

Revista Mexicana de Investigación Educativa
ISSN: 1405-6666
revista@comie.org.mx
Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C.
México

Sáiz Roldán, Mariana
Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria
Revista Mexicana de Investigación Educativa, vol. 8, núm. 18, mayo-agosto, 2003, pp. 447-478
Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C.
Distrito Federal, México

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14001807

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Revista Mexicana de Investigación Educativa
mayo-agosto 2003, vol. 8, núm. 18
pp. 447-478

INVESTIGACIÓN

Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria

MARIANA SÁIZ ROLDÁN*

Resumen:
En este artículo se exponen algunos resultados de una investigación centrada en las concepciones de maestros de primaria sobre el concepto volumen y su enseñanza. La evidencia que permitió obtener una caracterización de estas concepciones consiste en transcripciones de grabaciones, en audio y video, de las sesiones de un taller de actualización sobre dicho concepto matemático y las respuestas a algunos cuestionarios aplicados a los asistentes. El marco teórico metodológico, basado principalmente en: *a)* estudios acerca de concepciones de maestros, *b)* un análisis fenomenológico (Freudenthal, 1983) del concepto volumen, *c)* trabajos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto, y *d)* un análisis de diferentes modelos de enseñanza para el volumen, sustentó el diseño de los instrumentos de toma de datos y el escrutinio de la información obtenida. Para los resultados se diseñó una taxonomía de categorías de análisis que permitió analizar el discurso de los maestros.

Abstract:
This paper presents the results of a research study centered on elementary teachers' notions of the concept of volume and the teaching of the concept of volume. The evidence that provided a characterization of these conceptions consists of transcriptions of audio and video recordings, of a teacher workshop on this mathematical concept, and attendees' responses to questionnaires.

* Profesor Titular "A" de Tiempo completo y responsable de la línea "Educación matemática" de la maestría en Desarrollo educativo y del doctorado en Educación de la Universidad Pedagógica Nacional, Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, CP 14200, México, DF. CE: saizmar@yahoo.com

The methodological framework is based principally on: a) studies of teachers' conceptions; b) a phenomenological analysis (Freudenthal, 1983) of the concept of volume; c) studies regarding the processes of teaching and learning the concept; and d) an analysis of different models for teaching the concept of volume. These elements sustained the design of the data collection instruments and the examination of the information obtained. A taxonomy of analytical categories was designed for the results, in order to analyze the teachers' discourse.

Palabras clave: profesores, concepciones, volumen, enseñanza, educación básica.

Key words: teachers, conceptions, volume, teaching, elementary school.

En este artículo se exponen algunos resultados obtenidos en la realización del proyecto de investigación "El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza", y que corresponden a las concepciones de los profesores relacionadas con dicho concepto. La evidencia que permitió obtener una caracterización de esas concepciones se encuentra en transcripciones de las grabaciones, en audio y video, de las sesiones de un taller de actualización sobre dicho concepto matemático y en las respuestas a algunos cuestionarios aplicados a los participantes. El marco teórico metodológico, que se basó principalmente en: *a)* estudios acerca de concepciones de maestros, *b)* un análisis fenomenológico (Freudenthal, 1983) del concepto volumen, *c)* trabajos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto y *d)* un análisis de diferentes modelos de enseñanza para el volumen, sustentó el diseño de los instrumentos de toma de datos y el escrutinio de la información obtenida a través de un análisis del discurso.

Antecedentes y planteamiento del problema

El estudio del volumen como una magnitud es uno de los contenidos incluidos en la actual propuesta educativa para la escuela primaria. Sin

embargo, existen pocos trabajos enfocados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este concepto. Asimismo, en algunas experiencias en cursos de actualización de docentes de educación básica se constató que, en ocasiones, los conocimientos y creencias de los maestros en torno a este tema del currículo son incompletos o equivocados; incluso, es uno de los temas que ellos mismos señalan como un contenido difícil de enseñar y de aprender. Esta situación motivó el planteamiento del proyecto de investigación referido.

El interés en los conocimientos y creencias de los maestros coloca este trabajo en la línea de investigación llamada por algunos "pensamiento del profesor" (Llinares, 1996). Se interesa en estudiar las concepciones, creencias, conocimientos y valores de los maestros y la influencia de estos factores en su práctica. Este conjunto de trabajos se relaciona estrechamente con otra línea de investigación centrada en los procesos de formación y actualización docente. Al analizar la eficacia de los planes y programas de estudio de las instituciones formadoras de maestros y al buscar la delimitación de los conocimientos y habilidades indispensables para formar a un profesor o hacerle comprender a uno experimentado el nuevo enfoque de enseñanza de las matemáticas, se encuentra que sus concepciones y creencias, así como sus experiencias como alumnos de educación básica, influyen más en lo que enseñan y en cómo lo hacen que los cursos de formación o de actualización.

En cuanto a las indagaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje del volumen, éstas forman parte de estudios relacionados con estos procesos de diferentes temas del currículo de la educación primaria y secundaria, particularmente, de la medición. Existen pocos trabajos específicos sobre este concepto desde el punto de vista educativo. Entre éstos, son escasos aquellos en los que los sujetos observados sean maestros (por ejemplo, Enochs y Gabel, 1984), casi todos son hechos con niños o adolescentes (por ejemplo, Vergnaud, 1983 y Potari y Spiliotopoulou, 1996). Otros estudios que se consultaron y analizaron son de corte psicológico, particularmente los de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) sobre la conservación de la cantidad y del volumen.

Al revisar los trabajos acerca de concepciones de maestros se encontró una dificultad: la aparente imposibilidad de delimitar términos como

creencias, concepciones, representaciones o conocimientos; sin embargo, para la presente investigación, se decidió enfocarse en lo que Freudenthal (1983) denomina "objetos mentales". Para comprender el significado de tal expresión conviene usar los términos de Puig (1994), quien define lo que llama "campos semánticos personales" para explicar lo que, a su modo de ver, corresponde a la idea de "objetos mentales" de Freudenthal.

De acuerdo con Freudenthal (1983) y Puig (1994), un concepto matemático es un medio de organización de diferentes fenómenos que suceden en contextos diversos. Por ejemplo, en el caso del volumen, puede ser entendido como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, como la cantidad de unidades que forman un cuerpo o como un espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido, como un espacio libre encerrado en una superficie cerrada, o bien, como una función de medida o una integral e incluso de algunas otras maneras. En cada caso, los objetos susceptibles de ser medidos cambian; las reglas de uso, comparación y cálculo del volumen son diferentes (Sáiz, 2002). La totalidad de estos significados, usos, reglas y propiedades, en todos los contextos, es lo que Freudenthal (1983) llamaría "concepto volumen" y Puig (1994) "campo semántico del volumen" o "conocimiento enciclopédico del volumen".

