T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
MUHASEBE VE FİNANSMAN BİLİM DALI

STOKASTİK VOLATİLİTE MODELLEMESİNDE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Sibel UÇAR VATANSEVER

BURSA – 2024

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
MUHASEBE VE FİNANSMAN BİLİM DALI

STOKASTİK VOLATİLİTE MODELLEMESİNDE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Sibel UÇAR VATANSEVER

Danışman:
Prof. Dr. Fehmi Ali ILDIR

BURSA – 2024

TEZ ONAYI

T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

……. Anabilim / Ana sanat Dalı, ... Bilim Dalı'nda numaralı……...….'nın .....Hazırladığı " konulu ..... (Yüksek Lisans / Doktora / Sanatta Yeterlik Tezi / Çalışması) ile ilgili tez savunma sınavı, / / 20.... günü ..... - saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin/çalışmasının ..... (başarılı / başarısız) olduğuna ..... (oybirliği / oy çokluğu) ile karar verilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı ve Sınav Komisyonu Başkanı)
Prof. Dr. Fehmi Ali ILDIR
Bursa Uludağ Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Özer ARABACI
Bursa Uludağ Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Adem ANBAR
Bursa Uludağ Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Turhan KORKMAZ
Mersin Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Kadir TUTKAVUL
Bursa Teknik Üniversitesi

…./…./ 20….

YEMİN METNİ

Doktora tezi olarak sunduğum " Stokastik Volatilite Modellemesinde Varyans Azaltma Yöntemleri " başlıklı çalışmanın bilimsel araştırma, yazma ve etik kurallarına uygun olarak tarafımdan yazıldığına ve tezde yapılan bütün alıntıların kaynaklarının usulüne uygun olarak gösterildiğine, tezimde intihal ürünü cümle veya paragraflar bulunmadığına şerefim üzerine yemin ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Sibel UÇAR VATANSEVER

Öğrenci No: 711414020

Anabilim Dalı: İşletme

Programı:

Tezin Türü: ☐ **Yüksek Lisans /** ☒ **Doktora** ☐ **Sanatta Yeterlilik**

ÖZET

Yazar adı soyadı	Sibel UÇAR VATANSEVER
Üniversite	Bursa Uludağ Üniversitesi
Enstitü	Sosyal Bilimler Enstitüsü
Anabilim dalı	İşletme
Bilim dalı	Muhasebe Finansman Anabilim Dalı
Tezin niteliği	*Doktora*
Mezuniyet tarihi	……/……/20….
Tez danışmanı	Prof. Dr. Fehmi Ali ILDIR

STOKASTİK VOLATİLİTE MODELLEMESİNDE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİ

Bu çalışmanın temel amacı, ulusal literatürde yeni bir konu olarak ele alınan Stokastik Volatilite Modelleme kapsamında Varyans Azaltma Yöntemlerinin (VAY) uygulanmasıdır. Bu bağlamda, Heston Modeli (1993) özelinde bu yöntemlerin uygulama aşamaları ve etkinlikleri incelenmektedir. Bu amaç doğrultusunda, Heston modelinin parametrelerinin hassasiyeti göz önünde bulundurularak, çalışmada anlamlı sonuçlar elde etmek için Avrupa tipi BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerinin fiyat verileri kullanılarak modelin parametrelerinin kalibrasyonu yapılmıştır. Kalibrasyon sonucunda elde edilen parametre değerleri, kayıp fonksiyon yöntemi ile değerlendirildikten sonra simülasyonlarda kullanılmıştır. Simülasyon sonuçları, Heston Karakteristik fonksiyonu ile hesaplanan teorik fiyatları ile karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

Çalışmada, yöntemlerin farklı simülasyon sayıları ve vadelerdeki etkinliğini incelemek amacıyla, her bir Varyans Azaltma Yöntemi için çeşitli simülasyon sayıları ve vadelerde simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. VAY uygulandığında ve uygulanmadığında elde edilen sonuçlar Standart Hata ve Ortalama Kare Hatası (MSE) değerleri hesaplanarak değerlendirilmiştir. Varyans Azaltma Yöntemlerinin Heston modeli simülasyonları üzerindeki etkisi ve bu yöntemlerin modelin doğruluğuna ve güvenilirliğine olan etkisi analiz edilmiştir.

Elde edilen bulgular, Stokastik Volatilite Modeli ile yapılan simülasyonlarda Önem Örnekleme, Tabakalı Örnekleme, Zıt Değişkenler ve Kontrol Değişkenleri yöntemlerinin uygulanmasının varyansı azaltabilidiğini, opsiyon fiyatlandırma modellerinde olumlu sonuçlar elde edilebildiğini ve farklı uygulama potansiyellerinin olduğunu göstermiştir. Yöntemlerin karşılaştırılması sonucunda, Alım opsiyon fiyatlamalarında ve vade uzadıkça Önem Örnekleme yönteminin etkin sonuçlar verdiği, Satım opsiyon fiyatlamalarında ise Kontrol Değişkenleri yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği ve genel olarak bu iki yöntemin diğer yöntemlerden daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Ayrıca çalışmanın bulguları, Varyans Azaltma Yöntemlerinin literatürde belirtilen kullanım amaçlarıyla da uyum içinde olduğunu görtermiştir.

Anahtar kelimeler: Opsiyon Fiyatlandırma, Heston Modeli, Kalibrasyon, Monte Carlo Simülasyonu, Varyans Azaltma Yöntemleri, BİST 30

ABSTRACT

Name & surname	Sibel UÇAR VATANSEVER
University	Uludağ University
Institute	Institute of Social Sciences
Field	Department of Business Administration
Subfield	Accounting and Finance
Degree awarded	*PhD.*
Date of degree awarded	……/……/20….
Supervisor	Prof. Dr. Fehmi Ali ILDIR

VARIANCE REDUCTION METHOD FOR STOCHASTIC VOLATILITY MODELS

The primary objective of this study is to apply Variance Reduction Techniques (VRTs) within the context of Stochastic Volatility Models, a topic that is newly addressed in the national literature. In this regard, the application stages and effectiveness of these techniques are examined specifically within the Heston Model framework. To this end, considering the sensitivity of the Heston model's parameters, the calibration of the model's parameters was conducted using price data from European-style BIST 30 index option contracts to achieve meaningful results in this study. The parameter values obtained from the calibration were evaluated using the loss function method before being utilized in simulations. Simulation results were assessed by comparing them with theoretical prices calculated through the Heston Characteristic function.

In this study, to examine the effectiveness of the techniques across different simulation numbers and maturities, simulations were conducted for each Variance Reduction Technique at various simulation numbers and maturities. The results obtained with and without the application of VRTs were evaluated by Standard Error and Mean Squared Error (MSE) values. The impact of Variance Reduction Techniques on the simulations of the Heston model and their effect on the model's accuracy and reliability were analyzed.

The findings demonstrated that the implementation of Importance Sampling, Stratified Sampling, Antithetic Variates, and Control Variates in the simulations of Stochastic Volatility Models could reduce variance, yield positive outcomes in option pricing models, and offer diverse application potentials. Upon comparing the techniques, it was observed that Importance Sampling yielded effective results in call option pricing and as maturity increased, whereas Control Variates provided better outcomes in put option pricing, with these two techniques generally outperforming others. Furthermore, the study's findings were found to be consistent with the intended use of Variance Reduction Techniques as stated in the literature.

Keywords: Option Pricing**,** Heston Model, Calibration, Monte Carlo Simulation, Variance Reduction Techniques, BIST 30

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlık sürecinde bana her aşamada destek olan ve değerli önerileriyle katkıda bulunan tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Fehmi Ali Ildır'a derin minnettarlığımı ifade etmek isterim.

Tez komitemde yer alan değerli üyeler Sayın Prof. Dr. Adem Anbar'a, Sayın Prof. Dr. Özer Arabacı'ya, Sayın Prof. Dr. Turhan Korkmaz'a ve Doç. Dr. Kadir Tutkavul'a teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Beni tüm süreç boyunca yüreklendiren eşim Hüseyin Vatansever'e ayrıca teşekkür ederim.

Sibel UÇAR VATANSEVER
01/03/2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI i
YEMİN METNİ ii
ÖZET iii
ABSTRACT iv
ÖNSÖZ v
İÇİNDEKİLER.. vi
SİMGELER DİZİNİ x
KISTLAMALAR ve AÇIKLAMALARI……..…….xi
ŞEKİLLER LİSTESİ xii
TABLOLAR LİSTESİ xiii
GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE OPSİYON FİYATLAMA

1.1. Finansal Matematikte Stokastik Süreçler ve İlgili Temel Kavramlar 5
1.1.1. Olasılık Teorisi 5
1.1.2. Stokastik Süreçler 8
1.1.3. Markov Süreci 9
1.1.4. Wiener Süreci 11
1.1.4.1. Cholesky Ayrışımı……13
1.1.5. İto İntegral 13
1.1.5.1. Stokastik Integral……15
1.1.5.2. Ito'nun Leması ……16
1.1.6. Girsanov Teoremi ve Radon-Nikodym Türevi 17
1.1.7. Martingale Ölçümü 19
1.1.8. CIR Süreci 20

1.1.9. Euler Diskretizasyon Yöntemi 21
1.2. Opsiyonların Fiyatlandırılması ve İlgili Temel Kavramlar 23
1.2.1. Black-Scholes Modelin Özellikleri 24
1.2.2. Opsiyon Fiyatlandırmalarda Alım Satım Paritesi 27
1.2.3. Opsiyonlar için Alt ve Üst Sınırlar 28
1.2.4. Black-Scholes Modelinin Varsayımları 29
1.2.5. Black-Scholes Modelinin Varsayımlarındaki Dezavantajlar 30
1.3. Volatilite ve İlgili Temel Kavramlar 31
1.3.1. Stokastik Volatilite 32
1.3.2. Tarihsel Volatilite 33
1.3.3. Zımni Volatilite 34
1.3.3.1 Kök Bulma Yöntemi (Bisection)..... .35

2. BÖLÜM

HESTON MODELİ VE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİ

2.1. Heston Modeli 37
2.1.1. Heston Modelin Stokastik Diferansiyel Denklemi 37
2.1.2. Heston Modelin Karakteristik Fonksiyonu 39
2.1.3. Heston Modelin Varsayımları..... 42
2.2. Heston Modelin Parametre Etkileşimleri 42
2.2.1. Korelasyon Parametresi 44
2.2.2. Varyansın Volatilitesi Parametresi 45
2.2.3. Başlangıç Varyans Parametresi 47
2.2.4. Uzun Vadeli Varyans Parametresi 47
2.2.5. Ortalamaya Dönüş Hızı Parametresi 48

2.2.6. Teta, Kappa ve Varyans Parametrelerin Arasındaki Etkileşim 49
2.3. Heston Modelin Avantajları ve Dezavantajları 51
2.3.1. Heston Modelinin Avantajları 51
2.3.2. Heston Modelinin Dezavantajları 52
2.4. Heston Modelinde Parametrelerin Kalibrasyonu 52
2.5. Kayıp Fonksiyonu ile Parametre Sapmalarının Değerlendirilmesi 54
2.6. Heston Modelinde Euler Şeması 54
2.7. Negatif Varyansın Önlenmesi 55
2.8. Simülasyon Adımları 56
2.9. Opsiyon Fiyatlandırma ve Değerlendirilmesi 59
2.10. Varyans Azaltma Yöntemleri 60
2.10.1. Zıt Değişkenler 63
2.10.2. Kontrol Değişkenleri 66
2.10.3. Önem Örnekleme 71
2.10.3.1. Stokastik Süreçlerde Önem Örnekleme 74
2.10.4. Tabakalı Örnekleme 75

3. BÖLÜM

STOKASTİK VOLATİLİTE MODELİNDE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ: AMPİRİK UYGULAMA

3.1. Kaynak Araştırması 78
3.2. Araştırmanın Problemi 83
3.3. Araştırmanın Amacı 83
3.4. Araştırmanın Kapsamı ve Sınırlılıkları 84
3.5. Araştırmanın Veri Setleri 88
3.6. Araştırmanın Yöntemi 91
3.6.1. Birinci Aşama: Veri Toplama, Kalibrasyon ve Parametre Doğruluğu. 92
3.6.2. İkinci Aşama: Simülasyon Adımlarının Oluşturulması 92

3.6.3. Üçüncü Aşama: Varyans Azaltma Yöntemlerinin Uygulanması 93
3.6.3.1. Zıt Değişkenler Uygulama Adımları……...……..94
3.6.3.2. Kontrol Değişkenleri Uygulama Adımları...…….96
3.6.3.3. Önem Örnekleme Uygulama Adımları..……...97
3.6.3.4. Tabakalı Örneklem Uygulama Adımları…...…….98
3.7. Araştırmanın Bulguları 100
3.7.1. Parametre Değerleri 100
3.7.2. Getirilerin Dağılımı……..101
3.7.3. Zımni Volatilite ile Parametrelerin Değerlendirilmesi 105
3.7.4. Volatilite Gülümsemesi ve Yüzeyi 107
3.7.5. Simülasyon sonuçları 109
3.7.5.1. Zıt Değişkenler Simülasyon Sonuçları……..……..112
3.7.5.2. Kontrol Değişkenleri Simülasyon Sonuçları……..…….115
3.7.5.3. Önem Örnekleme Simülasyon Sonuçları ……..…..116
3.7.5.4. Tabakalı Örneklem Simülasyon Sonuçları ……..120
3.7.5.5. Simülasyon Sonuçlarının Karşılaştırılması……..……...122

SONUÇ ve ÖNERİLER..... 125
KAYNAKLAR 129
EKLER..... 137
EK 1. Gram Charli Düzeltmesi..... 137
EK 2. Heston Modele Ito's Lema 138
EK 3. Karakteristik Fonksiyon – Phyton kodu..... 139
EK 4. Euler Heston - Phyton Kodu 141
EK 5. Zıt Değişkenler VAY – Phyton Kodu 143
EK 6. Kontrol Değişkenleri VAY – Phyton Kodu 145
EK 7. Önem Örnekleme VAY – Phyton Kodu 147
EK 8. Tabakalı Örnekleme VAY – Phyton Kodu 149
ÖZGEÇMİŞ……..... 151

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
Cov	Kovaryans
$Corr$	Korelasyon
ΔW	Wiener süreci
$\mathrm{d}W$	Wiener süreci
$N(0,1)$	Standart normal dağılımın
$N(\mu, \sigma)$	Normal dağılımın
$\phi(z)$	Standart normal dağılımın yoğunluk fonksiyonunu
$\tilde{\mathbb{P}}$	Risk nötr değerleme
$\in$	Aittir
ω	Olay
Ω	Örneklem uzayı
P	Olasılık ölçüsü
(Ω,F,P)	Olasılık uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayı
$\triangleq$	Tanımlama
$\forall$	Tüm elemanlar
$P(. \mid .)$	Koşullu olasılık
e^x	Eksponansiyel fonksiyon
Δt	Küçük bir zaman aralığı
μ	Dayanak varlığın yıllık getirisi
σ	Dayanak varlığın standard sapması
$\boldsymbol{\gamma}$	Brown hareketi başlangıç noktası
K	Opsiyonun kullanım fiyatı
S	Dayanak varlık piyasa fiyatı
$S(t)$	t zamanındaki dayanak varlık piyasa fiyatı
T	Opsiyonun vade sonu
r	Risksiz faiz oranı
q	Temettü
θ	Teta
ρ	Korelasyon
∂	Partialis (Kısmi türev)
E	Beklenen değer
Var	Varyans
$\Sigma_{i=1}^{n}$	i den n'ye kadar toplam
λ	Üssel dağılımın (exp. dist) yoğunluk fonksiyonunun
$\lim_{n\to\infty}$	Limit
$L(\Theta)$	Kayıp fonksiyonu değeri
Ψ^{-1}	Ters işlem
$SqErr$	Kare hata
H_T	Fonksiyonlar kümesi
ln	Doğal Logaritma

KISALTMALAR VE AÇIKLAMALARI

BİST 30	Borsa İstanbul Endeks 30
BS	Black-Scholes
CIR	Cox, J. C., Ingersoll, J. E., ve Ross, S. A Modeli
Log	Logaritma
SDD	Stokastik Diferansiyel Denklem
SV	Stokastik Volatilite
VAY	Varyans Azaltma Yöntemleri
vd.	Ve diğer(leri)

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1. Normal ve Log-normal Dağılım Karşılaştırılması.....8
Şekil 2. Wiener Süreci dz ile Genelleştirilmiş Wiener Süreci dx.....12
Şekil 3. İntegral Denklemlerden Diferansiyel Denklemler Geçişin Gösterimi.....15
Şekil 4. Euler Diskretizasyon Yöntemi.....23
Şekil 5. Korelasyon Parametrenin Yoğunluk Fonksiyonun Üzerindeki Etkisi.....44
Şekil 6. Korelasyonun Volatilite Gülümsemesi Üzerisindeki Etkisi.....45
Şekil 7. Varyansın Volatilite Yoğunluk Fonksiyonun Üzerindeki Etkisi.....46
Şekil 8. Varyansın VolatilitesininVolatilite Gülümsemesi Üzerisindeki Etkisi.....46
Şekil 9. Zımni Volatilite Değerlerin Volatilite Gülümsemesi Üzerisindeki Etkisi.....47
Şekil 10. Uzun Vadeli Varyansın Volatilite Gülümsemesi Üzerindeki Etkisi.....48
Şekil 11. Ortalamaya Dönüş Hızı Parametresindeki Volatilite Gülümsemesine Etkisi...49
Şekil 12. Teta, Kappa ve Varyans Parametrelerin Birbilir ile Etkileşimi.....50
Şekil 13. Heston Modelinde Varyans Azaltma Yöntemlerinin Uygulama Akış Şeması. 63
Şekil 14. Kontol Değişkenleri Şeması.....71
Şekil 15. Araştırmanın Akış Şeması.....91
Şekil 16. BİST 30 Endeksin Bir Yıllık Log Getirisi.....102
Şekil 17. BİST 30 Endeksin Bir Yıllık Getiri Dağılımı.....103
Şekil 18. Heston Modelin Parametrelerini Kullanarak BİST 30 Endeksin 1000 Günlük Simülasyonların Log Getirisi.....104
Şekil 19. Heston Modelin Parametrelerini Kullanarak BİST 30 Endeksin 1000 Günlük Simülasyonların Getiri Dağılımı.....105
Şekil 20. BİST 30 Alım Opsiyonları için Volatilite Gülüşü ve Volatilite Yüzeyi.....107
Şekil 21. BİST 30 Satım Opsiyonları için Volatilite Gülüşü ve Volatilite üzeyi.....108
Şekil 22. Volatilite Simülasyon Sonucu.....109
Şekil 23. Fiyat Simülasyon Sonucu.....110
Şekil 24. 1.000 Adet Simülasyon Sonucu.....110
Şekil 25. Negatif Korelasyon Altında Dayanak Varlığın Fiyatı ve Varyansı.....111
Şekil 26. Pozitif Korelasyon Altında Dayanak Varlığın Fiyatı ve Varyansı.....111
Şekil 27. Zıt Değişkenler Yönteminin Simülasyon Görseli.....112
Şekil 28. Sol: Önem Örnekleme Olmadan, Sağ: Önem Örnekleme ile Simülasyon.....117
Şekil 29. Sol: Euler ile Simülasyon Dağılımı. Sağ: Tabakalı Örnekleme ile Normal Dağılımdaki İyileşme.....121

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1. Bist 30 Endeks Alım ve Satım Opsiyon Fiyatları, Kullanım Fiyatları ve Opsiyonların vade Tarihleri, 11.07.2023 Günkü Fiyatlardır (TL).. 89

Tablo 2. BİST 30 Endeks Opsiyon Sözleşme Değerleri ile Kalibre Edilen Heston Modelin Parametre Değerleri. 100

Tablo 3. BİST 30 Endeks Opsiyon Sözleşme Verileri Üzerinden Hesaplanan Volatilite ve MSE Değerleri. 106

Tablo 4. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Zıt Değişkenler ile elde edilmiş Alım Opsiyon Fiyatları (TL) 113

Tablo 5. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Kontrol Değişkenleri ile elde edilmiş Alım Opsiyon Fiyatları (TL).. 115

Tablo 6. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Önem Örnekleme ile elde edilmiş Alım Opsiyon Fiyatları (TL). 118

Tablo 7. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Tabakalı Örneklem ile elde edilmiş Alım Opsiyon Fiyatları (TL). 120

Tablo 8. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile VAY karşılaştırma Tablosu ……...123

GİRİŞ

Dünya ekonomisinde uluslararası işbirliğini artırmak ve finansal istikrarı desteklemek amacıyla 1944 yılında kurulan Bretton Woods Sistemi'nin 1971 yılında sona ermesi, finans sektöründe önemli değişikliklere neden olmuştur. Özellikle farklı para birimleriyle iş yapan firmalar, kur farkından kaynaklanan riskleri minimize etme ihtiyacıyla karşı karşıya kalmıştır. Çöküşün etkilerinden biri de, türev ürün piyasalarının gelişmesi olmuştur. Bretton Woods'un ardından opsiyonlar, vadeli işlemler ve diğer türev enstrümanlar finansal piyasalarda daha karmaşık ve çeşitli hale gelmiştir.

Vadeli işlem sözleşmeleri, gelecekte belirli bir tarihte, fiyatta ve miktarda alım veya satım hakkı tanıyan ya da yükümlülüğü getiren finansal enstrümanlar olarak tanımlanmaktadır. Geleceği tam olarak öngörmek mümkün olmasa da çeşitli stratejilerle risklerin oluşturduğu zararlar azaltılabilmektedir. Türev ürünleri hedging, spekülasyon ve arbitraj gibi finansal stratejilerin uygulanmasına olanak tanımaktadır. Finansal piyasalardaki belirsizliğin arttığı dönemlerde, türev ürünlerin kullanımı artmaktadır. Bu sözleşmeler, farklı varlıkların, dövizin, kıymetli metallerin, finansal göstergelerin veya sermaye piyasası araçlarının gelecekteki fiyat değişikliklerine karşı korunma amacıyla kullanılmaktadır. Ayrıca, türev ürünler yatırımcılara finansal ürün çeşitliliği sunmakta ve böylece yatırım portföylerinde riskin daha etkin bir şekilde dağıtılmasına imkân sağlamaktadır. Vadeli işlem piyasaları ve türev ürünler, ekonomik istikrarın sürdürülmesine katkıda bulunarak finansal belirsizlikleri azaltmaktadır.

Türev ürünlerin kullanımının artması ve bu ürünlerin finansal piyasalarda yarattığı çeşitlilik ve risk yönetimi imkânları, opsiyon fiyatlandırma modellerinin önemini daha da artırmaktadır. Bu bağlamda, opsiyon fiyatlandırma modelleri, piyasa beklentilerinin doğru bir şekilde yansıtılması ve adil bir pazar ortamının sağlanması için kritik bir role sahiptir. Opsiyon fiyatlandırma modellerinin anlaşılması ve hata paylarının incelenebilmesi, piyasa katılımcıları için finansal stratejilerin uygulanabilirliği açısından önemli bir rol oynamaktadır.

Opsiyon fiyatlandırma süreçlerindeki sapmaların anlaşılabilmesi ve hataların tespiti için, mevcut opsiyon fiyatlandırma modellerinin temel yapı taşları ve matematiksel yapıları kapsamlı bir şekilde incelenmektedir. 1900 yılında, hisse senedi fiyatlarının dinamiklerini modellemek için ‘Théorie de la spéculation’ adlı tezinde Brownian

hareketinin kullanılmasını ilk öneren kişi Louis Bachelier'dir. Bachelier, finansal matematik alanında bir öncü olarak kabul edilmektedir. Aynı zamanda Robert Brown, Albert Einstein ve Kiyosi Itô, Brownian hareketi ve stokastik entegrasyon teorisi üzerine yaptıkları çalışmalarla finansal matematiğin temellerine katkıda bulunmuşlardır. Fisher Black ve Myron Scholes tarafından 1973 yılında yayımlanan "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" adlı makalede sunulan opsiyon fiyatlandırma modeli, finansal teori alanında mihenk taşı niteliğinde bir katkı olarak değerlendirilmektedir. Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli olarak bilinen bu model, dayanak varlık fiyatının geometrik Brownian hareketini izlemesine ve sabit bir volatilite değerine sahip olmasına imkân tanıyarak, gerçeğe uygun bir fiyat hesaplaması yapılabilmesine olanak sağlamıştır. Ancak, sabit volatilite yaklaşımına sahip olan Black-Scholes modelinin bazı eksiklikleri de bulunmaktadır ve özellikle finansal krizler gibi olaylar sırasında opsiyon fiyatlandırmalarında ciddi sapmalar gösterebilmektedir. Sabit volatilite yaklaşımına sahip opsiyon fiyatlandırma modellerinin sınırlamaları ve eksikliklerinden dolayı finans dünyasında stokastik volatilite modellerinin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur.

Stokastik volatilite modelleri, volatilitenin zaman içinde değişen bir rastgele süreç olduğunu kabul etmektedir, volatilitenin zaman içinde nasıl değiştiğini ve bu değişikliklerin opsiyon fiyatlarına nasıl etki ettiğini daha iyi anlamamıza yardımcı olmaktadır. Stokastik volatilite modelleri, finans dünyasında volatilitenin daha gerçekçi bir şekilde ele alınmasına ve opsiyon fiyatlaması, risk yönetimi, portföy yönetimi ve finansal planlama gibi birçok uygulamada kullanılmasına olanak tanımaktadır. Bu bağlamda, çalışmada Steven Heston tarafından 1993 yılında geliştirilen Heston stokastik volatilite modeline yer verilmiştir.

Geleceğin önceden tam olarak tahmin edilmesi mümkün olmadığı gibi, yatırımlarla ilişkili endojen ve egzojen risklerin tamamen ortadan kaldırılması da mümkün değildir. Ancak, olası risklerin çeşitli istatistiksel yöntemler ve simülasyon yöntemleri kullanılarak azaltılabilmesi mümkündür. Bu bağlamda, simülasyon yöntemlerinin kullanım alanlarını genişletmek ve etkinliğini artırmak amacıyla, Varyans Azaltma Yöntemleri (VAY) çeşitli bilimsel disiplinlerde geniş bir yelpazede kullanılmaktadır. Bu yöntemler, simülasyon sonuçlarının doğruluğunu ve güvenilirliğini artırarak, daha az sayıda simülasyon çalıştırılmasını sağlamakta ve böylece hem zaman hem de kaynak tasarrufu

sağlamaktadır. Varyans Azaltma Yöntemleri, Monte Carlo simülasyon yönteminin doğruluğunu artırmak amacıyla tasarlanmış metodolojilerdir. Bu yöntemler, simülasyon sonuçlarının varyansını azaltarak daha doğru ve güvenilir tahminler elde etmeyi sağlamakta ve uygulamaların performansını iyileştirmektedir.

Heston modelinin fiyat hareketlerini yakalayabilme kabiliyeti, simülasyon çalışmalarında tercih edilmesinin nedenidir. Ancak, Varyans Azaltma Yöntemleri kullanılmadığında simülasyonlarının yüksek varyanslı olma eğilimi, elde edilen sonuçların doğruluğunu ve güvenilirliğini olumsuz etkileyebilmektedir. Bu durum, Varyans Azaltma yöntemlerinin kullanılmasının önemini ortaya çıkarmaktadır.

Çalışmanın amacı, Heston modeli ile kalibre edilmiş parametreler kullanılarak, Varyans Azaltma Yöntemlerinin uygulanması ve simülasyon sonuçları üzerindeki etkilerinin incelenmesidir. Mevcut literatürde, çeşitli Varyans Azaltma Yöntemlerinin etkinliği ve uygulanabilirliği üzerine araştırmalar bulunmaktadır. Fakat, Heston modeli gibi karmaşık stokastik volatilite modellemesinde bu yöntemlerin nasıl uygulanabileceği konusunda ulusal literatürde bir araştırma boşluğu mevcuttur.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmakta olup, ilk bölümde stokastik volatilite modelin temellerini oluşturan matematiksel alt yapı sunulmaktadır. Ayrıca, zımni volatilite ve Kontrol Varyant hesaplamalarında kullanılan, sabit volatiliteye dayalı Black-Scholes modeli de bu bölümde incelenmektedir.

İkinci bölümde, çalışmanın uygulama bölümünde yer alan Heston modeli detaylıca incelenmektedir. Modelin kalibrasyonu, simülasyonu ve uygulanacak olan Varyans Azaltma Yöntemleri için gerekli bilgiler yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerine ait fiyat verileri kullanılarak Heston modelinin parametre kalibrasyonu gerçekleştirilmektedir. Bu kalibrasyon sonuçları, Varyans Azaltma Yöntemleri kapsamında gerçekleştirilecek simülasyonların başlangıç değerleri olarak kullanılmaktadır. Ardından, Varyans Azaltma Yöntemleri (VAY) kapsamında Zıt Değişkenler, Kontrol Değişkenleri, Önem Örnekleme ve Tabakalı Örnekleme yöntemlerinin Heston modeli üzerinde uygulanışı, simülasyon adımları, bulgular ve bulgulara ilişkin yorumlara yer verilmiştir.

Sonuç ve Öneriler bölümünde çalışma genel olarak özetlenmiş ve gelecekteki araştırmalar için öneriler sunulmuştur.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR VE OPSİYON FİYATLAMA

1.1. Finansal Matematikte Stokastik Süreçler ve İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümün temel amacı, opsiyon sözleşmelerinin fiyatlandırılmasında ve simülasyon sırasında kullanılan finansal matematiğin incelenmesidir.

Finansal matematik, modern finans teorisinin temel yapı taşlarını oluşturan matematiksel yapılar ve yöntemler üzerine kurulmaktadır. Opsiyon fiyatlandırma modelleri, doğaları gereği rastgelelik unsurları içermektedir. Bu bağlamda, stokastik süreçlerin incelenmesi ve bu süreçlerin temelinde yatan kavramların detaylı bir şekilde ele alınması önem taşımaktadır.

Çalışmanın uygulama bölümünde, özellikle Black-Scholes Modeli kapsamında varlık fiyatlarının evrimi ele alınırken, Heston Modeli'nde hem fiyat hem de volatilitenin evrimi ve bu evrimlerdeki rassal değişkenler incelenmektedir. Bu nedenle, finansal modellemede sıklıkla başvurulan ve önem arz eden kavramlar üzerinde durulacaktır. Bu kapsamlı inceleme, finansal piyasalardaki rastgele hareketlerin ve risklerin matematiksel olarak nasıl modellendiği ve analiz edildiği konusunda bir anlayış sağlayacaktır.

Olasılık dağılımları tarafından olayların gerçekleşme ihtimalleri hakkında bilgi sağlanmaktadır, ancak bu durum, olayların gerçekleşme durumları hakkında kesin bilgiye sahip olunduğu anlamına gelmemektedir. Bir stokastik sürecin geçmişteki davranışı ve mevcut durumu, sürecin gelecekteki davranışı hakkında önemli bilgiler sunmaktadır. Bu bağlamda, olayların analizi, olasılık teorisinin temel prensipleri üzerine kurulmuştur. Olasılık teorisi, olayların gerçekleşme olasılıklarını değerlendirirken, stokastik süreçlerin geçmiş verilerini ve mevcut durumunu dikkate alarak gelecekteki davranışlarını tahmin etmeye yönelik bir çerçeve sunmaktadır.

1.1.1. Olasılık Teorisi

Olasılık, herhangi bir olayın veya durumun ortaya çıkma, meydana gelme veya gerçekleşme şansı olarak tanımlanır (Işığıçok, 2018: 2010). Olasılık teorisi, bilimsel çalışmalarda çıkarımlar yapılması ve tahminlerde bulunulması gereken durumlar için son

derece önemli bir araç olarak kabul edilmektedir. Bu teorinin temel kavramlarından biri, deneyin sonucu olarak tanımlanan olay kavramıdır. İki çeşit olay vardır: kesin olay ve rastgele olay. Kesin olay, deney tekrarlandığında sonucu her zaman aynı olan olayken, rastgele olay, deney tekrarlandığında sonucun değişebildiği olaylardır. Olasılık teorisi, özellikle rastgele olaylarla ilgilenmektedir.

Olasılık değerlendirmeleri genellikle sezgisel olarak ifade edilse de bu değerlendirmeler yanıltıcı olabilmektedir. Bu nedenle, rasyonel düşünme sürecinde rassal değişkenler ve dağılımlar gibi kavramların tanımlanması önemlidir. Olasılık ve çıkarım, birbirlerinin yansımaları olarak görülmekte ve çıkarımların yapılabilmesi için modellere ihtiyaç duyulmaktadır. Hayatın her alanında karşılaşılan olasılık, geleceği tam olarak kestirememe durumunda dahi tahminlerde bulunulmasına olanak tanımaktadır. Bu bağlamda, eldeki bilgilerin mümkün olan en iyi şekilde kullanılması, tahmin yoluyla gerçekleştirilebilecek en önemli faaliyetlerden biri olarak değerlendirilmekte ve belirsizliği modelleyebilmek için kantitatif ifadelerin elde edilmesi hedeflenmektedir. Bu nedenle, olasılık teorisi temel bir araç olarak kullanılmaktadır (Önalan, 2022: 1).

Olasılık teorisi, bir olaya hangi sıklıkla rastlanabileceğinin ya da bir olayın olabilirlik derecesinin ölçüsüdür. Olasılık uzayı olarak adlandırılan özel bir yapı üzerinde çalışır ve bu yapı, olasılıkların ve olayların nasıl hesaplandığına dair bir çerçeve sunmaktadır. Opsiyon fiyatlama modellerinde dayanak varlığın fiyat hareketleri ve bazı modellerde volatilitenin kendisi stokastik bir süreç olarak ele alınmaktadır. Modeldeki varlık fiyat hareketi ve volatilite sürecini belirlemek amacıyla mevcut duruma ve rastgele değişkenlere dayanarak tahminler yapılmaktadır. Yapılan bu tahminler, olasılık teorisinin olasılık dağılımı, kümeler ve olasılık ölçüleri gibi temel kavramlarına dayandırılmaktadır ve olasılık uzayı $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ olarak adlandırılmaktadır. Olasılık uzayın özellikleri ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Karatzas vd., 2000: 1-5):

- Ω: Örnek uzay, bir deneyin tüm olası sonuçlarını içeren küme olarak tanımlanmaktadır.
- $\mathcal{F}$: Ω'nın alt kümelerinden oluşan ve belirli matematiksel özelliklere (σ-cebir) sahip bir koleksiyon olup, olaylar sınıfı olarak adlandırılmaktadır.

- $\mathbb{P}$: Olasılık ölçüsüdür ve olaylar sınıfı $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlı olan ve olayların olasılıklarını belirleyen bir fonksiyondur. Örneğin, adil bir zar atıldığında bir yüzünün gelme olasılığı $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$ olacaktır.

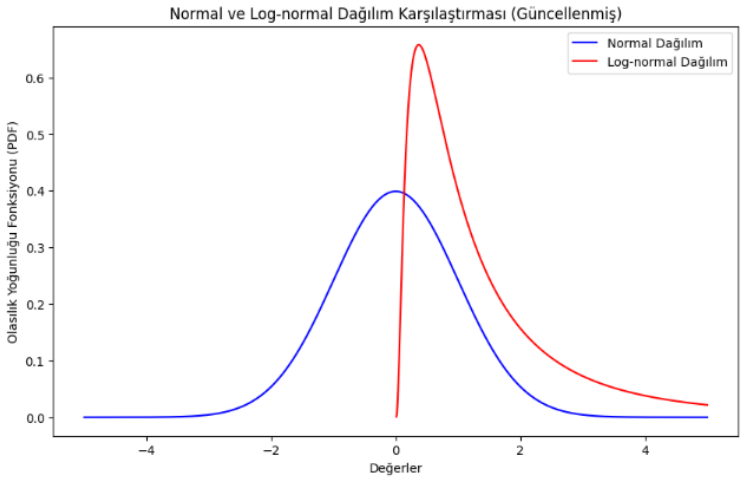
A olasılık teorisinde bir olayı temsil etmektedir. A'nın olasılığı $\mathbb{P}(A)$ olarak yazılmaktadır. Olasılık ölçüsü, aşağıdaki koşulları sağlamalıdır (Gürsakal, 2022: 468):

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ herhangi bir olayın gerçekleşme olasılığı 0 ile 1 arasında olmalıdır ve tüm olası olayların olasılıklarının toplamı 1'e eşit olmalıdır.
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, boş küme ($\emptyset$) için olasılık 0'dır.
- $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ eğer $A_1, A_2, \ldots$ ayrık (yani kesişmeyen) kümelerse, bu kümelerin birleşiminin olasılığı bu kümelerin olasılıklarının toplamına eşittir. Bu ifade, ayrık kümelerin birleşiminin olasılığının, bu kümelerin olasılıklarının toplamına eşit olduğunu belirtmektedir. Bu, olasılık ölçüsünün ayrık olaylar için toplamsal özelliğini ifade etmektedir.

Bu üç bileşen, olasılık teorisine dayalı hesaplamalarda temel yapıyı oluşturmaktadır. Örneğin, opsiyon fiyatlandırmalarında Alım veya Satım opsiyonunun fonksiyonunda alt kümeler olarak dayanak varlığın başlangıç fiyatı, kullanım fiyatı, risksiz faiz oranı ve volatilite bulunmaktadır. Olasılık teorisi, aynı zamanda, olasılık dağılımları, rassal değişkenler ve bu değişkenlerin dağılımları ile de bağlantılıdır. Örneğin, opsiyon fiyatlandırma modellerinde dayanak varlığın fiyatının gelecekte log-normal bir dağılımı takip ettiği varsayılmaktadır. Ancak, stokastik volatilite (SV) modelleri, volatilitenin zaman içinde rastgele değişebileceği ve log-normal dağılımın geçerli olmadığı durumları da dikkate alabilmektedir.

Normal dağılım ve onun bir türevi olan log-normal dağılım arasındaki temel ayrım ise, bir rastgele değişkenin normal dağılıma sahip olması durumunda, bu değişkenin üstel fonksiyonunun log-normal dağılıma sahip olmasıdır. Örneğin μ_X ortalamalı ve σ_X^2 varyanslı bır normal dağılımı olduğunda $Y = e^X$ biçiminde bir fonksiyonla tanımlanan Y rastgele değişkeninin dağılımı log-normal dağılım olarak adlandırılır. Log-normal dağılımın $f_Y(y)$ ise olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır (Karyan, 2016: 146). Şekil 1'de, normal ve log-normal dağılımların olasılık yoğunluğu

fonksiyonlarının (PDF) karşılaştırılması gösterilmektedir. Normal dağılım mavi renkte, log-normal dağılım ise kırmızı renkte çizilmiştir. Bu grafik, normal dağılımın simetrik yapısını ve log-normal dağılımın sağa doğru çarpıklığını ortaya koymaktadır.



Şekil 1. Normal ve Log-normal Dağılım Karşılaştırılması.

1.1.2. Stokastik Süreçler

Bir sistem, bellirli tesadüfi unsurlara bağlı olarak bir konumdan bir başkasına dönüşüyorsa, konumlarının oluşturduğu diziye bağlı olarak sistemin gelişimine bir stokastik süreç (stochos Yunanca tahmin kelimesinin karşılığıdır) olarak tanımlanmaktadır (Barnett vd., 2019: 433). Stokastik süreçler teorisi, modern matematiğin en önemli başarılarından birisidir ve olasılık teorisinin uzantısıdır. Sezgisel olarak ifade etmek gerekirse, stokastik süreçlerin amacı; zaman ve şans arasındaki ilişkiyi modellemektir. Stokastik süreçler teorisi tarafından kullanılan araçları olasılık teorisi sağlamaktadır. (Önalan, 2022: 323) Stokastik süreçler, gerçekte doğa ve toplumsal sistemlerin zamana bağlı olarak rassal şekilde değiştiğini ifade etmektedir. Bu nedenle, sistem üzerindeki ölçümler de zaman indeksli rassal değişkenler olmaktadır (Çapar, 2013: 242)

Bu süreçler, belirli bir zaman diliminde bir dayanak varlığın fiyatının ve dayanak varlığın volatilitesinin nasıl değişeceğini temsil eden temel bir teoriye dayanmaktadır. Stokastik süreçlerin (X) anlaşılması, dayanak varlığın ve volatilitelerin simülasyonlarında hangi faktörlere ve olaylara dayalı olarak modelleme yapılması gerektiğini belirlememize yardımcı olmaktadır. Başka bir deyişle, stokastik süreçlerin teorisi, her bir örnek olayın

(ω) zaman (*t*) içinde nasıl değiştiğini ve bu değişimin finansal varlıkların değerlendirilmesi üzerindeki etkisini modellememize olanak sağlamaktadır (Glasserman, 2003: 484).

Bir stokastik süreç $X(t,\omega]$, [0, T] zaman aralığı üzerinde ve her mümkün olayların kümesi ($\omega\in\Omega$) için *t*'nin fonksiyonu olarak rastgele değişkenler koleksiyonu olarak tanımlanır. Matematiksel olarak, bu koleksiyon şu şekildedir:$X = \{X(t,\omega], t \in [0,T], \omega \in \Omega$.

Bu süreçte, her sabit ω için $X(t,\omega)$ fonksiyonu, sürecin örnek yolu veya yörüngesi olarak bilinmektedir. Başka bir deyişle, belirli bir örnek olayın (ω) zaman içinde nasıl evrildiğini temsil eden fonksiyondur, yani: $t \to X(\mathrm{t},\omega)$.

Aynı şekilde, sürecin her sabit bir zaman *t* için farklı ω değerleri üzerinde nasıl değiştiğini görmek için, $X(t,\omega)$ fonksiyonu bir rastgele değişken olarak düşünülebilmektedir, yani:$\omega \to X(t,\omega)$.

Özetle, $X = (t,\omega) = X(t)$ basit bir gösterim şeklidir ve sadece zamanın (t) süreci nasıl etkilediğini belirtmek istendiğinde kullanılmaktadır. Bu bağlamda, $\omega \in \Omega$ ifadesi, ω 'nın Ω kümesinin bir elemanı olduğunu belirtmektedir.

1.1.3. Markov Süreci

Markov süreci, istatistik, fizik ve finansal modelleme gibi farklı alanlarda rassallık tarafından etkilenen sistemlerin modellenmesi ve analizi için kullanılmaktadır (Önalan, 2022: 182). Markov süreci, gelecek olasılıklarının en son değerlerine bağlı olduğu bir stokastik süreçtir. Bir stokastik süreç $x(t)$eğer her n ve $t_1 < t_2 \ldots < t_n$ için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa Markov süreci olarak adlandırılmaktadır:

Birinci tanım:

$$\big(x(t_n) \le x_n \mid x(t_{n-1}), \ldots, x(t_1)\big) = P\big(x(t_n) \le x_n \mid x(t_{n-1})\big) \qquad (1.1)$$

Bu eşitlik, $x(t_n)$ değerinin $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{n-1})$ değerlerinden bağımsız olduğunu ve sadece $x(t_{n-1})$ değerine bağlı olduğunu ifade etmektedir. Başka bir deyişle, $x(t_n)$ 'in değeri için geçmişteki tüm değerlere bakılmasına gerek yoktur, sadece bir

önceki değerin $x(t_{n-1})$ dikkate alınması yeterlidir. Bu özellik, Markov süreçlerinin temel bir niteliğidir ve hafısasızdır (Wilmott, 2007: 120). Geçmişin tüm detaylarına değil, sadece en son bilinen duruma bakarak gelecek tahmin edilebilmektedir.

İkinci tanım:

$$P(x(t_n) \leq x_n \mid x(t)\ \forall\ t \leq t_{n-1}) = P\big(x(t_n) \leq x_n \mid x(t_{n-1})\big) \qquad (1.2)$$

Bu eşitlik, $x(t_n)$ değerinin $t \leq t_{n-1}$ için tüm ($\forall$) süreç değerlerinden bağımsız olduğunu ve sadece $x(t_{n-1})$ değerine bağlı olduğunu ifade etmektedir. Bu, süreç değerlerinin sürekli bir şekilde izlendiği bir durumu göstermektedir. Ancak, $x(t_n)$'in değerini belirlerken sadece $x(t_{n-1})$değerine ihtiyaç duyduğumuzu belirtmektedir. Yani, bu süreç de hafızasızdır. (Rogers,1987: 22)

Her iki tanım, Markov süreçlerinin temel bir özelliği olan hafızasızlık özelliğini vurgulamaktadır, ancak farklı açılardan ele alınmaktadır. Birinci tanımda, sürecin geçmiş değerlerinin topluca sürecin gelecekteki durumu üzerinde etkisi olmadığı ifade edilmektedir. Buna karşılık, ikinci tanım, sürecin herhangi bir geçmiş zaman noktasından bağımsız olduğunu ve yalnızca en son değere bağlı olduğunu belirtmektedir. Her iki durumda da Markov sürecinin gelecekteki durumu sadece mevcut duruma bağlı olduğu vurgulanmaktadır. Bu, opsiyon fiyatlandırmada, temel varlığın geçmiş fiyat hareketlerinin gelecekteki fiyatlar üzerinde doğrudan bir etkisi olmadığı anlamına gelmektedir. Yani, opsiyonun değerini hesaplarken, yalnızca temel varlığın mevcut fiyatı ve diğer piyasa parametreleri dikkate alınmaktadır.

Geçmişte oluşan hisse senedi fiyatlarının getirilerine ait istatistiksel dağılımların ve volatilite değerlerinin, gelecekteki fiyat hareketlerinin öngörülebilirliği açısından faydalı olabileceği düşünülmektedir. Bu, geçmiş fiyatların bugünkü fiyatlarla doğrudan bir ilişkisi olmasa da genel piyasa eğilimleri ve volatilite gibi faktörlerin dikkate alınması gerektiğini göstermektedir. Ancak, Markov Özelliği, gelecekteki herhangi bir fiyat hareketinin, geçmiş fiyatların olasılık dağılımlarına bağlı olarak tanımlanamayacağını öne sürmektedir. Bu, geleceğin belirsiz olduğunu ve bu belirsizliğin yalnızca istatistiksel dağılımlarla açıklanamayacağını vurgulamaktadır. Bu nedenle, Markov Süreci, finansal modellemede belirsizliği ele almanın ve gelecekteki fiyat hareketlerini tahmin etmenin

bir yolu olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle, opsiyon fiyatlandırma modelleri diğer parametrelerin dışında dayanak varlığın başlangıç fiyatını (şu anki fiyatı S_0) kullanarak opsiyonun teorik fiyatını hesaplamaktadır (Kayran vd., 2016: 275).

