Pamukkale Univ Muh Bilim Derg, 24(6), 952-959, 2018

Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi

Pamukkale University Journal of Engineering Sciences

Doymamış koşullarda toprak suyu hareketinin Modifiye Kübik B-Spline Diferansiyel Kuadratur yöntemi ile modellenmesi

Modelling soil water movement under unsaturated conditions with the Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature method

Emin ÇİFTÇİ[1*]

[1]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Maltepe Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.
ciftci.emin@gmail.com

Geliş Tarihi/Received: 01.04.2017, Kabul Tarihi/Accepted: 24.08.2017
doi: 10.5505/pajes.2017.99705
* Yazışılan yazar/Corresponding author
Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

Bu çalışma, toprak suyunun doymamış bölgedeki hareketinin Modifiye Kübik B-Spline Diferansiyel Kuadratur yöntemi ile modellenmesi üzerine kurulmuştur. Toprak nemi hareketini tanımlamak için hidrojeoloji alanında sıklıkla kullanılan Richards denkleminin sayısal çözümü irdelenmiştir. Bu denklemde yer alan parametrelerin konum türevlerini hesaplayabilmek için diferansiyel kuadratur yöntemi, problemi zamanda ilerletebilmek için 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Geliştirilen modelin verdiği sonuçların doğruluğunun ölçülebilmesi için farklı sınır koşullarına sahip üç örnek uygulama ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar mevcut analitik ve diğer sayısal yöntemlerin verdiği sonuçlarla büyük tutarlılık göstermektedir. Etkili, basit, verimli, kolay uygulanabilir ve yüksek doğrulukta sonuç veriyor oluşu, ele alınan yöntemin bu tip problemlerin sayısal çözümü için uygun bir tercih olabileceğine işaret etmektedir.

Anahtar kelimeler: Richards denklemi, Diferansiyel kuadratur, Modifiye kübik b-spline

Abstract

This study focuses on modelling moisture movement in the unsaturated soil zone with the use of the Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature method. The numerical solution of the Richards Equation, which is commonly used in the field of hydrogeology for describing soil moisture movement, was investigated. The differential quadrature method was employed to evaluate the spatial derivatives of the equation variables, and the 4th order Runge-Kutta Method was used to march the solution in time. To verify the accuracy of the developed model, three test cases having different boundary conditions were taken into consideration. The retrieved results are seen to be in good agreement with the values provided by the analytical and other available numerical techniques. On account of its simplicity, efficiency and high accuracy, this method can be an appropriate option for the numerical solution of this type of problems.

Keywords: Richards equation, Differential quadrature, Modified cubic b-spline

1 Giriş

Suyun sürdürülebilir bir şekilde kullanılmasının öneminin arttığı günümüzde, toprağa sızan suyun yerçekimi etkisi ile yeraltı su tablasına doğru hareketinin modellenmesi, birçok doğa bilimi ve mühendislik alanını yakından ilgilendiren bir başlık haline gelmiştir. Bu konuda yapılan çalışmalar Buckingham [1] ve Richards [2] tarafından elde edilen yarı deneysel denklemlere dayanmaktadır. Richards denklemi, suyun doymamış toprak bölgesindeki hareketini tanımlamak için elde edilen denklemler içinde en yaygın kullanılanıdır. Bu diferansiyel denklemin analitik yöntemlerle çözümüne yönelik çeşitli çalışmalar yapılmıştır [3]-[7]. Doymamış bölgede, hidrolik iletkenlik, hacimsel su içeriği ve toprak suyu basıncı gibi parametreler arasında lineer olmayan bir ilişkinin olması ve toprak yapısındaki olası heterojenlikler, problemin analitik olarak çözümünü zor kılmaktadır. Buna bağlı olarak, önerilen analitik ifadeler sadece sınırlı özel durumlar için geliştirilmiş, matematiksel olarak oldukça karmaşık çözümlerdir. Bu durum, denklemin sayısal çözüm teknikleri ile ele alınması gereğini doğurmuştur. Sonlu farklar [8]-[12], sonlu elemanlar [13]-[15] ve sonlu hacim [16]-[18] yöntemleri problemin sayısal olarak çözümü için sıklıkla başvurulan tekniklerdir.

Diferansiyel denklemlerin Diferansiyel Kuadratur yöntemi ile çözümüne yönelik ilk çalışma Bellman ve diğ. [19] tarafından yapılmıştır. Bu yöntem, ele alınan bir fonksiyonun herhangi bir düğüm noktasındaki türev değerlerinin, tüm düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı toplamı olarak hesaplanması esasına dayanmaktadır. Gerekli olan ağırlık katsayılarının hesabı için Legendre ve Lagranga polinomları, spline, radyal bazlı veya harmonik fonksiyonlar gibi farklı tipte baz fonksiyonlar kullanılmıştır [19]-[25].

Bu çalışmada doymamış toprak bölgesindeki düşey yönlü nem hareketi diferansiyel kudaratur yöntemi ile modellenmiştir. Yöntem uygulanırken baz fonksiyon olarak modifiye kübik B-spline fonksiyonları tercih edilmiştir. B-spline fonksiyonları parçalı düzgün eğriler oluşturan özel fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar, ele alınan sistemi basit tridiagonal bir sisteme indirgediği için hesaplama yükünü diğer baz fonksiyonlara göre oldukça hafifletir. Modifiye kübik B-spline diferansiyel kuadratur yöntemi (MKBS-DKY) ilk olarak Arora ve Singh [26] tarafından 1 boyutlu Burgers denkleminin çözümü için kullanılmıştır. Sonraki süreçte MKBS-DKY, hiperbolik difüzyon [27] reaksiyon-difüzyon [28], sine-Gordon [29] gibi farklı tipte diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için kullanılmıştır. Kolay uygulanabilir oluşu, düşük bellek depolama gereksinimi ve yüksek doğrulukta sonuç vermesi gibi avantajlara sahip olması, yöntemi diğer geleneksel sayısal çözüm teknikleri karşısında güçlü bir alternatif olarak öne çıkarmaktadır.