Pero el sujeto no opera en todo el campo semántico, los niños no necesitan saber y comprender todo el conocimiento enciclopédico para resolver algunos problemas relacionados con los conceptos. Freudenthal (1983) afirma que los niños trabajan con "objetos mentales" sin necesidad de haber construido los conceptos, mientras que Puig (1994) habla de "campos semánticos personales" como el conjunto en el que operan los sujetos. En este trabajo se considera que las expresiones "objeto mental volumen" y "campo semántico personal de volumen" pueden usarse indistintamente.

En un artículo reciente, en el que se intenta delimitar el significado de los términos usados en la literatura sobre pensamiento del profesor, la conclusión es la importancia de distinguir entre concepto y concepción. Las autoras retoman la definición de "concepción" en contraste

con "concepto" de Sfard (1991, citada por Pehkonen y Furinghetti, 2001:649):

> La palabra concepto (a veces reemplazada por *noción*) se utilizará cada vez que se haga referencia a una idea matemática en su forma *oficial* como un constructo teórico dentro del *universo formal del conocimiento ideal*. [Mientras que] al aglutinado completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto —la contraparte del concepto en el "universo del conocimiento humano" interno y subjetivo— se le denominará "concepción".

Para los fines de esta investigación se consideran equivalentes las definiciones de campo semántico personal, objeto mental y concepción de Puig (1996), Freudenthal (1983) y Sfard (1991, citada por Pehkonen y Furinghetti, 2001), respectivamente, así como sus definiciones de "concepto". Se piensa que la definición de Sfard reafirma la elección de estudiar objetos mentales, o bien, campos semánticos personales. De esta manera, la investigación descrita en este artículo se plantea como uno de sus objetivos principales: caracterizar objetos mentales de volumen de maestros de primaria a través de tres objetivos particulares: *a)* identificar significados asociados con el término volumen, *b)* caracterizar relaciones que los maestros establecen entre el volumen y otras propiedades de los cuerpos y *c)* explorar sus competencias ante problemas relacionados con el volumen. Para lograr estos objetivos fue necesario insertar la investigación en un marco de referencia teórico y metodológico.

Sobre los modelos teóricos locales

El desarrollo del proyecto "El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza" requirió de un marco de referencia que permitiera organizar la investigación del objeto de estudio en cuestión. En primer lugar, dar forma al proyecto, esto es, sentar la base para su planteamiento y desarrollo y, en segundo, ser un soporte para la obtención, la organización y el análisis de los datos y la producción de resultados. La consideración de estas características llevó a la determinación de adoptar y ampliar, para dicho proyecto, la

teoría de los modelos teóricos locales propuesta por Filloy (ver, por ejemplo, Filloy y Rubio, 1992).

Esta teoría es descrita como "un marco teórico metodológico para la observación experimental en matemática educativa" (Filloy, 1999:1). En ella "el objeto de estudio se enfoca a través de cuatro componentes relacionados: (1) modelos de enseñanza, (2) modelos de los procesos cognitivos, (3) modelos de competencia formal y (4) modelos de comunicación" (Filloy, 1999; 4). De acuerdo con Filloy (ibid.), la consideración de estos cuatro componentes es una manera de incorporar al marco teórico los resultados de otras observaciones y experimentos, lo que resulta de la aceptación de una cierta estabilidad de algunos fenómenos de la matemática educativa. No obstante, la teoría de los modelos teóricos locales considera que los resultados obtenidos al hacer observaciones desde este marco teórico, no se consideran igualmente adecuados para cualquier situación.

> [Tales modelos] son locales en la medida en que se elaboran para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña en los sistemas educativos un contenido concreto a unos alumnos concretos, y sólo se pretende que sean adecuados para los fenómenos observados (Puig, 1996:12).

Una particularidad que se desprende del párrafo anterior es que la teoría propuesta por Filloy se ha desarrollado por medio de investigaciones centradas en estudiantes, en cambio, en el presente trabajo, los sujetos analizados son los maestros. Además, no se pone a prueba un modelo de enseñanza con ellos, como es el caso de los estudios que dieron origen a la teoría de los modelos teóricos locales. Por lo anterior, fue necesario adaptar y enriquecer dicha teoría para su aplicación en una parte diferente del entramado del sistema educativo mexicano.

La pertinencia de incorporar un componente de modelos de competencia formal al marco teórico para la observación, que llamaremos de aquí en adelante marco teórico local inicial, es poder contar con todos los elementos necesarios para describir y decodificar lo observado. En el caso de la investigación sobre el pensamiento del maestro acerca del volumen, el modelo de competencia formal contiene todos los

conocimientos de un usuario ideal, capaz de decodificar el intercambio de mensajes que tiene lugar cuando los maestros realizan tareas relacionadas con el concepto volumen. En otras palabras, el modelo de competencia formal correspondería al campo semántico personal volumen del observador.

El desarrollo de este componente se realizó en dos direcciones: por un lado, se llevó a cabo una revisión y análisis documental de libros de historia de las matemáticas y de matemáticas, con la intención de identificar el proceso histórico de la construcción del conocimiento matemático referente al concepto volumen, así como el estado actual de este conocimiento, esto es, la definición matemática de volumen y sus propiedades. Por otro lado, se parte de algunos resultados obtenidos por Freudenthal (1983) al aplicar un análisis fenomenológico a este concepto que se completa con otro sobre las relaciones que guarda el concepto volumen con otras propiedades de los cuerpos indagadas por la física y la química, así como un estudio de la importancia de las características físicas y geométricas de los cuerpos u "objetos volumen medibles" (ver Rouche, 1992 y Potari y Spiliotopoulou, 1996) en el estudio y obtención de su volumen.

Para la construcción del componente de modelos de enseñanza se realizó una revisión y análisis de libros de texto usados en México en un periodo de cien años (Sáiz, 1998), enfocando la atención en los modelos utilizados para el volumen, contrastándolos con el planteado en los planes y programas para la primaria vigentes y con recomendaciones de expertos de otros países. En resumen, puede decirse que este componente reúne la información y los elementos indispensables para descubrir y analizar el modelo de enseñanza de los maestros observados, así como para identificar la influencia del modelo con el que ellos estudiaron en sus propios objetos mentales volumen.

La conveniencia de incorporar el componente de modelos de enseñanza al presente estudio radica en una conclusión de muchos trabajos de investigación sobre el tema, referente a la influencia de las concepciones de los docentes y de la manera en la que ellos aprendieron sobre lo que enseñan y cómo lo enseñan (ver por ejemplo Thompson, 1992; Pajares, 1992 y Battista, 1994). Así, algunas de sus concepciones o

creencias podrían ser explicadas a través del modelo de enseñanza con el que ellos estudiaron.