1.1.4. Wiener Süreci

Stokastik süreçler, ayrık zamanlı veya sürekli zamanlı olarak sınıflandırılabilir. Ayrık zamanlı bir stokastik süreç, değişkenin değerinin sadece belirli sabit zaman noktalarında, örneğin her saat değişebileceği bir süreçtir, oysa sürekli zamanlı bir stokastik süreç, değişikliklerin herhangi bir zamanda gerçekleşebileceği bir süreçtir (Wilmott, 2007: 11). Markov özelliği, bir stokastik sürecin gelecekteki değerlerinin sadece şu anki değere bağlı olduğunu ve geçmişteki değerlere bağlı olmadığını belirtmektedir. Wiener süreci ise, sürecin herhangi bir zamandaki değeri sadece hemen önceki değerine bağlıdır ve bu süreçte daha önce gerçekleşen tüm hareketler bu anı etkilemez. Bu, Wiener sürecinin hafızasız olduğunu ve Markov özelliğini taşıdığını göstermektedir (Hull, 2008: 261).

Bir değişken, Wiener sürecini izlediğinde aşağıdaki özelliklere sahiptir (Karatzas, 2000):

Birinci özellik, Küçük bir zaman aralığı (Δt) boyunca değişikliği (Δz) aşağıdaki gibi ifade edilmektedir

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{1.3}$$

Burada ϵ, ortalaması sıfır ve varyansı 1 olan standart normal dağılıma sahip $\phi(0,1)$.

İkinci özellik, Her iki farklı kısa zaman aralığı, Δt t, için Δz değeri bağımsızdır.

Ayrıca, Δz değeri, ortalama değeri sıfır olan, standart sapması $\sqrt{\Delta t}$ olan ve varyansı Δt olan normal bir dağılıma sahiptir.

Genelleştirilmiş bir Wiener süreci şu eşitlikle verilmedtedir:

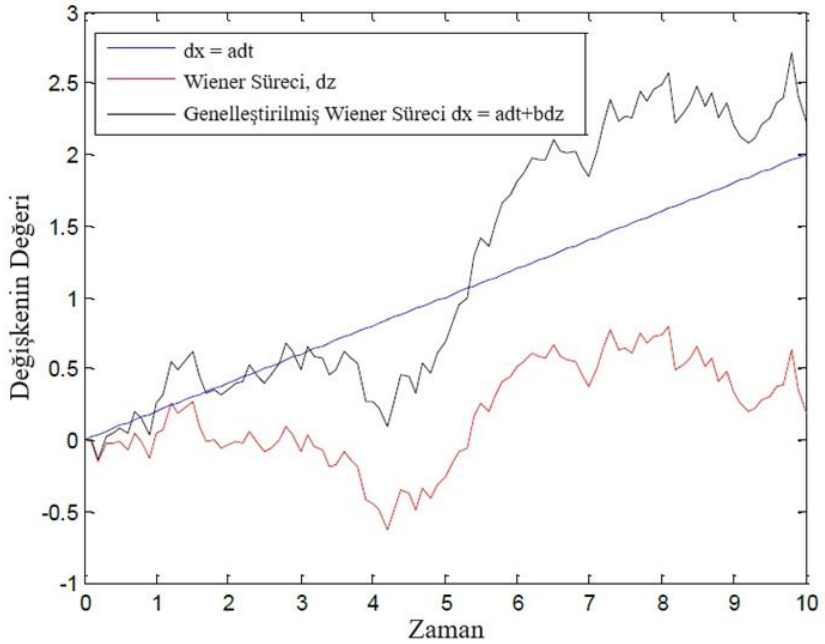
$$dx = adt + bdz \tag{1.4}$$

Eşitlik 1.4'de değişkenin *(x)* küçük bir değişimini *(dx)*, zamanın küçük bir değişiminde *(dt)* ve standart bir Wiener sürecinin (veya Brownian hareketinin) küçük bir

değişiminin (*dz*) evrimini temsil etmektedir. Bu modelde, *a* terimi, birim zaman başına ortalama değişim hızını (drift) ifade ederken, *b* terimi değişimin volatilitesini ifade etmektedir. Wiener süreci *dz*, rastgele hareketi modellemek için kullanılır ve normal dağılımlı bir rastgele değişkenin küçük bir değişimidir.

Eşitlik 1.4, zaman aralığı *T* boyunca *x* değişkeninin değişimini modellemek için kullanılır. Bu süreçte, *x* değişkeninin değişimi ortalama *aT*, standart sapma $b\sqrt{T}$ ve varyans b^2T ile normal dağılıma sahip olacaktır. Bu, Wiener sürecinin temel özelliklerinden biridir ve finansal modellemede, özellikle opsiyon fiyatlandırma ve risk yönetimi gibi alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır (Hull, 2008: 263).

Şekil 2, eşitlik 1.4 bileşenlerin görsellidir. Grafikte a = 0.2 ve b = 1.2 olan yani $dx = 0.2dt + 1.2dz$ Genelleştirilmiş Wiener sürecinin bir örneği gösterilmektedir. Wiener sürecinde *dx=adt* ise, deterministik bir drift terimi ifade etmektedir ve zamanla sabit bir eğilim göstermektedir. *dz* rassal hareketleri temsil etmektedir.



Şekil 2. Wiener Süreci dz ile Genelleştirilmiş Wiener Süreci dx (Kaynak: Hull, 2008: 264).

Wiener süreci, Heston modelinde *dW(t)* olarak ifade edilmektedir, rastgele değişimleri temsil etmektedir ve volatilite sürecindeki değişikliklerin bu rastgele değişimlere bağlı olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, Wiener süreci, Heston

modelindeki volatilite sürecinin stokastik doğasını yakalamak için kullanılmaktadır. Ayrıca, Wiener süreci Brownian süreci olarak da bilinmektedir.

1.1.4.1. Cholesky Ayrışımı

Cholesky ayrışımı özellikle iç içe geçen iki farklı süreçlerde, süreçlerin nasıl ele alınması gerektiğine dair teorik bir temel sunmaktadır. Bir diğer deyiş ile, iki faktörlü stokastik volatilite modellere özgü, iki Wiener süreci bulunmaktadır. Bu durumda iki Wiener süreci arasındaki korelasyon da ele alınmaktadır ve bu nedenle Cholesky ayrışımına ihtiyaç doğmaktadır.

Cholesky ayrışımının nasıl elde edildiğini gösteren basit bir örnek için, verilen korelasyon katsayısına sahip iki korele normal değişken x_1 ve x_2 üretmemiz gerektiğini varsayalım. Birbirine bağlı olmayan iki tane rastgele değişken z_1 ve z_2 üretildiğinde ayrışım şu şekildedir:

$$X1 = z1 \text{ ve } X_2 = \rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2} z_2 \tag{1.5}$$

Bu ayrışım yöntemi, birbirine bağlı çoklu değişkenlerle yapılan sistem simülasyonlarında, özellikle Monte Carlo simülasyonlarında, korelasyon matrisinin ayrıştırılmasında esas alınmaktadır (Chan vd., 2013: 58-62).

1.1.5. İto İntegral

İto integrali, stokastik süreçlerin analizinde ve finansal matematikte, özellikle opsiyon fiyatlandırma ve rassal hareketleri modelleme gibi alanlarda kullanılmaktadır. Ito integrali, rassal değişkenlerin zaman içindeki değişimlerini hesaplamak için önemli bir araçtır ve stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde temel oluşturmaktadır (Botev, 2011) (Önalan, 2023: 204-205).

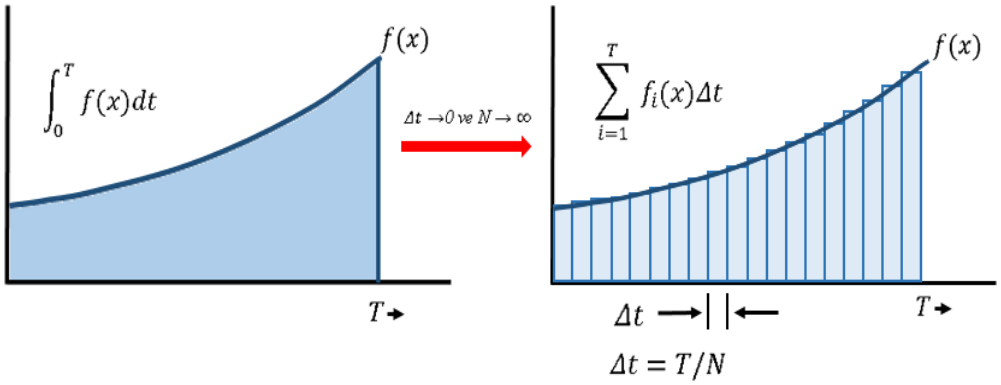
İto integrali, stokastik analizde kullanılan önemli bir kavramdır ve Wiener süreci boyunca belirli bir stokastik sürecin integralini almak için kullanılmaktadır. Bu integral,

deterministik olmayan, yani rastgele fonksiyonlar için tanımlanır ve şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\int_0^t F_s \mathrm{d}W_s \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} F_{t_k}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right), \;\; 0 = t_0 < \cdots < t_n = t, \qquad (1.6)$$

Eşitlik 1.6, Ito integralinin matematiksel bir ifadesini sunar ve bu integral, belirli bir zaman aralığında, 0 ile t arasında, bir stokastik sürecin (F_s) Wiener süreci (W_s) ile nasıl etkileşime girdiğini göstermektedir. Ito integrali, F_s fonksiyonunun W_s üzerinden integralini temsil eder ve stokastik süreçlerin analizinde temel bir araçtır. F_{t_k} ifadesi, t_k zamanındaki stokastik sürecin değerini belirtir ve bu, sürecin belirli bir zaman noktasındaki durumunu ifade etmektedir. $W_{t_{\mathrm{k+1}}} - W_{t_\mathrm{c}}$ ifadesi, Wiener sürecinin t_{k+1} ve t_k zamanları arasındaki değişimini, yani bu iki zaman noktası arasındaki artışı göstermektedir. Bu artış, sürecin rastgele doğasını yansıtır ve stokastik kalkülüsün temelini oluşturmaktadır. Limit ifadesi $\lim_{n\to\infty}, n$ sayısının sonsuza gitmesiyle alınan limiti temsil eder ve bu, integralin ayrık bir yaklaşımının sürekli hale getirilmesini sağlamaktadır. Bu yöntem, Ito integralinin hesaplanmasında kullanılan bir yöntemdir ve stokastik süreçlerin sürekli zaman modellemesine olanak tanımaktadır. Toplam ifadesi $\sum_{k=0}^{n-1}, n$ sayısına kadar olan tüm terimlerin toplamını ifade eder ve bu, integralin ayrık formunun hesaplanmasında kullanılmaktadır. Bu toplam, $F_{t_{\hbar 1}}$ değerlerinin, Wiener sürecinin ilgili zaman aralıkları arasındaki değişimleriyle çarpımlarının toplamını alarak, integralin yaklaşık değerinin nasıl hesaplandığını göstermektedir. Bu yöntem, stokastik integralin değerinin, sürecin zamanla nasıl değiştiğini modelleyerek bulunmasını olanak sağlamaktadır.

İto integrali, stokastik diferansiyel denklemlerin çözümünde kritik bir rol oynamaktadır. Hem dayanak varlık fiyatı hem de volatilite için kullandığı stokastik diferansiyel denklemler, İto'nun Leması kullanılarak çözülmektedir. Şekil 3'te görüldüğü üzere, stokastik diferansiyel denklemlerin adımlara bölünmesi ve böylece bir modelin program diline dönüştürülmesine yardımcı olmaktadır.



Şekil 3. İntegral Denklemlerden Diferansiyel Denklemlere Geçişin Gösterimi (Kaynak: Oberbroeckling, 2021: 184).

1.1.5.1. Stokastik Integral

Ito integrali, stokastik integralin bir örneğidir. Eşitlik 1.6 yerine Eşitlik 1.8 yazılırsa, sınırın Eşitlik 1.7 halen var olduğu, ancak ortalama kare anlamında değil, olasılık açısından gerçekleştiği gösterilebilmektedir (Wilmott, 2007: 122):

$$\int_0^T F_s^2 \mathrm{d}s < \infty \tag{1.7}$$

Ito süreci, $\{X_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ biçiminde yazılabilen herhangi bir stokastik süreçtir:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s, 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.8}$$

Burada, $\{\mu_t\}$ uyarlanabilir olup, $\int_0^T |\mu_t| \mathrm{d}t < \infty$ ve $\{\sigma_t\} \in \mathcal{H}_T$ ve $\mathcal{H}_T$ herhangi bir fonskiyonu temsil etmektedir. Yukarıdaki integral denklemi genellikle kısa diferansiyel formda şu şekilde yazılmaktadır:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \,. \tag{1.9}$$

Bu denklem, Heston ve Black-Scholes modellerinin evrimlerinin temelini oluşturur ve aynı zamanda bir varlığın hareketlerinin modellemesinde kullanılmaktadır.

1.1.5.2. Ito'nun Leması

Opsiyon fiyatlandırma modelleri Itô'nun Leması'nın uygulamalarını içermektedir. Ito'nun Leması, stokastik diferansiyal denklemin (Eşitlik 1.10) çözümü olarak bilinen bir stokastik süreçtir (Önalan, 2022: 209).

Temel formülün ana bileşenlerini açıklaması (Wilmott, 2007: 125):

$Y(t) = g(t, X(t))$ olarak bir fonksiyon düşünelim, burada X(t) stokastik diferansiyel denklem (SDD) ile tanımlanmıştır:

$$dX(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t) \qquad (1.10)$$

Şimdi Y(t)'nin dY(t) farkını bulmak istiyoruz. Itô'nun Leması, aşağıdaki formülü sağlamaktadır:

$$dY(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu\big(t, X(t)\big)\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\big(t, X(t)\big)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)\frac{\partial g}{\partial x}dW(t) \qquad (1.11)$$

Formülün iki bileşeni olmaktadır, biri determenistik diğeri stokastik bileşendir. Deterministik Bileşen, Y(t)nin zaman içinde belirgin (rastgele olmayan) bir şekilde nasıl değiştiğini açıklamaktadır. Üç terim içermektedir:

- $\frac{\partial g}{\partial t}$: Bu, $g(t,X(t))$ nin zaman t ile ilgili değişme hızını temsil etmektedir.

- $\mu(t, X(t))\frac{\partial g}{\partial x}$: Bu terim, temel stokastik süreç $X(t)$ nin $Y(t)$ üzerindeki etkisini yansıtır. Drift terimi $\mu(t, X(t)), X(t)$ değişikliklerinin $Y(t)$ üzerindeki etkisini belirleyen $X(t)$ değişikliklerine karşı hassasiyetle çarpılmaktadır.

- $\frac{1}{2}\sigma^2(t, X(t))\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$: Bu terim, $Y(t)$ üzerindeki volatilite $\sigma(t,X(t))$ tarafından neden olan eğrileri veya konveksite etkilerini hesaba katar. İkinci türevin x ile ilgili olarak g üzerindeki etkisini ölçer.

Stokastik Bileşen, Y(t)'nin rastgele dalgalanmalar veya piyasa gürültüsü nedeniyle nasıl değiştiğini açıklar ve Wiener süreci dW(t) ile ilgilidir:

- $\sigma(t, X(t))$: Bu, temel sürecin $X(t)$ volatilitesini temsil etmektedir. $dW(t)$'nin $Y(t)$ üzerindeki etkisini ölçekler.

- $\frac{\partial g}{\partial tr}$: Bu, fonksiyon g nin $X(t)$ değişikliklerine karşı hassasiyetini gösterir. Bu terim, rastgele bileşen ($dW(t)$)'nin $Y(t)$ üzerindeki etkisini ne kadar belirlediğini belirler.

- $dW(t)$: Bu, Wiener sürecinin artışıdır ve rastgele dalgalanmaların veya piyasa gürültüsünün kaynağını temsil etmektedir.

Özetle, Itô'nun Leması, bir stokastik sürecin fonksiyonu olduğunda, bu fonksiyonun zaman içindeki değişiminin iki bileşen içerdiğini söyler:

- Belirgin bileşen, fonksiyonun içsel özelliklerinden ve temel süreçten kaynaklanır.
- Rastgele bileşen, temel süreçteki rastgele dalgalanmalardan veya şoklardan kaynaklanır.

Bu bileşenlerin anlaşılması ve nicelendirilmesi hem belirgin eğilimleri hem de rastgele değişkenlikleri içeren sistemlerin dinamiklerinin daha etkili bir şekilde analiz edilmesine ve modellenmesine olanak tanılmaktadır. Bu yaklaşım, stokastik süreçlerin önemli olduğu çeşitli alanlarda uygulanmaktadır. Heston modelinde Ito'nun Leması Ek 2'de yer almaktadır.

1.1.6. Girsanov Teoremi ve Radon-Nikodym Türevi

Girsanov Teoremi, stokastik analizde bir olasılık ölçüsü altında tanımlanan bir Wiener sürecini başka bir olasılık ölçüsü altında bir Wiener süreci olarak değiştirmemize izin vermekdir. Bu, risk-nötr değerleme ve finansal türevlerin fiyatlandırılmasında kritik bir araçtır. Girsanov Teoremi, bu süreci risk-nötr ölçüye dönüştürerek, drift terimini

risksiz faiz oranı ile değiştirir. Drift terimi, bir stokastik sürecin deterministik (rastgele olmayan) bileşenini temsil etmektedir. Örneğin, bir hisse senedi fiyatının stokastik modellemesinde, drift terimi hisse senedinin uzun vadeli ortalama getiri eğilimini yansıtır. Girsanov Teoremi sayesinde türevlerin fiyatlandırılmasında kullanılan stokastik diferansiyel denklemlerin yeniden formüle edilmesini sağlanmaktadır.

Girsanov Teoremi'nin temel fikri, bir olasılık ölçüsünden diğerine geçerken bir rastgele sürecin dinamiklerini nasıl değiştireceğimizi belirlemektir. Bu değişiklik, Radon-Nikodym türevi olarak bilinen bir "değişim ölçüsü" ile gerçekleştirilmektedir. Bu durumda yeni sürecin, orijinal sürecin devamı olduğu söylenebilir ve bu şekilde iki süreç arası geçiş Radon-Nikodym türevi tarafından hesaplanmaktadır. (Koç, 2021: 166)

W_t bir Wiener temsil ettiği ve θ_t bir drift süreç ise, o zaman (Önalan, 2022: 253-254):

$$dP^* = e^{-\int_0^1 \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \theta_s^2 ds} dP \tag{1.12}$$

ifadesiyle tanımlanan yeni bir olasılık ölçüsü Q^* altında, W_t^* şu şekilde tanımlanan yeni bir Wiener sürecidir:

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s ds \tag{1.13}$$

Burada:

- dP^* yeni olasılık ölçüsüdür.
- $e^{-\int_0^1 \theta_s dW_a - \frac{1}{2}\int_0^1 \theta_a^2 ds}$ Radon-Nikodym türevidir ve ölçü değişikliğini temsil etmektedir.
- W_t^* yeni olasılık ölçüsü altında Wiener sürecidir.

1.1.7. Martingale Ölçümü

Matematiksel olarak sahip olunan enformasyon miktarına filtrasyon denilmektedir Bir martingalin tanımında kritik bir rol oynayan filtrasyon, belirli bir filtrasyona göre tanımlanan bir martingal ile ilişkilendirilmektedir (Önalan, 2022: 182). Martingal özelliği, sürecin geçmiş bilgisine (yani filtrasyona) dayalı olarak gelecekteki değerinin belirlenmesiyle ilgilidir. Filtrasyon, sürecin geçmişteki davranışını ve mevcut bilgiyi temsil ederken, martingal özelliği, bu bilgiye dayanarak sürecin gelecekteki davranışının nasıl olacağını tanımlamaktadır. Bu dağlamda, bir rassal değişkenin (X) alacağı dağılımın $X \sim N(\mu, 1)$ olduğu varsayımı ile gerçek olasılık ölçümü $\mathbb{P}$ altındaki yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$f_{\mathbb{P}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\frac{\mu)^2}{2}} \tag{1.14}$$

X' e denk yeni bir rassal değişken oluşturulmak istenmektedir. Bu yeni değişkenin ortalaması sıfır ve varyansı yine 1 olup, yeni değişken de normal dağılmaktadır. Bir değişkenin varyansını değiştirmeden, ortalamasının sıfır olması beklenmektedir. Bunu yapabilmek için, ilk verilen değişkenin olasılık ölçümü değiştirilmektedir. Bu, onun olasılık yoğunluk fonksiyonunda uygun bir değişiklik yapılarak gerçekleştirilmektedir.

Önceki olasılık yoğunluk fonksiyonunun her iki yanının $e^{-\mu x+\mu^2/2}$ faktörü ile çarpımıdır.

$$e^{-\mu x+\frac{\mu^2}{2}} f_{\mathbb{P}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\frac{\mu)^2}{2}} \cdot e^{-\mu x+\frac{\mu^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{\mu^2}{2}+\frac{2\mu x}{2}-\mu x+\frac{\mu^2}{2}} \tag{1.15}$$

$$f_{\mathbb{Q}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.16}$$

X rassal değişken için yeni bir olasılık ölçümüdür ve yeni rassal değişken ortalaması 0 varyansı 1 ve normal dağılımdır. Bu yeni ölçüm $\mathbb{Q}$ (risk nötr ölcümü) ile gösterilecektir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Önalan, 2022: 239):

$$f_{\mathbb{Q}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\mu x + \frac{\mu^2}{2}} f_{\mathbb{P}}(x) = \xi(x) f_{\mathbb{P}}(x) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} f_{\mathbb{P}}(x) \tag{1.17}$$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \xi(x) = e^{-\mu x + \frac{\mu^2}{2}} \tag{1.18}$$

Bu denklem, Radon-Nikodym türevi olarak adlandırılmaktadır. Bu türev, bir olasılık ölçümüne göre sıfırdan farklı bir ortalamaya sahip bir rassal değişkenin yeni bir olasılık ölçümüne göre varyansını değiştirmeden ortalamasının sıfır yapılmasına imkân vermektedir.

1.1.8. CIR Süreci

Ortalama dönüşlü karekök süreci olan Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) süreci, finans ve ekonomide, özellikle kısa vadeli faiz oranını modellemek (Cox, Ingersoll ve Ross, 1985) ve stokastik volatilite modellerinde olmak üzere, finansal değişkenlerin evrimini modellemek için sıkça kullanılmaktadır. CIR süreci, volatilitenin her zaman pozitif kalmasını ve belirli bir ortalamaya dönüş (mean-reversion) özelliğine sahip olmasını sağlamaktadır (Kuzu, 2019: 94). Bu özellik, finansal piyasalarda gözlemlenen volatilite davranışlarıyla uyumludur ve Heston modelinin gerçekçilik kazanmasına yardımcı olmaktadır. CIR süreci şu şekilde ifade edilmektedir (Webber, 2011: 390).

$$dv_t = \kappa[\theta - v_t]dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_v(t) \tag{1.19}$$

Kappa κ, ortalamaya dönüş hızıdır. Pozitif bir parametredir ve volatilitenin (veya diğer bir deyişle, varyansın) uzun vadeli ortalama değeri olan θ'ya ne kadar hızlı ulaşacağını belirtmektedir. κ değeri ne kadar yüksekse, v_t değeri o kadar hızlı bir şekilde θ'ya dönmektedir.

Teta θ, uzun vadeli ortalama varyansıdır. v_t sürecinin zaman içinde ortalama olarak yaklaşmaya çalıştığı seviyeyi belirtmektedir. θ değeri, volatilitenin uzun vadeli ortalama seviyesini temsil eder ve bu seviye, v_t sürecinin etrafında dalgalanmaktadır.

Sigma σ, varyansın volatilitesidir, yani varyansın zaman içindeki dalgalanma derecesini belirlemektedir. σ değeri ne kadar yüksekse, $v_t$sürecinin değerleri o kadar fazla dalgalanmaktadır. σ aynı zamanda risk faktörünü de temsil eder çünkü volatilitenin kendisi değişkendir ve bu da ek bir belirsizlik katmanı eklemektedir. v_t, Zaman t'deki varyansı temsil etmektedir. $W_v(t)$, Wiener süreci (veya Brownian hareketi) olan $W_v(t)$'nin diferansiyelini temsil etmektedir ve stokastik (rastgele) bir bileşeni modellemektedir.

CIR süreci, v_t'nin pozitif olduğu durumları modellemek için kullanışlıdır çünkü v_t teriminin negatif olmasını engellemektedir (Rouah, 2015: 1). Bu özellik, stokastik volatilite modellerinde kullanılmaktadır. CIR sürecin önemli özelliği ise Feller koşulu olarak bilinen $2\kappa\theta > \sigma^2$ ve volatilitenin pozitif değerde olmasını sağlayan koşuldur. Heston modelinin parametrelerinin uygunluğu değerlendirilirken bu koşulun sağlanması gerekmektedir (Rouah, 2015: 145).

1.1.9. Euler Diskretizasyon Yöntemi

Geleneksel olarak eğer süreç sürekli bir değişken ile temsil ediliyorsa rassal değişken *X(t)* ile ve eğer süreç kesikli bir değişken ile temsil ediliyorsa Y_t ile gösterilmektedir. Örneğin, sürekli rassal değişken *X(t)*, bir elektrokardiyogramdan kaydedilen verilerden oluşabilmektedir. Kesikli rassal değişken X_t için ise, işsizlik oranı, para arzı, hisse senetlerinin kapanış fiyatları gibi örnekler verilebilmektedir (Çınar vd., 2014: 60).

Diskretizasyon sözlük anlamı olarak kesikli, belli aralıklarla olan anlamına gelmektedir (Basık, 2011, 284). Euler Diskretizasyonu, stokastik diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan temel bir sayısal yöntemdir. Bu yöntem, diferansiyel denklemleri ayrık zaman adımlarına dönüştürerek, sürekli zamanlı sistemlerin davranışını modellemek için kullanılmaktadır. Yöntemin, SDD finansal modellerin herhangi bir program diline, örneğin Phyton, Matlab ve VBA gibi program dillerinde programlanmasına olanak sağlamaktadır.

Bu süreç Eşitlik 1.20'de verilen X_t gibi genel formüllerin ayrık zaman adımlarına dönüştürülmesi için başlangıç noktası olarak kullanmaktadır (Chang vd., 2013: 41-43) (Rouah, 2015: 144).

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \tag{1.20}$$

Burada μ determenistik bir değişkeni temsil etmektedir, σ varlık fiyatlarının rastgele dalgalanmalarını ölçen bir parametredir, denklemdeki stokastik terimidir (rastgele dalgalanma terimidir), W_t Wiener sürecidir, X_t'yi $[0, T]$ zaman aralığında simüle edilmektedir, bu aralığın $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$ olarak N noktaya bölündüğünü varsayılmaktadır, zaman artışları eşit aralıklıdır ve genişlik $dt = t_i - t_{i-1}$ burada $i = 2, \cdots, N$ olarak ifade edilmektedir.

Eşit aralıklı artışlarla elde edilen tüm sonuçlar, eşit olmayan aralıklara kolayca genelleştirilmektedir. dX_t'yi t'den $t + dt$'ye entegre etmek aşağıdaki denklemi üretmektedir.

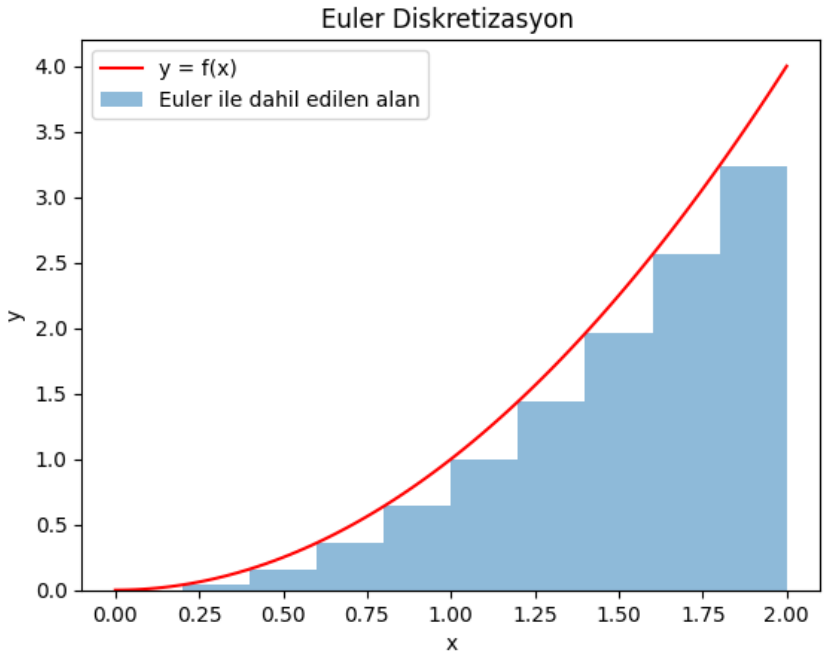
$$X_{t+dt} = X_t + \int_t^{t+dt} \mu(X_u, u)du + \int_t^{t+dt} \sigma(X_u, u)dW_u \tag{1.21}$$

Eşitlik 1.20 ayrıklaştırma için başlangıç noktasıdır. Burada, t zamanında X_t değerinin bilindiği ve $t+dt$ zamanından sonraki X_{t+dt} değerinin elde edilmesi istenilmektedir. Heston modelinde simülasyon kullanarak bir Avrupa opsiyonunun fiyatını elde etmek için, öncelikle iki değişkenli süreci (S_t, v_t) simüle edilmektedir ve t = 0'dan $t = T$ 'ya kadar N yolu oluşturulmaktadır.

Euler yönteminin ilk etapta ayrıştırma aşamalarından geçtiğini anlamakta fayda vardır. İlk önce stokastik diferansiyel denklemini sağlayan ve bir Itô sürecini sağlayan bir X_t üzerinde durulmaktadır. Bu süreç [0, T] aralığında aşağıdaki gibi ifade edilmektedir,

$$X_{t+dt} = X_t + \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\sqrt{dt}Z \tag{1.22}$$

Z bağımsız standart normal rassal değişkenleri (Z_1, Z_2, . . . , Z_m) ifade etmektedir, $X_t + \mu(X_t, t)dt$ stokastik diferansiyel denkleminin deterministik (rastgele olmayan) kısmını ifade eder ve stokastik diferansiyel denklemdeki drift terimi olarak adlandırılmaktadır. $\sigma(X_t, t)\sqrt{dt}Z$ sürecin stokastik kısmını temsil eder, genellikle sistemdeki rassal dalgalanmaların şiddetini (hızını) ifade eder ve stokastik diferansiyel denklemdeki difüzyon terimi olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 4. Euler Diskretizasyon Yöntemi.

Şekilde 4'te görüldüğü üzere, kırmızı çizginin tahmin edilmek istenen SDD olduğunu düşünürsek, tahmini yakınsaması adım adım mavi alan ile oluşturulmaktadır. Şekildeki örnekte Euler yöntemi kırmızı çizgini altından yaklaşım yapılan alandır.

1.2. Opsiyonların Fiyatlandırılması ve İlgili Temel Kavramlar

Opsiyon değerleme teorisi, tarihsel süreç içinde birçok bilim insanı tarafından çeşitli modellerle geliştirilmiştir. Bu alandaki ilk önemli adım, 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından atılarak, bir Avrupa Alım ya da Satım opsiyonunun teorik fiyatının hesaplanmasına yönelik Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli sunulmuştur. Bu model, kullanım kolaylığı sayesinde finansal piyasalarda geniş bir kabul görmüş ve

Robert C. Merton'un model üzerine yaptığı ek çalışmalarla birlikte, Merton ve Scholes'a 1997 yılında Nobel Ekonomi Ödülü'nü kazandırmıştır. Merton'un katkıları, modelin matematiksel temellerini daha da sağlamlaştırmış ve pratik uygulama olanaklarını genişletmiştir.

Black-Scholes modelinin finansal matematikteki bu önemli gelişimi, opsiyon fiyatlandırma teorilerinin evrimine önemli bir katkı sağlamıştır. Bu evrimin bir sonraki adımı, 1979 yılında Cox, Ross ve Rubenstein tarafından geliştirilen Binomial Model ile atılmıştır. Binomial Model, özellikle Amerikan tipi opsiyonların değerlemesi için kullanışlı olup, öğrenilmesi ve anlaması daha kolay bir alternatif sunar. Bu model, Black-Scholes modelinin ortaya koyduğu temeller üzerine inşa edilmiş ve opsiyon fiyatlandırma teorisine yeni bir perspektif kazandırmıştır.

Black-Scholes modeli ile opsiyonun teorik fiyatı, belirlenen bir parametre seti kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu parametreler ise dayanak varlığın o anki fiyatı, kullanım fiyatı, vadeye kalan süre, risksiz faiz oranı ve volatilitedir. Ancak, gerçek piyasa fiyatları ile teorik fiyatlar arasında farklar olabilmekte ve bu farklar, piyasanın dayanak varlığın gelecekteki volatilitesine ilişkin beklentilerini yansıtmaktadır. Zımni volatilite, Black-Scholes formülü tersine çözülerek bulunmaktadır. Bu işlemle bir opsiyonun piyasa fiyatı verildiğinde, formül yeniden düzenlenerek dayanak varlığın volatilitesinin ne olması gerektiğini belirleyen bir volatilite değeri elde edilmektedir. Bu değer, piyasanın opsiyonun vadesi boyunca varlık fiyatındaki değişim beklentisini ifade etmekte ve böylece opsiyon fiyatları üzerinden piyasanın volatiliteye ilişkin görüşleri öğrenilebilmektedir (Natenberg, 1994: 72-74). Black-Scholes modelinin zımni volatiliteyi bulma kapasitesi, modelin sadece teorik bir araç olmanın ötesinde, piyasa dinamiklerini yorumlama ve risk yönetimi stratejileri geliştirme konusunda da güçlü bir uygulamaya sahip olduğunu göstermektedir.

1.2.1. Black-Scholes Modelin Özellikleri

Bir Alım opsiyonunun fiyatı *c(S,t),* İto'nun lemasını kullanarak bir hisse senedi fiyatının stokastik diferansiyel denklemini çözme ve bu çözümü Black-Scholes formülüne İto'nın Leması ile nasıl dönüştürüldüğünü incelemektedir. Bu dönüşüm sayesinde modelin program diline dönüştürülmesine olanak sağlanmaktadır.

İto'nun Lemasını kullanılmasındaki ilk adım, dayanak varlık fiyat hareketlerini tanımlayan SDD'yi çözmektir. Verilen SDD şu şekildedir (Washburn, 2021):

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{1.23}$$

S(t), zaman *t*'de gözlenen dayanak varlık fiyatını, μ, beklenen getiri oranını, σ volatiliteyi, *dt* zaman aralığını, *dW(t),* Wiener sürecinin rassal artışını temsil etmektedir.

Bu SDD'yi çözmek için, genellikle İto'nun Lemasını kullanırız, çünkü bu, stokastik süreçler üzerinde diferansiyasyon (farklılaştırma) yapmamıza olanak tanımaktadır. İto'nun Lemasını uygulamak için, genellikle dayanak varlık fiyatının logaritmik bir fonksiyonunu alırız, yani $f(t, S) = log(S)$.

İto'nun Leması şu şekildedir:

$$df = \left(\frac{\partial r}{\partial t} + \mu S\frac{\partial r}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 r}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial r}{\partial S}dW \tag{1.24}$$

Burada $f(t, S) = log(S)$ olduğu için

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta t} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta S} = \frac{1}{S} \\ \frac{\delta f}{\delta S} = -\frac{1}{S^2} \end{cases} \tag{1.25}$$

Bu türevleri yerine koyduğumuzda, aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$d(\log(S)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW \tag{1.26}$$

SDD'nin Çözümü: Bu, genellikle *t=0*'dan *T* ye kadar entegre ederek yapılmaktadır. Bu, şu ifadeye yol açmaktadır:

$$\log(S_T) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T \quad (1.27)$$

Bu, $S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T}$ anlamına gelmektedir. *S* dayanak varlığın fiyatını,

t zamanı, *σ* dayanak varlığın volatilitesini, *r* risksiz faiz oranını temsil etmektedir.

Bir Avrupa tipi Alım opsiyonunun (*C*) değeri, vade tarihinde şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$C = max(S_T - K, 0) \quad (1.28)$$

Ancak, bu değeri bugünkü değere indirgememiz gerekmektedir. Bu, genellikle risksiz faiz oranı *r* kullanılarak yapılır ve şu şekilde ifade edilmektedir:

$$C = e^{-rT} E[max(S_T - K, 0)] \quad (1.29)$$

Burada E[·] beklenen değeri (ortalama değeri) temsil etmektedir. Bu beklenen değeri hesaplamak için, S_T'nin dağılımının bilinmesi gerekmektedir. Daha önce gösterildiği gibi, S_T log-normal dağılıma sahiptir. Bu dağılımı kullanarak, opsiyonun beklenen ödemesinin bugünkü değeri hesaplanabilmektedir.

Black-Scholes formülü, bu beklenen değeri hesaplamak için olasılık dağılımını (genellikle normal dağılım) kullanır ve şu sonuca varılmaktadır (Şeker, 2018):

Alım için

$$C(S,t) = S \cdot N(d1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d2) \quad (1.30)$$

Satım için

$$P(S,t) = K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d2) - S \cdot N(-d1) \quad (1.31)$$

Burada, *C*(*S*, *t*), Alım opsiyonunun fiyatını, *P*(*S*, *t*), Satım opsiyonunun fiyatını, *S*, dayanak varlığın anlık fiyatını, *K*, opsiyonun kullanım fiyatını, *T*, opsiyonun vadesini, *t*,

opsiyonun şu anki tarihini, r, risksiz faiz oranını, σ, dayanak varlığın fiyatındaki volatiliteyi temsil etmektedir.

Eşitlik 1.31 ve 1.32'de, $N(d_1)$ ve $N(d_2)$ ifadeleri, standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonunu (CDF) temsil etmektedir. Bu fonksiyon, bir rassal değişkenin belirli bir değerden küçük veya eşit olma olasılığını hesaplamaktadır.

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[ln\frac{S}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] \tag{1.32}$$

Burada d_1 opsiyonun içsel değerini ve delta'sını (opsiyonun fiyatının, altında yatan varlığın fiyatındaki bir birim değişime duyarlılığını) hesaplamak için kullanılmaktadır. Ayrıca d_2, opsiyonun içsel değerini ve teta'sını (opsiyonun zaman değerinin zamanla nasıl azaldığını) hesaplamak için kullanılmaktadır.

1.2.2. Opsiyon Fiyatlandırmalarda Alım Satım Paritesi

Bir Avrupa Satım opsiyonunun, aynı vade ve kullanım fiyatına sahip olan Avrupa tipi Alım opsiyonuyla ilişkisini bulmak için Alım-Satım paritesi (Stoll 1969) kullanılabilmektedir. Bu ilişki, arbitraj argümanları kullanılarak türetilmektedir. İki portföy göz önünde bulundurulmaktadır:

Portföy A: Avrupa tipi Satım opsiyonunun uzun pozisyonundan ve temettülerin ek dayanak varlığın yeniden yatırıldığı $e^{(-q(T-t)}$ miktarda dayanak varlığın oluşudur.

Portföy B: Avrupa tipi Alım opsiyonunun uzun pozisyonundan ve nakit olarak $Ke\text{^}(-r(T-t))$ miktarına eşit oluşudur.

Vade sonunda dayanak varlığın değeri ne olursa olsun, her iki portföy de aynı değere sahip olacaktır, yani max(S_T,K). Eğer her iki portföy de vade sonunda aynı değere sahip olacaksa, bugün de aynı değere sahip olmalıdır.

İki portföy aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir:

$$P + S_0 e^{(-q(T-t)} = C + Ke^{(-q(T-t)} \tag{1.33}$$

Burada, C Alım opsiyonunun fiyatını, K opsiyonun kullanım fiyatını, r risksiz faiz oranını, T opsiyonun vade sonunu, t mevcut zamanı, S_0 dayanak varlığın mevcut fiyatı, q dayanak varlığın temettü verimini temsil etmektedir.

1.2.3. Opsiyonlar için Alt ve Üst Sınırlar

Opsiyonlar için üst ve alt sınırlar, finansal piyasalarda önemli bir konsepttir. Bu sınırlar, opsiyon fiyatlarının arbitraj fırsatları olmadan mantıklı bir aralıkta olup olmadığını belirlemek için kullanılmaktadır (Bodie vd., 2018: 541-542).

Alım (*C*) ve Satım (*P*) opsiyonunun alt sınırı, aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir:

$$C \geq S_0 e^{-q(T-t)} - K\, e^{-r(T-t)} \tag{1.34}$$

$$P \geq K e^{-\tau(T-t)} - S_0 e^{-q(T-t)} \tag{1.35}$$

Alım opsiyonunun üst sınırı ise şu şekildedir:

$$C \leq S_0 \tag{1.36}$$

$$P \leq K e^{-\tau(T-t)} \tag{1.37}$$

Bu eşitlik, opsiyonun değerinin asla dayanak varlığın fiyatından daha fazla olamayacağını ifade etmektedir. Eğer bu ilişki sağlanmazsa, risksiz bir kâr elde etme olasılığı oluşmaktadır.

Bu sınırlar, opsiyon fiyatlarının arbitraj gereksinimine uygun olup olmadığını kontrol etmek için kullanılmaktadır. Eğer bir opsiyon, üst sınırın üzerinde veya alt sınırın altında fiyatlandırılırsa, arbitrajcılar için karlı fırsatlar ortaya çıkabilmektedir. Bu, finansal piyasalarda istenmeyen bir durumdur, çünkü arbitraj fırsatları, piyasa dengesizliklerine ve istikrarsızlığa neden olabilmektedir.

1.2.4. Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modelinin Varsayımları

Black-Scholes modelinin kısıtlamalarını anlamak için teorik temelini anlamak son derece önemlidir. Model, aşağıdaki varsayımlar üzerine kurulmuştur (Korkmaz, 2014: 348)

- Opsiyon Alım ve Satımı için işlem maliyeti ve vergi söz konusu değildir. Dolayısıyla, yatırımcı korunma oranını herhangi bir maliyet yüklenmeden sürekli olarak ayarlayabilmektedir.
- Kısa bir zaman içerisinde hisse senedinin fiyatında sadece küçük bir degişiklik olmaktadır.
- Menkul kıymetlerin fiyatları arbitraja imkân vermemektedir.
- Hisse senedi fiyatları sürekli olarak degişmektedir.
- Hisse senedi getirileri logaritmik normal dağılım (log-normal distribution) şeklindedir.
- Model, sadece vade sonunda işleme konabilen Avrupa tipi satın alma opsiyonun hesaplamasını içermektedir.
- Opsiyona konu olan hisse senedi için herhangi bir kâr payı ödemesi söz konusu değildir.
- Hisse senedi için açığa satış serbest olup, herhangi bir ceza söz konusu değildir.
- Kısa vadeli faiz oranında borçlanmak mümkündür.
- Kısa vadeli faiz oranı bilinmekte ve opsiyonunun vadesi boyunca değişmemektedir.
- Hisse senedinin riski opsiyonun vadesi boyunca değişmemektedir.

Black-Scholes modeli, bu varsayımlar altında geçerli olabilir ve finansal opsiyonların fiyatlanmasında kullanılabilmektedir. Ancak gerçek piyasa koşullarında bu varsayımların geçerli olup olmadığı değerlendirilmeli ve gerektiğinde modelde düzeltmeler yapılmalıdır. Opsiyon fiyatlandırma ve risk yönetimi için kullanılan popüler bir modeldir. Black-Scholes modeline kıyasla, Heston modeli stokastik volatiliteyi içermesi ve volatilitenin zamanla değişimini sağlaması, Heston modelin, Black-Scholes

modeline kıyasla piyasa içerikli opsiyon fiyatlarına daha iyi uyum sağladığı gözlemlenmiştir (Hull, 2008)

1.2.5. Black-Scholes Modelinin Varsayımlarındaki Dezavantajlar

Black-Scholes (BS) modeli opsiyon fiyatlandırma teorisi için bir temel oluştururken, gerçek piyasa dinamiklerini tam olarak yakalayamadığı bilinmektedir. Bu modelin bazı kısıtlamaları ve eksiklikleri şunlardır (Yalıncak, 2012):

- BS modeli, dayanak varlık getirilerinin logaritmik dönüşlerinin normal dağılıma sahip olduğunu varsayar. Ancak, gerçek piyasa verileri aşırı değerler içerebilmektedir, bu da normal dağılımın bu tür olayları yakalayamayacağı anlamına gelmektedir.
- Model, volatilitenin (riskin bir ölçüsü) sabit olduğunu varsayar. Gerçekte, volatilite zaman içinde farklı kullanım fiyatlarına bağlı olarak değişmektedir.
- Zımni volatilitenin, gerçek piyasa verilerine uygun olan BS modelindeki volatilitedir. Zımni volatilite genellikle kullanım fiyatına bağlı olarak değişen, bir "volatilite gülümsemesi" oluşturmaktadır. Bu, BS modelinin sabit volatilite varsayımıyla çelişmektedir.
- Gerçek piyasa verileri, normal dağılımın yakalayamayacağı uzun kuyruklar gösterebilmektedir. Bu, aşırı olayların olasılığının daha düşük olduğu anlamına gelmektedir.
- BS modeli, faiz oranlarının ve temettülerin sabit olduğunu varsaymaktadır. Ancak, bu faktörler zaman içinde değişebilmektedir.
- Model, işlem maliyetlerini veya likidite kısıtlamalarını dikkate almamaktadır.

Black-Scholes modeli, opsiyon fiyatlandırma teorisi için bir temel oluştururken, gerçek dünyanın karmaşıklığını tam olarak yakalayamamaktadır. Bu nedenle, modelin kullanılması, bu kısıtlamaların ve varsayımların anlaşılmasını gerektirmektedir. Bazı durumlarda, modelin bu eksikliklerini gidermek için değişiklikler veya eklemeler yapılabilmektedir (Peña vd., 1999).

1.3. Volatilite ve İlgili Temel Kavramlar

Volatilite, bir veri setindeki gözlemlerin ortalama bir değer etrafında artışlar ve azalışlar göstermesi anlamına gelmektir. Volatilite kavramı finansal açıdan, "bir menkul kıymetin fiyatının veya piyasanın genelinin kısa bir zaman aralığı içerisinde gösterdiği dalgalanma özelliği" olarak tanımlanabilir (Borsa Terimleri Sözlüğü, 2012).

Volatilitenin (σ) tahmin edilmesi veya ölçülmesi, yatırımcılar için daha fazla kâr elde etme veya servetlerini minimum seviyede kaybetme konusunda önem arz eden bir konudur. Yatırımcıların beklentilerini doğru bir şekilde tahmin edebilmeleri ve buna göre stratejiler geliştirebilmeleri, riski azaltmalarına yardımcı olmaktadır. Belirsizlik, finansal piyasalarda sıkça karşılaşılan bir zorluktur ve riskin önceden tahmin edilememesi, karar verme süreçlerini etkilemektedir. Volatilite bu nedenle piyasada riskin derecesi olarak kullanılmaktadır. Fakat risk nötr değerleme yaklaşımında, Avrupa tipi opsiyon modellerinde, opsiyonun değerini belirlemek için ilk etapta gözlemlenemeyen volatilite σ tahmin edilmelidir (Akkaya, 2021: 26).

