



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALFA LOGARİTMİK ÜSTEL DAĞILIM İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Adil KARAGÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistik Anabilim Dalını

Ağustos-2019
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ALFA LOGARİTMİK ÜSTEL DAĞILIM İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Adil KARAGÖZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. İsmail KINACI

2019, 42 Sayfa

Jüri
Doç.Dr.İsmail KINACI
Dr.Öğr.Üyesi Aydın KARAKOCA
Dr.Öğr.Üyesi Demet SEZER

Bu tez çalışmasında Karakaya ve ark.(2016) tarafından önerilen alfa-logaritmik üstel (ALT-Exp) dağılım için tam, tip-I sansürlü, tip-II sansürlü ve ilerleyen tür tip-II sansürlü örneklemlere dayalı parametre tahmini konusu ele alınmıştır. Parametre tahmini için en çok olabilirlik ve Bayes yöntemi ele alınmıştır. Bu tahmin edicilerin performansları, gerçekleştirilen bir simülasyon çalışması ile, yan ve hata kareler ortalaması ölçütlerine göre kıyaslanmıştır ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: ALT-Exp Dağılımı, Tip-I Sansürleme, Tip-II Sansürleme, İlerleyen Tür Tip-II Sansürleme, En Çok Olabilirlik Yöntemi, Bayes Yöntemi

ABSTRACT

MS THESIS

PARAMETER ESTIMATION OF ALPHA LOGARITHMIC EXPONENTIAL DISTRIBUTION

Adil KARAGÖZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN STATISTICS

Advisor: Assoc.Prof. İsmail KINACI

2019, 42 Pages

Jury
Assoc.Prof. İsmail KINACI
Asst.Prof.Dr. Aydın KARAKOCA
Asst.Prof.Dr. Demet SEZER

In this thesis, the parameter estimation problem for alpha-logarithmic exponential (ALT-Exp) distribution proposed by Karakaya et al.(2016) based on complete, type-I censored, type-II censored and progressive type-II censored samples is discussed. Maximum likelihood and Bayesian method are used for parameter estimation. The performances of these estimators are compared with a simulation study according to their biases and mean squared errors and the results are interpreted.

Keywords: ALT-Exp Distribution, Type-I Censoring, Type-II Censoring, Progressive Type-II Censoring, Maximum Likelihood Method, Bayesian Method

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, her konuda yardımcı olan, çalışmalarıma yön veren tez danışmanım sayın Doç.Dr. İsmail KINACI' ya, ayrıca desteğini esirgemeyen Arş.Gör. Kadir KARAKAYA' ya ve tezimi bitirmem için sürekli uyaran ve beni destekleyen kuzenim doktora öğrencisi Furkan BAKIRCI' ya, maddi manevi desteklerini üzerimden eksik etmeyen annem Miyase KARAGÖZ' e ve babam Ahmet KARAGÖZ' e sonsuz teşekkür ederim.

Adil KARAGÖZ
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1. Sansürlü Örneklemler 3
2.1.1. Tip-I sansürleme 3
2.1.2. Tip-II sansürleme 4
2.1.3. İlerleyen tür tip-II sansürleme 4
2.2. Tahmin Yöntemleri 6
2.2.1. En çok olabilirlik yöntemi 6
2.2.2. Bayes yöntemi 7
2.3. Alfa Logaritmik Üstel Dağılım 10

3. ALT-EXP DAĞILIMI İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ **12**

3.1. Tip-I sağdan sansürlü örnekleme dayalı parametre tahmini 12
3.1.1. En çok olabilirlik tahmini 12
3.1.2. Bayes tahmini 14
3.2. Tip-II Sansürlü Örnekleme Dayalı Parametre Tahmini 16
3.2.1. En çok olabilirlik tahmini 16
3.2.2. Bayes tahmini 18
3.3. İlerleyen Tür Sansürlü Örnekleme Dayalı Parametre Tahmini 20
3.3.1. En çok olabilirlik tahmini 20
3.3.2. Bayes tahmini 22

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI **25**

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **37**

5.1 Sonuçlar 37
5.2 Öneriler 38

KAYNAKLAR **40**

ÖZGEÇMİŞ **42**

1. GİRİŞ

Günümüz dünyasında veri toplama ve bu verilerden sonuç çıkararak planlamalar yapma giderek önemini artırmaktadır. Bu bağlamda şirketler, fabrikalar, kurum ve kuruluşlar vb. veri toplama işine yaptıkları yatırımları artırmaktadırlar. Bu sebeple çevremizde giderek büyüyen bir veri havuzu oluşmaktadır. Hiç şüphesiz ki elde edilen bu verilerin bir işe yarayabilmesi için doğru istatistiksel teknikler kullanılarak analiz edilmesi gerekmektedir. Bu istatistiksel tekniklerden birisi veri modellemesidir. Burada modelleme işlemi olasılık dağılımları ile gerçekleştirilmektedir ve verinin yapısına göre kesikli veya sürekli olasılık dağılımları kullanılabilmektedir. Belirlenen bu modele sanki kitlenin sahip olduğu olasılık dağılımı gözüyle bakılmaktadır. Kitlenin olasılık dağılımının bilinmesi halinde ilgilenilen değişkene ilişkin ortalama, varyans, moment çıkaran fonksiyon, yaşam fonksiyonu, ilgilenilen herhangi bir olasılık vb. özellikler elde edilebilmektedir. Literatürde önerilmiş çok sayıda kesikli ve sürekli olasılık dağılımları vardır ve her geçen zaman yenileri önerilmeye devam etmektedir. Bu dağılımlardan bazıları (Mahdavi ve Kundu, 2017), (Cordeiro ve dos Santos Brito, 2012), (Adamidis ve Loukas, 1998), (Kuş, 2007), (Mudholkar ve Srivastava, 1993), (Alzaatreh ve ark., 2013), (Gupta ve Kundu, 1999), ve (Merovci, 2013) şeklinde sıralanabilir. Son dönemde önerilen bir dağılım ise (Karakaya ve ark., 2017) olup bu tez çalışmasında bu dağılım ele alınmıştır.

Hiç şüphesiz ki tam örnekleme dayalı istatistiksel sonuç çıkarımlar diğer örneklem tiplerine göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Yaşam analizlerinde bazen ilgilenilen parçanın maliyeti oldukça yüksek veya yaşam zamanı oldukça uzun olabilmektedir. Bu sebeple gözlemlerin elde edilme süreci ya çok yüksek maliyetli olabilmekte ya da çok uzun sürede sonlanabilmektedir. Bu gibi durumlarda gözlemlerin daha düşük maliyetle ve daha kısa sürede elde edilmesini sağlayan ve sansürleme yöntemleri olarak adlandırılan yöntemler yaşam analizlerinde sıklıkla kullanılmaktadır. Elbette ki sansürlü örneklemler tam örnekleme göre bir miktar bilgi kaybına yol açmaktadır. Ancak sağladığı maliyet ve zaman kazancı göz önünde bulundurulduğunda bu kayıp göz ardı edilebilmektedir. Literatürde önerilmiş çok sayıda sansürleme yöntemi bulunmaktadır. Bunlardan bazıları tip-I sağdan sansürleme, tip-II sağdan sansürleme ve ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlemedir. Bu yöntemlerden en popüler olanı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürleme veya kısaca ilerleyen tür sansürleme

yöntemidir. Bu yönteme ilişkin birçok detay (Balakrishnan ve ark., 2000) tarafından tartışılmıştır. Literatürde birçok olasılık dağılımının parametrelerinin ilerleyen tür sansürlü örnekleme dayalı tahmini konusunu ele alan çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları (Cohen, 1965), (Harter ve Moore, 1965), (Mousa ve Jaheen, 2002), (Wu, 2003), (Balakrishnan ve ark., 2003), (Kim ve Han, 2009), (Ng, 2005), (Ng ve ark., 2002) ve (Asgharzadeh, 2006) şeklinde sıralanabilir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde tez içerisinde kullanılan örneklem tipleri ve tahmin yöntemleri hakkında temel bilgiler verilmiştir. Tezin esas kısmını oluşturan üçüncü bölümde ALT-Exp dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tam, tip-I sansürlü, tip-II sansürlü ve ilerleyen tür tip-II sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahmini konusu ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, bir simülasyon çalışması ile, ele alınan tahmin yöntemlerinin örneklem tiplerine göre performansları ayrı ayrı incelenmiş ve yöntemler ortalama yan ve hata kareler ortalaması ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır. Beşinci ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve gelecek çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez içerisinde kullanılan tip-I, tip-II ve ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklemler, ALT-Exp dağılımı ve bu dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılacak olan en çok olabilirlik ve Bayes tahmin yöntemleri hakkında bilgiler verilecektir.

2.1. Sansürlü Örneklemler

Yaşam analizlerinde bir canlının, bir parçanın, bir sistemin vb. ömürleri (bozulma zamanları, yaşam zamanları) ile ilgilenilmektedir. Yaşam zamanı ile ilgili sonuç çıkarımlar yapabilmek için, ilgilenilen parçalar arasından rasgele seçilmiş belli sayıda parçanın yaşam zamanlarının gözlenmesi gerekmektedir. Yaşam zamanı gözlenecek parçalar yüksek maliyetli ve/veya çok uzun ömürlü olabilmektedir. Sansürlü gözlemler zaman, maliyet vb. sıkıntılar sebebiyle bazı parçalara ilişkin yaşam zamanlarının tam olarak gözlenememesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Zaman ve maliyetten kaynaklanacak sıkıntıları azaltmak için örnekleme seçilen tüm parçaların yaşam zamanlarının gözlenmesi yerine sansür şeması olarak adlandırılan bir plana dayalı olarak yaşam zamanları gözlemlenmektedir. Literatürde önerilmiş birçok sansür şeması bulunmaktadır. Bunlardan en popüler olan üç tanesi tip-I, tip-II ve ilerleyen tür tip-II sansür şemalarıdır. Bu bölümde bu üç sansür şeması hakkında bilgiler verilecektir.

2.1.1. Tip-I sansürleme

Yaşam zamanları $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile gösterilen n tane bağımsız ve özdeş parçanın yaşam zamanlarının gözlendiği bir yaşam testi düşünülsün. Her bir parçanın yaşam zamanı $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olsun. Tip-I sansürleme şemasına göre bu parçaların yaşam zamanları önceden bilinen bir t anına kadar gözlemlenir ve t anında hala yaşam zamanı gözlenemeyen parça kalırsa bu parçalar yaşam testinden çıkartılır ve test sonlandırılır. t anına kadar n tane parçadan $k\,(k \le n)$ tanesinin bozulduğu düşünülürse bu bozulan parçaların yaşam zamanları $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{k:n}$ şeklinde olacaktır. Burada $X_{i:n}; X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin $i.$ sıra istatistiğidir. Bu şekilde gözlenecek olan

$X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{k:n}$ örneklemi tip-I sansürlü örneklem olarak adlandırılır ve bu örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2,\ldots,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{(n-k)!}\left[\prod_{i=1}^{k} f(x_i)\right]\left(1-F(t)\right)^{n-k}, 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < t \qquad (2.1)$$

şeklindedir (Lawless, 2011).