2 Yöntem

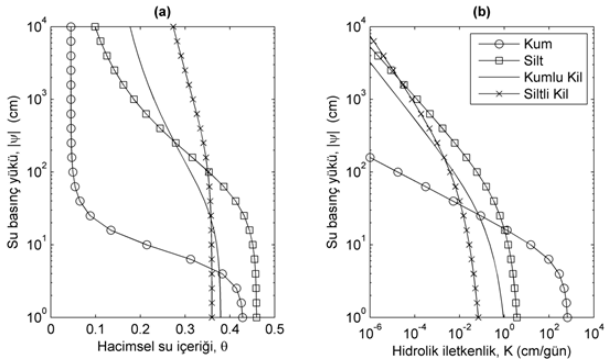
2.1 Richards denklemi

Toprağa sızan suyun doymamış bölgedeki dikey hareketi Richards [2] tarafından şu şekilde modellenmiştir;

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial\psi}{\partial z})+\frac{\partial K}{\partial z} \quad (1)$$

Bu denklemde, θ topraktaki hacimsel su içeriğini, t zamanı, z ilgili noktanın kotunu, ψ negatif değere sahip su basınç yükünü (emme basıncı) ve K hacimsel su içeriğine bağlı olarak değişen toprağın hidrolik iletkenlik katsayısını temsil etmektedir.

Doymamış bölgede hacimsel su içeriği, toprak su basıncı ve hidrolik iletkenlik parametreleri arasında güçlü bir ilişki vardır. Farklı toprak tipleri için bu ilişkiyi tanımlamaya yönelik çeşitli modeller geliştirilmiştir [30]-[32]. Şekil 1'de temsili toprak tipleri için van Genuchten [32] modeli ile elde edilen mutlak su basınç yükü, hacimsel su içeriği ve hidrolik iletkenlik ilişkisi resmedilmiştir.



Şekil 1: Farklı toprak tipleri için hacimsel su içeriği, basınç yükü ve hidrolik iletkenlik ilişkisi [32].

Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**, özgül nem kapasitesi (C) olarak tanımlanan yeni bir parametre kullanılarak, şu şekilde yeniden düzenlenebilir;

$$C\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial\psi}{\partial z})+\frac{\partial K}{\partial z} \quad (2)$$

Bu denklemde C, hacimsel su oranının su basınç yüküne göre diferansiyel değişimine eşittir;

$$C=\frac{\partial\theta}{\partial\psi} \quad (3)$$

2.2 Modifiye kübik B-Spline diferansiyel kuadratur yöntemi

Diferansiyel Kuadratur Yöntemi herhangi bir $u(x)$ fonksiyonunun, x_1, x_2 $\cdots$ x_N olmak üzere N ayrık noktada birinci ve daha yüksek mertebeden türevlerinin, bu noktalardaki fonksiyon değerleri kullanılarak elde edilmesi esasına dayanır. Buna göre fonksiyonun x_i noktasındaki türevi şu şekilde ifade edilebilir;

$$\left.\frac{\partial u^{(r)}}{\partial x}\right|_{x=x_i}=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(r)}u_j \quad (4)$$

Bu denklemde r türevin mertebesini, $[A^{(r)}]$ ise tercih edilen baz fonksiyonlarına göre oluşturulan katsayı matrisini temsil etmektedir. Bu yöntem üzerine çalışmış olan araştırmacılar farklı tipte baz fonksiyonlarından yararlanmıştır. Bunlar arasında, Kübik B-spline fonksiyonları düzgün davranış gösterdiği ve kolay uygulanabilir olduğu için sıklıkla kullanılan fonksiyonlardandır. Kübik B-spline baz fonksiyonları belirlenen düğüm noktalarına göre şu şekilde ifade edilebilir;

$$\beta_i(x)=\frac{1}{h^3}\begin{cases}(x-x_{i-2})^3, & x_{i-2}\le x<x_{i-1}\\ (x-x_{i-2})^3-4(x-x_{i-1})^3, & x_{i-1}\le x<x_i\\ (x_{i+2}-x)^3-4(x_{i+1}-x)^3, & x_i\le x<x_{i+1}\\ (x_{i+2}-x)^3, & x_{i+1}\le x<x_{i+2}\\ 0, & \text{aksi durumda}\end{cases} \quad (5)$$

Bu denklemde h ardışık iki nokta arasındaki mesafeyi vermektedir. Bu fonksiyonların bir düğüm noktasında ($x=x_j$) alacağı sayısal değer şöyle gösterilebilir;

$$\beta_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j+1\\ 4, & i=j\\ 1, & i=j-1\\ 0, & \text{aksi durumda}\end{cases} \quad (6)$$

Benzer şekilde, fonksiyonların x_j düğüm noktasında birinci türevi şu şekilde olacaktır;

$$\beta_i^{(1)}(x_j)=\begin{cases}3/h, & i=j+1\\ -3/h, & i=j-1\\ 0, & \text{aksi durumda}\end{cases} \quad (7)$$

Oluşturulacak denklem sisteminin köşegen olarak baskın bir karaktere sahip olabilmesi için, Arora ve Singh [26] fonksiyonları yeniden düzenleyerek Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** ile verilen modifiye kübik b-spline baz fonksiyonlarını elde etmiştir. Köşegen olarak baskın olan sistem, tekil olmayan, tersinir bir sistemdir ve bu özellik sistemin kararlılığı için önem teşkil etmektedir.

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1(x)&=\beta_1(x)+2\beta_0(x)\\ \bar{\beta}_2(x)&=\beta_2(x)-\beta_0(x)\\ \bar{\beta}_i(x)&=\beta_i(x)\,,\ i=3,\cdots,N-2\\ \bar{\beta}_{N-1}(x)&=\beta_{N-1}(x)-\beta_{N+1}(x)\\ \bar{\beta}_N(x)&=\beta_N(x)+2\beta_{N+1}(x)\end{aligned} \quad (8)$$

