoruz. O zaman,

$l_1 = 0,1,\ldots,m$ için

$$r_{j+4l_1} = r_{j+4(l_1+1)} = r \text{ ve } r_{j+4l_1+1} \le 1$$

dir.Lemma 3.1 (iii) deki işlemler (m+1) kere ardışık olarak uygulanırsa

$$\begin{aligned} r_{j+5} &= r_{j+1} + r_j - 1 \le 1 \\ r_{j+9} &= r_{j+1} + 2r_j - 2 \le 1 \\ r_{j+13} &= r_{j+1} + 3r_j - 3 \le 1 \\ &\vdots \\ r_{j+4m+1} &= r_{j+1} + mr_j - m \le 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $r_{j+1} + m(\frac{k}{m}) - m \le 1$ den $r_{j+1} \le 0$ elde edilir. Halbuki Lemma 3.1 (i) ve $r_{j+1} = r_j - r_{j-1}$ den $r_{j+1} > 0$ dır. Bu yüzden, Lemma 3.1 (iii) deki işlemler (m+1) kere ardışık olarak uygulanamaz. Başka bir ifade ile $r_N = r_{N+4} = r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (m+1) den küçüktür.

Benzer olarak, $r_N = r_{N+5} = r$ olacak şekilde (k-m+1) tane N tamsayısının var olduğunu kabul edelim. O zaman, Lemma 3.1 (iv) deki işlemleri (k-m+1) kere ardışık olarak uygulayabiliriz. $l_2 = 0,1,\ldots,(k-m)$ için

$$r_{j+5l_2} = r_{j+5(l_2+1)} = r$$

ve

$$\begin{aligned} r_{j+6} &= r_{j+1} - 1 > 1, \\ r_{j+11} &= r_{j+1} - 2 > 1, \\ r_{j+16} &= r_{j+1} - 3 > 1, \\ &\vdots \\ r_{j+5(k-m)+1} &= r_{j+1} - (k-m) > 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $r_{j+1}-(k-m)>1$ den $r_{j+1}>1+(k-m)\geq\frac{k}{m}$ elde edilir. Ancak, Lemma 3.1 (i) ve $r_{j+1}=r_j-r_{j-1}$ den dolayı $r_j\geq r_{j+1}$ dir. Bu nedenle $r_{j+5(k-m)+1}>1$ olamaz ve Lemma 3.1 (iv) deki işlemler (k-m+1) kere ardışık olarak uygulanamaz. Yani, $r_N=r_{N+5}=r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (k-m+1) den küçüktür.

Şimdi $r_N=r_{N+4}=r$ olacak şekilde (m-1) tane N tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 (iii) deki işlemler (m-1) kez ardışık olarak uygulanırsa

$$r_j=r_{j+4}=r_{j+8}=\cdots=r_{j+4(m-2)}=r_{j+4(m-1)}=r$$

elde edilir. Burada $r_{j+4(m-2)}$, $r_N=r_{N+4}=r$ eşitliğini sağlayan en son terimdir. Eğer $r_{j+4(m-1)}$ de bu eşitliği sağlarsa $r_N=r_{N+4}=r$ olacak şekilde m tane N tamsayısı var olur ki bu kabulümüzle çelişir. O halde, $r_N=r_{N+5}=r$ eşitliğini sağlayan ilk terim $r_{j+4(m-1)}$ olur. Bu durumda

$$r_{j+4(m-1)}=r_{j+4(m-1)+5}=r_{j+4(m-1)+10}=\cdots=r_{j+4(m-1)+5(k-m)}=r_{j+4(m-1)+5(k-m+1)}=r$$

olup $r_N=r_{N+5}=r$ olacak şekilde (k-m+1) tane N tamsayısı vardır. $r_N=r_{N+5}=r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısının (k-m+1) den küçük olması nedeniyle bu mümkün değildir. O zaman, $r_N=r_{N+4}=r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (m-1) den büyüktür. O halde, $r_N=r_{N+4}=r$ eşitliğini sağlayan m tane N tamsayısı vardır.

Benzer şekilde, $r_N=r_{N+5}=r$ olacak şekilde (k-m-1) tane N tamsayısının olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 (iv) deki işlemler (k-m-1) kez ardışık olarak uygulanırsa

$$r_j=r_{j+5}=r_{j+10}=\cdots=r_{j+5(k-m-2)}=r_{j+5(k-m-1)}=r$$

elde edilir. $r_N = r_{N+5} = r$ eşitliğini sağlayan son terim $r_{j+5(k-m-2)}$ dir. $r_{j+5(k-m-1)}$ ise $r_N = r_{N+4} = r$ eşitliğini sağlayan ilk terimdir. Lemma 3.1 (ii) den

$$r_{j+5(k-m-1)} = r_{j+5(k-m-1)+4} = r_{j+5(k-m-1)+8} = \cdots = r_{j+5(k-m-1)+4m} = r_{j+5(k-m-1)+4(m+1)} = r$$

elde edilir. Buradan da $r_N = r_{N+4} = r$ olacak şekilde (m+1) tane N tamsayısının bulunduğu görülür. Bu ise mümkün değildir. O zaman $r_N = r_{N+5} = r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (k-m-1) den büyük olmalıdır ki N tamsayılarının sayısının (k-m) olduğu anlamına gelir.

Lemma 3.1 (iii)-(iv) deki iddialar, Lemma 3.2 de göz önüne alınarak genelleştirilebilir. Bu genellemeler sonlandırılmış bir çözümdeki son iki terimin hızlı bir şekilde hesaplanmasını sağlar.

Lemma 3.3. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.2) fark denkleminin Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 deki şartları gerçekleyen bir çözümü olsun. Bazı $N \geq -1$ tamsayıları için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $l_1 = 1,2,\ldots,m$ için $r_N = r_{N+4l_1} = r$ ise, $r_{N+4l_1+1} = r_N + r_{N+4(l_1-1)+1} - 1$ dir.

ii) $l_2 = 1,2,\ldots,(k-m)$ için $r_{N+4m} = r_{N+4m+5l_2} = r$ ise

$r_{N+4m+5l_2+1} = r_{N+4m+5(l_2-1)+1} - 1$ dir.

Teorem 3.1. $A > 1$, r_{-1} ile r_0 pozitif rasyonel sayıları için başlangıç değerleri $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ olmak üzere (3.1) fark denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü periyodiktir. Eğer $\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = \dfrac{k}{m}$ ve $(k,m) = 1$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü ($5k$-m) esas periyotludur.

İspat. (3.1) fark denkleminde $A > 1$ ve $n \geq -1$ olmak üzere $x_n = A^{r_n}$ dönüşümü uygulanıp (3.2) denklemi elde edilmişti. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in (3.2) denkleminin bir çözümü,

$\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = \dfrac{k}{m}$ ve $(k,m) = 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in (*5k-m*) esas periyotlu olduğunu göstermek için her $n \geq -1$ tamsayısı için $r_n = r_{n+5k-m}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\dfrac{k}{m} = 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $k = m = 1$, $0 < r_{-1} \leq 1$ ve $0 < r_0 \leq 1$ olur. (3.2) denkleminden,

$$r_1 = \max\{r_0, 1\} - r_{-1} = 1 - r_{-1} < 1,$$
$$r_2 = \max\{r_1, 1\} - r_0 = 1 - r_0 < 1,$$
$$r_3 = \max\{r_2, 1\} - r_1 = r_{-1},$$
$$r_4 = \max\{r_3, 1\} - r_2 = r_0$$

elde edilir ki her $n \geq -1$ tamsayısı için $r_n = r_{n+5k-m}$ dir.

$\dfrac{k}{m} > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman, $\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = \max\{r_{-1}, r_0\} = \dfrac{k}{m}$ olur. Lemma 3.3 (i) den $r = \dfrac{k}{m}$, $N \geq -1$ ve $l_1 = 1,2,\ldots,m$ için $r_N = r_{N+4l_1} = r$ ve $r_{N+4l_1+1} = r_N + r_{N+4(l_1-1)+1} - 1$ dir. Buradan $r_N = r_{N+4m} = r$ ve

$$r_{N+5} = r_N + r_{N+1} - 1$$
$$r_{N+9} = r_N + r_{N+5} - 1 = 2r_N + r_{N+1} - 2$$
$$\vdots$$
$$r_{N+4m+1} = mr_N + r_{N+1} - m$$

elde edilir. Lemma 3.3 (ii) den $l_2 = 1,2,\ldots,(k-m)$ için $r_{N+4m} = r_{N+4m+5l_2} = r$ ve $r_{N+4m+5l_2+1} = r_{N+4m+5(l_2-1)+1} - 1$ dir. Buradan $r_{N+4m} = r_{N+4m+5(k-m)} = r$ ve

$$r_{N+4m+6} = r_{N+4m+1} - 1 = mr_N + r_{N+1} - m - 1,$$

$$r_{N+4m+11} = r_{N+4m+6} - 1 = mr_N + r_{N+1} - m - 2,$$
$$\vdots$$
$$r_{N+4m+5(k-m)+1} = mr_N + r_{N+1} - m - (k-m) = r_{N+1}$$

elde edilir. Buradan $r_N = r_{N+4m+5(k-m)} = r$ ve $r_{N+1} = r_{N+4m+5(k-m)+1}$ olduğu görülür. $r_{n-1} = \max\{r_n, 1\} - r_{n+1}$ olduğu göz önüne alındığında her $n \geq -1$ için $r_n = r_{n+5k-m}$ olur. Ayrıca, $l_1 = 1,2,3,\ldots,m$ ve $l_2 = 1,2,3,\ldots,(k-m-1)$ için $r_{N+1} \neq r_{N+4l_1+1}$ ve $r_{N+1} \neq r_{N+4m+5l_2+1}$ olduğundan (5*k*-*m*), en küçük periyot olur ki ispat tamamlanır.

3.2 $A < 1$ Durumu

(3.1) fark denkleminde $A < 1$ olmak üzere $x_n = A^{r_n}$ dönüşümü uygulanırsa

$$r_{n+1} = \min\{r_n, 1\} - r_{n-1}, \; n = 0,1,2,... \tag{3.3}$$

fark denklemi elde edilir.

(3.3) fark denkleminin çözümlerinin bazı ardışık terimleri arasındaki ilişkiyi gösteren ve benzer sonuçlar içeren iki lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.4. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.3) fark denkleminin bir çözümü olsun. r_{-1} ile r_0 pozitif rasyonel sayılarından biri $(0,1]$ aralığında diğeri de $(1,\infty)$ aralığında bulunmak üzere $r = \max\{r_{-1}, r_0\}$ ve bazı $N > 0$ tamsayıları için aşağıda verilen ifadeler doğrudur:

i) Eğer $r_N = -r$ ise $r_N \leq r_{N-1} < 0$ dır.

ii) Eğer $r_N = -r$ ise $r_N = r_{N+5}$ veya $r_N = r_{N+6}$ dır.

iii) Eğer $r_N = -r$ ve $r_{N-1} < -1$ ise $r_N = r_{N+5}$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} + 1$ dir.

iv) Eğer $r_N = -r$ ve $r_{N-1} \geq -1$ ise $r_N = r_{N+6}$ ve $r_{N+5} = r_{N-1} + r_N + 1$ dir.

İspat. i) $r = r_0 > 1$ ve $0 < r_{-1} \leq 1$ olduğunu kabul edelim. (3.3) denkleminden

$$r_1 = \min\{r_0,1\} - r_{-1} = 1 - r_{-1} < 1,$$
$$r_2 = \min\{r_1,1\} - r_0 = 1 - r_{-1} - r_0 < 0,$$
$$r_3 = \min\{r_2,1\} - r_1 = -r_0$$

elde edilir. $(-r_0) \le 1 - r_{-1} - r_0 < 0$ olup $r_3 \le r_2 < 0$ dır.

$$r_4 = \min\{r_3,1\} - r_2 = r_{-1} - 1 \le 0,$$
$$r_5 = \min\{r_4,1\} - r_3 = r_0 + r_{-1} - 1 > 0$$

elde edilir.

Eğer $r_5 > 1$ ise

$$r_6 = \min\{r_5,1\} - r_4 = 2 - r_{-1} \ge 1,$$
$$r_7 = \min\{r_6,1\} - r_5 = 2 - r_{-1} - r_0 < 0,$$
$$r_8 = \min\{r_7,1\} - r_6 = -r_0$$

elde edilir. $(-r_0) < 2 - r_{-1} - r_0 < 0$ olup $r_8 < r_7 < 0$ dır.

Eğer $r_5 \le 1$ ise

$$r_6 = \min\{r_5,1\} - r_4 = r_0,$$
$$r_7 = \min\{r_6,1\} - r_5 = 2 - r_0 - r_{-1} < 1,$$
$$r_8 = \min\{r_7,1\} - r_6 = 2 - 2r_0 - r_{-1} < 0,$$
$$r_9 = \min\{r_8,1\} - r_7 = -r_0$$

elde edilir. $(-r_0) \le (2 - r_0 - r_{-1}) - r_0 < 0$ olup $r_9 \le r_8 < 0$ dır.

$r = r_{-1} > 1$ ve $0 < r_0 \le 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$r_1 = \min\{r_0,1\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} < 0,$$

$$r_2 = \min\{r_1, 1\} - r_0 = -r_{-1}$$

elde edilir. $(-r_{-1}) < r_0 - r_{-1} < 0$ olup $r_2 < r_1 < 0$ dır. İşleme devam edilirse

$$r_3 = \min\{r_2, 1\} - r_1 = -r_0,$$
$$r_4 = \min\{r_3, 1\} - r_2 = -r_0 + r_{-1}$$

elde edilir.