2.1.2. Tip-II sansürleme

Yaşam zamanları $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile gösterilen n tane bağımsız ve özdeş parçanın bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Her bir parçanın yaşam zamanı $X_i, i = 1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olsun. Tip-II sansürleme şemasına göre önceden belirlenen $m.(m \leq n)$ bozulma gerçekleşene kadar parçaların yaşam zamanları gözlemlenir ve $m.$ bozulma gerçekleştiğinde geriye kalan $n-m$ tane sağlam parça yaşam testinden çıkartılır ve test sonlandırılır. Yaşam testi sonlandırılıncaya kadar gözlemlenecek olan parçaların yaşam zamanları $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{m:n}$ şeklinde olacaktır. Bu şekilde gözlenecek olan $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{m:n}$ örneklemi tip-II sansürlü örneklem olarak adlandırılır ve bu örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{n!}{(n-m)!}\left[\prod_{i=1}^{m} f(x_i)\right]\left(1-F(x_m)\right)^{n-m}, 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \infty \quad (2.2)$$

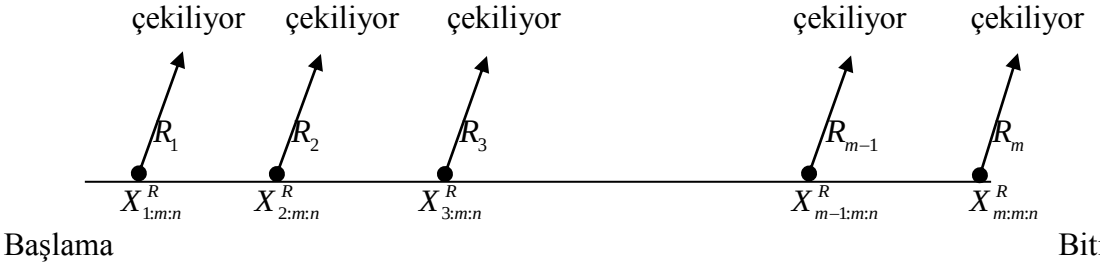
şeklinde olacaktır ((Lawless, 2011) ve (David ve Nagaraja, 2004)). Bu eşitlikten $m = n$ alınırsa eğer bilinen sıra istatistiklerindeki ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmektedir. Tip-II sansürleme, yaşam testinin maliyetini ve süresini azaltmasına karşın sonuç çıkarımının güvenilirliğini azaltmaktadır.

2.1.3. İlerleyen tür tip-II sansürleme

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme, yaşam zamanı analizlerinde veri elde etmede önemli bir yöntemdir. Çalışan parça diğer bir test için sistemden çekilip, deneyin maliyeti ve deney süresi azaltılabilir (Balakrishnan ve ark., 2000).

Yaşam zamanları $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile gösterilen n tane bağımsız ve özdeş parçanın bir yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Her bir parçanın yaşam zamanı $X_i, i = 1,2,\ldots,n$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olsun. İlerleyen tür tip-II sansür şemasına göre, meydana gelen 1. bozulma ile sağlam parçalardan rasgele seçilen r_1 sayıda parçanın yaşam testinden çekildiğini daha sonra geriye kalan $n - r_1 - 1$ tane parçadan, 2. bozulma ile r_2 sayıda ve böylece *m.* bozulma ile r_m sayıda bileşen yaşam testinden çekilsin. Böylece n tane parçadan m tane parçanın bozulma zamanı gözlenir. $X^R_{i:m:n}, i = 1,2,\ldots,m$ ile *i.* bozulma zamanı gösterilmek üzere bu şekilde elde edilen m hacimli $X^R_{1:m:n}, X^R_{2:m:n}, \ldots, X^R_{m:m:n}$ örneklemi ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü veya kısaca sadece ilerleyen tür sansürlü örneklem olarak adlandırılır. Burada $n = m + \sum_{i=1}^{m} r_i$ biçimindedir ve $R = (r_1, r_2, ..., r_m)$ sansür şeması olarak adlandırılır (Balakrishnan ve ark., 2000).

İlerleyen tür sansür şemasına göre yaşam testinin yürütülmesi şematik olarak Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. İlerleyen tür tip-II sağdan sansürleme şeması

$X^R_{1:m:n} < X^R_{2:m:n} < \cdots < X^R_{m:m:n}$ ilerleyen tür sansürlü örnekleminin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{1,2,\ldots,m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = c \prod_{i=1}^{m} f(x_i)(1 - F(x_i))^{r_i},\ x_1 < x_2 < \cdots < x_m \qquad (2.3)$$

şeklindedir. Burada $c = n(n - r_1 - 1)(n - r_1 - r_2 - 2)\ldots(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{m-1} - m + 1)$ şeklindedir. İlerleyen tür sansürlemede sansür şeması $R = (0,\ldots,0)$ olarak alınırsa

bilinen sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $R=(0,\ldots,n-m)$ alınırsa tip-II sansürlü örnekleminin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

2.2. Tahmin Yöntemleri

İstatistiksel olarak en önemli problemlerin başında tahmin problemleri gelmektedir. Çalışılan kitleyi daha detaylı ve iyi bir şekilde algılayabilmek ve kitlenin bazı karakteristikleri hakkında bilgi alabilmek ve çözümleyebilmek için tahmin yöntemlerinden faydalanılır. Bu bölümde kitle parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik ve Bayes yöntemleri üzerinde durulacaktır.

2.2.1. En çok olabilirlik yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi en yaygın olarak kullanılan tahmin edici bulma metotlarındandır. Bir parametrenin en çok olabilirlik tahmini, gözlenen örnek noktasının gelmesinin en muhtemel olduğu parametre değeri anlamını taşımaktadır. $X_1, X_2,\ldots, X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x\,|\,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_p)$ olan bir kitleden alınan n birimlik örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonu

$$L(\ \underline{\theta}\,|\,\underline{x}) = L(\theta_1,\theta_2,...,\theta_p\,|\,x_1,x_2,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,|\,\underline{\theta}) \qquad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir. Bu olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan $\underline{\theta}$, $\underline{\theta}$'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olarak adlandırılır. İşlem kolaylığı açısından genellikle bilinmeyen parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicisi, (2.4) eşitliği ile verilen olabilirlik fonksiyonu yerine bu fonksiyonun logaritması olan

$$\ell(\underline{\theta}\,|\,\underline{x}) = \log L(\ \underline{\theta}\,|\,\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \log\, f(x_i\,|\,\underline{\theta}) \qquad (2.5)$$

log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonundan elde edilmektedir ve bu tahmin edici

$$\underline{\theta} = \arg\max_{\underline{\theta}\in\Theta\subset\mathbb{R}^p} L(\underline{\theta}\,|\,\underline{X}) = \arg\max_{\underline{\theta}\in\Theta\subset\mathbb{R}^p} \ell(\underline{\theta}\,|\,\underline{X}) \qquad (2.6)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

En çok olabilirlik tahmin edicilerinin sahip olduğu bazı özellikler

- En çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}$, θ'nın tutarlı bir tahmin edicisidir.
- Asimptotik normallik belirli düzenleyici koşullar altında en çok olabilirlik tahmini asimptotik olarak normal dağılıma uygunluğunu gösterebilir.

  θ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}$ asimptotik normaldir.

  $$n \to \infty, \qquad \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to N\left(0, \sigma_{\hat{\theta}}^2\right)$$

  Burada

  $$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{I(\theta)}, \qquad I(\theta) = E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial_\theta} \ln L(\theta / x)\right]^2$$

  En çok olabilirlik tahmin edicisi doğru parametre değeri için θ etrafında yakınsak olarak normal dağılım gösterir.
- $\hat{\theta}, \theta$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi olsun. θ 'nın $\gamma = g(\theta)$ gibi bir fonksiyonu tanımlanmış olsun. Değişmezlik özelliğine göre γ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\gamma} = g\left(\hat{\theta}\right)$'dir.

şeklinde sıralanabilmektedir.

En çok olabilirlik tahmini her durumda uygulanması gereken en iyi tahmin edici değildir. Sebebi ise;

- Sapmalı olma durumu
- Hesap edilmesi zor olma durumu
- İlgili dağılım ile ilgili yanlış varsayımlara karşı hassasiyet durumu

2.2.2. Bayes yöntemi

Bayes yöntemi daha önce incelenen en çok olabilirlik yönteminden ve diğer tahmin yöntemlerinden temelde farklıdır. Klasik yöntemlerde bilinmeyen θ parametresinin sabit olduğu kabul edilirken Bayes yönteminde bu bilinmeyen parametrenin bir olasılık dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğu varsayılmaktadır. Bu olasılık dağılımına θ'nın önsel (prior) dağılımı adı verilir. Araştırmacı örneklemi ele almadan önce θ'nın önsel dağılımını kendisi seçmektedir. θ parametreli dağılımdan alınan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden elde edilen bilgiye dayanarak θ'nın

önsel dağılımının güncellemesi yapılır. Elde edilen güncelleme sonucu elde edilen olasılık dağılımına θ'nın sonsal (posterior) dağılımı adı verilmektedir. θ'nın önsel dağılımı $\pi(\theta)$ ve $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x}|\theta)$ olarak gösterilmek üzere bahsedilen bu güncelleme ve Bayes tahmin edicisinin elde ediliş aşamaları aşağıdaki gibi verilebilmektedir.

1. θ ve $\underline{X}$'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\underline{x},\theta) = f(x|\theta)\pi(\theta) \tag{2.7}$$

eşitliği ile elde edilir.

2. $\underline{X}$'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x})$

$$f(\underline{x}) = \int_{\theta\in\Theta} f(\underline{x},\theta)d_\theta = \int_{\theta\in\Theta} f(\underline{x},\theta)\pi(\theta)d_\theta \tag{2.8}$$

şeklinde elde edilir.

3. Örneklemden θ hakkında elde edilen ve θ'nın önsel dağılımından gelen bilgilerin dahil edildiği θ'nın sonsal dağılımı

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x},\theta)}{f(\underline{x})} = \frac{f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta\in\Theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d_\theta} \tag{2.9}$$

eşitliği ile elde edilir.