Modifiye baz fonksiyonlarının ve bunların birinci türevlerinin düğüm noktalarındaki sayısal değerleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir;

$$\bar{\beta}_{ij}^{(1)}=\sum_{k=1}^{N}A_{jk}^{(1)}\bar{\beta}_{ik} \quad (9)$$

Bu denklemde $\bar{\beta}_{ij}=\bar{\beta}_i(x_j)$ ve $\bar{\beta}_{ij}^{(1)}=\bar{\beta}_i^{(1)}(x_j)$'dir. Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**, matris formunda şu şekilde ifade edilebilir;

$$[A^{(1)}]^T=[\bar{\beta}]^{-1}[\bar{\beta}^{(1)}] \quad (10)$$

Burada, $[]^T$ matris transpoz işlemini temsil etmektedir. $[\bar{\beta}]$ ve $[\bar{\beta}^{(1)}]$ matrisleri ise şu şekilde yazılabilir;

$$[\bar{\beta}]=\begin{bmatrix}6&1&&&&&&\\0&4&1&&&&&\\0&1&4&1&&&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&&\\&&&1&4&1&0&\\&&&&1&4&0&\\&&&&&1&6&\end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[\bar{\beta}^{(1)}] = \begin{bmatrix} -6/h & 6/h & & & & & \\ -3/h & 0 & -3/h & & & & \\ & -3/h & 0 & -3/h & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -3/h & 0 & -3/h & \\ & & & & -3/h & 0 & -3/h \\ & & & & & -6/h & 6/h \end{bmatrix} \quad (12)$$

Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** ile elde edilen $[A^{(1)}]$ matrisi, denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** 'te yerine konularak $u(x)$ fonksiyonun düğüm noktalarındaki birinci türev değeri yaklaşık olarak hesaplanabilir. Daha yüksek mertebeden türevlerin hesabı için gerekli $[A^{(r)}]$ katsayı matrisi aşağıdaki gibi hesaplanabilir [33];

$$A_{ij}^{(r)} = \begin{cases} r\left[A_{ij}^{(1)} A_{ii}^{(r-1)} - \dfrac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j}\right] & i \neq j \\ -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} A_{ij}^{(r)} & i = j \end{cases} \quad (13)$$

2.3 MKBS-DKY'nin Richards denklemi için uygulanışı

Doymamış bölgede su basınç yükünün zamana göre değişimi, Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**'de de verildiği gibi, basınç yükünün kendisine, hidrolik iletkenliğe ve özgül nem kapasitesine bağlı bir fonksiyon olarak ifade edilebilir;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= f\{\psi, K(\psi), C(\psi)\} \\ &= \frac{1}{C}[K\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z}(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1)] \end{aligned} \quad (14)$$

Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**'te verilen diferansiyel denklemin MKBS-DKY yöntemi ile nümerik olarak çözümü için, Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** ve Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** ile seçilen düğüm noktalarının konum değerlerine bağlı diferansiyel kuadratur katsayı matrisleri $[A^{(1)}]$ ve $[A^{(2)}]$ oluşturulur ve bu matrisler kullanılarak eşitliğin sağ tarafı şu şekilde yaklaşık olarak hesaplanır;

$$f\{\psi, K, C\} = [M_1][\psi] + [M_0] \quad (15)$$

Bu denklemde,

$$\begin{aligned} [M_1] &= \{diag([C])\}^{-1} \times \\ &\{diag([K])[A^{(2)}] + diag([A^{(1)}][K])[A^{(1)}]\} \end{aligned} \quad (16)$$

ve

$$[M_0] = \{diag([C])\}^{-1}[A^{(1)}][K] \quad (17)$$

N tane düğüm noktası için, Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** ve **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**'de yer alan, $[\Psi]$, $[K]$ ve $[C]$ boyutları $N \times 1$ *olan* sütün vektörleridir. $diag[\ldots]$ operatörü ise köşegeni $[\ldots]$ vektörüne eşit olan $N \times N$ boyutunda bir köşegen matris verir.

Çözümü zamanda ilerletebilmek için 4. mertebeden Runge-Kutta metodundan yararlanılabilir;

$$\psi^{k+1} = \psi^k + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f\{\psi^k, K(\psi^k), C(\psi^k)\} \\ k_2 &= \Delta t f\{\psi^k + k_1/2, K(\psi^k + k_1/2), C(\psi^k + k_1/2)\} \\ k_3 &= \Delta t f\{\psi^k + k_2/2, K(\psi^k + k_2/2), C(\psi^k + k_2/2)\} \\ k_4 &= \Delta t f\{\psi^k + k_3, K(\psi^k + k_3), C(\psi^k + k_3)\} \end{aligned} \quad (19)$$

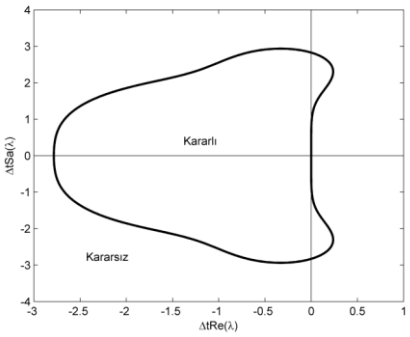
Burada, Δt zaman adım büyüklüğünü, k üst simgesi ise hangi zaman adımında bulunulduğunu göstermektedir. Zamanda bu şekilde ilerlerken her adımda sınır koşullarının uygulanması gerekir. Bir düğüm noktası için Dirichlet tipi sınır koşulu tanımlanmışsa, belirlenmiş olan basınç yükü değeri her bir zaman adımında doğrudan o noktaya atanır. Bunun yanı sıra, bir sınır düğüm noktası için Neumann tipi (fluks tipi) sınır koşulu da aşağıdaki gibi uygulanabilir;

$$q(z,t) = -K(\psi)(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1) \quad (20)$$

Bu denklemde q zaman ve/veya konuma bağlı sızma hızını ifade etmektedir. Böyle bir sınır koşulunun i indisli bir düğüm noktası için uygulanması durumunda, o noktanın k zaman adımındaki yük değeri şu şekilde hesaplanabilir;

$$\psi_i^k = \frac{1}{A_{ii}^{(1)}}\left(-\frac{q(z_i, t^k)}{K(\psi_i^{k-1})} - 1 - \sum_{j=1,\ i\neq j}^{N} A_{ij}^{(1)} \psi_j^{k-1}\right) \quad (21)$$

Yöntemi zamanda ilerletmek için kullanılan 4. Mertebeden Runge Kutta yöntemi belirli koşullar altında kararlı çözümler verir. Yöntemin kararlılığı, Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**'da verilen [M1] katsayı matrisinin öz değerlerine (λ) ve zaman adım büyüklüğüne (Δt) bağlıdır. Sistemin kararlı olabilmesi için, Re(λ) ve Sa(λ) herhangi bir öz değerin reel ve sanal bileşenleri olmak üzere, $\Delta t\lambda$ Şekil 2'de verilen bölge içinde kalmalıdır [34].