BS modelinde, volatilitenin bir dayanak varlığın getirisinin belirsizliğinin bir ölçüsü olduğu belirtilmiştir. Bu, logaritmik getirinin standart sapması olarak da tanımlanabilmektedir. Bunu görmek için, log S(t) üzerine Itô'nun Lemasının uyarlanması sonucunda aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir (Washburn, 2021).

$$d\log S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t) \Rightarrow \log \frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\big(W(t+\Delta t) - W(t)\big) \qquad (1.38)$$

Burada Δt örnekleme sıklığıdır, yani adım aralığıdır. Dolayısıyla, log fiyatlar arasındaki fark (logaritmik getiri), $\sigma^2\,\Delta t$ varyansı ile normal dağılımı takip etmektedir.

Risk Nötr Değerleme teorisine göre, finansal varlıkların veya türev ürünlerin fiyatlandırılmasında, finansal piyasalardaki risklerin ortadan kaldırılması veya minimize edilmesi hedeflenmektedir. Bu bağlamda, finansal varlıkların ortalama getiri değeri olan $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, risksiz faiz oranı olan $r - \frac{\sigma^2}{2}$ ile değiştirilmektedir. Bu değişiklik, finansal varlıkların veya türev ürünlerin risk nötr bir ortamda değerlendirilmesini sağlamakta ve

piyasadaki riskler göz ardı edilerek risksiz faiz oranı temel alınmaktadır. Bu yöntem, finansal varlıkların değerlemesinde yaygın olarak kullanılmakta ve risk nötr ortamda yapılan değerlemeler, finansal piyasalardaki belirsizlikleri ve riskleri minimize etmeyi amaçlamaktadır (Bell, 2009). Bu nedenle, çalışmanın uygulamasında bu varsayıma göre BS modeli aşağıdaki gibi ele alınmaktadır.

$$dlog\,S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t) \tag{1.39}$$

1.3.1. Stokastik Volatilite

Matematiksel bağlamda, stokastik teriminin kullanımı 20. yüzyılın başlarına dayanır ve bu alandaki öncü çalışmalar, finansal piyasalardaki rastgele hareketlerin anlaşılmasında büyük bir dönüm noktası olmuştur. Özellikle, Fransız matematikçi Louis Bachelier'in 1900 yılında yayımlanan "Théorie de la Spéculation" adlı çalışması, Brown hareketini finansal piyasalardaki rastgele hareketleri modellemek amacıyla kullanarak stokastik analizin temellerini atmıştır (Courtault, 2000). Bu çalışma, 20. yüzyılın ortalarında Amerikalı matematikçi ve filozof Norbert Wiener ve diğer matematikçiler tarafından yapılan stokastik süreçler ve stokastik diferansiyel denklemler üzerine önemli araştırmalarla daha da ileriye taşınmıştır.

Bu araştırmaların bir sonucu olarak, volatilitedeki rassallık kavramı finansal matematikte merkezi bir öneme sahip olmuştur. Volatilite, bir dayanak varlığın fiyatının zaman içindeki değişiminin bir ölçüsü olarak tanımlanır ve stokastik volatilite, getiri değişim dinamiklerinin mevcut kullanılabilir bilgileri kullanarak tahmin edilemeyen bir şok içerdiği süreçler olarak anlaşılır (Fouque vd., 2011). Bu bağlamda, volatilitenin Wiener sürecini izlemesine izin veren stokastik volatilite modelleri, opsiyon fiyatlarını piyasa gerçeklerine çok daha uygun hale getirmektedir.

Genel olarak, bir dayanak varlığın fiyatının, dayanak varlığın fiyatının davranışının stokastik diferansiyel denklemi karşıladığı bir stokastik model tarafından tanımlanabileceğini düşünülmektedir (Chan vd., 2013).

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \\ dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dZ_t \end{cases} \quad (1.40)$$

Yukarıdaki denklemlerde, *W* ve *Z* standart bir boyutlu Brownian hareketleridir. Dayanak varlığın fiyatı *X* ile modellenirken, dayanak varlığın volatilitesi *f(Y)* süreci ile tanımlanır. μ, dayanak varlık getirisinin ortalamasıdır ve volatilite süreci *f(Y)*, standart sapma olarak yorumlanır. Eşitlik 1.41 ayrıca stokastik volatilite modellerin temelini oluşturmaktadır.

1.3.2. Tarihsel Volatilite

İki tip volatilite arasında ayırım yapmak gerekir. Bunlar, geçmişe dönük olarak hesaplanan tarihsel volatilite ile zımni volatilitedir. Geçmişe dönük olarak hesaplanan volatilite, geçmiş dönemlerde elde edilen verilere dayanılarak, ilgili dayanak varlığın günlük fiyat dalgalanmalarının standart sapmasını bulmak suretiyle hesaplanır ve genellikle yüzde cinsinden yıllık olarak ifade edilmektedir. Zımni volatilite ise, Alım opsiyon fiyatına yansıyan, menkul kıymetin ileriye dönük volatilitesi konusunda piyasa katılımcılarının beklentilerine karşılık gelmektedir (Demirel, 2018: 110).

Volatilite, dayanak varlığın fiyat getirisindeki (x_i) sapmaları ölçmektedir. Bunun için standart sapma (s) kullanılmaktadır.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \quad (1.41)$$

Burada, dayanak varlığın fiyat S_i için $x_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ logaritmik getiriyi temsil etmektedir. Yıllık volatilite tahmini olan $\hat{\sigma}$ ise şu şekildedir:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{T}} \quad (1.42)$$

Burada T her vadenin uzunluğudur. Günlük dayanak varlık fiyatları kullanıldığında, T yılın işlem günlerinin tersine eşit olarak ayarlanır, örneğin 1/252. Ancak, işlem günü sayısı farklı dayanak varlık sınıflarında değişkenlik göstermektedir. Yıllık bazında 252 işlem günü varsayımı, hisse senedi piyasası için uygun olabilir, ancak döviz ve faiz oranı piyasaları için 365 gün sayısı kullanılmaktadır. Döviz piyasaları yılın neredeyse her günü, tatiller dahil açıktır. Bu nedenle, adım sayıları (Δt) dayanak varlık türüne göre belirlenmektedir.

1.3.3. Zımni Volatilite

Zımni volatilite Alım opsiyon fiyatına yansıyan, dayanak varlığın ileriye dönük volatilitesi konusunda piyasa katılımcılarının beklentileri olarak tanımlanmaktadır (Demirel, 2018: s 111). Bir başka deyişle, zımni volatilite, bir opsiyonun fiyatının belirlenmesinde kullanılan bir parametredir ve dayanak varlığın gelecekteki fiyat hareketlerinin ne kadar dalgalı olacağını ifade etmektedir. Zımni volatilite ne kadar yüksekse, fiyat hareketlerinin o kadar belirsiz olduğu ve dolayısıyla opsiyonun o kadar riskli olduğu anlamına gelmektedir.

Zımni volatilite ($\sigma_{zımni}$) hesaplamak için Black-Scholes denklemi ve piyasada gözlemlenen opsiyon fiyatı kullanılmaktadır. Zımni volatilite, opsiyonun piyasa fiyatı (c_{piyasa}) ile Black-Scholes denklemi kullanılarak hesaplanan teorik fiyat (c) arasındaki farkı minimize ederek bulunmaktadır. Bu nedenle, zımni volatiliteyi tahmin etmek için kullanılan eşitlik şu şekildedir:

$$c_{piyasa} = c(S, K, T, r \mid \sigma = \sigma_{zımni}) \tag{1.43}$$

Zımni volatilitenin analitik bir çözümü yoktur, ancak sayısal Kök Bulma (Bisection) yöntemleri kullanılarak doğrusal olmayan denklem çözülmelidir. Zımni volatiliteyi BS formülüne yerleştirerek opsiyon fiyatı elde edilmektedir. Sonra, tahmin edilen zımni volatiliteyi BS formülüne yerleştirerek opsiyon fiyatı elde edilmektedir.

1.3.3.1 Kök Bulma Yöntemi (Bisection)

Zımni volatilite, Black-Scholes denklemi ve opsiyon fiyatı kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu hesaplama sürecinde, zımni volatilitenin analitik bir çözümü olmadığı için sayısal Kök bulma (Bisection) yöntemleri devreye girmektedir ve ayrıca bu yöntem ikiye ayırma yöntemi olarak da tanımlanmaktadır. Bu yöntem, opsiyonun piyasa fiyatı ile Black-Scholes formülü kullanılarak hesaplanan teorik fiyat arasındaki farkı en aza indirgeyerek zımni volatiliteyi bulmaya çalışmaktadır.

Kök bulma yöntemi, belirli bir aralıkta tanımlı sürekli bir fonksiyonun kökünü bulmak için kullanılmaktadır ve Black-Scholes modelin içinden zımni volatilite parametresini çekerek uygulanmaktadır. Yöntem, belirli bir [alt sınır, üst sınır] aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon f ile başlamaktadır. Bu aralıkta, f (alt sınır) ve f (üst sınır) fonksiyon değerlerinin farklı işaretlerde olduğu varsayılmakta, bu da aralıkta en az bir kökün var olduğunu göstermektedir (Rouah vd., 2007: 9).

Algoritma, bir dizi iterasyon çalıştırarak kökü bulmaya çalışmaktadır. İterasyonlar, belirli durma koşullarından biri gerçekleşene kadar devam etmektedir: İterasyon sayısının üst sınırı olan $N_{\max}$ değerine ulaşılması, kökün yeni yaklaşımının önceki yaklaşıma göre belirli bir ε_x tolerans seviyesi içerisinde bulunması, veya $|f(x)| < \varepsilon_f$ olduğu bir x değerinin belirli bir ε_f tolerans seviyesi içerisinde bulunması ile sonuçlanmaktadır.

Kök bulma yöntemi, $f(x_0) \approx 0$ olacak şekilde bir x_0 değeri bulmayı amaçlamaktadır. Her iterasyonda, aralık uzunluğunun yarısına indirilmekte ve kökün bu yeni aralıkta olduğu garanti edilmektedir. Yeni aralık, f fonksiyonunun işaretine göre belirlenmektedir. Algoritmanın adımları şu şekildedir: $x_{\text{alt}} =$ alt sınır ve $x_{\text{üst}} =$ üst sınır olarak ayarlanmakta ve $i = 0$ olarak başlanmaktadır. Daha sonra, orta nokta ve fonksiyon değeri hesaplanmaktadır (Rouah vd., 2007: 10):

$$x_{\text{orta}} = \frac{1}{2}(x_{\text{alt}} + x_{\text{üst}}) \tag{1.44}$$

$$f_{\text{orta}} = f(x_{\text{orta}}) \tag{1.45}$$

Durma koşulları kontrol edilmekte ve eğer bir durma koşulu sağlanırsa, algoritma sonlandırılmaktadır. Eğer f_{orta} sıfıra yakınsa veya belirli bir tolerans seviyesi

içindeyse, x_{orta} kök olarak kabul edilmekte ve iterasyon sonlandırılmaktadır. Aksi takdirde, f_{orta} değerinin işaretine göre aralık güncellenmektedir. Eğer f_{orta} ve f_{alt} işaretleri farklıysa, kök $[x_{\text{alt}}, x_{\text{orta}}]$ aralığında olmalıdır ve $x_{\text{üst}} = x_{\text{orta}}$ olarak güncellenmektedir. Eğer işaretler aynıysa, kök $[x_{\text{otta}}, x_{\text{üst}}]$ aralığında olmalıdır ve $x_{\text{alt}} = x_{\text{orta}}$ olarak güncellenmektedir.

Black-Scholes modelinde, zımni volatiliteyi bulmak için kullanılan fonksiyon şu şekildedir:

$$f(\sigma) = C_{BS}(\sigma, K, T, S, r) - C_{\text{piyasa}} \tag{1.46}$$

Burada C_{BS} Black-Scholes formülü ile hesaplanan teorik fiyatı, C_{piyasa} ise gözlemlenen piyasa fiyatını temsil etmektedir. İkiye Bölme Yöntemi, bu fark fonksiyonunun sıfıra eşit olduğu noktayı (zımni volatiliteyi) bulmak için kullanılmaktadır.

2. BÖLÜM

HESTON MODELİ VE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİLERİ

2.1. Heston Modeli

Sabit volatilite modellerine alternatif olarak stokastik volatilite modelleri bulunmaktadır. 1980'ler ve 1990'lar boyunca, opsiyon fiyatlandırma modelleri üzerine yapılan çalışmalar, volatilitenin zaman içinde nasıl değiştiğini modellemeye yönelik yeni yaklaşımları da beraberinde getirmiştir. Özellikle, 1987'deki borsa çöküşünden sonra, volatilitenin sabit olmadığı ve zaman içinde değişebileceği fikri daha fazla kabul görmüştür (Moodley, 2005). Bu bağlamda, Steven Heston 1993 yılında, volatilitenin stokastik olduğu bir model önermiştir. Heston modeli, volatilitenin zaman içinde rastgele bir şekilde değiştiğini ve bu değişimin opsiyon fiyatlandırmasını nasıl etkilediğini incelemektedir.

2.1.1. Heston Modelin Stokastik Diferansiyel Denklemi

Heston modeli, bir bileşeni S_t olan iki faktörlü bir modeldir ve bu, bir finansal değişkenin (örneğin bir hisse senedi endeksi veya döviz kuru) evrimini tanımlar ve diğer bir bileşeni v_t ise getirilerinin stokastik varyansını tanımlamaktadır. Bu iki süreç içerisinde yer alan iki farklı Wiener sürece ayrıca korelasyon olanağı sağlamaktadır. Heston modeli, dayanak varlığın fiyatının log-normal dağılımı izlediğini, dayanak varlığın fiyatının volatilitesinin $\sqrt{v_t}$ bir Cox, Ingersoll ve Ross (CIR) sürecini izlediğini varsaymaktadır. (Heston, 1993)

Heston modeli, dayanak varlık fiyatının (S_t) Black-Scholes tipi bir stokastik süreci takip ettiğini varsayar, ancak bu süreç, stokastik bir varyans (v_t) ile birlikte gelir ve bu varyans CIR (Cox-Ingersoll-Ross) sürecini takip etmektedir. Bu nedenle, Heston modeli iki faktörlü bir model olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t^v \end{cases} \tag{2.1}$$

Dayanak varlık fiyatının zaman evrimi aşağıdaki eşitlikte olduğu gibi ifade edilmektedir

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^s \tag{2.2}$$

Bu eşitlik, bir dayanak varlık fiyatının (S_t) zaman içinde nasıl evrildiğini tanımlar. Burada, *r* risksiz faiz oranıdır ve dayanak varlığın deterministik büyüme oranını temsil etmektedir. v_t zaman *t*'deki volatiliteyi (varyansın karekökünü) temsil etmektedir. dW_t^s: W_t^s Wiener sürecinin diferansiyelidir ve dayanak varlık fiyatının stokastik hareketini temsil etmektedir.

Bu eşitlik, dayanak varlık fiyatının bir deterministik bileşen ($rS_t dt$) ve stokastik bir bileşen $\sqrt{v_t} S_t dW_t^s$) olmak üzere iki bileşene sahip olduğunu gösterir. Deterministik bileşen, dayanak varlığın sürekli bileşenli büyüme oranını temsil ederken, stokastik bileşen, dayanak varlık fiyatının rastgele hareketini temsil etmektedir. Heston modelinde dayanak varlığın süreci ($dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^s$), Black-Scholes modeline ($dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$) benzerlik göstermektedir, fakat Heston modeli, volatilitenin v_t sabit olmadığını varsaymaktadır. Eğer v_t parametresi sabit alınırsa, Heston modeli Black-Scholes modeline indirgenebilmektedir (Rouah, 2015: 2). Varyansın (Volatilitenin Karekökünün) Zaman Evrimi:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \kappa(\theta - v_t)dW_t^v \tag{2.3}$$

Bu eşitlik, bir finansal varlığın varyansının v_t zaman içinde nasıl evrildiğini tanımlar. Burada, κ kappa, ortalama dönüş hızıdır. Varyansın uzun vadeli ortalama değeri olan θ tetaya ne kadar hızlı ulaşacağını belirlemektedir. σ sigma ise varyansın volatilitesidir ve varyansın zaman içindeki dalgalanma derecesini belirlemektedir. dW_t^v ise W_t^v Wiener sürecinin diferansiyelidir ve varyansın stokastik hareketini temsil etmektedir. ρ *rho,* İki rastgele süreç (dW_t^s) ve (dW_t^v) arasındaki korelasyonu temsil etmektedir ve [-1,1] aralığında değer almaktadır.

2.1.2. Heston Modelin Karakteristik Fonksiyonu

Black-Scholes modeli, dayanak varlığın fiyatının log-normal dağılımı üzerine kurulu bir varsayıma dayanır, ancak bu varsayım, modelin gerçek piyasa koşullarını yansıtmasında bazı kısıtlamalara neden olmaktadır. Bu nedenle, Heston modeli, Black-Scholes modeline göre daha avantajlı bir alternatif olarak ortaya çıkmaktadır. Heston modeli, dayanak varlığın fiyat dağılımı hakkında herhangi bir varsayıma bağlı kalmadan, olasılık dağılımını hesaplama imkânı sunmaktadır. Bu modelde, karakteristik fonksiyon kullanılarak dayanak varlık fiyatlarının gelecekteki dağılımı ve bu dağılımın evrimi ifade edilmektedir. Heston modeli, Fourier dönüşümü aracılığıyla karakteristik fonksiyondan olasılıkları çıkarmak için kullanılır, bu da bir olasılık uzayından diğerine geçişi sağlamaktadır (Rouah, 2015: 45).

Heston modelinde yer alan beş parametre (v_t, θ, k, σ, ρ), SDD denkleminden (Eşitlik 2.1) kalibre edilememektedir. Bu nedenle, Heston modelin karakteristik fonksiyonu olarak ifade etme gereği duyulmaktadır. Ancak, Heston modelinin parametreleri piyasada doğrudan gözlemlenememekte, bu da modelin kalibrasyonunu ve uygulamasını daha karmaşık hale getirmektedir. Heston modelin parametre değerleri, modelin sonuçları üzerinde büyük etkiye sahip olabilmektedir. Yanlış veya hatalı parametre tahminleri, modelin gerçek piyasa koşullarını yansıtma kabiliyetini önemli ölçüde etkileyebilmektedir. Bu nedenle, modelin uygulanması varsayımsal veriler üzerinden değilde geçmiş veriler üzerinden yapılması son derece önemlidir (Mrázek vd., 2017). Heston karakteristik fonksiyonu ile elde edilen fiyat ayrıca teorik fiyatı ifade etmektedir.

Avrupa tipi bir Alım opsiyonu ile Heston modeli aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Rouah, 2015: 14):

$$C(S_t V_t, t, T) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2 \tag{2.4}$$

Eşitlik 2.4'te P_1 ve P_2, modelin karakteristik fonksiyonlarından türetilen olasılıklardır ve bu dayanak varlık fiyatının belirli bir seviyenin üzerine çıkma olasılığını

temsil etmektedir. Burada S_t anlık dayanak varlık fiyatı, V_t anlık volatilite, T vade tarihi, t mevcut zaman, K kullanıö fiyatı ve r risksiz faiz oranıdır.

$$P_j(x, V_t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, V_t, T, \phi)}{i\phi}\right) d\phi \qquad (2.5)$$

Eşitlik 2.5, Heston modelinin karakteristik fonksiyonunun integral formunu göstermektedir. Bu fonksiyon, dayanak varlık fiyatlarının logaritmik dönüşümlerinin olasılık dağılımını tanımlamaktadır. İntegral, karmaşık düzlemdeki bir yol boyunca alınır ve bu, modelin stokastik süreçlerinin Fourier dönüşümüne karşılık gelmektedir.

$$x = \ln(S_t) \qquad (2.6)$$

Eşitlik 2.6'da yer alan *x* eşitlik 2.5'te yer alan *x*'in dayanak varlık fiyatlarının doğal logaritmasını temsil etmektedir.

$$f_j(x, V_t, T, \phi) = \exp\{C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi)V_t + i\phi x\} \qquad (2.7)$$

Eşitlik 2.7, Heston modelinin karakteristik fonksiyonlarını (f_j) tanımlar. Bu eşitlik ayrıca eşitlik 2.5'te yer almaktadır. Bu fonksiyonlar, volatilitenin ve dayanak varlık fiyatlarının zaman içindeki evrimini tanımlayan stokastik diferansiyel denklemlerden türetilmektedir.

Burada, f_j karakteristik fonksiyonu, *x* dayanak varlık fiyatının logaritmasını, V_t anlık volatiliteyi, *T* vade tarihini, *t* ise mevcut zamanı, ϕ karmaşık düzlemde bir sayıyı (Fourier dönüşümü) temsil etmektedir. Eşitlik 2.8'deki *C* ve eşitlik 2.9'daki *D* fonksiyonları, modelin parametrelerine bağlı olarak değişen terimlerdir ve modelin dinamiklerini tanımlamaktadır.

$$C(T-t,\phi) = r\phi i(r-q)\frac{a}{\sigma^2}\left[\left(b_j - \rho\sigma\phi r + d\right)\tau - 2\ln\left(\frac{1-ge^{d\tau}}{1-g}\right)\right] \qquad (2.8)$$

Eşitlik 2.8, karakteristik fonksiyonun bir parçası olan bir katsayıyı temsil etmektedir. Bu terim, volatilitenin zaman içindeki değişimini ve dayanak varlık fiyatları ile volatilite arasındaki korelasyonu içerir.

$$D(T-t,\phi) = \frac{v_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2}\left(\frac{1-\varepsilon^{d\tau}}{1-ge^{d\tau}}\right) \qquad (2.9)$$

Bu, karakteristik fonksiyonun bir başka katsayısıdır ve volatilitenin zaman içindeki değişimini açıklar

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \qquad (2.10)$$

Eşitlik 2.10, iki volatilite süreci arasındaki oranı tanımlar ve bu, karakteristik fonksiyonun çözülmesinde kullanılmaktadır. g ve d ifadeleri, karakteristik fonksiyonun çözümünde kullanılan ek terimlerdir. g iki volatilite süreci arasındaki oranı, d ise volatilitenin karekök sürecini temsil etmektedir ve eşitlik 2.11'de ifade edilmektedir.

$$d = \sqrt{\left(\rho\sigma\phi i - b_j\right)^2 - \sigma^2\left(2u_j\phi i - \phi^2\right)} \qquad (2.11)$$

Eşitlik 2.11, karakteristik fonksiyonun karmaşıklığını çözmek için kullanılan bir diğer terimdir ve volatilitenin karekök sürecini temsil etmektedir.

$j = 1{,}2$ değerlerini almaktadır ve bu durumda:

$$u_1 = \frac{1}{a}$$
$$u_2 = -\frac{1}{a}$$
$$a = k\theta$$
$$b_1 = k - \rho\sigma$$
$$b_2 = k \tag{2.12}$$

Eşitlik 2.12'de u_1, u_2, a, b_1, b_2 parametreleri, modelin dinamiklerini ve karakteristik fonksiyonunun özelliklerini belirlemektedir. Bu parametreler, farklı senaryoları temsil eder ve bu senaryolara göre değiştirilmektedir (Nandi, 1998).

2.1.3. Heston Modelin Varsayımları

Heston modelinde, varlığın volatilitesi, zamanla değişken ve öngörülemeyen bir süreç olarak modellendiği ve bu sürecin Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modeliyle ifade edilen ortalama geri dönüşlü (mean-reverting) bir süreç olduğu varsayılmaktadır. Volatilite değişimlerinin rastgele olmaktan ziyade belirli bir ortalama değere yakınsama eğiliminde olduğu kabul edilmektedir.

Modelde, varlığın fiyatı ve volatilitesi iki bağımsız stokastik süreç olarak tanımlanmıştır; fakat bu süreçler arasında bir sabit bir korelasyon bulunabilmektedir. Varlığın fiyat hareketleri ile volatilite hareketleri arasındaki sabit korelasyon, volatilite artışlarının fiyat düşüşleriyle eş zamanlı olabileceği senaryolara olanak tanımaktadır ve bu durum kaldıraç etkisi olarak adlandırılmaktadır.

Opsiyon fiyatlandırmanın, risk-nötr dünya varsayımı altında yapıldığı ve varlıkların beklenen getirisinin, risksiz faiz oranına eşit olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, piyasada arbitraj fırsatının bulunmadığı ve risksiz kâr elde etmek için serbest piyasa fiyatlarında herhangi bir tutarsızlığın olmadığı varsayılmaktadır (Heston, 1993: 335-336).

2.2. Heston Modelin Parametre Etkileşimleri

Heston modelinde parametreler arasındaki etkileşimlerin hassasiyeti ve bu parametrelerin opsiyon fiyatlandırmasındaki doğruluğuna olan etkisi, finansal literatürde sıkça vurgulanan bir konudur (Mrázek vd., 2017: 685). Özellikle, Heston modelinin simülasyonlarında volatilitenin negatif değerlere düşmemesi ve sürekli pozitif kalması

gerekmektedir. Bu bağlamda, Feller koşulunun ($2\kappa\theta > \sigma^2$) sağlanması, modelin matematiksel tutarlılığı açısından önemlidir. Bu nedenle, Heston modelinin parametrelerinin etkilerini ve birbirleriyle olan etkileşimleri incelenmektedir. İncelemede varsayımsal değerler kullanılmaktadır. Bu değerler, modelin çeşitli senaryolarda nasıl tepki verdiğini anlamak için seçilmiş hipotetik değerlerdir ve çalışmanın uygulamasında yer alan parametre değerlerinden farklıdır. Modelin anlaşılması açısından, parametrelerin değişimlerinin volatiliteye ve yoğunluk fonksiyonuna olan etkisi görsel olarak sunulmaktadır.

Görsellerde yer alan değerler aşağıdaki gibidir (Rough, 2015: 20):

- Başlangıç fiyat S0 = 100.0,
- Vade T = 0.25,
- Risksiz faiz oranı r = 0.05,
- Zaman aralığı = 252,
- Simülasyon sayısı = 1.000.000 değerleri sabit bırakılmıştır.

İncelenmekte olan parametreler üç farklı değer verilerek incelenmiştir. Parametrelerin volatilite gülümsemesine olan etkilerini incelemek için seçilen parametre değerleri:

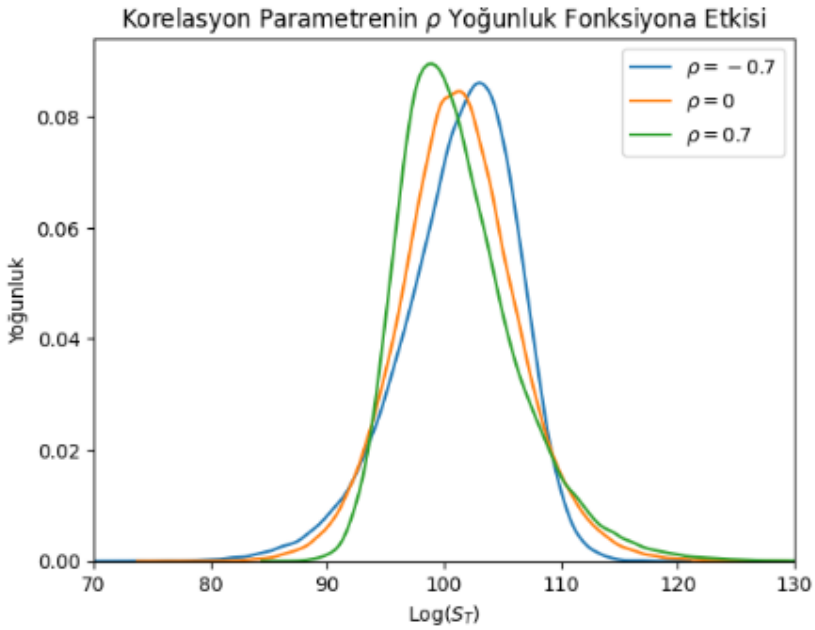
- Korelasyon parametresi ρ = [-0.25, 0 , 0.25] ,
- Varyansın volatilitesi σ = [0.15, 0.25, 0.35],
- Uzun vadeli varyans parametresi, Teta, θ = [0.01, 0.015, 0.02],
- Başlangıç volatilitesi v0 = [0.01, 0.015, 0.02],
- Ortalamaya dönüş hızı parametresi, Kappa, κ=[1, 2, 5] olarak alınmıştır.

Heston modelinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu etkiliyen parametreleri incelemek için seçilen parametre değerleri:

- Korelasyon parametresi ρ = [-0.7, 0, 0.7] ,
- Volatilite varyansı σ = [0.15, 0.25, 0.35] olarak alınmıştır.

2.2.1. Korelasyon Parametresi

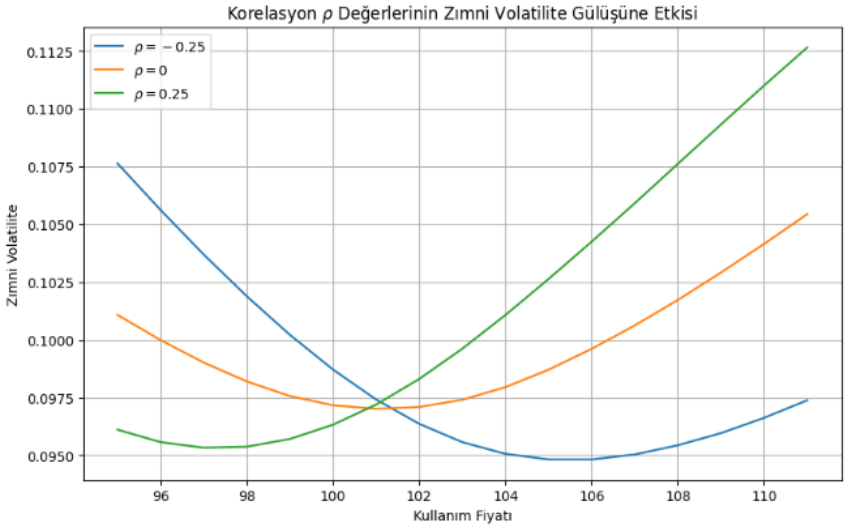
Korelasyon parametresi, dayanak varlık fiyatının volatilitesi ile logaritmik getirileri arasındaki korelasyonu gösterir, bu da bu getirilerin dağılım kuyruklarının genişlemesini etkilemektedir. Logaritmik S_T olasılık yoğunluğu, karakteristik fonksiyonu tersine çevirilerek ve bir sayısal entegrasyon şeması uygulanarak elde edilmektedir. Eğer $\rho > 0$, ise (Şekil 5), dayanak varlığın fiyat arttıkça volatilite artacak, bu da dağılımın sağ kuyruğunun genişlemesine ve yayılmasına ve sol kuyruğunun ise daralmasına ve sıkışmasına neden olacak, böylece sağ kuyruğu kalın bir dağılım ortaya çıkaracaktır. Volatilite ne kadar büyük olursa, Alım opsiyonunun yazıcısı için risk de o kadar büyük olur, bu da bunun karşılığında opsiyonun alıcısından daha yüksek bir fiyat talep etmesine yol açmaktadır.



Şekil 5. Korelasyon Parametrenin Yoğunluk Fonksiyonun Üzerindeki Etkisi.

Aksine, eğer $\rho < 0$ ise, dayanak varlığın fiyatı düştüğünde volatilite azalacaktır, böylece dağılımların sol kuyruğunu genişleterek ve yayarak sağ kuyruğunu daraltacak ve sıkıştıracaktır, bu da daha kalın bir kuyrukla sonuçlanacaktır. Düşük volatilitenin bir sonucu olarak, bu opsiyonun yazıcısına daha düşük risk nedeniyle opsiyon fiyatını düşürecektir.

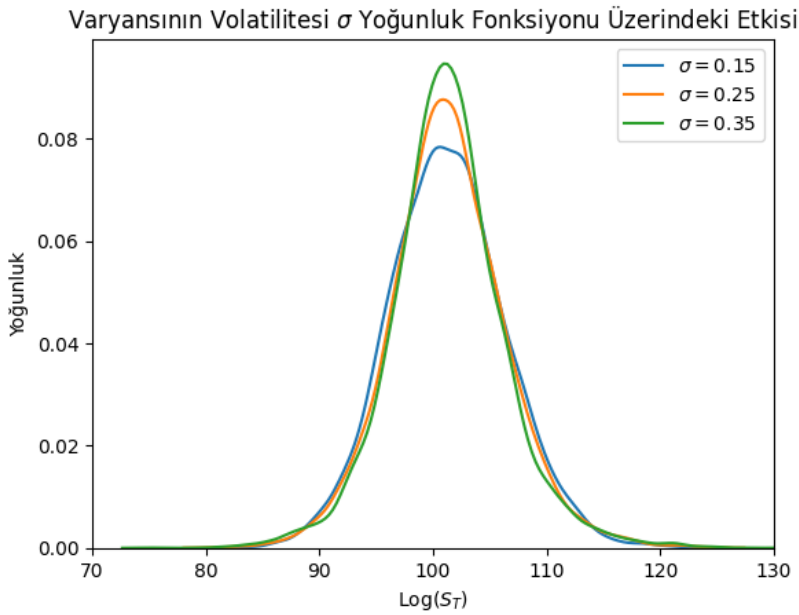
Şekil 6'da ise korelasyon değerin volatilite gülüşüne olan etkisi görülmektedir. Eğer $\rho > 0$ ise, kullanım fiyatı arttıkça zımni volatilite de artar. Zımni volatilite yüzeyinde, kullanım fiyatı arttıkça daha belirgin bir "gülümseme" oluştuğunu görülmektedir. Eğer $\rho < 0$ ise, kullanım fiyatı arttıkça daha az belirgin bir "gülümseme" oluşur veya "üzgün yüz" şeklinde bir eğilim de gidebilmektedir. Kullanım fiyatının ve volatilitenin arasında bir korelasyon yok ise, zımni volatilite, kullanım fiyatına bağlı olarak grafiğin eğrisi volatilite gülümsemesinden volatilite gülücüğü formuna evrilmektedir.



Şekil 6. Korelasyonun Volatilite Gülümsemesi Üzerisindeki Etkisi.

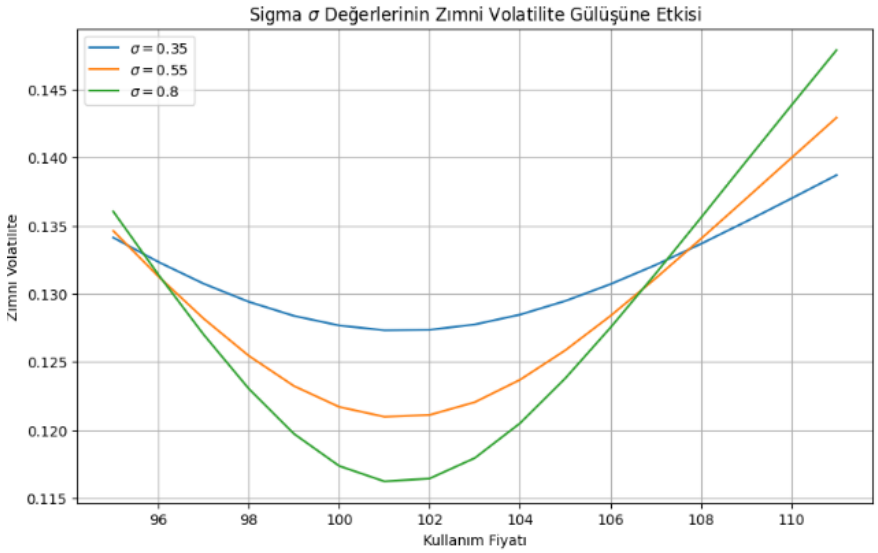
2.2.2. Varyansın Volatilitesi Parametresi

Şekil 7'de varyansın volatilitesi parametresi olan σ'nın olasılık yoğunluk fonksiyonunun şekline etkisi gösterilmektedir. Varyansın volatilitesi değerinin olasılık dağılımının basıklığını ve kuyruk kalınlığını kontrol ettiği ifade edilmektedir. Varyansın volatilitesi yüksek olduğunda, dağılımın kuyruğunun daralması ve uç değerlerin daha az sık görülmesi gözlemlenmektedir. Bu durum, dağılımın daha sivri bir zirveye ve daha ince kuyruklara sahip olduğunu göstermektedir. Tersine, varyansın volatilitesi düşük olduğunda, getirilerin dağılımının daha yüksek basıklığa ve daha kalın kuyruklara sahip olduğu belirtilmektedir; bu da uç değerlerin daha sık görüldüğü ve dağılımın geniş bir aralıkta yayıldığı anlamına gelmektedir. Bu durum, finansal modellemede varyansın volatilitesi parametresinin önemini ve dağılımın şekli üzerindeki etkisini vurgulamaktadır.



Şekil 7. Varyansın Volatilite Yoğunluk Fonksiyonun Üzerindeki Etkisi

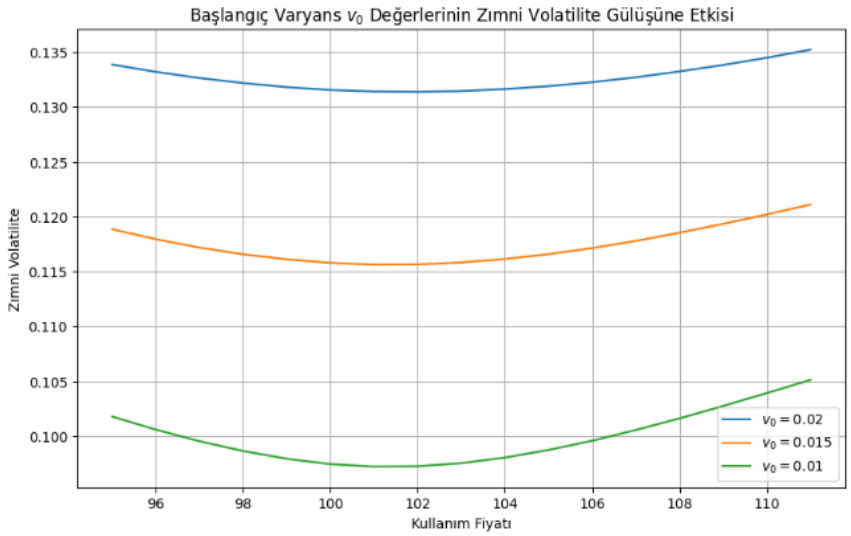
Yine, dağılımlardaki düzleşmedeki değişimin etkisi, zımni volatiliteyi etkilemektedir. Şekil 8'de, varyansın volatilitesinin, zımni volatilite gülümsemesini nasıl etkilediği gösterilmektedir. Varyansın volatilite değeri ne kadar yüksekse, gülümseme o kadar belirgin olmaktadır. Bu durum, piyasada aşırı fiyat hareketlerinin olasılığının arttığını gösterir.



Şekil 8. Varyansın Volatilitesinin Volatilite Gülümsemesi Üzerisindeki Etkisi.

2.2.3. Başlangıç Varyans Parametresi

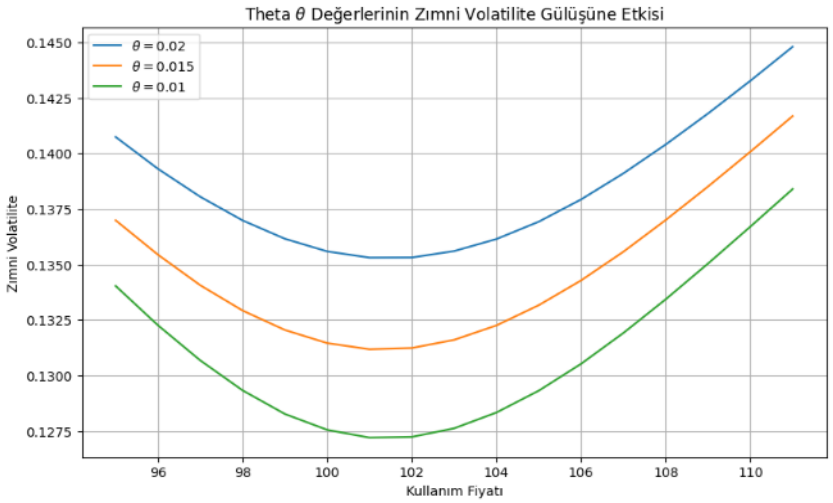
Başlangıç varyansındaki (v_0) değişikliği, eğrinin şeklindeki değişiklikten ziyade zımni volatilite eğrisinin yüksekliğini değiştirmektedir. Başlangıç volatilite seviyesindeki v_0 artışı da her kullanım fiyatı aralığı için daha başlangıç volatilitesinin, opsiyon satıcılarının opsiyon alıcılarından daha yüksek bir prim talep etme olasılığının arttığını göstermektedir. Ayrıca, opsiyon alıcılarının opsiyonlarını kullanmaları halinde daha yüksek kazançlar beklemeleri gerektiğini de ifade etmektedir. Şekil 9'da, başlangıç varyansındaki değişikliklerin zımni volatilite eğrisi üzerindeki etkisi gösterilmektedir.



Şekil 9. Zımni Volatilite Değerlerin Volatilite Gülümsemesi Üzerisindeki Etkisi.

2.2.4. Uzun Vadeli Varyans Parametresi

Uzun vadeli varyans (θ) ve başlangıç volatilitesi (v_0) gibi parametrelerin artırılması, zımni volatilite eğrisinin yükseltilmesine sebep olmaktadır ve bu durum, kullanım fiyatlarının tüm aralıkları boyunca dayanak varlığın fiyatlarında artan volatiliteye işaret etmektedir. Artan volatilite ile opsiyon sahipleri (satıcılar) tarafından opsiyon alıcılarından daha yüksek bir prim talep edilmesine yol açılmaktadır; çünkü yüksek volatilite, opsiyonun içsel değerinin vade sonunda daha fazla değişebileceğini göstermektedir. Bu, alıcıların vade sonunda daha yüksek getiriler beklemesine neden olmaktadır; zira yüksek volatilite, dayanak varlığın fiyatının daha geniş bir aralıkta hareket edebileceğini ve bu durumun potansiyel olarak daha yüksek kazançlar (veya kayıplar) sağlayabileceğini belirtmektedir. Şekil 10'da uzun vadeli varyans etkisinin zımni volatilite gülümsemesi üzerindeki etkisi gösterilmektedir.

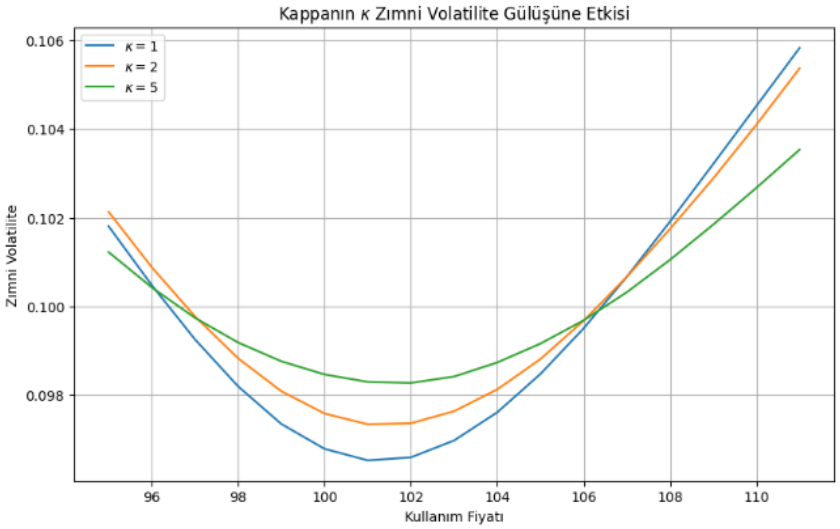


Şekil 10. Uzun Vadeli Varyansın Volatilite Gülümsemesi Üzerindeki Etkisi.

2.2.5. Ortalamaya Dönüş Hızı Parametresi

Ortalamaya dönüş hızı κ, Volatilitenin Kümeleşme derecesinin bir temsili olarak yorumlanabilmektedir. Volatilite Kümeleşmesinin büyük fiyat hareketlerinin diğer büyük hareketleri takip etme eğiliminde olduğunu, küçük fiyat hareketlerin diğer küçük fiyat hareketlerini takip etme eğiliminde olduğunu göstermektedir (Mandelbrot, 1963: 394).

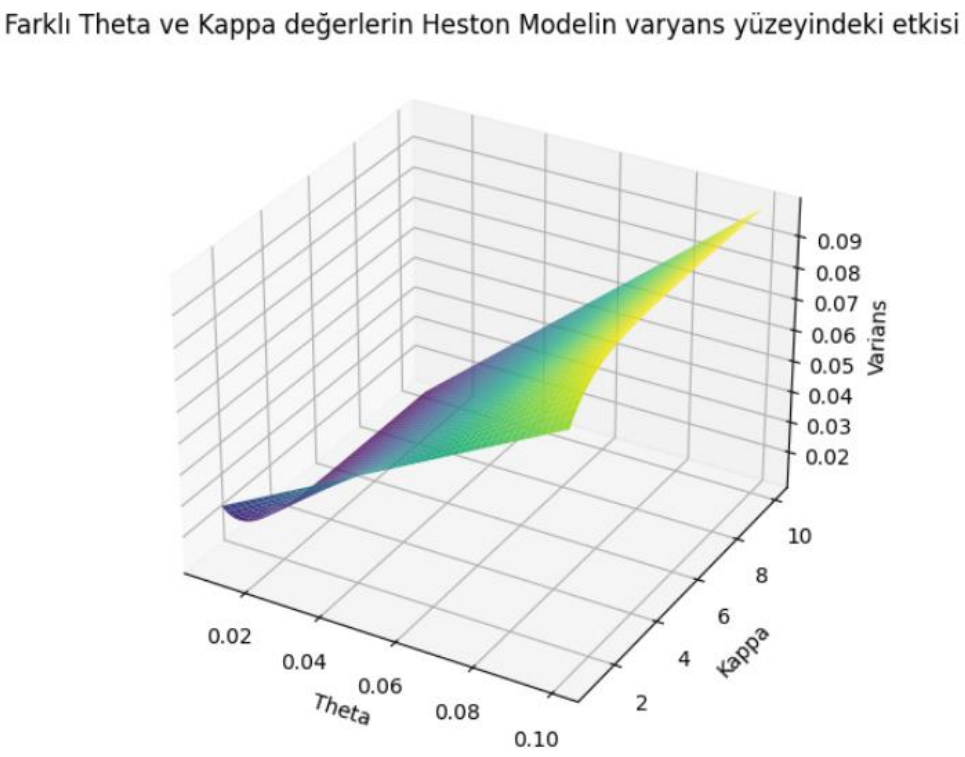
Ortalamaya dönüş hızı parametresi κ, Volatilite gülümseme eğrisinin eğriliğini kontrol eder, burada Ortalamaya dönüş hızı parametresindeki artış, zımni volatilite gülümsemesinin düzleşmesini artırmaktadır. Ortalama dönüş hızını artırarak hem alıcıya hem de opsiyon satıcıya daha düşük risk ve dolayısıyla opsiyon satıcının bir alıcıdan talep ettiği primde bir azalmaya yol açacak olan çeşitli uygulama oranlarının daha düşük zımni volatilitesi ile sonuçlanabilmektedir. Şekil 11, Ortalamaya dönüş hızı parametresindeki değişikliğin zımni volatilite gülümsemesi üzerindeki etkisini göstermektedir.



