



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BETA MOYAL-SLASH DAĞILIMI VE KISMI İLİŞKİLİ VERİLERE DAYALI İKİ ÖRNEKLEM TESTLERİ

ALİ ALPER GENÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

Mart-2018
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BETA MOYAL-SLASH DAĞILIMI VE KISMI İLİŞKİLİ VERİLERE DAYALI İKİ ÖRNEKLEM TESTLERİ

Ali Alper GENÇ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi M. Çağatay Korkmaz

2018, 48 Sayfa

Jüri
Dr. Öğretim Üyesi M. Çağatay Korkmaz
Prof. Dr. Coşkun Kuş
Dr. Öğretim Üyesi Aydın Karakoca

Bu tez çalışmasında, Moyal ve beta Moyal dağılımlarını genelleştiren beta Moyal slash isimli yeni bir dağılım sunulmuştur. Dağılıma ait momentler, mod, çarpıklık ve basıklık gibi dağılımsal özellikler incelenmiştir. Olasılık yoğunluğu fonksiyonu için bir seri açılımı ve rasgele sayı üretim algoritması verilmiştir. Yeni dağılımın konum ölçek formu elde edilmiştir. Parametre tahmini en çok olabilirlik yöntemi ile yapılmıştır. Bu dağılımın modelleme yeteneğini görmek için gerçek bir veri analiz örneği verilmiştir. Önerilen dağılım altında kısmi ilişkili veriye dayalı iki örnek problemi üzerinde tartışılmıştır. Ayrıca, farklı durumlar üzerinde I. tip hata ve testlerin gücünü araştırmak için bir simülasyon çalışması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Beta Moyal dağılımı; kalın kuyruklu dağılım; Moyal slash dağılımı; beta Moyal slash dağılımı; Kısmı bağlantılı veri.

ABSTRACT

MS THESIS

BETA MOYAL-SLASH DISTRIBUTION AND TWO SAMPLING TESTS BASED ON PARTIALLY CORRELATED DATA

Ali Alper GENÇ

Selcuk University Institute of Science and Technology Statistics Department

Advisor: Asst. Prof. Dr. M. Çağatay KORKMAZ

2018, 48 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. M. Çağatay Korkmaz
Prof. Dr. Coşkun Kuş
Asst. Prof. Dr. Aydın Karakoca

In this thesis, a new distribution called beta Moyal slash distribution is introduced which generalizes the Moyal and beta Moyal distributions. The distributional properties are studied such as moments, mode, skewness and kurtosis. An expansion for the probability density function is provided and random number generation algortihm is given. Location-scale form of the new distribution is also discussed. Estimation is studied via maximum likelihood estimation method. A real data example is given to see the ability of modelling. Two sample problem is discussed for introduced distribution based on partially correlated data. Simulation study is also performed to investigate the type I error rate and the power of the tests for different situations.

Keywords: Beta-Moyal distribution; heavy tailed distribution; Moyal slash distribution; slashed beta Moyal distribution; partially correlated data.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Doktor Öğretim Üyesi M. Çağatay Korkmaz'a, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan İstatistik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Coşkun Kuş'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan başta Dr. Yener Ünal ve Arş. Gör. Kadir Karakaya olmak üzere İstatistik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve nişanlıma da sonsuz teşekkürler ederim.

Ali Alper GENÇ
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

1. GİRİŞ **1**

2. DAĞILIMLAR **4**

2.1. Slash Dağılımı 4
2.2. Moyal Dağılımı 6
2.3. Dağılımların Beta Üreten Ailesi 8
2.4. Beta-Moyal Dağılımı 10

3. BETA MOYAL-SLASH DAĞILIMI **15**

3.1. Rasgele Sayı Üreteçleri 20
3.2. Momentleri 20
3.3. Dağılımın Yerel-Ölçek Formu 23
3.4. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi 25

4. BİR UYGULAMA **28**

5. KISMİ İLİŞKİLİ ÖRNEKLEMLERE DAYALI *BMSl* DAĞILIMI ALTINDA İKİ ÖRNEKLEM TESTLERİ **32**

6. SONUÇ VE ÖNERİLER **41**

KAYNAKLAR **42**

EK 1 ..... **45**

EK 2 ..... **46**

ÖZGEÇMİŞ **49**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$Sl(q)$: Slash Dağılımı

Mo : Moyal Dağılımı

$BMo(a,b)$: Beta-Moyal Dağılımı

$X_{i,n}$: n hacimlik rasgele bir örnekleme ait *i.* Sıra istatistiği

Kısaltmalar

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu: o.y.f.
Kümülatif Dağılım Fonksiyonu: k.d.f.
En Çok Olabilirlik: MLE

1. GİRİŞ

Normal dağılım, birçok alanda pratik uygulaması olan, çok önemli sürekli bir dağılım ailesidir. İstatistikte, birçok sonuç çıkarımı ve testler normal dağılıma dayalı olarak yapılmaktadır. Ancak veride olabilecek sapan değerler normalden daha kalın kuyruklu bir dağılım ürettiklerinden, normal dağılıma dayalı çıkarılan bu sonuçlar bu durumdan kötü yönde etkilenirler. Bu gibi durumlarda normal dağılıma alternatif kalın kuyruklu bir dağılım kullanmak çözüm olabilir. Bu yüzden normal dağılıma alternatif kalın kuyruklu olabilen dağılımlar üretmek birçok istatistikçinin dikkatini çekmiştir. Normal dağılıma alternatif olarak bilinen kalın kuyruklu dağılımların en başında dayanıklı istatistiksel analizlerde de popüler olan, *t* ve slash dağılımları gelmektedir (Rogers ve Tukey, 1972, Morgenthaler, 1986).

Slash dağılımı literatürde, normal dağılıma alternatif, kalın kuyruklu bir model olarak ve dayanıklılık çalışmalarında kullanılmak üzere Rogers ve Tukey (1972) tarafından bir oransal dağılım olarak tanımlanmış ve bu dağılımın özellikleri yazarlar tarafından incelenmiştir. Yazarlar, bu tanımlama ile dağılımın kuyruğunu ve basıklığını kontrol eden bir parametreyi dağılıma eklemişlerdir. Bu parametre normal dağılıma göre avantaj elde etmektedir. Morgenthaler (1986), sapan değer durumunda, dayanıklı güven aralıkları oluşturmuş ve normal dağılım ve slash dağılımlarını karşılaştırmıştır. Ayrıca literatürde, hataların kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, dayanıklı regresyon analizi çalışmaları yapılmıştır (Jamshidian, 2001, Kashid ve Kulkarni, 2003).

Kafadar (1982), standart slash dağılımını, konum ve ölçek ile parametrelendirerek bu parametrelerin en çok olabilirlik tahminlerini elde etmiştir. Wang ve Genton (2006), çok değişkenli çarpık bir slash dağılımını, Azzalini (1985) tarafından verilen çarpık normal dağılımı kullanarak tanımlayıp, çarpık veri kümesi üzerinde modelleme yapmışlardır. Goméz ve ark. (2007) simetrik olmayan bir slash dağılım ailesi tanımlamışlardır. Genç (2007), üstel kuvvet dağılımı ile düzgün dağılımı kullanarak, genel bir slash dağılımı önermiştir. Arslan (2008), çok değişkenli bir slash dağılımını, çok değişkenli normal dağılım ve kuvvet fonksiyonu dağılımını kullanarak tanımlamıştır. Arslan ve Genç (2009) tarafından verilen Kotz tipi çok değişkenli normal dağılımı kullanarak, çok değişkenli bir slash dağılımı tanımlayıp, bu dağılıma ilişkin uygulama vermişlerdir. Olmos ve ark. (2012), yarı normal dağılımın düzgün dağılıma oranı ile yarı normal slash dağılımını elde etmişlerdir ve çeşitli dağılım özelliklerini

inceleyerek gerçek veri uygulamalarını yapmışlardır. Reyes ve ark. (2013), normal dağılım ve ölçek parametresi 2 olan üstel dağılımı kullanarak modifiye edilmiş bir slash dağılımı elde edip, dağılım parametrelerinin en çok olabilirlik tahminine ilişkin bir uygulama yapmışlardır. Genç (2013), beta normal dağılımını (Eugene ve ark., 2002) kullanarak, beta tipli ve çarpık olabilen genelleştirilmiş bir slash dağılımı elde etmiştir ve parametrelere ilişkin en çok olabilirlik tahminlerini elde edip bu dağılıma uygulamalar vermiştir. Gui (2014), genelleştirilmiş yarı normal slash dağılımını elde etmiş ve Olmos ve ark. (2012) tarafından önerilen slash dağılımını genellemiştir. Bulut ve Arslan (2015), matris değişken biçimli çok değişkenli bir slash dağılımı tanımlamışlardır. Reyes ve ark. (2013) çarpık normal (Azzalini, 1985) dağılımı ile üstel dağılımın özel bir durumunu kullanarak modifiye edilmiş bir çarpık slash dağılımı tanımlamışlardır. Iriarte ve ark. (2015), Rayleigh ve düzgün dağılımlarını oranlayarak Rayleigh slash dağılımını tanımlayıp bu dağılımın basıklık anlamında sıradan Rayleigh dağılımından daha esnek bir yapıda olduğunu göstermişlerdir. Korkmaz (2017), gamma normal dağılımını (Alzaatreh ve ark., 2014) kullanarak çarpık olabilen genelleştirilmiş bir slash dağılımı elde etmiş ve parametrelere ilişkin en çok olabilirlik tahminlerini elde edip gerçek veri uygulaması vermiştir.

Diğer yandan dağılımların beta üreten ailesi son zamanlarda birçok istatistikçi tarafından ele alınmıştır. Bu dağılım ailesi, beta dağılımına ait dağılım fonksiyonunda tanım kümesinin bir başka dağılım fonksiyonu içermesiyle Eugene ve ark. (2002) tarafından önerilmiştir. Bu sayede oldukça esnek bir formda olabilen, beta dağılımının özellikleri ile başka bir dağılım özellikleri birleştirilerek daha esnek yapıda dağılımlar elde edilmektedir. Bu tanımlama ile literatüre birçok beta tipli genelleştirilmiş dağılımlar sunulmuştur. Eugene ve ark. (2002) beta tipli dağılım ailesini sunup beta normal dağılımını elde edip çeşitli dağılım özelliklerini inceleyerek gerçek veri uygulaması yapmışlardır. Nadajarah ve Kotz (2004) beta Gumbel dağılımını önerip dağılım özellikleri üstünde durmuşlardır. Femoye ve ark. (2005), birçok alt dağılım modeli içeren beta Weibull dağılımını önermişlerdir. Nadajarah ve Kotz (2006), beta üstel dağılımını sunup yeni dağılımın dağılımsal özelliklerini incelemişlerdir. Akinsete ve ark. (2008) bu tanımlama ile Pareto dağılımını genelleyen beta Pareto dağılımını elde edip, gerçek veri uygulaması sunmuşlardır. Barrote-Souza ve ark. (2010), Gupta, RD ve Kundu (1999) tarafından önerilen genelleştirilmiş üstel dağılımı kullanarak beta genelleştirilmiş üstel dağılımı sunmuşlardır. Paraniaba ve ark. (2011), beta BurrXII dağılımını incelemişlerdir. Cordeiro ve ark. (2013), beta üstelleştirilmiş Weibull

dağılımını, üstelleştirilmiş Weibull dağılımının (Mudholkar ve Srivastava, 1993) bir genellemesi olarak önerip bu dağılımın birçok dağılımı genellediğini göstermişlerdir. Ayrıca Moyal (1955) tarafından önerilen Moyal dağılımı, Cordeiro ve ark. (2012) tarafından beta Moyal olarak genellenmiş ve bu yeni dağılımın Moyal dağılımından daha esnek olduğu gösterilmiştir. Dagum dağılımının beta tipli bir genellemesi ise Domma ve Condino (2013) tarafından elde edilmiştir. Son olarak, beta üstelleştirilmiş Lindley dağılımı Rodrigues ve ark. (2016) tarafından önerilmiştir.

Bu tezdeki amaç, beta üreten ailenin bir üyesi olan beta Moyal dağılımının (Cordeiro, 2012), slash dağılımı tanımlaması ile genel bir durumunun elde edilmesi, elde edilen yeni dağılımın özelliklerinin incelenmesi ve basıklığı kontrol eden yeni bir parametrenin bu dağılıma eklenmesiyle veri analizinde daha iyi sonuç alınıp alınmadığının araştırılmasıdır. Slash dağılımı yapısıyla yeni tanımlanacak olan ve özellik olarak Moyal ve beta-Moyal dağılımlardan daha esnek yapıda olmasını beklediğimiz dağılıma "beta-Moyal slash" dağılımı denilecektir.

Tezin ikinci bölümünde slash, Moyal ve beta-Moyal dağılımlarının yapısı ve bu dağılımların özellikleri hakkında genel bilgiler verilecektir.

Tezin üçüncü bölümünde beta-Moyal slash dağılımının tanımlaması yapılacak olup bununla birlikte bu dağılım için; olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf), kümülatif dağılım fonksiyonu (kdf), momentleri, parametrelerin durumuna göre bazı özel durumları, oyf'nin asimptotik açılımları, dağılımın konum-ölçek formu, parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilecektir.

Tezin dördüncü bölümünde gerçek veri analizi yapılacak önerilen dağılım, literatürde ki dağılımlarla karşılaştırılacaktır.

Tezin beşinci bölümünde kısmi ilişkili verilere dayalı iki örneklem testleri yeni dağılımda nasıl çalıştığını gözlemlemek için simülasyon çalışması yapılacaktır.

Tezin altıncı ve son bölümünde sonuçlar ve öneriler verilecektir.