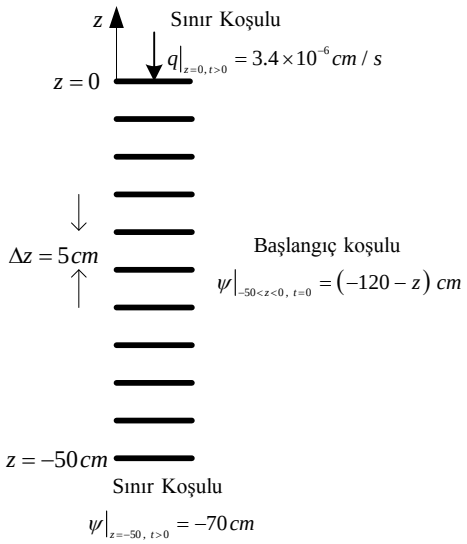
Şekil 2: 4. merteben Runge-Kutta Yöntemi için kararlılık bölgesi.

3 Sonuçlar

3.1 Örnek uygulama 1

İlk örnek uygulamada, derinliği 50 cm olan bir topraktaki nem hareketi ele alınmıştır. Başlangıç koşulu olarak toprağın en üst kesitinde -120 cm olarak tanımlamış basınç yükü doğrusal olarak artarak en alt kesitte -70 cm'ye ulaşmaktadır. Sabit 3.4×10^{-6} cm/s'lik sızma miktarı üst sınır koşulu, -70 cm'lik sabit basınç yükü alt sınır koşulu olarak belirlenmiştir. Nümerik model için Δz=5 cm olacak şekilde eşit aralıklı 11 nokta kullanılmıştır. Simülasyon süresi 400 sa. ve zamanda ilerlemek için kullanılacak adım büyüklüğü 10 s. olarak belirlenmiştir.

Problem geometrisi, başlangıç ve sınır koşulları Şekil 3'te verilmiştir.



Şekil 3: Örnek uygulama 1'e ait problem geometrisi, başlangıç ve sınır koşulları.

Basınç yükü, toprak nemi ve hidrolik iletkenlik arasındaki ilişkiyi tanımlayabilmek için Brooks-Corey [30] modelinden yararlanılmıştır. Bu model şu şekilde ifade edilebilir.

$$\theta = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(\alpha|\psi|)^{-n} & \psi < -1/\alpha \\ \theta_s & \psi \geq -1/\alpha \end{cases} \quad (22)$$

$$K = K_s(\alpha|\psi|)^{-(2+nl+2n)} \quad (23)$$

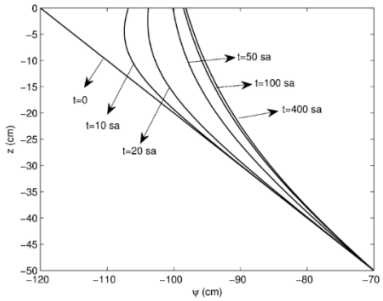
$$C = n(\theta_s - \theta_r)\alpha^{-n}|\psi|^{-n-1} \quad (24)$$

bu denklemlerde, θ_s doygun hacimsel su içeriğini, θ_r kalıcı su içeriğini, K_s doygun hidrolik iletkenlik değerini ifade etmektedir.α, n ve l toprak tipine bağlı model parametreleridir. Simülasyonu gerçekleştirmek için kullanılan ve Tablo 1'de verilmiş olan toprak parametreleri, Zhu ve Mohanty [35] tarafından yapılmış çalışmadan alınmıştır.

Tablo 1: Örnek uygulama 1 için kullanılan parametre değerleri.

K_s cm/s	α, cm^{-1}	n	l	θ_r	θ_s
3.4×10^{-4}	0.022	1.456	0.5	0.065	0.41

Şekil 4 basınç yükünün derinlikle zamana bağlı olarak nasıl değiştiğini göstermektedir. 400 sa.'lık test süresi sonunda sistemin kararlı hale geldiği görülmektedir.



Şekil 4: Örnek uygulama 1 için su basınç yükünün derinlik ve zamana göre değişimi.

Bu tip sınır koşullarına sahip sızma problemlerinin kararlı haldeki çözümü için Zhu ve Mohanty [35] analitik bir yöntem önermiştir. MKBS-DKY ile elde edilmiş sonuçlar bu analitik çözüm ile kıyaslanmıştır. Ele alınan problem Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) tabanlı Hydrus-1D [36] programı ve bunun yanı sıra Polinom bazlı Diferansiyel Kuadratur Yöntemi (P-DKY) ile tekrar çözülmüştür. En sık kullanılan Diferansiyel Kuadratur yöntemlerinden biri olan P-DKY uygulamalarında baz fonksiyonu olarak Lagrange polinomlarından yararlanılmaktadır [33]. Analitik ve nümerik yöntemler ile elde kararlı durumdaki derinlik-basınç yükü değerleri Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2: Örnek uygulama 1 için analitik ve sayısal yöntemlerle hesaplanan basınç yükü değerleri.

	ψ (cm)			
z (cm)	Analitik Çözüm	MKBS-DKY	SEY (Hydrus-1D)	P-DKY
0	-98.243	-98.035	-99.587	-98.256
-5	-96.972	-96.793	-98.237	-96.987
-10	-95.406	-95.262	-96.720	-95.422
-15	-93.507	-93.396	-94.940	-93.523
-20	-91.243	-91.161	-92.595	-91.258
-25	-88.594	-88.535	-89.644	-88.607
-30	-85.556	-85.516	-86.252	-85.566
-35	-82.142	-82.117	-82.548	-82.149
-40	-78.382	-78.367	-78.619	-78.387
-45	-74.319	-74.314	-74.452	-74.321
-50	-70.000	-70.000	-70.000	-70.000

Ele alınan nümerik yöntemlerin tahmin performansının belirlenebilmesi için hata ölçütü olarak normalize edilmiş ortalama karesel hatanın karekökü (NOKHK) kullanılmıştır. NOKHK şu şekilde hesaplanabilir;

$$NOKHK = \frac{1}{y_{maks} - y_{min}}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (25)$$

Bu ifadede y ve $\hat{y}$ sırası ile kıyaslanan parametrenin gerçek (analitik) ve yaklaşık (sayısal) değerini, y_{max} ve y_{min} bu parametrenin maksimum ve minimum değerini, ve N kıyaslama yapılan nokta sayısını temsil etmektedir.