Eğer $r_4 > 1$ ise

$$r_5 = \min\{r_4, 1\} - r_3 = 1 + r_0 > 1,$$
$$r_6 = \min\{r_5, 1\} - r_4 = 1 + r_0 - r_{-1} < 1,$$
$$r_7 = \min\{r_6, 1\} - r_5 = -r_{-1}$$

elde edilir. $(-r_{-1}) < 1 + r_0 - r_{-1} < 0$ olup $r_7 < r_6 < 0$ dır.

Eğer $r_4 \le 1$ ise

$$r_5 = \min\{r_4, 1\} - r_3 = r_{-1},$$
$$r_6 = \min\{r_5, 1\} - r_4 = 1 + r_0 - r_{-1} < 1,$$
$$r_7 = \min\{r_6, 1\} - r_5 = 1 + r_0 - 2r_{-1} < 0,$$
$$r_8 = \min\{r_7, 1\} - r_6 = -r_{-1}$$

elde edilir. $(-r_{-1}) \le (1 + r_0 - r_{-1}) - r_{-1}$ olup $r_8 \le r_7 < 0$ dır.

Yukarıdaki işlemlerden genel olarak bazı $N > 0$ tamsayıları için $r_N = -r$ ise $r_N \le r_{N-1} < 0$ olduğu görülür.

ii) $N > 0$ olmak üzere $r_N = -r$ olsun. O zaman, (i) den $r_N \le r_{N-1} < 0$ olup (3.3) denkleminden

$$r_{N+1} = \min\{r_N, 1\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$
$$r_{N+2} = \min\{r_{N+1}, 1\} - r_N = -r_{N-1}$$

elde edilir.

Eğer $r_{N+2} \leq 1$ ise

$$r_{N+3} = \min\{r_{N+2}, 1\} - r_{N+1} = -r_N,$$
$$r_{N+4} = \min\{r_{N+3}, 1\} - r_{N+2} = 1 + r_{N-1},$$
$$r_{N+5} = \min\{r_{N+4}, 1\} - r_{N+3} = 1 + r_{N-1} + r_N,$$
$$r_{N+6} = \min\{r_{N+5}, 1\} - r_{N+4} = r_N$$

elde edilir.

Eğer $r_{N+2} > 1$ ise

$$r_{N+3} = \min\{r_{N+2}, 1\} - r_{N+1} = 1 - r_N + r_{N-1},$$
$$r_{N+4} = \min\{r_{N+3}, 1\} - r_{N+2} = 1 + r_{N-1},$$
$$r_{N+5} = \min\{r_{N+4}, 1\} - r_{N+3} = r_N$$

elde edilir ki iddia doğrudur.

iii) $N > 0$ olmak üzere, $r_N = -r$ ve $r_{N-1} < -1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $r_{N+2} = -r_{N-1}$ olduğu göz önüne alınıp (ii) nin ispatındaki işlemlere benzer işlemler yapılırsa $r_N = r_{N+5} = -r$ ve $r_{N+4} = 1 + r_{N-1}$ elde edilir.

iv) $N > 0$ olmak üzere, $r_N = -r$ ve $r_{N-1} \geq -1$ olduğunu varsayalım. O zaman, $r_{N+2} = -r_{N-1}$ olduğu göz önüne alınırsa $r_N = r_{N+6} = -r$ ve $r_{N+5} = r_{N-1} + r_N + 1$ elde edilir.

Lemma 3.4 (ii) nin ispatından; Lemma 3.4 (iii) nin ‘‘Eğer $r_N = r_{N+5} = -r$ ise $r_{N-1} < -1$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} + 1$ dir.’’ şeklinde, Lemma 3.4 (iv) nin de ‘‘Eğer $r_N = r_{N+6} = -r$ ise $r_{N-1} \geq -1$ ve $r_{N+5} = r_{N-1} + r_N + 1$ dir.’’ şeklinde de ifade edilebileceği açıktır.

Lemma 3.4 (ii) yi sağlayan sonsuz sayıda N tamsayısının olduğu açıktır. (3.3) denkleminin bir çözümünün belirli sayıdaki ardışık terimleri içinde (iii) ve (iv) deki şartları sağlayan N tamsayılarının sayısı tam olarak belirlemek şartıyla elde edilebilecek son iki terimin değerini, işlem sırasına bakılmaksızın (iii) ve (iv) deki işlemleri belirlenen sayıda uygulayarak ilk iki terime bağlı olarak bulabiliriz. (3.3) denkleminin muhtemel bir çözümünde önce (iv) deki şartları sağlayan N tamsayıları sonra da (iii) deki şartları sağlayan N tamsayıları ardı ardına bulunur. Önce (iv) deki işlemleri sonrada (iii) deki işlemleri arka arkaya uygulayabilmek son iki terimin hesaplanmasında kolaylık sağlar.

Lemma 3.5. Başlangıç değerleri 1’den büyük rasyonel sayılar olmak üzere (3.3) fark denkleminin bir çözümü $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. $r = r_{-1} + r_0$ olmak üzere bazı N pozitif tamsayıları için aşağıda verilen ifadeler doğrudur:

i) Eğer $r_N = 1 - r$ ise $r_N < r_{N-1} \leq 0$ dır.

ii) Eğer $r_N = 1 - r$ ise $r_N = r_{N+5}$ veya $r_N = r_{N+6}$ dır.

iii) Eğer $r_N = 1 - r$ ve $r_{N-1} \leq -1$ ise $r_N = r_{N+5}$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} + 1$ dır.

iv) Eğer $r_N = 1 - r$ ve $r_{N-1} > -1$ ise $r_N = r_{N+6}$ ve $r_{N+5} = r_{N-1} + r_N + 1$ dır.

İspat. i) $1 < r_{-1}$, $1 < r_0$ ve $r = r_{-1} + r_0$ olduğunu kabul edelim. (3.3) denkleminden

$$r_1 = \min\{r_0, 1\} - r_{-1} = 1 - r_{-1},$$
$$r_2 = \min\{r_1, 1\} - r_0 = 1 - r_{-1} - r_0$$

elde edilir ve $r_2 < r_1 < 0$ dır. İşleme devam edilirse

$$r_3 = \min\{r_2, 1\} - r_1 = -r_0,$$
$$r_4 = \min\{r_3, 1\} - r_2 = r_{-1} - 1$$

elde edilir.

Eğer $r_4 \geq 1$ ise

$$r_5 = \min\{r_4, 1\} - r_3 = 1 + r_0,$$
$$r_6 = \min\{r_5, 1\} - r_4 = 2 - r_{-1},$$
$$r_7 = \min\{r_6, 1\} - r_5 = 1 - r_{-1} - r_0$$

elde edilir ve $r_7 < r_6 \leq 0$ dır.

Eğer $r_4 < 1$ ise

$$r_5 = \min\{r_4, 1\} - r_3 = r_{-1} + r_0 - 1,$$
$$r_6 = \min\{r_5, 1\} - r_4 = 2 - r_{-1},$$
$$r_7 = \min\{r_6, 1\} - r_5 = 3 - 2r_{-1} - r_0,$$
$$r_8 = \min\{r_7, 1\} - r_6 = 1 - r_{-1} - r_0$$

elde edilir ve $r_8 < r_7 < 0$ dır.

Yukarıdaki işlemlere devam edilirse genel olarak; bazı $N > 0$ tamsayıları için $r_N = 1 - r$ ise $r_N < r_{N-1} \leq 0$ elde edilir.

ii) $N > 0$ olmak üzere $r_N = 1 - r$ olsun. O zaman, (*i*) den $r_N < r_{N-1} \leq 0$ olup (3.3) denkleminden

$$r_{N+1} = \min\{r_N, 1\} - r_{N-1} = r_N - r_{N-1},$$
$$r_{N+2} = \min\{r_{N+1}, 1\} - r_N = -r_{N-1}$$

elde edilir.

Eğer $r_{N+2} < 1$ ise

$$r_{N+3} = \min\{r_{N+2}, 1\} - r_{N+1} = -r_N,$$
$$r_{N+4} = \min\{r_{N+3}, 1\} - r_{N+2} = 1 + r_{N-1},$$
$$r_{N+5} = \min\{r_{N+4}, 1\} - r_{N+3} = 1 + r_{N-1} + r_N,$$
$$r_{N+6} = \min\{r_{N+5}, 1\} - r_{N+4} = r_N$$

elde edilir.

Eğer $r_{N+2} \geq 1$ ise

$$r_{N+3} = \min\{r_{N+2}, 1\} - r_{N+1} = 1 - r_N + r_{N-1},$$
$$r_{N+4} = \min\{r_{N+3}, 1\} - r_{N+2} = 1 + r_{N-1},$$
$$r_{N+5} = \min\{r_{N+4}, 1\} - r_{N+3} = r_N$$

elde edilir ki iddia doğrudur.

iii) $N > 0$ olmak üzere $r_N = 1 - r$ ve $r_{N-1} \leq -1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $r_{N+2} = -r_{N-1}$ olduğu göz önüne alınıp (ii) nin ispatındaki işlemlere benzer işlemler yapılırsa $r_N = r_{N+5} = 1 - r$ ve $r_{N+4} = 1 + r_{N-1}$ elde edilir.

iv) $N > 0$ olmak üzere $r_N = 1 - r$ ve $r_{N-1} > -1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $r_{N+2} = -r_{N-1}$ olduğu göz önüne alınıp (ii) nin ispatındaki işlemlere benzer işlemler yapılırsa $r_N = r_{N+6} = 1 - r$ ve $r_{N+5} = r_{N-1} + r_N + 1$ elde edilir.

Lemma 3.5 (ii) nin ispatından; Lemma 3.5 (iii) nin ‘‘Eğer $r_N = r_{N+5} = 1 - r$ ise $r_{N-1} \leq -1$ ve $r_{N+4} = r_{N-1} + 1$ dir.’’ şeklinde Lemma 3.5 (iv) nin de ‘‘Eğer $r_N = r_{N+6} = 1 - r$ ise $r_{N-1} > -1$ ve $r_{N+5} = r_{N-1} + r_N + 1$ dir.’’ şeklinde de ifade edilebileceği açıktır.

Lemma 3.5 (ii) yi sağlayan sonsuz sayıda N tamsayısının olduğu açıktır. (3.3) denkleminin bir çözümünün belirli sayıdaki ardışık terimleri içinde (iii) ve (iv) deki şartları sağlayan N tamsayılarının sayısı tam olarak belirlenmesiyle elde edilebilecek son iki terimin değerini, (iii) ve (iv) deki işlemleri ardı ardına uygulayarak ilk iki terime bağlı olarak bulabiliriz.

Lemma 3.6. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.3) fark denkleminin Lemma 3. 4 deki şartları gerçekleyen bir çözümü olsun. $r = \max\{r_{-1}, r_0\} = \frac{k}{m}$, $(k,m) = 1$ ve $N < (5k+m)$ olmak üzere $r_N = r_{N+6} = -r$ olacak şekilde m tane N pozitif tamsayısı ve $r_N = r_{N+5} = -r$ olacak şekilde de (k-m) tane N pozitif tamsayısı vardır.

İspat. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, Lemma 3.4 de bahsedilen şartları gerçekleyen (3.3) denkleminin bir çözümü olsun. r_{-1}, r_0 başlangıç değerleri, biri $(0,1]$ aralığında diğeri de $(1,\infty)$ aralığında bulunan iki pozitif rasyonel sayıdır. Böylece $r = \max\{r_{-1}, r_0\} = \frac{k}{m}$ ve $(k,m) = 1$ olmak üzere $r = \frac{k}{m} > 1$ olur.

$r_N = r_{N+6} = -r$ olacak şekilde $(m+1)$ tane N tamsayısı var olduğunu kabul edelim. O zaman, Lemma 3.4 (iv) deki işlemleri $(m+1)$ kere ardışık olarak uygulayabiliriz. $j \in \{2,3\}$ için $r_j = -r$ olduğunu biliyoruz. O zaman, $l_1 = 0,1,\ldots,m$ için

$$r_{j+6l_1} = r_{j+6(l_1+1)} = -r \text{ ve } r_{j+6l_1-1} \geq -1$$

dir. Lemma 3.4 (*iv*) deki işlemler $(m+1)$ kere ardışık olarak uygulanırsa

$$\begin{aligned}
r_{j+5} &= r_{j-1} + r_j + 1 \geq -1, \\
r_{j+11} &= r_{j-1} + 2r_j + 2 \geq -1, \\
r_{j+17} &= r_{j-1} + 3r_j + 3 \geq -1, \\
&\vdots \\
r_{j+6m-1} &= r_{j-1} + mr_j + m \geq -1
\end{aligned}$$

elde edilir. $r_{j-1} + m(-\frac{k}{m}) + m \geq -1$ den $r_{j-1} \geq 0$ elde edilir. Lemma 3.4 (i) den $r_{j-1} < 0$ olması gerektiğinden bu mümkün değildir. Bu yüzden, $r_N = r_{N+6} = -r$ eşitliğini sağlayan *N* tamsayılarının sayısı (*m*+1) den küçüktür.

Benzer şekilde, $r_N = r_{N+5} = -r$ olacak şekilde, (*k*-*m*+1) tane *N* tamsayısı olduğunu kabul edelim. O zaman, Lemma 3.4 (iii) deki işlemleri (*k*-*m*+1) kere ardışık olarak uygulayabiliriz. O zaman, $l_2 = 0,1,\ldots,(k-m)$ için

$$r_{j+5l_2} = r_{j+5(l_2+1)} = -r$$

ve

$$r_{j+4} = 1 + r_{j-1} < -1$$

$$r_{j+9} = 2 + r_{j-1} < -1$$

$$r_{j+14} = 3 + r_{j-1} < -1$$

$$\vdots$$

$$r_{j+5(k-m)-1} = (k-m) + r_{j-1} < -1$$

elde edilir. $r_{j-1} < -1-(k-m) \leq -\frac{k}{m}$ den $r_{j-1} < r_j$ olur. Ancak, Lemma 3.4 (i) den $r_j \leq r_{j-1}$ dir. Bu nedenle $r_{j+5(k-m)-1} < -1$ olamaz. O zaman, $r_N = r_{N+5} = -r$ eşitliğini sağlayan *N* tamsayılarının sayısı (*k*-*m*+1) den küçük olmalıdır.