Tezde kullanılan nümerik hesaplamalar açık kaynak kodlu R paket programı (R Core Team, 2013) ile hesaplanmıştır.

2. DAĞILIMLAR

Tezin bu bölümünde slash, Moyal (Moyal, 1955) ve beta-Moyal (Cordeiro ve ark., 2012) dağılımları hakkında bazı bilgiler verilecektir.

2.1. Slash Dağılımı

Slash dağılımı, standart normal dağılıma sahip rasgele değişkeni, (0,1) aralığında tanımlı ve standart normal dağılımından bağımsız düzgün dağılımlı bir rasgele değişkenin kuvvetine oranı olarak tanımlanır (Rogers ve Tukey, 1972). Stokastik bir ifadeyle, bağımsız $Z \sim N(0,1)$ normal dağılım ve $U \sim Uniform(0,1)$ düzgün dağılımlı rasgele değişkenleri için

$$X = \frac{Z}{U^{1/q}} \tag{2.1}$$

oranı, slash dağılımı olarak adlandırılır ve $Sl(q)$ olarak ifade edilir. Eşitlik (2.1) deki slash dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x) = q\int_0^1 t^q \phi(xt)dt, -\infty < x < \infty \tag{2.2}$$

biçiminde olup, burada q >0 ve dağılımın kuyruk kalınlığını kontrol eden biçim parametresi ve $\phi(\cdot)$ ifadesi ise

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty, \tag{2.3}$$

ile verilen 0 ortalama ve 1 varyansa sahip olan standart normal dağılımın, $N(0,1)$ gösterimi ile, olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedir.

Eşitlik (2.2) de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna karşılık gelen kümülatif dağılım fonksiyonu ise

$$G(x) = q\int_0^1 t^{q-1}\Phi(xt)dt, -\infty < x < \infty, \tag{2.4.}$$

eşitliği ile verilir. Buradaki, $\Phi(\cdot)$ ifadesi ise

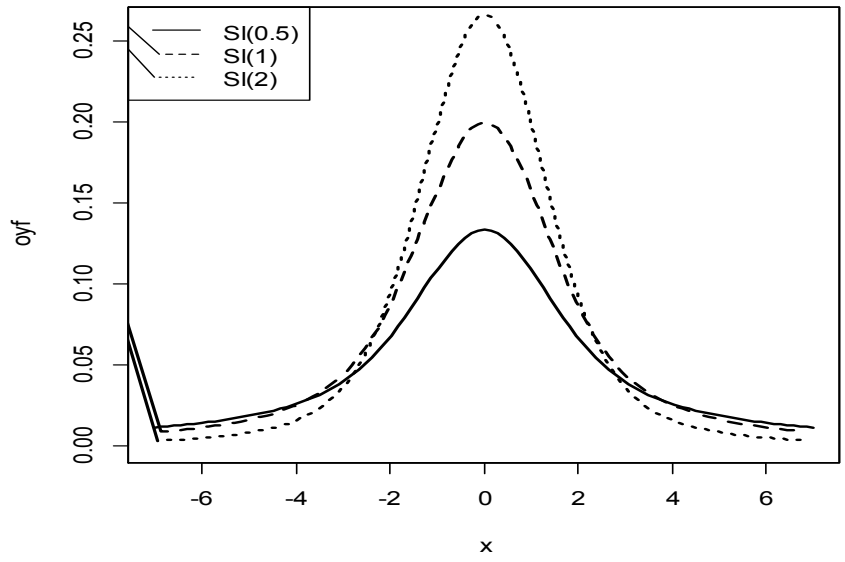
$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}w^2}\,dw,\ -\infty<z<\infty \tag{2.5}$$

ile verilen 0 ortalama ve 1 varyansa sahip olan standart normal dağılımının kümülatif dağılım fonksiyonudur.

Slash dağılımında q=1 için elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x^2}\left(1-\exp\left(-x^2/2\right)\right), & x\neq 0;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}, & \textit{aksihalde.}\end{cases} \tag{2.6}$$

şeklindedir ve standart slash dağılımı ya da *kanonik slash* dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Kanonik slash dağılımının özellikleri Rogers ve Tukey (1972) tarafından incelenmiştir. Ek olarak, $q\to\infty$ iken (2.2) de verilen olasılık yoğunluğu, normal dağılıma yakınsamaktadır. Şekil 2.1 de slash dağılımının oyf'sine ilişkin şekiller verilmiştir.



Şekil 2.1. Slash dağılımının q parametresine göre oyf biçimleri

Şekil 2.1 den görüleceği üzere q biçim parametresi büyüdükçe dağılımın basıklığı ve kuyruk kalınlığı düşmektedir.

Slash dağılımı, normal dağılım gibi ortalamaya göre simetrik bir dağılım olup, benzer şekilde dağılımın tek momentleri sıfıra eşittir. Bunun nedeni slash dağılımının (2.1) deki stokastik tanımlamasında yer alan normal dağılımın tek momentlerinin sıfıra eşit ve düzgün dağılımdan bağımsız olmasıdır. Slash dağılımının çift momentleri için (2.1) stokastik ifadesi kullanılarak ve $q > 2r$ olmak koşuluyla

$$E\left(X^{2r}\right) = E\left(Z^{2r}U^{-2r/q}\right) = E\left(Z^{2r}\right)E\left(U^{-2r/q}\right) \tag{2.7}$$

eşitliği verilebilir. Burada r=1,2,3,…, $E\left(Z^{2r}\right) = (2r)!/2^r r!$ normal dağılımın çift momentlerine ve $E\left(U^{-2r/q}\right) = q/(q-2r)$ değerine eşittir.

2.2. Moyal Dağılımı

Moyal dağılımı (Moyal, 1955), fizikçi José Enrique Moyal tarafından Landau dağılımının bir yakınsaması olarak önerilmiştir. Moyal dağılımı, hızlı şarj parçacıklarının iyonlaşma enerji kaybı ve bu işlemde üretilen iyon çiftlerinin sayısı için evrensel bir biçimdir (Walck, 2007).

Moyal dağılımına ait oyf ve kdf sırasıyla

$$g(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left\{-\left[x + \exp(-x)\right]/2\right\}, \tag{2.8}$$

$$G(x) = 1 - \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\exp\{-x\}\right), -\infty < x < \infty \tag{2.9}$$

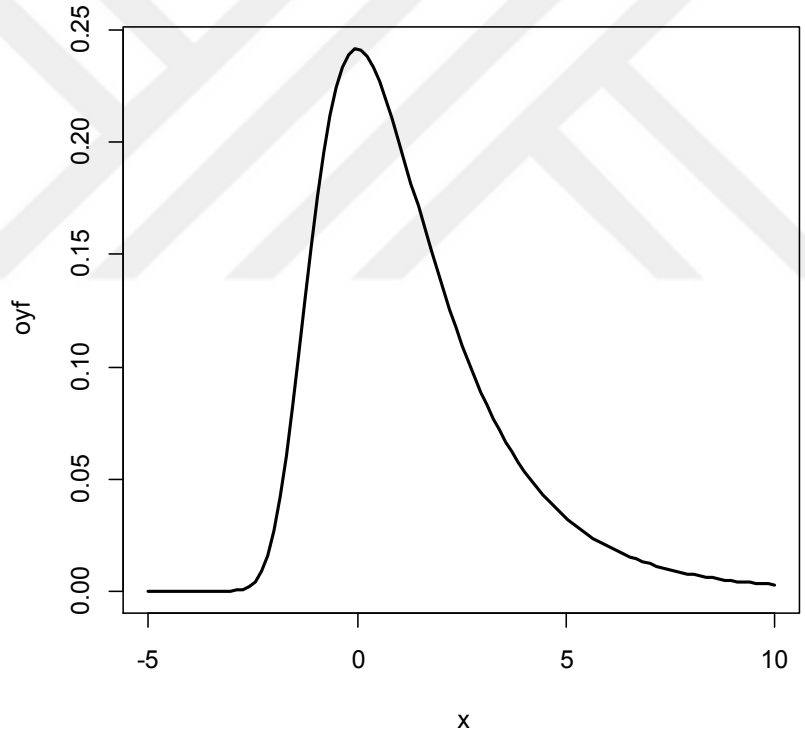
biçimindedir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $\gamma(\cdot,\cdot)$ ifadeleri sırasıyla aşağıda verilen eşitliklere sahip

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \tag{2.10}$$

$$\gamma(a,z) = \int_0^z t^{a-1}e^{-t}dt \tag{2.11}$$

gamma ve tamamlanmamış gamma fonksiyonlarıdır. Moyal dağılımına kısaca *Mo* gösterimi kullanılacaktır.

Eşitlik (2.8) deki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olan *Mo* dağılımı 0 noktasında bir mod değerine sahiptir. *Mo* dağılımı, normal dağılım gibi sabit bir çarpıklık ve basıklık değerine sahiptir. Ancak *Mo* dağılımı, normal dağılımın aksine pozitif çarpıklığa sahiptir. *Mo* dağılımının çarpıklık değeri 1.53514 ve basıklık değeri ise 4 tür (Şekil 2.2). Dolayısıyla bu dağılım pozitif çarpık verileri modellemek için normal dağılımından daha kullanışlı olabilir. Aryal ve Tsokos (2008) havayolu filosu atama sürecindeki optimal uçak kapasitesinin belirlenmesi için Moyal dağılımını kullanmışlar ve normal, lojistik, log-normal ve gamma dağılımları ile karşılaştırma yapmışlardır.



Şekil 2.2. Moyal dağılımına ait oyf grafiği

Moyal dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi(t) = E\left(e^{itx}\right) = \frac{2^{-it}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2} - it\right) \tag{2.12}$$

eşitliği ile verilir (Walck, 2007), burada $\Gamma(\cdot)$ ifadesi (2.10) da verilmiştir.

Mo dağılımının beklenen değeri, varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayıları sırasıyla,

$$E(X) = \ln 2 + \gamma \approx 1.27036$$
$$V(X) = \pi^2 / 2$$
$$\delta_1 = 1.53514$$
$$\delta_2 = 4$$

eşitlikleri ile verilebilir. Burada $\gamma \approx 0.57721$ olan Euler sabitidir. Moyal dağılımının momentleri ve kümülantları hakkında ayrıntılı bilgi için Walck (2007)'e bakılabilir.

2.3. Dağılımların Beta Üreten Ailesi

Bu alt bölümde dağılımların beta üreten ailesinin tanımlaması ve bazı özellikleri verilecektir.

Eugene ve ark. (2002), beta dağılımının kdf tanımlamasını kullanarak yeni bir dağılım ailesi sunmuşlardır. Bu dağılım ailesine ait kdf yazarlar tarafından,

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega \qquad (2.13)$$

eşitliği ile verilir. Burada, $a > 0$ ve $b > 0$ olmak üzere çarpıklık ve kuyruk ağırlıklarını kontrol eden iki biçim parametresi, $G(x)$ bir rasgele değişkene ait kdf ve $B(a,b)$ terimi ise

$$B(a,b) = \int_0^1 \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega \qquad (2.14)$$

eşitliği ile verilen beta fonksiyonunu ifade etmektedir. Eşitlik (2.13) de $G(x)$ yerine [0,1] aralığında tanımlı düzgün kdf'si alınırsa ($G(x)=x$) bu durumda beta dağılımına ait kdf elde edilir. Eşitlik (2.13) aynı zamanda

$$F(x) = I_{G(x)}(a,b) \qquad (2.15)$$

ile de verilebilir. Buradaki $I_y(a,b)$ ifadesi

$$I_y(a,b) = B(a,b)^{-1} \int_0^y w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw \tag{2.16}$$

ile verilen tamamlanmamış beta fonksiyonu oranıdır (Barreto-Souza ve ark., 2010). Ek olarak, eşitlik (2.13) hipergeometrik fonksiyon yardımıyla

$$F(x) = \frac{G(x)}{aB(a,b,)}{}_2F_1(a,1-b,a+1;G(x)) \tag{2.17}$$

ile verilebilir. Burada ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)$ hipergeometrik fonksiyonu, $(\alpha)_i = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1)$ artan faktöriyeli ifade etmek üzere,

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i(\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i \tag{2.18}$$

eşitliğine denktir (Barreto-Souza ve ark., 2010).
Beta üreten ailenin eşitlik (2.17) de verilen kdf karşılık gelen oyf

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} G(x)^{a-1} \{1-G(x)\}^{b-1} g(x) \tag{2.19}$$

eşitliği ile verilir. Burada $g(x) = dG(x)/dx$ ile verilen temel dağılımın oyf'dir. $G^{-1}(\cdot)$ bir dağılımın ters kdf fonksiyonu ve *V*, *a*,*b* parametreli beta dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere, $X = G^{-1}(V)$ rasgele değişkeninin dönüşümünün dağılımı beta üreten aileyi temsil etmektedir.

Beta üreten ailenin üyeleri, temel alınan dağılımlardan daha esnek bir yapıda olabilmektedirler. Örneğin bozulma oranı fonksiyonu sabit olan üstel dağılımın bir genellemesi beta üreten aile ile elde edildiğinde beta üstel dağılımı (Nadajarah ve Kotz, 2006) elde edilir ve beta üstel dağılımın bozulma oranı fonksiyonu artan, azalan ve sabit biçimlerde bulunabilir. Bu durum ise üstel dağılımın özelliklerinin veri modellemedeki alanın genişletildiğine vurgu yapmaktadır. Literatürdeki beta üreten ailenin bazı özel üyeleri giriş kısmında verilmiştir.