Kullanılan düğüm noktası sayısının çözüme etkisinin irdelenebilmesi için Δz =10, 2, 1 ve 0.5 cm olacak şekilde farklı çözünürlük değerleri için deneyler tekrarlanmıştır. Tüm bu deneyler sonunda elde edilen kararlı haldeki basınç yükü dağılımı tahminleri analitik çözüm ile kıyaslanmış, elde edilen NOKHK değerleri Tablo 3'te sunulmuştur.

Küçük NOKHK değerleri, Diferansiyel Kuadratur yöntemlerinin (MKBS-DKY ve P-DKY), Sonlu Farklar Yöntemine (SEY) göre daha doğru sonuç verdiğini göstermektedir. Az nokta kullanıldığında (Δz=5 cm ve Δz=10 cm için), P-DKY'nin MKBS-DKY'ne göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Fakat nokta sayısının artması (Δz'nin küçülmesi) P-DKY çözümünün kararsız hale gelmesine ve yöntemin sonuç vermemesine neden olmaktadır. P-DKY'nin global karakteri, başka bir ifadeyle herhangi bir noktada türevler hesaplanırken diğer tüm noktalardaki bilginin kullanılıyor olması, nokta sayısı arttıkça

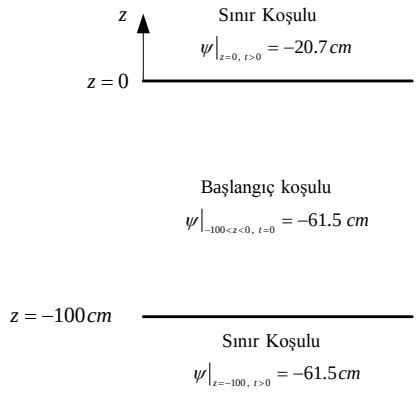
stabilite problemine neden olabilmektedir [33]. Buna karşılık MKBS-DKY, nokta sayısının yüksek olduğu deneylerde de kararlılığını korumuş ve yüksek doğrulukta sonuç vermiştir. Bu durum, özellikle yüksek çözünürlük gerektiren problemlerin çözümünde MKBS-DKY kullanımını avantajlı kılmaktadır. Özetle, MKBS-DKY'nin kararlı doğası ve doğru sonuç verme kapasitesi yöntemin mevcut sayısal metotlara iyi bir alternatif oluşturabileceğini göstermektedir.

Tablo 3: Örnek uygulama 1'de kullanılan sayısal yöntemler için düğüm sayısı NOKHK ilişkisi

Δz (cm)	NOKHK		
	MKBS-DKY	SEY (Hydrus-1D)	P-DKY
10	0.0116	0.0439	0.0100
5	0.0051	0.0352	0.0004
2	0.0018	0.0328	Kararsız
1	0.0007	0.0324	Kararsız
0.5	0.0002	0.0323	Kararsız

3.2 Örnek Uygulama 2

İkinci örnek uygulama için Haverkamp ve diğ. [31] tarafından tasarlanmış problem üzerinde çalışılmıştır. Başlangıç koşulu olarak toprağın kuru olduğu kabulü yapılarak basınç yükü her noktada -61.5 cm'e eşitlenmiştir. Her iki sınır için de Dirichlet tipi sınır koşulu tanımlanmış olup test süresince basınç yükü üst sınırda -20.7 cm, alt sınırda -61.5 cm olarak sabitlenmiştir. Başlangıç ve sınır koşulları Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5: Örnek uygulama 2'ye ait problem geometrisi, başlangıç ve sınır koşulları.

Hidrolik iletkenlik, hacimsel nem içeriği ve özgül nem kapasitesinin tayini için Haverkamp ve diğ. [31] tarafından önerilen modelden yararlanılmıştır;

$$\theta(\psi) = \frac{\phi(\theta_s - \theta_r)}{\phi + |\psi|^{\beta}} + \theta_r \tag{26}$$

$$K(\psi) = K_s \frac{\mu}{\mu + |\psi|^{\lambda}} \tag{27}$$

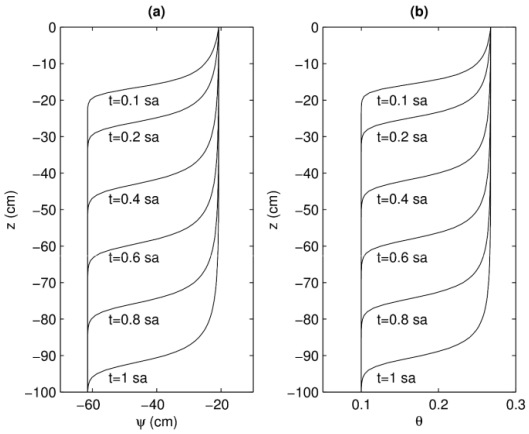
$$C(\psi) = \frac{\phi(\theta_s - \theta_r)\beta|\psi|^{\beta-1}}{(\phi + |\psi|^{\beta})^2} \tag{28}$$

Bu denklemde ϕ, λ, μ *ve* β toprak özelliklerine bağlı model parametreleridir. Uygulamada kullanılan parametreler Tablo 4'te gösterilmiştir [11].

Tablo 4: Örnek uygulama 2 için kullanılan parametre değerleri.

K_s, cm/s	ϕ	λ	β	μ	θ_r	θ_s
9.44×10^{-3}	1.611×10^{6}	4.74	3.96	1.175×10^{6}	0.075	0.287

Zaman adım büyüklüğü 0.1 s. test süresi 1 sa. olarak belirlenmiştir. Elde edilen basınç yükü dağılımının zamana bağlı değişimi Şekil 6a'da, bu basınç yükü değerlerinin Denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** içinde kullanılması ile hesaplanan nem hareketi ise Şekil 6b'de gösterilmektedir.