Otro objetivo del estudio era hacer una primera caracterización de las concepciones de los maestros acerca de la enseñanza del volumen; para lograr este fin es importante saber, entre otras cosas, si ellos cuentan con los conocimientos que les permitan comprender y poner en práctica la propuesta educativa vigente, particularmente, si conocen las dificultades cognitivas relacionadas con el aprendizaje de este concepto. Asimismo, algunas de mis experiencias en instituciones formadoras y actualizadoras de maestros habían mostrado que algunas dificultades y errores comunes —señalados por investigadores que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje del volumen en niños— no son privativas de los menores. En ocasiones los maestros enfrentan las mismas dificultades y cometen los mismos errores que los niños. Así, el componente de modelos de procesos cognitivos está conformado por resultados de investigaciones realizadas con niños en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del volumen (por ejemplo, Piaget, Inhelder y Szeminska, 1970; Figueras y Waldegg, 1986; Hart *et al*., 1985).

Métodos de recolección de datos

Para obtener los datos que posibilitaran lograr los objetivos propuestos fue necesario diseñar un proceso de comunicación que permitiera acceder al "pensamiento" de los maestros, con el fin de caracterizar sus objetos mentales volumen; parte fundamental de la investigación, dado que un buen diseño permitirá acceder a un discurso relacionado con los temas que se quieren estudiar y las preguntas que se busca responder. Este proceso está descrito en parte en Sáiz y Figueras (2000) y con detalle en Sáiz (2002); a continuación se da una descripción general del mismo.

Para los fines de esta investigación, se precisaba conocer, entre otros aspectos: los significados que los maestros asocian al término "volumen", otras propiedades de los cuerpos con las que ellos relacionan esta magnitud, cómo son tales relaciones, cómo y qué dificultades

enfrentan al resolver problemas de volumen y qué hacen cuando requieren calcular un volumen. Para obtener datos al respecto, se diseñaron tres cuestionarios, uno de ellos recababa información curricular sobre los maestros y los otros dos indagaban sobre los objetos de estudio: el volumen y su enseñanza.

Los cuestionarios incluían problemas relacionados con el volumen, situaciones didácticas hipotéticas para que los maestros opinaran sobre ellas, preguntas acerca de los objetos que ellos consideran volumen-medibles y otros aspectos más. Pero no se consideraba que la información así obtenida pudiera revelar completamente las concepciones e ideas en torno al concepto volumen de los docentes observados, por lo cual también se diseñaron protocolos de problemas que los llevaran a expresarse en voz alta (ver Clement, 1999), lo cual permite conocer el "pensamiento" de los maestros a través del discurso que emiten mientras resuelven los problemas.

Para aplicar estos protocolos se planteó un taller sobre el volumen y su enseñanza. Finalmente, se llevaron a cabo dos, ambos en un centro de maestros de la ciudad de México. El primero, coordinado por la investigadora, con la participación de 15 maestros y dos asesores de dicho centro, en cinco sesiones matutinas de cuatro horas cada una. El segundo es el mismo taller, repetido por los dos asesores mencionados, en el turno vespertino, con la asistencia de nueve maestros. Los cuestionarios descritos anteriormente se aplicaron al inicio de la primera sesión de los talleres

Tanto los protocolos de problemas como las sesiones del taller y los cuestionarios se diseñaron con el apoyo de los tres componentes del modelo teórico local inicial descritos en la sección anterior. El proceso global de diseño de instrumentos de recolección de datos, su aplicación y la obtención de evidencia es lo que conforma el cuarto componente del modelo teórico local inicial, esto es, el de comunicación.

El banco de datos lo conforman las transcripciones de las grabaciones tanto en video, de los talleres matutino y vespertino, como de audio, de algunas de las discusiones al interior de los equipos en el turno matutino, así como los cuestionarios respondidos. Estos datos son

fragmentos del discurso de los maestros en los que subyacen sus ideas expresadas a través de sistemas matemáticos de signos (ver Filloy, 1999) en diferentes estratos de abstracción. En el uso de estos sistemas se manifiestan procesos de significación y producción de sentido por parte de los maestros. Los datos son, específicamente, palabras, yuxtaposición de palabras, frases, oraciones, párrafos y documentos.

Algunos ejemplos de cómo se diseñaron los cuestionarios y las sesiones del taller permiten obtener una idea de la importancia del marco teórico local inicial en la realización del proceso de comunicación, mismos que se detallan a continuación.

1) En la construcción del componente de modelos de procesos cognitivos se detecta que un error común por parte de los niños es relacionar el cambio en el nivel de un líquido, al sumergir en él un objeto, con el peso y no con el volumen; algunas experiencias preliminares con maestros también indicaban la presencia de esta confusión en algunos de ellos. Por tanto, se determinó incluir ciertas preguntas sobre esta problemática en los cuestionarios, así como la 4 del cuestionario 2:

> 4. En la siguiente tabla, en la primera columna, aparece una lista de propiedades de los cuerpos. En la segunda columna tacha sí o no según creas que la propiedad mencionada está relacionada o no con el volumen. En la tercera comenta porqué dices que sí o que no.

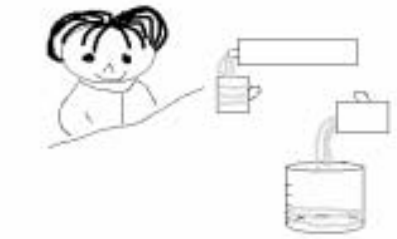
Propiedad	**¿Crees que está relacionada con el volumen?**		**¿Por qué dices que sí o que no?**
Presión	Sí	No	
Temperatura	Sí	No	
Masa	Sí	No	
Capacidad	Sí	No	
Posibilidad de flotar en el agua	Sí	No	
Posibilidad de flotar en el aire	Sí	No	
Área lateral	Sí	No	

En el taller también se buscó información, mediante una actividad, sobre la confusión mencionada en la que se pidió a los maestros, organizados en equipos, que desarrollaran las tareas propuestas en la ficha 68 "Volumen por inmersión" —del Fichero de actividades de matemáticas de 5º grado (SEP, 1999)— que propone construir un recipiente graduado y luego usarlo para medir el volumen de unas piedras.

2) En la construcción del componente de procesos cognitivos se encontró que es común considerar como sinónimos los vocablos "volumen" y "capacidad". Para indagar a este respecto se diseñó la pregunta 6 del cuestionario 2:

Pregunta 6, inciso a, del cuestionario 2

6. El maestro Julián ha pedido a sus alumnos que calculen el volumen de una taza. Amalia vertió agua en ella y luego midió el líquido usando un recipiente graduado. a) ¿Qué midió Amalia?



Pregunta 6, inciso b, del cuestionario 2

Ana metió la taza en un recipiente graduado, con agua, y midió cuánto subía el nivel del agua: b) ¿Qué midió Ana?, c) ¿Cuál de las dos calculó el volumen de la taza?