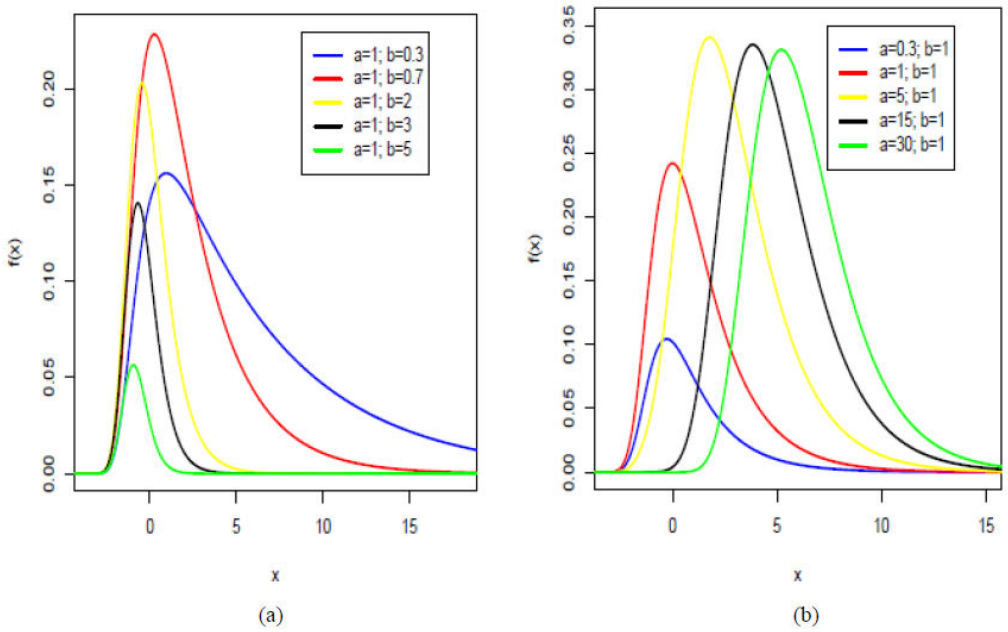
2.4. Beta-Moyal Dağılımı

Bu alt bölümde beta-Moyal (Cordeiro ve ark., 2012) dağılımı ve bazı özellikleri yazarların elde ettiği şekilde verilecektir. Verilen bilgiler ilgili kaynaktan alınmıştır. Cordiero ve ark. (2012), beta üreten ailenin verilen tanımlamalarını kullanarak beta-Moyal dağılımını önermişlerdir. Beta-Moyal dağılımına ait kdf ve oyf sırasıyla,

$$F(x)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^{1-\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\gamma\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp(-x)\right\}}\omega^{a-1}(1-\omega)^{b-1}d\omega, \tag{2.20}$$

$$h(x)=\frac{\exp\left\{-\left[x+\exp(-x)\right]/2\right\}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B(a,b)}\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp\{-x\}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp\{-x\}\right)\right\}^{b-1} \tag{2.21}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $-\infty<x<\infty$, $a>0$ ve $b>0$ olan dağılımın biçim parametreleridir. a=b=1 için beta-Moyal dağılımı, sıradan Moyal dağılımına indirgenir. Beta-Moyal dağılımı $BMo(a,b)$ ile ifade edeceğiz. *BMo* dağılımının seçilen parametre değerlerine göre grafikleri Şekil 2.3 de verilmiştir.



Şekil 2.3 *BMo* dağılımına ait oyf biçimleri

Grafikler incelendiğinde *Mo* dağılımına eklenen a ve b biçim parametreleri sayesinde *Mo* dağılımının esnekliğinin artırıldığı gözlemlenmektedir (Cordeiro ve ark., 2012).

BMo dağılımından rasgele sayı üretmek için (2.20) eşitliği kullanılarak aşağıdaki dönüşüm kullanılabilir:

V a,*b* parametreli beta dağılımına ait rasgele değişken ise,

$$X = -\log\left\{2\left[erf^{-1}(1-V)\right]^2\right\} \tag{2.22}$$

rasgele değişkeni BMo dağılımına sahip rasgele değişkendir. Burada *erf* fonksiyonu $erf(y) = 2\pi^{-1/2}\int_0^y \exp(-t^2)dt$ olan hata fonksiyonudur. Yani bu lineer olmayan dönüşüm $BMo(a,b)$ dağılımına denk bir sayıdır.

Cordeiro ve ark. (2012), *BMo* dağılımının kdf sini eşitlik (2.23) de verilen seri açılımını kullanarak, *b* biçim parametresinin reel bir tam sayı olup olmasına göre iki eşitlikle vermişlerdir. Buna göre $b>0$ reel sayısı için *BMo* dağılımının kdf si;

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} z^j \;;|z|<1, b \in \Re^+ \tag{2.23}$$

eşitliği ile

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left[1-\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\gamma\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\exp(-x)\right\}\right]^{a+j}}{(a+j)\Gamma(b-j)j!} \tag{2.24}$$

olarak verilebilir. (2.24) deki *a* parametresi sıfırdan büyük tam sayı ise binom açılımı kullanılarak *BMo* dağılımının kdf si, *Mo* dağılımının kdf'sinin bir kuvvet açılımı olarak verilebilir. Eğer $a>0$ reel ise (2.24) dağılım fonksiyonuna (2.23) eşitliği tekrar uygulanarak

$$F(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}\sum_{j,m=0}^{\infty}(-1)^{j+m}\frac{\gamma\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp(-x)\right\}^{m}}{\Gamma(1/2)^{m}\Gamma(a+j+1-m)\Gamma(b-j)m!\,j!} \tag{2.25}$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.25) , tamamlanmamış gamma fonksiyonunun sonsuz kuvvet serisi olarak yorumlanabilir.

b>0 tam sayısı için, *BMo* dağılımının kdf'si binom açılımı ile

$$F(x)=\frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}(-1)^{j}\binom{b-1}{j}\left[1-\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\gamma\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp(-x)\right\}\right]^{a+j} \tag{2.26}$$

eşitliği ile elde edilir. *a* parametresi sıfırdan büyük tam sayı ise binom açılımı kullanılarak (2.26) ifadesi

$$F(x)=\frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\sum_{m=0}^{a+j}\frac{(-1)^{j+m}}{(a+j)\Gamma^{m}(1/2)}\binom{b-1}{j}\binom{a+j}{m}\gamma\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp(-x)\right\}^{m} \tag{2.27}$$

olarak yazılabilir. Eğer *a* parametresi sıfırdan büyük reel sayı ise (2.23) ile (2.26) eşitliği

$$F(x)=\frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+m}\Gamma^{-m}(1/2)}{(a+j)m!\Gamma(a+j+1-m)}\binom{b-1}{j}\binom{a+j+1}{m}\gamma\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp(-x)\right\}^{m} \tag{2.28}$$

ile verilir. *BMo* dağılımının oyf'sine ait seri açılımı *b>0* reel sayı olmak üzere (2.23) eşitliği kullanılarak

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\left[x+e^{-x}\right]/2\right\}\sum_{k=0}^{\infty}w_{k}(a,b)\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{e^{-x}}{2}\right)\right\}^{k} \tag{2.29}$$

ile verilebilir. Burada $w_{k}(a,b)$ katsayıları

$$w_{k}(a,b)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}\Gamma(b)\Gamma(a+b)}{B(a,b)\Gamma(1/2)^{k}\Gamma(a+j-k)\Gamma(b-j)k!\,j!} \tag{2.30}$$

eşitliğine denktir.

2.4.1.Beta-Moyal dağılımının momentleri

Beta-Moyal dağılımının ait *r*. momenti eşitlik (2.29) ile Cordeiro ve ark. (2012) tarafından

$$\mu_r \equiv E\left(X^r\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} w_k(a,b)\int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp\left\{-\left[x+e^{-x}\right]/2\right\}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{e^{-x}}{2}\right)\right\}^k dx$$

gibi elde edilmiştir, burada $w_k(a,b)$ katsayıları (2.30) da verilmiştir. $u=\exp(-x)/2$ dönüşümü ile

$$\mu_r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} w_k(a,b)(-1)^r\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\log^r(2u)\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},u\right)\right\}^k du$$

eşitliği elde edilir. $\log^r(2u)$ terimine Binom açılımı uygulaması ile,

$$\mu_r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r} w_k(a,b)(-1)^r\binom{r}{s}r\log^{(r-s)}(2)\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\log^s(u)\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},u\right)\right\}^k du \qquad (2.31)$$

elde edilir. Bu ifade de yer alan tamamlanmamış gamma fonksiyonuna Gradshteyn ve Ryzhik (2000) tarafından

$$\gamma(\alpha,x)=x^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x)^m}{(\alpha+m)m!} \qquad (2.32)$$

eşitliği ile verilen seri açılımı uygulanarak son eşitlikteki integral $I(s,k)$ gösterimi ile,

$$I(s,k)=\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\log^s(u)\left[u^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-u)^m}{(1/2+m)m!}\right]^k du=\int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\log^s(u)\sum_{h=0}^{\infty} c_{m,k}u^m du$$

eşitliği ile yazılır.

Burada $c_{m,k}$ terimi, m=1,2,… için $c_{m,k} = m^{-1}\sum_{l=1}^{h} \frac{(-1)^l (kl-m+l)}{(2l+1)l!} c_{m-1,k}$ ve $c_{0,k} = 2^k$, k=1,2,… olarak yazılabilir (Cordeiro ve ark., 2012). Bu eşitlikler (2.31) de yerine koyularak

$$\mu_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} w_k(a,b) c_{m,k} (-1)^r \binom{r}{s} r\log^{(r-s)}(2) \int_0^{\infty} u^{m+\frac{k+1}{2}-1} e^{-u} \log^s(u) e^{-u} du \qquad (2.33)$$

eşitliği yazılır. Prudnikov ve ark. (1986, eşitlik 2.21) tarafından

$$J(s) = \int_0^{\infty} u^{m+\frac{k+1}{2}-1} e^{-u} \log^s(u) e^{-u} du = \Gamma_s\left(m + \frac{k+1}{2}\right)$$

verilen integral eşitliği ile (2.33) için,

$$\mu_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} w_k(a,b) c_{m,k} (-1)^r \binom{r}{s} r\log^{(r-s)}(2) \Gamma_s\left(m + \frac{k+1}{2}\right)$$

elde edilir. Burada $\Gamma_r(p) = \partial\Gamma(p)/\partial p^r$ dir (Cordeiro ve ark., 2012). Son olarak r. moment için,

$$\mu_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} v_{k,s,r,m}(a,b) \Gamma_s\left(m + \frac{k+1}{2}\right) \qquad (2.34)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $v_{k,s,r,m}(a,b) = w_k(a,b) c_{m,k} (-1)^r \binom{r}{s} r\log^{(r-s)}(2)$ dir.

3. BETA-MOYAL SLASH DAĞILIMI

Bu bölümde slash dağılımı düşüncesini kullanarak yeni bir genelleştirilmiş *Mo* dağılımı tanımlanmıştır ve bu dağılımın özellikleri çalışılmıştır. Yeni dağılım aşağıdaki tanım ile verilir.

Teorem 1. *Z ve U bağımsız ve* $Z \sim BMo(a,b)$ *ve* $U \sim U(0,1)$ *olsun. Eşitlik (2.1)' in stokastik gösterimi tanımlansın. X r.d. nin o.y.f. fonksiyonu,*

$$f(x;a,b,q)=\frac{q}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B(a,b)}\int_0^1 t^q\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\right\}^{b-1}\exp\left\{-\left[xt+e^{-xt}\right]/2\right\}dt\,, \qquad (3.8)$$

ile verilir. Burada, $-\infty < x < \infty$, $a,b,q>0$ dır.

İspat. Eşitlik (2.1) nın stokastik gösteriminden, *Z* ve *U* nun ortak o.y.f.,

$$f(z,u)=\frac{\exp\left\{-\left[z+\mathrm{e}^{-z}\right]/2\right\}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B(a,b)}\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}\right)\right\}^{b-1},-\infty<z<\infty,u\in(0,1).$$

dir. $z=xu^{1/q}$ dönüşümüyle X ve *U nun* ortak o.y.f. si,

$$f(x,u)=\frac{u^{1/q}\exp\left\{-\left[xu^{1/q}+\exp\left(-xu^{1/q}\right)\right]/2\right\}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B(a,b)}\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp\left\{-xu^{1/q}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp\left\{-xu^{1/q}\right\}\right)\right\}^{b-1}$$

ile verilir ve burada $-\infty<x<\infty$, $0<u<1$ dir. Böylece, *X* r.d. nin marjinal o.y.f. si,

$$f(x)=\int_0^1\frac{u^{1/q}\exp\left\{-\left[xu^{1/q}+\exp\left(-xu^{1/q}\right)\right]/2\right\}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B(a,b)}\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp\left\{-xu^{1/q}\right\}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\exp\left\{-xu^{1/q}\right\}\right)\right\}^{b-1}du.$$

biçiminde elde edilir. Son olarak $t=u^{1/q}$ dönüşümüyle ispat tamamlanır.