4. θ için Bayes tahmini elde edilir. Bu aşamada kayıp fonksiyonuna ilişkin kabuller devreye girmektedir. Uygulamalarda çoğunlukla karesel kayıp fonksiyonu altında Bayes tahmini bulunur. Karesel kayıp fonksiyonu altında θ parametresinin Bayes tahmini (2.9) eşitliği ile verilen sonsal dağılım $\pi(\theta|\underline{x})$'in beklenen değeri şeklinde ifade edilmektedir. Yani θ parametresinin Bayes tahmini

$$\theta_{Bayes} = \int_{\theta\in\Theta} \theta\pi(\theta|\underline{x})d\theta = \frac{\int_{\theta\in\Theta} \theta f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\theta\in\Theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{2.10}$$

eşitliği ile elde edilmektedir. θ'nın bir $g(\theta)$ fonksiyonunun Bayes tahmini ise

$$g(\theta)_{Bayes} = \int_{\theta\in\Theta} g(\theta)\pi(\theta \mid \underline{x})d\theta = \frac{\int_{\theta\in\Theta} g(\theta) f(\underline{x} \mid \theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\theta\in\Theta} f(\underline{x} \mid \theta)\pi(\theta)d\theta} \tag{2.11}$$

eşitliğinden bulunabilmektedir.

2.2.2.1. Tierney-Kadane Yöntemi

Eşitlik (2.10) veya (2.11) ile verilen Bayes tahminleri içerdikleri integrallerin analitik olarak çözülememesinden dolayı genellikle analitik olarak elde edilememektedir. (Tierney ve Kadane, 1986), eşitlik (2.11)'de yer alan iki integral oranının yaklaşık çözümü için bir yöntem önermişlerdir. Burada kısaca bu yöntemden bahsedilecektir. $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$ olmak üzere $\underline{\theta}$ parametreli herhangi bir dağılımdan alınan örnekleme ilişkin log-olabilirlik fonksiyonu $\ell(\theta)$, önsel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun logaritması da $\rho(\theta)$ olarak gösterilsin ve

$$H(\theta) = \frac{1}{n}\{\ell(\theta) + \rho(\theta)\} \tag{2.12}$$

$$H^*(\theta) = H(\theta) + \frac{1}{n}\log u(\theta) \tag{2.13}$$

fonksiyonları tanımlansın. Karesel kayıp fonksiyonu varsayımı altında θ'nın herhangi bir fonksiyonu olan $u(\theta)$ için Bayes tahmini Tierney–Kadane yaklaşım kullanılarak

$$\begin{aligned} u_{Bayes}(\underline{\theta}) &= E(u(\underline{\theta}) \mid \underline{x}) \\ &= \frac{\int e^{nH^*(\underline{\theta})} d\underline{\theta}}{\int e^{nH(\underline{\theta})} d\underline{\theta}} \\ &= \left(\frac{\det \Sigma^*}{\det \Sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[n\left(H^*(\hat{\underline{\theta}}^*) - H(\underline{\theta})\right)\right] \end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada $L(\underline{\theta} \mid \underline{x})$ eşitlik (2.8)'deki gibi olmak üzere

$$H(\underline{\theta}) = \log \pi(\underline{\theta}) + \frac{1}{n}\log L(\underline{\theta} \mid \underline{x}) \tag{2.15}$$

$$H^*(\underline{\theta}) = \log \tau(\underline{\theta}) + \log \pi(\underline{\theta}) + \frac{1}{n}\log L(\underline{\theta} \mid \underline{X}) \tag{2.16}$$

$$\Sigma = (\sigma_{iJ}) = -\left[\frac{\partial^2 L(\underline{\theta} \mid \underline{X})}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right]^{-1}\Bigg|_{\underline{\theta}=\tilde{\underline{\theta}}} \tag{2.17}$$

$$\Sigma^{*}=\left(\sigma_{ij}^{*}\right)=-\left[\frac{\partial^{2}H^{*}(\underline{\theta}\,|\,\underline{X})}{\partial\theta_{i}\partial\theta_{j}}\right]^{-1}\Bigg|_{\underline{\theta}=\underline{\tilde{\theta}}^{*}} \tag{2.18}$$

şeklindedir. Eşitlik (2.17) ve (2.18)'de verilen $\underline{\tilde{\theta}}$ ve $\underline{\tilde{\theta}}^{*}$ ifadeleri ise sırasıyla (2.15) ve (2.16) eşitlikleri ile verilen $H\left(\underline{\theta}\right)$ ve $H^{*}\left(\underline{\theta}\right)$'yı maksimum yapan değerlerdir.

2.3. Alfa Logaritmik Üstel Dağılım

Alfa logaritmik üstel (ALT-Exp) dağlım ilk olarak (Karakaya ve ark., 2017) tarafından önerilirmiştir. Burada ALT dağlım ailesi, F_0 bilinen herhangi bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$F(x)=\frac{\log(1+\alpha F_{o}(x))}{\log(1+\alpha)},\alpha>-1 \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Özel olarak $F_0(x)$ olarak β ortalamalı üstel dağılımın dağılım fonksiyonu alınırsa yani

$$F_{0}(x)=1-e^{-x/\beta},x>0,\beta>0 \tag{2.20}$$

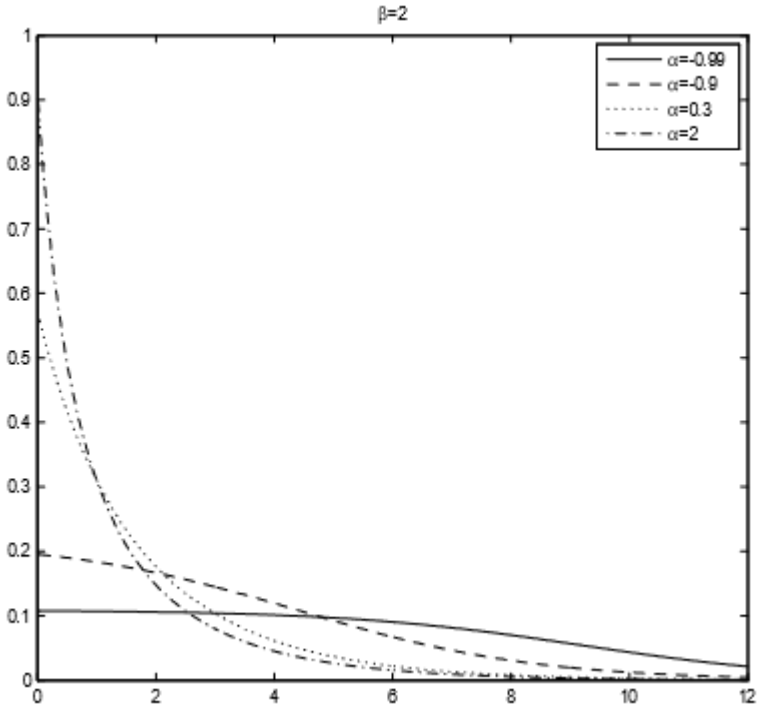
olarak alınırsa α ve β parametreli ALT-Exp dağılımı elde edilir. Elde edilen bu dağılıma ilişkin dağılım fonksiyonu,

$$F(x)=\frac{\log\left(1+\alpha\left(1-e^{-\frac{x}{\beta}}\right)\right)}{\log(1+\alpha)},\alpha>-1 \tag{2.21}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f\left(x;\alpha,\beta\right)=\frac{\alpha\exp\left(-x\,|\,\beta\right)}{\beta\log\left(1+\alpha\right)\left(1+\alpha\left(1-\exp\left(-x\,|\,\beta\right)\right)\right)},\ x>0 \tag{2.22}$$

olarak elde edilmektedir (Karakaya ve ark., 2017).



Şekil 2.2. ALT-Exp dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

3. ALT-EXP DAĞILIMI İÇİN PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde α ve β parametreli ALT-Exp dağılımı ($ALT-Exp(\alpha,\beta)$)'nın bilinmeyen parametrelerinin tam, tip-I sansürlü, tip-II sansürlü ve ilerleyen tür tip-II sansürlü örneklemlere dayalı en çok olabilirlik ve Bayes tahminleri incelenmiştir.

3.1. Tip-I sağdan sansürlü örnekleme dayalı parametre tahmini

3.1.1. En çok olabilirlik tahmini

$X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{k:n}$ ALT (α ve β) dağılımından alınan Tip-I sansürlü örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_k) = \frac{n!}{(n-k)!}\left[\prod_{i=1}^{k} f(x_i \mid \alpha,\beta)\right]\left(1-F(t \mid \alpha,\beta)\right)^{n-k}, 0 < x_1 < \cdots < x_k < t$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}\frac{\alpha^k e^{-\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\beta}}}{\beta^k \left(\log(1+k)\right)^k \prod_{i=1}^{k}(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}}))} \times \left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{t}{\beta}}))}{\log(1+\alpha)}\right)^{n-k} \quad (3.1)$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_k) = \log\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right) + k\log\alpha - k\log\beta - k\log(\log(1+\alpha)) - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\beta} - \sum_{i=1}^{k}\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}})) + (n-k)\log\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{t}{\beta}}))}{\log(1+\alpha)}\right) \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilmektedir. Buradan olabilirlik denklemleri

$$\frac{\partial \ell(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_k)}{\partial \alpha} = \frac{k}{\alpha} - \frac{k}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)} - \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)}\right]$$

$$+ \frac{(n-k)\left(-\dfrac{1-e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}}{\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}\right)\right)\ln(1+\alpha)}\right) + \dfrac{\ln\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+\alpha)^2(1+\alpha)}}{1-\dfrac{\ln\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+\alpha)}} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_k)}{\partial \beta} = -\frac{k}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\beta^2} - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a x_i e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{\beta^2\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)}\right)\right)$$

$$+ \frac{(n-k)\alpha t e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}}{\beta^2\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}\right)\right)\ln(1+\alpha)\left(1-\dfrac{\ln\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+a)}\right)} = 0 \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.3) ve Eşitlik (3.4) ile verilen olabilirlik denklemlerinin çözümünden α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ elde edilebilir. Bu denklemlerin α ve β'ya göre analitik çözümleri mevcut değildir. Bu sebeple Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak denklemlerin yaklaşık çözümü elde edilebilir.