Şekil 11. Ortalamaya Dönüş Hızı Parametresininin Volatilite Gülümsemesine Etkisi.

2.2.6. Teta, Kappa ve Varyans Parametrelerin Arasındaki Etkileşim

Şekil 11'de bir 3D grafiği bulunmaktadır ve x ekseninde teta, z ekseninde kappa ve y ekseninde varyans olduğunu görülmektedir. 3D yüzey grafiği, Heston modelinin iki temel parametresi olan teta ve kappa'nın, varyans üzerinde nasıl bir etkileşimde bulunduğunu görsel olarak sunmaktadır. Varyansın, bu iki parametrenin fonksiyonu olarak nasıl değiştiğini anlamak, modelin piyasadaki volatilite dinamiklerini nasıl yakaladığını daha iyi anlamamıza yardımcı olmaktadır.



Şekil 12. Teta, Kappa ve Varyans Parametrelerin Birbiliri ile Etkileşimi.

Şekil 12''nin X Ekseni (Teta) ve Varyans Etkileşimi: X ekseni üzerinde artan θ değerleriyle varyans da artış gösterecektir. Ancak bu artış, κ değerinin büyüklüğüne bağlı olarak belirli bir oranda olacaktır. Yüksek bir θ değeri, volatilitenin uzun vadeli ortalamasını yükselteceği için, genel olarak varyans da artacaktır.

Z Ekseni (Kappa) ve Varyans Etkileşimi: κ değeri, varyansın θ seviyesine olan geri dönüş hızını kontrol etmektedir. Yüksek bir κ değeri, varyansın hızla θ seviyesine geri dönmesi anlamına gelmektedir. Grafiğin Z ekseninde, κ arttıkça, varyansın değişimi de daha hızlı olacaktır. Ancak bu etki, θ değerine de bağlı olarak değişiklik gösterecektir.

Teta ve Kappa'nın Birlikte Etkileşimi: Yüzey grafiği, θ ve κ değerlerinin varyans üzerindeki birleşik etkisini göstermektedir. Özellikle, yüksek bir θ ve düşük bir κ kombinasyonu, yavaşça artan bir varyansa neden olabilmektedir. Tersine, düşük bir θ ve yüksek bir κ kombinasyonu, varyansın daha hızlı bir şekilde θ seviyesine dönmesine neden olabilmektedir.

Heston modelinin beş parametre özelliği, bu modelin çok büyük sayıda dağılım üretmesine olanak tanımaktadır, bu da modeli daha esnek yapmaktadır. Parametrelerinin

nasıl etkileşimde bulunduğunu anlamak, opsiyonların daha doğru bir şekilde fiyatlandırılmasına yardımcı olmakta birlikte, gerekli ayarlamaları da yapmaya olanak sağlamaktadır.

2.3. Heston Modelin Avantajları ve Dezavantajları

Heston modeli gibi stokastik volatilite modeller, gerçek piyasa koşullarını yansıtmak için geliştirilmiş olsa da bu modellerin varsayımları nedeniyle sınırlamaları bulunmaktadır. Modeller, teorik çerçeveler ve gerçek piyasa koşulları arasında bir köprü görevi görür, ancak bu köprünün sağlamlığı, modellerin varsayımlarının gerçekçiliğine ve uygulanabilirliğine bağlıdır. Bu durum, finansal modelleme alanında karşılaşılan temel bir paradoksu yansıtmaktadır: Modeller, gerçek dünya piyasalarını anlamak ve tahmin etmek için gerekli olan teorik yapıları sağlar, ancak aynı zamanda bu modellerin kendi içsel kısıtlamaları ve varsayımları, gerçek dünya uygulamalarında bazı avantajlar ve dezavantajlar içerebilmektedir.

2.3.1. Heston Modelinin Avantajları

- Avrupa opsiyonları için yarı kapalı form çözümüne sahiptir, bu da modele verilen piyasa verilerine hızlı bir şekilde uyum sağlanabilmesini sağlamaktadır. (Mikhailov vd., 2003: 79)
- Black-Scholes modelinin aksine, Heston modelinde fiyat dinamikleri log-normal olmayan olasılık dağılımlarına izin vermektedir.
- Heston modeli, opsiyon fiyatlarının piyasadaki zımni volatilite yüzeyiyle uyumlu olmasını sağlamaktadır. (Mikhailov vd., 2003: 79)
- Volatilite, ortalama seviyeye geri dönmektedir (mean reverting) (Heston, 1993: 335).
- Heston modeli, dayanak varlığın getirileriyle zımni volatilitenin negatif korelasyonlu olduğunu ve kaldıraç etkisi olarak bilinen bu ilişkiyi dikkate almaktadır. Ayrıca, dayanak varlık ve volatilite arasındaki korelasyonun değiştirilebilmesine olanak sağlamaktadır. (Orosi, 2010: 25)

2.3.2. Heston Modelinin Dezavantajları

- Heston modelinin ürettiği fiyatlar oldukça parametre duyarlıdır, bu nedenle modelin uygunluğu kalibrasyona bağlıdır. Başka bir deyişle, daha gerçekçi modeller için ödenen bedel, modelin kalibrasyonunun artan karmaşıklığıdır. Sıklıkla, parametre tahmin yöntemi, modelin kendisi kadar önemli hale gelmektedir. (Mikhailov vd., 2003: 79)
- Heston modeli, kısa vadeler için uygun sonuçlar üretemez çünkü model, piyasadan gelen kadar güçlü bir kısa vadeli eğim oluşturamamaktadır. Uzun vadeli vadelere kadar geniş bir zaman aralığında iyi performans gösterebilmesi için modele daha fazla genişletme yapılması gerekmektedir. (Chiarella, 2003)
- Bir diğer dezavantaj ise, Heston modelin korelasyon parametresi sabit varsayımıdır. Gerçek piyasada değişen dayanak varlık fiyatları ile volatilite arasındaki etkileşim sabit değildir ve bu stokastik volatilite modellerin genel sorunu olarak bilinmektedir. (Chiarella, 2003)

2.4. Heston Modelinde Parametrelerin Kalibrasyonu

Heston modelinin parametrelerinin kalibrasyonu için BİST 30 endeks opsiyon sözleşme verileri kullanılmaktadır. Heston modeli, tahmin edilmesi gereken beş ana parametreye sahiptir: $\Omega = \{v_0, \kappa, \sigma, \theta, \rho\}$. Kalibrasyon süreci, dayanak varlığın o anki piyasa durumunu yansıtan parametreleri ortaya çıkarmıştır. Elde edilen bu parametreler, piyasa gözlemlerine dayalı günlük opsiyon fiyatlarıyla entegre edilmiştir (Schoutens 2003).

Modelin parametrelerini değerlendirmenin bir yolu, piyasa fiyatlarını üreten parametreleri bulmaktır, bu da ters problem olarak bilinir. Ters problem, model fiyatları ile piyasa fiyatları arasındaki farkı en aza indirgeyerek çözülebilir ve bu, doğrusal olmayan en küçük kareler optimizasyon problemi (Least-Squares Optimization Problem (lsqnonlin)) olarak da adlandırılmaktadır. Bu araştırmada, Heston modelinin parametrelerini kalibre etmek için MATLAB'ın lsqnonlin fonksiyonu kullanılmaktadır. Kalibrasyon süreci, aşağıdaki adımlarla gerçekleştirilmiştir (Mrázek vd., 2017: 686).

İlk olarak, lsqnonlin fonksiyonuna veri seti verilir ve BİST 30 endeks opsiyon sözleşme verileri ile hesaplanan Alım opsiyonu fiyatları ile Heston modelinin Alım opsiyonu fiyatları arasındaki kare farklar en aza indirgenir.

Bu işlem, aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir:

$$\min(\Omega)\, SqErr(\Omega) = \min(\Omega) \sum_{i=1}^{N} \left[\mathrm{C_i^{\Omega}}(\mathrm{K_i}, \mathrm{T_i}) - \mathrm{C_i^{M}}(\mathrm{K_i}, \mathrm{T_i})\right]^2, (i = 1 \dots \mathrm{N}) \qquad (2.13)$$

Burada, Ω Heston modelindeki bir parametre setidir ($\Omega = \{\mathrm{v_0}, \kappa, \sigma, \theta, \rho\}$), $\mathrm{C_i^{\Omega}}(\mathrm{K_i}, \mathrm{T_i})$ Heston modeli tarafından üretilen opsiyon fiyatları, $C_i^M(K_i, T_i)$ Piyasada yayınlanan opsiyon fiyatları, $\mathrm{K_i}$ Opsiyonlar için kullanım fiyatları, $\mathrm{T_i}$ Opsiyon fiyatların vade tarihleri, N kalibrasyon için kullanılan türevlerin sayısını temsil etmektedir (Johnson, 2019).

Kalibrasyon için parametreler, volatilite sürecinde sıfıra ulaşmayı önlemek için $2\kappa\theta - \sigma^2 > 0$: olacak şekilde sınırlanmıştır ve Feller kısıtlaması olarak bilinmektedir (Cox vd., 1985). Ek olarak, parametreler aşağıdaki gibi koşullandırılmıştır:

- Uzun vadeli volatilite $0 < \theta < 2$ olacak şekilde sınırlanmıştır,
- Ortalamaya dönüş hızı seviyesi $0 < \kappa$ olacak şekilde sınırlanmıştır,
- Dayanak varlığın fiyatları getirileri için volatilite $0 < \overline{\sigma}$ olacak şekilde sınırlanmıştır,
- Volatilite üzerindeki volatilite $0 < \sigma$ olacak şekilde sınırlanmıştır,
- Korelasyon $-1 < \rho < 1$ olacak şekilde sınırlanmıştır.

Son olarak, lsqnonlin fonksiyonu çağırılarak model parametreleri tahmin edilmektedir. Bu fonksiyon, hedef fonksiyonunuzu, başlangıç tahminlerinizi ve her bir parametre için belirlenen sınırlamaları dikkate almaktadır. Sonuç olarak, lsqnonlin en iyi parametre setini döndürür ve bu parametreler, Heston modelinin fiyatlandırma işlemlerinde kullanılmaktadır.

2.5. Kayıp Fonksiyonu ile Parametre Sapmalarının Değerlendirilmesi

Kayıp fonksiyonu, bir modelin tahminlerinin gerçek değerlerden ne kadar sapma gösterdiğini nicel olarak ölçmek için kullanılmaktadır. Elde edilen parametrelerin doğruluğu, Heston Karakterisktik modeli ile hesaplanan zımni volatilitelerin ve Black-Scholes ile piyasa verilerinden elde edilen zımni volatilitelerin karşılaştırılarak değerlendirilmesidir. Bir diğer değiş ile Zımni Volatilitelerin arasındaki Ortalama Kare Hata (IVMSE) değerlerin hesaplanmasıdır ve aşağıda verilen formül ile hesaplanmaktadır (Rough, 2015: 117)

$$L(\Theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(IV_{\text{model},i}(\Theta) - IV_{\text{gerçek},i}\right)^2 \tag{2.14}$$

$L(\Theta)$ Kayıp fonksiyonu değeri, N Gözlem sayısı, $IV_{\text{model},i}(\Theta)$ Model tarafından tahmin edilen i'nci zımni volatilite değeri, $IV_{\text{gerçek},\,i}$ Gerçek i'nci zımni volatilite değeri ve Θ Model parametrelerini ifade etmektedir.

2.6. Heston Modelinde Euler Şeması

Dayanak varlığın fiyatı ve varyansının evrimi, iki değişkenli stokastik diferansiyel denklemler ile ifade edilmiştir ve bu denklemler Eşitlik 2.24'te sunulmuştur. Ancak, simülasyonlar genellikle ayrık zaman adımlarında gerçekleştirilir. Bu bağlamda, simülasyon şemalarında ilk adım, genellikle sürekli zaman sürecini ayrık zaman süreciyle yaklaşık olarak temsil etmektir. Bu işlem, diskretizasyon veya ayrıklaştırma yöntemi olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemlerden biri olan Euler yöntemi, Heston SDD'ine (eşitlik 2.1) eşitlik 1.20'den 1.22'e kadar olan adımlar uygulandığında Heston Euler Modeli'ne dönüşür (2.15 ve 2.16) ve bu model aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir (Rouah, 2015: 146):

$$S_{t+1} = S_t + rS_t\Delta_t + S_t\sqrt{v_t^+}Z_S\sqrt{\Delta_t} \tag{2.15}$$

$$v_{t+1} = v_t + \kappa(\theta - v_t^+)\Delta_t + \sigma\sqrt{v_t^+}Z_v\sqrt{\Delta_t} \tag{2.16}$$

Z_v ve Z_S arasındaki korelasyon, Cholesky ayrıştırması kullanılarak sağlanmaktadır:

$$Z_v = Z_1 \tag{2.17}$$

$$Z_S = \rho Z_v + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \tag{2.18}$$

Burada Z_1 ve Z_2, bağımsız standart normal dağılımlardan çekilen rasgele değişkenlerdir.

Diskretizasyon şemalarında karşılaşılan ortak hatalardan biri, yakınsamadan kaynaklanan hatalardır. Bu tür hatalar genellikle "diskretizasyon hatası" olarak adlandırılmaktadır (Davis, 2021). Bu hata, sürekli zamanlı modelin ayrık zamanlı yaklaşık temsilinin, orijinal sürekli zamanlı modele tam olarak uymamasından kaynaklanmaktadır. Euler gibi bir diskretizasyon şeması simüle ederken bu sorunla karşılaşılabilmektedir. Hataların giderilmesinde ise zaman aralığının (dt) küçülütmesi ya da simülasyon sayısının artırılması sorunların giderilmesinde etkili olmaktadır (Beyazıt, 2023: 133).

2.7. Negatif Varyansın Önlenmesi

Euler gibi bir diskretizasyon şeması simüle ederken iki ana sorunla karşılaşılmaktadır. İlki, yavaş yakınsamadan kaynaklı hatadır. İkinci neden ise, v_t'nin bir CIR sürecini takip etmesidir, birçok simülasyon şeması, Euler ve Milstein şemaları dahil, Feller koşulu $2\kappa\theta > \sigma^2$ karşılandığında bile v_t için negatif değerler üretebilmektedirler. Bu nedeni ise Feller koşulunun sürekli zaman süreçleri için geçerli olması, ancak simülasyonun ayrık zamanda yapılması ve sürekli zaman süreçlerine yaklaşık olarak hizmet etmesidir (Rouah, 2015: 145).

Negatif varyanslarla başa çıkmanın en basit yolu, onları ortaya çıktıkça geçersiz kılmaktır. Bunu yapmak için farklı yöntemler vardır. Bu yöntemler arasında yaygın olarak tercih edilen Tam kesme ve Yansıma şeması olarak bilinmektedir.

- Tam kesme şemasında (Full Trancation), v_t için negatif bir değer sıfıra yuvarlanır. Bu nedenle, v_t, ayrıklaştırmada her yerde $v_t^+ = max(0, v_t)$ ile değiştirilmektedir.

Kesme şeması, simülasyonlarda sınır koşullarını ele almak üzere kullanılan başka bir sayısal tekniktir. Değeri önceden tanımlanmış bir minimum veya maximuma ayarlar. Örneğin, volatilite -0,05'e düşerse, kesme şeması onu 0 olarak ayarlar ve simülasyonu rayında tutar.

- Yansıma şemasında (Reflection Scheme), vt için negatif bir değer - v_t ile yansıtılmaktadır. Bu nedenle, v_t, ayrıklaştırmada her yerde $|v_t|$ ile değiştirilmektedir. Yansıma şeması, özellikle Wiener süreci gibi stokastik süreçleri simüle ederken sınır koşullarını ele almak için kullanılan bir sayısal tekniktir. Finansal matematikte, genellikle stokastik volatilite içeren opsiyon fiyatlandırma modellerinde kullanılmaktadır. Bir simülasyonda, bir stokastik süreç tanımlanmadığı bir sınıra ulaşırsa (negatif dayanak varlık fiyatları veya volatilite), yansıma şeması süreci tanımlı olduğu alana "yansıtır". Örneğin, volatilite -0,05'e düşerse, yansıma şeması onu +0,05'e yansıtarak simülasyonu rayında tutmaktadır.

Heston modeli için Tam kesme ve Yansıma şemaları arasında seçim yaparken, her iki yöntemin de avantajları ve dezavantajları vardır. Tam kesme şemasının avantajı basit ve hızlı olması ve volatilitenin negatif olmasını önlemesidir. Tam kesme şemasının dezavantajı, sıfır varyanslar yaratmasıdır, bu gerçekçi değildir çünkü dayanak varlığın fiyatları asla sıfır varyans göstermemektedir. Yansıma şemasının avantajı ise volatilitenin negatif olmasını önlemekte ve modelin akışını bozmayacak şekilde davranmasını sağlamaktadır. Yansıma şemasının dezavantajı, büyük bir negatif varyansı büyük bir pozitif varyansa yansıtmasıdır. Hangi şemanın "daha iyi" olduğu, modelin ne için kullanılacağına ve hangi özelliklerin daha önemli olduğuna bağlıdır.

2.8. Simülasyon Adımları

Gerçek dünyada bir sistemin matematiksel modeli inşa edildiği zaman sistemin işleyişindeki rassallık (belirsizlik) gündeme gelmektedir. Sistem hakkında daha güvenilir bilgi elde edebilmek için söz konusu sistem simüle edilmektedir. Simulasyon "similis" kökünden gelen bir şeyin benzerini veya taklidini yapmak anlamına gelen Latincedeki "simulare" kökünden türetilmiş bir kelimedir. Teknik anlamda Türkçe'de "Benzetim"

sözcüğünün kullanıldığı görülmektedir. Simulasyon genelde, deneyim kazandırma ve deney yapma gibi iki farklı amaçla kullanılmaktadır. Deneyim kazandırma amaçlı simülasyonda, gerçek sistem yerine sistemin bir modeli kullanılmaktadır. Deney yapma amaçlı simülasyonda ise değişim kabiliyetine sahip modeller kullanılarak bu modeller üzerinde deneyler yapılmaktadır (Önalan, 2022: 409).

Simülasyon yöntemleri kullanılırken, değişkenlerin olasılık dağılımları, dolayısıyla her bir risk faktörü dikkate alınmaktadır. Simülasyon yönteminde, satış fiyatı ve yatırım tutarı gibi faktörleri göz önüne bulundurularak bir model oluşturulmaktadır. Oluşturulan yatırım modelinde, değişkenlere çeşitli değerler verilerek olası sonuçlar görülmekte ve yapılan tekrarlar sonucu değerlendirilmesine olanak sağlamaktadır. (Anbar, 2009: 311).

Heston model ve Euler şemasının uygulamak için tüm simülasyon adımlarında ilk olarak bağımsız standart normal rasgele değişken üretilir ve bu yönteme Monte Carlo yöntemi olarak bilinmektedir (Hull, 2008: 276). Monte Carlo yöntemi, analitik yollarla çözülemeyen problemleri simülasyon yöntemiyle "yaklaşık" olarak çözmemize yarar. Bu bağlamda, simülasyon, gerçeğin temsil edilmesi şeklinde tanımlanabilmektedir (Kim, vd, 2022). Monte Carlo aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \sim N = [\mu, \sigma] \qquad (2.19)$$

Monte Carlo yöntemi, rastgele sayılar üreterek simülasyonlar yapar ve bu sayılar belirlenen şartlar altında yapılmaktadır. Bu çalışmada, standart normal dağılım N=[0,1] kullanılarak elde edilmektedir. Bu, ortalamanın 0 ve standart sapmanın 1 olduğu bir dağılımdır. Monte Carlo yöntemi, Merkezi Limit Teoremi'ne dayanır; bu teorem, yeterli büyüklükteki bir örneklemde, bağımsız rastgele değişkenlerin ortalamasının normal dağılıma yakınsayacağını belirtir (Law, 2000). Böylece, simülasyonlarda kullanılan rastgele sayılar, büyük sayılar yasasına göre, beklenen değerlere (bu durumda ortalama ve standart sapma) yakınsar. Bu yakınsama, simülasyonun doğruluğunu ve güvenilirliğini artırmaktadır (Boyle, 1997).

Heston modelinde Z_v ve Z_s olarak bilinen Wiener süreçleri (rassallık terimleri) Eşitlik 2.19 ‘a göre hesaplanmıştır. Sonrasında, Cholesky ayrıştırması uygulanarak üretilen rassal sayılar korelasyon parametersi olan ρ ile ilişkilendirilmektedir. İkinci olarak, güncellenmiş değer v_{t+dt} elde edilmektedir. Üçüncü olarak, v_{t+dt} değeri verildiğinde, güncellenmiş değer S_{t+dt} elde edilmektedir (Fusaro vd., 2023: 15). Adımlar detaylıca aşağıdaki gibidir (Raouh, 2015: 145):

1. S_0 'u dayanak varlığın başlangıç fiyatıdır ve v_0'u mevcut varyans parametresine başlatılmaktadır.

2. Monte Carlo yöntemi ile Z_1 ve Z_2 olmak üzere iki bağımsız rasgele değişken üretilmektedir ve $N[0,1]$ arasında değerler üretmektedir. Phyton np.random.normal(0, 1, simülasyon sayısı) fonksiyonu kullanarak rassal sayılar elde edilmektedir.

3. $Z_V = Z_1$ ve $Z_S = \rho Z_V + \sqrt{1-\rho^2} Z_2$ olarak tanımlanabilinmektedir.

4. Güncellenmiş değer v_{t+dt} 'ye ile bir sonraki adımdaki değere ulaşılmaktadır.

5. v_{t+dt} değeri verildiğinde, güncellenmiş değer S_{t+dt} (veya x_{t+dt}) elde edilmektedir ve sonrasında ikinci adıma geri dönülmektedir.

Z_V ve Z_S , $E[Z_V] = E[Z_S] = 0$ olacak şekilde olması gerektiğinden dolayı $E[Z_V Z_S] = \rho E[Z_1^2] + \sqrt{1-\rho^2} E[Z_1 Z_2] = \rho$ olacak şekilde oluşturulmaktadır. Zaman ızgarasının ise $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_M = T$ olarak ayrıklaştırıldığı varsayılmaktadır.

Cholesky ayrışması, simülasyonda kullanılan rassal sayıların sapma oranını düşürmeye yardımcı olmakla birlikte, simülasyonun daha doğru ve gerçekçi sonuçlar üretmesine yardımcı olmaktadır.

2.9. Opsiyon Fiyatlandırma ve Değerlendirilmesi

Simülasyon sonucunda elde edilen her bir dayanak varlık fiyatı için, vade sonunda opsiyonun ödeme miktarı hesaplanmaktadır. Bu hesaplama, Alım opsiyonları için dayanak varlığın vade sonu fiyatının kullanım fiyatından yüksek olduğu durumlarda ve Satım opsiyonları için kullanım fiyatının dayanak varlığın vade sonu fiyatından yüksek olduğu durumlarda gerçekleştirilmektedir. Her iki durumda da, opsiyonun ödeme miktarı, maksimum değer fonksiyonu kullanılarak belirlenmektedir:

- Alım opsiyonu için ödeme miktarı: $\max\left(0, S_T^{(i)} - K\right)$
- Satım opsiyonu için ödeme miktarı: $\max\left(0, K - S_T^{(i)}\right)$

Burada S_T vade sonundaki dayanak varlık fiyatını, K ise kullanım fiyatını ifade etmektedir. Daha sonra, tüm simülasyonlardan elde edilen ödeme miktarlarının ortalaması alınmakta ve bu ortalama, risksiz faiz oranı r kullanılarak bugünkü değere indirgenmektedir. Bu işlem, opsiyonun mevcut piyasa değerini hesaplamak amacıyla yapılmaktadır. İndirgeme işlemi, e^{-rT} faktörüyle gerçekleştirilmekte olup, burada T opsiyonun vadesine kalan süreyi temsil etmektedir. Bu yöntemle hesaplanan değer, opsiyonun teorik fiyatı olarak kabul edilmektedir. Bir Avrupa tipi opsiyon değerlendirilmesi ise Alım (C) ve Satım fiyatı (P) aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Fusaro, 2023: 14-15):

$$C = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} max\left(0, S_T^{(i)} - K\right) \tag{2.20}$$

$$P = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} max\left(0, K - S_T^{(i)}\right) \tag{2.21}$$

Burada, i = 1,..., N adet kadar $S_T^{(i)}$ simülasyon ile üretilen dayanak varlığın vade sonu fiyatıdır. Fiyatların doğruluğu ise en popüler değerlendirme kriterlerinden olan Ortalama Karakök Hata (MSE) hesaplamaları ile değerlendirilmektedir ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Arabacı, 2021: 24).

$$\text{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_i)^2 \tag{2.22}$$

Ayrıca, Standart Hata kullanılmaktadır.

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{2.23}$$

Eşitlik 2.23'de yer alan *s* aşağıdaki hesaplama sonucu ile elde edilmektedir.

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_i)^2} \tag{2.24}$$

Burada, *SE* standart hatayı, s örneklem standart sapmasını, n örneklem büyüklüğünü, N toplam öğe sayısını, x_i her bir öğeyi ve $\bar{x}_i$ beklenen değeri temsil etmektedir.

Standart sapma, bir veri setindeki değerlerin ne kadar yayıldığını (dağılımını) ölçen bir istatistiksel terimdir. Başka bir deyişle, ortalama veya beklenen değerden ne kadar sapma gösterdiğini ifade etmektedir. Düşük bir standart sapma, değerlerin ortalamaya yakın olduğunu gösterirken, yüksek bir standart sapma değerlerin geniş bir aralıkta yayıldığını göstermektedir. Standart hata, bir örneklem dağılımının standart sapmasıdır ve genellikle bir popülasyon parametresinin tahmin edicisinin ne kadar doğru olduğunu ölçmek için kullanılmaktadır. Özellikle, standart hata, bir örneklem ortalamasının, gerçek popülasyon ortalamasına ne kadar yakın olduğunu göstermektedir.

2.10. Varyans Azaltma Yöntemleri

Birçok simülasyonun başarı şansı veya etkin bir sonuç üretebilmesi çok fazla simülasyon sayısının üretebilmesine bağlıdır. Bu ise hesaplama süreçlerini çok fazla artıracaktır. Daha uygun bir yöntem muhtelif Varyans Azaltma Yöntemlerinin kullanılmasıdır (Beyazıt, 2023: 139). Bu yöntemler, belirsizliklerin etkilerini minimize ederek, finansal modellerin ve diğer analitik araçların daha tutarlı ve güvenilir çıktılar üretmesine yardımcı olmaktadır. Büyük sayılar kanunu, artan simülasyon sayısıyla

birlikte elde edilen sonuçların daha güvenilir hale geldiğini gösterse de artan simülasyon sayıları hesaplama sürelerinde önemli ölçüde bir artışa neden olabilmektedir (Rubinstein, 2016). Bu yöntemler simülasyon sayılarının azaltılmasına rağmen hata paylarından ödün verilmemesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca, bu yöntemler simülasyon varyansını azaltır, dağılımlardaki kalın kuyruk sorununu gidermeye yardımcı olur ve standart sapmayı düşürmektedir. (Moretto vd., 2017)

Ayrıca, Varyans Azaltma Yöntemleri, standart simülasyonlardan farklı olarak, belirli olayları veya özellikleri dikkate alarak simülasyon yapılmasına imkân sağlanmaktadır. Yöntemlerin, bir finansal problemin özgün yapısını göz önünde bulundurarak simülasyonların belirli durumlara veya olaylara odaklanmasına izin vermektedir. (Glasserman, 1997) Bu durum, simülasyonların daha gerçekçi sonuçlar üretmesine ve finansal modellerin gerçek dünya durumlarına daha iyi uyum sağlamasına yardımcı olmaktadır. Ayrıca, bu yöntemler öngörülen belirli risklerin veya belirli olayların etkilerini daha iyi anlamak için kullanılmakta ve finansal karar alma süreçlerine daha kapsamlı ve gerçekçi bir bakış sunmaktadır. Bu sayede, yatırımcılar ve finansal analistler, daha doğru ve güvenilir kararlar almalarına yardımcı olacak verilere erişebilmektedirler.

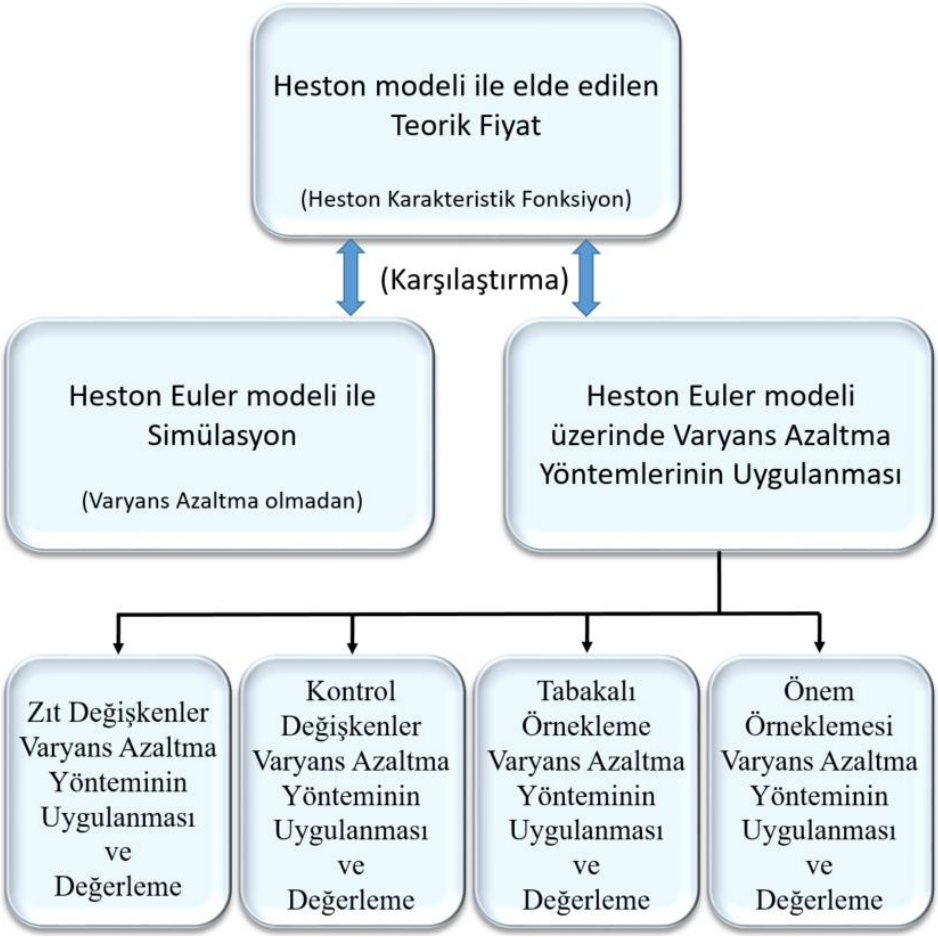
Alınması gereken kararlara bağlı olarak her bir Varyans Azaltma Yönteminin farklı kullanım alanları bulunmaktadır. Bir başka deyişle, farklı simülasyon senaryoları ve gereksinimleri, çeşitli Varyans Azaltma Yöntemi kullanımını gerektirmektedir. Her bir yöntem, belirli koşullar ve hedefler için daha uygun olabilir ve simülasyonun doğruluğunu ve verimliliğini artırmak için farklı yollar sunmaktadır. Zıt Değişkenler, özellikle simülasyon çıktılarının simetrik dağılıma sahip olduğu durumlarda etkilidir. Varlık fiyatlarının yukarı ve aşağı hareketlerinin simetrik olduğu finansal piyasalar analizlerinde kullanılabilir. Kontrol Değişkenleri, modelin bazı parametrelerinin veya çıktılarının beklenen değerleri bilindiğinde veya tahmin edilebildiğinde etkilidir. Dayanak varlığın fiyat getirilerinin tarihsel ortalaması gibi bilinen bir değerle korelasyon kurarak kullanılabilmektedir. Önem Örnekleme, nadir olayların gerçekleşme olasılığı düşük ancak sonuçları önemli olduğunda etkilidir. Finansal piyasalarda büyük fiyat düşüşleri gibi nadir olayların etkilerini incelemek için kullanılabilmektedir. Tabakalı Örnekleme, girdi verileri heterojen olduğunda ve farklı alt grupların etkilerini ayrı ayrı

incelemek istendiğinde etkilidir. Farklı piyasa koşullarında veya farklı varlık sınıflarında opsiyon fiyatlarının nasıl değiştiğini analiz etmek için kullanılabilmektedir (Jourdain, 2009: 1- 2).

Özellikle finans alanında kullanılan türev ürünlerin küresel krizlerdeki rolü göz önüne alındığında, stokastik modellerin ve bu modellere dayalı Varyans Azaltma Yöntemlerinin türev ürünlerin fiyatlandırması üzerinde büyük bir etkiye sahip olduğu ve benzer ürünlerin fiyatlandırmasında da büyük önem taşıdığını göz önünde bulundurmak gerekmektedir (Dunn, 2023: 151-156). Bu nedenle, günümüz koşullarına uygun fiyatlandırma modellerinin kullanımı ve verimlilikleri, giderek daha fazla önem kazanmaktadır.

Çalışmanın bu kısmında Heston modeli içerisinde Monte Carlo simülasyon modeline dayalı Varyans Azaltma Yöntemlerinden Zıt Değişkenler, Kontrol Değişkenleri, Önem Örnekleme ve Tabakalı Örnekleme Varyans Azaltma Yöntemleri ile opsiyon fiyatlarının ortalama kare hatasını (MSE), standart hata payını (SE) azaltabilirliğini ve hesaplanan fiyatların güvenilirliğini artırma kabiliyetini incelemek amacı ile uygulamalı olarak incelenmektedir. Simülasyon sonuçlarının karşılaştırılabilmesi için, tek bir seferde rastgele sayılar üretilmiştir. Daha sonra bu rastgele üretilen sayılar, global bir sunucuda saklanmış ve her bir VAY için kullanılmıştır. Bu şekilde, yöntemlerin VAY'den etkilenmesi, aynı rastgelelik sürecinden geçirilerek sağlanmıştır.

Uygulamalar için seçilen yöntemler ve yapılacak olan işlemler şekil 13'te gösterilmektedir.



Şekil 13. Heston Modelinde Varyans Azaltma Yöntemlerinin Uygulama Akış Şeması

2.10.1. Zıt Değişkenler

Zıt değişkenler yöntemi, tamamen yeni rassal değişkenler örnekleme yerine, daha önce örneklenmiş bir değişkenin negatifinin kullanıldığı bir yöntemdir. Bu yöntemin temel fikri, bir rassal değişkenin negatifinin, orijinal değişkenden farklı olarak dağılımın karşı kuyruğu hakkında bilgi sağlayacağı ve fonksiyon monotonik ise varyansı azaltmaya yardımcı olabileceğidir. (Glasserman, 2003: 205) (Beyazıt, 2023: 139-141) (Chan vd., 2013: 56-58).

$\theta = E[X]$ tahmin etmek istenen değişkeni temsil etmektedir ve $E[X_1] = E[X_2] = \theta$ ve $Var(X_1) = Var(X_2) = \sigma^2$ olacak şekilde X_1 ve X_2 adlı iki çıktı üretilmektedir.

$$E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] = \theta \tag{2.25}$$

Eşitlik 2.25, değişkenlerin ortalamasına yine θ olarak adlandırılacağını belirtilmektedir. Ortalama değerin varyansı ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$Var\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right) = \frac{1}{4}(Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)) \tag{2.26}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}Cov(X_1, X_2) \tag{2.27}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sigma^2, \textit{eğer } Cov(X_1, X_2) \leq 0 \tag{2.28}$$

Eşitlik 2.27, Eşitlik 2.26'in basitleştirilmiş halidir ve varyansın σ^2 ve X_1 ile X_2 arasındaki kovaryansın bir fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Eşitlik 2.28, X_1 ve X_2 arasındaki kovaryansın sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olduğu durumlarda, hesaplanan varyansın σ^2 'nin yarısından küçük veya buna eşit olacağını belirtmektedir.

Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, X_1 ve X_2'nin bağımsız olduğu durumda $\text{Var}\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$ olacağıdır. Dolayısıyla, 2.28'de X_1 ve X_2'nin negatif korelasyona sahip olması durumunda bu değişkenlerin ortalamasının varyansının, her bir değişkenin varyansının yarısından daha az veya buna eşit olacağını ifade etmektedir. Başka bir deyişle, negatif korelasyon, toplam varyansı azaltarak tahminlerimizi daha güvenilir hale getirmektedir.

Negatif korelasyona sahip rastgele sayılar oluşturulması için m bağımsız uniform dağılımlı rastgele sayı, $U_1, \ldots, U_m$ şeklinde oluşturulmuştur. Ardından $V_1 = 1 - U_1, \ldots, V_m = 1 - U_m$, negatif korelasyona sahip n bağımsız uniform dağılımlı rastgele sayılar olarak oluşturulur, burada (U_i, V_i) negatif korelasyona sahiptir ve $i = 1, \ldots, m$ için geçerlidir.

Bir h fonksiyonu için $X_1 = h(U_1, \ldots, U_m)$ ise, $X_2 = h(V_1, \ldots, V_m)$, X_1 ile aynı dağılıma sahip olacaktır. Sonuç olarak, $\frac{X_1+X_2}{2}$ daha küçük bir varyansa sahip olacaktır.

Normal dağılıma sahip zıt değişkenler oluşturmak için $Xi \sim N(\mu, \sigma 2)$ olduğunda, $Y_i = 2\mu - X_i$ aynı dağılıma sahip olacaktır ve X_i ve Y_i negatif korelasyona sahip olacaktır.

Daha genel olarak, herhangi bir *H* fonksiyonu *H(X)* için *E[H(X)]* hesaplanırken, standart Monte Carlo simülasyonunda $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(X_i)$ kullanılmaktadır. Ardından *E[H(X)]* için zıt değişkenler aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\widehat{H}_{AN} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \left(H(X_i) + H(Y_i)\right) \tag{2.29}$$

Burada Y_i zıt değişkenler dizisidir. Bu zıt değişkenler ile varyans azaltma şu şekilde elde edilmektedir; *H*(*X*) için *Var*(*H*(*X*)) = σ^2 ve *Corr*(*H*(*X*), *H*(*Y*)) = ρ alınmaktadır.

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{H}_{\mathrm{AN}}\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Var}\left(H(X_i)\right) + \mathrm{Var}\left(H(Y_i)\right) + 2\,\mathrm{Cov}\left(H(X_i), H(Y_i)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4n^2}(2n\sigma^2 + 2n\rho\sigma^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2n}(1+\rho) \tag{2.30}$$

H(X) ve *H(Y*) arasında korelasyon olmadığında *(ρ = 0)*, varyans 2 kat azaltılır, bu da simülasyon boyutunu ikiye katlamakla eşdeğerdir. Ancak, eğer *ρ = -1* ise, varyans sıfıra düşmektedir. Bu nedenle *ρ* negatif olduğu sürece belirli bir düzeyde varyans azaltma elde edilebilmektedir. Bu sakıncalar göz önünde bulundurulduğunda, *Y'yi ρ = -1* olacak şekilde seçilmesi mümkündür. Bu, *ρ*'nin *H(X)* ve *H(Y)* arasındaki korelasyonu temsil ettiği için zor olabilmektedir. *H(X) = X* durumunda, $\widehat{H}_{\mathrm{AN}}$ zıt değişkenler en iyi çalışan seçenek olacaktır. Zıt değişkenler *(Y)*, genellikle ρ'nin negatif olacağı şekilde seçilmektedir ve mutlaka -1'e eşit olması gerekmemektedir. *H(X) = X* gibi doğrusal olduğu durumlarda, zıt değişkenler en iyi şekilde çalışmaktadır. Genel olarak, *H* ne kadar lineerse, zıt değişkenler o kadar etkili olmaktadır.

2.10.2. Kontrol Değişkenleri

Kontrol değişkenleri yöntemi etkili ve geniş çapta uygulanmakta olan yöntemlerden biridir, özellikle opsiyon fiyatlandırmalarda kullanımı son yıllarda artmıştır. Kontrol değişkenleri yöntemi varyansı azaltmak için oldukça basit ve etkili bir yöntem olarak bilinmektedir. Kontrol değişkenleri yöntemi, belirli değişkenlerin bilinen beklenen değerlerini kullanarak diğer değişkenlerin beklenen değerlerini tahmin etmeye yardımcı olan bir yöntemdir (Glasserman, 2013: 184).

Simülasyon yoluyla tahmin elde edilmek istenen $\theta = E[X]$ olduğunda, bir değişken Y için ortalama $\mu Y = E[Y]$ değeri bilindiği varsayılmaktadır. Bu durumda, herhangi bir sabit c kullanılarak aşağıdaki ifade edilmektedir:

$$X_{\mathrm{CV}} = X + c(Y - \mu_Y) \tag{2.31}$$

θ'nin $(E[X_{CV}] = \theta)$ yansız (unbiased) bir tahmini olduğu varsayılmaktadır (Chan vd., 2013: 58). Varsayılan olarak, eğer sabit c uygun bir şekilde seçilirse, belirli bir varyans azaltma elde edilmektedir. Bu durumda, c için iyi bir seçimin ne olabileceği sorusu ortaya çıkmaktadır. Bu soruyu cevaplamak için öncelikle yeni tahminin X_{CV} varyansını σ^2_{CV} tanımlamak gerekmektedir.

$$\sigma^2_{CV} = Var\big(X + c(Y - \mu_Y)\big) = Var(X) + c^2 Var(Y) + 2c\,Cov(X, Y) \tag{2.32}$$

Amaç, σ^2_{CV} 'nin en küçük olduğu c'yi bulmaktır. Önceki ifadeyi c'ye göre türeterek ve elde edilen türev sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$2c\,Var(Y) + 2\,Cov(X, Y) = 0 \tag{2.33}$$

Böyle bir c için c^* = -Cov(X, Y) / Var(Y) ifadesi, σ^2_{CV} 'yi en aza indiren değeri vermektedir. Bu c^* için aşağıdaki eşitliğe denk gelmektedir:

$$\sigma^2_{c^*} = Var(X) - \frac{(\mathrm{Cov}(X, Y))^2}{Var(Y)} \tag{2.34}$$

Bu şekilde kullanılan *Y* değişkenine, *X* için bir kontrol değişkeni denilmektedir. *X* ve *Y* arasındaki korelasyon ise aşağıdaki gibidir:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \tag{2.35}$$

Bu nedenle, varyansı ise:

$$\sigma_{c^*}^2 = Var(X)\,(1 - Corr^2(X,Y)) \tag{2.36}$$

Bu sebeple, korelasyon *Corr(X, Y) ≠ 0* olduğu sürece, bir şekilde varyans azaltma elde edilmektedir. Uygulamada, $\sigma_Y^2 = Var(Y)$ ve *Cov(X,Y)* gibi nicelikler genellikle mevcut değildir ve örnek değerlere dayalı olarak simülasyonlardan tahmin edilmektedir. Örneğin, $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ ve $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$ alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \tag{2.37}$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 \tag{2.38}$$

$$\widehat{c^*} = -\frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(X,Y)}{\hat{\sigma}_Y^2} \tag{2.39}$$

Simülasyondan elde edilen $\bar{X}$ 'i θ tahmin etmek için kullanılmaktadır. Bu durumda, kontrol değişkeni $\bar{Y}$ olacaktır ve kontrol değişkeni şu şekildedir:

$$\bar{X} + c(\bar{Y} - \mu_Y) \tag{2.40}$$

varyansı ile şu şekildedir:

$$\frac{1}{n}\left(\mathrm{Var}(X) - \frac{(\mathrm{Cov}(X,Y))^2}{\mathrm{Var}(Y)}\right) = \frac{\sigma_X^2}{n}(1-\rho^2) \tag{2.41}$$

Eşdeğer olarak, eşitlik 2.44 basit bir doğrusal regresyon denklemi düşünüldüğünde:

$$X = a + bY + e \tag{2.42}$$

Regrasyon denklemi kullanarak c^* tahmin edilebilmektedir. Esasen, en küçük kareler tahmininin b'ye göre olduğu, yani $\hat{b} = -\widehat{c^*}$ olduğu gösterilebilmektedir. Bu durumda, kontrol değişkeni tahmini şu şekilde olmaktadır:

$$\bar{X} + c^*(\bar{Y} - \mu_Y) = \bar{X} - \hat{b}(\bar{Y} - \mu_Y) = \hat{a} + \hat{b}\mu_Y \tag{2.43}$$

Burada $\hat{a} = \bar{X} - \hat{b}\bar{Y}$, a'nın en küçük kareler tahminidir. Başka bir deyişle, kontrol değişkeni tahmini, nokta μ_Y 'de değerlendirilen tahmin edilen regresyon denklemine eşittir. Bunun geometrik yorumu bulunmaktadır. İlk olarak, tahmin edilen regresyon çizgisi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\hat{X} = \hat{a} + \hat{b}Y = \bar{X} + \hat{b}(Y - \bar{Y}) \tag{2.44}$$

Dolayısıyla, bu çizgi $(\bar{Y}, \bar{X})$ noktasından geçer. İkinci olarak, aşağıdaki eşitlik 2.46 olarak değiştirilmektedir:

$$\hat{X}_{\mathrm{CV}} = \hat{a} + \hat{b}\mu_Y = \bar{X} - \hat{b}(\bar{Y} - \mu_Y) \tag{2.45}$$

Varsayımsal olarak $\bar{Y} < \mu_Y$, yani simülasyonun μ_Y 'nin üzerinden tahmin ediyor ve X ile Y arasında pozitif bir korelasyon olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda, $\bar{X}$ 'in E[X] = θ' yi altında tahmin edeceği muhtemeldir. Bu nedenle, c sabit yukarı yönde düzeltmemiz gerekiyor, ki bu da $\hat{b} = -\widehat{c^*} > 0$ olduğu gerçeği tarafından işaret edilmektedir. Yukarı yönde düzeltilmesi gereken ek miktar, $-\hat{b}(\bar{Y} - \mu_Y)$ ile eşittir ve bu miktarı lineer denklem ile yönetmektedir.