Şekil 6: Örnek uygulama 2 için (a): Su basınç yükü ve (b): Hacimsel su içeriğinin derinlik ve zamana bağlı değişimi.

Haverkamp ve diğ. [31] bu problemi Philip [3] tarafından geliştirilen analitik yöntemle çözmüş, daha sonra Kumar [11] aynı problemi numerik olarak Sonlu Farklar Yöntemi (SFY) ile tekrar ele almış, analitik ve nümerik olarak elde edilmiş toprak nemi değerlerini bu çalışmasında sayısal olarak sunmuştur. 0.2 ve 0.8'inci saniyelerde analitik, SFY ve MKBS-DKY yöntemleri ile elde edilen toprak nemi değerleri Tablo 5'te sunulmuştur. Elde edilen değerlerin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Buna bağlı olarak, MKBS-DKY için hesaplanan NOKHK değerinin, SFY için elde edilenle aynı oranda küçük olması, MKBS-DKY yönteminin yüksek doğrulukta sonuç verme konusundaki rekabet gücünü göstermektedir.

3.3 Örnek Uygulama 3

Üçüncü örnek uygulamada üst katmanı lem, (loam) orta katmanı silt-lem (silt-loam) ve alt katmanı kil-lem (clay-loam) tipi topraktan oluşan toplam 30 cm kalınlığında heterojen bir sitem ele alınmıştır. Başlangıç koşulu olarak tüm noktalarda basınç yükü -100 cm olarak belirlenmiştir. Toprağın üst kesitinde basınç yükü sabit -20 cm olacak şekilde Dirichlet tipi, alt kesitte ise Neumann tipi sınır koşulları tanımlanmıştır. Problem geometrisi, sınır ve başlangıç koşulları Şekil 7'de özetlenmiştir.

Bu uygulamada akım parametrelerinin hesabı için van Genuchten [32] tarafından önerilen model kullanılmıştır. Bu modele göre;

$$\theta(\psi) = \frac{(\theta_s - \theta_r)}{[1 + |\alpha\psi|^{n}]^{m}} + \theta_r \tag{29}$$

$$K(\psi) = K_s \left[\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right]^{0.5} \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^{1/m}\right]^{m}\right\}^{2} \tag{30}$$

$$C(\psi) = \alpha mn \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + |\alpha\psi|^n]^{m+1}} |\alpha\psi|^{n-1} \quad (31)$$

Bu denklemde α ve n toprak özelliklerine bağlı model parametreleridir ve $m = 1 - 1/n$ şeklinde hesaplanır. Uygulamada kullanılan toprak tiplerine ait parametre değerleri Tablo 6'da verilmiştir [36].

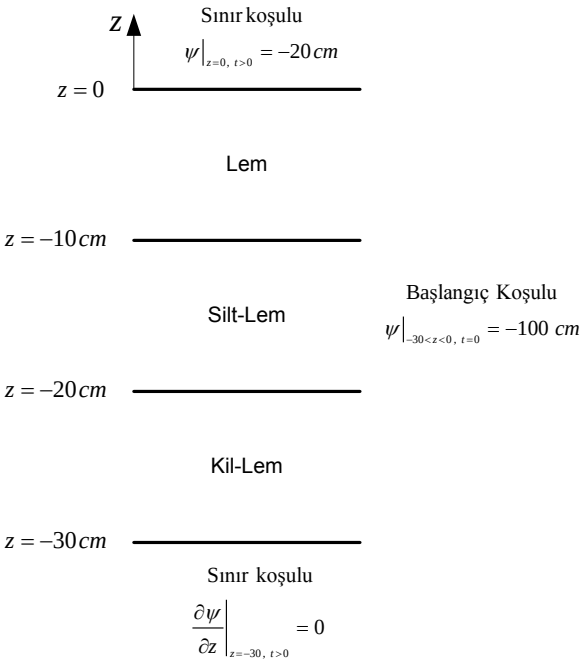
Sayısal çözüm için Δz=1cm olacak şekilde 31 düğüm noktası kullanılmıştır. Δt=0.01 sa alınarak 15 sa.'lik simülasyon gerçekleştirilmiştir. Problemin çözümü için kullanılabilecek bir analitik yöntem bulunmadığından elde edilen sonuçlar SEY tabanlı Hydrus-1D yazılımı ile bulunanlarla kıyaslanmıştır. Basınç yükünün zamana bağlı olarak değimi Şekil 8'de resmedilmiştir.

Tablo 5: Örnek uygulama 2 için iki farklı zamanda analitik ve sayısal tekniklerle elde edilmiş kot-hacimsel su içeriği değerleri.

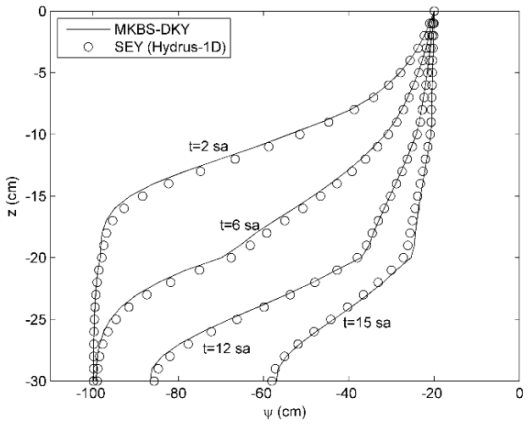
t = 0.2 sa		θ	
z(cm)	Analitik	SFY	MKBS-DKY
-18	0.2506	0.248583	0.249783
-19	0.2451	0.244049	0.24542
-20	0.2395	0.238042	0.239633
-21	0.232	0.229922	0.231793
-22	0.2201	0.21878	0.220978
-23	0.2038	0.203499	0.205985
-24	0.1806	0.183346	0.185811
-25	0.1567	0.15615	0.161268
-26	0.1332	0.13689	0.136911
-27	0.1172	0.119994	0.118693
-28	0.1109	0.109876	0.108309
-29	0.1047	0.104615	0.103383
	NOKHK	0.0114	0.0153
t = 0.8 sa		θ	
z(cm)	Analitik	SFY	MKBS-DKY
-66	0.249	0.248422	0.251449
-67	0.2448	0.244585	0.248243
-68	0.2406	0.239649	0.244156
-69	0.2364	0.233195	0.238855
-70	0.2286	0.224639	0.231862
-71	0.2198	0.213216	0.222502
-72	0.2063	0.198131	0.209908
-73	0.1891	0.179147	0.193246
-74	0.1686	0.157722	0.172522
-75	0.1482	0.137451	0.149939
-76	0.1305	0.121852	0.129901
-77	0.1165	0.111818	0.115829
-78	0.1072	0.106105	0.107697
	NOKHK	0.0396	0.0169

Tablo 6: Örnek uygulama 3 için kullanılan toprak tiplerine ait parametreler.