$r_N = r_{N+6} = -r$ olacak şekilde (*m*-1) tane *N* tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Lemma 3.4 (iv) deki işlemler (*m*-1) kez ardışık olarak uygulanırsa

$$r_j = r_{j+6} = r_{j+12} = \cdots = r_{j+6(m-2)} = r_{j+6(m-1)} = -r$$

elde edilir. Burada $r_{j+6(m-2)}$, $r_N = r_{N+6} = -r$ eşitliğini sağlayan son terimdir. $r_{j+6(m-1)}$ ise $r_N = r_{N+5} = -r$ eşitliğini sağlayan ilk terimdir. Bu durumda ise

$$r_{j+6(m-1)} = r_{j+6(m-1)+5} = r_{j+6(m-1)+10} = \cdots = r_{j+6(m-1)+5(k-m)} = r_{j+6(m-1)+5(k-m+1)} = -r$$

olup $r_N = r_{N+5} = -r$ olacak şekilde (k-m+1) tane N tamsayısı vardır. $r_N = r_{N+5} = -r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısının (k-m+1) den küçük olması nedeniyle, $r_N = r_{N+6} = -r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (m-1) den büyüktür. Bu da $r_N = r_{N+6} = -r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısının m olduğunu gösterir.

Benzer şekilde, $r_N = r_{N+5} = -r$ olacak şekilde (k-m-1) tane N tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Lemma 3.4 (iii) deki işlemler (k-m-1) kez ardışık olarak uygulanırsa

$$r_j = r_{j+5} = r_{j+10} = \cdots = r_{j+5(k-m-2)} = r_{j+5(k-m-1)} = -r$$

elde edilir. $r_N = r_{N+5} = -r$ eşitliğini sağlayan son terim $r_{j+5(k-m-2)}$ dir. $r_{j+5(k-m-1)}$ ise $r_N = r_{N+6} = -r$ eşitliğini sağlayan ilk terimdir. Buradan

$$r_{j+5(k-m-1)} = r_{j+5(k-m-1)+6} = r_{j+5(k-m-1)+12} = \cdots = r_{j+5(k-m-1)+6m} = r_{j+5(k-m-1)+6(m+1)} = -r$$

elde edilir. $r_N = r_{N+6} = -r$ olacak şekilde (m+1) tane N tamsayısının bulunduğu görülür ki, bu mümkün değildir. O zaman, $r_N = r_{N+5} = -r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (k-m-1) den büyük olmalıdır. O halde, N tamsayılarının sayısı (k-m) dir.

Lemma 3.7. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.3) fark denkleminin Lemma 3.5 deki şartları gerçekleyen bir çözümü olsun. $r = r_{-1} + r_0 = \dfrac{k}{m}$, $(k,m) = 1$ ve $N < (5k - 4m)$ olmak üzere $r_N = r_{N+6} = 1 - r$ olacak şekilde m tane N pozitif tamsayısı ve $r_N = r_{N+5} = 1 - r$ olacak şekilde de (k-2m) tane N pozitif tamsayısı vardır.

İspat. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.3) denkleminin Lemma 3.5 de bahsedilen şartları gerçekleyen bir çözümü olsun. O zaman, r_{-1} ile r_0 başlangıç değerleri 1'den büyük rasyonel sayılardır. Böylece $r = r_{-1} + r_0 = \frac{k}{m}$ ve $(k,m) = 1$ olmak üzere $r = \frac{k}{m} > 2$ olur.

$r_N = r_{N+6} = 1 - r$ olacak şekilde $(m+1)$ tane N tamsayısı var olduğunu kabul edelim. $j = 2$ için $r_j = 1 - r$ olduğunu biliyoruz. Lemma 3.5 (*iv*) deki işlemler $(m+1)$ kere ardışık olarak uygulanırsa $l_1 = 0,1,\ldots,m$ için

$$r_{j+6l_1} = r_{j+6(l_1+1)} = 1 - r$$

ve

$$r_{j+5} = r_{j-1} + r_j + 1 > -1,$$
$$r_{j+11} = r_{j-1} + 2r_j + 2 > -1,$$
$$r_{j+17} = r_{j-1} + 3r_j + 3 > -1,$$
$$\vdots$$
$$r_{j+6m-1} = r_{j-1} + mr_j + m > -1$$

elde edilir. $r_{j-1} + m(1 - \frac{k}{m}) + m > -1$ den $r_{j-1} > 0$ elde edilir. Lemma 3.5 (i) den $r_{j-1} \le 0$ olması gerektiğinden bu mümkün değildir. Bu yüzden, $r_N = r_{N+6} = 1 - r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı $(m+1)$ den küçüktür.

$r_N = r_{N+5} = 1 - r$ olacak şekilde $(k\text{-}2m+1)$ tane N tamsayısı olduğunu kabul edelim. Lemma 3.5 (iii) deki işlemler $(k\text{-}2m+1)$ kere ardışık olarak uygulanırsa $l_2 = 0,1,\ldots,(k-2m)$ için

$$r_{j+5l_2} = r_{j+5(l_2+1)} = 1 - r$$

ve

$$r_{j+4} = 1 + r_{j-1} \le -1,$$

$$r_{j+9} = 2 + r_{j-1} \le -1,$$
$$r_{j+14} = 3 + r_{j-1} \le -1,$$
$$\vdots$$
$$r_{j+5(k-2m)-1} = (k-2m) + r_{j-1} \le -1$$

elde edilir. $r_{j-1} \le -1-(k-2m) \le 1-\frac{k}{m}$ den $r_{j-1} \le r_j$ elde edilir. Halbuki Lemma 3.5 (i) den dolayı $r_j < r_{j-1}$ dir. O zaman, $r_N = r_{N+5} = 1-r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (k-2m+1) den küçük olmalıdır.

$r_N = r_{N+6} = 1-r$ olacak şekilde (m-1) tane N tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Lemma 3.5 (iv) deki işlemler (m-1) kez ardışık olarak uygulanırsa

$$r_j = r_{j+6} = r_{j+12} = \cdots = r_{j+6(m-2)} = r_{j+6(m-1)} = 1-r$$

elde edilir. $r_{j+6(m-2)}$, $r_N = r_{N+6} = 1-r$ eşitliğini sağlayan son terimdir. $r_{j+6(m-1)}$ ise $r_N = r_{N+5} = 1-r$ eşitliğini sağlayan ilk terimdir. Bu durumda ise

$$r_{j+6(m-1)} = r_{j+6(m-1)+5} = r_{j+6(m-1)+10} = \cdots = r_{j+6(m-1)+5(k-2m)} = r_{j+6(m-1)+5(k-2m+1)} = 1-r$$

olup $r_N = r_{N+5} = 1-r$ olacak şekilde (k-2m+1) tane N tamsayısı vardır. $r_N = r_{N+5} = 1-r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısının (k-2m+1) den küçük olması nedeniyle $r_N = r_{N+6} = 1-r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (m-1) den büyüktür. Buda $r_N = r_{N+6} = 1-r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısının m olduğunu gösterir.

Benzer şekilde, $r_N = r_{N+5} = 1-r$ olacak şekilde (k-2m-1) tane N tamsayısının var olduğunu kabul edelim. Lemma 3.5 (iii) deki işlemler (k-2m-1) kez ardışık olarak uygulanırsa

$$r_j = r_{j+5} = r_{j+10} = \cdots = r_{j+5(k-2m-2)} = r_{j+5(k-2m-1)} = 1-r$$

elde edilir. $r_N = r_{N+5} = 1-r$ eşitliğini sağlayan son terim $r_{j+5(k-2m-2)}$ dir. $r_{j+5(k-2m-1)}$ ise $r_N = r_{N+6} = 1-r$ eşitliğini sağlayan ilk terimdir. Buradan,

$$r_{j+5(k-2m-1)} = r_{j+5(k-2m-1)+6} = r_{j+5(k-2m-1)+12} = \cdots = r_{j+5(k-2m-1)+6m} = r_{j+5(k-2m-1)+6(m+1)} = 1-r$$

elde edilir. $r_N = r_{N+6} = 1-r$ olacak şekilde (m+1) tane N tamsayısının bulunduğu görülür ki bu mümkün değildir. O zaman, $r_N = r_{N+5} = 1-r$ eşitliğini sağlayan N tamsayılarının sayısı (k-2m-1) den büyük olmalıdır. O halde, N tamsayılarının sayısı (k-2m) dir.

Lemma 3.6 ve Lemma 3.7 göz önüne alınarak Lemma 3.4 (iii)-(iv) ve Lemma 3.5 (iii)-(iv) de verilen sonuçlar genelleştirilebilir. Bu genellemeler, ulaşmak istediğimiz asıl sonuçların ispatında kolaylık sağlar.

Lemma 3.8. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.3) fark denkleminin Lemma 3.4 ve Lemma 3.6 deki şartları gerçekleyen bir çözümü olsun. Bazı N pozitif tamsayıları için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $l_1 = 1,2,\ldots,m$ için $r_N = r_{N+6l_1} = -r$ ise $r_{N+6l_1-1} = r_N + r_{N+6(l_1-1)-1} + 1$ dir.

ii) $l_2 = 1,2,\ldots,(k-m)$ için $r_{N+6m} = r_{N+6m+5l_2} = -r$ ise

$r_{N+6m+5l_2-1} = r_{N+6m+5(l_2-1)-1} + 1$ dir.

Lemma 3.9. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, (3.3) fark denkleminin Lemma 3.7 ve Lemma 3.8 deki şartları gerçekleyen bir çözümü olsun. Bazı N pozitif tamsayıları için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $l_1 = 1,2,\ldots,m$ için $r_N = r_{N+6l_1} = -r$ ise $r_{N+6l_1-1} = r_N + r_{N+6(l_1-1)-1} + 1$ dir.

ii) $l_2 = 1,2,\ldots,(k-2m)$ için $r_{N+6m} = r_{N+6m+5l_2} = -r$ ise

$r_{N+6m+5l_2-1} = r_{N+6m+5(l_2-1)-1} + 1$ dir.

Teorem 3.2. $0 < A < 1$ ve r_{-1} ile r_0 rasyonel sayılarından en az biri $(0,1]$ aralığında bulunmak üzere $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç değerleri için (3.1) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü periyodiktir. Eğer $\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = \frac{k}{m}$ ve $(k,m) = 1$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü ($5k+m$) esas periyotludur.

İspat. (3.1) denkleminde $0 < A < 1$ ve $n \geq -1$ olmak üzere $x_n = A^{r_n}$ dönüşümü uygulanırsa (3.3) denklemi elde edilir. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, r_{-1} ile r_0 başlangıç değerlerinden en az biri $(0,1]$ aralığında bulunmak üzere (3.3) fark denkleminin bir çözümü olsun. $(k,m) = 1$ için $\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = \frac{k}{m}$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in ($5k+m$) esas periyotlu olduğunu göstermek için her $n \geq -1$ tamsayısı için $r_n = r_{n+5k+m}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\frac{k}{m} = 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $k = m = 1$, $0 < r_{-1} \leq 1$ ve $0 < r_0 \leq 1$ olur. (3.3) denkleminden

$$r_1 = \min\{r_0, 1\} - r_{-1} = r_0 - r_{-1} < 1,$$
$$r_2 = \min\{r_1, 1\} - r_0 = -r_{-1},$$
$$r_3 = \min\{r_2, 1\} - r_1 = -r_0,$$
$$r_4 = \min\{r_3, 1\} - r_2 = r_{-1} - r_0,$$
$$r_5 = \min\{r_4, 1\} - r_3 = r_{-1},$$
$$r_6 = \min\{r_5, 1\} - r_4 = r_0,$$

elde edilir ki her $n \geq -1$ tamsayısı için $r_n = r_{n+5k+m}$ dir.

$\frac{k}{m} > 1$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\max\{r_{-1}, r_0, 1\} = \max\{r_{-1}, r_0\} = \frac{k}{m}$ olur. Lemma 3.6 (i) den $r = \frac{k}{m}$, $N > 0$ ve $l_1 = 1,2,\ldots,m$ için

$$r_N = r_{N+6l_1} = -r$$

ve

$$r_{N+5} = r_N + r_{N-1} + 1,$$
$$r_{N+11} = r_{N+6} + r_{N+5} + 1 = 2r_N + r_{N-1} + 2,$$
$$\vdots$$
$$r_{N+6m-1} = mr_N + r_{N-1} + m$$

elde edilir. Lemma 3.6 (ii) den $l_2 = 1,2,\ldots,(k-m)$ için

$$r_{N+6m} = r_{N+6m+5l_2} = -r$$

ve

$$r_{N+6m+4} = r_{N+6m-1} + 1 = mr_N + r_{N-1} + m + 1,$$
$$r_{N+6m+9} = r_{N+6m+4} + 1 = mr_N + r_{N-1} + m + 2,$$
$$\vdots$$
$$r_{N+6m+5(k-m)-1} = mr_N + r_{N-1} + m + (k-m)$$

elde edilir. Buradan $r_N = r_{N+6m+5(k-m)} = -r$ ve $r_{N-1} = r_{N+6m+5(k-m)-1}$ olduğu görülür. $r_{n-1} = \max\{r_n, 1\} - r_{n+1}$ denkleminden her $n \geq -1$ için $r_n = r_{n+5k+m}$ elde edilir. Ayrıca $l_1 = 1,2,\ldots,m$ ve $l_2 = 1,2,\ldots,(k-m-1)$ için $r_{N-1} \neq r_{N+6l_1-1}$ ve $r_{N-1} \neq r_{N+6m+5l_2-1}$ olduğundan $(5k+m)$, en küçük periyot olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.3. $0 < A < 1$ ve r_{-1} ile r_0 1'den büyük rasyonel sayılar olmak üzere $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç değerleri için (3.1) fark denkleminin her $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü periyodiktir. Eğer $r = r_{-1} + r_0 = \frac{k}{m}$ ve $(k,m) = 1$ ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü $(5k-4m)$ esas periyotludur.