Son olarak, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\sigma}^2$ 'nin regresyon tahmini, $\mathrm{Var}\left(X - \hat{b}Y\right) = \mathrm{Var}(X + \widehat{c^*}Y)$ tahminidir ve aşağıdaki eşitlikler ile özetlenmektedir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \hat{a} - \hat{b}Y_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \left(\bar{X} - \widehat{b\bar{Y}}\right) - \hat{b}Y_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \bar{X}) + \hat{b}(Y_i - \bar{Y})\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left((X_i - \bar{X})^2 - \hat{b}^2(Y_i - \bar{Y})^2\right)$$

$$= \widehat{\mathrm{Var}}(X) - \hat{b}^2\widehat{\mathrm{Var}}(Y)$$

$$= \widehat{\mathrm{Var}}\left(X - \hat{b}Y\right) \qquad (2.46)$$

Son eşitlik, varyans tahmininin standart genişlemesinden gelmektedir. Bu nedenle, kontrol değişkeni $\bar{X} + \widehat{c^*}(\bar{Y} - \mu_Y)$ için tahmin edilen varyans $\hat{\sigma}^2/n$ 'dir. Genel olarak, birden fazla kontrol değişkeni isteniyorsa, aşağıdaki çoklu doğrusal regresyon modelinin çıktıları kullanılabilmektedir (Lio, 2015):

$$X = a + \sum_{i=1}^{k} b_i Y_i + e \tag{2.47}$$

Bu durumda, a ve b_is' lerin en küçük kareler tahminleri $\hat{a}$ ve $\widehat{b_\iota}$s' ler olacaktır, yani $i = 1, \dots, k$ için $\widehat{c_\iota^*} = -\widehat{b_\iota}$ olacaktır. Ayrıca, kontrol değişkeni tahmini şu şekildedir:

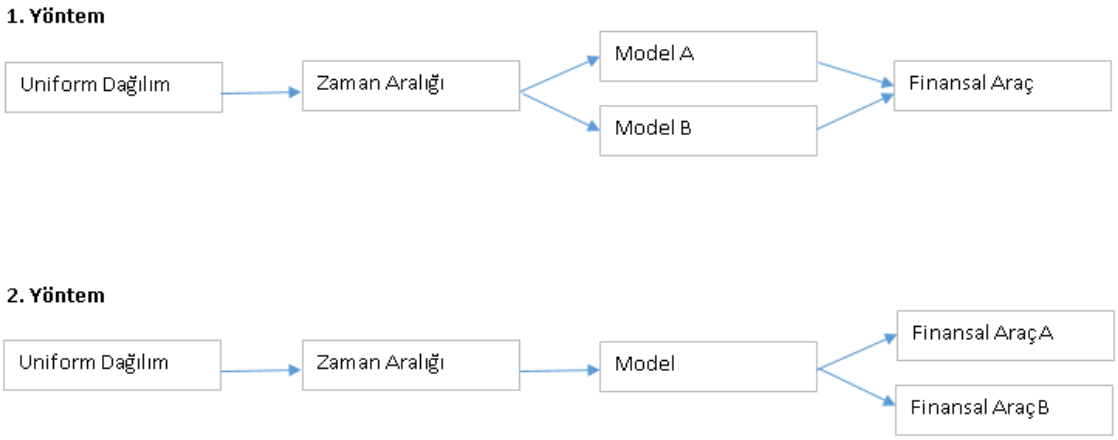
$$\bar{X} + \sum_{i=1}^{k} c_i\left(\overline{Y_\iota} - \mu_{Y_i}\right) = \hat{a} + \sum_{i=1}^{k} \widehat{b_\iota}\mu_{Y_i} \tag{2.48}$$

Burada, $\mathrm{E}[Y_i] = \mu_{Y_i} i = 1, \dots, k$ Başka bir deyişle, kontrol değişkeni tahmini, $\left(\mu_{Y_1}, \dots, \mu_{Y_k}\right)$ noktasında değerlendirilen tahmini çoklu regresyon çizgisine eşittir. Aynı şekilde, kontrol değişkeni tahmininin varyansı $\hat{\sigma}^2/n$ olarak hesaplanır, burada $\hat{\sigma}^2$, σ^2'nin regresyon tahminidir.

Kontrol değişken ile varyans azaltmanın iki yolu bulunmaktadır. Şekil 14'te görüldüğü üzere (Webber, 2011: 319):

1. Yöntemde iki farklı fiyatlandırma modeli bulunmaktadır. Örneğin, Model A yerine Black-Scholes modeli kullanılıyorken Model B'nin yerine Heston modeli kullanılarak bir finansal aracın fiyatlandırılması mümkündür.

2. Yöntem için bir örnek verecek olursak tek bir fiyatlandırma modeli ile iki farklı finansal aracın değerlendirilmesi yapılmaktadır.



Şekil 14. Kontol Değişkenleri Şeması (Kaynak: Webber, 2011: 319).

Kontrol değişkenleri yöntemi, A ve B olmak üzere iki benzer türev olduğunda uygulanabilmektedir. Türev A, değerlendirilen türevdir; türev B, türev A'ya benzer ve analitik bir çözümü mevcuttur. Aynı rastgele sayı dizileri ve aynı Δt kullanılarak paralel olarak iki simülasyon gerçekleştirilmektedir. İlk simülasyon, A'nın değerinin bir tahmini olan f_A^*'yı elde etmek için kullanılmaktadır; ikincisi, B'nin değerinin bir tahmini olan f_B^*'yi elde etmek için kullanılmaktadır (Webber, 2011: 319). Daha sonra, A'nın değerinin daha iyi bir tahmini olan f_A, şu formül kullanılarak elde edilmektedir:

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B \tag{2.49}$$

Burada f_B, analitik olarak hesaplanan B'nin bilinen gerçek değeridir. Hull ve White, bir Avrupa tipi Alım opsiyonunun fiyatı üzerinde stokastik volatilitenin etkisinin değerlendirilmesi sırasında kontrol değişkenleri yönteminin kullanımına dair bir örnek sunmaktadır. Bu durumda, A, stokastik volatilite varsayılan opsiyon ve B, sabit volatilite varsayılan opsiyondur (Hull vd., 1987: 281–300) .

2.10.3. Önem Örnekleme

Önem örnekleme, finansal mühendislikte ve risk yönetiminde, nadir olayların (örneğin büyük piyasa çöküşleri) olasılıklarını tahmin etmek için sıkça kullanılmaktadır.

Özellikle, türev ürünlerin fiyatlandırılmasında ve kredi riski değerlendirmelerinde bu yöntem tercih edilmektedir. Bu yöntem, beklenmedik durumların simülasyonunda kullanışlıdır çünkü bu olayların olasılığı düşük olduğundan, normal koşullar altında yeterli sayıda örneklem elde etmek zor olabilmektedir (Chan vd., 2013).

Önem örnekleme, nadir olayların gerçekleşme olasılıklarının hesaplanmasında merkezi bir öneme sahiptir, bu sayede uygun önleyici stratejiler geliştirilebilir. Bu prosedür, genellikle daha yüksek varyansa sahip olan bölgelerde, simülasyonun odak noktasına ek bilgilerin yönlendirilmesi yoluyla gerçekleştirilmektedir (Webber, 2011: 345). Ancak, bu yöntem için önceden bir bilgiye sahip olunması gerekmektedir. Yani, hangi olayların daha olası olduğunu ve hangi olayların daha az olası olduğunu bilmemiz gerekmektedir. Önem örnekleme, bu tür olayları daha sık örnekleyerek varyansı azaltmaktadır. Bu durumda bir rastgele vektör $X = (X_1, \ldots, X_n)$ üzerinden tahmini değer θ aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\theta = E[h(X)] = \int h(x)f(x)dx \tag{2.50}$$

Burada bir beklenti değerini tahmin etmek istediğimiz varsayılmaktadır. Eğer bu vektörün doğrudan simülasyonu zor ve verimsiz ise, $h(X)$ değerini hesaplamak pratikte mümkün olmayabilmektedir. Bu zorluk, X vektörünün simülasyonunda yaşanan problemlerden, $h(X)$ değerinin çok büyük bir varyansa sahip olmasından ya da bu iki sebebin bir kombinasyonundan kaynaklanabilmektedir.

Eğer $f(x)$ yoğunluğunda herhangi bir yerde $f(x) = 0$ ise aynı yerde $g(x) = 0$ olacak şekilde bir $g(x)$ yoğunluğu varsa, θ değerini şu şekilde tahmin edilmektedir:

$$\begin{aligned} \theta &= E[h(X)] \\ &= \int \frac{h(x)f(x)}{g(x)} g(x)dx \\ &= E_g\left[\frac{h(X)f(X)}{g(X)}\right] \end{aligned} \tag{2.51}$$

Bu, X rastgele vektörünü g yoğunluğu ile üreterek ve sonrasında bu değerleri kullanarak θ değerini tahmin edebileceğimiz anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle, θ değerinin Monte Carlo oluşturmak için önce g (X) yoğunluğu ile bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele vektörleri X_i hesaplarız. Ardından bu değerleri kullanarak şu şekilde elde edilmektedir:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{h(X_i)f(X_i)}{g(X_i)} \tag{2.52}$$

Eğer g (x) yoğunluğu, $\frac{h(X)f(X)}{g(X)}$ rastgele değişkeni düşük bir varyansa sahip olacak şekilde seçilirse, bu yaklaşım önem örnekleme olarak adlandırılır ve θ değerinin etkili bir tahmin edicisi olarak kabul edilmektedir.

Önem örneklemenin nasıl çalıştığını daha iyi anlamak için, f ve g yoğunluklarına göre X değerini elde etme olasılığının oranı olan $\frac{f(X)}{g(X)}$ değerine bakabiliriz. Eğer X değeri g yoğunluğuna göre dağıtılırsa, genellikle f (X) değeri g (X) değerine göre daha küçük olacaktır. Bu, X değerinin g yoğunluğuna göre simüle edildiğinde, $\frac{f(X)}{g(X)}$ oranının genellikle 1'e göre küçük olduğu anlamına gelmektedir. Ancak, bu oranın ortalamasının 1 olduğunu belirtmek önemlidir.

$$\mathrm{E}_g\left[\frac{f(\boldsymbol{X})}{g(\boldsymbol{X})}\right] = \int \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 1 \tag{2.53}$$

Önem örneklemenin etkili olabilmesi için, h (X) değerinin küçük olduğu yerlerde $\frac{f(X)}{g(X)}$ oranının büyük olması gerekmektedir. Bu, $\frac{h(X)f(X)}{g(X)}$ oranının genel olarak küçük kalmasını sağlamaktadır. Bu nedenle, önem örnekleme özellikle küçük olasılıkların tahmininde en iyi sonuçları vermektedir.

2.10.3.1. Stokastik Süreçlerde Önem Örnekleme

Stokastik volatilite modellerin Varyans Azaltma Yöntemlerinde Radon-Nikodym türevi olarak bilnen bir yöntem kullanılmaktadır. İki olasılık ölçüsü arasındaki "değişim oranı" kullanılarak beklenen değerleri düzelten bir faktör ekleyen bir yöntemdir.

Heston modelindeki S_t ve v_t iki olasılık ölçüsü olduğunu varsayılmaktadır: gerçek dünya olasılık ölçüsü P ve risk-nötr olasılık ölçüsü Q altında değerlendirilmektedirler. Heston modeli ile elde edilecek olan beklenen değer $E_{\mathbb{Q}}[f(S_T)]$ olarak adlandırılmaktadır ve aşağıdaki gibi değiştirilmektedir (Fouque vd., 2002). Bu iki ölçü, finansal varlıkların gelecekteki fiyatlarına atanan olasılıklar açısından farklılık göstermektedir. Radon-Nikodym türevi $\frac{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}$, bu iki farklı ölçü arasındaki değişimi temsil eder ve bir ölçü değişikliği kullanarak başka bir ölçü altında beklenen değeri temsil etmektedir. Bu nedenle, eşitlik 2.54 ve 2.55 olarak Radon-Nikodym'a göre aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$E_{\mathbb{Q}}[f(S_T)] \approx E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{f(\boldsymbol{X})}{g(\boldsymbol{X})}\right] = \int \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{2.54}$$

$$E_{\mathbb{Q}}[f(S_T)] = E_{\mathbb{Q}_0}\left[f(S_T)\frac{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}\right] \tag{2.55}$$

Burada yer alana $\frac{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}$ oranı ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\frac{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0}{\mathbb{d}\mathbb{Q}_0} = (H_T)^{-1} \tag{2.56}$$

$$H_t = \exp\left(\int_0^t h^{\top}(s, X_s) d\eta_s + \frac{1}{2}\int_0^t \|h(s, X_s)\|^2 ds\right) \tag{2.57}$$

H_t bir stokastik sürecin yeni bir olasılık ölçüsü altında nasıl bir "drift" (yani, rastgele bir süreçteki ortalama değişim yönü) kazandığını gösteren bir Girsanov formülüdür, süreç ise,

$$\tilde{\eta}_t = \eta_t + \int_0^t h(s, X_s)ds \tag{2.58}$$

Eşitlik 2.58 yer alan $\tilde{\eta}_t$ ise iki boyutlu bir Wienern hareketidir. Eşitlik 2.56'da yer alan belirsizlik ise aşağıdaki gibi belirtilmiştir ve *h*'nin en uygun seçimi aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$h(t, X_t) = -\frac{1}{P(t, X_t)} a(t, X_t)^\top \nabla P(t, X_t) \tag{2.59}$$

Eşitlik 2.59 ile ilgili olan zorluk, *P(t, Xt)* ve *∇P(t, Xt)* olasılıkların bilinmemesidir. Aslında, simülasyonun amacı tam olarak *P*(*t, X*$_t$)'yi bulmaktır (Stilger, 2014). Bunun için, simülasyon sayıların ortalaması alarak *P(t, Xt)* ortalama değeri kullanılmaktadır.

2.10.4. Tabakalı Örnekleme

Tabakalı örnekleme, istatistiksel analizlerde sıklıkla karşılaşılan yöntemlerden biridir ve popülasyonun belirli alt kümelerine (stratalarına) özgü özellikleri daha doğru bir şekilde tahmin etmek için kullanılmaktadır. Yatırım portföylerinin farklı dayanak varlık sınıflarına (örn. hisse senetleri, tahviller, emtialar) nasıl tepki vereceğini anlamak için Tabakalı örnekleme kullanılabilmektedir. Bu yöntemin temel ilkesi, bir nüfusun heterojen yapıda olabileceği, ancak bu heterojen nüfusun homojen alt gruplara veya "tabakalara" ayrılabileceği fikrine dayanmaktadır.

Tabakalı örnekleme yönteminde, entegre edilecek fonksiyonun tanım alanı, birbirini kapsamayan strata bölümlere ayrılmakta ve ardından her stratadan bağımsız olarak örnekler çekilmektedir. Bu sayede, rassal değişkenin mümkün olan tüm değer aralıkları örnekleme içine alınmaktadır. Fonksiyonun tanım alanının farklı bölgelerinde farklı davranışlar sergilemesi durumunda, bu yöntemle varyans önemli ölçüde azaltılabilmektedir (Rubinstein, 2016).

Tabakalı örnekleme, örneklem alanını A olarak tanımlayıp bu alanı K adet ayrık alt kümeye, yani $A_1, A_2, \dots, A_K$ şeklinde böler. Bu alt kümelerin birleşimi A 'yı oluşturur. Rassal Monte-Carlo simülasyonunda, Y değişkeninin dağılımıyla aynı dağılıma sahip olan bağımsız $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_N$ dizisi üretilir. Tabakalı örneklemede, her bir A_i alt kümesinden, yani belirli tabakalardan, gözlemler belirli bir oranda çekilmektedir. Bu sayede, A_i tabakasından çekilen her gözlem, $Y \in A_i$ koşuluna bağlı olarak Y 'nin dağılımını yansıtmaktadır.

Bu yöntemin amacı, $A \to R$ olan rassal bir değişken Y' 'nin beklenen değeri $E[Y]'$ yi tahmin etmektir. Bu, şu şekilde ifade edilmektedir:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{K} P(Y \in A_i) E[Y \mid Y \in A_i] = \sum_{i=1}^{K} p_i E[Y \mid Y \in A_i] \qquad (2.60)$$

Tabakalı örneklemede en basit yaklaşım, bir tabakadan A_i çekilen gözlemlerin oranının, teorik olasılık $p_i = P(Y \in A_i)$ ile eşleşmesini sağlamaktır. Yani, $N_i = p_i N$. Her i için, $Y \in A_i$ koşuluna bağlı olarak Y 'nin koşullu dağılımından çekilen bağımsız ve aynı dağılıma sahip gözlemler dizisi $\hat{Y}_{i1}, \hat{Y}_{i2}, \dots, \hat{Y}_{iN_i}$ üretilmektedir. Tahmin edilen değer şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\hat{Y}_{SS} = \sum_{i=1}^{K} p_i \cdot \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \hat{Y}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_i} \hat{Y}_{ij} \qquad (2.61)$$

Bu eşitlik, $E[Y]$ için yansız bir tahmin sağlamaktadır. Eşitlikte, N adet $A = (0,1)$ aralığından uniform dağılıma sahip rassal sayı çeken bir Monte-Carlo simülasyonu yöntemi görülmektedir. $N \to \infty$ limiti alındığında, herhangi bir $A_i \subset A$ aralığındaki gözlemlerin oranı, karşılık gelen olasılık p_i' ye sonsuz derecede yaklaşmaktadır. Örneğin, $N = 1000$ ve $K = 10$ eşit büyüklükte alt kümeler A_i ile $p_i = 1/K = 0.1$ seçildiğinde, A_i alt kümelerinin her biri Y' 'nin tam olarak $N_i = p_i N = 100$ gözlemine sahip olmayabilmektedir.

Buna karşılık, tabakalı bir Monte Carlo simülasyonunda, strata $A_i, i \in K$ önceden tanımlanır ve her i için $Y \in A_i$ koşuluna bağlı olarak Y' 'den N_i gözlem örneklenir.

Yukarıdaki örnekte, tanım gereği, her tabaka Y 'nin 100 gözlemine sahiptir. Tabakalı yaklaşım, rassal sayıların çekildiği dağılımın daha iyi bir yaklaşımını sağlamaktadır.

Tabakalı örnekleme, her bir tabakadan orantılı bir şekilde örnekler çekerek, bu düşük varyanslı alt grupların toplam varyansını azaltmaktadır. Bu, genel örneklemin varyansını da azaltır, çünkü her tabaka kendi içinde daha homojen olduğundan, tabakalar arası farklılıklar daha az etkili olmaktadır.

3. BÖLÜM

STOKASTİK VOLATİLİTE MODELİNDE VARYANS AZALTMA YÖNTEMLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ: AMPİRİK UYGULAMA

3.1. Kaynak Araştırması

Opsiyon fiyatlandırması, türev ürün işlem hacimlerindeki global artışın bir sonucu olarak giderek artan bir akademik çalışma alanı olmuştur. Bu alandaki çalışmalar, karmaşık matematiksel ve istatistiksel analizleri içeriyor olsa da uygulama alanlarının sürekli genişlemesi sebebiyle hem akademik hem de finansal sektörlerde büyük bir ilgi görmektedir. Özellikle stokastik volatilite modellerinin sabit volatilite modelleri ile karşılaştırılması, bu alandaki temel odak noktalarından birini oluşturmaktadır. Stokastik modellerin doğru ve etkin bir şekilde kalibre edilmesi, bu modellerin finans sektöründe benimsenmesinde kritik bir rol oynamaktadır. Bir diğer konu ise modellerin parametre kalibrasyon süreçleri ve doğruluklarıdır. Parametrelerin piyasa koşullarını yakalayabilmesi, yapılan simülasyonlar için de son derece önemlidir. Bu bağlamda, sadece opsiyon fiyatlandırma modellerinin kalibrasyon teknikleri değil, aynı zamanda bu simülasyonların yüksek varyanslı sonuçları da önemli bir araştırma konusu olmuştur. Bu durum, Varyans Azaltma Yöntemlerinin geliştirilmesinin gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Black-Scholes modeli 1973 yılında, finansal piyasalardaki riskleri ve opsiyon fiyatlandırmasını anlamak amacıyla tanıtılmıştır. Bu model, basit ve anlaşılır bir yapıya sahiptir ve opsiyon fiyatlarını belirlemek için temel bir araç olarak günümüzde hala kullanılmaktadır. Ancak, Yalıncak (2012) tarafından yapılan çalışmada Black-Scholes modelin sabit volatiliteye dayanması, piyasadaki gerçek değişkenliği tam olarak yansıtamamaktadır ve bu nedenle stokastik modellerin tercih edilmesi gerektiği sonucuna ulaşmıştır.

Black-Scholes modelindeki kısıtlamaları aşmak amacıyla, 1976 yılında Robert Merton tarafından bu model gözden geçirilmiş ve güncellenmiştir. Merton'un çalışması, modelin volatiliteye dayalı değişkenliği daha doğru bir şekilde hesaba katmasına olanak tanıyacak bir düzeltme sunmuştur. Merton'un katkısı, ani ve beklenmedik fiyat değişimlerini ve piyasadaki olayların etkisini daha iyi anlamak için fiyat hareketlerine

Poisson sürecini eklemesiyle ortaya çıkmıştır. Bu düzenleme, modelin esnekliğini ve güvenilirliğini artırarak finansal piyasalarda daha gerçekçi sonuçların elde edilmesine imkân sağlamıştır. Bu revizyonlar, opsiyon fiyatlandırmasında ve genel olarak finansal piyasalardaki risk analizlerinde daha güçlü ve sağlam bir temel oluşturmuştur.

Cox, Ingersoll ve Ross tarafından 1985 yılında yapılan çalışma, faiz oranı modellemesi alanında önemli bir dönüm noktası olarak kabul edilmektedir. Bu çalışma, stokastik süreçlerin faiz oranları için uygulanabilirliğini göstererek, kısa vadeli faiz oranlarının stokastik hareketlerini daha gerçekçi bir şekilde yakalayabilmek amacıyla CIR (Cox-Ingersoll-Ross) modeli tanıtılmıştır. CIR modeli, faiz oranı modellemesi ve türev fiyatlandırma alanında temel bir referans olarak kabul edilmektedir. Bu model, faiz oranlarının belirli bir aralıkta kalmasını sağlayarak finansal piyasalardaki istikrarı artırırken, aynı zamanda türev ürünlerin fiyatlandırılmasında kullanılan geniş çaplı bir çerçeve sunmaktadır.

Black-Scholes modeli, 1973 yılında sunduğu opsiyon fiyatlandırma modelindeki sabit varyans varsayımı sorununu gidermek ve volatilitenin dinamik yapısını daha iyi yakalamak amacıyla 1980'lerin sonlarına doğru stokastik volatilite modelleri (SV modelleri) geliştirilmeye başlanmıştır. Scott, Hull ve White (1987) tarafından sunulan çalışmalar, dayanak varlık fiyatının logaritmik getirisinin zamanla değişen bir volatilite ile hareket ettiği modelleri önermişlerdir. Bu modellerde volatilite, deterministik bir fonksiyon ve bir stokastik süreç kombinasyonu olarak modellenmektedir. Hull ve White (1987) modelinde, CIR modeline dayanarak, volatilitenin ortalama bir dönüş sürecine sahip olduğunu öne sürmüşlerdir, yani volatilitenin rastgele hareket ettiği ancak belirli bir uzun vadeli ortalama etrafında döndüğü belirtilmiştir. Bu çalışma, volatilitenin hem rastgele hareketini hem de belirli bir eğilimi gösterdiği fikrini ortaya koymuştur. Hull ve White'ın sunmuş olduğu çalışma bu alandaki önemli bir gelişme olmasına rağmen, dayanak varlığın fiyatı ile volatilite arasındaki korelasyon dikkate alınmamıştır.

Heston (1993) modeli, dayanak varlık ile volatilite arasındaki korelasyona yer veren ilk modellerden biridir ve bu özellik piyasadaki gerçek volatilite dinamiklerini daha doğru bir şekilde yansıtmasına olanak tanımaktadır. Model, Avrupa tipi opsiyon fiyatlandırmada yarı kapalı bir çözüm sunmuştur. Sabit volatilite eğrisine sahip olan

Black-Scholes modeline alternatif bir çözüm sunarak, volatilite gülüşünün daha yakından yakalanabilinmesini sağlamıştır.

Heston stokastik volatilite modelini öne sürmesiyle, Broadie ve Glasserman'ın 1996'daki çalışmasında opsiyonlarının fiyatlandırılmasında Monte Carlo simülasyon yöntemlerini kullanmak için bir dizi algoritma geliştirmiştir. Bu algoritmalar, gerçek opsiyon fiyatına yaklaşık değerler sağlanmasına yol açar ve stokastik modeller ile simülasyon yöntemlerin kullanımını sağlamaktadır.

Heston, modelde parametrelerin piyasa koşullarına uygun şekilde kalibre edilmesini de sağlamıştır. Ancak, modelin kalibrasyonu sürecinde bazı zorluklar ve hassasiyetlerle karşılaşılmıştır. Parametrelerin doğru bir şekilde ayarlanmaması, modelin gerçek piyasa verilerine uygun şekilde kullanılmasını ve sonuçların doğruluğunu olumsuz yönde etkileyebilmektedir. Heston modelinin kapalı çözüm eksikliği ise, parametrelerin kalibrasyonunu ve analitik çözümlerin elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, Heston modelinin güvenilirliğini ve etkinliğini artırmak için parametrelerin kalibrasyonu üzerinde odaklanan çalışmalar büyük önem taşımaktadır.

Bu bağlamda, Nögel ve Mikhailov (2003), Heston modelinin kalibrasyonunda bazı iyileştirmeler sunmuşlardır. Nögel ve Mikhailov'un iyileştirmeleri, özellikle modelin parametrelerinin hızlı ve etkin bir şekilde kalibre edilmesi üzerine odaklanmıştır. Parametrelerin başlangıç tahminlerinin optimize edilmesi, farklı optimizasyon tekniklerinin kullanılması ve piyasa verilerinin daha doğru bir şekilde kullanılması gibi yöntemlerle gerçekleştirilmiştir. Yapılan simülasyon sonuçlarında böylece daha sağlıklı sonuçlar elde edilmiştir. Bu parametrelerin kalibrasyonu, modelin gerçek piyasa verilerini ne kadar iyi yakaladığını belirler.

Crisostomo'nın 2015 yılında yayınlan makalesinde, Heston Stokastik Volatilite Modelinin uygulanması ve kalibrasyonunu analiz etmiştir. Öncelikle, karakteristik fonksiyonların opsiyon fiyatlarını tahmin etmek için nasıl kullanılabileceğini açıklamaktadır. Ardından, Heston modelinin uygulanmasını ele alarak basit çözümler ile hızlı ve doğru opsiyon fiyatlarına kalibrasyon yöntemlerini sunmaktadır.

Cui vd. (2017) Heston stokastik volatilite modelinin tam ve etkin bir kalibrasyonu için bir algoritma sunan diğer bir çalışma sunmuşlardır. Çalışmada kalibrasyon karmaşık fonksiyonların dal değiştirmesinden kaynaklanan süreklilik kesintilerinden kaçınmak için

Heston karakteristik fonksiyonunun uygun bir temsilini kullanarak bir doğrusal olmayan en küçük kareler problemi olarak ifade edilmektedir. Bu temsil ile tüm hedef fonksiyon varyantlarının anahtar öğesi olan bir vanilya opsiyonun fiyatının model parametrelerine göre analitik gradyanı elde edilmektedir.

Monte Carlo simülasyon yöntemi, finansal piyasalarda risk yönetimi ve fiyatlandırma analizleri için sıkça kullanılan bir araçtır. Özellikle, Heston modeli gibi stokastik volatilite modelleri ile beraber Monte Carlo yöntemi, opsiyon fiyatlandırması ve diğer türev ürünlerin değerlemesi için etkili bir araç olarak kabul edilmektedir. Monte Carlo yöntemi, belirli bir zaman aralığında rastgele değişkenlerin tekrar tekrar simüle edilmesi yoluyla gelecekteki fiyat hareketlerini tahmin etmeye dayalıdır. Bu simülasyonlar, gerçekçi fiyatlandırma ve risk analizleri yapmak için kullanılan temel bir araç haline gelmiştir.

Varyans Azaltma Yöntemleri (VAY), finans alanında kullanıma geçmeden once mühendislik alanında istatistiksel tahminlerin doğruluğunu artırmak için kullanılmaktaydı. Glasserman vd. (1999), stokastik volatilite modellerindeki yol bağımlı opsiyonlar için vade sonundaki dayanak varlığın fiyatını bir kontrol varyantı olarak kullanmayı önermiştir. Belirli opsiyonlar için %90'ın üzerinde varyans azaltması sağlayabileceğini göstermişlerdir. Kontrol Değişkenleri ile Varyans Azaltma yöntemi hakkında yapılan çalışmalar, bilinen bir ortalaması olan ve ödeme fonksiyonu ile korele olan bir kontrol rastgele değişkenin simülasyonunu içerir. Daha sonra, ödeme değerleri, kontrol değişkeninin simüle edilen değerleri ve bilinen ortalaması arasındaki farkları kullanarak ayarlanır.

Fouque vd. (2002) çalışmasında, Monte Carlo yöntemi ile stokastik volatilite bağlamında opsiyon fiyatlarının hesaplanmasında bir varyans azaltma yöntemi öneriyoruz. Bu yöntem, Fouque ve Tullie (2002) tarafından tanıtılan hızlı ortalama geri dönüş genişlemesi ile elde edilen opsiyon fiyatının bir yaklaşımını kullanarak yapılan Önem Örnekleme Varyans Azaltma Yöntemi üzerine dayanmaktadır. Bu yaklaşımı, Fournie vd. (1997) tarafından önerilen küçük gürültü genişleme yöntemi ile karşılaştırıyor ve özellikle çarpıklık durumunda yöntemimizin verimliliğini sayısal olarak gösteriyoruz. Özellikle, Heston modeli gibi stokastik volatiliteyi içeren ve olasılık dağılımlarının belirlenmesinde önemli zorluklar sunan modellerde, bu varyans azaltma

yöntemi değerli bir çözüm sunmaktadır. Bu tür modeller, varlık fiyat hareketlerinin yanı sıra volatilitenin de rastgele değiştiği durumları ele alır, bu da analitik çözümlerin elde edilmesini zorlaştırmaktadır.

Schoenmakers vd. (2002) çalışmasında, varyansı azaltılmış bir Monte Carlo simülasyonunun bileşik bir yöntemini sunmaktadır. Girsanov teoremi, olasılık teorisinde bir Brownian hareketinin başka bir olasılık ölçüsü altında nasıl değiştiğini tanımlar. Schoenmakers vd., bu teoremi kullanarak, stokastik bir modelin yeni bir olasılık ölçüsü altında nasıl "dönüştürüleceğini" ve bu dönüşümün varyans azaltma üzerindeki etkilerini incelemektedir. Bu yaklaşım, özellikle opsiyon fiyatlandırma gibi alanlarda, belirsizliği ve dolayısıyla hesaplama süresini azaltmaya yardımcı olmaktadır.

Varyans Azaltma Yöntemlerinden Kontrol Değişkenleri Fourque ve Han (2005) çalışmasında, Monte Carlo simülasyonları kullanarak stokastik volatilite modelleri altında opsiyonların fiyatlandırılmasını gerçekleştirmek için bir genel kontrol değişkeni yöntemi önerilmektedir. Çalışmanın sonucunda, Avrupa, Bariyer ve Amerikan opsiyonların fiyatlandırma modellerinde yer almasıyla stokastik modellerin etkinliğinin artırıldığı gösterilmektedir. Çalışma, ayrıca Kontrol Değişkenleri için farklı kullanım yöntemleri sunmaktadırlar.

Önem Örnekleme ile Varyansa Azaltma Yöntemi hakkında yapılan çalışmalarda, daha fazla katkıda bulunan yolların örnekleme olasılığını artırmak için olasılık ölçüsünü değiştirir. Heston modeli için optimal önem örnekleme ölçüsü, Genin ve Tankov (2016) tarafından türetilmiştir. Opsiyon fiyatlarının tahmin edilmesi için optimal ölçü değişiminin, opsiyonun ödeme fonksiyonuna ve vadesine bağlı olduğunu göstermişlerdir. Önem örnekleme, Heston modelinde opsiyon fiyatlandırması için, özellikle para dışı opsiyonlar için önemli ölçüde varyans azaltmaları sağlamıştır.

Bu alanda öne çıkan diğer isimler ise Zhang vd. (2022) "Variance Reduction in Stochastic Particle-Optimization Sampling" başlıklı bir makale çalışmaları bulunmaktadır. Stokastik Parçacık Optimizasyon Örnekleme için Varyans Azaltma Yöntemlerini sunmuşlardır. Sonuç olarak, Monte Carlo simülasyonları gibi stokastik örnekleme yöntemlerinin doğruluğunu ve verimliliği arttığında varyansta azalmalar gözlemlendiğini gösteren bir çalışma olduğu görülmektedir. Yazarlar, Heston modeli ve Monte Carlo simülasyonları ile ilişkili hata paylarını ve hesaplama sürelerini azaltmayı

amaçlayarak, finans ve ekonomi alanlarında kullanımı kolaylaştıracak örnek algoritmalar sunmuşlardır.

Mrázek vd. (2017) tarafından yazılan makalede Heston stokastik volatilite modeli, çeşitli optimizasyon tekniklerini kullanarak gerçek piyasa verilerine göre kalibre edilmiştir. Parametrelerdeki değişimlere göre hem global hem de lokal optimizatörler karşılaştırılmıştır. Sadece ardışık olarak alınan iki adet günlük opsiyon verileri kullanarak kalibrasyonun yapıldığını göstermektedir. Çalışma, kalibrasyon sonrasında simülasyonların verimini artırmak adına zıt değişkenler Varyans Azaltma yötemine başvurmuştur. Sonuç olarak, Heston modelin hem kalibrasyon yönteminin hem de simülasyon yönteminin optimizasyonu bir bütün olarak sunmaktadır.

Son olarak, Bottasso vd. (2023) tarafından yapılan çalışmada, Black-Scholes ve Heston modellerinde dört farklı Varyans Azaltma Yöntemini karşılaştırmıştır. Ayrıca, çalışmada Heston modelinin parametrelerinin kalibrasyonuna da yer verilmiştir. Çalışmanın sonucunda bulgular Heston modeli gibi stokastik modellerin Euler ile deskretize edilmesinden sonra yapılan VAY ile fiyatlandırmaların standart sapmalarında önemli derecede azalma tespit edilmiştir.

3.2. Araştırmanın Problemi

Simülasyon uygulamalarında sıklıkla karşılaşılan sorunlardan biri, elde edilen verilerin incelenmekte olan fiyat aralığından uzak, beklenmedik dağılımlar üretmesidir (Glasserman, 2003). Bu durum, simülasyonların doğruluğunu ve güvenilirliğini olumsuz yönde etkileyebilmektedir. Bu bağlamda, varyans azaltma yöntemlerinin kullanımının gerekliliği ve bu yöntemlerin simülasyon sonuçları üzerindeki etkisi stokastik volatilite modeli üzerinden incelenmektedir.

3.3. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, ulusal literatürde yeni bir konu olarak ele alınan stokastik volatilite modellemesi kapsamında Varyans Azaltma Yöntemlerinin uygulanmasıdır. Bu bağlamda, Heston Modeli özelinde bu yöntemlerin uygulama aşamaları ve etkinlikleri incelenmektedir.

Bu amaç doğrultusunda, Heston modelinin parametrelerinin hassasiyeti göz önünde bulundurularak, çalışmada anlamlı sonuçlar elde etmek için Avrupa tipi BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerinin fiyat verileri kullanılarak modelin parametrelerinin kalibrasyonu yapılmıştır. Kalibrasyon sonucunda elde edilen parametre değerleri, kayıp fonksiyon yöntemi ile değerlendirildikten sonra simülasyonlarda kullanılmıştır.

Simülasyon sonuçları, Heston modelinin teorik fiyatları ile karşılaştırılarak değerlendirilmektedir. Bu karşılaştırma, Varyans Azaltma Yöntemlerinin kullanıldığı ve kullanılmadığı durumlar için yapılmakta ve elde edilen sonuçlar Ortalama Kare Hatası (MSE) ve Standart Hata (SE) metrikleri ile analiz edilmektedir. Bu analizde, Varyans Azaltma Yöntemlerinin Heston modeli simülasyonları üzerindeki etkisi ve bu yöntemlerin modelin doğruluğuna ve güvenilirliğine olan etkisi analiz edilmiştir.

3.4. Araştırmanın Kapsamı ve Sınırlılıkları

1. Veri seti olarak Avrupa tipi BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerinin kapanış fiyatları kullanılmaktadır. Bu veri seti üzerinden Heston modelinin kalibrasyonu yapılmıştır. Uygulamanın sonuçları gerçek opsiyon sözleşme verileri ile karşılaştırılmamaktadır. Sonuçlar Heston modelinin Karakteristik fonskiyonu ile hesaplanan fiyatı ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Heston modelinin piyasa fiyatlarını yakınsaması ise kapsam dışı bırakılmıştır.

2. Dayanak varlık ve opsiyon sözleşme fiyatları için BİST 30 veri seti kullanılmaktadır. BİST 30, Borsa İstanbul'da işlem gören en büyük 30 şirketin hisse senetlerinden oluştuğundan, Türk hisse senedi piyasasının genel performansını temsil etmekte ve geniş bir yelpazede şirket ile sektörü kapsamaktadır. Bireysel bir şirket hissesine kıyasla, Türk piyasasının genel dinamikleri ve eğilimleri hakkında daha kapsamlı bilgiler sunmaktadır. Ayrıca, BİST 30 endeksini oluşturan hisselerin yüksek likiditesi sayesinde, opsiyon fiyatlama modellerinin uygulanması için güvenilir ve istikrarlı veri setleri sağlanmaktdıra. Bu özellikler, BİST 30'un tercih edilmesinin temel nedenlerindendir.

3. Çalışmada Amerika tipi opsiyonlara ver verilmemektedir.

4. Simülasyon esnasında BİST 30 endeksin opsiyon fiyatların alabileceği %10 tavan taban kısıtlaması dikkate alınmamıştır.

5. Parametre kalibrasyon için Least Square (Lsqlin) kullanılmaktadır. Lsqlin yönteminin dezavantajı global minima yerine en yakınında olan local minima yöntemine başvurmasıdır. Kalibrasyonun uygulaması hazır fonksiyon ile yapılmasının nedeni ise Kalibrasyon konusunun ayrı bir çalışma alanı olmasıdır. Bu nedenle, Heston ile parametrelerin optimum seviyesi ve farklı yöntemleri ile karşılaştırılması ele alınmamıştır. Kalibrasyon çalışmanın ana konusu olarak yer verilmemiştir ve parametreleri simülasyonun sadece başlangıç verileri Feller koşuluna uygun olması ve aralarındaki etkileşimlerin anlamlı olmasını sağlamak adına kalibrasyona gerek duyulmuştur. Heston modelinin başlangıç değerlerine olan hassasiyeti bilinmekte ve bu nedenle VAY sonuçlarının anlaşılırlığını olumsuz yönde etkilememesi için kalibrasyon sürecine ihtiyaç duyulmuştur. Parametre Kalibrasyon yöntemleri arasında bulunan yöntemlerden bazıları şunlardır:
   - Maksimum Olabilirlik Yöntemi (Maximum Likelihood Estimation)
   - Bayes Yöntemi (Bayesian Estimation)
   - Genetik Algoritmalar (Genetic Algorithms)
   - Simüle Edilmiş Tavlama (Simulated Annealing)
   - Gradyan İnişi ve Varyantları (Gradient Descent and its Variants)
   - Parçacık Sürü Optimizasyonu (Particle Swarm Optimization)

6. Volatilitelerin ve parametrelerin değerlendirilmesi IVMSE değeri üzerinden yapılmıştır ki bu topluca bir değerleme sağlamaktadır.

7. Kök bulma yöntemi (Bisection) dışında Newton-Rapson yönteminin kompleks bir yöntem olması nedeniyle çalışma sadece Kök bulma yöntemini ele almıştır. (Webber, 2011: 603). Kök bulma yöntemi soldan iterason kullanmaktadır. Heston modeli ile iterasyon yöntemlerin soldan, ortadan ve sağdan yapılabilinmektedir.

Bu yöntemler Heston modelin zaman adımları arasındaki adımların nasıl ele alınacağına dair karar verilmesini gerektirmektedir. Bu çalışmada birinci dereceden soldan iterasyon yöntemi ile ilerlenmiştir.

8. VAY olarak sıkça kullanılan Önem Örnekleme, Tabakalı Örnekleme, Zıt Değişkenler ve Kontrol Değişkenleri yöntemlerine yer verilmiştir. Diğer yöntemler kapsam dışı bırakılmıştır.

9. Farklı senaryolar ve hedefler, çeşitli Varyans Azaltma Yöntemlerin kullanımını gerektirmektedir. Her yöntem, belirli koşullarda ve belirli türdeki problemlerde daha etkili olabilmektedir. Bu nedenle, hangi VAY'nin kullanılacağına karar verirken, simülasyonun amacı, modelin özellikleri ve analiz edilmek istenen senaryonun özellikleri dikkate alınmalıdır. Bu, simülasyonun doğruluğunu ve verimliliğini artırmak için önemlidir. Bu çalışma, farklı senaryoların farklı kullanımlarını ele almamaktadır. Yöntemler SV modeller için nasıl ele alındığına odaklanmaktadır ve genel bir çerçeve sunmaktadır.

10. Başka bir sınırlama da her bir VAY'ın farklı optimizasyon yöntemleri içermesidir. Bu, belirli bir senaryo için önceden belirlenmiş kısıtlamaların açıklanması ve dağılımları hakkında önceden bilgi sahibi olunması gerektiği anlamına gelir. Ancak, bu çalışmada yöntemlerin optimizasyonları konusu ele alınmamıştır.

11. Çalışmada diskretizasyon yöntemi olarak Euler yöntemi seçilmiştir. Bunun nedeni ise Euler diskritasyonun kullanım kolaylığıdır. Daha ileri düzey ayrıklaştırma yöntemleri de bulunmaktadır ve bunlardan bazıları şunlardır:
    - Kuadratik Üstel Şema (Quadratic Exponential Scheme)
    - Milstein Şeması (Milstein Scheme)
    - İmplisit Milstein Şeması (Implicit Milstein Scheme)
    - Moment Eşleştirme (Moment Matching)
    - Dönüştürülmüş Volatilite (Transformed Volatility)
    - Alfonsi Şeması (Alfonsi Scheme)

    Şemalar arasında yapılan seçim simülasyon sonuçlarına etki etmektedir.

12. Simülasyon yöntemi olarak Monte Carlo yöntemi kullanılmıştır. Bu Phyton dilinde Numpy olarak adlandırılan hazır bir fonksiyondur. Alternatif olarak Pseudo ve Kuazi gibi yöntemler de mevcuttur. Monte Carlo simülasyon yönteminin dışında kullanılabilinecek yöntemler aşağıdaki gibidir:

    Pseudo-rastgele sayı üretimi:

    - 12 düzgün değişken ekleme (Add 12 Uniform Variables)
    - Box-Muller
    - Polar Reddi (Polar Rejection)
    - Ters dönüşüm örnekleme (Inverse Transform Sampling) ve Numpy'ye benzer bir yöntemdir.

    Kuazi (Quasi) rastgele sayı üretimi:

    - Halton
    - Sobol

13. Çalışmanın anlaşırlığını kolaylarştırmak adına sadece tek bir kârda olan opsiyon sözleşmeleri için uygulamalara odaklanılmıştır. Bu nedenle Spot fiyatını 7016 TL altında bir kullanım fiyatı ele alınmıştır ve spot fiyata en yakın olan 6900 TL değeri seçilmiştir. Böylece, Alım opsiyonlarının kârda olması sağlanmaktadır. Parada ve kârda olmayan opsiyon sözleşmeleri devre dışı bırakılmıştır.

14. Bu çalışmada kullanılan programlama dili olarak Python tercih edilmiştir. Bu tercihin arkasındaki temel neden, Python'un sunduğu esnekliktir. Python, geniş kütüphane yelpazesi ile çeşitli rastgele sayı üretim yöntemleri sunarak, programlanmak istenen formüller için ideal bir ortam sağlamaktadır. Her programlama dilinin kendine özgü avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır. Örneğin, VBA global minimum değerini bulmada zorlanabilir ve simülasyon sayısının 10.000'i aşmasında güçlük çekebilmektedir. Matlab, Java, Julia, C++, R, VBA ve Microsoft Visual gibi farklı programlama dilleri mevcuttur, ancak bu dillerin her biri belirli senaryolar için daha uygun olabilmektedir. Bu nedenle, seçilecek programın özellikleri ve hesaplanmak istenen senaryoya göre dikkatli bir seçim yapmak önemlidir. Ayrıca, üretilen rastgele sayıların tekrar kullanımı ve verilerin sunucuda saklanması gibi karşılaşılan zorluklar da göz önünde

bulundurulmalıdır. Bu tür sorunları tek bir platformda çözebilmek adına Python programı uygulamada tercih edilmiştir.

3.5. Araştırmanın Veri Setleri

İlk veri seti, Avrupa tipi BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerin dayanak varlığı olan BİST 30 verileridir. BİST 30 endeksin 250 işlem günü için günlük kapanış fiyatlarını içermektedir. Verilerin tarih aralığı olarak 01.08.2022-01.08.2023 tarihleri alınmıştır. Veriler Borsa İstanbul sayfasından elde edilmiştir. Bu veriler ise, getirilerin dağılımları ve dağılım histogramlarının grafiklerinde kullanılmaktadır.

İkinci veri seti, Heston modelinin parametrelerini kalibre etmek için Borsa İstanbul Tarihsel ve Referans Veri Platformu'ndan 11.07.2023 tarihindeki BİST 30 endeksine dayalı opsiyon sözleşmelerinin gün sonu fiyatları kullanılmıştır ve Tablo 1'de sunulmuştur. Opsiyon fiyatların 11.07.2023 tarihindeki BİST 30 endeks opsiyonun değerinin 7016.34 olduğu gözlemlenmiştir. Veriler Borsa İstanbul sayfasından elde edilmiştir. Aynı veri seti ile ayrıca zımni volatilite hesaplamalarında da kullanılmıştır.