Beta Moyal-slash dağılımını $BMSl(a,b,q)$ gösterimi ile göstereceğiz. *BMSl* oyf'sinde $a=1$ and $b=1$ için Moyal-slash (*MSl*) dağılımı elde edilir ve bunun o.y.f. si,

$$f(x)=\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} q\int_0^1 t^q \exp\left\{-\left[xt+e^{-xt}\right]/2\right\} dt \qquad (3.9)$$

dir. Buna ilaveten $q\to\infty$ iken, *Mo* dağılımı elde edilir. Yani $q\to\infty$ olduğunda, *BMSl* dağılımı *BMo* dağılımına yakınsar. Aşağıdaki seri açılımı kullanılarak,

$$(1-y)^{c-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\,\Gamma(c)}{j!\Gamma(c-j)}y^j \quad , |y|<1, c>0 \text{ reel sayı} \qquad (3.10)$$

BMSl dağılımının o.y.f. si,

$$f(x)=\frac{q\Gamma(a+b)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(a-j)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{j+b-1}}\int_0^1 t^q\gamma^{j+b-1}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\mathrm{e}^{-\left[xt+e^{-xt}\right]/2}dt$$

ile verilir. Eğer *a* pozitif bir tam sayı ise $\left\{1-\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^{a-1}$ ifadesine binom açılımı uygulanarak aşağıdaki o.y.f.

$$f(x)=\frac{q}{\sqrt{2\pi}B(a,b)}\sum_{k=0}^{a-1}\frac{(-1)^k\binom{a-1}{k}}{\Gamma^{a+b-2-k}\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 t^q\gamma^{a-1-k+b-1}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\mathrm{e}^{-\left[xt+e^{-xt}\right]/2}dt \qquad (3.11)$$

elde edilir. Eşitlik (3.11) de *a*=2 ve *b*=1 olduğunda *BMSl* dağılımının o.y.f. si iki slash dağılımının farkı ile,

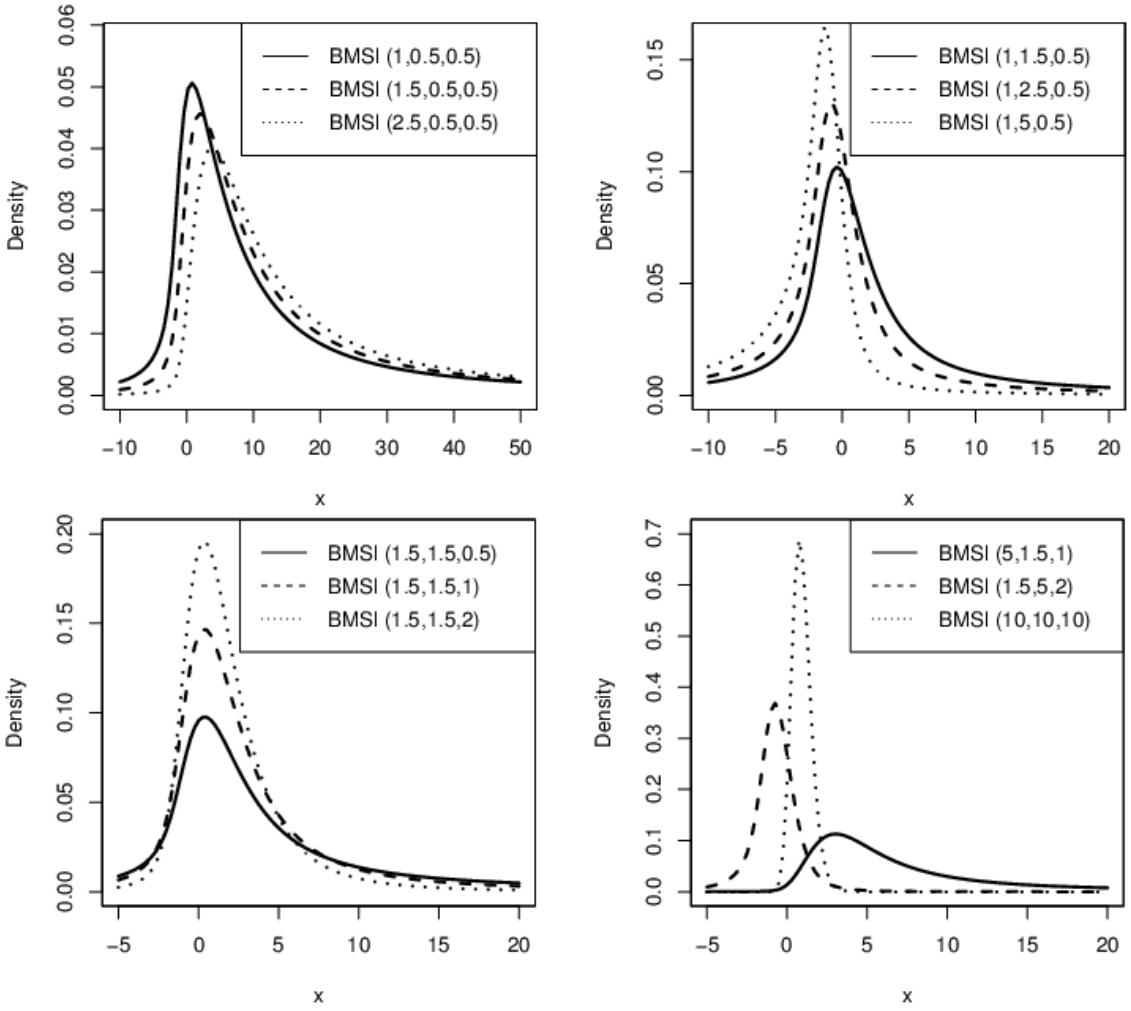
$$f(x)=\frac{2q}{\pi\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 t^q\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\mathrm{e}^{-\left[xt+e^{-xt}\right]/2}dt\right\}-2MSl(q). \qquad (3.12)$$

şeklindeki gibi ifade edilebilir.

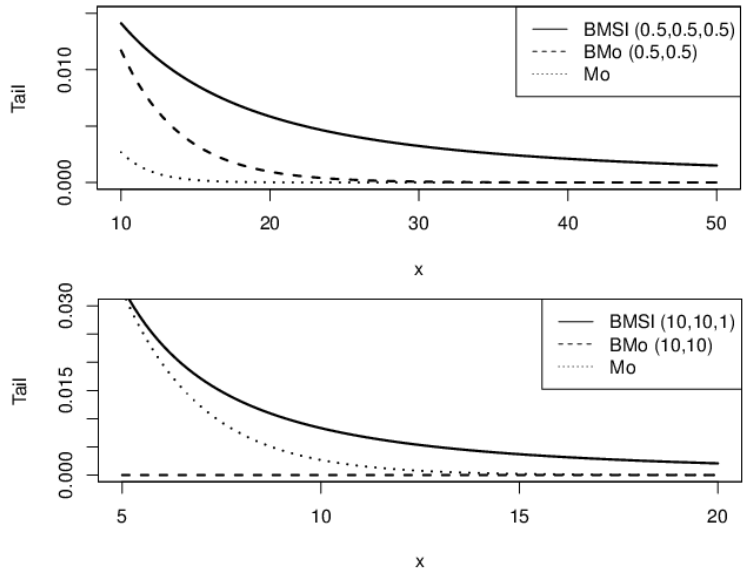
Bazı parametre değerleri için Eşitlik (3.8) de verilen o.y.f. nin grafiği Şekil 3.1'de verilmiştir. Bu grafikler *a*, *b* ve *q* şekil parametrelerinin farklı değerleri için yeni dağılım esnekliğini göstermektedir. Şekil 3.1'den sabit *b* ve *q* için *a* arttığında dağılımın daha kalın kuyruklu olmaktadır. Aynı sonuç *a* ve *q* sabiti için *b* azaldığında ve *a* ve *b* sabiti için *q* azaldığında söz konusudur. Aynı zamanda *BMSl* dağılımının kuyruğu *BMo* ve *Mo* dağılımlarından daha kalın kuyruklu olabilmektedir. (Şekil 3.2).

Eşitlik (3.8) de verilen o.y.f. integral formu içerdiği için dağılımın modu açık bir biçimde elde edilememektedir. Ancak, R programı veya bazı istatistiksel paket

programlar kullanılarak dağılım mod değerleri nümerik olarak hesaplanabilir. Örneğin R paket programı (*R* Core Team, 2013) içindeki tek boyutlu optimizasyon yöntemi olan Brent yöntemi (Brent, 1973) kullanılarak mod değerleri elde edilebilir. *BMSl* dağılımının mod noktası *Mo* dağılımının aksine sıfır olmayan bir noktada olabilir. Brent yöntemi kullanarak seçilmiş parametre değerleri için bazı mod noktaları ve mod değerleri Tablo 3.1 de elde edilmiştir.



Şekil 3.1. *BMSl* dağılımının bazı örnekleri



Şekil 3.2. *BMSl*, *BMo* ve *Mo* dağılımlarının kuyruk çizimleri

Tablo 3.1. Seçilmiş (a,b,q) parametreleri için *BMSl* dağılımının bazı mod değerleri

(a,b,q)	Mod noktası	Mod değeri
(1,1,0.5)	0	0.0806
(1,2,0.5)	-0.6249	0.1183
(1,5,0.5)	-1.2770	0.1648
(2,1,0.5)	1.6515	0.0699
(2,2,2)	0.5080	0.2255
(2,0.5,2)	2.5802	0.0888
(5,1.5,1)	3.0193	0.1128
(10,10,10)	0.7731	0.6891

Diğer yandan *BMSl* dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(x)=\frac{q}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B(a,b)}\int_0^1 t^q\int_{-\infty}^{x}\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-ut}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-ut}\right)\right\}^{b-1}\exp\left\{-\left[ut+e^{-ut}\right]/2\right\}du\,dt$$

eşitliği ile hesaplanabilir. Buradan,

$\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-ut}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=w, -t\left(\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}\exp\left\{-\left[ut+e^{-ut}\right]/2\right\}du=dw$ dönüşümleri ile

$$F(x)=\frac{q}{B(a,b)}\int_0^1 t^{q-1}\int_0^{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)} w^{b-1}(1-w)^{a-1}\,dw\,dt$$

$$=q\int_0^1 t^{q-1} I_{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-xt}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}(b,a)\,dt \tag{3.13}$$

eşitliğine ulaşılır.

BMSl dağılımının k.d.f'si, tamamlanmamış beta ve gamma fonksiyonlarını içerdiği için bu hesaplamalar R, Matlab ve Maple gibi paket programları kullanılarak yapılabilmektedir.

3.1. Rasgele Sayı Üretimi

v, a ve *b* parametreli beta dağılımından bir rasgele sayı olmak üzere $z=-\log\left(2\left[erf^{-1}(1-v)\right]^2\right)$ $BMo(a,b)$ dağılımından rasgele bir sayıdır (Cordeiro ve ark., 2012), burada $erf^{-1}(y)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(2k+1)^{-1}\left(2^{-1}\sqrt{\pi}y\right)^{2k+1}$, $c_k=\sum_{m=0}^{k-1}c_m c_{k-1-m}\left[(m+1)(2m+1)\right]^{-1}$ ve c_0=1 dır (Wolfram.com, 2014). (0, 1) aralığındaki düzgün dağılımdan *u* rasgele sayısı üretilir. Daha sonra $x=z/u^{1/q}$ dönüşümünden $BMSl(a,b,q)$ dağılımından rasgele sayı üretilebilir.

3.2. Momentler

BMSl(*a*,*b*,*q*) dağılımının momentleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Teorem 2. *$X \sim BMSl(a,b,q)$ dağılımına sahip olsun. r*=1,2,... *ve q>r için X r.d. nin r. momenti,*

$$\mu_r \equiv E\left(X^r\right)=\frac{q}{q-r}\zeta_r \tag{3.14}$$

olup burada,

$$\zeta_r = \left(\sqrt{\pi}\right)^{-1} \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} v_{k,s,r,m}(a,b)\Gamma_s\left[m + 2^{-1}(k+1)\right],$$

$$v_{k,s,r,m}(a,b) = s + w_k(a,b)c_{m,k}(-1)^r r \log^{r-s}(2),$$

$$w_k(a,b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}\Gamma(b)\Gamma(a+j)}{k!\,j!\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-k)\Gamma^k\left(\frac{1}{2}\right)B(a,b)},$$

$$c_{m,k} = m^{-1}\sum_{l=1}^{m} \frac{(-1)^l (kl - m + l)}{l!(2l+1)} c_{m-l,k} \quad , \; c_{0,k} = 2^k$$

ve

$$\Gamma_s\left[m + 2^{-1}(k+1)\right] = \int_0^{\infty} u^{m+\frac{k+1}{2}-1} e^{-u} \log^s u \, du \text{ dır.}$$

İspat. Eşitlik (3.6) daki stokastik gösterim kullanılarak,

$$\mu_r = E\left(\left(\frac{Z}{U^{1/q}}\right)^r\right) = E\left(Z^r\right)E\left(U^{-r/q}\right),$$

olup $BMo(a,b)$ dağılımının momentleri $E\left(U^{-r/q}\right) = q(q-r)^{-1}$ ve $E\left(Z^r\right) = \zeta_r$ dır. ζ_r için bu işlemlere Cordeiro ve ark. (2012) na bakılabilir.