İspat. (3.1) denkleminde $0 < A < 1$ ve $n \geq -1$ olmak üzere $x_n = A^{r_n}$ dönüşümü uygulanırsa, (3.3) denklemi elde edilir. $\{r_n\}_{n=-1}^{\infty}$, r_{-1} ile r_0 başlangıç değerleri 1'den

büyük rasyonel sayılar olmak üzere (3.3) fark denkleminin bir çözümü olsun. $(k,m)=1$ için $r_{-1}+r_0=\frac{k}{m}$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ in (5k - 4m) esas periyotlu olduğunu göstermek için her $n\geq -1$ tamsayısı için $r_n=r_{n+5k-4m}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Lemma 3.9 (i) den $r=\frac{k}{m}$, $N>0$ ve $l_1=1,2,\ldots,m$ için

$$r_N=r_{N+6l_1}=1-r$$

ve

$$r_{N+5}=r_N+r_{N-1}+1,$$
$$r_{N+11}=r_{N+6}+r_{N+5}+1=2r_N+r_{N-1}+2,$$
$$\vdots$$
$$r_{N+6m-1}=mr_N+r_{N-1}+m$$

elde edilir. Lemma 3.9 (ii) den $l_2=1,2,\ldots,(k-2m)$ için

$$r_{N+6m}=r_{N+6m+5l_2}=1-r$$

ve

$$r_{N+6m+4}=r_{N+6m-1}+1=mr_N+r_{N-1}+m+1,$$
$$r_{N+6m+9}=r_{N+6m+4}+1=mr_N+r_{N-1}+m+2,$$
$$\vdots$$
$$r_{N+6m+5(k-2m)-1}=mr_N+r_{N-1}+m+(k-2m)$$

elde edilir. Buradan $r_N=r_{N+6m+5(k-2m)}=1-r$ ve $r_{N-1}=r_{N+6m+5(k-2m)-1}$ olduğu görülür. $r_{n-1}=\max\{r_n,1\}-r_{n+1}$ denkleminden her $n\geq -1$ için $r_n=r_{n+5k-2m}$ elde edilir. Ayrıca $l_1=1,2,\ldots,m$ ve $l_2=1,2,\ldots,(k-2m-1)$ için $r_{N-1}\neq r_{N+6l_1-1}$ ve $r_{N-1}\neq r_{N+6m+5l_2-1}$ olduğundan (5k - 4m), en küçük periyot olur ki ispat tamamlanır.

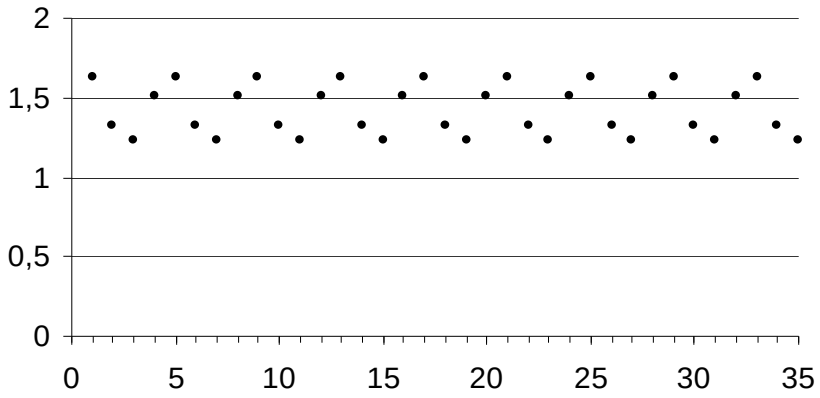
3.3 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, yukarıda incelenen her bir durum için (3.1) denkleminin çözümlerine nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1. $A = 2$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = 2^{0,3}$, $x_0 = 2^{0,6}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümü aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**1,231144**	7	**1,231144**	15	**1,231144**
0	**1,515717**	8	**1,515717**	16	**1,515717**
1	1,624505	9	1,624505	17	1,624505
2	1,319508	10	1,319508	18	1,319508
3	**1,231144**	11	**1,231144**	19	**1,231144**
4	**1,515717**	12	**1,515717**	20	**1,515717**
5	1,624505	13	1,624505	21	1,624505
6	1,319508	14	1,319508	22	1,319508

Tablo 3.1



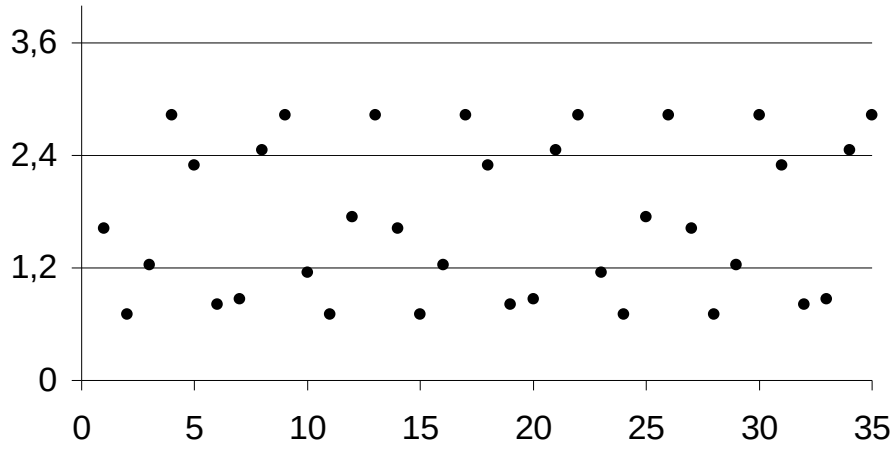
Grafik 3.1

$A = 2$, $x_{-1} = 2^{0,3}$ ve $x_0 = 2^{0,6}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 4 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.2. $A = 2$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = 2^{0,8}$, $x_0 = 2^{1,5}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**1,741101**	9	**2,828427**	19	0,812252
0	**2,828427**	10	1,148698	20	0,870551
1	1,624505	11	0,707107	21	2,462289
2	0,707107	12	**1,741101**	22	**2,828427**
3	1,231144	13	**2,828427**	23	1,148698
4	**2,828427**	14	1,624505	24	0,707107
5	2,297397	15	0,707107	25	1,741101
6	0,812252	16	1,231144	26	**2,828427**
7	0,870551	17	**2,828427**	27	1,624505
8	2,462289	18	2,297397	28	0,707107

Tablo 3.2



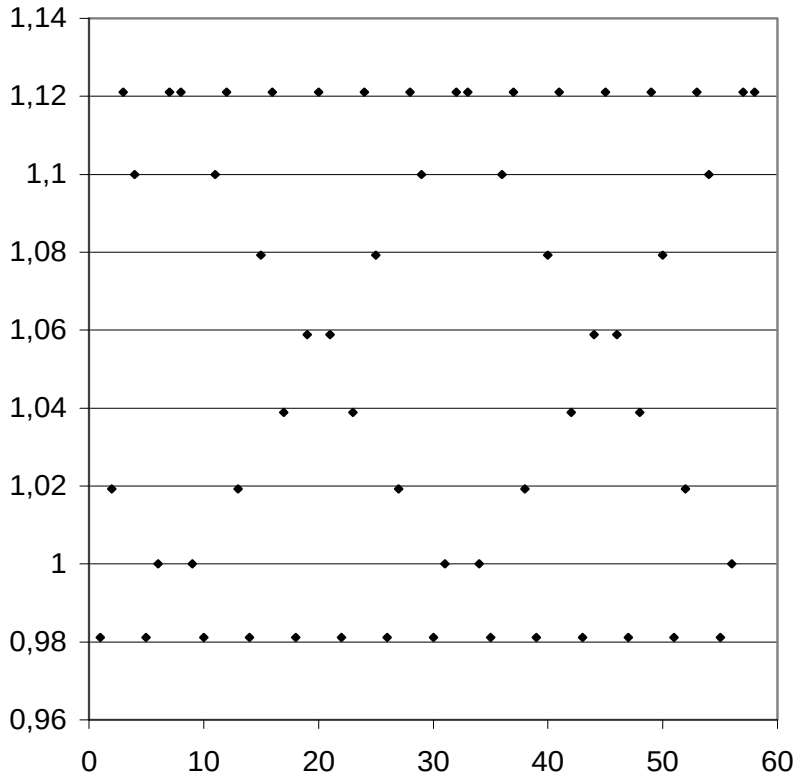
Grafik 3.2

$x_0 = x_4 = x_9 = x_{13} = x_{17} = x_{22} = x_{26}$ olup x_0 terimi dört ya da beş terim sonra tekrar etmektedir. $A = 2$, $x_{-1} = 2^{0,8}$ ve $x_0 = 2^{1,5}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 13 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.3. $A = 1{,}1$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (1{,}1)^{1,2}$, $x_0 = (1{,}1)^{0,8}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**1,121169**	8	**1,121169**	17	1,03886
0	**1,07923**	9	1	18	0,981118
1	0,981118	10	0,981118	19	1,058853
2	1,019245	11	1,1	20	**1,121169**
3	**1,121169**	12	**1,121169**	21	1,058853
4	1,1	13	1,019245	22	0,981118
5	0,981118	14	0,981118	23	1,03886
6	1	15	1,07923	24	**1,121169**
7	**1,121169**	16	**1,121169**	25	**1,07923**

Tablo 3.3



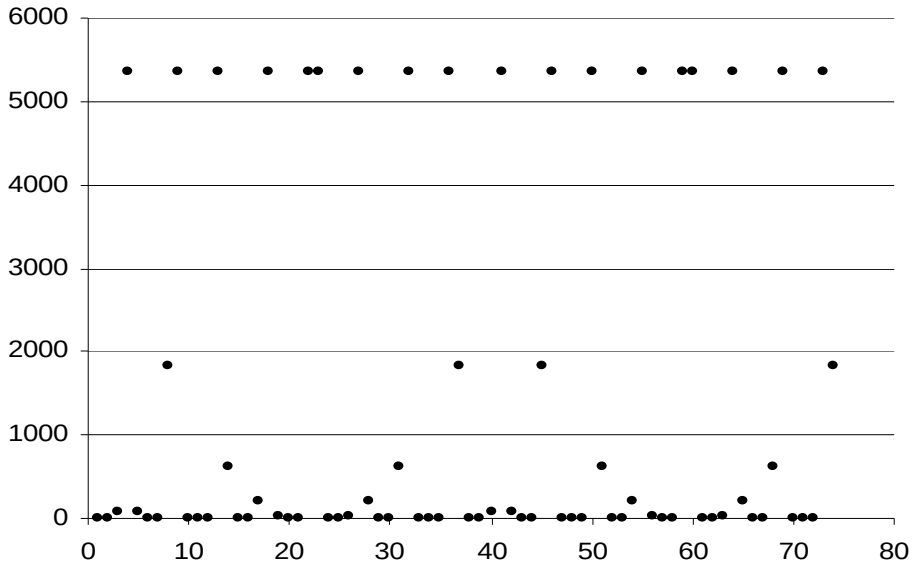
Grafik 3.3

$x_{-1} = x_3 = x_7 = x_{12} = x_{16} = x_{20} = x_{24}$ olup x_{-1} terimi dört ya da beş terim sonra tekrar etmektedir. $A = 1{,}1$ ve başlangıç değerleri de $x_{-1} = (1{,}1)^{1{,}2}$, $x_0 = (1{,}1)^{0{,}8}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 25 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.4. $A = 25$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = 25^{(8/3)}$, $x_0 = 25^{(7/3)}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**5343,675**	13	**5343,675**	27	**5343,675**
0	**1827,511**	14	625	28	213,747
1	0,341995	15	0,116961	29	0,04
2	0,01368	16	0,04	30	0,116961
3	73,10044	17	213,747	31	625
4	**5343,675**	18	**5343,675**	32	**5343,675**
5	73,10044	19	25	33	8,54988
6	0,01368	20	0,004678	34	0,004678
7	0,341995	21	1	35	2,924018
8	1827,511	22	**5343,675**	36	**5343,675**
9	**5343,675**	23	**5343,675**	37	**1827,511**
10	2,924018	24	1	38	0,341995
11	0,004678	25	0,004678	39	0,01368
12	8,54988	26	25	40	73,10044