Mrázek vd. (2017) tarafından yapılan kalibrasyon çalışmasında EURİBOR kullanımına dayanmaktadır. Bu çalışmada TRLİBOR olarak bilinen ve yeni adı ile Türk Lirası Gecelik Referans Faiz Oranı (TLREF) kullanılmaktadır. Borsa İstanbul'un sayfasında bulunan bu oran, risksiz faiz oranı olarak kullanılmaktadır. TLREF, finansal türev ürünlerde, borçlanma araçlarında ve çeşitli finansal sözleşmelerde değişken faiz göstergesi, dayanak varlık veya karşılaştırma ölçütü olarak kullanılabilecek, Türk Lirası kısa vadeli referans faiz oranı ihtiyacını karşılamaya yönelik olarak oluşturulmuş olan faiz oranı olarak bilinmektedir (Borsa İstanbul). TLREF oranın 11.07.2023 tarihinde % 14.58 olduğu gözlemlenmiştir.

Kullanılmakta olan BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerin sembolleri ve açıklamaları:

- O_XU030E0823C BİST 30 Endeksi, Avrupa Tipi, Ağustos 2023 vadeli, Alım Opsiyonu
- O_XU030E1023C BİST 30 Endeksi, Avrupa Tipi, Ekim 2023 vadeli, Alım Opsiyonu
- O_XU030E1223C BİST 30 Endeksi, Avrupa Tipi, Aralık 2023 vadeli, Alım Opsiyonu
- O_XU030E0823P BİST 30 Endeksi, Avrupa Tipi, Ağustos 2023 vadeli, Satım Opsiyonu

• O_XU030E1023P BİST 30 Endeksi, Avrupa Tipi, Ekim 2023 vadeli, Satım Opsiyonu

• O_XU030E1223P BİST 30 Endeksi, Avrupa Tipi, Aralık 2023 vadeli, Satım Opsiyonu

BİST 30 Endeks Alım Opsiyon Fiyatları (TL) ve Kalan Vade Süreleri			
Vade / Kullanım Fiyatı	8/31/2023 38 İşlem günü	10/31/2023 81 İşlem günü	12/29/2023 128 İşlem günü
7200	495.65	882.90	1333.26
7300	446.27	811.17	1264.89
7400	397.76	770.32	1197.27
7500	352.73	732.34	1130.49
7600	311.14	697.06	1064.56
7700	276.25	653.33	999.57
7800	245.78	606.81	971.59
7900	218.23	562.36	937.00
8000	193.41	519.99	904.62

BİST 30 Endeks Satım Opsiyon Fiyatları (TL) ve Kalan Vade Süreleri			
Vade / Kullanım Fiyatı	8/31/2023 38 İşlem günü	10/31/2023 81 İşlem günü	12/29/2023 128 İşlem günü
7400	408.47	377.77	311.33
7300	358.61	352.31	295.79
7200	311.55	328.51	281,02
7100	268.29	306.24	266,97
7000	228.65	285.41	253.59
6900	201.70	265.92	240.83
6800	178.24	247.68	228.67
6700	157.26	230.60	217.06
6600	138,52	214.60	205.97

Tablo 1. Bist 30 Endeks Alım ve Satım Opsiyon Fiyatları, Kullanım Fiyatları ve Opsiyonların vade Tarihleri, 11.07.2023 Günkü Fiyatlardır (TL).

BİST 30 endeksi, Yıldız Pazar ve Ana Pazar'da işlem gören şirketlerle, Kolektif Yatırım Ürünleri ve Yapılandırılmış Ürünler Pazarı'nda İşlem gören Gayrimenkul Yatırım Ortaklıkları ve Girişim Sermayesi Yatırım Ortaklıkları arasından seçilen 30 firmanın paylarından oluşmaktadır. Türkiye'de endeksler Borsa İstanbul A.Ş. bünyesinde var olan İstatistik Müdürlüğü tarafından hesaplanmaktadır. (Korkmaz vd., 2018: 202-205).

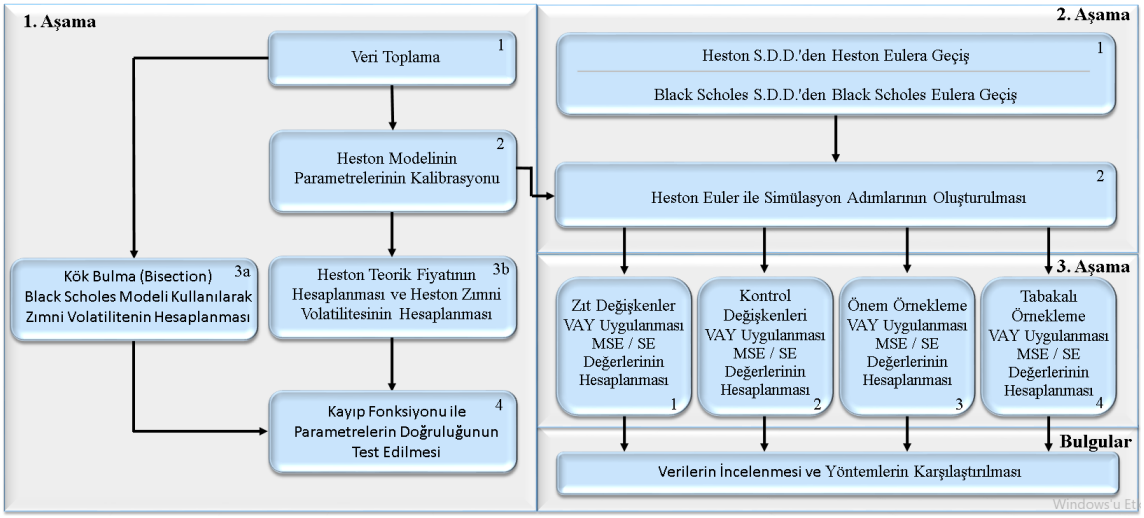
BİST 30 endeks opsiyon sözleşmeleri ise BİST 30'u dayanak varlık olarak kullanmaktadır. Sözleşmeler, Avrupa tipi ve her bir endeks opsiyon sözleşmesi 10 adet

dayanak varlığı temsil etmektedir. BİST 30 endeks opsiyon sözleşmelerinin kullanım fiyatları, dayanak varlık olan endeksin bir önceki işlem günündeki kapanış değeri baz alınarak belirlenmektedir.

Alım ve Satım opsiyonları için vade sonu uzlaşma fiyatı, BIST 30 Endeksinin son işlem günündeki değerlerinin zaman ağırlıklı ortalaması ve kapanış değerinin belirli oranlarla ağırlıklandırılması ile hesaplanmaktadır. Bu hesaplama, opsiyon kullanım fiyatı ile endeksin değeri arasındaki farka dayanmaktadır. BİST 30 endeks opsiyon sözleşmeleri, belirli standart vade aylarında işlem görür ve piyasada aynı anda için de bulunulan aya en yakın üç vade ayına ait sözleşmeler işlem görmektedir. Sözleşmelerin vade sonu Şubat, Nisan, Haziran, Ağustos, Ekim ve Aralık aylarının son işlem gününde gerçekleşmektedir (Borsa Istanbul, 2017).

3.6. Araştırmanın Yöntemi

Stokastik volatilite modeline Varyans Azaltma Yöntemlerinin uygulanması, birçok alt yöntemi iç içe geçmiş bir yapıda barındırmaktadır. Bu karmaşıklığı açıklığa kavuşturmak ve araştırmanın detaylarını daha iyi anlamak için, çalışmanın uygulama süreci, adımların şematik bir gösterimi şekil 15'te sunulmaktadır. Araştırmanın yöntemi, üç temel aşamadan oluşmakta ve her aşama, modelin kalibrasyonundan Varyans Azaltma Yöntemlerinin uygulanmasına kadar geniş bir yelpazede incelenmektedir. Bu aşamalar, modelin doğruluğunu test etmek, simülasyon adımlarını oluşturmak ve farklı Varyans Azaltma Yöntemlerinin etkinliklerini karşılaştırmak için tasarlanmıştır.



Şekil 15. Araştırmanın Akış Şeması.

3.6.1. Birinci Aşama: Veri Toplama, Kalibrasyon ve Parametre Doğruluğu.

1. Araştırmanın ilk aşamasında, analiz için gerekli veriler toplanmaktadır. Bu veriler, tablo 1'de yer alan BİST 30 endeks opsiyon sözleşme fiyatlarıdır.
2. Heston modelinin parametreleri kalibre edilmektedir ve bu aşamada modelin parametreleri, piyasa verilerine uyacak şekilde ayarlanmaktadır. Bölüm 2.4'te yer alan açıklamalar doğrultusunda Matlab program dilinde lsqlin fonksiyonu kullanılarak Heston modelin parametreleri ($\Omega = \{v_0, \kappa, \sigma, \theta, \rho\}$) elde edilmiştir.
3. Kök Bulma (Bisection) yöntemi zımni volatiliteyi hesaplamak için kullanılmaktadır. Bu yöntem, Black-Scholes modeli ile hesaplanan teorik fiyat ile piyasa fiyatı arasındaki farkı en aza indirgeyerek zımni volatiliteyi bulmaktadır. Aynı şekilde Heston modeli için de uygulanmaktadır. Heston karakteristik modeli kullanılarak opsiyonların teorik fiyatı hesaplanmakta ve bu model üzerinden zımni volatilite Kök Bulma yöntemi ile çıkarılmaktadır. Bölüm 1.3.3.1'de yer alan açıklamalar doğrultusunda zımni volatiliteler hesaplanmıştır.
4. Black-Scholes modeli ile elde edilen zımni volatilite ile Heston modeli kullanılarak elde edilen zımni volatilite arasındaki fark, Kayıp Fonksiyonu yöntemi ile değerlendirilmektedir. Bu işlem sayesinde, Heston modelinin parametrelerinin zımni volatilite verileri üzerinden doğruluğu test edilmektedir. Elde edilen parametrelerin doğruluğu test etmek için bölüm 2.5'de yer alan açıklamaya göre uygulanmaktadır.

3.6.2. İkinci Aşama: Simülasyon Adımlarının Oluşturulması

1. Heston modeli, SDD kullanılarak formüle edilen ve sürekli zamanı temsil eden bir modeldir. Bu modelin uygulanması sırasında, sürekli zamandan ayrık zamana geçiş yapmak için Euler yöntemi kullanılmaktadır (EK 4'te Phyton kodu bulunmaktadır). Bu yöntem, Heston modelinin stokastik diferansiyel denklemlerini ayrık zaman adımlarına bölerek, modelin sayısal çözümünün elde edilmesini sağlamaktadır. Böylece, Phyton program dilinde her bir zaman diliminden de modelin nasıl davranması gerektiğini belirlenmiş olmaktadır. Bu yöntem 2.6.'da yer alan açıklamalar doğrultusunda yapılmaktadır.

2. Black-Scholes SDD'den kesikli zamana alınarak Kontrol değişkenlerinde kullanılmaya elverişli olması sağlanmaktadır. Bölüm 1.9. yöntemine göre uyarlanmıştır.
3. Heston modeli kullanılarak Euler yöntemi ile simülasyon adımları oluşturulmaktadır. Burada kalibrasyondan elde edilen parametreler doğrultusunda simülasyon verileri oluşturulmaktadır. Bölüm 1.9. yöntemine göre uyarlanmıştır.

   Simülasyon adımlarının sağlıklı ilerlemesi adına Heston modeline eklemeler yapılmaktadır ve bunlar şu şekildedir:

   - Parametrelere Feller koşullu eklenmiştir ve bölüm 2.7 de anlatılmaktadır.
   - Heston modelin stokastik volatilitesinin negatif değerlere düşmemesi için 2.7'de de yer alan Tam kesme şeması uygulanmıştır.
   - Heston modelin Wiener süreçlerine Cholesky yöntemi eklenmektedir ve Bölüm 2.8'deki açıklamalar doğrultusunda oluşturulmuştur.

   Euler yöntemi kullanılarak yapılan simülasyonlar, Heston modeline dayalı teorik fiyatlarla karşılaştırılıyor. Heston modelinin Karakteristik Fonksiyonu (EK 3'te Phyton kodu bulunmaktadır), teorik opsiyon fiyatlarını doğrudan hesaplamak için kullanılır (bölüm 2.1.2.). Bu karşılaştırma, varyans azaltma yöntemleri kullanılmadan, Euler yöntemiyle elde edilen sonuçların, Heston modelinin teorik değerlerine ne kadar yakın olduğunu göstermektedir.

3.6.3. Üçüncü Aşama: Varyans Azaltma Yöntemlerinin Uygulanması

1. Zıt değişkenler uygulama adımlarına göre, Heston modeline uyarlanmıştır. Son olarak ortalama kare hatası (MSE) ve standart hata (SE) değerleri hesaplanmaktadır. Bu yöntemin algoritması bölüm 2.10.1. teorisine göre uyarlanmıştır.
2. Kontrol değişkenleri, yöntemin doğası gereği iki model içermektedir ve bu nedenle Heston ve Black-Scholes modellerine uyarlanmıştır. Son olarak ortalama kare hatası (MSE) ve standart hata (SE) değerleri hesaplanmaktadır. Bu yöntemin algoritması bölüm 2.10.2. teorisine göre uyarlanmıştır.

3. Önem Örnekleme uygulama adımlarına göre Heston modeline uyarlanmıştır. Son olarak ortalama kare hatası (MSE) ve standart hata (SE) değerleri hesaplanmaktadır. Bu yöntemin algoritması bölüm 2.10.3.1. teorisine göre uyarlanmıştır.
4. Tabakalı Örnekleme uygulama adımlarına göre Heston modeline uyarlanmıştır. Son olarak ortalama kare hatası (MSE) ve standart hata (SE) değerleri hesaplanmaktadır. Bu yöntemin algoritması bölüm 2.10.4. teorisine göre uyarlanmıştır.

Son olarak, kullanılan farklı Varyans Azaltma Yöntemlerinin etkinlikleri incelenmekte ve yorumlanmaktadır.

3.6.3.1. Zıt Değişkenler Uygulama Adımları

Birinci adım, korele normal dağılımlı rastgele değişkenlerin oluşturulmasıdır. Bu adımda, iki bağımsız standart normal dağılımlı rastgele değişken Z_1 ve Z_2 üretilmektedir. Z_2, Z_1 ile belirli bir korelasyona (ρ) sahip olacak şekilde ayarlanmaktadır. Bu, Heston modelindeki iki stokastik süreç arasındaki korelasyonu temsil etmektedir.

$$Z_1 \sim N(0,1) \tag{3.1}$$

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z' \tag{3.2}$$

Burada, Z' Z_1'den bağımsız olan başka bir standart normal dağılımlı rastgele değişkendir.

İkinci adım, volatilite yolu simülasyonudur. Volatilite için Euler yöntemi kullanılarak bir simülasyon yolu oluşturulur. v_t Mevcut zaman adımındaki volatiliteyi temsil etmektedir. Negatif volatiliteleri önlemek için `np.maximum` Tam kesme (truncation) fonksiyonu kullanılmaktadır.

$$v_t = v_{t-1} + \kappa\big(\theta - max(0, v_{t-1})\big)\Delta t + \sigma\sqrt{max(0, v_{t-1})}\sqrt{\Delta t} Z_1 \tag{3.3}$$

Üçüncü adım, dayanak varlık fiyatı yolu simülasyonudur. Dayanak varlık fiyatları için simülasyon yolları oluşturulur. Burada, `$S$` ve `$S_{ZD}$` normal ve Zıt Değişkenler kullanarak dayanak varlık fiyatlarının iki setini temsil etmektedir. Bu yöntem, simülasyonun varyansını azaltmaya yardımcı olmaktadır.

$$S_t = S_{t-1} \exp\left((r - 0.5v_{t-1})\Delta t + \sqrt{v_{t-1}\Delta t} Z_2\right) \quad (3.4)$$

$$S_{ZD,t} = S_{ZD,t-1} \exp\left((r - 0.5v_{t-1})\Delta t - \sqrt{v_{t-1}\Delta t} Z_2\right) \quad (3.5)$$

Dürdüncü adım, opsiyon fiyatlarının hesaplanmasıdır. Vade sonunda, her simülasyon yolu için Alım ve Satım opsiyonlarının fiyatları hesaplanmaktadır.

$$\text{Alım Opsiyon Fiyatı}(t,x) = \mathrm{e}^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} max(S_T - K, 0) \quad (3.6)$$

$$\text{Alım Opsiyon Fiyatı ZD}(t,x) = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} max\left(S_{ZD,t} - K, 0\right) \quad (3.7)$$

$$\text{Satım Opsiyon Fiyatı}(t,x) = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} max(K - S_T, 0) \quad (3.8)$$

$$\text{Satım Opsiyon Fiyatı ZD}(t,x) = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} max\left(K - S_{ZD,t}, 0\right) \quad (3.9)$$

Beşinci adım, Zıt Değişkenler yöntemine göre nihai opsiyon fiyatlarının hesaplanmasıdır. Son olarak, Alım ve Satım opsiyonlarının fiyatları, tüm simülasyon yolları üzerinden ortalama fiyatların bugünkü değerleri olarak hesaplanır. Zıt değişkenler yöntemi kullanılarak elde edilen fiyatlar, daha doğru bir ortalama için birleştirilir.

Alım Opsiyon Fiyatı

$$C = e^{-rT}\left(\frac{\text{Alım Opsiyon Fiyatı} + \text{Alım Opsiyon Fiyatı ZD}}{2}\right) \quad (3.10)$$

Satım Opsiyon Fiyatı

$$P = e^{-rT}\left(\frac{\text{Satım Opsiyon Fiyatı} + \text{Satım Opsiyon Fiyatı ZD}}{2}\right) \quad (3.11)$$

Bu formüller, Monte Carlo simülasyonu ve Heston modeli parametrelerini kullanarak opsiyon fiyatlarını vermektedir. Adımların Phyton kodu EK 5'te yer almaktadır.

3.6.3.2. Kontrol Değişkenleri Uygulama Adımları

Birinci adım, iki bağımsız normal dağılımlı rastgele değişken *Z*1 ve *Z*2 örneklenmektedir.

$$Z_1 \sim N(0,1) \tag{3.12}$$

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z' \tag{3.13}$$

Volatilite yolu *Vt* şu diskretize edilmiş formülle güncellenmektedir:

$$v_t = v_{t-1} + \kappa(\theta - v_{t-1})\Delta t + \xi\sqrt{v_{t-1}}\sqrt{\Delta t}Z_2 \tag{3.14}$$

Dayanak varlık fiyatı yolu *St* şu diskretize edilmiş formülle güncellenmektedir:

$$S_t = S_{t-1}\exp\left((r - 0.5v_{t-1})\Delta t + \sqrt{v_{t-1}}\sqrt{\Delta t}Z_1\right) \tag{3.15}$$

İkinci adım, Black-Scholes modelin fiyatlandırma formülü kullanılmaktadır. Formülü ise şu şekildedir:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.14}$$

Opsiyonu ise:

$$\text{Alım Opsiyon Fiyatı} = Se^{-T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{3.15}$$
$$\text{Satım Opsiyon Fiyatı} = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{-T}N(-d_1) \tag{3.15}$$

Nihai fiyat hesaplamamaktadır:

$$\text{Heston Fiyatı} = max(\ S - K, 0) \tag{3.16}$$

$$\text{Black-Scholes Fiyatı} = max(\ S - K, 0) \tag{3.17}$$

Sabit terimin hesaplanması:

$$\text{Kovaryans} \ = \ \text{Cov(Heston Fiyatı , BS Fiyatı)} \tag{3.18}$$

$$\text{Varyans_bs} \ = \text{Var(BS Fiyatı)} \tag{3.19}$$

Sabit terim c ise:

$$c = -\frac{\text{kovaryans}}{\text{varyans_bs}} \tag{3.20}$$

Üçüncü adım, düzeltilmiş nihai fiyat aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\text{Düzeltilmiş Nihai Fiyat} = \text{ Heston Fiyatı } c \times \text{ (BS Fiyatı } - \text{ Ortamala BS Fiyatı)} \tag{3.21}$$

olarak hesaplanmaktadır. Adımların Phyton kodu EK 6'de yer almaktadır.

3.6.3.3. Önem Örnekleme Uygulama Adımları

Birinci adım, iki bağımsız normal dağılımlı rastgele değişken $Z1$ ve $Z2$ örneklenmektedir.

$$Z_1 \sim N(0,1) \tag{3.22}$$

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z' \tag{3.23}$$

Euler disketizasyonu ile dayanak varlığın volatilitesi ve sonrasında ise dayanak varlığın simülasyonu aşağıdaki gibi simüle edilmesi gerekmektedir:

$$v_{i+1} = v_i + \left(\kappa(\theta - v_i) - \sqrt{v_i}\xi\rho h(i, S_i, v_i)\right)\Delta t + \xi\sqrt{v_i \Delta t}\left(\rho Z_{i+1}^1 + \sqrt{1-\rho^2}Z_{i+1}^2\right) \tag{3.24}$$

$$S_{i+1} = S_i \exp\left(\left(r - \frac{v_i}{2} - \sqrt{v_i}h(i, S_i, v_i)\right)\Delta t + \sqrt{v_i \Delta t} Z_{i+1}^1\right) \quad (3.25)$$

Burada $\Delta t = t_{i+1} - t_i, Z_{i+1}^1$ ve Z_{i+1}^2 rastgele değişkenlerdir ve normal dağılımı takip etmektedir.

İkinci adım, daha sonra eşitlik 2.56 Radon-Nikodym türevi ile önem örnekleme sonucu elde edilmektedir.

$$H_T = \exp\left(\sum_{i=1}^{M} h(i, S_i, v_i)\sqrt{\Delta t} Z_{i+1}^1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} h(i, S_i, v_i)^2 \Delta t\right) \quad (3.26)$$

Üçüncü adım, eşitlik 3.26'te elde edilen H_T değeri opsiyon fiyatın hesaplanmasında eşitlik 3.27 ve 3.28'ya eklenmektedir ve önem örnekleme ile elde edilecek olan opsiyon fiyatı aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$AlımOpsiyonu(t, x) = E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} max(S_T - K) H_T \mid X_t = x\right] \quad (3.27)$$

$$SatımOpsiyonu(t, x) = E_{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} max(K - S_T) H_T \mid X_t = x\right] \quad (3.28)$$

Algoritmanın Phyton kodu EK 7'te yer almaktadır.

3.6.3.4. Tabakalı Örnekleme Uygulama Adımları

Birinci adım, simülasyonlar belirlenen tabaka sayısına göre farklı tabakalara ayrılır. Her bir tabaka, toplam simülasyon sayısının tabaka sayısına (B) bölünmesiyle elde edilen sayıda simülasyon içermektedir. Tabaka sayısı ihtiyaca göre bilirlenmektedir. Bu demek oluyor ki hesaplamalar iki döngü içerisinde yer almalıdır.

İlk Döngü (Tabaka Sayısı), toplam simülasyon sayısını belirli sayıda tabakaya ayırmaktadır. İkinci Döngü (Simülasyon Sayısı), belirlenen simülasyon sayısına göre

simülasyonlar gerçekleştirilir. Bu döngü, her bir tabakanın içindeki simülasyonları yürütür ve sonuçları toplamaktadır.

Z_1 ve Z_2 rastgele değişkenleri, her bir tabaka için ayrı olarak hesaplanmaktadır.

$$Z_1 \sim N(0,1)(\text{Her tabaka için ayrı}) \tag{3.29}$$

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z'(\text{Her tabaka için ayrı}) \tag{3.30}$$

Volatilite güncellemesi her bir tabaka için gerçekleştirilmektedir.

$$v_t = v_{t-1} + \kappa\big(\theta - \max(0, v_{t-1})\big)\Delta t + \xi\sqrt{\max(0, v_{t-1})}\sqrt{\Delta t}Z_2 \tag{3.31}$$

Dayanak varlık fiyatı güncellemesi tabakalar içinde yapılmalıdır aşağıdaki gibidir.

$$S_t = S_{t-1}\exp\left((r - 0.5v_{t-1})\Delta t + \sqrt{v_{t-1}\Delta t}Z_1\right) \tag{3.32}$$

İkinci adım, vade sonunda, her simülasyon yolu için Alım ve Satım opsiyonlarının fiyatları hesaplanmaktadır.

Alım Opsiyon Fiyatı:

$$AlımOpsiyonu(t,x) = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(S_T - K, 0) \tag{3.33}$$

Satım Opsiyon Fiyatı:

$$SatımOpsiyonu(t,x) = \mathrm{e}^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(K - S_T, 0) \tag{3.34}$$

Üçüncü adım, nihai opsiyon fiyatlarının hesaplanmasında, tüm simülasyon yolları üzerinden ortalama fiyatların bugünkü değerleri indirgenmektedir. Düzenli tabakalama, B kutusunun her birine eşit örnekleme dağıtılmaktadır bu nedenle fiyatların ortalaması alınmaktadır.

Alım Opsiyon Fiyatı:

$$C = e^{-rT} \times \text{Ortalama Alım Opsiyon Fiyatı} \quad (3.35)$$

Satım Opsiyon Fiyatı:

$$P = e^{-rT} \times \text{Ortalama Satım Opsiyon Fiyatı} \quad (3.36)$$

Dördüncü adım, Alım ve Satım opsiyonları için standart sapma ve hata kareler ortalaması (MSE) hesaplanmaktadır. Güven aralığı hesaplanarak opsiyon fiyatlarının belirsizliği değerlendirilmektedir. Bu yaklaşım, simülasyonun her bir bölümünde (tabakada) farklı rastgele değişken değerleri kullanarak, sonuçların daha temsil edici ve dengeli olmasını sağlamaktadır. Algoritmanın Phyton kodu EK 8'te yer almaktadır.

3.7. Araştırmanın Bulguları

3.7.1. Parametre Değerleri

Kalibrasyon sonuçlar, Matlab Lsqlin fonksiyonu ile elde edilen parametre değerleri aşağıda görüldüğü gibidir.

Heston Parametreleri	S_0	V0:	Teta:	Kappa:	Sigma:	Rho:
	7016.34	0.1312	1.0000	2.0131	2.0000	-0.7764

Tablo 2. BİST 30 Endeks Opsiyon Sözleşme Değerleri ile Kalibre Edilen Heston Modelin Parametre Değerleri.

- V_0, Başlangıç Volatilitesi, modelin başlangıç noktasındaki volatilite seviyesini ifade etmektedir. 0.1312 değeri, modelin başlangıcında dayanak varlık fiyatlarının volatilitesinin bu seviyede olduğunu gösterir.

- Teta, volatilitenin uzun vadede ortalama olarak yaklaşacağı değeri temsil etmektedir. 1.0000 değeri, modelin uzun vadede volatilitenin bu seviyeye doğru eğilim göstereceğini varsayar.

- Kappa, volatilitenin Teta'ya doğru ne kadar hızlı "geri döndüğünü" (mean-reversion) gösterir. 2.0131 değeri, volatilitenin ortalama değere geri dönme sürecinin bu hızda gerçekleşeceğini belirtir.

- Sigma, volatilitenin kendisinin ne kadar volatil olduğunu ifade etmektedir. 2.0000 değeri, volatilitenin zaman içinde göstereceği dalgalanmanın bu düzeyde olacağını gösterir.

- Rho, dayanak varlık fiyatları ile volatilite arasındaki korelasyonu ifade etmektedir. -0.7764 değeri, dayanak varlık fiyatları ile volatilite arasında güçlü bir negatif korelasyon olduğunu gösterir, yani birinin artması diğerinin azalmasıyla ilişkilidir.

Parametre değerlerinin belirlenmesinin ardından, bu değerler kullanılarak zımni volatilite değerlerinin hesaplanması ve parametrelerin bütünsel olarak değerlendirilmesi gerçekleştirilmektedir. Bu nedenle, zımni volatiliteler de incelenmektedir.

3.7.2. Getirilerin Dağılımı

Dayanak varlıkların getirilerini hesaplamak için logaritmik getiriler kullanılmaktadır. Log getiri, sürekli bileşik getiriyi ifade eder ve finansal zaman serilerinin analizinde tercih edilir çünkü bu getirilerin dağılımları genellikle normal dağılıma daha yakındır. Bu özellik, log getirilerin volatiliteyi daha tutarlı bir şekilde ölçme avantajına sahip olmasını sağlar, bu da zımni volatilite hesaplamalarında önemli bir rol oynamaktadır (Hull, 2008).

Bu bağlamda, Black-Scholes modelinin varsayımlarından biri olan log-getirilerin normal dağılıma uyduğu varsayımı, BİST 30 endeksin getiri serisinde incelenmektedir. Grafiklerin anlaşılırlığı açısından bir yıllık geçmiş verilere yer verilmiştir. BİST 30'un son bir yıldaki getirilerinin log getirisi Şekil 16'da, log getiri dağılımı ise şekil 17'de gösterilmiştir. Getirilerin normal dağılıma tabi olup olmadığı, basıklık ve çarpıklık oranları incelenerek anlaşılabilmektedir.

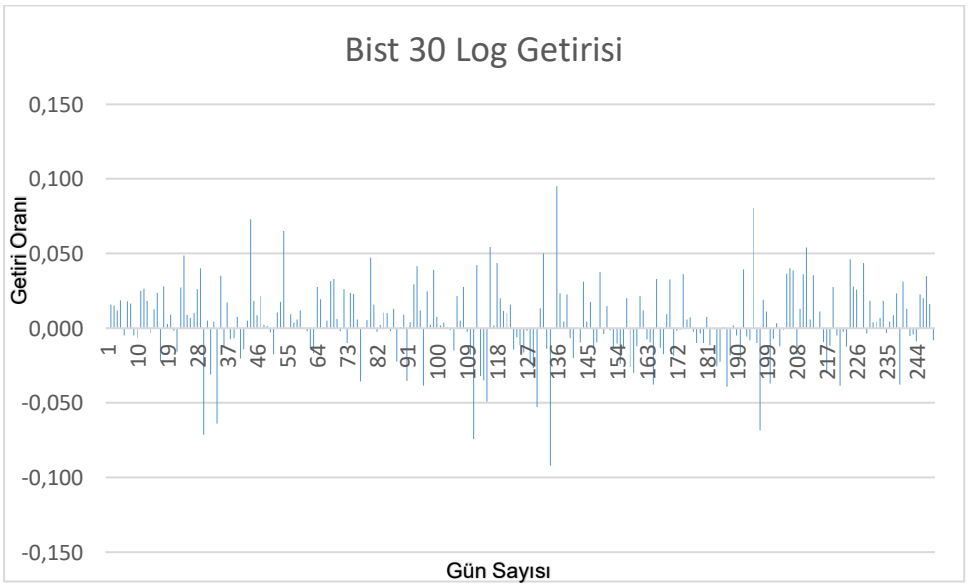
Basıklık, bir veri setinin dağılımının kuyruklarının ve tepe noktasının ne kadar ağır veya hafif olduğunu ölçen bir istatistiktir. Normal dağılımın basıklık değeri 3'tür. Eğer

bir dağılımın basıklık değeri 3'ten yüksekse, bu dağılımın normal dağılıma göre daha keskin bir tepeye ve daha ağır kuyruklara sahip olduğunu gösterir. Tersine, basıklık değeri 3'ten düşükse, dağılımın daha düz bir tepeye ve daha hafif kuyruklara sahip olduğunu gösterir.

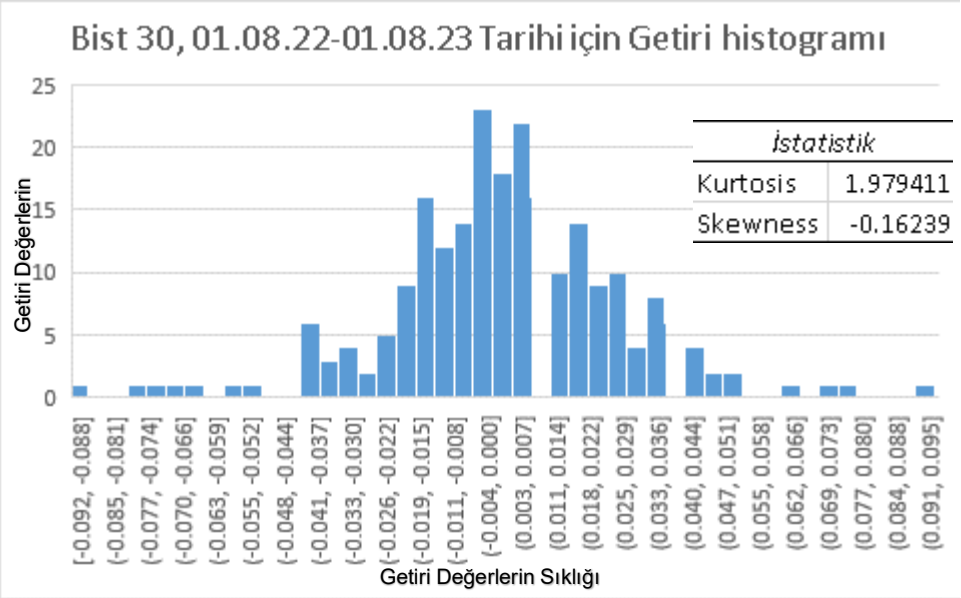
Çarpıklık, bir veri setinin dağılımının simetrik olup olmadığını ölçer. Değeri 0 olan bir dağılım tamamen simetriktir, örneğin normal dağılımda olduğu gibi. Eğer bir dağılımın çarpıklık değeri 0'dan büyükse, dağılım sağa çarpıktır; eğer 0'dan küçükse, sola çarpıktır. BİST 30'un çarpıklık değeri -0.1624 olarak hesaplanmıştır, bu da dağılımın hafifçe sola çarpık olduğunu gösterir. Bu, BİST 30'un değerlerin daha düşük değerlere doğru bir eğilim gösterdiğini, yani daha düşük getirilerin biraz daha olası olduğunu göstermektedir.

BİST 30'un basıklık değeri 1.9794 olarak hesaplanmıştır. Bu değer, normal dağılımdan daha düşük olduğu için, bu veri setinin dağılımının normal dağılıma göre daha düz bir tepeye ve daha hafif kuyruklara sahip olduğunu göstermektedir. Bu, aşırı değerlerin (çok yüksek veya çok düşük değerler) normal dağılıma göre daha az olası olduğunu göstermektedir.

Sonuç olarak, Black-Scholes'un varsayımları gerçek veriler ile incelendiğinde tam olarak normal dağılım varsayımını karşılamadığını gözlemlemekteyiz.



Şekil 16. BİST 30 Endeksin Bir Yıllık Log Getirisi.



Şekil 17. BİST 30 Endeksin Bir Yıllık Getiri Dağılımı.

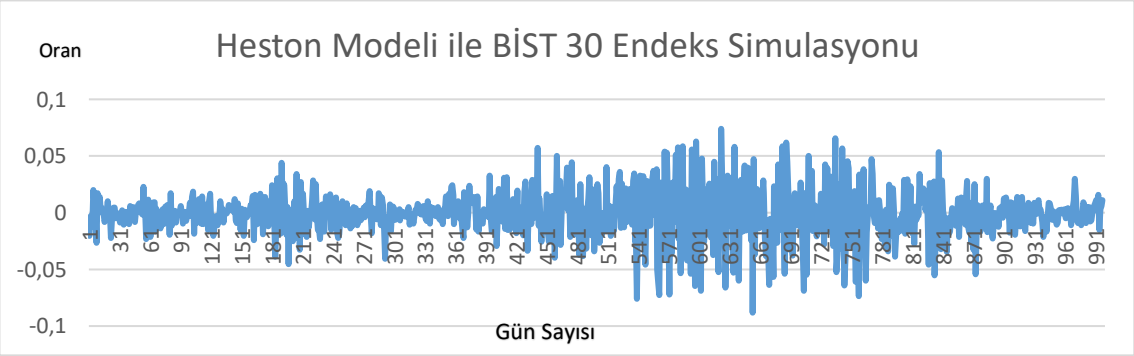
Finansal model seçiminde, özellikle endeksler gibi dayanak varlıkların logaritmik getirilerinin dağılımı önemlidir. Bu, modelin dayanak varlığın fiyat hareketlerini ne kadar iyi yansıttığını belirlemek için kritik bir faktördür. Gerçek piyasa verileri, sıklıkla normal dağılımdan sapmalar göstermektedir. Bu sapmalar, aşırı volatilite, ağır kuyruklar (yüksek basıklık) ve asimetrik dağılımlar (çarpıklık) şeklinde olabilmektedir. Bu, finansal modellerin gerçek piyasa davranışlarını doğru bir şekilde yansıtma kabiliyetini etkilemektedir. Black-Scholes modeli, temel olarak normal dağılıma dayanmaktadır ve dayanak varlığın logaritmik getirilerinin normal dağılımlı olduğunu varsaymaktadır. Ancak, gerçek piyasa verilerinin bu varsayımlardan sapması, modelin piyasa davranışlarını eksiksiz olarak yansıtamamasına yol açabilmektedir. Bu sınırlılıklar, özellikle piyasa şokları ve aşırı olaylar sırasında daha belirgin hale gelmektedir.

Bu, model seçiminde daha esnek veya farklı dağılımları dikkate alan alternatif modellerin değerlendirilmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bir diğer alternatif ise Black-Scholes modeline dağılımların Ek 1'de yer alan Gram Charli Düzeltmesi ile daha esnek hale getirilmesidir. Örneğin, aşırı değerlerin (çok yüksek veya çok düşük getiriler) olasılığını etkileyen bu sapmalar, dayanak varlık fiyatlarındaki ani ve büyük değişimlerin risk yönetiminde dikkate alınmasını gerektirmektedir.

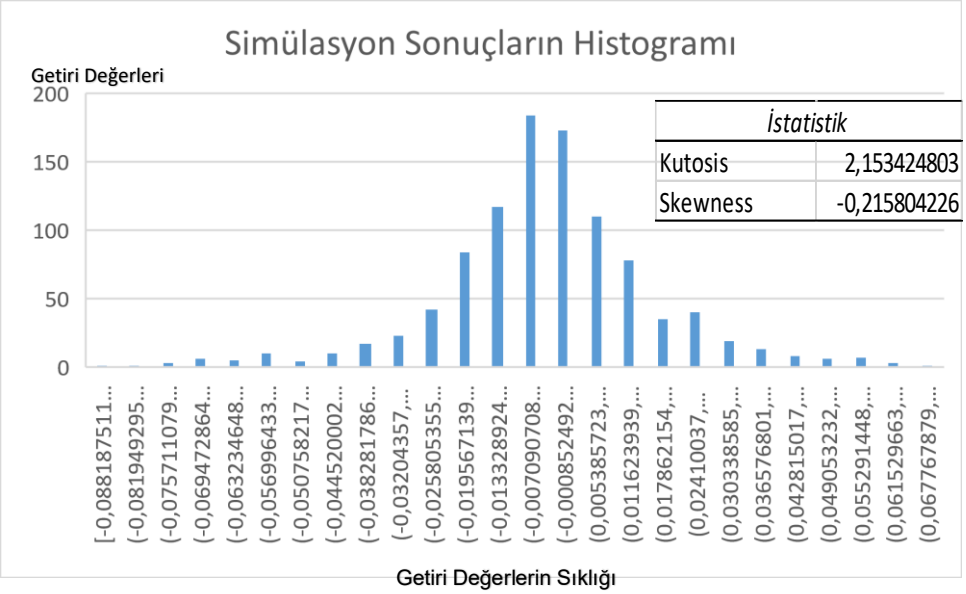
Bu sapmalar aynı zamanda volatilite tahminlerini de etkilemektedir. Normal dağılıma dayanan modeller, gerçek volatiliteyi hafife alabilmektedir veya

abartabilmektedir. Bu nedenle, volatiliteyi tahmin ederken daha karmaşık veya farklı istatistiksel yöntemlerin kullanılması gerekebilmektedir. Yatırımcılar ve portföy yöneticileri için bu tür istatistiksel sapmalar, yatırım stratejilerini ve dayanak varlık dağılımını etkileyebilmektedir. Örneğin, aşırı değerlerin daha az olası olduğu bir dağılımda, aşırı fiyat hareketlerine karşı korunma stratejileri farklı şekillendirilebilmektedir.

Bir modelin gerçek piyasa verilerine ne kadar uyumluluk sağladığı, modelin doğruluğu ve güvenilirliği açısından kritik öneme sahiptir. Gerçek piyasa davranışını daha iyi yansıtan modeller, daha doğru tahminler ve analizler sağlayabilmektedir. Bu nedenle, Heston modeli Black-Scholes modelinden farklı olarak, dayanak varlık fiyatlarının logaritmik getirileri için normal dağılım varsayımını doğrudan kullanmamaktadır (Heston, 1993: 328). Bunun yerine, Heston modeli, dayanak varlık fiyatlarının volatilitesinin stokastik (rastgele) bir süreç izlediğini varsaymaktadır. Bu modelde, volatilite kendisi bir rastgele süreç olarak modellenir ve bu, dayanak varlık fiyatlarının zaman içinde değişen volatilitesini daha gerçekçi bir şekilde yansıtabilmektedir. Bununla birlikte, şekil 18'de görüldüğü üzere, BİST 30 endeksin %10 tavan taban sınırlamasına tabi olduğunun göstergesidir. Bu nedenle, herhangi bir fiyatlama modeli kullanıldığında aynı sınırlamalara yer verilmelidir. Heston modelin dayanak varlık simülasyonlarında bu sınırlı değişime yer verdiği şekil 18'de gözlemlenmiştir. Heston modelin gerçek veriler üzerinden kalibrasyon yapılmasından dolayı tavan taban hareketlerini yakalayabilme kabiliyetini göstermektedir. Ayrıca, şekil 19'da görüldüğü üzere normal gerçek verilere yakın çarpıklık ve basıklık değeri verdiği görülmektedir.



Şekil 18. Heston Modelin Parametrelerini Kullanarak BİST 30 Endeksin 1000 Günlük Simülasyonların Log Getirisi.



Şekil 19. Heston Modelin Parametrelerini Kullanarak BİST 30 Endeksin 1000 Günlük Simülasyonların Getiri Dağılımı.

3.7.3. Zımni Volatilite ile Parametrelerin Değerlendirilmesi

Model kalibrasyonunda, kayıp fonksiyonu kullanılarak modelin hata oranı değerlendirilmektedir. Zımni volatilite hesaplamaları, kayıp fonksiyonunun değerini minimize etmek için kullanılabilir. Bu, modelin tahminlerinin doğruluğunu artırmakta ve piyasa verilerine daha iyi uyum sağlamasını mümkün kılmaktadır.

Tablo 3, BİST 30 endeksi için Alım ve Satım opsiyonlarının fiyatlarını ve bu fiyatlardan elde edilen zımni volatilite değerlerinin detaylarını içermektedir. Tabloda, kullanım fiyatları arttıkça volatilite değerlerinde bir düşüş görülmektedir. Ayrıca, vade sürelerinin uzaması ile birlikte volatilitede azalmalar gözlemlenmiştir. Bu durum, piyasa dinamiklerinin ve risk algılarının vade süresi ve kullanım fiyatlarına bağlı olarak nasıl değişebileceğini göstermektedir.

Tablo A	BİST30 BS Zımni Volatilite		
S(T)/Vade	0.139726	0.306849	0.468493
7200	0.491231	0.532897	0.634937
7300	0.484936	0.514604	0.620435
7400	0.476681	0.515458	0.605970
7500	0.468909	0.517009	0.591557
7600	0.461554	0.519174	0.577165
7700	0.457925	0.514796	0.562805
7800	0.455993	0.507533	0.567344

Tablo B	BİST30 için Heston ile Zımni Volatilite		
S(T)/Vade	0.139726	0.306849	0.468493
7200	0.451143	0.540537	0.598838
7300	0.439482	0.532764	0.594951
7400	0.431709	0.528877	0.587178
7500	0.423936	0.521104	0.583291
7600	0.416162	0.517217	0.579404
7700	0.408389	0.509443	0.575518
7800	0.400615	0.505557	0.571631

(Tablo B - Tablo A)^2	Zımni Volatilite MSE Değerleri		
S(T)/Vade	0.139726	0.306849	0.468493
7200	0.001607	0.000058	0.001303
7300	0.002066	0.000330	0.000649
7400	0.002022	0.000180	0.000353
7500	0.002023	0.000017	0.000068
7600	0.002060	0.000004	0.000005
7700	0.002454	0.000029	0.000162
7800	0.003067	0.000004	0.000018

Tablo 3. BİST 30 Endeks Opsiyon Sözleşme Verileri Üzerinden Hesaplanan Volatilite ve MSE Değerleri.

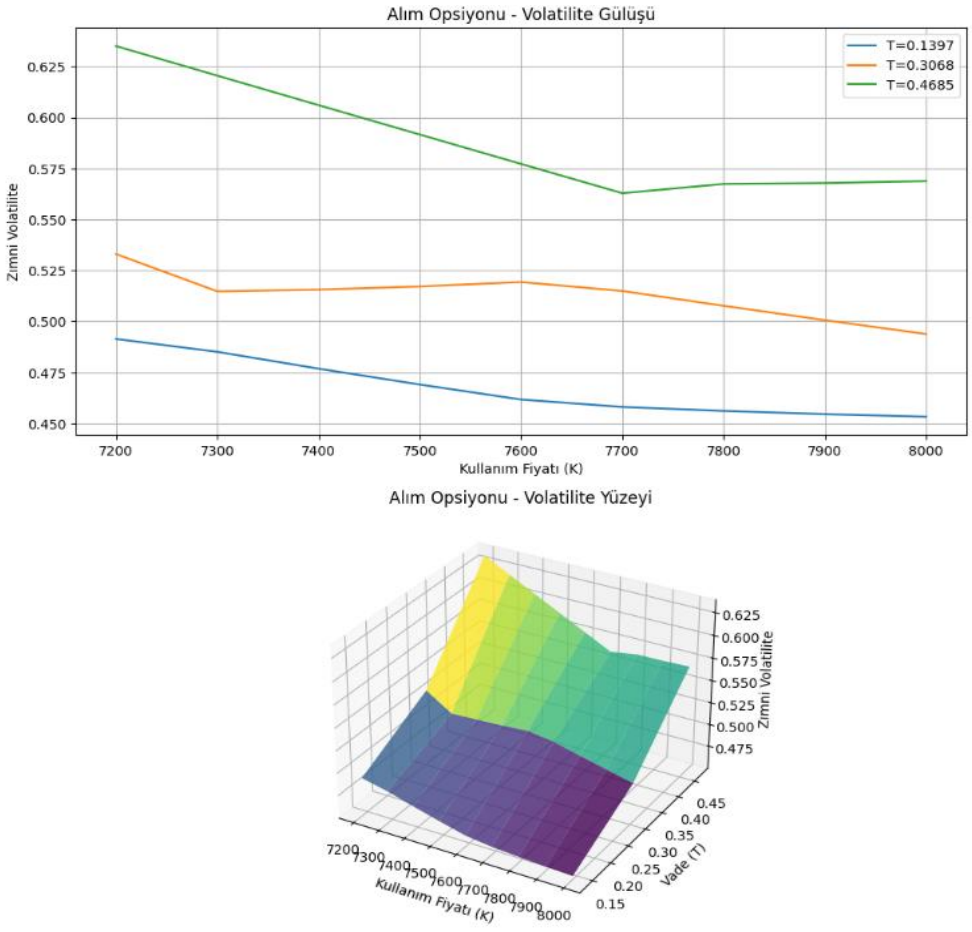
Elde edilen parametre değerleri kullanılarak zımni volatilite değerleri hesaplanacak ve bu değerlerin doğruluğu, Zımni Volatilite Ortalama Kare Hatası (IVMSE) değeri ile ölçülecektir. Bu ölçüm, Heston modelin tahmin etkinliğini ve piyasa verilerine uyumunu değerlendirmek için kullanılacak olan bir metriktir. Çalışmada elde edilen IVMSE değeri 0.00088 olarak belirlenmiştir ve bu da Heston modelin piyasa verilerine uyumlu olduğunu göstermektedir.