Tablo 3.2'de *BMSl*(*a*,*b*,*q*) dağılımının bazı parametreleri $q>3$ ve $q>4$ için çarpıklık

$$\delta_1 = \left(\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3\right) \Big/ \left(\mu_2 - \mu_1^2\right)^{3/2}$$

ve basıklık

$$\delta_2 = \left(\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_2\mu_1^2 - 3\mu_1^4\right) / \left(\mu_2 - \mu_1^2\right)^2$$

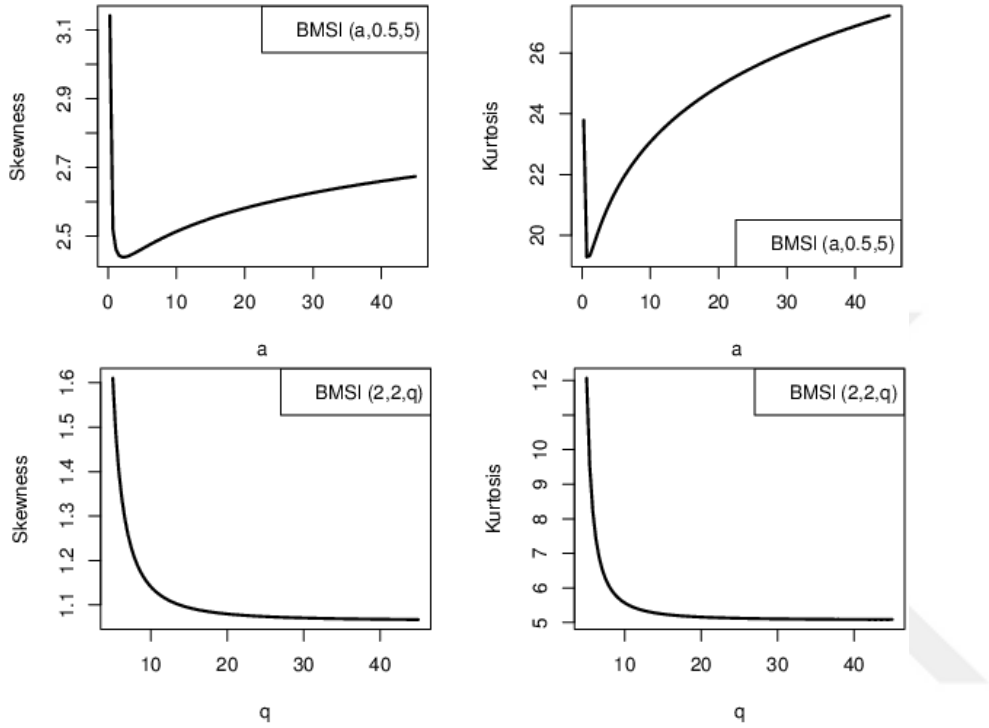
değerleri sayısal olarak verilmiştir. Tablo 3.2'den *q* arttıkça basıklık ve çarpıklığın azaldığı görülmektedir. Benzer durum *b* arttığında da geçerlidir. Aynı zamanda $a<1$, $b=0.5$ ve $q=5$ için, *a* arttığında basıklık azalmaktadır. Sabit *b* ve *q* parametreleri için, *a*'ya göre *BMSl* dağılımının çarpıklık ve basıklık katsayıları çizilmiştir (bkz. Şekil 3.3).

a arttıkça ilk önce çarpıklık azalmakta sonra yavaş yavaş artmaktadır. Benzer bir biçimde, basıklık *a* artarken azalmakta sonra artmaktadır. *q* arttıkça çarpıklık ve basıklık katsayıları azalmaktadır.

Tablo 3.2. *BMSl* dağılımının çarpıklık ve basıklık ölçümleri

a	*q*	*b*	*Çarpıklık*	*Basıklık*
0.25	5	0.5	3.1412	23.7915
		1	1.8020	12.4417
		2	0.3860	8.8990
	6	0.5	2.9152	17.2796
		1	1.7911	9.7639
		2	0.6591	6.3095
	10	0.5	2.7091	13.5918
		1	1.7878	8.2590
		2	0.9349	5.2825
0.5	5	0.5	2.5996	19.6315
		1	2.0283	14.3087
		2	0.9064	8.5544
	6	0.5	2.3457	13.4908
		1	1.8813	10.4499
		2	0.9812	6.5970
	10	0.5	2.1134	10.1372
		1	1.7471	8.2588
		2	1.0577	5.5571
0.75	5	0.5	2.5076	19.2552
		1	2.0519	14.9449
		2	1.1681	9.1001
	6	0.5	2.2294	12.8179
		1	1.8488	10.4170
		2	1.1361	6.8991
	10	0.5	1.9752	9.3846
		1	1.6620	7.9210
		2	1.1092	5.6401
1	5	0.5	2.4726	19.2700
		1	2.0662	15.3264
		2	1.3248	9.7601
	6	0.5	2.1769	12.5477
		1	1.8281	10.3195
		2	1.2241	7.1417
	10	0.5	1.9082	9.0210
		1	1.6092	7.6284
		2	1.1319	5.6539
2	5	0.5	2.4396	19.8882
		1	2.1100	16.6703
		2	1.6103	12.0701
	6	0.5	2.1016	12.3067
		1	1.7940	10.3031
		2	1.3663	7.7875
	10	0.5	1.7978	8.4742
		1	1.5062	7.0836
		2	1.1406	5.5634
3	5	0.5	2.4427	20.5061
		1	2.1430	17.7401
		2	1.7411	13.8606
	6	0.5	2.0795	12.3365
		1	1.7817	10.4326
		2	1.4203	8.2394
	10	0.5	1.7553	8.2860
		1	1.4546	6.8515
		2	1.1245	5.4710
4	5	0.5	2.4523	21.0317
		1	2.1740	18.6448

	2	1.8310	15.3530
	0.5	2.0710	12.4116
6	1	1.7794	10.5949
	2	1.4550	8.6234
	0.5	1.7323	8.1911
10	1	1.4234	6.7245
	2	1.1088	5.4079



Şekil 3.3. *BMSl* dağılımının çarpıklık ve basıklık çizimleri

3.3. Dağılımın Konum-Ölçek Formu

Burada, *BMSl* dağılımının genel formu olan,

$$X = \mu + \sigma \frac{Z}{U^{1/q}} \qquad , \tag{3.15}$$

dönüşümü ele alınsın. Burada, $Z \sim BMo(a,b)$, $U \sim U(0,1)$, $q>0$, $-\infty < \mu < \infty$ ve $\sigma > 0$ dır. μ ve σ sırasıyla konum ve ölçek parametreleridir. Eşitlik (3.15) de verilen genel formun o.y.f.'si

$$f\left(x;\boldsymbol{\theta}\right)=\frac{q}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B\left(a,b\right)\sigma}\int_0^1 t^q\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\sigma}(x-\mu)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\sigma}(x-\mu)}\right)\right\}^{b-1}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{t}{\sigma}\left(x-\mu\right)+e^{-\frac{t}{\sigma}(x-\mu)}\right]\right\}dt\,, \qquad (3.16)$$

biçiminde olup, burada $\boldsymbol{\theta}=\left(a,b,q,\mu,\sigma\right)$ olan parametre vektörüdür. *BMSl* dağılımının konum-ölçek formu $BMSl\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ ile gösterelim. Eğer $\mu=0$ ve $\sigma=1$ ise eşitlik (3.8) de verilen standard *BMSl* dağılımı elde edilir. *a*=1 ve *b*=1 için $MSl\left(q,\mu,s\right)$ dağılımı elde edilir. $q\to\infty$ iken $BMSl\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ dağılımı $BMo\left(a,b,\mu,\sigma\right)$ ye indirgenir. *a*=*b*=1 ve $q\to\infty$ için, $Mo\left(\mu,\sigma\right)$ dağılımı elde edilir. $BMSl\left(\boldsymbol{\theta}\right)$ dağılımının momentleri,

$$E\left(X^r\right)=E\left(\left[\mu+\sigma\frac{Z}{U^{1/q}}\right]^r\right)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\sigma^k E\left(\left[\frac{Z}{U^{1/q}}\right]^k\right)\mu^{r-k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\sigma^k\mu_k\mu^{r-k}\,, \qquad (3.17)$$

olup μ_k eşitlik (3.14) de tanımlanmıştır.

Teorem 3. $X\left|U=u\sim BMo\left(a,q,\mu,\sigma u^{-1/q}\right)\right.$ ve $U\sim U(0,1)$ *alınırsa* $X\sim BMS\,l\left(\boldsymbol{\theta}\right)$*dır.*

İspat : $f_X\left(x\right)=\int_0^1 f_{X|U}\left(x|u\right)f_U\left(u\right)du$

$$=\int_0^1\frac{u^{1/q}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1}B\left(a,b\right)\sigma}\left\{1-\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma u^{-1/q}}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma u^{-1/q}}}\right)\right\}^{b-1}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma u^{-1/q}}+e^{-\frac{x-\mu}{\sigma u^{-1/q}}}\right]\right\}dt\,.$$

$t=u^{1/q}$ değişken dönüştürmesi yapılırsa ispat tamamlanır.

3.4. Parametrelerin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Bu kısımda Eşitlik (3.16) da verilen dağılımın konum ölçek formu ele alınacaktır. $BMSl(\boldsymbol{\theta})$ dağılımından n hacimlik örneklem değerleri $x_1, x_2, \cdots, x_n$ olsun. Log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n\log q - n\log\sigma - n\log\Gamma(a) - n\log\Gamma(b) + n\log\Gamma(a+b) - n\log\sqrt{2\pi}$$

$$-n(b-1)\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\log\left[\int_0^1 t^q \left\{1 - \frac{\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\sigma}(x_i-\mu)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{a-1} \left\{\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{\sigma}(x_i-\mu)}\right)\right\}^{b-1}\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{t}{\sigma}(x_i-\mu) + e^{-\frac{t}{\sigma}(x_i-\mu)}\right]\right\}dt\right]. \qquad (3.18)$$

dir. Sırasıyla log-olabilirlik fonksiyonunun a, b, q, μ, σ parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa olabilirlik denklemleri,

$$l_a = n\psi(a+b) - n\psi(a)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^1 t^q \left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1} e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}\log\left\{1-\pi^{-1/2}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}dt}{\int_0^1 t^q \left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1} e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}dt} = 0, \qquad (3.19)$$

$$l_b = n\psi(a+b) - n\psi(b) - n\log\Gamma(0.5)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^1 t^q \left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1} e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}\log\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}dt}{\int_0^1 t^q \left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1} e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}dt} = 0, \qquad (3.20)$$

$$l_q = \frac{n}{q} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^1 t^q \left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1} e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}\log t\,dt}{\int_0^1 t^q \left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1} e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}dt} = 0, \qquad (3.21)$$

$$l_{\mu}=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{q+1}\left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-2}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-2}e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}$$

$$\times\frac{\frac{(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}+\frac{1}{2}\left(1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right)\left[\sqrt{2}(b-1)e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}+\left(1-e^{-u_i}\right)\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right]dt}{\int_0^1 t^q\left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1}e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}dt}=0\text{ ,(3.22)}$$

$$l_{\sigma}=-n+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{q}u_i\left\{1-\pi^{-1/2}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-2}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-2}e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}$$

$$\times\frac{\frac{(1-a)}{\sqrt{2\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}+\frac{1}{2}\left(1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right)\left[\sqrt{2}(b-1)e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}+\left(1-e^{-u_i}\right)\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right]dt}{\int_0^1 t^q\left\{1-\pi^{-\frac{1}{2}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{a-1}\left\{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-u_i}\right)\right\}^{b-1}e^{-\frac{1}{2}\left[u_i+e^{-u_i}\right]}dt}=0\text{ ,(3.23)}$$

olarak bulunur. Burada $\psi(\cdot)=\Gamma'(\cdot)/\Gamma(\cdot)$ digamma fonksiyonu ve $u_i=t(x_i-\mu)/\sigma$, i=1,2,…,n dır.

Olabilirlik denklemleri karmaşık yapılarından dolayı Newton-Raphson ve quasi-Newton yöntemleri gibi bazı nümerik yöntemler ile elde çözülebilir. Böyle lineer olmayan optimizasyon problemlerinin çözümü için *Matlab*, *SAS*, *R* ve *S-Plus* gibi programlar gereken hesaplamaları sağlayabilmektedir. Bu çalışmada tüm hesaplamalar *R* yazılımı içindeki optim- *BFGS* (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) yöntemi kullanılarak yapılmıştır.

Tahminlerin standart hatası, parametrelerin güven aralığı ve parametreler üzerindeki hipotez testleri için, 5x5 lik gözlenen bilgi matrisine ihtiyaç duyulur. Gözlenen bilgi matrisi, log-olabilirlik fonksiyonunun parametreler üzerinden ikinci türevlerden yararlanılarak elde edilir. Ancak, bu türevlerin karmaşıklığı nedeniyle, burada verilmemiştir. R yazılımı içindeki optim- *BFGS* yöntemi gözlenen bilgi matrisinin tersini nümerik olarak vermektedir.

Diğer yandan, olabilirlik oran testi ile iç-içe olan dağılımları karşılaştırmak mümkün olmaktadır. Örneğin, *BMSl* dağılımını BMo dağılımı ile olabilirlik oran test

istatistiği altında karşılaştırmak, $H_0 : q \to 0 (q = 0)$ hipotezini test etmeye denktir. Benzer şekilde, *BMSl* dağılımını Mo dağılımı ile olabilirlik oran test istatistiği altında karşılaştırmak $, H_0 : a = b = 1$ ve $q \to 0 (q = 0)$ hipotezini test etmeye denktir. *BMSl* dağılımını BMo dağılımı ile olabilirlik oran istatistiği altında karşılaştırmak için gereken test istatistiği $w = 2\left[\hat{\ell}_{BMSl}\left(\hat{a}, \hat{b}, \hat{q}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}\right) - \hat{\ell}_{BMSl}\left(\hat{a}, \hat{b}, 0, \hat{\mu}, \hat{\sigma}\right)\right]$ biçiminde oluşturulur. Burada $\hat{\ell}_{BMSl}\left(\hat{a}, \hat{b}, \hat{q}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}\right)$ ifadesi *BMSl* dağılımına ait tahmin edilen log-olabilirlik değeri, yani kısıtlanmamış parametre tahmin değerlerinden oluşan log-olabilirlik değerini ifade etmektedir. $\hat{\ell}_{BMSl}\left(\hat{a}, \hat{b}, 0, \hat{\mu}, \hat{\sigma}\right)$ değeri ise BMo dağılımına ait tahmin edilen log-olabilirlik değeri, yani H_0 hipotezi altında kısıtlanmış tahmin değerleri için elde edilen log-olabilirlik değerini ifade etmektedir. Burada, *w* istatistiği asimptotik olarak $(n \to \infty)$ χ^2_k dağılımına yakınsar. Burada *k* serbestlik derecesi, iki parametre vektörünün eleman sayıları arasındaki farktır. *BMSl* dağılımını BMo dağılımı ile karşılaştırmak için serbestlik derecesi *k*=5-4=1 dir.