3) La construcción del componente de modelos de competencia formal indica la importancia de conocer el efecto, en el volumen, de alargar o acortar las magnitudes lineales de un cuerpo. Como mencionamos anteriormente, construcción del componente de modelos de procesos cognitivos muestra que los niños cometen errores al estudiar el efecto descrito anteriormente (Vergnaud, 1983; Vergnaud *et al.*, 1983; Ricco y Vergnaud, 1983). Y que experiencias con profesores en cursos de actualización habían mostrado dificultades con estas ideas en algunos maestros. Por ello, en la quinta sesión del taller se planteó a los participantes resolver, en equipos, el siguiente problema:

> La torre Eiffel mide 300 m de altura, está hecha de hierro y pesa 8000 toneladas. Supongamos que reproducimos la torre. Si queremos hacer un modelo, también de hierro que pese en total 1 kilo, ¿qué altura deberá tener? ¿será más alta o más baja que un envase de un litro de leche? (tomado de Pronap, 1997).

Análisis de los datos

El análisis de los datos también se fundamenta en los resultados que conforman el marco teórico local inicial. De hecho, al principio del análisis se tienen tres grandes categorías relacionadas con los tres primeros componentes del modelo teórico local inicial, a saber: competencia formal, modelos de enseñanza y aspectos cognitivos.

La taxonomía de categorías de análisis definitiva quedó conformada por cuatro principales, cada una con subcategorías, algunas de las cuales se subdividen en clases y subclases. Al final quedaron 45 elementos que conforman la taxonomía (ver figura 1).

Los resultados que se exponen en este artículo corresponden a aspectos obtenidos mediante algunas de ellas, ya que aquí solamente se describen objetos mentales volumen de los maestros observados y no se consideran aspectos generales de las matemáticas ni los modelos de enseñanza, objetivos de la investigación más general.

Figura 1. Taxonomía de categorías de análisis

Para el análisis se leen varias veces los datos con la idea de clasificarlos en las tres categorías mencionadas. Los mismos se vuelven a analizar y se subclasifican en subcategorías, clases o subclases. Este proceso de apoya con un paquete informático de análisis del discurso que permite esta clasificación, la realización de reportes de cada elemento de la taxonomía de análisis y la búsqueda de relaciones entre diferentes categorías, subcategorías, clases y subclases.

Clasificación de los datos

Con el objeto de dar una idea de cómo se llevó a cabo la primera parte del análisis de datos, que consistió en su clasificación en las diferentes categorías de análisis, en los siguientes párrafos se describen algunas de ellas y se muestran ejemplos de datos clasificados en cada una. Esto permite, además, obtener una idea del tipo de información con la cual se contaba (en algunos de los ejemplos citados se denota a los maestros del turno matutino con una letra M y a los del vespertino con una letra V, ambas acompañadas de un número para distinguir a los docentes).

1. Clase "conservación". Esta clase de la subcategoría "propiedades" (ver figura 3), contiene todas las expresiones relacionadas con la propiedad de congruencia del volumen o con el uso de ésta por parte de los maestros. La propiedad se refiere a la invarianza del volumen bajo ciertas transformaciones tales como moldear con barro o plastilina, deshacer y volver a armar configuraciones hechas con cubos y algunas otras.

El ejemplo que ilustra el tipo de datos codificados en esta clase fue tomado de la transcripción de la grabación de la primera parte de la tercera sesión del taller matutino. Durante ella, un maestro explica un experimento que diseñó su equipo para resolver algunas dudas surgidas durante el trabajo con la ficha 68. Lo que hicieron fue tomar un pedazo de plastilina y cambiarlo de forma varias veces para, en cada caso, medir el volumen por inmersión y verificar si había cambios. En la discusión general del grupo uno de los miembros del equipo explica lo que hicieron.

> 33: Chucho: Bueno, no... perdón. Estos son experimentos que hacen los niños, que se supone que tienen que hacer los niños en la escuela... no sé cómo... Bueno, aquí nos surgieron muchas dudas... Ésta se hizo la bola y subió el nivel, luego se hizo toda plana y subió lo mismo, luego la maestra hizo esta tacita para ver cuánto cabía y subió lo mismo.

2. Clase "escalas". Esta rama de la subcategoría "cuantitativos" (ver figura 3) agrupa expresiones relacionadas con el uso de escalas lineales para medir volúmenes y capacidades; también se incluyen en ella datos en los que se manifiestan dificultades relacionadas con el cambio de unidades.

El ejemplo que ilustra el tipo de datos incluidos en esta clase es tomado de la transcripción de una grabación en audio de la discusión al interior de uno de los equipos, durante la primera parte de la tercera sesión del turno matutino, donde iniciaban el trabajo con la ficha 68. En la sesión, los maestros debían construir un recipiente graduado para medir diferentes objetos por medio de inmersión: para graduarlo debían hacer una escala con una tira de papel; dividir la tira proporcionalmente para encontrar las longitudes que corresponden a las medidas de capacidad.

> 90: Dalia: Les voy a leer las instrucciones. Corten la botella... midan la altura de la botella y corten la tira de cartoncillo con esa medida.
> 91: Abel: ¡Ah! la altura de la botella.
> 92: Myrna: Gradúen la tira de cartoncillo como se muestra en la ilustración.
> 93: Abel: Pero... qué distancia hay de aquí a aquí. ¿Diez?
> 94: Dalia: Con la regla de graduación.
> 95: Saúl: *Nomás* nos va a salir uno.

3. Clase "carácter geométrico". Esta clase de la subcategoría "cualitativos" (ver figura 3) está conformada por todas las expresiones alusivas al carácter geométrico de los cuerpos o de los procedimientos utilizados al medir o comparar volúmenes sin aludir al número.

El ejemplo para ilustrar la información codificada en esta clase es tomado de la transcripción de la grabación en vídeo de la cuarta sesión,

en la cual los maestros debían comparar el volumen de sólidos de madera de diferentes formas.

> 55: ...Éste es un prisma cuadrangular, el cuadrado está inscrito dentro de la misma circunferencia del cilindro entonces obviamente es menor que el cilindro.