3.7.4. Volatilite Gülümsemesi ve Yüzeyi

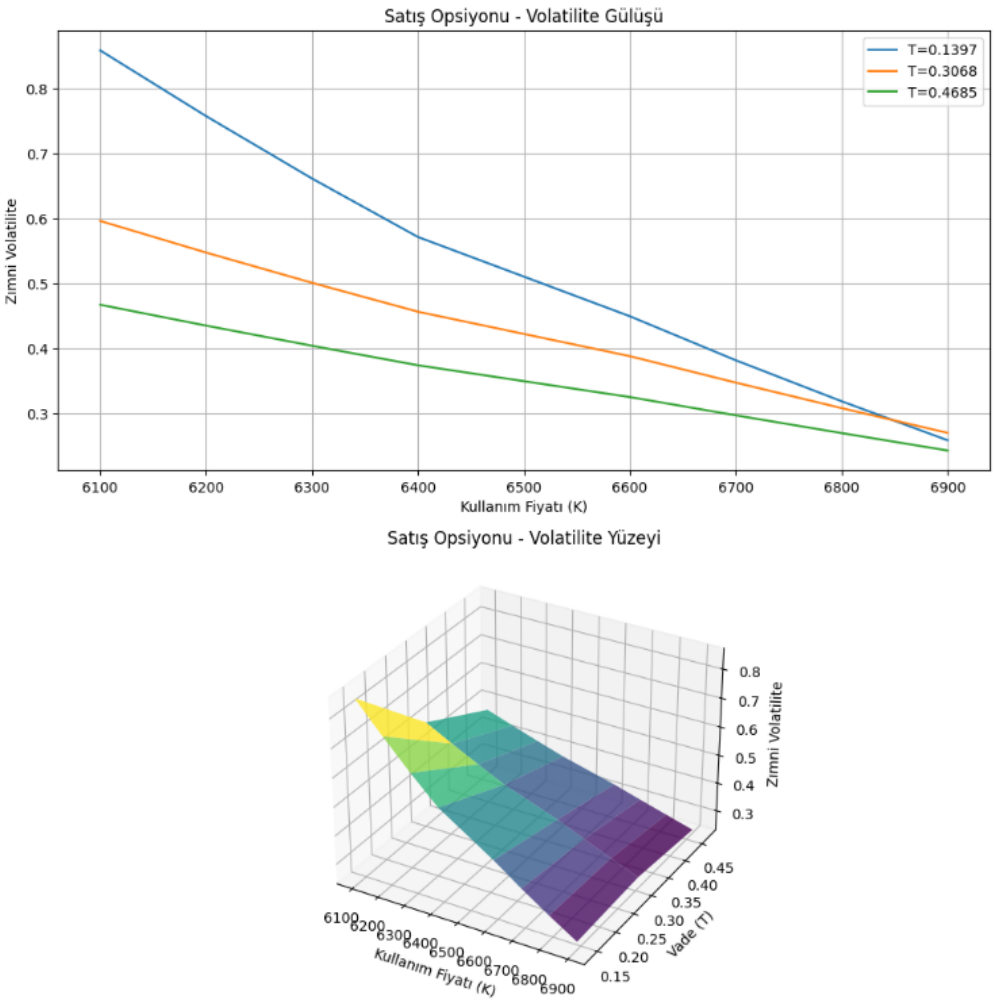
Zımni volatilite, opsiyon fiyatlarından türetilen bir volatilite ölçüsüdür. Volatilite gülümsemesi (volatility smile) ise, farklı kullanım fiyatlarına karşılık gelen zımni volatilitedir, ayrıca görsel olarak da gösterilebilmektedir. Volatilite gülüşü, tablo 3'te yer alan BİST 30 için hesaplanan Alım ve Satım opsiyonlarının volatilite ve fiyat tablosundan elde edilmiştir.

Şekil 20'de bir Alım opsiyonu için zımni volatilite eğrisi genellikle soldan aşağı doğru eğimli ve sağ tarafta yukarı doğru eğik bir yapıya sahip ise, bu yapı volatilite gülüşü olarak adlandırılmaktadır. Şekil 20'de ise ayrıca Eşitlik 2.7'de belirtilen nümerik yöntem ile elde edilen zımni volatiliteler 2D ve 3D olarak sunulmaktadır.

Şekil 21'de bir satış opsiyonu için zımni volatilite eğrisi 2D ve 3D olarak görülmektedir ve genellikle soldan aşağı doğru eğimli volatilite eğrisi olarak gözlemlenmiştir.



Şekil 20. BİST 30 Alım Opsiyonları için Volatilite Gülüşü ve Volatilite Yüzeyi.



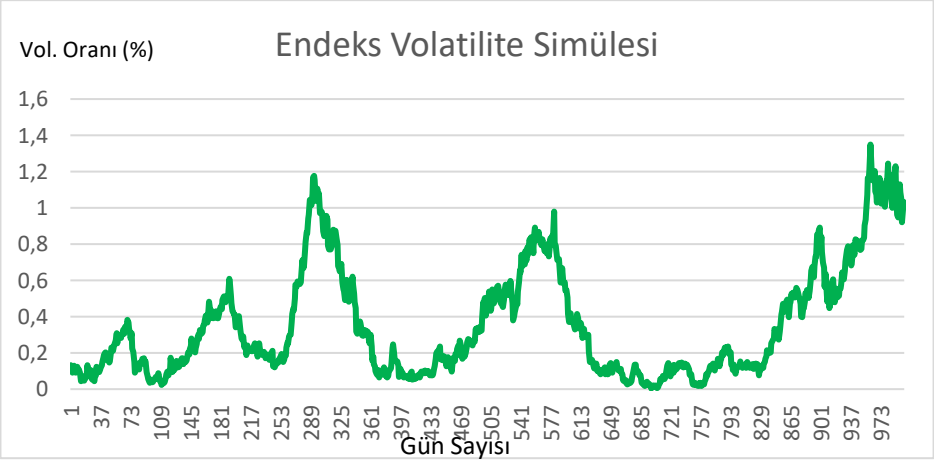
Şekil 21. BİST 30 Satım Opsiyonları için Volatilite Gülüşü ve Volatilite Yüzeyi.

Volatilite gülümsemesi, piyasa koşulları, piyasa katılımcılarının eğilimleri ve düşüşlere karşı korunma arayışı gibi faktörler nedeniyle oluşabilmektedir (Psychoyios, 2006). Bu durum, Satım opsiyonlarının fiyatlarını ve dolayısıyla zımni volatilitelerini artırabilmektedir. Belirsizliklerden kaynaklı büyük düşüşler veya gereğinden fazla beklentiler ise yükselişlere sebebiyet verebilmektedir ve bu olayların olasılıklarını farklı şekillerde fiyatlandırılmaları volatilite değerlerinde sert değişimlere neden olabilmektedir. Bir diğer sebep ise, arbitraj fırsat olasılıklarıdır. Farklı kullanım fiyatları ve vade tarihlerine sahip opsiyonlar arasındaki fiyat farkları, arbitraj fırsatları yaratabilir ve bu da volatilite gülümsemesini etkileyebilmektedir (Tuna vd., 2014).

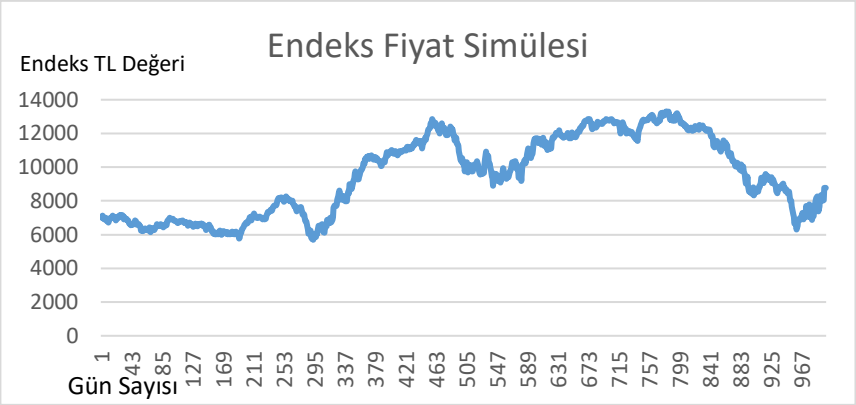
Heston modelinin zımni volatilite hesaplamalarında ortaya çıkan görseller piyasadaki volatilitenin Black-Scholes modelinde varsayıldığı gibi sabit olmadığının kanıtıdır. Ayrıca hesaplanan zımnı volatilitelerin kalibrasyonunda kullanılmaktadır ve modelin parametrelerin piyasa beklentileriyle uyumlu olmasını sağlamaktadır. Görsellerde görüldüğü üzere, Heston modeli hesaplanan volatilite yüzeyleri modelin volatilite değişkenlerine izin veridiği görülmektedir.

3.7.5. Simülasyon Sonuçları

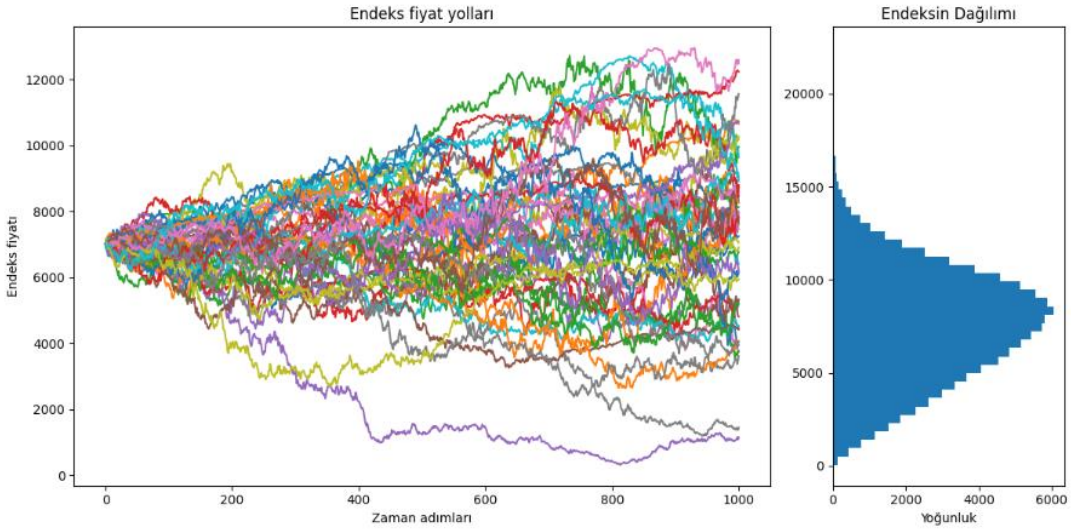
Heston modelini kullanarak, tek bir simülasyon yolu yapıldığında ve dt=1000 olduğunda elde edilen fiyat ve volatilite sümülasyonlarının sonucu şekil 22'de ve 23'te görülmektedir. Simülasyon sayısı 100.000 olduğunda elde edilen simülasyon sonucu ve dağılımı Şekil 24'te görülmektedir. Tablo 2'de yer alan Heston parametre değerleri kullanılarak tek bir yol simülasyonu yapılmaktadır. Burada tek bir yol ile 1.000 yol simülasyon verilerinin görseli verilmektedir.



Şekil 22. Volatilite Simülasyon Sonucu.

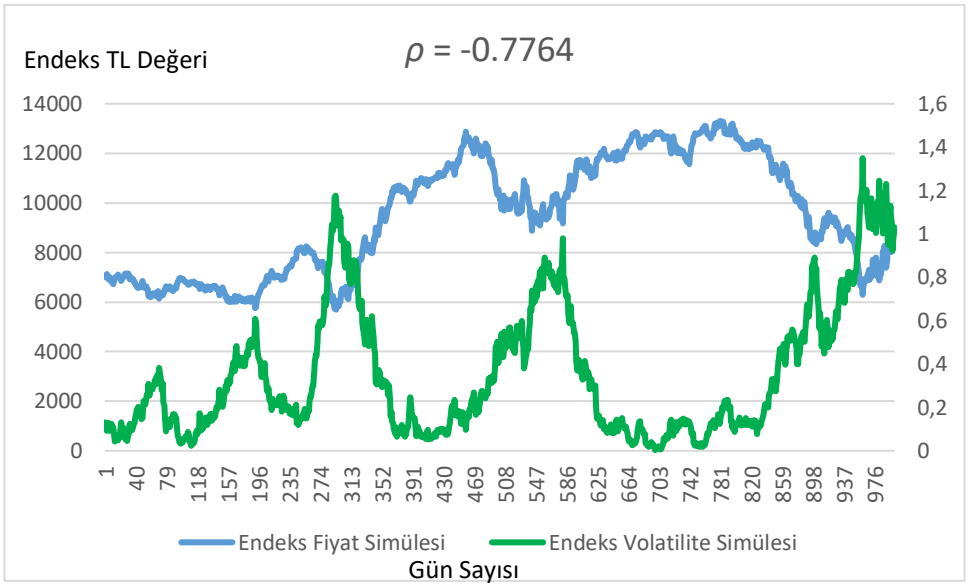


Şekil 23. Fiyat Simülasyon Sonucu.

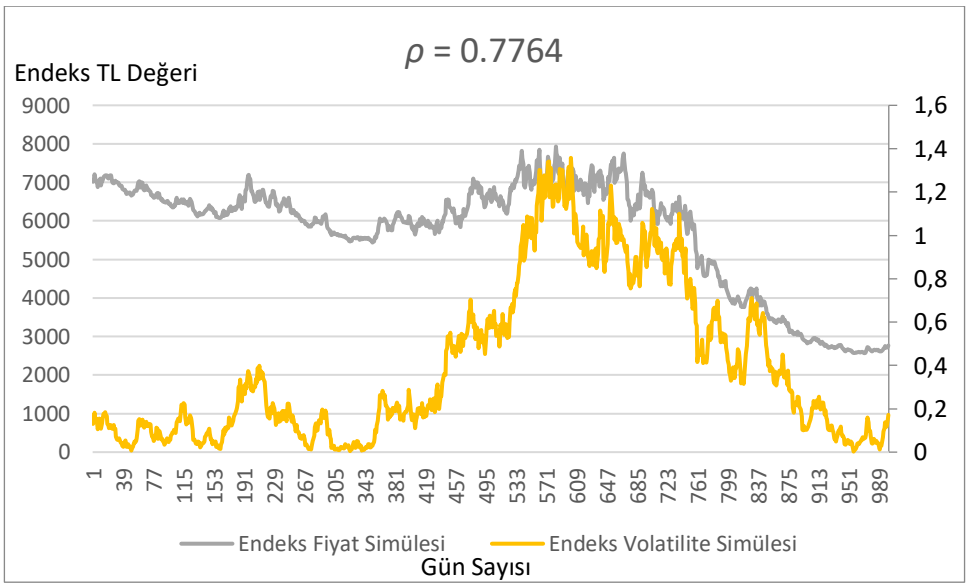


Şekil 24. 1.000 Adet Simülasyon Sonucu.

Heston modeli parametrelerinin dayanak varlığın fiyatı ve volatilitenin davranışını nasıl etkilediğini gösteren grafik şekil 25, ρ parametresinin endeks fiyatını ve varyansı yönlendiren süreçler arasındaki korelasyonu nasıl etkilediğini de görselleştirmektedir. Tek bir yol simüle edilmiş dayanak varlığın fiyatı başlangıç değeri 7016.34'dür ve 1000 günü kapsamaktadır. Simülasyon sonuçları, Heston modeli ile yapılan kalibrasyon sonucunda korelasyon değerinin ρ=−0.7764 olduğu tespit edilmiş ve bu durum şekil 25'te gösterilmiştir. Negatif korelasyon, endeks ile volatilite değerlerindeki rastgele hareketlerin ters orantılı olduğunu göstermektedir.



Şekil 25. Negatif Korelasyon Altında Dayanak Varlığın Fiyatı ve Varyansı.

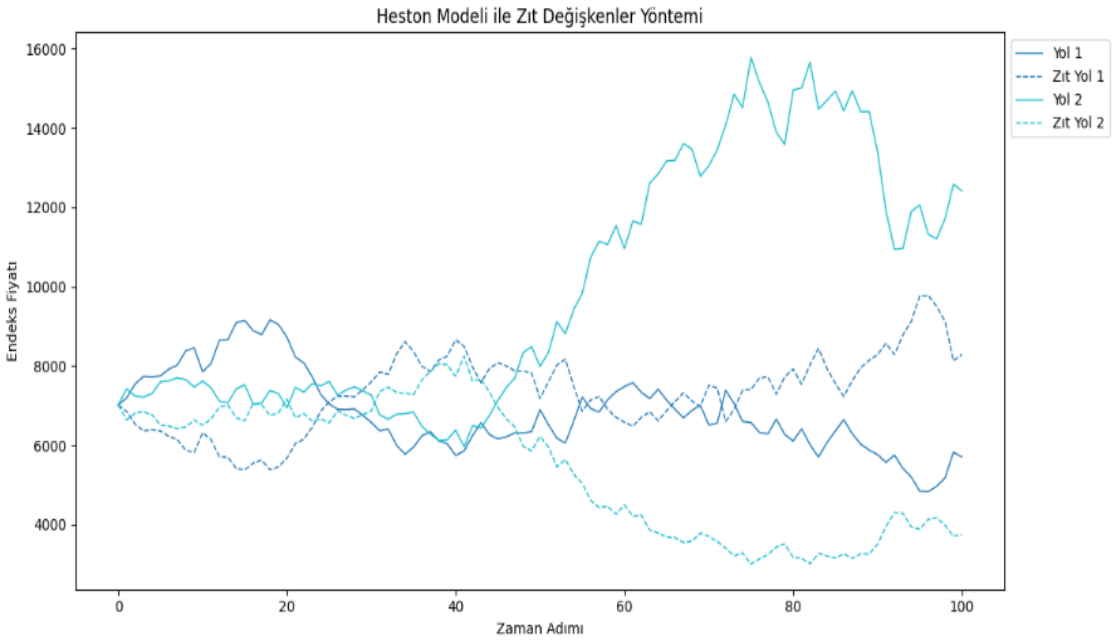


Şekil 26. Pozitif Korelasyon Altında Dayanak Varlığın Fiyatı ve Varyansı.

Şekil 26'te ise ρ = +0.7764, korelasyonun pozitif olması durumunda volatilitedeki artışların artan fiyatlarla nasıl ilişkilendirildiğini göstermektedir.

3.7.5.1. Zıt Değişkenler Simülasyon Sonuçları

Zıt değişkenler yönteminde, her bir rassal değişkenin zıt değeri simülasyona dahil edilerek varyansın azaltılması amaçlanmaktadır. Örneğin, bir simülasyon için kullanılan Z rassal değişkeni mevcutsa, aynı simülasyon $-Z$ rassal değişkeni ile de gerçekleştirilir. Bu iki simülasyon sonucunun aritmetik ortalaması alınmak suretiyle nihai sonuç elde edilir ve şekil 27'de görseli sunulmaktadır.



Şekil 27. Zıt Değişkenler Yönteminin Simülasyon Görseli.

Aşağıdaki Tablo 4'te, Heston Teorik fiyatı, Heston Euler ile Zıt Değişkenler ile elde edilmiş Alım ve Satım opsiyonları için fiyat karşılaştırmaları görülmektedir.

Alım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Zıt Değişkenler**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**557,5855**	**925,3181**	**1229,0321**	**560,2507**	**924,6010**	**1222,4858**
Üst Bant				581,0692	965,8677	1283,7622	572,9914	947,5496	1255,7482
Alt Bant				534,1019	884,7685	1174,3020	547,5100	901,6523	1189,2234
MSE				3,0153	8,9859	8,6124	0,8624	5,2007	13,0437
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6886	27,9235	6,5004	11,7085	16,9706
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Zıt Değişkenler**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**558,1615**	**920,8864**	**1228,2792**	**558,5487**	**933,9942**	**1238,7672**
Üst Bant				565,6718	933,6707	1245,5201	562,5967	941,2916	1344,5973
Alt Bant				550,6512	908,1021	1211,0382	554,5006	926,6968	1132,9370
MSE				1,3468	2,0565	4,7601	0,5980	136,2758	160,5237
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	2,0653	3,7232	5,3995
Satım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Zıt Değişkenler**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**409,4267**	**741,4370**	**1024,9864**	**410,8728**	**743,4974**	**1041,1908**
Üst Bant				432,9104	777,5886	1079,7165	425,9006	767,2147	1071,0560
Alt Bant				385,9431	696,6806	970,2563	395,8450	719,7801	1011,3255
MSE				8,2617	7,0594	309,1900	2,0399	22,2528	1141,6384
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6398	27,9235	7,6672	12,1007	15,2374
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Zıt Değişkenler**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**416,8618**	**735,7966**	**1003,9612**	**410,6839**	**752,8179**	**1056,6757**
Üst Bant				424,3721	748,5809	1021,2022	415,3821	760,3731	1152,1454
Alt Bant				409,3515	723,0122	986,7202	405,9856	746,2626	961,2059
MSE				20,8006	8,9014	11,8432	2,6153	197,0597	2427,8324
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	2,3971	3,8547	4,8709

Tablo 4. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Zıt Değişkenler ile elde edilmiş Alım Opsiyon Fiyatları (TL).

Heston modeli altında yürütülen simülasyonlar, Alım ve Satım opsiyonları için belirlenen vadelerde, hem 10.000 hem de 100.000 simülasyon sayısı için incelenmiş ve sonuçlar Heston Teorik Fiyatı ve Heston Euler yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile mukayese edilmiştir.

İncelenen sonuçlarda, Alım Opsiyonları için Euler ve Zıt Değişkenler yöntemleri arasında, her iki simülasyon sayısı için de sadece T=38 gün vadede Zıt Değişkenler yönteminin MSE değerlerine göre daha düşük hata oranları sunduğu gözlemlenmiştir. Bu durum, kısa vadeli Zıt Değişkenler yönteminin, söz konusu durumda daha tutarlı ve etkin sonuçlar sağladığını göstermektedir. Ayrıca T=38 gün vadede, 100.000 simülasyonun sonuçları, 10.000 simülasyona kıyasla hem Euler hem de Zıt Değişkenler için daha düşük MSE değerleri ortaya koymuş, bu da simülasyon sayısının artışının sonuçların doğruluğunu artırdığını işaret etmektedir.

Satım opsiyonlarına yönelik simülasyon sonuçları ise Euler yöntemi ile Zıt Değişkenler yöntemi arasında belirgin fiyat farklılıkları sergilemektedir. Zıt Değişkenler yöntemi sadece kısa vadelerde tahminlerinin daha tutarlı olduğunu ve bu yöntemin simülasyon sonuçları üzerinde olumlu bir etki yarattığını ortaya koymaktadır. Vadelerin uzamasıyla birlikte MSE değerlerinde artış gözlemlenmiştir.

Bu durumda, kısa vadede Zıt Değişkenler yöntemi, Euler modeline kıyasla genel olarak SE değerlere göre daha iyi performans göstermektedir. Diğer taraftan uzun vadede, Zıt Değişkenler yönteminde simülasyon yollarında makasın açıldığı ve MSE değerlerinin arttığı fakat SE değerlerinin Euler'a kıyasla düştüğü gözlemlenmiştir.

3.7.5.2. Kontrol Değişkenleri Simülasyon Sonuçları

Heston Euler modeli ve Kontrol Değişkenleri yöntemi kullanılarak yapılan simülasyonların sonuçlarının karşılaştırmaları aşağıdaki gibidir:

Alım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Kontrol Değişkenleri**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**557,5855**	**925,3181**	**1229,0321**	**558,2155**	**922,1302**	**1225,4477**
Üst Bant				581,0692	965,8677	1283,7622	547,6517	902,8212	1197,4393
Alt Bant				534,1019	884,7685	1174,3020	568,7793	941,4393	1253,4562
MSE				3,0153	8,9859	8,6124	1,2244	0,0362	0,4221
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6886	27,9235	5,3891	9,8506	14,2886
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Kontrol Değişkenleri**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**558,1615**	**920,8864**	**1228,2792**	**559,0400**	**922,9655**	**1226,3036**
Üst Bant				565,6718	933,6707	1245,5201	555,7233	916,8287	1217,4672
Alt Bant				550,6512	908,1021	1211,0382	562,3568	929,1023	1235,1400
MSE				1,3468	2,0565	4,7601	0,0795	0,4161	0,0425
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	1,6922	3,1310	4,5084
Satım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Kontrol Değişkenleri**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**409,4267**	**741,4370**	**1024,9864**	**412,3417**	**724,6294**	**1009,2679**
Üst Bant				432,9104	777,5886	1079,7165	402,0417	708,2576	988,2370
Alt Bant				385,9431	696,6806	970,2563	422,6418	741,0013	1030,2987
MSE				8,2617	7,0594	309,1900	0,0017	200,2404	3,4793
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6398	27,9235	5,2546	8,3521	10,7289
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Kontrol Değişkenleri**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**416,8618**	**735,7966**	**1003,9612**	**412,3634**	**738,7526**	**1013,2322**
Üst Bant				424,3721	748,5809	1021,2022	409,1349	733,0719	1006,5981
Alt Bant				409,3515	723,0122	986,7202	415,5919	743,4728	1019,8663
MSE				20,8006	8,9014	11,8432	0,0039	0,0008	33,9843
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	1,6472	2,6562	3,3848

Tablo 5. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Kontrol Değişkenleri ile elde edilmiş Alım ve Satım Opsiyon Fiyatları (TL).

Euler yöntemi ve Kontrol Değişkenleri varyans azaltma yöntemi kullanılarak farklı vadeler ve simülasyon sayılarında elde edilen sonuçlar, Heston Teorik Fiyatları ile karşılaştırılarak incelenmiştir.

Alım ve Satım opsiyonları için yapılan analizde, Kontrol Değişkenleri yöntemi kullanılarak elde edilen opsiyon fiyatlarının, genellikle Heston Teorik Fiyatlarla benzerlik gösterdiği gözlemlenmiştir. Güven aralıkları, artan simülasyon sayısı ile daralmakta, bu da yüksek simülasyon hacminin kesinlik ve güvenilirliği artırdığına işaret etmektedir. Ortalama kare hata (MSE) ve standart hata (SE) değerleri, artan simülasyon sayısı ile düşme eğilimi gösterirken, özellikle 100.000 simülasyon hacminde Kontrol Değişkenleri yöntemi, dikkate değer derecede düşük MSE ve SE değerleri ile sonuçları iyileştirme potansiyeline sahip olduğunu ortaya koymaktadır.

Satım opsiyonlarına yönelik analizde ise, Euler yöntemi ve Kontrol Değişkenleri arasındaki sonuçlar karşılaştırıldığında, Kontrol Değişkenleri yöntemi ile elde edilen fiyatların genellikle daha tutarlı olduğu ve Heston Teorik Fiyatlarına yakın değerler verdiği görülmektedir. Güven aralıklarının simülasyon sayısı arttıkça daralması bu yöntemin sonuçlarının güvenilirliğini desteklemekte, MSE ve SE değerlerinin düşük olması ise tahminlerin istikrarını göstermektedir.

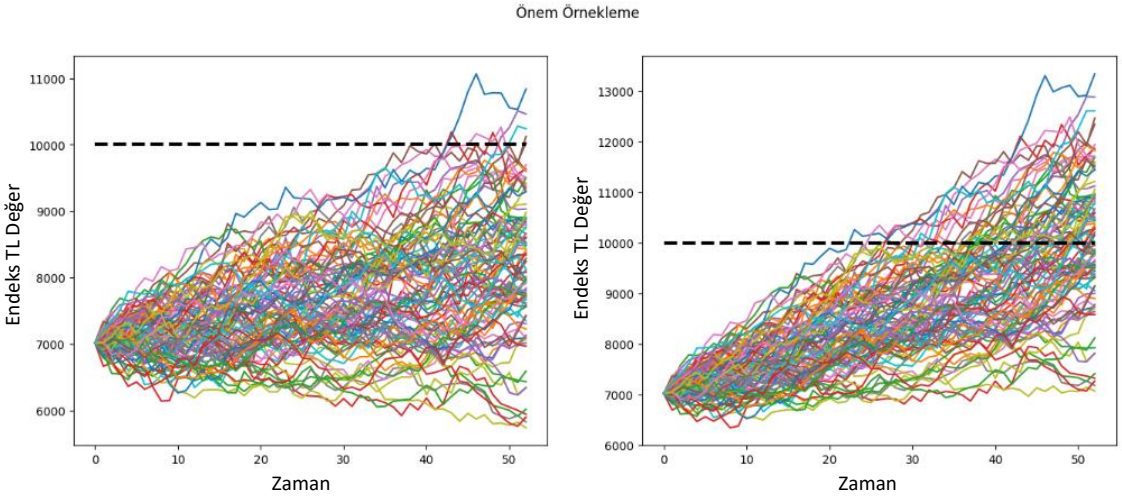
Genel olarak, Heston modeli kullanılarak yapılan simülasyonlarda, Kontrol Değişkenleri yöntemi ile elde edilen sonuçlar, farklı vade ve simülasyon sayıları için Alım ve Satım opsiyonlarında Heston Teorik Fiyatlarına yakın ve tutarlı tahminler sağladığı görülmektedir.

3.7.5.3. Önem Örnekleme Simülasyon Sonuçları

Şekil 28'de önem örneklemenin arkasında yatan mantığı görselleştirmektedir. Şekil de görüldüğü üzere, sol tarafta simülasyonların normal dağılımına göre ve belli bir hedef gösterilmeden simülasyon uyarlamasıdır. 11 Temmuz 2023 tarihinde BİST 30'un spot fiyatı 7016.34 iken bir sene sonra fiyatın 10.000 TL olması olasığı simüle edilmiştir.

Şekil 28'de görüldüğü üzere, BİST 30 endeks opsiyon sözleşme değerinin 10.000 TL değerine ulaşma olasılığını tahmin etmek için iki farklı simülasyon yöntemi karşılaştırılmıştır. Sol taraftaki grafikte, Euler simülasyon yöntemi kullanmıştır ve sadece

beş simülasyon sonucunun 10.000 TL kullanım fiyatın üstüne çıkabildiği gözlemlenmiştir. Bu, standart bir simülasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlardır ve sınırlı sayıda deneme içerdiğini göstermektedir. Öte yandan, sağ taraftaki grafikte Heston modeline Önem Örnekleme kullanılarak yapılan simülasyonun görseli yer almaktadır. Önem Örnekleme ile simülasyon sayesinde, BİST 30 endeks opsiyonun 10.000 TL değerine ulaşma olasılığı daha doğru bir şekilde değerlendirmesi mümkün hale gelmiştir. Sonuç olarak, Önem Örnekleme yöntemi kullanılarak yapılan simülasyon, opsiyon değerlemesi için daha geniş bir veri seti sunarak tahmin olasılığını artırmıştr. Böylece, olası nadir olaylar hakkında daha fazla bilgiye sahip olunmaktadır.



Şekil 28. Sol: Önem Örnekleme Olmadan, Sağ: Önem Örnekleme ile Simülasyon.

Şekil 28'de görüldüğü üzere, daha olası olayların daha sık örneklenmesi ve daha az olası olayların daha az örneklenmesiyle beklentiler doğrultusunda elde edilen simülasyonlar, olası senaryoların isteğe bağlı tasarlanmasında yardımcı olmaktadır. Örneğin, volatilite gülüşünün uçları, piyasa katılımcılarının düşük olasılıklı olaylara (örneğin, büyük piyasa hareketlerine) verdikleri tepkiyi yansıtmaktadır. Bu uç noktalar, piyasanın aşırı fiyat hareketlerine karşı duyarlılığını gösterir ve genellikle yüksek volatilite seviyeleriyle ilişkilendirilmektedir. Bu yüksek volatilite seviyeleri, piyasa katılımcılarının bu tür uç olaylara daha yüksek bir olasılık atfettiğini göstermektedir. Eğer, bu uç noktalar hakkında daha detaylı bilgi istendiği takdirde Önem Örnekleme ile uç noktaları analiz edebilme olasılığı bulunmaktadır. Önem Örnekleme ile simülasyon sonuçları ise aşağıdaki Tablo 6'daki gibidir:

Alım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Önem Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**557,5855**	**925,3181**	**1229,0321**	**559,1928**	**922,0344**	**1226,2837**
Üst Bant				581,0692	965,8677	1283,7622	582,7300	962,6695	1280,6029
Alt Bant				534,1019	884,7685	1174,3020	535,6556	881,3994	1171,9644
MSE				3,0153	8,9859	8,6124	0,0167	0,0818	0,0347
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6886	27,9235	12,0088	20,7322	27,7139
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Önem Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**558,1615**	**920,8864**	**1228,2792**	**559,2625**	**922,6430**	**1225,7010**
Üst Bant				565,6718	933,6707	1245,5201	566,7220	935,4260	1242,9551
Alt Bant				550,6512	908,1021	1211,0382	551,8031	909,8599	1208,4469
MSE				1,3468	2,0565	4,7601	0,0035	0,1040	0,1571
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	3,8058	6,5220	8,8031

Satım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Önem Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**409,4267**	**741,4370**	**1024,9864**	**406,3813**	**739,4349**	**997,6908**
Üst Bant				432,9104	777,5886	1079,7165	429,9185	780,0700	1052,0101
Alt Bant				385,9431	696,6806	970,2563	382,8441	698,7998	943,3716
MSE				8,2617	7,0594	309,1900	35,0435	0,4288	94,3187
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6398	27,9235	3,8284	20,7322	27,7139
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Önem Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**416,8618**	**735,7966**	**1003,9612**	**409,3856**	**739,2098**	**1005,7082**
Üst Bant				424,3721	748,5809	1021,2022	416,8451	752,0278	1022,9623
Alt Bant				409,3515	723,0122	986,7202	401,9262	726,3918	988,4541
MSE				20,8006	8,9014	11,8432	8,4998	0,1847	2,8709
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	3,8058	6,5398	8,8031

Tablo 6. Heston Fiyatı, Heston Euler ile Önem Örnekleme ile elde edilmiş Alım ve Satım Opsiyon Fiyatları (TL).

Euler yöntemi ve Önem Örnekleme varyans azaltma yöntemi kullanılarak farklı vadeler ve simülasyon sayılarında elde edilen sonuçlar, Heston Teorik Fiyatları ile karşılaştırılarak incelenmiştir.

Alım opsiyonlarına dair yapılan analizde, Önem Örnekleme yöntemi ile elde edilen opsiyon fiyatları, genellikle Heston Teorik Fiyatlarla uyumlu bulunmuş veya bu fiyatlarla düşük farklılıklar göstermiştir. Simülasyon sayısı arttıkça daralan güven aralıkları, daha yüksek simülasyon hacminin, tahminlerin kesinliğini ve güvenilirliğini artırabileceğini göstermektedir. Ayrıca, Önem Örnekleme yönteminin, ortalama kare hata (MSE) ve standart hata (SE) değerlerini özellikle yüksek simülasyon sayısında, önemli ölçüde düşürdüğü gözlemlenmiştir.

Satım opsiyonlarına yönelik analizde ise, Euler yöntemi kullanılarak elde edilen fiyatlarla Önem Örnekleme yöntemi arasında bazı farklılıklar tespit edilmiştir. Önem Örnekleme yöntemi, bazı durumlarda Heston Teorik Fiyatından daha düşük sonuçlar verse de, bu yöntemle elde edilen MSE ve SE değerlerinin düşüklüğü, tahminlerin güvenilirliğini ve istikrarını desteklemektedir. Aynı zamanda, simülasyon sayısı arttıkça daralan güven aralıkları ve yöntemin sonuçlarının Heston Teorik Fiyatına yakın değerler vermesi Önem Örnekleme yönteminin simülasyon sonuçları üzerinde olumlu bir etki yarattığını göstermektedir.

Genel olarak, Heston modeliyle yapılan simülasyonlarda, Önem Örnekleme varyans azaltma yönteminin hem Alım hem de Satım opsiyonları için Heston Teorik Fiyatlarına yakın ve tutarlı tahminler ürettiği görülmektedir. Bu tutarlılık hem farklı vadeler hemde farklı simülasyon sayılarında gözlemlenmiştir.

3.7.5.4. Tabakalı Örnekleme Simülasyon Sonuçları

Tablo 7'de Tabakalı Örneklemenin uygulamanın sonuçları görülmektedir.

Alım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Tabakalı Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**557,5855**	**925,3181**	**1229,0321**	**558,2960**	**922,0869**	**1224,9247**
Üst Bant				581,0692	965,8677	1283,7622	581,9214	962,3968	1279,3210
Alt Bant				534,1019	884,7685	1174,3020	534,6707	881,7771	1170,5286
MSE				3,0153	8,9859	8,6124	1,0526	0,0545	1,3751
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6886	27,9235	12,0537	20,5662	27,7532
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Tabakalı Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**559,3220**	**922,3204**	**1226,0974**	**558,1615**	**920,8864**	**1228,2792**	**558,5812**	**922,6430**	**1227,2874**
Üst Bant				565,6718	933,6707	1245,5201	566,0488	935,4260	1232,7413
Alt Bant				550,6512	908,1021	1211,0382	551,1135	909,8599	1221,8335
MSE				1,3468	2,0565	4,7601	0,5488	0,1040	1,4162
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	3,8100	6,5220	8,7993
Satım Opsiyonlar: S=7016, K=6900,									
10.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Tabakalı Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**409,4267**	**741,4370**	**1024,9864**	**413,7227**	**734,2265**	**992,2826**
Üst Bant				432,9104	777,5886	1079,7165	437,3480	774,5364	1046,6788
Alt Bant				385,9431	696,6806	970,2563	390,0974	693,9167	937,8864
MSE				8,2617	7,0594	309,1900	2,0211	20,7346	228,6159
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				11,9815	20,6398	27,9235	12,0537	20,5662	27,7532
100.000 Simülasyon									
	Heston Teorik Fiyat			**Euler**			**Tabakalı Örnekleme**		
	T=38 Gün	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**	**T=38 Gün**	**T=81 Gün**	**T=128 Gün**
Opsiyon Fiyatı	**412,3011**	**738,7801**	**1007,4026**	**416,8618**	**735,7966**	**1003,9612**	**411,2172**	**734,8836**	**1005,6113**
Üst Bant				424,3721	748,5809	1021,2022	418,6848	747,6666	1011,0651
Alt Bant				409,3515	723,0122	986,7202	403,7496	722,1005	1000,1574
MSE				20,8006	8,9014	11,8432	1,1747	15,1825	3,2089
SE (SD/SQRT(SiM Sayısı))				3,8318	6,5226	8,7964	3,8100	6,5220	8,7993

Tablo 7. Heston Teorik Fiyatı, Heston Euler ile Tabakalı Örneklem ile elde edilmiş Alım Opsiyon Fiyatları (TL).

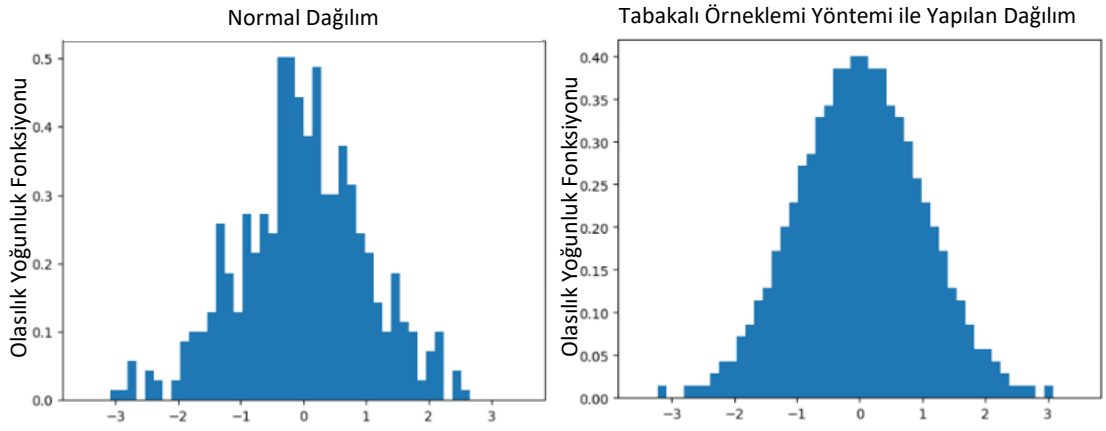
Euler yöntemi ve Tabakalı Örnekleme yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar farklı vadeler ve simülasyon sayılarında, Heston Teorik Fiyatlarla karşılaştırılarak incelenmiştir.

Alım opsiyonlarına yönelik değerlendirmede, Tabakalı Örnekleme yöntemi ile elde edilen opsiyon fiyatlarının genellikle Heston Teorik Fiyatlarına Euler'a kıyasla daha yakın olduğu görülmektedir. Bu durum, Tabakalı Örnekleme yönteminin tahminlerde yüksek doğruluk sağlama potansiyeline sahip olduğunu göstermektedir. Simülasyon sayısı artırıldıkça, güven aralıklarının daralması sonuçların güvenilirliğinin arttığını göstermekte ve ortalama kare hata (MSE) ile standart hata (SE) değerlerinin düşmesi, özellikle yüksek simülasyon hacimlerinde tahminlerin istikrarlılığının da arttığını göstermektedir.

Satım opsiyonları söz konusu olduğunda, Tabakalı Örnekleme yöntemi ile elde edilen sonuçların bazı vadelerde Heston Teorik Fiyatlarla uyumlu olduğu, bazı vadelerde ise bu fiyatlardan sapmalar gösterdiği gözlemlenmiştir. Yine de, bu yöntemle elde edilen sonuçların, güven aralıklarının daralması ve hata değerlerinin azalması yoluyla, sonuçların güvenilirliğini ve istikrarını desteklediği anlaşılmaktadır.

Genel olarak, Heston modeli altında yapılan simülasyonlarda, Tabakalı Örnekleme yönteminin özellikle Alım opsiyonlarında, farklı vadelerde ve farklı simülasyon sayılarında Heston Teorik Fiyatlarına yakın ve tutarlı tahminler üretme potansiyeline sahip olduğu ve sonuçların doğruluğunu artırmada önemli bir rol oynadığı görülmektedir.

Tabakalı örnekleme yöntemi benzer sonuçlar üretmesine rağmen simülasyon sonuçlarındaki standart dağılımdakinden farklıdır ve bu fark şekil 29'da görülmektedir



Şekil 29. Sol: Euler ile Simülasyon Dağılımı. Sağ: Tabakali Örnekleme ile Dağılımdaki İyileşme.

Şekil 29'da açıkça görülebileceği gibi, tabakalı örnekleme, standart Monte Carlo'ya göre aralık boyunca örnekleri çok daha homojen bir şekilde oluşturmaktadır. Tabakalı

örnekleme, örnekleme alanını daha küçük ve yönetilebilir bölümlere ayırmaktadır. Bu, her bölgenin özelliklerinin daha iyi temsil edilmesini sağlamaktadır. Standart Monte Carlo yöntemi rastgele örnekler alırken, bazı bölgeler yeterince temsil edilmeyebilir veya bazı bölgelerden aşırı örnek alınabilir. Tabakalı örnekleme, her bölgeden eşit veya orantılı sayıda örnek alarak bu sorunu çözmektedir. Tabakalı örnekleme, örneklerin tüm alan boyunca dengeli bir şekilde dağılmasını sağlamaktadır. Bu, özellikle heterojen popülasyonlarda veya değişken yoğunluğun farklı olduğu alanlarda önemlidir. Standart Monte Carlo yönteminde, bazı alanlar rastgele olarak aşırı veya yetersiz temsil edilebilmektedir.

3.7.5.5. Simülasyon Sonuçlarının Karşılaştırılması

VAY kullanımı olan ve olmayan simülasyon sonuçların karşılaştırılması Tablo 8'de yer almaktadır. Karşılaştırmalar farklı simülasyon sayısı ve vadeler için Alım ve Satım opsiyonların MSE ve SE değerli üzerinden yapılmaktadır.

T=38 Gün							
	Simülasyon Sayısı	Değerleme Yöntemi	Euler	Zıt Değişkenler	Kontrol Değişkenleri	Önem Örnekleme	Tabakalı Örnekleme
Alım	10.000	MSE	3,0153	0,8624	1,2244	0,0167	1,0526
		SE	11,9815	6,5004	5,3891	12,0088	12,0537
	100.000	MSE	1,3468	0,5980	0,0795	0,0035	0,5488
		SE	3,8318	2,0653	1,6922	3,8058	3,8100
Satım	10.000	MSE	8,2617	2,0399	0,0017	35,0435	2,0211
		SE	11,9815	7,6672	5,2546	3,8284	12,0537
	100.000	MSE	20,8006	2,6153	0,0039	8,4998	1,1747
		SE	3,8318	2,3971	1,6472	3,8058	3,8100
T=81 Gün							
	Simülasyon Sayısı	Değerleme Yöntemi	Euler	Zıt Değişkenler	Kontrol Değişkenleri	Önem Örnekleme	Tabakalı Örnekleme
Alım	10.000	MSE	8,9859	5,2007	0,0362	0,0818	0,0545
		SE	20,6886	11,7085	9,8506	20,7322	20,5662
	100.000	MSE	2,0565	136,2758	0,4161	0,1040	0,1040
		SE	6,5226	3,7232	3,1310	6,5220	6,5220
Satım	10.000	MSE	7,0594	22,2528	200,2404	0,4288	20,7346
		SE	20,6398	12,1007	8,3521	20,7322	20,5662
	100.000	MSE	8,9014	197,0597	0,0008	0,1847	15,1825
		SE	6,5226	3,8547	2,6562	6,5398	6,5220

T=128 Gün							
	Simülasyon Sayısı	Değerleme Yöntemi	Euler	Zıt Değişkenler	Kontrol Değişkenleri	Önem Örnekleme	Tabakalı Örnekleme
Alım	10.000	MSE	8,6124	13,0437	0,4221	0,0347	1,3751
		SE	27,9235	16,9706	14,2886	27,7139	27,7532
	100.000	MSE	4,7601	160,5237	0,0425	0,1571	1,4162
		SE	8,7964	5,3995	4,5084	8,8031	8,7993
Satım	10.000	MSE	309,1900	1141,6384	3,4793	94,3187	228,6159
		SE	27,9235	15,2374	10,7289	27,7139	27,7532
	100.000	MSE	11,8432	2427,8324	33,9843	2,8709	3,2089
		SE	8,7964	4,8709	3,3848	8,8031	8,7993

Tablo 8. Vadelere ve Simülasyon Sayılarına göre Heston Euler ve VAY karşılaştırma Tablosu.