	Lem	Silt-Lem	Kil-Lem
θ_r	0.078	0.067	0.095
θ_s	0.43	0.45	0.41
α (cm)	0.036	0.02	0.019
n	1.56	1.41	1.31
K_s (cm/gün)	24.96	10.8	6.24



Şekil 7: Örnek uygulama 3'e ait problem geometrisi, başlangıç ve sınır koşulları.



Şekil 8: Örnek uygulama 3 için su basınç yükünün derinlik ve zamana bağlı değişimi.

15 sa.'lik süre sonunda elde edilen basınç değerleri Tablo 7'de verilmiştir. MKBS-DKY ve SEY ile elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Bu bulgular önerilen

yöntemin heterojen yapıya sahip topraklar için de uygulanabilirliğini göstermektedir.

Tablo 7: Örnek uygulama 3 için 15 sa.'lik simülasyon süresi sonunda sayısal yöntemlerle hesaplanan su basınç yükü dağılımı.

	ψ (cm)			ψ (cm)	
z (cm)	MKBS-DKY	SEY	z (cm)	MKBS-DKY	SEY
-1	-20.07	-20.08	-16	-23.65	-24.51
-2	-20.15	-20.17	-17	-24.06	-25.10
-3	-20.24	-20.26	-18	-24.43	-25.66
-4	-20.32	-20.35	-19	-24.67	-26.18
-5	-20.40	-20.45	-20	-25.47	-27.26
-6	-20.47	-20.53	-21	-28.87	-30.05
-7	-20.53	-20.61	-22	-32.00	-33.18
-8	-20.57	-20.68	-23	-35.60	-36.62
-9	-20.57	-20.73	-24	-39.49	-40.35
-10	-20.75	-20.96	-25	-43.61	-44.26
-11	-21.28	-21.51	-26	-47.75	-48.21
-12	-21.76	-22.08	-27	-51.60	-51.97
-13	-22.25	-22.67	-28	-54.73	-55.12
-14	-22.73	-23.27	-29	-56.64	-57.28
-15	-23.20	-23.89	-30	-56.98	-58.07

4 Tartışma

Bu çalışmada suyun doymamış toprak bölgesindeki bir boyutlu hareketi MKBS-DKY yöntemi ile sayısal olarak modellenmiştir. Problemi zamanda ilerletebilmek için 4. mertebeden Runge-Kutta yönteminden yararlanılmıştır. Yöntemin güvenilirliği, kararlılığı ve doğruluğu, farklı hidrolik iletkenlik modellerinin ve farklı sınır koşullarının kullanıldığı üç ayrı uygulama örneği ile test edilmiştir. Brooks-Corey ve Haverkamp modellerinin kullanıldığı ilk iki örnek problemin çözümü için literatürde yer alan analitik yöntemlerden faydalanılmış, MKBS-DKY ile elde edilen yaklaşık değerler, bu analitik yöntemlerin verdiği gerçek değerler ile kıyaslanmış MKBS-DKY'nin yüksek doğrulukta sonuç verdiği görülmüştür.

İlk örnek problem, bu tip hidrodinamik sistemlerin sayısal çözümünde sıklıkla kullanılan SEY ve diferansiyel kuadratur yöntemlerinin en bilineni P-DKY ile de çözülmüş, farklı sayıda düğüm noktaları alınarak deneyler tekrarlanmış, model çözünürlüğünün sonuçların doğruluğuna etkisi araştırılmıştır. Analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkın değerlendirilebilmesi için NOKHK hata ölçütü kullanılmıştır. NOKHK değerleri göz önüne alındığında, kullanılan diferansiyel kuadratur yöntemlerinin SEY'e göre daha doğru sonuç verdiği görülmektedir. Az sayıda nokta kullanıldığında P-DKY'nin, MKBS-DKY'ye göre daha iyi sonuç verdiği, ancak düğüm sayısı arttıkça P-DKY stabilite problemi yaşarken, MKBS-DKY'nin kararlılığını koruduğu tespit edilmiştir. Bu durum, çok sayıda düğüm noktası gerektiren kompleks problemlerde MKBS-DKY kullanımını avantajlı kılmaktadır. İkinci örnek uygulamada MKBS-DKY çözümü literatürden alınan SFY çözümü ve analitik çözüm ile karşılaştırılmış, her iki nümerik yöntemin verdiği sonuçlar için hesaplanan NOKHK değerleri birbirine çok yakın çıkmıştır. Bu bulgular, MKBS-DKY'nin en sık kullanılan yöntemlerden biri olan SFY ile doğru sonuç verme noktasında rekabet gücünü ortaya koymaktadır. Son örnek uygulamada üç farklı toprak katmanından oluşan heterojen bir sistem alınmış, hidrolik parametrelerin tayini için van Genuchten modelinden yararlanılmıştır. MKBS-DKY ile elde edilen değerlerin, SEY tabanlı Hydrus-1D programı ile hesaplananlarla bire bir örtüştüğü görülmüştür. Bu bulgular MKBS-DKY'nin heterojen sistemler için de kolaylıkla uygulanabilir oluşuna işaret etmektedir. Kolay uygulanabilir bir yöntem olması, sahip olduğu yüksek hesaplama verimliliği, doğru ve güvenilir sonuçlar üretmesi, MKBS-DKY yöntemini bu tip hidrojeoloji problemlerinin sayısal çözümü için cazip bir alternatif kılmaktadır.

Bu çalışma, iki veya üç boyutlu geometriye sahip, zamana bağlı değişen sınır koşullarının geçerli olduğu, vejetasyon gibi parametrelerin de göz önünde bulundurulduğu daha kapsamlı problemlerin MKBS-DKY ile ele alınabileceği potansiyel çalışmalara temel oluşturabilmeyi amaçlamaktadır.