4. BİR UYGULAMA

Bu bölümde, Murthy ve ark. (2004) de verilen 20 mekanik bileşenin hata zamanlarını içeren veri ele alınmıştır. Veri sağa çarpık, büyük basıklığı olan ve kalın kuyruklu bir dağılım ile modellenecek bir yapıya sahiptir. Veri: 0.067, 0.068, 0.076, 0.081, 0.084, 0.085, 0.085, 0.086, 0.089, 0.098, 0.098, 0.114, 0.114, 0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160, 0.485 ile verilmiştir. Tablo 4,1'de veri setinin bazı betimsel istatistikleri verilmiştir. Bu veri seti Silva ve ark. (2013) tarafından da analiz edilmiştir. Bu veri seti kullanılarak *BMSl* dağılımı ile *BMo* dağılımı, *Mo* ve literatürde yaygın olarak kullanılan çarpık normal (SN) dağılımı (Azzalini, 1985) ile karşılaştırılmıştır. Çarpık normal dağılımın o.y.f.si

$$f_{SN}\left(x;a,\mu,\sigma\right)=2\sigma^{-1}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(a\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right), \tag{4.1}$$

olup $-\infty<a,\mu,x<\infty,\sigma>0$, $\phi(\cdot)$ ve $\Phi(\cdot)$ sırasıyla standard normal dağılımın o.y.f. ve k.d.f. lerini göstermektedir.

Tablo 4.1. Verilerin özet İstatistikleri

Ortalama	Medyan	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık
0.1215	0.0980	0.0893	3.5855	15.2033

Tablo 4.2'te bütün dağılımlar için tüm parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri ile parantez içinde tahminlerin standart hataları verilmiştir. Aynı zamanda uygulama dağılımlarını karşılaştırmak için, $l\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ tahmin edilen log-olabilirlik değeri ve p modelin parametre sayısı olmak üzere $AIC=2p-2l\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ formülü kullanılarak *AIC* (Akaike Bilgi kriteri) ve Kolmogorov-Smirnov istatistik (*K*-*S*) değerleri hesaplanmıştır.

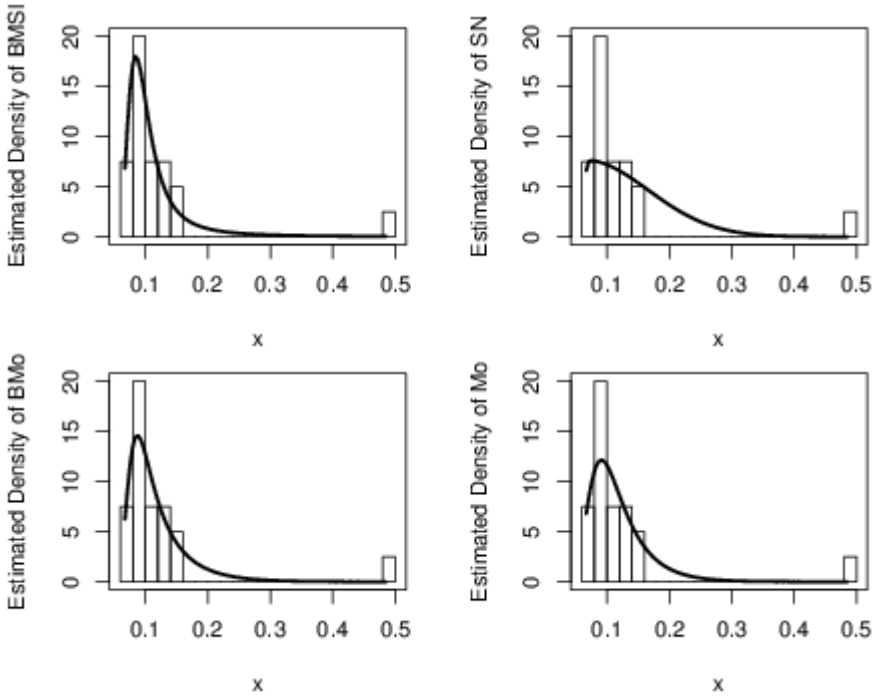
Tablo 4.2. Veri seti için modellerin *K-S*, *AIC*, en çok olabilirlik ve standart hata ile ilişkili parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri.

Metot	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{q}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$l(\hat{\boldsymbol{\theta}})$	*AIC*	*K-S* *(p-value)*
BMSl	5.3903 (9.8632)	1.3668 (2.4698)	1.7187 (0.8011)	0.0596 (0.0233)	0.0077 (0.0068)	39.3678	-68.7356	0.1337 (0.8670)
BMo	0.4411 (1.3509)	0.6387 (2.0729)	-	0.1025 (0.0276)	0.0148 (0.0278)	36.4692	-64.9384	0.1497 (0.7612)
Mo	-	-	-	0.0912 (0.0065)	0.0199 (0.0039)	34.7262	-65.4525	0.1594 (0.6898)
SN	25.0001 (27.5671)	-	-	0.0625 (0.0055)	0.1037 (0.0165)	30.2680	-54.5360	0.5138 (-)

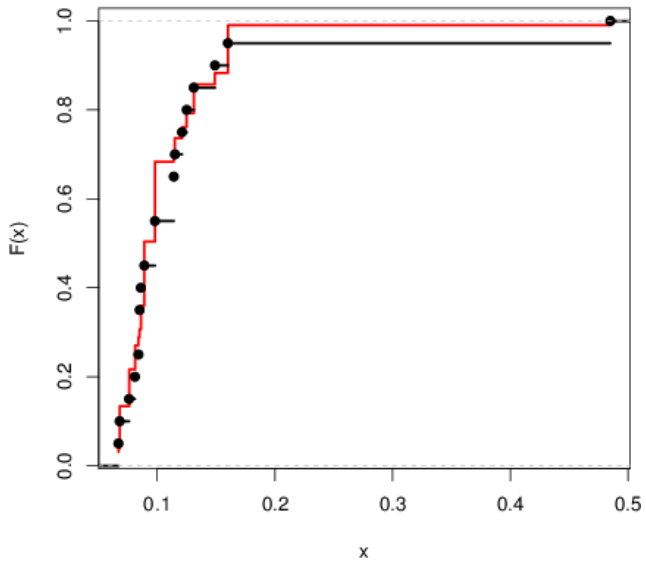
Genellikle, *AIC ve K-S* değerleri en küçük ve log-olabilirlik değeri en büyük olan dağılım modeli en iyi model olarak seçilir. Bu kriterler altında Tablo 4.2' ye bakıldığında, *BMSl* dağılım modelinin diğer modellere göre bu veriye daha iyi uyum sağladığı söylenebilir. Dolayısıyla en iyi model olarak *BMSl* dağılımı seçilebilir. Şekil 4.1'te *BMSl*, *BMo*, *Mo* ve *SN* dağılımlarının tahmin edilmiş o.y.f. çizimleri verilmiştir. Aynı zamanda Şekil 5'te *BMSl* dağılımının tahmin edilmiş k.d.f. si ile deneysel dağılımın k.d.f. çizimleri verilmiştir. Şekillerden *BMSl* dağılımının diğer dağılımlardan daha üstün olduğu ve verinin sağa çarpıklığını ve basıklığını daha iyi yakaladığı görülmektedir.

BMSl dağılımı ve onun alt modelleri olan BMo ve Mo dağılımlarına ilişkin olabilirlik oran testi bulguları Tablo 4.3 de verilmiştir. Tablo 4.3' den, % 5 anlam düzeyinde, alt modelleri test etmek için kullanılan H_0 hipotezleri *BMSl* dağılımının lehine red edilmiştir. Buradan *BMSl* dağılımı ile *BMO* dağılımına eklenen *q* parametresinin gerekliliği görülmektedir. Dolayısıyla *BMSl* dağılım modelinin veriye BMo ve Mo dağılımların daha iyi uyum sağladığı sonucuna varabiliriz. Ayrıca, BMo ve Mo modellerini arasındaki olabilirlik oran testi sonucuna göre oluşturulan H_0 hipotezi, Mo dağılımının lehine kabul edilir. Dolayısıyla, bu veri seti altında, Mo dağılımına beta

üreten dağılım ailesi yapısı ile eklenen parametreler modelleme açısından faydalı olmamıştır.



Şekil 4.1. *BMSl*, *SN*, *BMo* ve *Mo* modellerinin veri için o.y.f. tahmin edicileri



Şekil 4.2. deneysel kdf (noktalı) ve *BMSl* kdf'si (çizgili)

Tablo 4.3. Olabilirlik oran testi bulguları

Model	Hipotez	k	w	p değeri
BMSl ile BMo	$H_0 : q \to 0 (q = 0)$ $H_1 : H_0$ değil	1	5.7972	0.01605172
BMSl ile Mo	$H_0 : a = b = 1 \text{ve} q \to 0 (q = 0)$ $H_1 : H_0$ değil	3	9.2832	0.02575319
BMo ile Mo	$H_0 : a = b = 1$ $H_1 : H_0$ değil	2	3.4860	0.1749946

5. KISMİ İLİŞKİLİ ÖRNEKLEMLERE DAYALI BMSI DAĞILIM ALTINDA İKİ ÖRNEKLEM TESTLERİ

$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1}$ bağımsız ve sırasıyla $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ ve $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dağılımlarından alınmış iki örneklem olmak üzere $\left(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\right)$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Hipotezini

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

hipotezine karşı test etmek için iki örneklem t test istatistiği

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_p} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$s_p = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

olup H_0ın doğru olması koşulu altında (5.1) istatistiğinin asimptotik dağılım

$$df = \frac{\left(S_1^2 + S_2^2\right)^2}{\frac{\left(S_1^2\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

serbestlik dereceli t dağılımdır. (H_0) hipotezini, (H_1) hipotezine karşı α anlam seviyesinde test etmek için kritik küme

$$B = \left\{ t : t < -t_{df(1-\alpha/2)} \; veya \; t > t_{df(1-\alpha/2)} \right\}$$

şeklindedir, burada $t_{a(b)}$, α serbestlik dereceli t dağılımın b lik kuantilidir. Bu bölümde alternatif hipotez sadece $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ olarak alınacaktır. varyansların eşit olduğu durum $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$ da çalışma dışında tutulacaktır.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ve $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sırasıyla $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ ve $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dağılımlarından alınmış ilişkili iki örneklem ve $D_i = U_i - V_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere $\left((U,V)'\right.$ iki değişkenli normal dağılıma sahip rasgele vektör) (H_0) hipotezini, (H_1) hipotezine karşı test etmek için eşleştirilmiş örneklem t test istatistiği

$$T_2 = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

ve

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(D_i - \bar{D}\right)^2}{n-1}}$$

olup H_0 n doğru olması koşulu altında (5.2) istatistiğinin asimptotik dağılımı $df = n-1$ serbestlik dereceli t dağılımdır . (H_0) hipotezini, (H_1) hipotezine karşı α anlam seviyesinde test etmek için kritik küme

$$B = \left\{ t : t < -t_{df(1-\alpha/2)} \; veya \; t > t_{df(1-\alpha/2)} \right\}$$

şeklindedir, burada $t_{a(b)}$, α serbestlik dereceli t dağılımın b lik kuantilidir. Bu bölümde alternatif hipotez sadece $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ olarak alınacaktır. İki grubun ortalaması karşılaştırılacağı zaman örneklemin bağımsız ve bağımlı olması durumuna göre yukardaki verilen bağımsız iki örneklem testi ve eşleştirilmiş örneklem t testi kullanılmaktadır. Bazen tedaviden önce ve tedaviden sonra ölçümleri alınan hastaların bazılarının ilk ölçümleri, bazılarının ikinci ölçümleri bazılarının da her iki ölçümleri

alınabilmektedir. Tekrarlı ölçümlerde ortalamanın testi bağımsız iki örneklem testi veya eşleştirilmiş örneklem t testinin kullanılması çalışmadaki anlam seviyesini etkileyebilir.