Tablo 3.4



Grafik 3.4

$x_{-1} = x_4 = x_9 = x_{13} = x_{18} = x_{22} = x_{27} = x_{32} = x_{36}$ olup x_{-1} terimi dört ya da beş terim sonra tekrar etmektedir. $A = 25$, $x_{-1} = 25^{(8/3)}$ ve $x_0 = 25^{(7/3)}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 37 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.5. $A = 3{,}2$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (3{,}2)^{(7/2)}$, $x_0 = (3{,}2)^{(15/2)}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**58,61718**	24	**6146,457**	49	**6146,457**
0	**6146,457**	25	1920,768	50	5,724334
1	104,8576	26	0,3125	51	0,000931
2	0,01706	27	0,001666	52	0,559017
3	0,030518	28	10,24	53	3435,974
4	187,575	29	**6146,457**	54	**6146,457**
5	**6146,457**	30	600,2399	55	1,788854
6	32,768	31	0,097656	56	0,000521
7	0,005331	32	0,005331	57	1,788854
8	0,097656	33	32,768	58	**6146,457**
9	600,2399	34	**6146,457**	59	3435,974
10	**6146,457**	35	187,575	60	0,559017
11	10,24	36	0,030518	61	0,000931
12	0,001666	37	0,01706	62	5,724334
13	0,3125	38	104,8576	63	**6146,457**
14	1920,768	39	**6146,457**	64	1073,742
15	**6146,457**	40	58,61718	65	0,174693
16	3,2	41	0,009537	66	0,00298
17	0,000521	42	0,054592	67	18,31787
18	1	43	335,5443	68	**6146,457**
19	**6146,457**	44	**6146,457**	69	335,5443
20	**6146,457**	45	18,31787	70	0,054592
21	1	46	0,00298	71	0,009537
22	0,000521	47	0,174693	72	**58,61718**
23	3,2	48	1073,742	73	**6146,457**

Tablo 3.5

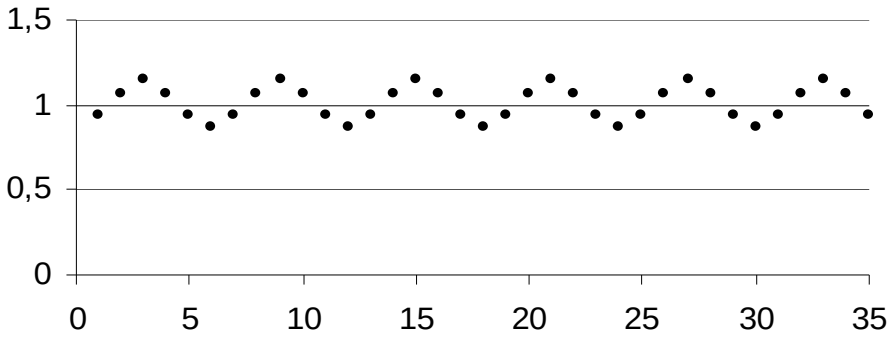
$$x_0 = x_5 = x_{10} = x_{15} = x_{19} = x_{24} = x_{29} = x_{34} = x_{39} = x_{44} = x_{49} = x_{54} = x_{58} = x_{63} = x_{68} = x_{73}$$

olup x_0 terimi dört ya da beş terim sonra tekrar etmektedir. $A = 3{,}2$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (3{,}2)^{(7/2)}$, $x_0 = (3{,}2)^{(15/2)}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 73 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.6. $A = 0{,}8$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (0{,}8)^{0{,}3}$, $x_0 = (0{,}8)^{0{,}6}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**0,935248**	14	1,069235	29	**0,935248**
0	**0,87469**	15	1,143263	30	**0,87469**
1	0,935248	16	1,069235	31	0,935248
2	1,069235	17	**0,935248**	32	1,069235
3	1,143263	18	**0,87469**	33	1,143263
4	1,069235	19	0,935248	34	1,069235
5	**0,935248**	20	1,069235	35	**0,935248**
6	**0,87469**	21	1,143263	36	**0,87469**
7	0,935248	22	1,069235	37	0,935248
8	1,069235	23	**0,935248**	38	1,069235
9	1,143263	24	**0,87469**	39	1,143263
10	1,069235	25	0,935248	40	1,069235
11	**0,935248**	26	1,069235	41	**0,935248**
12	**0,87469**	27	1,143263	42	**0,87469**
13	0,935248	28	1,069235	43	0,935248

Tablo 3.6



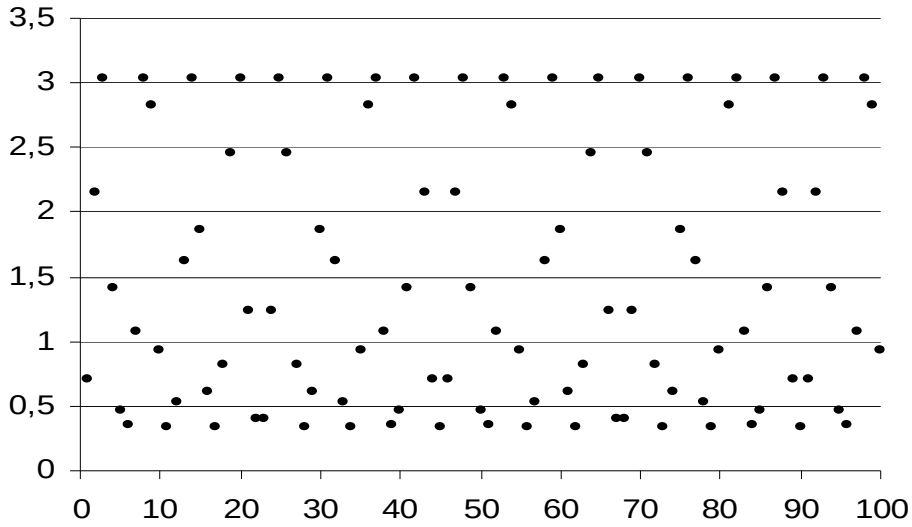
Grafik 3.5

$A = 0{,}8$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (0{,}8)^{0{,}3}$, $x_0 = (0{,}8)^{0{,}6}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 6 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.7. $A = 0{,}5$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (0{,}5)^{0{,}5}$, $x_0 = (0{,}5)^{1{,}6}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**0,707107**	16	0,615572	33	0,535887
0	**0,329877**	17	0,329877	34	0,329877
1	0,707107	18	0,812252	35	0,933033
2	2,143547	19	2,462289	36	2,828427
3	**3,031433**	20	**3,031433**	37	**3,031433**
4	1,414214	21	1,231144	38	1,071773
5	0,466516	22	0,406126	39	0,353553
6	0,353553	23	0,406126	40	0,466516
7	1,071773	24	1,231144	41	1,414214
8	**3,031433**	25	**3,031433**	42	**3,031433**
9	2,828427	26	2,462289	43	2,143547
10	0,933033	27	0,812252	44	**0,707107**
11	0,329877	28	0,329877	45	**0,329877**
12	0,535887	29	0,615572	46	0,707107
13	1,624505	30	1,866066	47	2,143547
14	**3,031433**	31	**3,031433**	48	**3,031433**
15	1,866066	32	1,624505	49	1,414214

Tablo 3.7



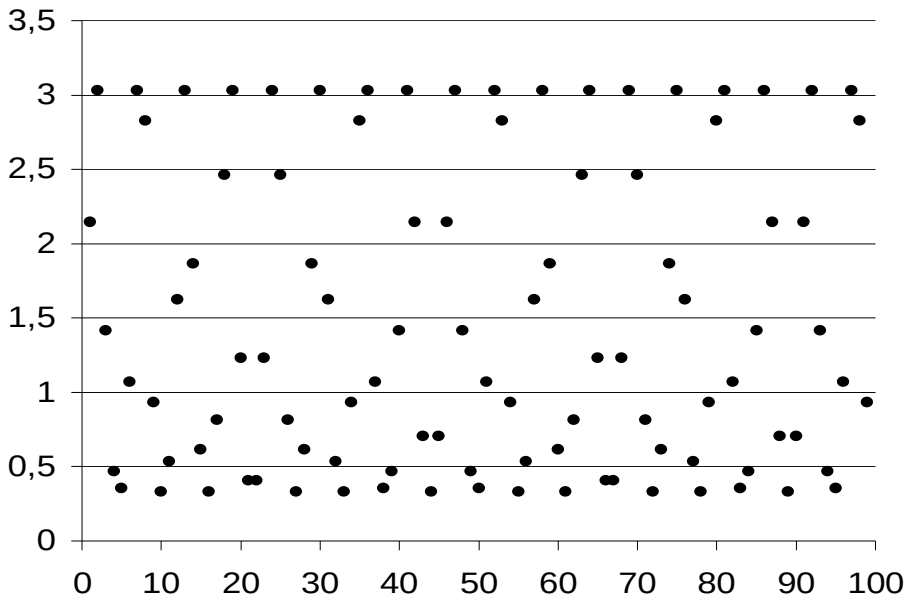
Grafik 3.6

$x_3 = x_8 = x_{14} = x_{20} = x_{25} = x_{31} = x_{37} = x_{42} = x_{48}$ olup $x_3 = (0{,}5)^{-1{,}6}$ terimi beş ya da altı terim sonra tekrar etmektedir. $A = 0{,}5$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (0{,}5)^{0{,}5}$, $x_0 = (0{,}5)^{1{,}6}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 45 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.8. $A = 0{,}5$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (0{,}5)^{1{,}6}$, $x_0 = (0{,}5)^{0{,}5}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**0,329877**	16	0,329877	33	0,329877
0	**0,707107**	17	0,812252	34	0,933033
1	2,143547	18	2,462289	35	2,828427
2	**3,031433**	19	**3,031433**	36	**3,031433**
3	1,414214	20	1,231144	37	1,071773
4	0,466516	21	0,406126	38	0,353553
5	0,353553	22	0,406126	39	0,466516
6	1,071773	23	1,231144	40	1,414214
7	**3,031433**	24	**3,031433**	41	**3,031433**
8	2,828427	25	2,462289	42	2,143547
9	0,933033	26	0,812252	43	0,707107
10	0,329877	27	0,329877	44	**0,329877**
11	0,535887	28	0,615572	45	**0,707107**
12	1,624505	29	1,866066	46	2,143547
13	**3,031433**	30	**3,031433**	47	**3,031433**
14	1,866066	31	1,624505	48	1,414214
15	0,615572	32	0,535887	49	0,466516

Tablo 3.8



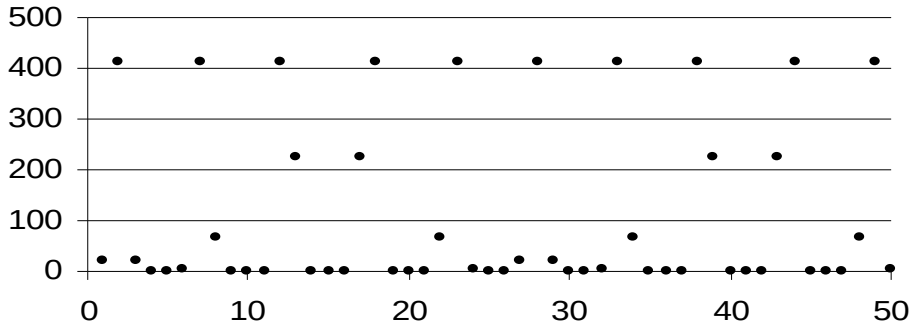
Grafik 3.7

$x_2 = x_7 = x_{13} = x_{29} = x_{24} = x_{30} = x_{36} = x_{41} = x_{47}$ olup $x_2 = (0,5)^{-1,6}$ terimi beş ya da altı terim sonra tekrar etmektedir. (3.1) denkleminin çözümünün 45 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.9. $A = 0,3$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (0,3)^{3,5}$, $x_0 = (0,3)^{2,5}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**0,014789**	9	0,164317	19	1,825742
0	**0,049295**	10	0,004437	20	0,004437
1	20,28602	11	1,825742	21	0,164317
2	**411,5226**	12	**411,5226**	22	67,62007
3	20,28602	13	225,4002	23	**411,5226**
4	0,049295	14	0,547723	24	6,085806
5	0,014789	15	0,00243	25	**0,014789**
6	6,085806	16	0,547723	26	**0,049295**
7	**411,5226**	17	225,4002	27	20,28602
8	67,62007	18	**411,5226**	28	**411,5226**