3.1.2. Bayes tahmini

Bu alanda $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının α ve β parametrelerinin Bayes tahmini incelenmiştir. $\underline{X}=(X_{1:n},X_{2:n},\ldots,X_{k:n})$ $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımından elde edilen tip-I sansürlü örneklem olsun. Ayrıca $\underline{X}$ örneklemi ile α ve β'nın bağımsız oldukları, α ve β'nın önsel dağılımlarına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ise

$$\pi_1(\alpha)=\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}(1+\alpha)^{a_1-1}e^{-b_1(1+\alpha)},\alpha>-1,a_1,b_1>0 \tag{3.5}$$

$$\pi_2(\beta)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta},\beta>0,a_2,b_2>0 \tag{3.6}$$

şeklinde oldukları kabul edilsin. Bu eşitliklerden α ve β'nın ortak önsel dağlımı

$$\begin{aligned}\pi(\alpha,\beta)&=\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)\\&=\frac{b_1^{a1}b_2^{a2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}(1+\alpha)^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1(1+\alpha)}e^{-b_2\beta},\alpha>-1,\beta>0\end{aligned} \tag{3.7}$$

ve $\underline{X},\alpha$ ve β'nın ortak dağlımı ise

$$\begin{aligned}g(\underline{x},\alpha,\beta)&=L(\alpha,\beta\mid\underline{x})\pi(\alpha,\beta)\\&=\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\alpha^k e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{k}x_i}}{\beta^k\left(\log(1+k)\right)^k\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}}))}\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{t}{\beta}}))}{\log(1+\alpha)}\right)^{n-k}\\&\times\frac{b_1^{a1}b_2^{a2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}(1+\alpha)^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1(1+\alpha)}e^{-b_2\beta}\end{aligned} \tag{3.8}$$

gibi ifade edilir. Eşitlik (3.8)'den faydalanarak karesel kayıp fonksiyonu altında α ve β parametrelerinin Bayes tahminleri,

$$\breve{\alpha}=\frac{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\alpha g(\underline{X},\alpha,\beta)d\beta d\alpha}{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}g(\underline{X},\alpha,\beta)d\beta d\alpha} \tag{3.9}$$

$$\breve{\beta}=\frac{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\beta g(\underline{X},\alpha,\beta)d\beta d\alpha}{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}g(\underline{X},\alpha,\beta)d\beta d\alpha} \tag{3.10}$$

olarak elde edilir. Burada $g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right)$'nın eşitlik (3.8)'deki gibi olduğu düşünüldüğünde (3.9) ve (3.10) eşitlikleri ile verilen tahmin edicilerin analitik olarak çözümlenemeyeceği gözlenmektedir. Bu nedenle Tierney-Kadane yöntemi ile α ve β parametrelerinin yaklaşık Bayes tahminlerine yaklaşılmaya çalışılmıştır. Tierney-Kadane yönteminde

$$
\begin{aligned}
H &= \log\pi\left(\alpha,\beta\right)+\frac{1}{k}\ell\left(\alpha,\beta\,|\,\underline{x}\right)\\
&= \log\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)+k\log\alpha-k\log\beta-k\log(\log(1+\alpha))\\
&\quad -\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{\beta}\sum_{i=1}^{k}\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}}))+(n-k)\log\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{t}{\beta}}))}{\log(1+\alpha)}\right)\\
&\quad +a_1\log b_1+a_2\log b_2-\log(a_1)-\log(a_1)+(a_1-1)\log(1+\alpha)\\
&\quad +(a_2-1)\log\beta-b_1(1+\alpha)-b_2\beta
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

ve

$$H_1^{*} = H+\frac{1}{k}\log\alpha \tag{3.12}$$

$$H_2^{*} = H+\frac{1}{k}\log\beta \tag{3.13}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\pi\left(\alpha,\beta\right)$ eşitlik (3.7)'de ve $\ell\left(\alpha,\beta\,|\,\underline{x}\right)$ eşitlik (3.2)'de gösterildiği gibidir. H 'nin maksimizasyonundan bulunan değerler $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$, H_1^{*}'ın maksimizasyonundan bulunan değerler $\tilde{\alpha}_1^{*}$ ve $\tilde{\beta}_1^{*}$ ve H_2^{*}'ın maksimizasyonundan bulunan değerler ise $\tilde{\alpha}_2^{*}$ ve $\tilde{\beta}_2^{*}$ ile ifade edilmek üzere Tierney-Kadane yöntemine göre α ve β parametrelerinin yaklaşık Bayes tahminleri $\breve{\alpha}$ ve $\breve{\beta}$

$$\breve{\alpha} = E\left(\alpha\,|\,\underline{x}\right)=\left(\frac{\det\sum_1^{*}}{\det\sum}\right)^{1/2}e^{k\left(H_1^{*}\left(\tilde{\alpha}_1^{*},\tilde{\beta}_1^{*}\right)-H\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\right)\right)} \tag{3.14}$$

$$\breve{\beta} = E\left(\beta\,|\,\underline{x}\right)=\left(\frac{\det\sum_2^{*}}{\det\sum}\right)^{1/2}e^{k\left(H_2^{*}\left(\tilde{\alpha}_2^{*},\tilde{\beta}_2^{*}\right)-H\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\right)\right)} \tag{3.15}$$

şeklinde elde edilebilmektedir. Burada

$$\sum = \left(\sigma_{iJ}\right) = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha} \\ \beta=\tilde{\beta}}}$$

$$\sum_1^* = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \beta^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}_1^* \\ \beta=\tilde{\beta}_1^*}}$$

$$\sum_2^* = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \beta^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}_2^* \\ \beta=\tilde{\beta}_2^*}}$$

şeklinde ifade edildiği gibidirler.

3.2. Tip-II Sansürlü Örnekleme Dayalı Parametre Tahmini

3.2.1. En çok olabilirlik tahmini

Dayanma süresi X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta)$ ve n birimlik örnek için ilk $m(m \le n, rsabit)$ tanesinin bozulma zamanları $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{m:n}$ olmak üzere olabilirlik fonksiyonu;

$$L\left(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_m\right) = \frac{n!}{(n-m)!}\left[\prod_{i=1}^{m} f(x_i/\alpha,\beta)\right]\left(1-F(x_{m:n};\alpha,\beta\right)^{n-m}, 0 < x_1 < \ldots < x_m$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\frac{\alpha^m e^{-\frac{\sum x_i}{\beta}}}{\beta^m\left(\log\left(1+\alpha\right)\right)^m \prod_{i=1}^{m}(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}}))}\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_m}{\beta}})}{\log(1+\alpha)}\right)^{n-m} \tag{3.16}$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_m)=\log\left(\frac{n!}{(n-m)!}\right)+m\log\alpha-m\log\beta-m\log(\log(1+\alpha))$$
$$-\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{\beta}-\sum_{i=1}^{m}\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}}))+(n-m)\log\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_m}{\beta}}))}{\log(1+\alpha)}\right) \tag{3.17}$$

şeklinde elde edilmektedir. Buradan olabilirlik denklemleri,

$$\frac{\partial\ell(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_m)}{\partial\alpha}=\frac{m}{\alpha}-\frac{m}{1+\alpha\ln(1+\alpha)}-\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)}\right)$$
$$+\frac{(n-m)\left(-\frac{1-e^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}}{\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}\right)\right)\ln(1+\alpha)}+\frac{\ln\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+a)^2(1+a)}\right)}{1-\frac{\ln\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+\alpha)}}=0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\ell(\alpha,\beta \mid x_1,\ldots,x_m)}{\partial\beta}=-\frac{m}{\beta}-\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{\beta^2}-\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{ax_ie^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{\beta^2\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)}\right)\right)$$
$$+\frac{(n-m)ax_me^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}}{\beta^2\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}\right)\right)\ln(1+a)\left(1-\frac{\ln\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_m}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+\alpha)}\right)}=0 \tag{3.19}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.18) ve Eşitlik (3.19) ile verilen olabilirlik denklemlerinin çözümünden α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ elde edilebilir. Bu denklemlerin α ve β'ya göre analitik çözümleri mevcut değildir. Bu

sebeple Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak denklemlerin yaklaşık çözümü elde edilebilir.

3.2.2. Bayes tahmini

Bu alanda $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının α ve β parametrelerinin Bayes tahmini incelenmiştir. $\underline{X}=(X_{1:n},X_{2:n},\ldots,X_{m:n})$ $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımından alınan tip-II sansürlü örneklem olsun. Ayrıca $\underline{X}$ örneklemi ile α ve β'nın bağımsız oldukları, α ve β'nın önsel dağılımlarına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ise

$$\pi_1(\alpha)=\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}(1+\alpha)^{a_1-1}e^{-b_1(1+\alpha)},\alpha>-1,a_1,b_1>0 \tag{3.20}$$

$$\pi_2(\beta)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta},\beta>0,a_2,b_2>0 \tag{3.21}$$

şeklinde oldukları kabul edilsin. Bu eşitliklerden faydalanarak α ve β'nın ortak önsel dağlımı

$$\pi(\alpha,\beta)=\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)$$

$$=\frac{b_1^{a1}b_2^{a2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}(1+\alpha)^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1(1+\alpha)}e^{-b_2\beta},\alpha>-1,\beta>0 \tag{3.22}$$

ve $\underline{X},\alpha$ ve β'nın ortak dağlımı ise

$$g(\underline{x},\alpha,\beta)=L(\alpha,\beta\mid\underline{x})\pi(\alpha,\beta)$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}\frac{\alpha^m e^{-\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{\beta}}}{\beta^m\left(\log(1+\alpha)\right)^m\prod_{i=1}^{m}(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}}))}\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_m}{\beta}})}{\log(1+\alpha)}\right)^{n-m}$$

$$\times\frac{b_1^{a1}b_2^{a2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}(1+\alpha)^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1(1+\alpha)}e^{-b_2\beta} \tag{3.23}$$

gibi ifade edilebilir. Buradan karesel kayıp fonksiyonu altında α ve β parametrelerinin Bayes tahminleri

$$\breve{\alpha} = \frac{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \alpha g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right) d\beta d\alpha}{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right) d\beta d\alpha} \tag{3.24}$$

$$\breve{\beta} = \frac{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \beta g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right) d\beta d\alpha}{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right) d\beta d\alpha} \tag{3.25}$$

eşitliklerindeki gibi elde edilir. Burada $g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right)$'nın eşitlik (3.23)'deki gibi olduğu düşünülürse (3.24) ve (3.25) eşitlikleri ile elde edilen tahmin edicilerin analitik olarak çözümlenmeyeceği görülmektedir. Bu nedenle Tierney-Kadane yöntemi ile α ve β parametrelerinin yaklaşık Bayes tahminleri elde edilmeye çalışılmıştır. Tierney-Kadane yönteminde

$$\begin{aligned} H &= \log \pi\left(\alpha,\beta\right) + \frac{1}{m}\ell\left(\alpha,\beta \mid \underline{x}\right) \\ &= \log\left(\frac{n!}{(n-m)!}\right) + m\log\alpha - m\log\beta - m\log(\log(1+\alpha)) \\ &\quad - \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{\beta} - \sum_{i=1}^{m}\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_i}{\beta}})) + (n-m)\log\left(1 - \frac{\log(1+\alpha(1-e^{-\frac{x_m}{\beta}}))}{\log(1+\alpha)}\right) \\ &\quad + a_1\log b_1 + a_2\log b_2 - \log(a_1) - \log(a_1) \\ &\quad + (a_1-1)\log(1+\alpha) + (a_2-1)\log\beta - b_1(1+\alpha) - b_2\beta \end{aligned} \tag{3.26}$$

ve

$$H_1^* = H + \frac{1}{m}\log\alpha \tag{3.27}$$

$$H_2^* = H + \frac{1}{m}\log\beta \tag{3.28}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\pi\left(\alpha,\beta\right)$ eşitlik (3.22)'de ve $\ell\left(\alpha,\beta \mid \underline{x}\right)$ eşitlik (3.17)'de gösterildiği gibidir. H 'nin maksimizasyonundan bulunan değerler $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$, H_1^*'ın maksimizasyonundan bulunan değerler $\tilde{\alpha}_1^*$ ve $\tilde{\beta}_1^*$ ve H_2^*'ın maksimizasyonundan bulunan değerler ise $\tilde{\alpha}_2^*$ ve $\tilde{\beta}_2^*$ ile ifade edilmek üzere Tierney-Kadane yöntemine göre α ve β parametrelerinin yaklaşık Bayes tahminleri $\breve{\alpha}$ ve $\breve{\beta}$

$$\breve{\alpha} = E\left(\alpha \mid \underline{x}\right) = \left(\frac{\det \sum_1^*}{\det \sum}\right)^{1/2} e^{k\left(H_1^*\left(\tilde{\alpha}_1^*, \tilde{\beta}_1^*\right) - H\left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right)\right)} \tag{3.29}$$

$$\breve{\beta} = E\left(\beta \mid \underline{x}\right) = \left(\frac{\det \sum_2^*}{\det \sum}\right)^{1/2} e^{k\left(H_2^*\left(\tilde{\alpha}_2^*, \tilde{\beta}_2^*\right) - H\left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right)\right)} \tag{3.30}$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. Burada

$$\sum = \left(\sigma_{iJ}\right) = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha} \\ \beta=\tilde{\beta}}}$$

$$\sum_1^* = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \beta^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}_1^* \\ \beta=\tilde{\beta}_1^*}}$$

$$\sum_2^* = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \beta^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}_2^* \\ \beta=\tilde{\beta}_2^*}}$$

şeklinde ifade edildiği gibidirler.