Primer y segundo niveles de análisis

Una vez clasificados todos los datos, con ayuda de un paquete computacional para análisis del discurso, se elabora un informe para cada uno de las categorías, subcategorías, clases o subclases de la taxonomía de categorías de análisis, que el programa llama "nodos". En estos informes se encuentra el nombre de cada documento en el que se encontraron datos clasificados en el nodo en cuestión y los datos; esto es, los párrafos, oraciones, palabras, etcétera. Esta evidencia permite responder diferentes preguntas encaminadas a caracterizar los objetos mentales volumen de los maestros observados, por ejemplo:

- ¿Cuál es el conjunto de cuerpos volumen-medibles de los maestros? (Para responder a esta pregunta puede usarse el informe de la subcategoría "objetos volumen-medibles").
- ¿Consideran que un objeto hueco tiene volumen? (Para responder a esta pregunta puede usarse el informe de la subcategoría "objetos volumen-medibles").
- ¿Qué actividades o procedimientos de medición del volumen están relacionados con la propiedad de aditividad de acuerdo con lo que dicen los maestros? (Para responder a esta pregunta puede usarse el informe de la clase "aditiva").
- ¿Cuáles dificultades cognitivas respecto al aprendizaje del volumen, conocen los maestros de acuerdo con su discurso? (Para responder a esta pregunta puede usarse el informe de la categoría "aspectos cognitivos").

El paquete de cómputo usado permitía, además, obtener una información sintética y cuantitativa en forma de tabla, ésta indica la cantidad

de datos clasificados en cada categoría, subcategoría, clase o subclase. Esta información puede presentarse en una tabla para todos los elementos de la taxonomía de categorías de análisis, para una rama de la categoría de nodos o un nodo en particular.

Por ejemplo, en el informe sintético del cuadro 1 se precisa el número de párrafos codificados en las diferentes ramas de la subcategoría "aspectos cuantitativos". En ese documento se puede observar que hay 35 fragmentos de discurso de diferentes clases, que son evidencia relacionada con el procedimiento para medir volúmenes que da nombre a la clase "inmersión". Esto muestra que la inmersión, como una manera de medir el volumen, forma parte del objeto mental volumen de los maestros observados.

Algunas de las preguntas que se pueden responder utilizando esta información son las siguientes:

- ¿Cuál es el objeto mental volumen al que más hacen referencia los maestros observados?
- ¿Qué propiedad de los cuerpos mencionan más de acuerdo con su discurso?
- ¿Hay más referencias en relación con aspectos cuantitativos o con aspectos cualitativos del concepto volumen?

Los informes de codificación son sujetos a un segundo nivel de análisis, donde se buscan coincidencias de opinión de varios maestros o temas de discusión entre ellos, o bien, errores comunes, concepciones equivocadas, habilidades y conocimientos generales entre otros aspectos de interés que dependen del nodo que se esté analizando.

Otra de las herramientas del paquete para el análisis del discurso permite realizar búsquedas cruzadas, esto es, encontrar datos clasificados en dos nodos a la vez. Este tipo de información permite responder a preguntas tales como:

- ¿Relacionan los docentes los diferentes significados asociados al vocablo "volumen" entre sí?

Cuadro 1
Reporte sintético de codificación

Categoría Aspectos cuantitativos y subcategorías, clases y subclases relacionadas

Documento	A/c	Pr	For	Un	Tr	C/c	Ap	In	Dm	Ar	Ef	Es
Audio1a	4	1	0	1	0	1	0	0	2	5	0	0
Audio2a	6	2	3	0	0	1	0	0	2	1	0	0
Audio3a-1	0	1	0	1	0	0	0	4	0	23	0	19
Audio3a-2	0	7	4	0	0	0	0	0	0	12	0	0
Cues2	2	1	6	1	0	3	0	2	1	0	0	0
Cues3	1	5	16	4	7	0	0	6	18	8	0	0
Video1am-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Video2am	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Video3am-1	1	0	0	0	0	0	0	6	1	4	0	1
Video3am-2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Video3av	2	0	0	0	0	0	0	12	2	6	0	7
Video4am-1	1	5	2	1	0	0	1	5	2	2	0	0
Video4am-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0
Video4av	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5	0
Video5am	3	3	1	0	1	0	0	0	0	5	5	0
Video5av	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Totales	23	27	35	8	8	5	1	35	29	68	20	27

Referencias:

A/c:	Aspectos cuantitativos	Ap:	Aproximación
Pr:	Procedimiento	In:	Inmersión
Fr:	Fórmula	Dm:	Dimensionalidad
Un:	Unidimensional	Ar:	Aritméticos
Tr:	Tridimensional	Ef:	Efecto
C/c:	Conteo de cubos	Es:	Escalas

- Cuando los maestros relacionan el volumen con otras propiedades de los cuerpos, ¿a qué significado de "volumen" se refieren?
- ¿Con qué otras propiedades de los cuerpos relacionan los diferentes significados asociados con el concepto volumen?
- ¿Existen referencias implícitas o explícitas a las propiedades del volumen para uno u otro significado?

Por ejemplo, para responder a la primera de las preguntas anteriores, un primer acercamiento se encuentra en el resultado de una búsqueda cruzada que se muestra en el cuadro 2, donde se observa que las acepciones "volumen interno" y "volumen ocupado" (los significados de estas expresiones se exhiben en la sección de discusión y resultados) son las que más aparecen relacionadas en el discurso de los maestros.

Cuadro 2
Resultado de una búsqueda cruzada

Categoría	Volumen desplazado	Volumen ocupado	Volumen interno	Volumen encerrado	Número	Capacidad
Volumen desplazado		0	1	0	0	1
Volumen ocupado	0		7	1	0	4
Volumen interno	1	7		3	1	4
Volumen encerrado	0	1	3		0	3
Número	0	0	1	0		0
Capacidad	1	4	4	3	0	

Posteriormente, es posible revisar los siete datos clasificados en ambas categorías para así conocer en qué forma es que los maestros vinculan ambos significados.

Discusión y resultados

Como se mencionó en el apartado de Antecedentes y planteamiento del problema en este artículo sólo se exponen algunas conclusiones del proyecto más general, específicamente aquellas relacionadas con uno de los objetivos particulares: identificar significados asociados con el término volumen por parte de los profesores.

Desde el punto de vista matemático, el volumen es una función de medida; como tal, para ser descrita, es preciso especificar su dominio, la función o regla de correspondencia y su contradominio. Para caracterizar el significado asociado con el término volumen por parte de los maestros se ha considerado pertinente hacer una analogía con esta definición, identificando estos elementos en su discurso.

Lo que de cierta manera podría asociarse con el dominio de la función volumen, en el objeto mental volumen de los maestros, corresponde a aquellos cuerpos y cosas que ellos consideran susceptibles de ser medidos respecto del volumen; esto es, los elementos que conforman el conjunto de objetos volumen-medibles desde su punto de vista. Esta información se encuentra en la subcategoría de la categoría "competencia formal", que lleva ese nombre (ver figura 3).

Los procedimientos de cálculo empleados o sugeridos por los docentes reflejan el uso de la función y, en consecuencia, también proporcionan elementos para caracterizar tanto la función misma como a su contradominio. Los datos de la rama "competencia formal", clasificados tanto en la subcategoría "propiedades" (ver figura 3) como en la clase "procedimientos" contienen este tipo de información.