Bu durumu bertaraf etmek için Looney and Jones (2003) normal dağılım teorisi altında kısmi korelasyonlu data için bilinen iki örneklem t testini modifiye etmişler ve I. tip hata olasılığında oluşabilecek istenmeyen değişimleri engelleyecek bir test önermişlerdir. Bu test aşağıdaki gibi izah edilebilir:

$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1}$ bağımsız ve sırasıyla $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ ve $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dağılımlarından alınmış iki örneklem olmak üzere $\left(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\right)$,

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ve $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sırasıyla $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ ve $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dağılımlarından alınmış ilişkili iki örneklem olsun ($\left(U, V\right)'$ ler iki değişkenli normal dağılıma sahip rasgele vektör,

$\rho\left(U_i, V_i\right) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Burada ilk örneklem $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}, U_1, U_2, \ldots, U_n$, ikinci örneklem $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1}, V_1, V_2, \ldots, V_n$ şeklindedir. X ler Y ler ile X ler U lar ile Y ler V ler ile bağımsız olmak üzere (H_0) hipotezini, (H_1) hipotezine karşı test etmek için Looney and Jones (2003)

$$Z_{Corr} = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 + n} + \frac{S_2^2}{n_2 + n} - \frac{2nS_{uv}^2}{\left(n_1 + n\right)\left(n_2 + n\right)}}}$$

test istatistiğini önermişlerdir, burada S_{uv}^2 eşleştirilmiş örneklemin kovaryansıdır. $\left(Cov\left(U, V\right)\right)$. Samawi ve Vogel (2014), Looney and Jones (2003) e alternatif olarak (H_0) hipotezini, (H_1) hipotezine karşı test etmek için

$$T_0 = \sqrt{\gamma} T_1 + \left(1 - \sqrt{\gamma}\right) T_2$$

test istatistiğini önermişlerdir, burada $\gamma = \left(n_1 + n_2\right) / N$ ve $N = n_1 + n_2 + n$ şeklindedir.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ hipotezinin doğru olduğu koşulu altında T_0 istatistiği asimptotik olarak normal dağılıma sahiptir. (H_0) hipotezini, (H_1) hipotezine karşı α anlam seviyesinde test etmek için kritik küme

$$B = \left\{t : t < -z_{(1-\alpha/2)} \; veya \; t > z_{(1-\alpha/2)}\right\}$$

şeklindedir, burada $z_{(b)}$, standart normal dağılımın b lik kuantilidir. X_1 ve X_2, sırasıyla F_1 ve F_2 dağılım fonksiyonlarına sahip rasgele değişkenler olsun. Marjinalleri F_1 ve F_2 olan iki boyutlu FGM dağılım

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_1(x_1)\{1+\alpha(1-F_1(x_1))(1-F_2(x_2))\}$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha \in (-1,1)$ için $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ iki değişkenli dağılım fonksiyonu özelliğini taşımaktadır. $\alpha = 0$ için X_1 ve X_2 bağımsız rasgele değişkenlerdir. FGM literatürde çok iyi bilinen bir kapuladır.

$X_2 = x_2$ bilindiğinde X_1 rasgele değişkenin koşullu dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1|X_2}(x_1 \mid x_2) = F_1(x_1)\{1+\alpha(1-F_1(x_1))(1-F_2(x_2))\}$$

şeklindedir.

Eşitlik (fgm koşullu) kullanılarak Marjinalleri F_1 ve F_2 olan iki boyutlu FGM dağılımdan say üretilebilir. R yazılımında RTDE kütüphanesinde bulunan rFGM komutuyla marjinalleri uniform(0,1) olan iki değişkenli FGM dağılımından say üretilebilmektedir. Daha sonra marjinallere ters dönüşüm formülü uygulandığında istenilen F_1 ve F_2 olan iki değişkenli FGM dağlımdan say üretilebilmektedir.

Bu bölümde FGM kapula yardımıyla elde edilen iki değişkenli BMS dağılım yardımıyla bağımlı örneklemler (U lar ve V ler) ve ters dönüşüm metodu ile bağımsız örneklemler (X ler ve Y ler) üretilerek kısmi ilişkili örneklem üretilecektir. Yapılacak simülasyon sonucunda karışık örneklemdeki bağımlı değişkenlerin hacminin %10, %25, %50 ve %75 olduğu ve farklı parametre durumlarında dağılım ortalamalarının eşitliği için yukardaki testlerin kullanılabilirliği tartışılacak ve güçleri karşılaştırılacaktır. Yukardaki testler normal teori altında üretilmiş olup merkezi limit ve slutsky teoremleri gereği büyük örneklem durumunda BMS dağılım içinde kullanabileceği açıktır. Ancak burada yakınsamanın ne kadar örneklem hacmi gerektirdiği sorusuna da cevap aranacaktır.

İlişkili ve ilişkisiz datanın kombinasyonuna dayalı ortalamaların eşitliğinin testi için aşağıdaki metotlar uygulanabilir(Samawi ve Vogel, 2014):

(1) Looney and Jones (2004) ün düzeltilmiş z-testi uygulanabilir.

(2) Samawi ve Vogel (2014) ün düzeltilmiş T_0 testi uygulanabilir.

(3) Bağımsız olan data ihmal edilerek geri kalan ilişkili dataya eşleştirilmiş örneklem t testi uygulanabilir.

(4) İlişkili gözlemler ihmal edilerek geri kalan ilişkisiz dataya iki örneklem t testi uygulanabilir.

(5) İki grubun örnek hacmi eşitse tüm datayı ilişkili varsayıp eşleştirilmiş örneklem t testi uygulanabilir.

(6) İki gruptaki gözlemlerin ilişkisiz olması varsayım altında tüm dataya iki örneklem t testi uygulanabilir

Simulasyon somuçları Tablo 5.1-5.4 de verilmiştir. Tablo 5.1-5.4 de (1)-(6) ile gösterilen ifadeler yukarıdaki testleri işaret etmektedir. Simulasyon sonuçlarına göre (1)-(6) testleri için I tip hata olasılığında biraz azalma olduğu gözlenmiştir. Anlam seviyesi istenilen seviyede olup kısmi ilişkili data olması durumunda kullanılmasında sakınca olmadığı anlaşılmaktadır. (1)-(6) ((2) hariç) da verilen testlerin gücü aşağı yukarı aynıdır. (2) nolu test istenmeyen sonuçlar vermiştir. Bu testle ilgili sonuçlarımızın kötü çıkması yazılan koddan kaynaklanabilir. Bu nedenle (2) ile ilgili sonuçlara itibar edilmemesi gerekmetedir.

Tablo 5.1: $a=2, b=2, q=2, \mu=0, \sigma=1$ değerleri için I. tip hata olasılıkları

α	$(n_1=20, n_2=20, n=20)$		$(n_1=10, n_2=10, n=40)$	$(n_1=100, n_2=100, n=100)$	$(n_1=50, n_2=50, n=200)$
-0.9	(1)	0.056	0.063	0.035	0.040
	(2)	0.074	0.090	0.049	0.055
	(3)	0.038	0.050	0.037	0.040
	(4)	0.052	0.074	0.051	0.051
	(5)	0.049	0.059	0.034	0.039
	(6)	0.062	0.078	0.042	0.048
-0.4	(1)	0.038	0.043	0.042	0.047
	(2)	0.060	0.060	0.052	0.062
	(3)	0.038	0.037	0.038	0.048
	(4)	0.046	0.042	0.051	0.057
	(5)	0.037	0.041	0.042	0.046
	(6)	0.040	0.043	0.049	0.058
0	(1)	0.044	0.052	0.047	0.040
	(2)	0.050	0.071	0.065	0.043
	(3)	0.040	0.050	0.049	0.035
	(4)	0.028	0.050	0.050	0.035
	(5)	0.035	0.050	0.049	0.041
	(6)	0.037	0.048	0.045	0.041
0.4	(1)	0.056	0.045	0.042	0.040
	(2)	0.065	0.058	0.048	0.055
	(3)	0.040	0.037	0.041	0.047
	(4)	0.028	0.025	0.034	0.042
	(5)	0.047	0.043	0.041	0.040
	(6)	0.044	0.029	0.036	0.034
0.9	(1)	0.039	0.061	0.027	0.035
	(2)	0.048	0.056	0.033	0.040
	(3)	0.038	0.042	0.040	0.032
	(4)	0.018	0.018	0.025	0.014
	(5)	0.036	0.050	0.027	0.035
	(6)	0.027	0.026	0.018	0.021

Tablo 5.2: $a=1, b=3, q=1.5, \mu=0, \sigma=1$ değerleri için I. tip hata olasılıkları

α	$(n_1=20, n_2=20, n=20)$		$(n_1=10, n_2=10, n=40)$	$(n_1=100, n_2=100, n=100)$	$(n_1=50, n_2=50, n=200)$
-0.9	(1)	0.024	0.038	0.039	0.035
	(2)	0.052	0.0.52	0.052	0.043
	(3)	0.030	0.036	0.033	0.028
	(4)	0.039	0.046	0.048	0.037
	(5)	0.023	0.033	0.039	0.037
	(6)	0.029	0.042	0.042	0.043
-0.4	(1)	0.042	0.037	0.027	0.034
	(2)	0.079	0.069	0.040	0.045
	(3)	0.049	0.032	0.032	0.027
	(4)	0.057	0.041	0.034	0.030
	(5)	0.034	0.030	0.028	0.032
	(6)	0.040	0.036	0.026	0.035
0	(1)	0.039	0.035	0.041	0.040
	(2)	0.057	0.051	0.044	0.046
	(3)	0.038	0.027	0.033	0.033
	(4)	0.035	0.030	0.030	0.034
	(5)	0.034	0.034	0.040	0.039
	(6)	0.034	0.036	0.038	0.038
0.4	(1)	0.039	0.029	0.029	0.027
	(2)	0.052	0.042	0.033	0.037
	(3)	0.033	0.024	0.034	0.031
	(4)	0.021	0.019	0.029	0.023
	(5)	0.034	0.029	0.029	0.024
	(6)	0.030	0.022	0.026	0.026
0.9	(1)	0.036	0.026	0.041	0.048
	(2)	0.038	0.042	0.040	0.038
	(3)	0.027	0.034	0.032	0.038
	(4)	0.012	0.018	0.018	0.028
	(5)	0.032	0.027	0.038	0.043
	(6)	0.022	0.017	0.032	0.038

Tablo 5.3: $a=2, b=2, q=2, \mu=0, \sigma=1$ve $a=2, b=2, q=5, \mu=0, \sigma=1$ değerleri için güç değerleri

α	$(n_1=20, n_2=20, n=20)$		$(n_1=10, n_2=10, n=40)$	$(n_1=100, n_2=100, n=100)$	$(n_1=50, n_2=50, n=200)$
-0.9	(1)	0.135	0.148	0.586	0.719
	(2)	0.096	0.079	0.236	0.112
	(3)	0.059	0.110	0.274	0.589
	(4)	0.098	0.154	0.331	0.640
	(5)	0.120	0.139	0.580	0.714
	(6)	0.145	0.175	0.608	0.760
-0.4	(1)	0.151	0.172	0.608	0.706
	(2)	0.095	0.080	0.223	0.105
	(3)	0.075	0.135	0.289	0.599
	(4)	0.088	0.151	0.318	0.628
	(5)	0.138	0.151	0.5598	0.700
	(6)	0.146	0.176	0.617	0.725
0	(1)	0.163	0.184	0.643	0.742
	(2)	0.117	0.082	0.250	0.100
	(3)	0.078	0.139	0.347	0.609
	(4)	0.082	0.138	0.346	0.604
	(5)	0.145	0.169	0.641	0.736
	(6)	0.144	0.172	0.636	0.734
0.4	(1)	0.179	0.181	0.646	0.757
	(2)	0.094	0.066	0.237	0.080
	(3)	0.085	0.138	0.347	0.652
	(4)	0.056	0.117	0.306	0.618
	(5)	0.158	0.168	0.639	0.752
	(6)	0.137	0.151	0.622	0.742
0.9	(1)	0.157	0.200	0.662	0.805
	(2)	0.081	0.066	0.238	0.089
	(3)	0.088	0.143	0.406	0.735
	(4)	0.048	0.092	0.320	0.658
	(5)	0.141	0.185	0.655	0.804
	(6)	0.121	0.132	0.615	0.752

Tablo 5.4: $a=1, b=3, q=1.5, \mu=0, \sigma=1$ ve $a=1, b=3, q=5, \mu=0, \sigma=1$ değerleri için güç değerleri

α	$(n_1=20, n_2=20, n=20)$		$(n_1=10, n_2=10, n=40)$	$(n_1=100, n_2=100, n=100)$	$(n_1=50, n_2=50, n=200)$
-0.9	(1)	0.091	0.111	0.287	0.315
	(2)	0.073	0.080	0.109	0.067
	(3)	0.049	0.095	0.126	0.247
	(4)	0.073	0.117	0.162	0.281
	(5)	0.076	0.105	0.287	0.314
	(6)	0.100	0.121	0.302	0.338
-0.4	(1)	0.093	0.104	0.288	0.324
	(2)	0.075	0.047	0.134	0.059
	(3)	0.064	0.073	0.146	0.275
	(4)	0.073	0.083	0.169	0.290
	(5)	0.075	0.094	0.285	0.321
	(6)	0.079	0.107	0.290	0.327
0	(1)	0.093	0.123	0.293	0.350
	(2)	0.080	0.065	0.107	0.063
	(3)	0.058	0.104	0.172	0.293
	(4)	0.060	0.105	0.167	0.289
	(5)	0.084	0.119	0.284	0.347
	(6)	0.079	0.113	0.285	0.348
0.4	(1)	0.108	0.109	0.306	0,355
	(2)	0.071	0.056	0.103	0,060
	(3)	0.053	0.091	0.192	0,298
	(4)	0.048	0.078	0.178	0,279
	(5)	0.095	0.094	0.304	0,349
	(6)	0.086	0.086	0.292	0,339
0.9	(1)	0.103	0.121	0.291	0.265
	(2)	0.076	0.062	0.103	0.042
	(3)	0.064	0.097	0.197	0.227
	(4)	0.038	0.064	0.155	0.195
	(5)	0.092	0.105	0.289	0.262
	(6)	0.085	0.075	0.287	0.244

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada slash (oransal) biçimli dağılım kurma düşüncesiyle Moyal ve beta Moyal dağılımlarının genel formunu içeren, bu dağılımlara alternatif ve bu dağılımlardan daha kalın kuyruklu olan sağa çarpık yeni bir dağılım önerilmiştir. Bu dağılım beta-Moyal slash dağılımı olarak adlandırılmıştır. Bu dağılımların bazı temel dağılımsal özellikleri çalışılmıştır. Literatürde iyi bilinen gerçek bir veri seti üzerinde, önerilen dağılım ile yine literatürde iyi bilinen çarpık normal, Moyal ve beta-Moyal dağılımları karşılaştırılmıştır. Bu dağılım modelleri karşılaştırılırken *log* olabilirlik, Akaike bilgi kriteri ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği test istatistikleri kullanılmıştır. Bu kriterlere dayalı olarak, önerilen dağılım, modeli veriyi en iyi modelleyen olarak belirlenmiştir. Dolasıyla, önerilen dağılımın gerçek veriyle modellenmesinin kullanışlılığı görülmüş olup, beta-Moyal dağılımının oransal biçimde yeniden oluşturulması düşüncesi, veri modelleme açısından faydalı olarak görülmüştür. Aynı zamanda, olabilirlik oran testi ile slash yapısı ile BMo ve Mo dağılımlarının genelleştirilmesi ile eklenen q parametresinin önemi görülmüştür.