5 Kaynaklar

[1] Buckingham E. "Studies on the Movement of Soil Moisture". USDA Bureau of Soils, Bulletin 38, Washington, DC, 1907.

[2] Richards LA. "Capillary conduction of liquids through porous mediums". *Physics*, 1(5), 318-333, 1931.

[3] Philip JR. "General method of exact solution of the concentraton-dependent diffusion equation". *Australian Journal of Physics*, 13(1), 1-12, 1960.

[4] Sander GC, Parlange JY, Kuhnel V, Hogarth WL, Lockington D, O'Kane JPJ. "Exact nonlinear solution for constant flux infiltration". *Journal of Hydrology*, 97(3-4), 341-346, 1988.

[5] Warrick AW, Lomen DO, Islas A. "An analytical solution to Richards' equation for a draining soil profile". *Water Resources Research*, 26(2), 253-258, 1990.

[6] Parlange JY, Hogarth WL, Barry DA, Parlange MB, Haverkamp R, Ross PJ, Steenhuis TS, DiCarlo DA, Katul G. "Analytical approximation to the solutions of Richards' equation with applications to infiltration, ponding, and time compression approximation". *Advances in Water Resources*, 23(2), 189-194, 1999.

[7] Chen, JM, Tan, YC, Chen, CH. "Analytical solutions of one-dimensional infiltration before and after ponding. *Hydrological Processes"*. 17(4), 815-822, 2003.

[8] Celia MA, Bouloutas ET, Zarba RL. "A General mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation". *Water Resources Research*, 26(7), 1483-1496, 1990.

[9] Clement TP, William RW, Molz FJ. "A physically based two-dimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow". *Journal of Hydrology*, 161(1-4), 71-90, 1994.

[10] Miller, CT, Williams, GA, Kelley, CT, Tocci, MD. "Robust solution of Richards' equation for non uniform porous media". *Water Resources Research*, 34(10), 2599-2610, 1998.

[11] Kumar CP. "A numerical simulation model for one-dimensional ınfiltration". *Journal of Hydraulic Engineering*, 4(1), 5-15, 1998.

[12] Shahraiyni HT, Ashtiani BA, "Comparison of finite difference schemes for water flow in unsaturated soils". *International Scholarly and Scientific Research & Innovation.* 2(4), 226-230, 2008.

[13] Forsyth PA, Wu YS, Pruess K. "Robust numerical methods for saturated-unsaturated flow with dry initial conditions in heterogeneous media". *Advances in Water Resources*, 18(1), 25-38, 1995.
[14] Bergamaschi L, Putti M. "Mixed finite element and Newton-type linearizations for the solution of Richards' equation". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(8), 1025-1046, 1999.
[15] He X, Ren L. "An adaptive multiscale finite element method for unsaturated flow problems in heterogeneous porous Media". *Journal of Hydrology*, 374(1-2), 56-70, 2009.
[16] Eymard R, Gutnic M, Hilhorst D. "The finite volume method for Richards equation". *Computational Geosciences*, 3(3-4), 259-294, 1999.
[17] McBride D, Cross M, Croft N, Bennett C, Gebhardt J. "Computational modeling of variably saturated flow in porous media with complex three-dimensional geometries". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50(9), 1085-1117, 2006.
[18] Wencong L, Ogden FL. "A mass-conservative finite volume predictor-corrector solution of the 1D Richards' equation". *Journal of Hydrology*, 523, 119-127, 2015.
[19] Bellman R, Kashef BG, Casti J. "Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear differential equations". *Journal of Computational Physics*, 10(1), 40-52, 1972.
[20] Quan JR, Chang CT. "New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I. Analysis". *Computers & Chemical Engineering,* 13(7), 779-788, 1989.
[21] Shu C, Richards RE. "Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15(7), 791-798, 1992.
[22] Striz AG, Wang X, Bert CW. "Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components". *Acta Mechanica*, 111(1-2), 85-94. 1995.
[23] Zhong H. "Spline-based differential quadrature for fourth order differential equations and its application to Kirchhoff plates". *Applied Mathematical Modelling*, 28(4), 353-366, 2004.
[24] Shu C, Wu YL. "Integrated radial basis functions-based differential quadrature method and its performance". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(6), 969-984, 2007.
[25] Korkmaz A, Dağ İ. "Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation". *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 22(8), 1021-1036, 2012.
[26] Arora G, Singh BK. "Numerical solution of Burgers' equation with modified cubic B-spline differential quadrature method". *Applied Mathematics Computation,* 224, 166-177, 2013.
[27] Mittal RC, Dahiya S. "Numerical simulation on hyperbolic diffusion equations using modified cubic B-spline differential quadrature methods". *Computers & Mathematics with Applications,* 70(5), 737-749, 2015.
[28] Mittal RC, Rohila R. "Numerical simulation of reaction-diffusion systems by modified cubic B-spline differential quadrature method". *Chaos, Solitons & Fractals,* 92, 9-19, 2016.
[29] Shukla HS, Tamsir M. "Numerical solution of nonlinear sine-Gordon equation by using the modified cubic B-spline differential quadrature method". *Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences,* (in press) doi:10.1016/j.bjbas.2016.12.001.
[30] Brooks RJ, and Corey AT. "Hydraulic properties of porous media". Hydrol. Pap. 3, Colo. State Univ., Fort Collins, USA, 1964.
[31] Haverkamp R, Vaculin M, Touma J, Wierenga PJ, Vachaud G. "A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration". *Soil Science Society of America Journal*, 41(2), 285-294, 1977.
[32] van Genuchten MT. "A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils". *Soil Science Society of America Journal*, 44(5), 892-898, 1980.
[33] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer Science & Business Media, 2000.
[34] Jain MK. *Numerical Solution of Differential Equations*, John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd. 1984.
[35] Zhu J, Mohanty BP. "Analytical solutions for steady state vertical infiltration". *Water Water Resources Research*, 38(8), 20-1-20-5, 2002.
[36] Simunek J, Sejna M, Saito H, Sakai M van Genuchten, MT. The HYDRUS-1D Software Package for Simulating the One-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, Version 4.08. Department of Environmental Sciences, University of California Riverside, 2009.