Por otro lado, la clase "significados" agrupa manifestaciones en torno al uso del vocablo volumen. Es pertinente aclarar que en este estudio se identificaron cinco significados asociados al término volumen, cada uno dio lugar a una subclase en la taxonomía de categorías de análisis; éstos son:

1) volumen interno, es decir, número de unidades que conforman un cuerpo;

2) volumen ocupado o lugar que ocupa un cuerpo en el espacio;
3) número, es decir, el volumen como una magnitud que se puede calcular;

4) volumen encerrado, esto es, el espacio encerrado por una superficie cerrada y

5) volumen desplazado, es decir, la cantidad de líquido desplazada al sumergir un objeto en él.

Excepto el de número, todos son identificados y nombrados por Piaget, Inhelder y Szeminska (1970). Aunque el volumen encerrado y el interno son considerados equivalentes por esos autores, en esta investigación se hace una diferencia (ver Sáiz, 2002). A continuación, se exponen los resultados obtenidos agrupados en tres partes; en cada caso se muestran ejemplos de la evidencia que les da sustento.

Sobre los objetos volumen-medibles

Resultado 1. Para identificar los objetos volumen-medibles, los maestros enfocan la atención en características geométricas como su forma o concavidad y en características físicas como su solidez o estado físico.

Ejemplo 1. En el cuestionario 2 se plantea la siguiente pregunta: la maestra Marilú, de segundo de primaria, acostumbra proponer a sus alumnos actividades como verter líquidos en recipientes de distintas formas y tamaños. ¿Piensas que estas actividades se relacionan con el concepto de volumen? ¿Por qué piensas eso? La respuesta de uno de los maestros es la siguiente.

> 184: Aun cuando propiamente es capacidad, el hecho de que el líquido esté contenido en un recipiente es equivalente del volumen, independientemente del **estado físico**.

Ejemplo 2. Respuestas a la pregunta 2 del cuestionario 3: ¿crees que se puede obtener el volumen de los siguientes objetos?

> 102: M12: Una esfera navideña. No. **No es un sólido.**

104: M12: Una copa. No. **No es un sólido**.
145: V10: Un trompo. Sí. Tiene un espacio interior en **forma sólida**.

Resultado 2. Para los maestros observados, los objetos volumen-medibles son aquéllos para los cuales se pueden medir tres longitudes.

Al parecer los maestros piensan en la medición del largo, del ancho y del alto. Con estas medidas ellos afirman poder calcular el volumen.

Ejemplo 1. Respuestas a una pregunta del cuestionario 3: ¿puedes obtener el volumen de un auditorio?

64: M2: Un auditorio [...] se contemplan tres dimensiones.
65: M4: Un auditorio. Sí. Es mensurable.
117: V5: Un auditorio. Sí, generalmente tienen medidas lineales y con eso se puede obtener.

Resultado 3. Aquellos cuerpos percibidos por los docentes como superficies no son considerados por los maestros como objetos volumen-medibles.

Este resultado se relaciona con el anterior. Como los maestros perciben los objetos delgados, tales como una hoja de papel o un pañuelo, como superficies, piensan que no tienen grosor; faltaría la medida de una longitud para obtener el volumen multiplicando.

Ejemplo 1. Respuestas a una pregunta del cuestionario 3: ¿crees que se puede obtener el volumen de los siguientes objetos?

69: M4: Un pañuelo. No. Su tercera dimensión es mínima.
97: M9: Una hoja de papel. No. Es medida de superficie.
120: M14: Un pañuelo. No. Plano.
144: V10: Una hoja de papel. No. Tiene área y perímetro, es una figura plana.

Resultado 4. Algunos objetos cotidianos no son considerados por los maestros como objetos volumen-medibles debido a su forma irregular.

Para los docentes pareciera que objetos no identificados como cuerpos geométricos escolares no son volumen-medibles. Quizá la ausencia de una fórmula específica para hacer un cálculo, o bien, la falta de imaginación para descomponer un objeto en partes o poca experiencia con transformaciones de romper y rehacer o para medir con instrumentos de precisión contribuyen a formar la creencia descrita en el resultado anterior.

Ejemplo 1. Respuestas a ¿crees que se puede obtener el volumen de los siguientes objetos?

115: V5: Una silla. No, por su forma y que no es sólo una, sino varias.
119: V5: Una tuerca. No, por lo irregular de su forma y lo diminuto de sus medidas.
125: V5: Un trompo. No, por su forma irregular es difícil.

Resultado 5. Algunos recipientes abiertos no son considerados por los maestros como objetos volumen-medibles.

Ejemplo 1. Respuestas a: ¿crees que a una copa se le puede sacar el volumen?

103: M9: Una copa. No. Es capacidad.
104: M12: Una copa. No. No es un sólido.

Sobre los procedimientos para medir y comparar volúmenes

De acuerdo con la cantidad de datos clasificados en las categorías correspondientes, la siguiente lista muestra, en orden descendente, las formas aludidas por los maestros para encontrar el volumen de un objeto:

- fórmula
- inmersión
- conteo
- aproximaciones

La aparición frecuente del procedimiento de inmersión no debe sorprender, ya que en el taller hubo una actividad dedicada a esta

manera de medir volúmenes. Sin embargo, el uso de este procedimiento no está tan generalizado y a veces no ha sido comprendido como muestran los siguientes resultados.

Resultado 6. Para algunos maestros la inmersión no es un método confiable para medir volúmenes.

Es pertinente comentar el contexto que permite comprender la situación de la cual se toma un ejemplo que sustenta este resultado: a los maestros se les solicita ordenar unos sólidos de madera de acuerdo con su volumen. A simple vista no es fácil diferenciar los volúmenes; en la sesión del día anterior se había trabajado con la inmersión, en consecuencia, a algunos de los participantes se les ocurre la idea de utilizar inmersión para resolver la tarea propuesta. Un maestro, que no estuvo el día anterior, no está de acuerdo, argumenta que el peso del objeto sumergido influye en el desplazamiento de líquido, a lo cual sus compañeros le dicen que no; él insiste y da más argumentos sobre su inconformidad respecto de usar la inmersión para medir volúmenes:

> 200: Simplemente el volumen de tu dedo [que empuja el objeto para que no flote], el material se disuelve en tus manos, pueden variar muchas cosas. Ahora, el aumento de volumen en un recipiente tampoco puede ser así algo definitivo...

Resultado 7. Hay maestros para quienes la inmersión mide el peso, no el volumen, o están confundidos al respecto.

Ejemplo 1. Durante la tercera sesión en el taller matutino, los maestros miden piedras siguiendo las indicaciones de la ficha "Volumen por inmersión" (SEP, 1999).

> 109: El problema es que ejerces una presión, es una variable que influye en el resultado.
> 111: O sea ¿sube más el agua?
> 113: Claro.