Tablo 3.9



Grafik 3.8

$x_2 = x_7 = x_{12} = x_{18} = x_{23} = x_{28}$ olup $x_2 = (0,3)^{-5}$ terimi beş ya da altı terim sonra tekrar etmektedir. (3.1) denkleminin çözümünün 26 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 3.10. $A = \sqrt{0,4}$ ve başlangıç değerleri $x_{-1} = (\sqrt{0,4})^{1,8}$, $x_0 = (\sqrt{0,4})^{7}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
-1	**0,438383**	50	1,201124	101	3,290956	152	9,016874
0	**0,040477**	51	0,033699	102	0,092333	153	0,252982
1	1,4427	52	0,526553	103	0,19218	154	0,070141
2	**35,64233**	53	18,76757	104	6,849739	155	2,5
3	24,70529	54	**35,64233**	105	**35,64233**	156	**35,64233**
4	0,693145	55	1,899144	106	5,203458	157	14,25693
5	0,028057	56	0,053283	107	0,145991	158	0,4
6	0,912444	57	0,333021	108	0,121545	159	0,044361
7	32,52161	58	11,86965	109	4,332155	160	1,581139
8	**35,64233**	59	**35,64233**	110	**35,64233**	161	**35,64233**
9	1,095958	60	3,002811	111	8,227389	162	22,54219
10	0,030749	61	0,084248	112	0,230832	163	0,632456
11	0,57708	62	0,210621	113	0,076872	164	0,028057
12	20,56847	63	7,507028	114	2,739896	165	1
13	**35,64233**	64	**35,64233**	115	**35,64233**	166	**35,64233**
14	1,732862	65	4,747861	116	13,00864	167	**35,64233**
15	0,048618	66	0,133209	117	0,364977	168	1
16	0,364977	67	0,133209	118	0,048618	169	0,028057
17	13,00864	68	4,747861	119	1,732862	170	0,632456
18	**35,64233**	69	**35,64233**	120	**35,64233**	171	22,54219
19	2,739896	70	7,507028	121	20,56847	172	**35,64233**
20	0,076872	71	0,210621	122	0,57708	173	1,581139
21	0,230832	72	0,084248	123	0,030749	174	0,044361
22	8,227389	73	3,002811	124	1,095958	175	0,4
23	**35,64233**	74	**35,64233**	125	**35,64233**	176	14,25693
24	4,332155	75	11,86965	126	32,52161	177	**35,64233**
25	0,121545	76	0,333021	127	0,912444	178	2,5
26	0,145991	77	0,053283	128	0,028057	179	0,070141
27	5,203458	78	1,899144	129	0,693145	180	0,252982
28	**35,64233**	79	**35,64233**	130	24,70529	181	9,016874
29	6,849739	80	18,76757	131	**35,64233**	182	**35,64233**
30	0,19218	81	0,526553	132	1,4427	183	3,952847
31	0,092333	82	0,033699	133	0,040477	184	0,110903
32	3,290956	83	1,201124	134	0,438383	185	0,16
33	**35,64233**	84	**35,64233**	135	15,625	186	5,702772
34	10,83039	85	29,67413	136	**35,64233**	187	**35,64233**
35	0,303863	86	0,832553	137	2,281109	188	6,25
36	0,058396	87	0,028057	138	0,064	189	0,175353
37	2,081383	88	0,759658	139	0,277258	190	0,101193
38	**35,64233**	89	27,07597	140	9,882118	191	3,60675
39	17,12435	90	**35,64233**	141	**35,64233**	192	**35,64233**
40	0,48045	91	1,316382	142	3,60675	193	9,882118
41	0,036933	92	0,036933	143	0,101193	194	0,277258
42	1,316382	93	0,48045	144	0,175353	195	0,064
43	**35,64233**	94	17,12435	145	6,25	196	2,281109
44	27,07597	95	**35,64233**	146	**35,64233**	197	**35,64233**
45	0,759658	96	2,081383	147	5,702772	198	15,625
46	0,028057	97	0,058396	148	0,16	199	**0,438383**
47	0,832553	98	0,303863	149	0,110903	200	**0,040477**
48	29,67413	99	10,83039	150	3,952847	201	1,4427
49	**35,64233**	100	**35,64233**	151	**35,64233**	202	**35,64233**

Tablo 3.10

$A=\sqrt{0,4}$, $x_{-1}=(\sqrt{0,4})^{1,8}$ ve $x_0=(\sqrt{0,4})^{7}$ olmak üzere (3.1) denkleminin çözümünün 200 periyotlu olduğu görülmektedir.

4. BÖLÜM

$x_n = \max\{A/x_{n-1}, 1/x_{n-3}^{\alpha}\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde; A pozitif bir reel sayı ve α ' da $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde bir reel sayı olmak üzere

$$x_n = \max\left\{\frac{A}{x_{n-1}}, \frac{1}{x_{n-3}^{\alpha}}\right\},\ n = 1,2,... \tag{4.1}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği ve kararlılığı incelenmiştir.

Teorem 4.1. $A = 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere (4.1) fark denkleminin her $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü, $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsar.

İspat. $A = 1$ için (4.1) denkleminin özel bir hali olan

$$x_n = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{1}{x_{n-3}^{\alpha}}\right\},\ n = 1,2,... \tag{4.2}$$

fark denklemini göz önüne alalım.

(4.2) denkleminde $0 < B < 1$ ve $n \geq -2$ için $x_n = B^{y_n}$ dönüşümü uygulanırsa

$$y_n = \min\{-y_{n-1}, -\alpha y_{n-3}\},\ n = 1,2,... \tag{4.3}$$

denklemi elde edilir. (4.3) denkleminin her $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün sıfıra yakınsadığı gösterilirse, istenen elde edilmiş olur.

$y_N = -y_{N-1}$ ve $y_{N+1} = -\alpha y_{N-2}$ olacak şekilde en az bir N pozitif tamsayısı vardır. Gerçekten, (4.3) denkleminden N_1 pozitif tamsayısı için

$$y_{N_1} = \min\{-y_{N_1-1}, -\alpha y_{N_1-3}\} = -\alpha y_{N_1-3} \text{ ise } -y_{N_1-1} > -\alpha y_{N_1-3},$$

$$y_{N_1+1} = \min\{-y_{N_1}, -\alpha y_{N_1-2}\} = -\alpha y_{N_1-2} \text{ ise } \alpha y_{N_1-3} > -\alpha y_{N_1-2},$$

$$y_{N_1+2} = \min\{-y_{N_1+1}, -\alpha y_{N_1-1}\} = -\alpha y_{N_1-1} \text{ ise } \alpha y_{N_1-2} > -\alpha y_{N_1-1}$$

ve

$$y_{N_1+3} = \min\{-y_{N_1+2}, -\alpha y_{N_1}\} = -y_{N_1+2}$$

elde edilir ki en az bir N pozitif tamsayısı için $y_N = -y_{N-1}$ dir.

$y_{N_2} = -y_{N_2-1}$ olsun. O zaman, (4.3) denkleminden

$$y_{N_2+1} = \min\{-y_{N_2}, -\alpha y_{N_2-2}\} = -y_{N_2} \text{ ise } y_{N_2-1} < (-\alpha y_{N_2-2}),$$

$$y_{N_2+2} = \min\{-y_{N_2+1}, -\alpha y_{N_2-1}\} = -y_{N_2+1} \text{ ise } y_{N_2-1} > 0$$

ve

$$y_{N_2+3} = \min\{-y_{N_2+2}, -\alpha y_{N_2}\} = -\alpha y_{N_2}$$

elde edilir ki en az bir N pozitif tamsayısı için $y_N = -y_{N-1}$ ve $y_{N+1} = -\alpha y_{N-2}$ dir.

Şimdi $y_N = -y_{N-1}$ ve $y_{N+1} = -\alpha y_{N-2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $(-\alpha y_{N-3}) > -y_{N-1}$ ve $y_{N-1} > -\alpha y_{N-2}$ dir. $y_N \le -y_{N-1}$ eşitsizliği de göz önüne alınarak (4.3) denkleminden

$$y_{N+2} = \min\{-y_{N+1}, -\alpha y_{N-1}\} = -y_{N+1},$$

$$y_{N+3} = \min\{-y_{N+2}, -\alpha y_N\} = -\alpha y_N,$$

$$y_{N+4} = \min\{-y_{N+3}, -\alpha y_{N+1}\} = \alpha y_N,$$

$$y_{N+5} = \min\{-y_{N+4}, -\alpha y_{N+2}\} = \alpha y_{N+1},$$

$$y_{N+6} = \min\{-y_{N+5}, -\alpha y_{N+3}\} = -y_{N+5},$$

$$y_{N+7} = \min\{-y_{N+6}, -\alpha y_{N+4}\} = -\alpha y_{N+4},$$

$$y_{N+8} = \min\{-y_{N+7}, -\alpha y_{N+5}\} = \alpha^2 y_N,$$

$$y_{N+9} = \min\{-y_{N+8}, -\alpha y_{N+6}\} = \alpha^2 y_{N+1}$$

elde edilir. Genel olarak her m doğal sayısı için

$y_{N+4m} = \alpha^m y_N$,

$y_{N+4m+1} = \alpha^m y_{N+1}$,

$y_{N+4m+2} = -y_{N+4m+1}$,

$y_{N+4m+3} = -\alpha y_{N+4m}$

olduğu görülür. Buradan $(m \to \infty)$ için limit alınırsa $(y_{N+4m}) \to 0$, $(y_{N+4m+1}) \to 0$, $(y_{N+4m+2}) \to 0$ ve $(y_{N+4m+3}) \to 0$ elde edilir ki her $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü sıfıra yakınsar.

Lemma 4.1. $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$y_n = \min\{1 - y_{n-1}, -\alpha y_{n-3}\}, \; n = 1,2,... \tag{4.4}$$

fark denkleminin bir çözümü olsun. Her n pozitif tamsayısı için,

$$|y_n| \le \max\{|y_{n-1}| - 1, \alpha|y_{n-3}|\} \tag{4.5}$$

dür.

İspat. Bazı n pozitif tamsayıları için y_{n-1} ve y_{n-3}'ün alabileceği muhtemel değerleri göz önüne alalım.

i) Eğer $y_{n-1} \ge 0$ ve $y_{n-3} \ge 0$ ise $|y_n| \le \max\{|y_{n-1}| - 1, \alpha|y_{n-3}|\}$ dür.

ii) Eğer $y_{n-1} \le 0$ ve $y_{n-3} \le 0$ ise $|y_n| \le \alpha|y_{n-3}|$ dür.

iii) Eğer $y_{n-1} \ge 0$ ve $y_{n-3} \le 0$ ise $|y_n| \le \max\{|y_{n-1}| - 1, \alpha|y_{n-3}|\}$ dür.

iv) Eğer $y_{n-1} \le 0$ ve $y_{n-3} \ge 0$ ise $|y_n| = \alpha|y_{n-3}|$ dür.

Yukarıdaki dört farklı durum göz önüne alındığında genel olarak her n pozitif tamsayısı için,

$$|y_n| \le \max\{|y_{n-1}| - 1, \alpha|y_{n-3}|\}$$

dir.

Teorem 4.2. $0 < A < 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere (4.1) fark denkleminin her $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü, $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsar.

İspat. (4.1) denkleminde $0 < A < 1$ ve $n \geq -2$ için $x_n = A^{y_n}$ dönüşümü uygulanırsa (4.4) fark denklemi elde edilir. **(**4.4) fark denkleminin her $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün sıfıra yakınsadığını göstermek yeterlidir.

Lemma 4.1 den her n pozitif tamsayısı için,

$$|y_n| \leq \max\{|y_{n-1}| - 1, \alpha|y_{n-3}|\}$$

eşitsizliğinin var olduğunu biliyoruz. $0 < \beta < 1$ ve $|y_{n-1}| - 1 \leq \beta|y_{n-1}|$ olacak şekilde bir β sayısı seçilebilir. Buradan

$$|y_n| \leq \max\{\beta|y_{n-1}|, \alpha|y_{n-3}|\}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\gamma = \max\{\beta, \alpha\}$ olmak üzere

$$|y_n| \leq \gamma \max\{|y_{n-1}|, |y_{n-3}|\} \tag{4.6}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.6) dan iterasyon ile

$$|y_1| \leq \gamma \max\{|y_0|, |y_{-2}|\},$$
$$|y_2| \leq \gamma \max\{|y_0|, |y_{-1}|, |y_{-2}|\},$$
$$|y_3| \leq \gamma \max\{|y_0|, |y_{-1}|, |y_{-2}|\},$$
$$|y_4| \leq \gamma^2 \max\{|y_0|, |y_{-1}|, |y_{-2}|\},$$
$$|y_5| \leq \gamma^2 \max\{|y_0|, |y_{-1}|, |y_{-2}|\},$$
$$|y_6| \leq \gamma^2 \max\{|y_0|, |y_{-1}|, |y_{-2}|\},$$
$$|y_7| \leq \gamma^3 \max\{|y_0|, |y_{-1}|, |y_{-2}|\}$$

elde edilir. Buradan,

$$|y_n| \le \gamma^{\left[\left|\frac{n-1}{3}\right|\right]+1} \max\{|y_0|,|y_{-1}|,|y_{-2}|\}$$

olduğu görülür. $(n \to \infty)$ için limit alınırsa $(y_n) \to 0$ elde edilir.

Teorem 4.3. $A > 1$ olmak üzere (4.1) fark denkleminin her $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü ya $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsar ya da er geç 2 periyotludur. Başka bir deyişle, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) Bir N pozitif tamsayısı için $x_N = \dfrac{A}{x_{N-1}}$ ve $x_{N+1} = \dfrac{1}{x_{N-2}^{\alpha}}$ ise her $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $\bar{x} = 1$' e yakınsar.

ii) Bir N pozitif tamsayısı için $x_N = \dfrac{A}{x_{N-1}}$, $x_{N+1} = x_{N-1}$ ve $A^{(\frac{-\alpha}{1-\alpha})} \le x_{N-1} \le A^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ise her $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü er geç 2 periyotludur.

iii) Bir N pozitif tamsayısı için $x_N = \dfrac{A}{x_{N-1}}$, $x_{N+1} = x_{N-1}$ ve $x_{N-1} \notin \left[A^{(\frac{-\alpha}{1-\alpha})}, A^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]$ ise her $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $\bar{x} = 1$' e yakınsar.

İspat. i) (4.1) denkleminde; $A > 1$ ve $n \ge -2$ için $x_n = A^{y_n}$ dönüşümü uygulanırsa

$$y_n = \max\{1 - y_{n-1}, -\alpha y_{n-3}\},\ n = 1,2,... \qquad (4.7)$$

fark denklemi elde edilir. $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$, (4.7) fark denkleminin bir çözümü olsun. O zaman, $x_N = \dfrac{A}{x_{N-1}}$ ve $x_{N+1} = \dfrac{1}{x_{N-2}^{\alpha}}$ ise $y_N = 1 - y_{N-1}$ ve $y_{N+1} = -\alpha y_{N-2}$ olur.