3.3. İlerleyen Tür Sansürlü Örnekleme Dayalı Parametre Tahmini

3.3.1. En çok olabilirlik tahmini

$X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \ldots, X_{m:m:n}$ ilerleyen tür Tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere olabilirlik fonksiyonu,

$$L\left(\alpha, \beta \mid x_1, \ldots, x_m\right) = c\prod_{i=1}^{m} \frac{\alpha e^{-x_i/\beta}}{\beta \log(1+\alpha)(1+\alpha(1-\exp(-x_i/\beta)}\left(1 - \frac{\log(1+\alpha(1-e^{-x_i/\beta}))}{\log(1+\alpha)}\right)^{r_i} \tag{3.31}$$

ve log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\alpha, \beta \mid x_1, \ldots, x_m) = \log c + m\log\alpha - \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{\beta} - m\log(\beta) - m\log(\log(1+a))$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\log(1+\alpha(1-e^{-x_i/\beta}))+\sum_{i=1}^{m}r_i\log\left(1-\frac{\log(1+a(1-e^{-x_i/\beta}))}{\log(1+\alpha)}\right) \qquad (3.32)$$

şeklinde elde edilebilir. Buradan olabilirlik denklemleri ise

$$\frac{\partial\ell(\alpha,\beta\,|\,x_1,\ldots,x_n)}{\partial\alpha}=\frac{m}{\alpha}-\frac{m}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}-\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{1+a\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{r_i\left(-\frac{1-e^{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}}{\left(1+\alpha\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)\ln(1+a)}+\frac{\ln\left(1+a\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+\alpha)^2(1+\alpha)}\right)}{1-\frac{\ln\left(1+a\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+\alpha)}}\right)=0 \qquad (3.33)$$

$$\frac{\partial\ell(\alpha,\beta\,|\,x_1,\ldots,x_n)}{\partial\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{\beta^2}-\frac{m}{\beta}-\left(\sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{ax_ie^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{\beta^2\left(1+a\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)}\right)\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{r_iax_ie^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}}{\beta^2\left(1+a\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)\ln(1+\alpha)\left(1-\frac{\ln\left(1+a\left(1-e^{\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)}\right)\right)}{\ln(1+a)}\right)}\right)=0 \qquad (3.34)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (3.33) ve Eşitlik (3.34) ile verilen olabilirlik denklemlerinin çözümünden α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ elde edilebilir. Bu denklemlerin α ve β'ya göre analitik çözümleri mevcut değildir. Bu

sebeple Newton-Raphson gibi nümerik yöntemler kullanılarak denklemlerin yaklaşık çözümü elde edilebilir.

3.3.2. Bayes tahmini

Bu alanda $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının α ve β parametrelerinin ilerleyen tür sansürlü örnekleme dayalı Bayes tahmini incelenmiştir. $\underline{X}=(X_{1:m:n},X_{2:m:n},\ldots,X_{m:m:n})$ $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımından alınan ilerleyen tür sansürlü örneklem olsun. Ayrıca $\underline{X}$ örneklemi ile α ve β'nın bağımsız oldukları, α ve β'nın önsel dağılımlarına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ise

$$\pi_1(\alpha)=\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}(1+\alpha)^{a_1-1}e^{-b_1(1+\alpha)},\alpha>-1,a_1,b_1>0$$

(3.35)

$$\pi_2(\beta)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta},\beta>0,a_2,b_2>0 \tag{3.36}$$

şeklinde oldukları kabul edilsin. Bu denkliklerde α ve β'nın ortak önsel dağlımı ise

$$\pi(\alpha,\beta)=\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)$$

$$=\frac{b_1^{a1}b_2^{a2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}(1+\alpha)^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1(1+\alpha)}e^{-b_2\beta},\alpha>-1,\beta>0 \tag{3.37}$$

ve $\underline{X},\alpha$ ve β'nın ortak dağlımı ise

$$g(\underline{x},\alpha,\beta)=L(\alpha,\beta\mid\underline{x})\pi(\alpha,\beta)$$

$$=c\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha e^{-x_i/\beta}}{\beta\log(1+\alpha)(1+\alpha(1-\exp(-x_i/\beta)}\left(1-\frac{\log(1+\alpha(1-e^{-x_i/\beta}))}{\log(1+\alpha)}\right)^{r_i}$$

$$\times\frac{b_1^{a1}b_2^{a2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}(1+\alpha)^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1(1+\alpha)}e^{-b_2\beta} \tag{3.38}$$

denkliğindeki gibi ifade edilir. Buradan karesel kayıp fonksiyonu durumunda α ve β parametrelerinin Bayes tahminleri dizisi

$$\breve{\alpha}=\frac{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\alpha g(\underline{X},\alpha,\beta)d\beta d\alpha}{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}g(\underline{X},\alpha,\beta)d\beta d\alpha} \tag{3.39}$$

$$\breve{\beta} = \frac{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \beta g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right) d\beta d\alpha}{\int_{-1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right) d\beta d\alpha} \tag{3.40}$$

eşitliklerindeki gibi elde edilir. Burada $g\left(\underline{X},\alpha,\beta\right)$'nın eşitlik (3.38)'deki gibi olduğu düşünülürse (3.39) ve (3.40) eşitlikleri ile elde edilen tahmin edicilerin analitik olarak çözümlenmeyeceği görülmektedir. Bu nedenle Tierney-Kadane yöntemi ile α ve β parametrelerinin yaklaşık Bayes tahminleri elde edilmeye çalışılmıştır. Tierney-Kadane yönteminde

$$\begin{aligned} H &= \log \pi\left(\alpha,\beta\right) + \frac{1}{k}\ell\left(\alpha,\beta \mid \underline{x}\right) \\ &= \log c + k\log\alpha - \frac{\sum x_i}{\beta} - k\log(\beta) - k\log(\log(1+a)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k}(1+\alpha(1-e^{-x_i/\beta})) + \sum_{i=1}^{k} r_i \log\left(\frac{\log(1+a(1-e^{-x_i/\beta}))}{\log(1+\alpha)}\right) \\ &\quad + a_1\log b_1 + a_2\log b_2 - \log(a_1) - \log(a_1) \\ &\quad + (a_1-1)\log(1+\alpha) + (a_2-1)\log\beta - b_1(1+\alpha) - b_2\beta \end{aligned} \tag{3.41}$$

ve

$$H_1^* = H + \frac{1}{m}\log\alpha \tag{3.42}$$

$$H_2^* = H + \frac{1}{m}\log\beta \tag{3.43}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\pi\left(\alpha,\beta\right)$ eşitlik (3.37)'de ve $\ell\left(\alpha,\beta \mid \underline{x}\right)$ eşitlik (3.32)'de gösterildiği gibidir. H 'nin maksimizasyonundan bulunan değerler $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$, H_1^*'ın maksimizasyonundan bulunan değerler $\tilde{\alpha}_1^*$ ve $\tilde{\beta}_1^*$ ve H_2^*'ın maksimizasyonundan bulunan değerler ise $\tilde{\alpha}_2^*$ ve $\tilde{\beta}_2^*$ ile ifade edilmek üzere Tierney-Kadane yöntemine göre α ve β parametrelerinin yaklaşık Bayes tahminleri $\breve{\alpha}$ ve $\breve{\beta}$

$$\breve{\alpha} = E\left(\alpha \mid \underline{x}\right) = \left(\frac{\det\sum_1^*}{\det\sum}\right)^{1/2} e^{k\left(H_1^*\left(\tilde{\alpha}_1^*,\tilde{\beta}_1^*\right) - H\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\right)\right)} \tag{3.44}$$

$$\breve{\beta} = E\left(\beta \mid \underline{x}\right) = \left(\frac{\det\sum_2^*}{\det\sum}\right)^{1/2} e^{k\left(H_2^*\left(\tilde{\alpha}_2^*,\tilde{\beta}_2^*\right) - H\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\right)\right)} \tag{3.45}$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir. Burada

$$\sum = \left(\sigma_{iJ}\right) = -\left[\begin{matrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} \end{matrix}\right]_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha} \\ \beta=\tilde{\beta}}}$$

$$\sum_1^* = -\left[\begin{matrix} \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial \beta^2} \end{matrix}\right]_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}_1^* \\ \beta=\tilde{\beta}_1^*}}$$

$$\sum_2^* = -\left[\begin{matrix} \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial \beta^2} \end{matrix}\right]_{\substack{\alpha=\tilde{\alpha}_2^* \\ \beta=\tilde{\beta}_2^*}}$$

şeklinde ifade edildiği gibidirler.

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Burada $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımına sahip bir kitleden alınan tam, Tip-II ve ilerleyen tür sansürlü örneklemlere dayalı olarak kitle parametrelerinin en çok olabilirlik ve Bayes Tahmin edicileri ve bu parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerine dayalı 0.05 anlam seviyeli asimptotik güven aralıkları incelenmiştir. Tip-I sansürleme ve Tip-II sansürleme birbirlerine çok benzer olduğundan ve Tip-I sansürleme daha nadir kullanıldığından simülasyonlarda Tip-I sansürlemeye yer verilmemiştir. Tam ve Tip-II sansürlü örneklemler, ilerleyen tür sansürlü örneklemlerin özel halleri olduğu için bu üç örneklem tipine ilişkin simülasyon çalışması tek başlık altında incelenmiştir. Bu tahmin edicilerin performansları 5000 tekrar ile yapılan simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlara göre tartışılmıştır. Simülasyon çalışmasında tüm örneklem tiplerinde farklı örnek hacimleri ve kitle parametreleri ele alınmıştır. Ele alınan durumlar

- $n=30,50,100,500$
- $(\alpha,\beta)=(1,1),(3,1),(10,1)$
- Bayes Tahmini için prior parametreleri $(a_1,b_1,a_2,b_2)=(1,1,1,1),(3,1,1,1),(10,1,1,1)$

şeklinde özetlenebilir.

$ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının α ve β parametrelerinin ilerleyen tür sansürlü örnekleme dayalı tahminine ilişkin simülasyonlar çeşitli m değerlerine ilişkin $R=(r,r,\ldots,r),(n-m,0,\ldots,0),(0,\ldots,0,n-m),(0,0,\ldots,0)$ tipindeki şemalar için yapılmıştır. Burada $R=(0,0,\ldots,0)$ şeklindeki şemalar tam örneklem durumuna, $R=(0,0,\ldots,n-m)$ şeklindeki şemalar ise Tip-II sansürlü örneklem durumuna karşılık gelmektedir. α ve β parametrelerinin iki farklı değeri için parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerine ilişkin ortalama yan ($\overline{Yan}$) ve ortalama MSE ($\overline{MSE}$) değerleri Çizelge 4.1, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.5'de, asimptotik güven aralıklarının kitle parametrelerini kapsama olasılıkları ve bu aralıkların ortalama genişlikleri Çizelge 4.2, Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4.1. $\alpha = 1, \beta = 1$ için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin ortalama yan ve MSE değerleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	$\overline{Yan}(\hat{\alpha})$	$\overline{MSE}(\hat{\alpha})$	$\overline{Yan}(\hat{\beta})$	$\overline{MSE}(\hat{\beta})$
30	10	(2,2,...,2)	3.7687	162.4791	0.0298	1.4031
	10	(20,0,...,0)	2.7073	98.3393	-0.0500	0.3633
	10	(0,0,...,20)	4.2595	361.5099	0.0623	3.0703
	15	(1,1,...,1)	2.2548	75.8525	-0.0373	0.5844
	15	(15,0,...,0)	1.6819	46.4000	-0.0571	0.2583
	15	(0,0,...,15)	3.4407	134.5838	0.0062	1.2492
	30	(0,0,...,0)	0.7166	13.8719	-0.0516	0.1328
50	10	(4,4,...,4)	3.9185	259.2212	0.0371	2.5423
	10	(40,0,...,0)	2.8278	105.7362	-0.0423	0.3712
	10	(0,0,...,40)	4.2215	490.1293	0.1377	4.5955
	25	(1,1,...,1)	1.3077	35.4887	-0.0516	0.3722
	25	(25,0,...,0)	0.8893	18.5888	-0.0486	0.1627
	25	(0,0,...,25)	2.9044	104.6082	0.0378	1.0164
	50	(0,0,...,0)	0.4132	6.4830	-0.0331	0.0821
100	50	(2,2,...,2)	0.8675	16.9684	-0.0121	0.3460
	50	(50,0,...,0)	0.4625	6.4955	-0.0219	0.0826
	50	(0,0,...,50)	1.9031	57.3900	0.0437	0.6189
	80	(20,0,...,0)	0.2369	3.1405	-0.0178	0.0504
	100	(0,0,...,0)	0.2243	2.2940	-0.0101	0.0415
500	100	(400,0,...,0)	0.2304	2.2512	-0.0102	0.0416
	300	(200,0,...,0)	0.0778	0.6248	-0.0031	0.0138
	500	(0,0,...,0)	0.0332	0.3552	-0.0028	0.0082

Çizelge 4.2. $\alpha = 1, \beta = 1$ için asimptotik güven aralıklarının kapsama olasılıkları ve ortalama genişlikleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	α		β	
			Kapsama Olasılığı	Ortalama Genişlik	Kapsama Olasılığı	Ortalama Genişlik
30	10	(2,2,…,2)	0.58	50.3260	0.62	5.0420
	10	(20,0,…,0)	0.71	31.3916	0.80	2.4782
	10	(0,0,…,20)	0.41	68.1799	0.45	7.5427
	15	(1,1,…,1)	0.69	29.0424	0.76	3.0763
	15	(15,0,…,0)	0.73	21.5988	0.82	1.9926
	15	(0,0,…,15)	0.58	45.7483	0.64	4.7333
	30	(0,0,…,0)	0.78	11.9658	0.86	1.3967
50	10	(4,4,…,4)	0.44	59.8601	0.46	6.7006
	10	(40,0,…,0)	0.72	31.8869	0.80	2.5192
	10	(0,0,…,40)	0.36	85.0449	0.41	10.9884
	25	(1,1,…,1)	0.72	18.3739	0.81	2.3473
	25	(25,0,…,0)	0.76	13.5998	0.85	1.5457
	25	(0,0,…,25)	0.66	34.5490	0.74	3.9756
	50	(0,0,…,0)	0.82	8.3662	0.88	1.0938
100	50	(2,2,…,2)	0.77	13.7933	0.84	2.2741
	50	(50,0,…,0)	0.83	8.4316	0.90	1.1087
	50	(0,0,…,50)	0.75	21.6731	0.85	2.9565
	80	(20,0,…,0)	0.86	6.1808	0.92	0.8739
	100	(0,0,…,0)	0.87	5.5092	0.92	0.7861
500	100	(400,0,…,0)	0.87	5.4630	0.92	0.7860
	300	(200,0,…,0)	0.92	2.9927	0.94	0.4547
	500	(0,0,…,0)	0.93	2.2790	0.94	0.3521

Çizelge 4.3. $\alpha = 3, \beta = 1$ için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin ortalama yan ve MSE değerleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	$\overline{Yan}(\hat{\alpha})$	$\overline{MSE}(\hat{\alpha})$	$\overline{Yan}(\hat{\beta})$	$\overline{MSE}(\hat{\beta})$
30	10	(2,2,…,2)	3.6790	230.6693	-0.0838	1.0424
	10	(20,0,…,0)	3.0886	136.8868	-0.0794	0.3386
	10	(0,0,…,20)	3.6762	880.3635	-0.0945	2.8933
	15	(1,1,…,1)	2.6463	133.5749	-0.0699	0.5164
	15	(15,0,…,0)	2.2935	105.4657	-0.0707	0.2566
	15	(0,0,…,15)	3.6285	196.3181	-0.0683	0.9570
	30	(0,0,…,0)	2.4776	100.4804	-0.0592	0.2554
50	10	(4,4,…,4)	3.1667	254.1366	-0.1343	1.4755
	10	(40,0,…,0)	3.2916	162.7336	-0.0817	0.3581
	10	(0,0,…,40)	2.5309	232.8607	-0.1190	2.1216
	25	(1,1,…,1)	1.7365	71.0570	-0.0533	0.3685
	25	(25,0,…,0)	1.6145	57.1889	-0.0411	0.1692
	25	(0,0,…,25)	3.7747	189.2035	0.0176	0.8207
	50	(0,0,…,0)	0.6952	21.2857	-0.0306	0.0850
100	50	(1,1,…,1)	0.9723	32.1587	-0.0270	0.1889
	50	(50,0,…,0)	0.8423	22.4544	-0.0227	0.0857
	50	(0,0,…,50)	2.2973	85.2362	0.0243	0.4995
	80	(20,0,…,0)	0.4353	10.5146	-0.0159	0.0523
	100	(0,0,…,0)	0.4176	8.0282	-0.0088	0.0405
500	100	(400,0,…,0)	0.3530	8.0337	-0.0117	0.0418
	300	(200,0,…,0)	0.1468	2.2539	-0.0024	0.0139
	500	(0,0,…,0)	0.0874	1.2303	-0.0016	0.0083

Çizelge 4.4. $\alpha = 3, \beta = 1$ için asimptotik güven aralıklarının kapsama olasılıkları ve ortalama genişlikleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	α		β	
			Kapsama Olasılığı	Ortalama Genişlik	Kapsama Olasılığı	Ortalama Genişlik
30	10	(2,2,…,2)	0.58	63.0094	0.64	4.4162
	10	(20,0,…,0)	0.71	44.7889	0.80	2.4034
	10	(0,0,…,20)	0.45	82.8975	0.49	6.3624
	15	(1,1,…,1)	0.68	42.8592	0.77	2.9690
	15	(15,0,…,0)	0.73	34.6691	0.81	1.9775
	15	(0,0,…,15)	0.59	60.0125	0.68	4.2363
	30	(0,0,…,0)	0.74	36.4295	0.82	1.9776
50	10	(4,4,…,4)	0.47	68.9039	0.49	5.4100
	10	(40,0,…,0)	0.70	45.5015	0.78	2.4172
	10	(0,0,…,40)	0.40	95.5530	0.43	8.8406
	25	(1,1,…,1)	0.73	30.3346	0.80	2.3450
	25	(25,0,…,0)	0.78	25.2354	0.85	1.5732
	25	(0,0,…,25)	0.69	52.0333	0.78	3.7925
	50	(0,0,…,0)	0.82	15.4867	0.89	1.1091
100	50	(2,2,…,2)	0.80	19.1952	0.86	1.6836
	50	(50,0,…,0)	0.83	15.7820	0.89	1.1204
	50	(0,0,…,50)	0.76	33.3454	0.86	2.8280
	80	(20,0,…,0)	0.87	11.6057	0.91	0.8871
	100	(0,0,…,0)	0.88	10.3749	0.93	0.7979
500	100	(400,0,…,0)	0.88	10.1003	0.92	0.7955
	300	(200,0,…,0)	0.92	5.6378	0.94	0.4619
	500	(0,0,…,0)	0.94	4.3173	0.94	0.3578

Çizelge 4.5. $\alpha = 10, \beta = 1$ için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin ortalama yan ve MSE değerleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	$\overline{Yan}(\hat{\alpha})$	$\overline{MSE}(\hat{\alpha})$	$\overline{Yan}(\hat{\beta})$	$\overline{MSE}(\hat{\beta})$
30	10	(2,2,…,2)	1.6857	370.8505	-0.1845	0.6895
	10	(20,0,…,0)	2.4651	342.6478	-0.1365	0.3339
	10	(0,0,…,20)	-0.6231	340.5676	-0.3031	0.9565
	15	(1,1,…,1)	1.9975	286.7538	-0.1182	0.4315
	15	(15,0,…,0)	2.7859	283.3928	-0.0910	0.2475
	15	(0,0,…,15)	1.8378	345.6107	-0.1696	0.6866
	30	(0,0,…,0)	1.8422	164.0819	-0.0489	0.1336
50	10	(4,4,…,4)	0.1779	352.2914	-0.2601	0.9399
	10	(40,0,…,0)	2.9015	345.7204	-0.1328	0.3230
	10	(0,0,…,40)	-1.1164	291.8578	-0.2929	1.1587
	25	(1,1,…,1)	2.2526	223.2212	-0.0571	0.3056
	25	(25,0,…,0)	2.3543	204.5876	-0.0586	0.1581
	25	(0,0,…,25)	2.6261	314.2015	-0.0890	0.5047
	50	(0,0,…,0)	1.7044	118.6959	-0.0236	0.0873
100	50	(1,1,…,1)	1.7337	138.6270	-0.0205	0.1877
	50	(50,0,…,0)	1.8644	114.9543	-0.0190	0.0883
	50	(0,0,…,50)	2.5964	247.6245	-0.0310	0.3609
	80	(20,0,…,0)	1.1401	66.2054	-0.0132	0.0546
	100	(0,0,…,0)	0.8980	51.5190	-0.0100	0.0442
500	100	(400,0,…,0)	0.9943	51.7248	-0.0105	0.0443
	300	(200,0,…,0)	0.2904	14.0565	-0.0005	0.0149
	500	(0,0,…,0)	0.1831	8.6926	-0.0012	0.0090