Ejemplo 2. Durante la tercera sesión del taller vespertino, los maestros miden piedras siguiendo las indicaciones de la Ficha "Volumen por inmersión" (SEP, 1999).

> 19: Maestra: Lo que pasa es que este asunto mide el volumen pero, ¿considera el peso?... ¿Qué estamos midiendo?

Sobre los significados

Al revisar el informe sintético de codificación de estos significados se obtiene la lista siguiente, ordenada en forma decreciente, de acuerdo con el número de párrafos clasificados en las subclases correspondientes:

- volumen interno
- volumen ocupado
- número
- volumen encerrado
- volumen desplazado

Resultado 8. En el discurso espontáneo de los docentes se ponen de manifiesto todos los significados que se pueden asociar con el vocablo volumen, de acuerdo con lo establecido en esta investigación.

Los siguientes extractos del discurso de los maestros forman parte de la evidencia a este respecto.

- **Volumen interno**

Ejemplo (transcripción del audio de la tercera sesión matutina)

> 567: Concluimos también que un volumen es francamente el cuerpo, la materia que conforma el cuerpo. Para diferenciar un poco del concepto de capacidad...

- **Volumen ocupado**

Ejemplo (transcripción del video tercera sesión matutina)

> 25: concluimos que volumen es el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio.

- **Número**

Ejemplo. Respuesta a una pregunta del cuestionario 3: ¿puedes obtener el volumen de los siguientes objetos?

> 94: M12: Una tuerca. Sí. Pero con medidas muy precisas.194: Estanque. Multiplicando ancho por alto por largo.

- **Volumen encerrado**

Ejemplo. Respuesta a la pregunta del cuestionario 3: ¿puedes obtener el volumen de una esfera navideña?

> 21: V5: En los cuerpos geométricos que sean huecos podemos saber qué tanto puede caber en ellos.

- **Volumen desplazado**

Ejemplo. Respuestas a la pregunta del cuestionario 3: ¿Cómo calcularías el volumen de los siguientes objetos?

> 185: M13 Trompo. Por desplazamiento.188: V3 Piedra. Por diferencia en un líquido.191: V9 Piedra. Introduciéndola a un recipiente con agua.

Resultado 9. En situaciones no escolares los docentes ponen de manifiesto el uso de diferentes significados, el preponderante es volumen como un número.

El significado volumen como un número aparece hasta el tercer lugar respecto de la cantidad de párrafos codificados, pero éste es el significado subyacente, de manera general, en el discurso de los maestros. De hecho, algunos de los resultados sobre objetos volumen-medibles reflejan esta situación. Los objetos son volumen-medibles si tienen tres magnitudes lineales o si su forma se asocia con un cuerpo geométrico escolar y una fórmula. Además, cuando se les pregunta cómo calcularían el volumen, la mayoría de los maestros afirma que lo obtendrían aplicando una fórmula o multiplicando tres dimensiones.

Ejemplo1. Respuestas a la pregunta del cuestionario 3: ¿cómo obtendrías el volumen de los siguientes objetos?

190: V5: Hoja de papel. Obtener el área y multiplicar por el grueso de la hoja.
192: V9: Estanque. Si tiene forma de cuerpo geométrico, por fórmula.
193: V10: Auditorio. Multiplicando ancho por alto por largo.
194: V10: Estanque. Multiplicando ancho por alto por largo.

Resultado 10. Cuando a los maestros se les pide directamente una definición de volumen hay una tendencia general a asignarle uno de dos significados: capacidad o volumen ocupado.

Parte de la evidencia que sustenta el resultado anterior se encuentra en las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario 3: ¿qué entiendes por volumen? Las respuestas de todos los maestros fueron:

12: M2: Es la altura de una superficie
13: M4: Lo que cabe dentro de un cuerpo, es la capacidad de un recipiente... o es la tercera dimensión.
14: M6: Es el espacio que ocupa un cuerpo.
15: M9: El espacio que ocupa un cuerpo.
16: M11: El lugar que ocupa un cuerpo en el espacio,... es decir su tridimensionalidad.
17: M12: El sólido geométrico que ocupa un lugar en el espacio.
18: M13: La cantidad de materia que contiene un cuerpo, cualquiera que sea.
19: M14: Es el contenido que hay dentro de un recipiente y puede ser líquido, gaseoso o sólido.
20: V3: Espacio ocupado por un cuerpo.
21: V5: Es el espacio que ocupa un cuerpo, puede ser regular o irregular. En los cuerpos geométricos que sean huecos podemos saber qué tanto puede caber en ellos.
22: V9: El lugar que ocupa un cuerpo en el espacio.
23: V10: Es el espacio interior que guarda un cuerpo.

Estas respuestas pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Volumen interno: M13.

- Volumen ocupado: M6, M9, M11, V3, V5, V9.
- Volumen como capacidad: M4, M14, V5.
- Significados relacionados con la dimensionalidad: M2, M4, M11.
- Volumen como un número: ninguno.
- Volumen desplazado: ninguno.

Como se ha repetido, el pensamiento del maestro de educación básica revela más la influencia de su experiencia como estudiante de primaria que la de sus años de formación profesional. Los modelos de enseñanza mexicanos anteriores a los setenta contienen la definición de volumen como espacio ocupado. Esto puede apreciarse en la siguiente, tomada del libro de 5° de matemáticas usado en la década de los años 1960-1970: "Espacio es el lugar que rodea a todos los objetos y, desde luego, a nosotros [...]. Volumen es la extensión que un cuerpo ocupa en el espacio" (Novaro, 1969:26).

La mayoría de los maestros participantes estudiaron la primaria durante la década de los años sesenta o antes. Por tanto, los modelos de enseñanza de aquellas épocas se ven reflejados en su discurso y en sus ideas.

Resultado 11. Algunos maestros han constituido un objeto mental relacionado con la corporeidad o característica de los cuerpos volumen-medibles de tener tres dimensiones.

Ejemplo. Respuestas a la pregunta 1 del cuestionario 3: ¿qué entiendes por volumen?

13: M4: ...o es la tercera dimensión.
16: M11: ....es decir su tridimensionalidad.

En estos datos se vislumbra la influencia de otra definición incluida en los modelos de enseñanza anteriores a los años setenta: "Como el cuerpo de forma regular más sencilla es el prisma rectangular o paralelepípedo, se ha generalizado la idea de que volumen es todo lo que puede medirse en tres dimensiones: largo, ancho y espesor; o bien, largo, ancho y altura" (Novaro, 1969:26).

Vale la pena repetir que aun cuando al pedir una definición de volumen los maestros no hablen de fórmulas o números, en su discurso éste es el significado subyacente, ya que los objetos volumen-medibles, los procedimientos de medición que mencionan y la manera en qué resuelven los problemas tienen fundamentalmente un carácter cuantitativo.