Benzer biçimde beta-Moyal dağılımı gibi diğer dağılım modelleri oransal olarak geliştirilip, bu modellerin veri modellemede etkinliği artırılabilir.

Ayrıca, kısmi korelasyonlu data durumunda iki örneklem t testlerinin BMSl dağılımı durumunda da çalıştığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Akinsete, A., Famoye, F., & Lee, C. (2008). The beta-Pareto distribution. Statistics, 42,547-563.

Alzaatreh, A., Famoye, F., Lee, C. (2014). The gamma-normal distribution: properties and applications. *Computational Statistics and Data Analysis* 69:67-80.

Arslan, O. (2008). An alternative multivariate skew-slash distribution. *Statistics and Probability Letters* 78:2756–2761.

Arslan, O., Genç, A. I. (2009). A generalization of the multivariate slash distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference* 139:1164–1170.

Aryal, G., & Tsokos, C., P. (2008). Airline spill analysis using Gumbel and Moyal distributions. *Neural, Parallel and Scientific Computations*, 16, 35–43.

Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics* 12:171–178.

Barreto-Souza, W., Santos, A., H., S., & Cordeiro, G., M. (2010). The beta generalized exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80,159-172.

Brent, R., P. (1973). Algorithms for Minimization without Derivatives. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bulut, Y. M., & Arslan, O. (2015). Matrix variate slash distribution. Journal of Multivariate Analysis, 137, 173-178.

Cordeiro, G. M., Gomes, A. E., da-Silva, C. Q., & Ortega, E. M. (2013). The beta exponentiated Weibull distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(1), 114-138.

Cordeiro, G., M., Nobre, J., S., Pescim, R., R., & Ortega, E., M., M. (2012). The beta Moyal: A useful-skew distribution. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 10, 171-192.

Domma, F., & Condino, F. (2013). Beta Dagum distribution : Definition and properties. *Communications in Statistics Theory and Methods,* 42, 4070-4090.

Eugene, N, Lee, C., & Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics Theory and Methods* 31:497–512.

Famoye, F., Lee, C., & Olumolade, O, (2005). The beta-Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 4, 121–136.

Genç, A. I. (2007). A generalization of the univariate slash by a scale-mixtured exponential power distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation* 36: 937– 947.

Genç, A. I. (2013). A skew extension of the slash distribution via beta-normal distribution. *Statistical Papers* 54:427–442.

Gómez, H. W., Venegas, O., & Bolfarine, H. (2007). Skew-symmetric distributions generated by the distribution function of the normal distribution. *Environmetrics* 18:395–407.

Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2000). Table of integrals, series, and products 6th edn (San Diego, Academic Press).

Gui, W. (2014). A generaliziation of the slash half normal distribution: properties and inferences. *Journal of Statistical Theory and Practice* 8: 283-296.

Gupta, R. D., & Kundu, D. (1999). Theory & methods: Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 41(2), 173-188.

Iriarte, Y. A., Gómez, H. W., Varela, H., & Bolfarine, H. (2015). Slashed rayleigh distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, 38(1), 31-44.

Jamshidian, M. (2001). A note on parameter and standard error estimation in

adaptive robust regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 71:11–27.
Kafadar, K. (1982). A biweight approach to the one-sample problem. *Journal of the American Statistical Association* 77:416–424.
Kashid, D. N. & Kulkarni, S. R. (2003). Subset selection in multiple linear regression with heavy tailed error distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 73:791–805.
Korkmaz, M. Ç. (2017). A generalized skew slash distribution via gamma-normal distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(2), 1647-1660.
Looney, S. W., & Jones, P. W. (2003). A method for comparing two normal means using combined samples of correlated and uncorrelated data. *Statistics in medicine*, 22(9), 1601-1610.
Nadarajah, S., & Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution. *Mathematical Problems in engineering*, 2004(4), 323-332.
Nadarajah, S. & Kotz, S. (2006). The beta exponential distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, 91, 689-697.
Morgenthaler, S. (1986). Robust confidence intervals for a location parameter: the configural approach. *Journal of the American Statistical Association* 81:518–525.
Moyal, J., E. (1955). Theory of Ionization Fluctuation. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 46, 263-280.
Mudholkar, G. S., & Srivastava, D. K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, 42(2), 299-302.
Murthy, D.N.P., Xie, M., & Jiang, R., (2004). Weibull models. vol. 1
Olmos, N. M., Varela, H. H., Gómez, W., & Bolfarine, H. (2012). An extension of the half-normal distribution. *Statistical Papers* 53:875–886.
Paraniaba, P., F., Ortega, E., M., M., Cordeiro, G., M., & Pescim, R., R. (2011). The beta Burr XII distribution with application to lifetime data. *Computational Statistics &; Data Analysis*, 55, 118-1136.
Prudnikov, A.P., Brychkov, Y.A. and Marichev, O.I. (1986). Integrals and Series, vol.1. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
R Core Team, (2013). *R: A Language and Environment for Statistical Computing. R* Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
Réyes, J., Gomez, H. W. & Bolfarine, H. (2013). Modified slash distribution. *Statistics* 47:929-941.
Rodrigues, J. A., Silva, A. P. C. M., & Hamedani, G. G. (2014). The beta exponentiated Lindley distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 14, 60-75.
Rogers, W. H., Tukey, J. W. (1972). Understanding some long-tailed symmetrical distributions. *Statistica Neerlandica* 26: 211–226.
Samawi, H. M., & Vogel, R. (2014). Notes on two sample tests for partially correlated (paired) data. Journal of Applied Statistics, 41(1), 109-117.
Silva, R. B., Bourguignon, M., Dias, C. R., & Cordeiro, G. M. (2013). The compound class of extended Weibull power series distributions. *Computational Statistics & Data Analysis,* 58, 352-367.
Walck, C. (2007). Hand-book on Statistical Distributions for experimentalists, Internal Report SUF–PFY/96–01, University of Stockholm Press.
Wang, J., Genton, M. G. (2006). The multivariate skew-slash distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference* 136:209–220.

Wolfram website, (2014). wolfram.com/GammaBetaErf/InverseErf/06/01/02/0004/. Retrieved on September 15, 2014.

EK 1. *BMSl* Dağılımına Ait En Çok Olabilirlik Parametre Tahmine Dayalı R Paket Program Kodları

```
library(zipfR)
x<-c(0.067,0.068,0.076,0.081,0.084,0.085,0.085,0.086,0.089,0.098,0.098,0.114,0.114,
0.115, 0.121, 0.125, 0.131, 0.149, 0.160, 0.485)
loglike <- function(p,x){
   a<-p[1]
   b<-p[2]
   qu<-p[3]
   mu<-p[4]
   sigma<-p[5]
   ps <- (x-mu)/sigma
   w  <- length(ps)
   integration <- rep(1, w)
   fun <- function(u,ps=1){
      value <- (u ^ (qu)) * (1-Rgamma(0.5, 0.5*exp(-ps*u), lower=TRUE))^(a-
1)*(Igamma(0.5, 0.5*exp(-ps*u), lower=TRUE))^(b-1)*exp(-0.5*(ps*u+exp(-ps*u)))

      return(value)
   }
   for(i in 1:w){
      val <- ps[i]
      integration[i] <- integrate(fun,
                           lower = 0,
                           upper = 1,
                           ps    = val)$value
      }
   pdf <- qu*integration/(sigma*beta(a,b)*sqrt(2*pi)*(gamma(0.5))^(b-1))
   return(-sum(log(pdf)))
}
sonuc<-optim(fn=loglike,c(5.21,1.75,1.59,0.06,0.008),method="BFGS",hessian=T,x=x)
vc<-solve(sonuc$hessian)
se<-sqrt(diag(vc))
sonuc
vc
se
```

EK 2. Simülasyon Sonuçlarını Veren R Paket Program Kodları

```
library(zipfR)
library(RTDE)
a=
b=
qu=
mu=
sigma=
a2=
b2=
qu2=
mu2=
sigma2=
ds<-1000
rs1<-0
rs2<-0
rs3<-0
rs4<-0
rs5<-0
rs6<-0
alpha=
n=
n1<-
n2<-
N<-2*n
nn<-n+1
NN<-n+n1+n2
gamma<-(n1+n2)/NN
bmsl1 <- function(y){
   ps <- (y-mu)/sigma
   w  <- length(ps)
   integration <- rep(1, w)
   fun <- function(u,ps=1){
      value <- (u ^ (qu-1)) * Ibeta(1-Rgamma(0.5, 0.5*exp(-ps*u),
lower=TRUE),a,b)/beta(a,b)
      return(value)
   }
   for(i in 1:w){
      val <- ps[i]
      integration[i] <- integrate(fun,
                           lower = 0,
                           upper = 1,
                           ps    = val)$value
      }
   cdf <- qu * integration
   return(cdf)
}
bmsl2 <- function(z){
   ps <- (z-mu2)/sigma2
```

```
   m  <- length(ps)
   integration <- rep(1, m)
   fun2 <- function(u,ps=1){
      value <- (u ^ (qu2-1)) * Ibeta(1-Rgamma(0.5, 0.5*exp(-ps*u),
lower=TRUE),a2,b2)/beta(a2,b2)
      return(value)
   }
   for(i in 1:m){
      val <- ps[i]
      integration[i] <- integrate(fun2,
                           lower = 0,
                           upper = 1,
                           ps    = val)$value
      }
   cdf <- qu2 * integration
   return(cdf)
}
for(j in 1:ds){
FGM<-rFGM(n, alpha)
u<-FGM[1:n]
v<-FGM[nn:N]
F1<-function(z) {bmsl1(z)}
sayi1 <- numeric(length = length(u))
for (i in seq_along(u)) {
  sayi1[i]<-uniroot(function(z) F1(z)-u[i],lower=-10000,upper=10000)$root[1]
}
F2<-function(z) {bmsl2(z)}
sayi2 <- numeric(length = length(v))
for (i in seq_along(v)) {
  sayi2[i]<-uniroot(function(z) F2(z)-v[i],lower=-10000,upper=10000)$root[1]
}
x1<-(-sigma*log(2*(qnorm((1 + (1-(rbeta(n1, a, b))))/2)/sqrt(2))^2)+mu)/(rbeta(n1, 1,
1))^(1/qu)
x2<-(-sigma2*log(2*(qnorm((1 + (1-(rbeta(n2, a2, b2))))/2)/sqrt(2))^2)+mu2)/(rbeta(n2,
1, 1))^(1/qu2)
xM1<-c(x1,sayi1)
xM2<-c(x2,sayi2)
Zcorr<-(mean(xM1)-mean(xM2))/(sqrt((cov(xM1, xM1)/(n1+n)+cov(xM2,
xM2)/(n2+n)-2*n*cov(sayi1, sayi2)/((n1+n)*(n2+n)))))
pvalue1<-2*(1-pnorm(abs(Zcorr),0,1))
D<-u-v
T0<-sqrt(gamma)*(mean(xM1)-mean(xM2))/(sqrt(cov(xM1, xM1)/n1+cov(xM2,
xM2)/n2))+sqrt(1-gamma)*mean(D)/(sd(D)/sqrt(n))
pvalue2<-2*(1-pnorm(abs(T0),0,1))
t_dpnM=t.test(xM1,xM2,paired=TRUE)
t_indpnM=t.test(xM1,xM2,paired=FALSE)
t_dpn=t.test(sayi1,sayi2,paired=TRUE)
t_indpn=t.test(sayi1,sayi2,paired=FALSE)
if (pvalue1<0.05){rs1<-rs1+1}
if (pvalue2<0.05){rs2<-rs2+1}
```

```
if (t_dpn$p.value<0.05){rs3<-rs3+1}
if (t_indpn$p.value<0.05){rs4<-rs4+1}
if (t_dpnM$p.value<0.05){rs5<-rs5+1}
if (t_indpnM$p.value<0.05){rs6<-rs6+1}
}
simZcorr<-rs1/ds
simT0<-rs2/ds
sim_t_dpn<-rs3/ds
sim_t_indpn<-rs4/ds
sim_t_dpnM<-rs5/ds
sim_t_indpnM<-rs6/ds
simZcorr
simT0
sim_t_dpn
sim_t_indpn
sim_t_dpnM
sim_t_indpnM
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Ali Alper Genç
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Çankaya/Ankara – 08.05.1990
Telefon	**:**	05386788690
Faks	**:**	
e-mail	**:**	alialpergenc@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Zeki Özdemir Lisesi, Karatay, Konya	2007
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Konya	2013
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, FBE İstatistik ABD	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013	İNG Bank A.Ş.	Ticari Portföy Yetkilisi

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Genç, A. A., Korkmaz, M. Ç., C. Kuş, (2014) ,"The Beta Moyal-Slash Distribution", Journal of Selçuk University Natural and Applied Science, Vol. 3, No. 4, p. 88-104

Karadavut, U., Taşkın, A., A., Akıllı, S., Genç, A., A., Genç "Artificial Neural Networks and Non Linear Model Comparison at The Definition on The Growth of Japanese Quails", 9th International Statistics Day Symposium (ISDS2014, İGS2014) 10-14 May, 2014 Antalya, TURKEY