Çizelge 4.6. $\alpha = 10, \beta = 1$ için asimptotik güven aralıklarının kapsama olasılıkları ve ortalama genişlikleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	α		β	
			Kapsama Olasılığı	Ortalama Genişlik	Kapsama Olasılığı	Ortalama Genişlik
30	10	(2,2,…,2)	0.61	95.9132	0.67	3.7646
	10	(20,0,…,0)	0.70	77.8823	0.76	2.2398
	10	(0,0,…,20)	0.50	113.1652	0.55	4.9766
	15	(1,1,…,1)	0.69	76.5350	0.76	2.7565
	15	(15,0,…,0)	0.74	70.0833	0.80	1.9380
	15	(0,0,…,15)	0.62	94.5803	0.70	3.6416
	30	(0,0,…,0)	0.80	50.6294	0.86	1.4386
50	10	(4,4,…,4)	0.51	101.3405	0.55	4.4569
	10	(40,0,…,0)	0.70	79.4326	0.76	2.2630
	10	(0,0,…,40)	0.43	154.6082	0.46	7.6981
	25	(1,1,…,1)	0.75	64.1741	0.81	2.3243
	25	(25,0,…,0)	0.78	55.4047	0.84	1.5665
	25	(0,0,…,25)	0.69	84.1512	0.78	3.2386
	50	(0,0,…,0)	0.84	39.6630	0.89	1.1516
100	50	(2,2,…,2)	0.81	45.7518	0.86	1.7295
	50	(50,0,…,0)	0.84	39.6691	0.89	1.1612
	50	(0,0,…,50)	0.76	65.3428	0.84	2.5625
	80	(20,0,…,0)	0.87	30.0892	0.91	0.9206
	100	(0,0,…,0)	0.88	26.5226	0.92	0.8250
500	100	(400,0,…,0)	0.88	26.4087	0.92	0.8266
	300	(200,0,…,0)	0.93	14.5118	0.94	0.4800
	500	(0,0,…,0)	0.93	11.1752	0.94	0.3714

Çizelge 4.1'de yan ve MSE değerlerine bakıldığında küçük n değerleri için özellikle α parametresinin tam, tip-II sansürlü ve ilerleyen tür sansürlü örneklemlere dayalı tahmininde en çok olabilirlik yönteminin iyi sonuçlar vermediği görülmüştür. Çünkü α parametresinin tahminine ilişkin MSE değerleri çok yüksektir. Bu durum α parametresinin tahmin değerinin gerçek değerinden çok uzakta olabileceği anlamına gelmektedir. Örnek hacmi artırıldığında α parametresinin tahminine ilişkin yan ve MSE değerlerinin azaldığı görülmekle beraber ancak $n = 500$ seviyelerine geldiğinde görece küçük yan ve MSE değerleri gözlenmiştir. β parametresinin tüm örneklem tiplerine dayalı tahmininde ise en çok olabilirlik yönteminin küçük örnek hacimlerinde bile tatminkar sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Bununla birlikte örnek hacmi artırıldığında

β parametresinin tahminine ilişkin yan ve MSE değerlerinin de azaldığı görülmektedir. α parametresinin tahminlerinde MSE değerlerinin çok yüksek çıkmasına bağlı olarak Çizelge 4.2'de, α parametresi için oluşturulan 0,05 anlam seviyeli asimptotik güven aralıklarının ortalama genişliklerinin oldukça büyük oldukları ve buna karşın kapsama olasılıklarının 0,95 değerinden küçük oldukları gözlenmiştir. β parametresi için oluşturulan 0,05 anlam seviyeli asimptotik güven aralıkları için ise ortalama genişlikler oldukça küçük ve kapsama olasılıklarının 0,95 değerine α'nınkilerden daha yakın oldukları gözlenmiştir. Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'deki farklı sansür şemaları dikkate alındığında aynı n ve m değerleri için en iyi sonuçların $R=(n-m,0,\ldots,0)$ şeklindeki şemalarda elde edildiği gözlenmiştir. Çünkü bu şemalar için yan ve MSE değerleri diğer şemalarınkinden daha küçük, kapsama olasılığı daha yüksek ve güven aralıklarının ortalama genişlikleri daha küçüktür. Benzer sonuçlar α parametresinin farklı seçimleri için simülasyon sonuçlarını içeren Çizelge 4.3, Çizelge 4.4, Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'da da görülmektedir.

Son olarak, α ve β'nın önsel dağılım parametreleri (a_1,b_1,a_2,b_2)'nin üç farklı değeri için, α ve β'nın en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ ve Bayes tahmin edicileri $\breve{\alpha}$ ve $\breve{\beta}$'nın tahmini risk değerleri Çizelge 4.7, Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9'da verildiği gibi elde edilmiştir.

Çizelge 4.7. $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (1,1,1,1)$ önsel parametreleri için α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerine ilişkin tahmini risk değerleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	$risk(\breve{\alpha})$	$risk(\hat{\alpha})$	$risk(\breve{\beta})$	$risk(\hat{\beta})$
30	10	(2,2,…,2)	34.7472	3129.6892	0.1973	6.6459
	10	(20,0,…,0)	3.4488	1376.3666	0.2173	1.3213
	10	(0,0,…,20)	1165.1470	193.3705	0.2496	0.0000
	15	(1,1,…,1)	4.1504	1090.2009	6.3551	2.9134
	15	(15,0,…,0)	147.5441	559.7586	0.1992	0.9181
	15	(0,0,…,15)	161.6123	451.5747	0.0328	0.0219
	30	(0,0,…,0)	2.6281	94.6012	0.1396	0.3971
50	10	(4,4,…,4)	1067.4130	1178.5800	0.3179	2.1340
	10	(40,0,…,0)	2.8813	1130.1310	0.1987	1.2681
	10	(0,0,…,40)	35934.4600	121.3329	4.6235	0.0098
	25	(1,1,…,1)	2.9786	343.3731	0.1509	1.7499
	25	(25,0,…,0)	2.6899	156.0102	0.1456	0.4833
	25	(0,0,…,25)	23118.4500	1234.5940	11.5578	0.9420
	50	(0,0,…,0)	2.0983	22.7223	0.1094	0.2081
100	50	(2,2,…,2)	2.5648	52.0450	0.1434	0.5621
	50	(50,0,…,0)	2.1690	21.2145	0.1097	0.1855
	50	(0,0,…,50)	3.6396	758.3246	0.0900	2.3930
	80	(20,0,…,0)	1.6444	7.3451	0.0831	0.0988
	100	(0,0,…,0)	1.5093	5.0367	0.0778	0.0766
500	100	(400,0,…,0)	1.4796	4.8875	0.0893	0.0816
	300	(200,0,…,0)	0.6419	0.9487	0.0309	0.0269
	500	(0,0,…,0)	0.3986	0.4444	0.0181	0.0145

Çizelge 4.8. $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (3,1,1,1)$ önsel parametreleri için α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerine ilişkin tahmini risk değerleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	$risk(\breve{\alpha})$	$risk(\hat{\alpha})$	$risk(\breve{\beta})$	$risk(\hat{\beta})$
30	10	(2,2,…,2)	5.0235	347.1052	0.3898	2.8561
	10	(20,0,…,0)	4.6730	179.5309	0.3256	0.9180
	10	(0,0,…,20)	5.0857	468.2599	0.4546	5.9661
	15	(1,1,…,1)	4.5261	129.8235	0.3145	0.8872
	15	(15,0,…,0)	4.3402	118.5958	0.2828	0.5436
	15	(0,0,…,15)	5.0401	393.3026	0.3523	2.6655
	30	(0,0,…,0)	4.1306	46.9475	0.1734	0.2749
50	10	(4,4,…,4)	5.2384	420.5509	0.4493	5.0332
	10	(40,0,…,0)	4.6709	176.4786	0.3655	0.7492
	10	(0,0,…,40)	5.0235	231.0516	0.4560	6.0817
	25	(1,1,…,1)	14.8102	77.0140	0.2425	0.6998
	25	(25,0,…,0)	4.1839	58.3194	0.1903	0.3029
	25	(0,0,…,25)	5.0116	184.9989	0.2919	2.0490
	50	(0,0,…,0)	3.8813	25.8379	0.1201	0.1693
100	50	(2,2,…,2)	4.1420	34.7326	0.1706	0.3725
	50	(50,0,…,0)	3.6278	21.6858	0.1221	0.1838
	50	(0,0,…,50)	4.7881	108.6113	0.2362	1.3205
	80	(20,0,…,0)	3.3505	13.1274	0.0811	0.0980
	100	(0,0,…,0)	2.9169	9.2022	0.0664	0.0825
500	100	(400,0,…,0)	2.9370	8.3660	19.9437	0.0866
	300	(200,0,…,0)	3.6011	2.4550	0.0284	0.0294
	500	(0,0,…,0)	1.1069	1.4111	0.0193	0.0180