Reflexiones finales

Como puede concluirse de los resultados presentados, los maestros participantes en el taller tienen un objeto mental volumen donde los aspectos cuantitativos son preponderantes. Su conjunto de objetos volumen-medibles está conformado de objetos para los cuales es posible cuantificar tres datos numéricos para poderlos multiplicar; esto es, para aplicar la fórmula. El número es el significado preponderante en todo su discurso; el procedimiento para medir volúmenes que más usan es la aplicación de la fórmula. Esta situación obedece a los modelos de enseñanza con los que ellos estudiaron, hasta antes del modelo de la década de los setenta (Sáiz, 1998), los aspectos cuantitativos en todos los ámbitos de la matemática eran los preponderantes en la enseñanza. La enseñanza de la medición privilegiaba dos aspectos: el uso del sistema métrico decimal y la aplicación de fórmulas (Sáiz, 1998).

Conocer los objetos mentales volumen de los maestros permite obtener una primera idea de lo que está siendo enseñado a los niños sobre dicho concepto en la escuela primaria. Asimismo, algunos de los problemas que se encuentran al analizar las concepciones sobre el volumen de los niños podrían explicarse al conocer las concepciones de los maestros sobre este tema.

Por un lado, los resultados aquí expuestos señalan aspectos a ser considerados en programas de formación y actualización de profesores. Es importante distinguir y, al mismo tiempo, relacionar el volumen y la capacidad, el volumen y el peso, el volumen y el área de un cuerpo. Es necesario reforzar procedimientos cualitativos para resolver problemas sobre volumen. Es importante enriquecer la enseñanza de este concepto y no reducirla a la aplicación de fórmulas.

Por otro lado, estos resultados corroboran la influencia de los modelos de enseñanza con los cuales los maestros estudiaron en sus objetos mentales volumen y permiten obtener una idea de cómo se transfieren significados y definiciones y, aún, modelos de enseñanza a través del tiempo. Los estudios sobre concepciones se siguen preguntando cómo modificar las concepciones y creencias de los maestros. Algunas respuestas han sido dadas (ver por ejemplo Civil, 1996; Blanco 1996; Cooney, 1999) pero falta mucho por hacer.

Por último, vale la pena subrayar que el proyecto "El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza" mostró la riqueza de dicho concepto, la cual se debe, entre otros factores, a la variedad de significados que pueden asociarse al vocablo volumen, la complejidad de las características físicas y geométricas de los objetos volumen-medibles y las relaciones que guarda con otros atributos de los cuerpos como la capacidad y el peso, las cuales, además, permiten medir el volumen indirectamente de diferentes formas como usando la inmersión o pesando. Se espera que este trabajo haya permitido al lector vislumbrar parte de esta "riqueza".

Bibliografía

Battista, M. T. (1994). "Teacher Beliefs and the Reform Movement in Mathematics Education", en *Phi Delta Kappan*, 2, pp. 462-469.

Blanco, L. (1996). "Aprender a enseñar Matemáticas: tipos de conocimiento", en Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*, Granada: Mathema, pp. 199-224.

Civil, M. (1996). "Pensando sobre las matemáticas y su enseñanza: Una experiencia con estudiantes para profesores de primaria", en Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.) *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática* Granada: Mathema, pp. 175-198.

Clement, J. (1999). "Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability" en Kelly, A. y Lesh, R. (eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cooney, T. J. (1999). "Conceptualizing Teachers Ways of Knowing", en *Educational Studies in mathematics*, 38, pp. 163-187.

Enochs L. G. y Gabel, L.D. (1984). "Preservice Elementary Teachers' Conceptions of Volume", en *School Science and Mathematics*, 84 (8): 670-680.

Figueras, O. y Waldegg, G. (1986). "La medición en la escuela secundaria", en *Cuadernos de Investigación*, México: SME/CINVESTAV.

Filloy, E. (1997). *La observación en matemática educativa. Modelos teóricos locales y sistemas matemáticos de signos*, México (notas del autor).

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. y Rubio, G. (1992). "Familias de problemas verbales aritmético algebraicos y las tensiones entre los diferentes usos de las expresiones algebraicas", en *Ciencias de la Cognición y Tecnología de la Información*, 6.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Holanda: Reidel Pub. Co.

Hart, K. *et al*. (1985). *Teacher's Guide. Chelsea Diagnostic Mathematics Test*. Gran Bretaña: NFER-Nelson.

Llinares, S. (1996). "Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria", en Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*, Granada: Mathema, pp. 13-36.

Novaro, R. (1969). *Mi libro de 5º año. Aritmética y geometría*. México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos-SEP.

Pajares, F. (1992). "Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct", en *Review of Educational Research*, 62, (3), pp. 307-332.

Pehkonen, E. y Furinghetti, F. (2001). "An attempt to clarify definitions of the basic concepts: belief, conception, knowledge", en Speiser, R., Maher, C.A., y Walter, C.N. (eds.). *Proceedings of the Twentythird Annual Meeting of the North American Chapter of the Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 647-656.

Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The Child's Conception of Geometry*, Londres: Routledge and Kegan Paul.

Potari, D. y Spiliotopoulou, V. (1996). "Children's Approaches to the Concept of Volume", en *Science Education* 80 (3), pp. 341-360.

PRONAP (1997). *El conocimiento en la escuela: La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, audio núm. 5, México: PRONAP / SEP.

Puig, L. (1994). "Semiótica y matemáticas", en *Eutopías*, 2a época, 51, Valencia: Episteme, pp. 1-19.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.

Ricco, G. y Vergnaud, G. (1983). "Représentation du volume et arithmetisation. Entretiens individuels avec des élèves de 11 a 15 ans", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (1), pp. 27-69.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruselas, Bélgica: DIDIER HATIER.

Sáiz, M. (1998) "How has measurement been taught in Mexico?", en *Proceedings of the XXth Annual Meeting of the PME–NA*, 1, pp. 328-334.

Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza*, tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, México: CINVESTAV-IPN.

Sáiz, M y Figueras, O. (2000). "Some Primary Teachers' Conceptions about the Mathematical Concept of Volume", en Fernández, M.L. (ed.) *Proceedings of the XXIIth Annual Meeting of the PME-NA*, 2, pp. 491-497.

SEP (1999b). *Fichero. Actividades didácticas matemáticas, 5° grado*, México: SEP, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Thompson, A. G. (1992). "Teacher's Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research en Grows", en Douglas A. (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Nueva York: MacMillan Pub. Co., pp. 127-146.

Vergnaud, G. (1983). "Didactique du concept de volume", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (1), pp. 9-25.

Vergnaud, G. *et al.* (1983). "Une experience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12–13 ans)", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (1), pp. 71-120.

Artículo recibido: 27 de noviembre de 2002
Aceptado: 2 de abril de 2003