En az bir N pozitif tamsayısı için $y_N = 1 - y_{N-1} > 0$ dir. Tersine, bir N_1 pozitif tamsayısı için $y_{N_1} = -\alpha y_{N_1-3} > 1 - y_{N_1-1}$ olduğunu kabul edelim. (4.7) denkleminden $y_{N_1-2} \geq 1 - y_{N_1-3}$ olup

$$y_{N_1+1} = \max\{1 + \alpha y_{N_1-3}, -\alpha y_{N_1-2}\} = 1 + \alpha y_{N_1-3}$$

elde edilir ki $y_N = 1 - y_{N-1}$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı vardır. Şimdi de bir N_2 pozitif tamsayısı için $y_{N_2} = 1 - y_{N_2-1} \leq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$y_{N_2+1} = \max\{y_{N_2-1}, -\alpha y_{N_2-2}\}$$

olup $y_{N_2+1} = y_{N_2-1}$ ise $y_{N_2+1} = 1 - y_{N_2} > 0$ olur ki bu zaten istenilendir.

$$y_{N_2+1} = -\alpha y_{N_2-2} \text{ ise } -\alpha y_{N_2-2} > y_{N_2-1} \geq 1 \text{ olup}$$
$$y_{N_2+2} = \max\{1 + \alpha y_{N_2-2}, -\alpha y_{N_2-1}\} = 1 + \alpha y_{N_2-2} < 0$$

elde edilir ki $y_{N_2-2} \leq -\frac{1}{\alpha}$ dır.

$$y_{N_2+3} = \max\{-\alpha y_{N_2-2}, -\alpha(1 - y_{N_2-1})\} = -\alpha(1 - y_{N_2-1}) \geq 0,$$
$$y_{N_2+4} = \max\{1 + \alpha(1 - y_{N_2-1}), \alpha^2 y_{N_2-2}\} = 1 + \alpha(1 - y_{N_2-1})$$

elde edilir. $y_{N_2+4} \leq 0$ ise $y_{N_2-1} \geq 1 + \frac{1}{\alpha}$ dır.

$$y_{N_2+5} = \max\{-\alpha(1 - y_{N_2-1}), -\alpha(1 + \alpha y_{N_2-2})\} = -\alpha(1 + \alpha y_{N_2-2}),$$
$$y_{N_2+6} = \max\{1 + \alpha(1 + \alpha y_{N_2-2}), \alpha^2(1 - y_{N_2-1})\} = 1 + \alpha(1 + \alpha y_{N_2-2})$$

elde edilir. $y_{N_2+6} \leq 0$ ise $y_{N_2-2} \leq -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}$ dir.

$y_{N_2-2} > (-\beta)$ ve $\beta > y_{N_2-1}$ olacak şekilde bir pozitif β sayısının bulunduğu göz önüne alınarak işlemlere devam edilirse, $y_N = 1 - y_{N-1} > 0$ olacak şekilde en az bir N pozitif tamsayısının bulunduğu görülür.

$y_N = 1 - y_{N-1} > 0$ ve $y_{N+1} = -\alpha y_{N-2} > 1 - y_N$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $(-\alpha y_{N-2}) > y_{N-1} \geq 1 - y_{N-2}$ eşitsizliğinden $y_{N-2} > 0$, $y_{N-1} < y_{N+1} < 0$ ve $y_{N-2} \geq y_N > 0$ olur. (4.7) denkleminden

$$y_{N+2} = \max\{1 + \alpha y_{N-2}, -\alpha y_{N-1}\} = 1 + \alpha y_{N-2} > 0$$

ve $(-\alpha y_{N-2}) > y_{N-1}$ olduğundan $y_N > y_{N+2} > 0$ elde edilir.

$$y_{N+3} = \max\{-\alpha y_{N-2}, -\alpha(1 - y_{N-1})\} = -\alpha(1 - y_{N-1}) < 0$$

olup $y_{N+1} \leq y_{N+3} < 0$ dır.

$$y_{N+4} = \max\{1 + \alpha(1 - y_{N-1}), \alpha^2 y_{N-2}\} = 1 + \alpha(1 - y_{N-1}) > 0$$

olup $y_{N+2} \geq y_{N+4} > 0$ dır.

$$y_{N+5} = \max\{-\alpha(1 - y_{N-1}), -\alpha(1 + \alpha y_{N-2})\} = -\alpha(1 + \alpha y_{N-2}) < 0$$

olup $y_{N+3} < y_{N+5} < 0$ dır. Bu işlemlerden genel olarak her m doğal sayısı için

$$y_{N+4m} > y_{N+4m+2} \geq y_{N+4m+4} > 0$$

ve

$$y_{N+4m+1} \leq y_{N+4m+3} < y_{N+4m+5} < 0$$

elde edilir. Buradan da her $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün sıfıra yakınsadığı görülür.

ii) Bir N pozitif tamsayısı için $x_N = \dfrac{A}{x_{N-1}}$, $x_{N+1} = x_{N-1}$ ve $A^{(\frac{-\alpha}{1-\alpha})} \leq x_{N-1} \leq A^{\frac{1}{1-\alpha}}$ şartlarını sağlayan (4.1) denkleminin bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün var olduğunu kabul edelim. O zaman, $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ (4.7) denkleminin bir çözümü olmak üzere $y_N = 1 - y_{N-1}$, $y_{N+1} = y_{N-1}$ ve $-\dfrac{\alpha}{1-\alpha} \leq y_{N-1} \leq \dfrac{1}{1-\alpha}$ olur. (4.7) denkleminden

$$y_{N+2} = \max\{1 - y_{N-1}, -\alpha y_{N-1}\} = 1 - y_{N-1},$$
$$y_{N+3} = \max\{y_{N-1}, -\alpha(1 - y_{N-1})\} = y_{N-1}$$

elde edilir ki her m doğal sayısı için $y_{N+m} = y_{N+m+2}$ dir.

iii) Bir N pozitif tamsayısı için $x_N = \frac{A}{x_{N-1}}$, $x_{N+1} = x_{N-1}$ ve $x_{N-1} \notin \left[A^{(\frac{-\alpha}{1-\alpha})}, A^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]$ şartlarını sağlayan bir $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün var olduğunu kabul edelim. O zaman, $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ (4.7) denkleminin bir çözümü olmak üzere $y_N = 1 - y_{N-1}$, $y_{N+1} = y_{N-1}$ ve $y_{N-1} \notin \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha} \right]$ olur.

$y_{N-1} > \frac{1}{1-\alpha}$ olduğunu kabul edelim. (4.7) denkleminden

$$y_{N+2} = \max\{1 - y_{N-1}, -\alpha y_{N-1}\} = -\alpha y_{N-1}$$

elde edilir. $y_{N+1} = 1 - y_N$ ve $y_{N+2} = -\alpha y_{N-1}$ olup (i) den her $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün sıfıra yakınsadığı elde edilir.

$y_{N-1} < -\frac{\alpha}{1-\alpha}$ olduğunu kabul edelim. (4.7) denkleminden

$$y_{N+2} = \max\{1 - y_{N-1}, -\alpha y_{N-1}\} = 1 - y_{N-1},$$
$$y_{N+3} = \max\{y_{N-1}, -\alpha(1 - y_{N-1})\} = -\alpha(1 - y_{N-1})$$

olup $y_{N+2} = 1 - y_{N+1}$ ve $y_{N+3} = -\alpha y_N$ dir. (i) den her $\{y_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünün sıfıra yakınsadığı elde edilir.

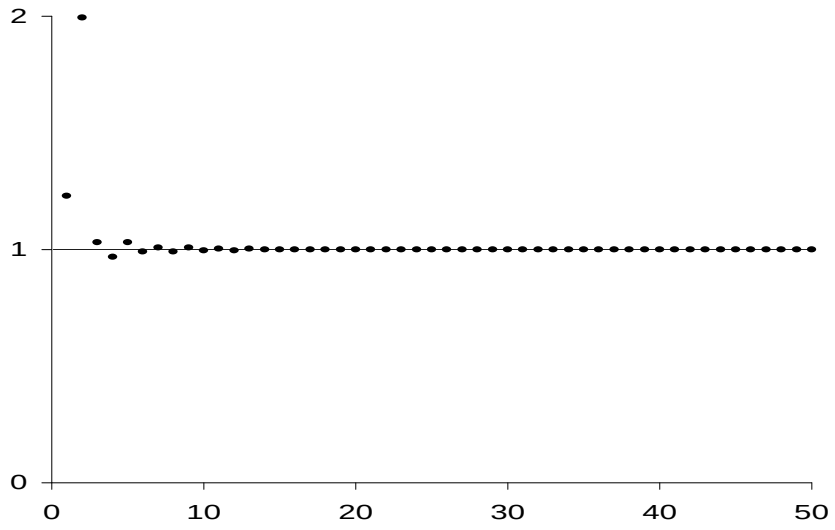
4.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, yukarıda incelenen her durum için (4.1) denkleminin çözümlerine nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 4.1. $A=1,\ \alpha=0{,}3$ ve başlangıç değerleri de $x_{-2}=0{,}5,\ x_{-1}=0{,}1,\ x_0=0{,}9$ olmak üzere (4.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-2	0,5	9	1,00952754724686	20	0,99974400671883
-1	0,1	10	0,99715930849867	21	1,00025605883052
0	0,9	11	1,00284878401788	22	0,99992319513373
1	1,23114441334492	12	0,99715930849867	23	1,00007681076571
2	1,99526231496888	13	1,00284878401788	24	0,99992319513373
3	1,03211299742819	14	0,99914694388260	25	1,00007681076571
4	0,96888616119726	15	1,00085378444344	26	0,99997695792070
5	1,03211299742819	16	0,99914694388260	27	1,00002304261025
6	0,99056237021680	17	1,00085378444344	28	0,99997695792070
7	1,00952754724686	18	0,99974400671883	29	1,00002304261025
8	0,99056237021680	19	1,00025605883052	30	0,99999308732046

Tablo 4.1



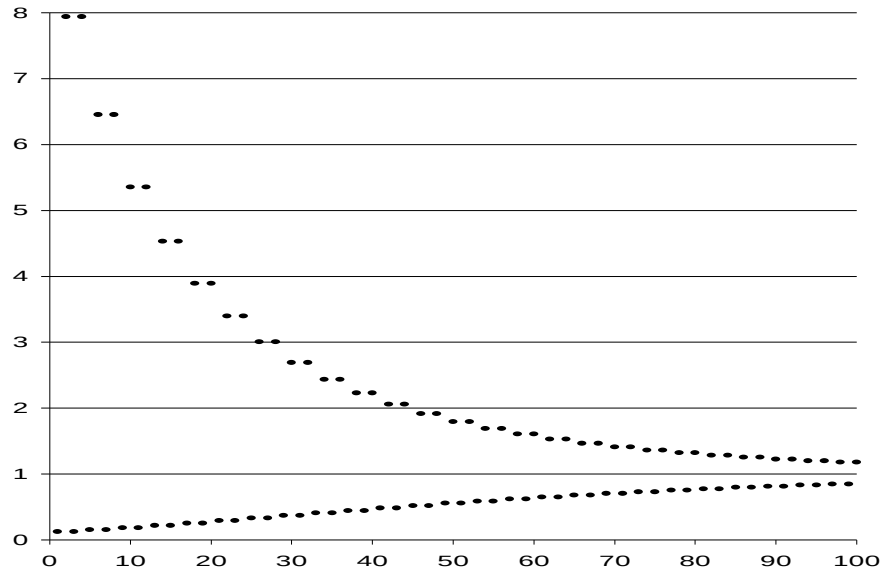
Grafik 4.1

(4.1) denkleminin çözümünün $\bar{x}=1$' e yakınsadığı görülmektedir.

Örnek 4.2. $A=1$, $\alpha=0{,}9$ ve başlangıç değerleri de $x_{-2}=10$, $x_{-1}=2$, $x_0=25$ olmak üzere (4.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-2	10	27	0,332432	56	1,693433
-1	2	28	3,008132	57	0,622456
0	25	29	0,371136	58	1,606538
1	0,125893	30	2,694432	59	0,622456
2	7,943282	31	0,371136	60	1,606538
3	0,125893	32	2,694432	61	0,652677
4	7,943282	33	0,409807	62	1,532153
5	0,154882	34	2,440172	63	0,652677
6	6,456542	35	0,409807	64	1,532153
7	0,154882	36	2,440172	65	0,681127
8	6,456542	37	0,448045	66	1,468155
9	0,186638	38	2,231919	67	0,681127
10	5,357967	39	0,448045	68	1,468155
11	0,186638	40	2,231919	69	0,707792
12	5,357967	41	0,4855	70	1,412845
13	0,22075	42	2,059731	71	0,707792
14	4,530019	43	0,4855	72	1,412845
15	0,22075	44	2,059731	73	0,732681
16	4,530019	45	0,52188	74	1,364851
17	0,25675	46	1,91615	75	0,732681
18	3,894843	47	0,52188	76	1,364851
19	0,25675	48	1,91615	77	0,755829
20	3,894843	49	0,556946	78	1,323051
21	0,294143	50	1,795505	79	0,755829
22	3,399703	51	0,556946	80	1,323051
23	0,294143	52	1,795505	81	0,777286
24	3,399703	53	0,590517	82	1,286527
25	0,332432	54	1,693433	83	0,777286
26	3,008132	55	0,590517	84	1,286527

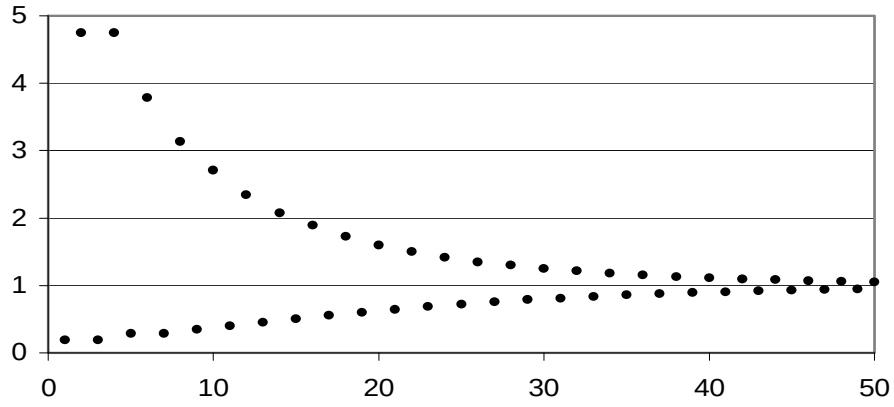
Tablo 4.2



Grafik 4.2

(4.1) denkleminin çözümünün $\bar{x} = 1$' e yakınsadığı görülmektedir.