Çizelge 4.9. $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (10,1,1,1)$ önsel parametreleri için α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik ve Bayes tahminlerine ilişkin tahmini risk değerleri

n	m	$R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$	$risk(\breve{\alpha})$	$risk(\hat{\alpha})$	$risk(\breve{\beta})$	$risk(\hat{\beta})$
30	10	(2,2,…,2)	12.8920	445.1673	0.3381	1.8412
	10	(20,0,…,0)	11.7523	448.2673	0.3470	0.7299
	10	(0,0,…,20)	12.7307	562.1020	0.3733	3.4009
	15	(1,1,…,1)	12.3185	306.1833	0.2911	1.0513
	15	(15,0,…,0)	11.9836	282.0597	0.2736	0.4875
	15	(0,0,…,15)	13.2112	518.4267	0.2601	2.6631
	30	(0,0,…,0)	11.7718	169.4041	0.1595	0.2904
50	10	(4,4,…,4)	15.6169	836.9453	0.3303	3.3102
	10	(40,0,…,0)	12.8517	366.4336	0.3705	0.7787
	10	(0,0,…,40)	11.9796	291.7634	0.3275	3.3508
	25	(1,1,…,1)	12.4397	239.8426	0.2035	0.7496
	25	(25,0,…,0)	11.6959	211.8518	0.1722	0.3392
	25	(0,0,…,25)	13.1725	423.0456	0.2052	1.5588
	50	(0,0,…,0)	11.0087	116.5028	0.0939	0.1644
100	50	(2,2,…,2)	16.4038	141.8763	0.1324	0.3745
	50	(50,0,…,0)	11.0726	120.3393	0.1057	0.1781
	50	(0,0,…,50)	11.6885	255.5253	0.1315	0.8295
	80	(20,0,…,0)	9.5763	68.8282	0.0740	0.1121
	100	(0,0,…,0)	10.3607	53.6558	0.0804	0.0836
500	100	(400,0,…,0)	14.5530	52.4031	0.1179	0.0846
	300	(200,0,…,0)	22.4417	15.6345	0.0640	0.0300
	500	(0,0,…,0)	4.1979	8.7838	0.0266	0.0193

Çizelge 4.7, Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9' a bakıldığında ilk dikkat çeken husus prior parametrelerinin $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (1,1,1,1)$ şeklindeki seçimi için bazı durumlarda α parametresinin Bayes tahminine ilişkin $risk(\breve{\alpha})$ değerlerinin diğer durumlardakinden aşırı derecede yüksek olmasıdır. Bunun sebebi muhtemelen, seçilen prior parametreleri için α, 1 ortalamaya sahip olacaktır ve Bayes tahmininde kullanılan Tierney-Kadane yöntemi içerisinde yer alan optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanılan algoritmaların optimal çözümü bulamamasıdır. Prior parametrelerinin diğer seçimleri için simülasyon sonuçlarının yer aldığı Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9'da bu şekilde bir sorun görülmemektedir. Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9 incelendiğinde tüm örnek hacimlerinde ve sansür şemalarında hem α hem de β parametrelerinin Bayes tahminlerine ilişkin elde edilen tahmini risk değerlerinin en çok olabilirlik

tahminlerininkilerden daha küçük oldukları görülmektedir. Özellikle α parametresi için bu farklılık oldukça yüksektir. Bu durum α parametresi hakkındaki doğru önsel bilginin α parametresinin tahmininde son derece önemli olduğu anlamına gelmektedir. Ayrıca aynı n ve m değerleri için en iyi sonuçların yine $R=(n-m,0,\ldots,0)$ şeklindeki şemalarda elde edildiği gözlenmiştir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada ALT-Exp dağılımı için tam, tip-I sansürlü, tip-II sansürlü ve ilerleyen tür sansürlü örneklemlere dayalı parametre tahmini konusu ele alınmıştır. Parametre tahmini için en çok olabilirlik ve Bayes yöntemi ele alınmıştır. Bilinmeyen parametrelerin Bayes tahminleri analitik olarak elde edilemediğinden Tierney-Kadane yöntemi kullanılarak yaklaşık Bayes tahminleri elde edilmiştir. En çok olabilirlik ve Bayes tahmin edicilerinin performansları görebilmek ve iki yöntemi kıyaslayabilmek için 5000 tekrarlı bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması ile $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerine ilişkin ortalama yan ve MSE değerlerinin yanı sıra asimptotik güven aralıklarının gerçek parametre değerini kapsama olasılıkları ve bu aralıkların ortalama genişlikleri gözlenmiş ve tablolar halinde verilmiştir. α ve β parametrelerinin Bayes tahminine ilişkin ise tahmini risk değerleri elde edilmiş ve en çok olabilirlik tahmin edicilerinin tahmini riskleri ile birlikte tablolar halinde verilmiştir.

Simülasyon çalışması sonucunda elde edilen bulgular,

- α parametresi için en çok olabilirlik tahmin yönteminin iyi sonuçlar vermemiştir. Çünkü MSE değerleri oldukça yüksek çıkmıştır. Bu da α parametresinin en çok olabilirlik tahminine güvenilemeyeceği anlamını taşımaktadır,
- α parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicilerine dayalı olarak oluşturulan 0.05 anlam seviyeli asimptotik güven aralıklarının ortalama genişliklerinin çok büyük oldukları ve buna karşın kapsama olasılıklarının $n<500$ için olması gereken 0.95 değerinden oldukça uzakta olduğu görülmüştür. Bu da $n<500$ için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin dağılımlarının normal dağılıma yeteri kadar yakınsayamadığı anlamına gelmektedir,
- β parametresi için ise en çok olabilirlik tahmin yönteminin iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. β parametresi için MSE değerleri kabul edilebilir seviyede çıkmıştır,

- β parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicilerine dayalı olarak oluşturulan 0.05 anlam seviyeli asimptotik güven aralıklarının ortalama genişlikleri ise α parametresininkilerden oldukça küçük ve kapsama olasılıklarının daha yüksek olduğu görülmüştür. Özellikle $n=500$ için kapsama olasılığının olması gereken 0.95 değerine oldukça yakın olduğu görülmüştür. Bu da $n=500$ için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin dağılımlarının normal dağılıma yeteri kadar yakınsadığı anlamına gelmektedir,
- Hem α hem de β parametrelerinin Bayes tahminlerine ilişkin elde edilen tahmini risk değerlerinin en çok olabilirlik tahminlerininkilerden daha küçük oldukları görülmektedir. Özellikle α parametresi için bu farklılık oldukça yüksektir. Bu durum α parametresi hakkındaki doğru önsel bilginin α parametresinin tahmininde son derece önemli olduğu anlamına gelmektedir,
- Son olarak farklı sansür şemaları dikkate alındığında, aynı n ve m değerleri için en iyi sonuçların tam örneklem yani $R=(0,0,\ldots,0)$ durumu haricinde $R=(n-m,0,\ldots,0)$ şeklindeki şemalarda elde edildiği gözlenmiştir,

şeklinde sıralanabilir.

Yukarıda bahsedilen sonuçlar ışığında $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının α ve β parametrelerinin tahmininde bazı sorunlar olduğu gözlenmiştir. Parametrelerin küçük sapmalarla tahmin edilebilmesi için n ve m değerlerinin yeteri kadar büyük olması (muhtemelen $n>500$ ve $m>300$) gerekmektedir. $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımına sahip kitleler için sansürlü örneklemin kullanılması gerektiği çalışmalarda ise burada incelenen sansür şemaları arasından $R=(n-m,0,\ldots,0)$ şeklindeki sansür şemalarının seçilmesi model parametresinin tahmini açısından faydalı olacaktır.

5.2 Öneriler

α parametresi için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin iyi sonuç vermemesinin nedeninin yöntemden mi yoksa kullanılan optimizasyon algoritmasından mı

kaynaklandığı araştırılabilir. Bu bağlamda α parametresinin tahmini için farklı tahmin ediciler kullanılabilir veya en çok olabilirlik tahmini içerisinde farklı optimizasyon algoritmaları denenebilir. Ayrıca farklı türde sansürlü örneklemler için $ALT-Exp(\alpha,\beta)$ dağılımının parametrelerinin tahmini problemi ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Adamidis, K. ve Loukas, S., 1998, A lifetime distribution with decreasing failure rate, *Statistics & Probability Letters*, 39 (1), 35-42.

Alzaatreh, A., Lee, C. ve Famoye, F., 2013, A new method for generating families of continuous distributions, *Metron*, 71 (1), 63-79.

Asgharzadeh, A., 2006, Point and interval estimation for a generalized logistic distribution under progressive type II censoring, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35 (9), 1685-1702.

Balakrishnan, N., Balakrishnan, N. ve Aggarwala, R., 2000, Progressive censoring: theory, methods, and applications, Springer Science & Business Media, p.

Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C.-T. ve Ng, H. K. T., 2003, Point and interval estimation for Gaussian distribution, based on progressively Type-II censored samples, *IEEE transactions on reliability*, 52 (1), 90-95.

Cohen, A. C., 1965, Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples, *Technometrics*, 7 (4), 579-588.

Cordeiro, G. M. ve dos Santos Brito, R., 2012, The beta power distribution, *Brazilian journal of probability and statistics*, 26 (1), 88-112.

David, H. A. ve Nagaraja, H. N., 2004, Order statistics, *Encyclopedia of Statistical Sciences*.

Gupta, R. D. ve Kundu, D., 1999, Theory & methods: Generalized exponential distributions, *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 41 (2), 173-188.

Harter, H. L. ve Moore, A. H., 1965, Maximum-likelihood estimation of the parameters of gamma and Weibull populations from complete and from censored samples, *Technometrics*, 7 (4), 639-643.

Karakaya, K., Kinaci, I., Coşkun, K. ve Yunus, A., 2017, A new family of distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46 (2), 303-314.

Kim, C. ve Han, K., 2009, Estimation of the scale parameter of the Rayleigh distribution under general progressive censoring, *Journal of the Korean Statistical Society*, 38 (3), 239-246.

Kuş, C., 2007, A new lifetime distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51 (9), 4497-4509.

Lawless, J. F., 2011, Statistical models and methods for lifetime data, John Wiley & Sons, p.

Mahdavi, A. ve Kundu, D., 2017, A new method for generating distributions with an application to exponential distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46 (13), 6543-6557.

Merovci, F., 2013, Transmuted rayleigh distribution, *Austrian Journal of Statistics*, 42 (1), 21-31.

Mousa, M. A. ve Jaheen, Z., 2002, Statistical inference for the Burr model based on progressively censored data, *Computers & Mathematics with Applications*, 43 (10-11), 1441-1449.

Mudholkar, G. S. ve Srivastava, D. K., 1993, Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data, *IEEE transactions on reliability*, 42 (2), 299-302.

Ng, H., Chan, P. ve Balakrishnan, N., 2002, Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm, *Computational Statistics & Data Analysis*, 39 (4), 371-386.

Ng, H., 2005, Parameter estimation for a modified Weibull distribution, for progressively type-II censored samples, *IEEE transactions on reliability*, 54 (3), 374-380.

Tierney, L. ve Kadane, J. B., 1986, Accurate approximations for posterior moments and marginal densities, *Journal of the american statistical association*, 81 (393), 82-86.

Wu, S.-J., 2003, Estimation for the two-parameter Pareto distribution under progressive censoring with uniform removals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 73 (2), 125-134.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Adil KARAGÖZ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Niğde -01.01.1990
Telefon : 0546 674 0116
Faks : -
e-mail : adilkaragoz@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Niğde Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi	2006
Üniversite	:	Selçuk Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Konya	2013
Yüksek Lisans	:	Selçuk Üniversitesi, FBE İstatistik ABD	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

Karagöz, A., Kınacı, İ. ve Kuş, C., 2017, Parameter Estimation of ALT-Exp Distribution Under Progressive Censoring, 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, 24-26 May 2017, Konya.