Örnek 4.3. $A = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}8$ ve başlangıç değerleri de $x_{-2} = 8$, $x_{-1} = 10$, $x_0 = 15$ olmak üzere (4.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.



Grafik 4.3

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-2	8	12	2,343719636	26	1,348721451
-1	10	13	0,450320976	27	0,756465827
0	15	14	2,075835953	28	1,298774799
1	0,189464571	15	0,505912573	29	0,787158497
2	4,750228479	16	1,893137938	30	1,250168491
3	0,189464571	17	0,557500905	31	0,811284012
4	4,750228479	18	1,724803487	32	1,211017027
5	0,287493745	19	0,600142237	33	0,836421448
6	3,784230587	20	1,595892152	34	1,182120275
7	0,287493745	21	0,646559210	35	0,857985208
8	3,130502887	22	1,504515428	36	1,153612283
9	0,344840230	23	0,688013831	37	0,874723244
10	2,710798767	24	1,417468308	38	1,130358384
11	0,401336550	25	0,721244781	39	0,891973810

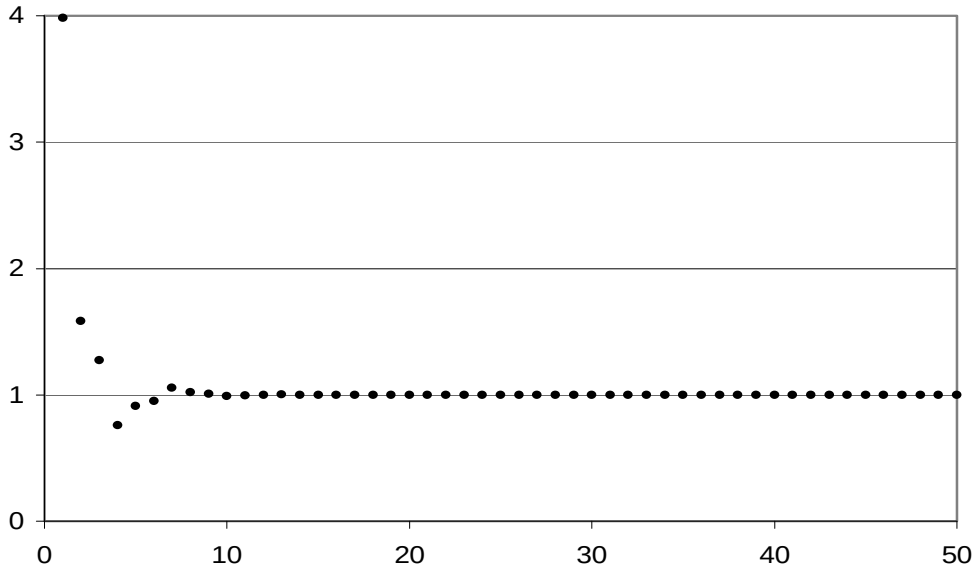
Tablo 4.3

(4.1) denkleminin çözümünün $\bar{x} = 1$' e yakınsadığı görülmektedir.

Örnek 4.4. $A = 0{,}6$, $\alpha = 0{,}2$ ve başlangıç değerleri $x_{-2} = 0{,}001$, $x_{-1} = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}3$ olmak üzere (4.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-2	0,001	12	0,9980754977469	26	1,0000011789243
-1	0,1	13	1,0022129266051	27	1,0000006164343
0	0,3	14	1,0007370987536	28	0,9999992926461
1	3,9810717055350	15	1,0003853455239	29	0,9999997642153
2	1,5848931924611	16	0,9995580013723	30	0,9999998767132
3	1,2722596365394	17	0,9998526454118	31	1,0000001414708
4	0,7585775750292	18	0,9999229487091	32	1,0000000471569
5	0,9120108393559	19	1,0000884231767	33	1,0000000246574
6	0,9529823345503	20	1,0000294735235	34	0,9999999717058
7	1,0568175092137	21	1,0000154109706	35	0,9999999905686
8	1,0185913880541	22	0,9999823163028	36	0,9999999950685
9	1,0096783173357	23	0,9999941053995	37	1,0000000056588
10	0,9890084450211	24	0,9999969178344	38	1,0000000018863
11	0,9963226419544	25	1,0000035367770	39	1,0000000009863

Tablo 4.4



Grafik 4.4

(4.1) denkleminin çözümünün $\bar{x} = 1$' e yakınsadığı görülmektedir.

Örnek 4.5. $A = 32$, $\alpha = 0{,}2$ ve başlangıç değerleri $x_{-2} = 3{,}15$, $x_{-1} = 8{,}2$, $x_0 = 16{,}5$ olmak üzere (4.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-2	3,15	5	1,93939394	12	16,5
-1	8,2	6	16,5	13	1,93939394
0	16,5	7	1,93939394	14	16,5
1	1,93939394	8	16,5	15	1,93939394
2	16,5	9	1,93939394	16	16,5
3	1,93939394	10	16,5	17	1,93939394
4	16,5	11	1,93939394	18	16,5

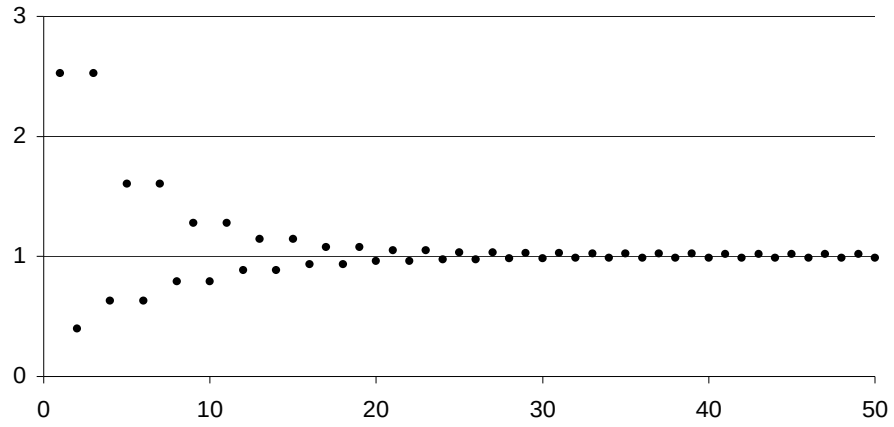
Tablo 4.5

(4.1) denkleminin çözümünün er geç 2 periyotlu olduğu görülmektedir.

Örnek 4.6. $A = 1{,}01$, $\alpha = 0{,}5$ ve başlangıç değerleri $x_{-2} = 2$, $x_{-1} = 15$, $x_0 = 0{,}4$ olmak üzere (4.1) denkleminin çözümleri aşağıdaki tablo ve grafik ile verilmiştir.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
-2	2	19	1,079552859872	40	0,989223062907
-1	15	20	0,962449705333	41	1,021003288209
0	0,4	21	1,049405485194	42	0,989223062907
1	2,525000000000	22	0,962449705333	43	1,021003288209
2	0,400000000000	23	1,049405485194	44	0,989660939492
3	2,525000000000	24	0,976176469871	45	1,020551544167
4	0,629316775528	25	1,034648991420	46	0,989660939492
5	1,604915106789	26	0,976176469871	47	1,020551544167
6	0,629316775528	27	1,034648991420	48	0,989879950463
7	1,604915106789	28	0,983113094363	49	1,020325747105
8	0,789357913981	29	1,027348741250	50	0,989879950463
9	1,279520965219	30	0,983113094363	51	1,020325747105
10	0,789357913981	31	1,027348741250	52	0,989989474123
11	1,279520965219	32	0,986599868918	53	1,020212867308
12	0,884048917815	33	1,023717954785	54	0,989989474123
13	1,142470715870	34	0,986599868918	55	1,020212867308
14	0,884048917815	35	1,023717954785	56	0,990044240497
15	1,142470715870	36	0,988347890869	57	1,020156432093
16	0,935572529648	37	1,021907376271	58	0,990044240497
17	1,079552859872	38	0,988347890869	59	1,020156432093
18	0,935572529648	39	1,021907376271	60	0,990071624820

Tablo 4.6



Grafik 4.6

(4.1) denkleminin çözümünün $\bar{x} = 1$ ' e yakınsadığı görülmektedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak Grove ve Ladas (2005) tarafından açık problem olarak verilen, A pozitif bir reel sayı ve r_{-1} ile r_0 de pozitif rasyonel sayılar olmak üzere, $x_{-1} = A^{r_{-1}}$ ve $x_0 = A^{r_0}$ başlangıç değerleri için $x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/x_{n-1}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir. Daha sonra, $A > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x_n = \max\left\{A/x_{n-1}, 1/x_{n-3}^{\alpha}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin ya $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsadığı ya da er geç 2 periyotlu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu denklemlerle ilişkili olarak $r_{n+1} = \max\{r_n, 1\} - r_{n-1}$, $r_{n+1} = \min\{r_n, 1\} - r_{n-1}$, $y_n = \max\{1 - y_{n-1}, -\alpha y_{n-3}\}$, $y_n = \min\{1 - y_{n-1}, -\alpha y_{n-3}\}$ ve $y_n = \min\{-y_{n-1}, -\alpha y_{n-3}\}$ fark denklemlerinin çözümleri de incelenmiştir.

Çalışmamızın temelini oluşturan ilk kısımdan hareketle benzer açık problemler çözülebilir. Ayrıca bu denklemlerdeki elemanlar *A* ve *B* gibi katsayılar ile çarpılarak ya da *max* operatörü yerine *min* operatörü kullanılarak faklı denklemler oluşturulabilir ve oluşturulan yeni fark denklemlerinin çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Amleh, A. M., Hoag, J. and Ladas, G., 1998, A difference equation with eventually periodic solutions, *Computers & Mathematics with Applications*, 36, 401-404.

Amleh, A. M., 1998, Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Berenhaut, K. S., Foley, J. D. and Stevic, S., (2006), Boundedness character of positive solutions of a max difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 12, 1193-1199.

Çinar, C., Stevic, S. and Yalçınkaya, İ., 2005, On the positive solutions of reciprocal difference equation with minimum, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 17(1-2), 307-314.

Elabbasy, E. M., El-Metwally, H. and Elsayed, E. M., 2005, On the periodic nature of some max-type difference equations, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,*14, 2227-2239.

Elaydi, S., 1996, An Introduction to Difference Equations, Spinger-Verlag, New York.

Elsayed, E. M. and Stevic, S., 2009, On the max-type difference equation $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, x_{n-2}\right\}$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71, 910-922.

Feuer, J., Janowski, E. J., Ladas, G. and Teixeira, C., 2000, Global Behavior of Solutions of $x_{n+1} = \max\{x_n, A\}/\, x_n x_{n-1}$, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2, 3.

Feuer, J., 2003, Periodic solutions of the Lyness max equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160.

Gelişken, A., Çinar, C. and Karataş, R., 2008, A note on the periodicity of the Lyness max equation, *Advances in Difference Equations*, 2008, doi: 10.1155/2008/651747.

Gelişken, A. and Çinar, C., 2009, On the global attractivity of a max-type difference equation, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009, doi: 10.1155/2009/812674.

Grove, E. A. and Ladas, G., 2005, Periodicities in Nonlinear Difference Equations, *Advances in Discrete Mathematics and Applications,* Chapman & Hall / CRC, 4, Boca Raton, Florida.

Grove, E. A., Kent, C. M. and Ladas, G., 1998, Boundedness and persistence of the nonautonomous Lyness and max Equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 241-258.

Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., 1998, Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \max\left\{x_n^k, A\right\}/x_{n-1}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 297-310.

Kulenovic, M. R. S. and Merino, O., 2002, Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, Florida.

Kulenovic, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Boca Raton, Florida.

Mishev, D. P., Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, A reciprocal difference equation with maximum, *Computers & Mathematics with Applications*, 43, 1021-1026.

Moybe, L. A., 2000, Difference Equations with Public Health Applications, New York, USA.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 1998, Persistence, oscillatory behavior and periodicity of the solutions of a system of two nonlinear difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 4, 315-323.

Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V., 2001, On a max difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258, 258-268.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., 2003, Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5, 2, 237-247.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2004, On a max type recurrence relation with periodic coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 3, 329-338.

Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max – difference equation, *Information Sciences*, 176, 3694-3710.

Stevic, S., 2008, On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$, *Applied Mathematics Letters*, 21, 8, 791-796.

Stevic, S., 2009, Global stability of a difference equation with maximum, *Applied Mathematics and Computation,* 210, 2, 525-529.

Sun, F., 2008, On the asymptotic behavior of a difference equation with maximum, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2008.

Şimşek, D., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., 2006, On the solution of the difference equation $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-1}, x_{n-1}\}$, *International Journal of Contemporary Mathematics Sciences,* 1, 10, 481-487.

Teixeria, C. T., 2000, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Voulov, H. D., 2002, On the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8, 799-810.

Voulov, H. D., 2002, Periodic solutions to a difference equation with maximum, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 2155-2160.

Yalçınkaya, İ., Iricanin B. D. and Çinar, C., 2007, On a max-type difference equation, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2007.

Yang, X., Liao, X. and Li, C., 2006, On a difference equation with maximum, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1-5.