Heston modeli kullanılarak Avrupa tipi opsiyonların fiyatlandırılmasında farklı VAY etkinliği incelenmiştir. İncelenen yöntemler arasında Heston Euler, Önem Örnekleme, Tabakalı Örnekleme, Zıt Değişkenler ve Kontrol Değişkenleri bulunmaktadır. Bu yöntemlerin performansı, 10.000 ve 100.000 simülasyon kullanılarak değerlendirilmiş ve sonuçlar, Heston Karakterisyik fonksiyonu ile hesaplanan teorik fiyat değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Heston Teorik sonuçlarıyla yapılan karşılaştırmada, Euler ve Kontrol Değişkenleri yöntemlerinin Alım opsiyonları için teorik değerlere oldukça yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bu durum, bu yöntemlerin Alım opsiyonlarının fiyatlandırılmasında yüksek bir doğruluk seviyesine ulaştığını göstermektedir. Özellikle, Zıt Değişkenler yöntemi en yüksek opsiyon fiyatını tahmin etmiş olup, bu da bu yöntemin belirli senaryolarda diğerlerine göre daha yüksek bir sapma gösterdiğini işaret etmektedir. Bununla birlikte, ortalama kareler hatası (MSE) değerleri, Önem Örnekleme ve Kontrol Değişkenleri yöntemlerinin en düşük hatalara sahip olduğunu belirtmekte, böylece bu yöntemlerin tahminlerin doğruluğunu önemli ölçüde artırdığı sonucuna varılmaktadır.

Satım opsiyonları bağlamında, Kontrol Değişkenleri yöntemi teorik değere en yakın sonucu verirken, Zıt Değişkenler yöntemi yüksek bir opsiyon fiyatı tahminiyle dikkat çekmiştir. Bu, belirli varyans azaltma yöntemlerinin opsiyon türüne bağlı olarak farklı performanslar sergileyebileceğini göstermektedir.

Simülasyon sayısının artırılması, hem Alım hem de Satım opsiyonları için MSE değerlerinin genel olarak azalmasına ve opsiyon fiyatı tahminlerinin Heston Teorik değerlerine daha yakın hale gelmesine neden olmuştur. Bu, daha fazla simülasyon sayısının tahmin edilen değerlerin doğruluğunu artırdığını ve hata oranlarını azalttığını göstermektedir.

Son olarak, yapılan analiz, farklı varyans azaltma yöntemlerinin, simülasyon sayısının ve farklı vadeler için Heston modeli kullanılarak yapılan opsiyon fiyatlandırma tahminlerinin doğruluğu üzerinde önemli bir etkisi olduğunu ortaya koymuştur. Özellikle, Tablo 8'de yer alan karşılaştırılmalı tablolar incelendiğinde Önem Örnekleme ve Kontrol Değişkenleri yöntemleri, genel olarak düşük MSE ve yakın opsiyon fiyatları ile iyi bir performans sergileyerek, modelin doğruluğunu artırmak ve tahminlerin varyansını azaltmak için etkili yöntemler olarak öne çıkmıştır. Bu bulgular, simülasyon tabanlı değerlendirme yaparken VAY'in rolünü vurgulamaktadır.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Sonuç

Bu çalışma, Heston (1993) modeli ve Varyans Azaltma Yöntemlerinin entegrasyonunu kapsamlı bir şekilde ele almaktadır. Yapılan ulusal literatür incelemesi, stokastik volatilite modelleri ile opsiyon fiyatlandırma ve Varyans Azaltma Yöntemleri alanındaki mevcut yöntemlerin ve uygulamaların kısıtlı olduğu görülmektedir. Yapılan çalışmalarda özellikle, Black-Scholes ve Monte Carlo opsiyon fiyatlandırma modelleri bağlamında Varyans Azaltma Yöntemlerinin tercih edildiği görülmüştür. Ancak, bu konuda yapılan yerel yayınların sayısının da kısıtlı olduğu belirlenmiştir. Bu durum, alandaki araştırmaların genişletilmesine ihtiyaç olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmada, BIST 30 endeksine dayalı opsiyon sözleşmelerinden toplanan verileri kullanarak, Heston modeline özgü kalibre edilen parametre değerleri kullanılarak Varyans Azaltma Yöntemlerinin simülasyon sonuçlarındaki performansı ele alınmıştır. Heston modeli için yapılan kalibrasyon işlemleri sonucu elde edilen IVMSE (Zımni Volatilite Ortalama Kare Hatası) değerleri, modelin piyasa dinamiklerine ne derece uyum sağladığını ortaya koymaktadır. Heston modelinde parametreler arasındaki etkileşim ve bu parametrelerin alabileceği değerlerin, modelin performansını önemli ölçüde etkilediği bilinmektedir. Bu sebeple, bu çalışmada Heston modelinin parametreleri arasındaki etkileşimin simülasyon sürecine olan önemli etkileri dikkate alınmıştır. Simülasyon uygulamasına geçilmeden önce, parametrelerin doğruluğunun test edilmesi, bu nedenle büyük önem taşımaktadır.

Çalışmada, kalibre edilmiş parametreler Mrazek vd. (2017) çalışması ile paralelelik göstermektedir. Mrazek vd. tarafından yürütülen çalışmanın sonucunda Heston parametrelerin kalibrasyon sonucunda piyasaya uyum gösterdiğini vurgulamaktadır. Bu nedenle, stokastik volatilite modellerin kullanımı sonucu opsiyon fiyatlamalarında hata paylarını azaltıldığını belirtilmiştir. Bu doğrultuda Heston modeli ile yapılan simülasyonların Türkiye piyasasındaki tavan ve taban kısıtlamalarını ne kadar etkili bir şekilde yansıtabildiği incelenmiştir. Sonuçlar, kalibrasyon verimliğinden kaynaklı simülasyonların tavan taban bandında kalabilidiği gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada, simülasyon verilerine start veren parametreleri kullanılarak varyans azaltma yöntemlerinin farklı simülasyon sayıları ve vadelerdeki etkinliğini incelemek

amacıyla, her bir Varyans Azaltma Yöntemi için çeşitli simülasyon sayıları ve vadelerde simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların Standart Hata ve Ortalama Kare Hatası (MSE) değerleri hesaplanarak değerlendirilmiştir.

Önem Örnekleme, simülasyonun odaklandığı olasılık dağılımını değiştirerek, daha az olası ancak daha etkili senaryoların örneklenmesi gözlemlenmiştir. Yöntemin, nadir olayların incelendiği durumlarda, simülasyonun doğruluğunu önemli ölçüde artırdığı gözlenmektedir. Elde edilen bulgular, Yön (2015) tarafından sabit volatilite modelinde teorik fiyatlar kullanılarak Önem Örnekleme yöntemi ile varyans azaltma yöntemlerinin etkinliğini ortaya koyan çalışmanın bulgularıyla uyum içindedir.

Tabakalı Örnekleme ise, girdi dağılımını çeşitli tabakalara ayırır ve her birinden eşit örnekler almaktadır ve böylece tüm dağılım aralığının daha iyi temsil edilmesini sağlamaktadır. Böylece, azalan varyans ile birlikte tahmin edilen fiyatın güven aralığında daralma ve standart hata payların düşürüldüğü görülmektedir. Elde edilen bulgular, Bottasso vd. (2023) tarafından Heston (1993) ve Black-Scholes (1973) modelleri kullanılarak yatırım sertifikalarının fiyatlandırılmasında varyans azaltma yöntemlerinin etkinliğini inceleyen çalışmanın bulgularıyla benzerlik göstermektedir.

Zıt Değişkenler yöntemi, zıt korelasyonlu rastgele değişkenler kullanarak simülasyon varyansını azaltmayı amaçlar. Bu yöntem, modelin çıktılarının simetrisini kullanır ve böylece toplam varyansın azaltıldığı sonuçlar üretmektedir. Çalışmada yapılan analizler, Heston modeli simülasyon sonuçları ile Zıt Değişkenler yöntemi kullanılarak elde edilen fiyatlar karşılaştırıldığında, varyans değerlerinde önemli bir düşüş sağlandığını ortaya koymuştur. Williams vd. (2018) tarafından Monte Carlo simülasyonunda Zıt Değişkenler başlıklı çalışmada sunulan sonuçlar, bu çalışmada elde ettiğimiz bulgularla uyumlu olacak şekilde paralellik göstermektedir.

Kontrol Değişkenleri yöntemi ise, model çıktısının varyansını azaltmak için iki farklı model kullanarak ele alınmıştır. Çalışmanın bulgularından elde sonuçlar Kontrol Değişkenleri yönteminin standart hatalarda ve MSE değerlerinde etkili düşüşler sağladığı görülmektedir. Fouque vd. (2007) tarafından hipotetik veriler kullanılarak gerçekleştirilen Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma ile Kontrol Değişkenleri yöntemi çalışması, Avrupa tipi opsiyonlar için elde Varyans Azaltma Yöntemleri (VAY) sonuçları açısından çalışmada elde edilen veriler ile benzerlik göstermektedir.

Sonuç olarak, bu çalışmada Heston Euler Simülasyon modeli aracılığıyla elde edilen Avrupa tipi opsiyonların Alım ve Satım fiyatlarına ilişkin sonuçlar, aynı modelde Varyans Azaltma Yöntemleri uygulandığında elde edilen fiyatlarla karşılaştırıldığında, farklı VAY'lerin çeşitli simülasyon sayıları ve vadelerde Standart Hata ve Ortalama Kare Hatası (MSE) değerlerini istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde azalttığı belirlenmiştir. Simülasyon sayıları arttıkça, tüm yöntemlerin büyük sayılar yasasına göre daha iyi sonuçlar sunduğu gözlemlenmiştir, ancak bu durum Varyans Azaltma Yöntemlerinin simülasyon işlem sürelerini de uzatmıştır. Diğer yandan, düşük simülasyon sayılarında, VAY uygulanmamış simülasyonlara kıyasla, varyansın etkili bir şekilde azalması sonucu tahmin edilen fiyatların güven aralıklarının daraldığı ve standart hata oranlarının düşük olduğu belirlenmiştir.

Elde edilen bulgular, literatürde yapılan çalışmalarla paralellik göstermektedir. Chan vd. (2013) ve Bottasso vd. (2023) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda, Önem Örnekleme, Tabakalı Örnekleme, Zıt Değişkenler ve Kontrol Değişkenleri gibi çeşitli VAY' lar uygulamanın, VAY uygulanmamış opsiyon simülasyon fiyatlarına kıyasla sonuçlarını karşılaştırdığı çalışması, bu çalışmada elde etmiş olduğumuz bulgular ile paralellik göstermektedir.

Çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak, uygulanan Varyans Azaltma Yöntemleri farklı simülasyon sayıları ve farklı vadelerde simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Yöntemlerin karşılaştırılması sonucunda, Alım opsiyonlarında ve vade uzadıkça Önem örnekleme yönteminin etkin sonuçlar verdiği, Satım opsiyonlarında ise Kontrol Değişkenleri yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği ve genel olarak bu iki yöntemin diğer yöntemlerden daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Öneriler

Stokastik volatilite modelleriyle gerçekleştirilen VAY simülasyonları, özellikle türev ürün fiyatlandırma gibi finansal modelleme alanlarında geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Ancak, modelleme sürecinde karşılaşılan karmaşık yapı ve hesaplama yükü, potansiyel matematiksel hata paylarını artırmaktadır. Bu çalışma, VAY uygulamalarındaki karmaşıklığı ele alarak gelecek çalışmalara rehberlik edecek bir çerçeve sunmaktadır.

Çalışmada incelenen VAY yöntemlerinin yanı sıra hibrit yaklaşımların da değerlendirilmesi önerilmektedir. Örneğin, birden fazla varyans azaltma yöntemlerinin kombinasyonu simülasyonların doğruluğunu ve verimliliğini artırabilmektedir.

Risk yönetimi stratejileri bağlamında, finansal kurumlar için kritik olan VAY üzerine yapılan analizler, kurumsal yatırımcıların portföy riskini azaltma ve beklenmedik dalgalanmalara karşı korunma stratejilerini anlamalarına katkı sağlayabilmektedir. Bu alandaki daha fazla araştırma, varyans azaltma yöntemlerin etkin bir şekilde kullanılması için yeni perspektifler sunabilmektedir. Örneğin, Önem Örnekleme gibi etkili varyans azaltma yöntemleri, nadir olaylar için öne çıkmaktadır. Ancak optimal örnekleme dağılımının belirlenmesi zor olabilmektedir. Bu yöntemin optimizasyonu üzerine daha fazla araştırma yapılması, daha etkili bir örnekleme yönteminin geliştirilmesine katkı sağlayabilir.

Bir diğer örnek ise Glasserman (2000) çalışmasıdır. Bu çalışmada, Monte Carlo ile hesaplanan opsiyon fiyatları VAY kullanımın Riske Mağrus Değerlerinin (Value at Risk) hesaplamaları bulunmaktadır. Bu çalışmada kullanılan yöntemlerin stokastik volatilite modellerine uygulanması ise gelecekteki araştırma alanlarından biri olarak açıkta kalmaktadır.

Son olarak, bankalar ile hedge fonları için opsiyon stratejilerinde nasıl etkili bir şekilde VAY kullanılabileceği konusundaki analizler, finansal kurumların opsiyon stratejilerini daha iyi optimize etmelerine yardımcı olabilir. Böylece, finansal piyasalardaki belirsizliklere karşı daha sağlam stratejilerin oluşturulmasına yönelik gelecekteki araştırmalar için bir temel oluşturabilir. Varyans azaltma yöntemleri, finansal modellerin güvenilirliğini artırarak, risk yönetimi stratejilerinin geliştirilmesine ve optimize edilmesine önemli katkılarda bulunabilir. Bu yöntemler, finansal piyasa dinamiklerini daha iyi yansıtabilme potansiyeline sahiptirler ve finans profesyonellerine daha sağlam temellere dayalı kararlar alma imkânı sunabilmektedirler.

KAYNAKLAR

ARABACI, Ö. "Önraporlama Performansı Değerlendirme Kriterleri", Dora Basım Yayın Dağıtım Ltd. Şti., 1. Baskı, 2021.

AROUNA, B. "Robbins-Monro Algorithms and Variance Reduction in Finance", Journal of Computational Finance, Cilt 7(2):35–62, 2004.

AKKAYA, M. "Finansal Risk Yönetimi: Finansal Risk – Modeller- Türev Ürünler - Uygulamalar", Seçkin Yayıncılık, 1. Baskı, 2021.

ANBAR, A. ve ALPER, D. "Bankaların Türev Ürün Kullanım Yoğunluğunu Etkileyen Faktörlerin Belirlenmesi", Muhasebe ve Finansman Dergisi, s. 77-94, 2011.

ANBAR, A. ve ALPER, D. "Yatırım Projeleri", Ekin Basım Yayın Dağıtım, 2009.

BARNETT, R., ZIEGLER, M., BYLEEN, K. ve STOCKER, C. " Finite Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences ", Pearson Education, 14. Baskı, 2019.

BASIK, F.O. "Ansiklopedik Muhasebe ve Finans Terimleri Sözlüğü", İş Bankası Kültür Yayınları, 1. Baskı, 2011.

BELL, D. ve STELLJES, S. "Arbitrage-Free Option Pricing Models", J. Aust. Math. Soc., Cilt 87, s. 145–152, 2009.

BEYAZIT, M.F. "Matlab Uygulamalı Finansal Modelleme: Analitik ve Nümerik Çözümler", Seçkin Yayınevi, 2. Baskı, 2023.

BLACK, F. "Studies of Stock Price Volatility Changes", Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, Washington DC. 177-181,1976.

BLACK, F. ve SCHOLES, M. "The Pricing of Options And Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, Cilt 81(3), s. 637-654, 1973.

BAUSTIAN, F., MRÁZEK, M., POSPÍŠIL, J. ve SOBOTKA, T. "Calibration and simulation of Heston model", Applied Stochastic Models in Business and Industry, Cilt 33 (4), s. 422-442, 2017.

BODIE, Z., KANE, A. ve DEMIR, S. (Eds.). "Yatırımların Temelleri - Essentials of Investments", Nobel Akademik Yayıncılık, 9. Baskı, 2018.

BOYLE, P. P. "Options: A Monte Carlo Approach", Journal of Financial Economics, Cilt 4(3), s. 323-338, 1977.

BROADIE, M. "Pricing And Hedging Volatility Derivatives", The Journal of Derivatives, 2008.

BROADIE, M. ve KAYA, O. "Exact Simulation of Stochastic Volatility and Other Affine Jump Diffusion Processes", Operations Research, Cilt 54, s. 217-231, 2006.

BROWN, R. ve SMITH, J. "Computational Aspects of Option Pricing Using Monte Carlo Methods", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Cilt 55(1), s. 330-349, 2020.

CEYLAN, A. ve KORKMAZ, T. "Finansal Teknikler", Ekin Basım Yayın - Akademik Kitaplar, 8. Baskı, 2014.

COŞKUN, M. "Para ve Sermaye Piyasaları Kurumlar, Araçlar, Analiz", Detay Yayıncılık, Ankara, 2010.

CHIARELLA, C., CRADDOCK, M. ve EL-HASSAN, N. "An Implementation of Bouchouev's Method for a Short Time Calibration of Option Pricing Models", Computational Economics, Cilt 22, s. 113–138, 2003.

COURTAULT, J.-M., KABANOV, Y., BRU, B., CRÉPEL, P., LEBON, I. ve MARCHAND, A. "Louis Bachelier on the Centenary of 'Théorie de la Spéculation'", Mathematical Finance, Cilt 10, s. 339-353, 2000.

CÍSAŘ, R. ve DUFALA, V. "Companies and Derivatives as a Tool to Hedge Their Risk", E+M. Ekonomie a Management, Cilt 13 (2), 2010.

CHAN, N. ve WONG, H.-Y. "Simulation Techniques in Financial Risk Management", Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey, 2006.

CRISOSTOMO, R. "An Analysis of The Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration Using Matlab", Unpublished master's thesis, National Distance Education University (UNED), Madrid, 2014.

COX, J. C., ROSS, S. A., ve RUBINSTEIN, M. "Option pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, Cilt 7(3), s. 229-263, 1979.

COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ve ROSS, S. A. "A Theory of The Term Structure of Interest Rates", Econometrica: Journal of the Econometric Society, s. 385-407, 1985.

ÇAPAR, U. "Ölçü Kuramsal Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş: Finans Uygulamaları", ODTÜ - Akademik Kitaplar, 1. Baskı, 2013.

ÇINAR, M. ve SEVÜKTEKIN, M. "Ekonometrik Zaman Serileri Analizi (Eviews Uygulamalı)", Dora Yayınları, 4. Baskı, 2014.

DAVIS, M. ve ZHAO, Y. "A Study on Euler Discretization for Stochastic Differential Equations", Journal of Applied Mathematics and Computing, Cilt 65(1-2), s. 221-238, 2021.

DEMİREL, E. "Uluslararası Finansal Piyasalar ve Portföy Yönetimi", Paradigma Yayınları, 2018.

DUNN, W. L. ve SHULTIS, J. K. "Varyans Azaltma Teknikleri, Monte Carlo Yöntemlerini Keşfetmek, Elsevier - Akademik Kitaplar, 2. Baskı, 2023.

EULER, L. "Introduction to Analysis of the Infinite", Berlin: Springer, Cilt (2), 1768.

FAMA, E. "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", Journal of Finance, Cilt 25, s. 383-417, 1970.

FAMA, E. F. "The Behaviour of Stock Market Prices", Journal of Business, Cilt 38, s. 34-105, 1965.

FIORENTINI, G., LEÓN, A., ve RUBIO, G. "Estimation and Empirical Performance of Heston's Stochastic Volatility Model: The Case of A Thinly Traded Market", Journal of Empirical Finance, Cilt 9(2), s. 225-255, 2002.

FUSARO, M., GIRIBONE, P. G., ve TISSONE, A. "Analysis of Numerical İntegration Schemes for The Heston Model: A Case Study Based on The Pricing of İnvestment Certificates", Risk Management Magazine, Cilt 18(2), s. 13-26, 2023.

FOURNIE, E., LEBUCHOUX, J. ve TOUZI, N. "Small Noise Expansion and Importance Sampling", Asymptotic Analysis, Cilt 14(4), s. 361–376, 1997.

FOUQUE, J.P. ve TULLIE, T.A. "Variance reduction for Monte Carlo Simulation in a Stochastic Volatility Environment", Quantitative Finance, Cilt 2(1), s. 24, 2002.

FOUQUE, J.P., ve HAN, C.H. "A Martingale Control Variate Method for Option Pricing with Stochastic Volatility", Esaim Probability and Statistics, Cilt 11, 2007.

GLASSERMAN, P. "Monte Carlo Methods in Financial Engineering", Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, 3. Baskı, 2003.

GLASSERMAN, P. ve LIU, Z. "Sensitivity Estimates From Characteristic Functions", Operations Research, Cilt 58(6), s. 1611–1623, 2010.

GLASSERMAN, P., HEİDELBERGER, P., & SHAHABUDDİN, P. "Variance Reduction Techniques for Estimating Value-at-Risk. ", Columbia Business School, Watson Research Center, Cilt 46(10), s. 1349-1364, 2000.

GÜRSAKAL, N., OĞUZLAR, A. ve GÜRSAKAL, S. "Betimsel İstatistik", Dora Yayıncılık, 10. Baskı, 2022.

LAW, A. M. ve KELTON, W. D. "Simulation Modeling and Analysis", McGraw-Hill, 1. Baskı, 2000.

LIU, G., ZHAO, Q. ve GU, G. "A Simple Control Variate Method for Options Pricing with Stochastic Volatility Models", IAENG International Journal of Applied Mathematics, Cilt 45(1), 2015.

HESTON, S. L. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", The Review of Financial Studies, Cilt 6(2), s. 327-343, 1993.

HOMESCU, C. "Local Stochastic Volatility Models: Calibration and Pricing", Journal of Derivatives ve Hedge Funds, Cilt 20(3), s. 185-203, 2014.

HULL, J. "Options, Futures and other Derivatives", Pearson Prentice Hall, 7. Baskı, 2008.

HULL, J. ve WHITE, A. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic", The Journal of Finance, Cilt 42(2), s. 281-300, 1987.

IŞIĞIÇOK, E. "Betimsel İstatistik", Aklüel 16 Basım Yayım Dağıtım, 2. Baskı, 2018.

JOHNSON, R. ve LEE, W. "A Comparative Study of Option Pricing Models", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Cilt 54(4), s. 1449-1478, 2019.

JOURDAIN, B. "Adaptive Variance Reduction Techniques in Finance", Radon Series Comp. Appl. Math., Cilt 8, s. 1-18, 2009.

JONES, M. "Variance Reduction Techniques in Monte Carlo Simulations", Computational Statistics ve Data Analysis, Cilt 100, s. 303-313, 2016.

KAYA, E. "KMÜ Sosyal ve Ekonomik Araştırmalar Dergisi", Cilt 17 (28), s. 1-6, 2015.

KAYA, H. "Spekülasyon ve Hedging Amaçlı Türev Araç Kullanımının Bankaların Faiz Oranı Ve Döviz Kuru Riskine Etkisi: Borsa İstanbul'da İşlem Gören Bankalar Üzerine Bir Uygulama", Yüksek Lisans Tezi, Çağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Mersin, 2020.

KARATZAS, I. ve SHREVE, S. E. "Brownian Motion and Stochastic Calculus", Springer Yayın Evi, 2. Baskı, New York, 2000.

KAYA, O. "Stochastic Volatility in Turkish Equity Markets", Journal of Financial Economics, Cilt 130(2), s. 300-312, 2018.

KOÇ, I. "Konut Finansmanında Yapı Tasarrufu Yöntemi ve Risk Modelleri", Türkiye Bankalar Birliği, 2021.

KROESE, D., TAIMRE, T. ve BOTEV, Z. "Handbook of Monte Carlo Methods", Wiley, Sayfa 639-640, 2011.

KIM, H. ve LEE, J. "Advanced Monte Carlo Techniques in the Heston Model", Journal of Financial Engineering, Cilt 9(1), s. 125-145, 2022.

KORKMAZ, T. "Hisse Senedi Opsiyonları ve Opsiyonlar Fiyatlandırma Modelleri", Ekin Kitapevi, 1. Baskı, 1999.

KORKMAZ, T. "Sermaye Piyasası Temel Konular", Ekin Kitapevi, 2. Baskı, 2018.

KUZU, S. "Financial Engineering and Risk Management", Gazi Kitabevi, 1. Baskı, 2019.

SIMSEK, K.D. "Monte Carlo Simulation in Financial Modeling", Journal of Portfolio Management, 2023.

SØLNA, K., FOUQUE, J.-P., PAPANİCOLAOU, G., ve SİRCAR, R. "Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest-Rate and Credit Derivatives (Mathematics, Finance & Risk). ", Cambridge University Press, 2011

LINDSTRÖM, E., MADSEN, H. ve NIELSEN, J. N. "Statistics for Finance", CRC Press, 2. Baskı, 2015.

LEWIS, A. L. "Option Valuation Under Stochastic Volatility: with Mathematica Code", Wilmott, 1. Baskı, 2002.

LEHAR, A. "GARCH vs. Stochastic Volatility: Option pricing and Risk Management", Journal of Banking ve Finance, Volume 26, Issues 2–3, s. 323-345, 2002.

MIKHAILOV, S. ve NOGEL, U. "Heston's Stochastic Volatility Model İmplementation, Calibration and Some Extensions", Wilmott, s. 74–94, 2003.

MANDELBROT, B. B. "The Variation of Certain Speculative Prices", The Journal of Business 36, Cilt 4, s. 394-419, 1963.

MRÁZEK, M. ve POSPÍŠİL, J. "Calibration and Simulation of Heston Model". Open Mathematics, 2017

MOODLEY, N. "The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code", University of the Witwatersrand, 2005.

NANDI, S. "How Important is the Correlation Between Returns and Volatility in a Stochastic Volatility Model? Empirical Evidence from Pricing and Hedging in the S&P 500 Index Options Market", Journal of Banking & Finance, Volume 22, Issue 5, s. 589-610, 1998.

NATENBERG, S. "Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques", McGraw-Hill Education, 2. Baskı, 2014.

OBERBROECKLİNG L. "A Programming Mathematics Using MATLAB", Academic Press, 1. Baskı, 2021.

OROSI, G. "Empirical Performance of Option Pricing Models with Stochastic Local Volatility", Mathematics Modelling and Applied Computing, Cilt 1(1), s. 10-25, 2010.

OKSENDAL, B. "Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications", Universitext, Springer, 5. Baskı, 1998.

ÖNALAN, Ö. "Stokastik Süreçler", Nobel Akademik Yayıncılık, 1. Baskı, 2022.

ÖNALAN, Ö. "Finans Mühendisliği ve Risk Yönetimi", Nobel Akademik Yayıncılık, 1. Baskı, 2023.

PEÑA, I., RUBIO, G. ve SERNA, G. "Why Do We Smile? On the Determinants of the Implied Volatility Function", Journal of Banking ve Finance, Cilt 23(8), s. 1151-1179, 1999.

PSYCHOYIOS, D. ve SKIADOPOULOS, G. "Volatility Options: Hedging Effectiveness, Pricing and Model Error", Journal of Futures Markets, Cilt 26(1), s. 1-32, 2006.

ROUAH, F. D. "The Heston Model and its Extensions in VBA", Wiley, 1. Baskı, 2015.

ROUAH, F. D. ve VAINBERG, G. "Option Pricing Models and Volatility using Excel – VBA", Wiley, 2007.

ROTHSTEIN, M. "The Comparison of the Trapezoid Rule and the Gaussian Quadrature", Georgia College and State University, 2018.

ROGERS, L.C.G. ve WILLIAMS, D. "Diffusions, Markov Processes and Martingales", Wiley, Vol. 2, New York, 1987.

RUBINSTEIN, R.Y. ve KROESE, D. P. "Simulation and the Monte Carlo Method", John Wiley & Sons, 2016.

SOUKHER, N., DAAFI, B., BOUYAGHROUMNI, J., NAMIR, A. ve LAHMIDI, F. "Variance Reduction and Efficiency of Monte Carlo Simulation in Financial Model", SSN Electronic Journal, 2017.

SCHOENMAKERS, J.G.M., HEEMINK, A.W., PONNAMBALAM, K. ve KLOEDEN, P.E. "Variance Reduction for Monte Carlo Simulation of Stochastic Environmental Models", Applied Mathematical Modelling, Cilt 26(8), s. 785-795, 2002.

SCHOUTENS, W., SIMONS, E. ve TISTAERT, J. "A Perfect Calibration! Now What?", Wilmott Magazine, 2004.

SEPP, A. "Pricing Options on Realized Variance in the Heston Model with Jumps in Returns and Volatility", Journal of Computational Finance, Cilt 11(4), s. 33-70, 2008.

SMITH, J. "Limitations of the Black Scholes Model in Option Pricing: A review", Journal of Derivatives, Cilt 23(1), s. 8-23, 2015.

SMITH, J. "Efficient Computation of Option Prices Under Heston", Journal of Computational Finance, Cilt 23(3), s. 45-78, 2020.

STEIN, E.M. ve STEIN, J.C. "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", The Review of Financial Studies, Cilt 4(4), s. 727-752, 1991.

STILGER, P. S. "Numerical and Empirical Studies of Option Pricing", Doctoral dissertation, The University of Manchester, Manchester, United Kingdom, 2014.

STOLL, H. R. "The Relationship Between Put and Call Option Prices", Journal of Finance, s. 801-824, 1969.

ŞEKER, K., ÇEMBERLİTAŞ, İ. ve ALTUNDAĞ, S. "Opsiyon Sözleşmeleri ve Opsiyon Sözleşmelerinden Doğan Kar/Zararın Hesaplanması", Sosyal Bilimler Akademi Dergisi, Cilt 1(2), s. 120-140, 2018.

ŞENER, C. ve ŞENER, U. "Monte Carlo Simülasyonu ile Hisse Senedi Fiyat Tahminleri", Beykoz Akademi Dergisi, Cilt 7(2), s. 294-306, 2019.

SU, Y. ve FU, M. "Optimal Importance Sampling in Securities Pricing", Journal of Computational Finance, 5(4), s. 27–50, 2002.

ŠOLTÉS, M. "Using Option Strategies in Trading", Procedia - Social and Behavioral Sciences, Volume 110, s. 979-985, 2014.

TALEP, N. "Dynamic Hedging: Managing Vanillia and Exotic Options", John Willey and Sons, New Jersey, 1996.

TUNA, K. ve İSABETLİ, İ. "Finansal Piyasalarda Volatilite ve BİST-100 Örneği", Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, Cilt 27, s. 21-31, 2014.

TULLIE, T. "Variance Reduction for Monte Carlo Simulation of European, American or Barrier Options in a Stochastic Volatility Environment", PhD thesis, North Carolina State University, 2002.

TAYLOR, S. ve WILLIAMS, D. "Monte Carlo Methods in the Heston Model: A Comprehensive Guide", Journal of Computational Finance, Cilt 20(4), s. 1-32, 2017.

WASHBURN, B. ve DIK, M. "Derivation of Black Scholes Equation Using Ito's Lemma", Proceedings of International Mathematical Sciences, Cilt 3(1), s. 38-49, 2021.

WANG, J. ve KIM, S. "Comparing the Performance of the Black Scholes and Heston Models in Different Market Conditions", Quantitative Finance, Cilt 19(7), s. 1167-1180, 2019.

WANG, Z. "Euler Discretization for Solving the Heston Model", Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering, Cilt 18(3), s. 765-780, 2018.

WEBBER, N. "Implementing Models of Financial Derivates Object Oriented Applications with VBA", Wiley, 1. Baskı, 2011.

WILLIAMS, R. ve ZHAO, L. "Antithetic Variates in Monte Carlo Simulation: An Overview", Journal of Simulation, Cilt 12(1), s. 53-65, 2018.

WILMOTT, P. "Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance", John Wiley and Sons, 2. Baskı, 2007.

WILMOTT, P., HOWISON, S. ve DEWYNNE, J. "Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction", Cambridge University Press, 1. Baskı, 1995.

YALINCAK, O. H. "Criticism of the Black Scholes Model: But Why is It Still Used?: (The Answer is Simpler than the Formula)", Derivatives ve Capital Markets Course Notes, New York University, 2012.

YÖN, S. "Sınırlı ve Sınırsız Fiyat Stokastik Süreçleri için Varyansın Düşürülmesiyle Dinamik Opsiyon Fiyatlaması", Yayımlanmış Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015.

Veri Kaynak listesi

https://datastore.borsaistanbul.com/library (Erişim tarihi: 11.07.2023).
https://borsaistanbul.com/tr/sayfa/179/tlref-turk-lirasi-gecelik-referans-faiz-orani (Erişim tarihi: 11.07.2023).

EKLER

EK 1. Gram Charli Düzeltmesi

Gram-Charlier modeli, temel Bist 30'un getirilerinin doğru bir şekilde log-normal dağılmadığı durumlar için kullanılmaktadır. Çarpıklık ve basıklığı dahil ederek, Black-Scholes modeli Bist 30'un özelliklerini daha iyi yakalayabilir ve daha doğru opsiyon fiyatlandırması sağlayabilmektedir.

Gram-Charlier modeli, Black-Scholes formülünü çarpıklık ve basıklık için düzeltme terimleri ekleyerek değiştirir ve şu şekilde ifade edilebilmektedir:

$$GramCharlie = BlackScholes_{\text{Alım}} + \text{ düzeltme terimleri}$$

Düzeltme terimleri, Bist 30'un getirilerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) olan Gram-Charlier genişlemesinden türetilmektedir.

Gram-Charlier serileri, aşağıdaki formda genişlemelerdir:

$$f(\boldsymbol{x}) = \phi(a, b; \boldsymbol{x}) \cdot \left[1 + c_1 He_1\left(\frac{x-a}{b}\right) + c_2 He_2\left(\frac{x-a}{b}\right) + \cdots\right]$$

Burada

$$\phi(a, b; x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2b^2}(x-a)^2}$$

normal yoğunluk fonksiyonudur ve He_kk dereceden Hermite polinomudur.

Bu ifade içinde köşeli parantezler içindeki terim, $f(x)/\phi(x)$ oranı için ortogonal polinom genişlemesidir. Verilen rastgele bir fonksiyon için genişleme, $f(x)$ 'nin gerçek değerine yakınsayabilir veya yakınsamayabilir. Sonuç, $a, b, c_0, \ldots, c$ gibi parametrelerle parametrize edilen bir dağılım ailesidir.

Black-Scholes modelinin Gram-Charlier serileri ile genişletilmesi, modelin dayanak varlığın getirilerinin normal olmayan dağılımlarını dikkate almasına olanak tanımaktadır. Bu, özellikle çarpıklık ve basıklığın önemli olduğu piyasalarda daha doğru opsiyon fiyatlandırması sağlayabilmektedir.

Stokastik volatilite modellerinde ise, çarpıklık, dayanak varlık fiyatını ve volatilitesini etkileyen süreçler arasında korelasyon oluşturularak veya dayanak varlık fiyatını yönlendiren stokastik sürece sıçramalar eklenerek ortaya konulmaktadır.

Heston modelinin parametreleri, model tarafından üretilen opsiyon fiyatlarından elde edilen zımni volatilitelerde bir gülümseme veya çarpıklık oluşturacak şekilde çarpıklık

ve basıklığı yansıtabilmektedir. Bu özellik, Heston modelini en yaygın kullanılan stokastik volatilite modeli yapmaktadır. (Rouah vd., 2007: 127)

EK 2. Heston Modele Ito's Lema

Ito'nun Leması, Heston modeli gibi stokastik süreçlerin fonksiyonlarının değişimini hesaplarken kullanılmaktadır. Heston modeli, dayanak varlık fiyatının (*St*) ve volatilitesinin (*Vt*) stokastik dinamiklerini açıklar ve bu modelde Ito'nun Leması, bu süreçlerin fonksiyonlarının değişimini hesaplamada kullanılmaktadır. Heston modeline Ito'nun Leması'nın uygulanması aşağıdaki gibidir:

Heston modelindeki temel diferansiyel denklemler şunlardır:

1. Dayanak varlık fiyatı dinamiği: $dSt=\mu Stdt+VtStdW1$
2. Volatilite dinamiği: $dVt=\kappa(\theta-Vt)dt+\sigma VtdW2$

Burada:

- *St*, zaman *t* deki dayanak varlık fiyatını temsil etmektedir.
- *Vt*, zaman *t* deki volatiliteyi temsil etmektedir.
- μ, dayanak varlık fiyatının getiri oranını temsil etmektedir.
- κ, volatilitenin ortalama değere geri dönme hızını temsil etmektedir.
- θ, ortalama volatiliteyi temsil etmektedir.
- σ, volatilitenin dalgalanma miktarını temsil etmektedir.
- $dW1$ ve $2dW2$, Wiener süreçleridir (Brownian motion).

Ito'nun Leması'nı kullanarak, örneğin, bir opsiyon fiyatının (C_t) volatilite ve dayanak varlık fiyatındaki değişikliklerle nasıl değiştiğini hesaplamak istediğinizi varsayılmaktadır. Bu, $dC_t=f(St,Vt)$ fonksiyonunu incelediğiniz anlamına gelmektedir.

$$dC_t = ve\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial f}{\partial V_t}dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(dS_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}(dV_t)$$

$$= ve\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial V_t}\kappa(\theta - V_t)\right)dt$$

$$ve + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sqrt{V_t}S_t dW_1 + \frac{\partial f}{\partial V_t}\sigma\sqrt{V_t}dW_2$$

$$ve + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}V_t S_t^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}\sigma^2 V_t dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t\,\partial V_t}\sqrt{V_t}S_t dt$$

Bu ifadeyi düzenlendiğinde:

$$dC_t = ve\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial V_t}\kappa(\theta - V_t)\right)dt$$

$$ve + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sqrt{V_t}S_t dW_1 + \frac{\partial f}{\partial V_t}\sigma\sqrt{V_t}dW_2$$

$$ve + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}V_t S_t^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}\sigma^2 V_t dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t\,\partial V_t}\sqrt{V_t}S_t dt$$

Bu türevlerin her biri, *St* ve*Vt* süreçlerinin dinamiklerini kullanarak hesaplanabilinmektedir. Böylece, dC_t'nin nasıl hesaplanacağını belirleyebilinmektedir. Her bir terim, d*W*1 ve *dW*2 gibi Wiener süreçlerinin dönüşlerine bağlı olmaktadır.

EK 3. Karakteristik Fonksiyon – Phyton kodu

```
import numpy as np
import cmath


# Opsiyon ve piyasa parametreleri
S0 = 7016.34    # Başlangıç dayanak varlık fiyatı
K = 6900       # Kullanım fiyatı (strike price)
T = 0.1397          # Vade süresi yıllar olarak (Maturity in years)
r = 0.0319      # Risksiz faiz oranı (Annual risk-free rate)
q = 0          # Temettü verimi (Dividend yield), bu örnekte 0

# Heston modeli parametreleri
kappa = 2.013    # Volatilitenin ortalamaya dönüş hızı (Speed of mean reversion for the volatility)
theta = 1         # Uzun vadeli volatilitenin ortalama seviyesi (Long-term mean level of volatility)
sigma = 2       # Volatilitenin volatilitesi (Volatility of volatility)
v0 = 0.131       # Başlangıçta varsayılan volatilite (Initial level of volatility)
rho = -0.776    # Dayanak varlık getirisi ile volatilitenin korelasyonu (Correlation between stock return and volatility)
lambda_ = 0          # Fiyat atlamalarının yoğunluğu için bir parametre, bu örnekte kullanılmamıştır (Jump intensity, not used in this example)

# Entegrasyon için Lphi alt band ve Ophi üst band
Lphi = 0.0001
Uphi = 100
N = 100000


#Parametre hesaplamalrı
def heston_prob(phi, kappa, theta, lambda_, rho, sigma, tau, K, S, r, q, v0, Pnum):
    x = np.log(S)
    i = complex(0, 1)
    a = kappa * theta
    u = 0.5 if Pnum == 1 else -0.5
    b = kappa + lambda_ - rho * sigma if Pnum == 1 else kappa + lambda_
    d = cmath.sqrt((rho * sigma * phi * i - b)**2 - sigma**2 * (2 * u * phi * i - phi**2))
    g = (b - rho * sigma * phi * i + d) / (b - rho * sigma * phi * i - d)
    G = (1 - g * cmath.exp(d * tau)) / (1 - g)
```

```
    C = (r - q) * phi * tau * i + a / sigma**2 * ((b - rho * sigma * phi * i + d) * tau - 2 * cmath.log(G))
    D = (b - rho * sigma * phi * i + d) / sigma**2 * ((1 - cmath.exp(d * tau)) / (1 - g * cmath.exp(d * tau)))
    # Karakteristik fonksiyonu hesaplıyoruz
    f = cmath.exp(C + D * v0 + phi * np.log(S) * i)

    return np.real(cmath.exp(-i * phi * np.log(K)) * f / i / phi)

# Heston modelini kullanarak opsiyon fiyatını hesaplayan fonksiyon
def heston_price_trapz(kappa, theta, lambda_, rho, sigma, T, K, S, r, q, v0, Lphi, Uphi, N):
    # Entegrasyon için gerekli parametreler
    dphi = (Uphi - Lphi) / (N - 1)
    phi = np.linspace(Lphi, Uphi, N)
    W = np.empty(N)
    W[0] = W[-1] = 0.5 * dphi
    W[1:-1] = dphi

    # P1 ve P2 için entegrasyon yapılıyor
    int1 = np.array([heston_prob(p, kappa, theta, lambda_, rho, sigma, T, K, S, r, q, v0, 1) for p in phi]) * W
    int2 = np.array([heston_prob(p, kappa, theta, lambda_, rho, sigma, T, K, S, r, q, v0, 2) for p in phi]) * W

    # Entegrasyon sonuçları toplanıyor
    I1 = np.sum(int1)
    I2 = np.sum(int2)

    # Opsiyon fiyatları hesaplanıyor
    HestonC = S * np.exp(-q * T) * (0.5 + 1 / np.pi * I1) - K * np.exp(-r * T) * (0.5 + 1 / np.pi * I2)
    HestonP = HestonC - S * np.exp(-q * T) + K * np.exp(-r * T)

    return HestonC, HestonP

# Opsiyon fiyatlarını hesaplayalım
HestonC, HestonP = heston_price_trapz(kappa, theta, lambda_, rho, sigma, T, K, S0, r, q, v0, Lphi, Uphi, N)
print(f"Heston modeli ile hesaplanan Call opsiyon fiyatı: {HestonC}")
print(f"Heston modeli ile hesaplanan Put opsiyon fiyatı: {HestonP}")
```

EK 4. Euler Heston - Phyton Kodu

```
import numpy as np
# Opsiyon ve piyasa parametreleri
S_0 = 7016.34    # Başlangıç dayanak varlık fiyatı
K = 6900        # Kullanım fiyatı (strike price)
T = 0.1397          # Vade süresi yıllar olarak (Maturity in years)
r = 0.0319      # Risksiz faiz oranı (Annual risk-free rate)
q = 0           # Temettü verimi (Dividend yield), bu örnekte 0

# Heston modeli parametreleri
kappa = 2.013    # Volatilitenin ortalamaya dönüş hızı (Speed of mean reversion for the volatility)
theta = 1         # Uzun vadeli volatilitenin ortalama seviyesi (Long-term mean level of volatility)
sigma = 2       # Volatilitenin volatilitesi (Volatility of volatility)
v_0 = 0.131      # Başlangıçta varsayılan volatilite (Initial level of volatility)
rho = -0.776    # Dayanak varlık getirisi ile volatilitenin korelasyonu (Correlation between stock return and volatility)
lambda_ = 0          # Fiyat atlamalarının yoğunluğu için bir parametre, bu örnekte kullanılmamıştır (Jump intensity, not used in this example)

# Feller Koşulu'nun kontrol -> assert (2 * kappa * theta) > (sigma ** 2),


simulasyon_sayısı = 100000   # Monte Carlo simülasyonu için toplam senaryo sayısı
adım_sayısı = 1000           # Toplam zaman adımı sayısı


def heston_euler_simulasyon(S_0, K, r, v_0, T, rho, kappa, theta, sigma, simulasyon_sayısı, adım_sayısı):
    dt = T / adım_sayısı  # Her bir zaman adımı boyutu
    S = np.zeros((simulasyon_sayısı, adım_sayısı))
    v = np.zeros((simulasyon_sayısı, adım_sayısı))

    # Başlangıç değerleri
    S[:, 0] = S_0
    v[:, 0] = v_0

    # Cholesky Ayrışımı için matris
    L = np.array([[1, 0], [rho, np.sqrt(1 - rho**2)]])

    # Simülasyon döngüsü
    for t in range(1, adım_sayısı):
        z = np.random.normal(0, 1, (simulasyon_sayısı, 2))
        z = z @ L.T  # Cholesky ayrışımı uygulanıyor

        zs = z[:, 0]
```

```
        zv = z[:, 1]

        # Euler ayrıklaştırması ile varyansın güncellenmesi
        v[:, t] = v[:, t-1] + kappa * (theta - np.maximum(0, v[:, t-1])) * dt + sigma *
np.sqrt(np.maximum(0, v[:, t-1])) * np.sqrt(dt) * zv
        v[:, t] = np.maximum(0, v[:, t])  # Negatif olmayan varyans - Truncation

        # Euler ayrıklaştırması ile endeks fiyatının güncellenmesi
        S[:, t] = S[:, t-1] * np.exp((r - 0.5 * v[:, t-1]) * dt + np.sqrt(v[:, t-1] * dt) * zs)

    return S, v


def european_option_price(S, K, r, T, option_type='call'):
    if option_type == 'call':
        payoff = np.maximum(S[:, -1] - K, 0)
    elif option_type == 'put':
        payoff = np.maximum(K - S[:, -1], 0)

    return np.exp(-r * T) * np.mean(payoff)


# Heston modeli ile simülasyon yapılıyor
S, v = heston_euler_simulasyon(S_0, K, r, v_0, T, rho, kappa, theta, sigma,
simulasyon_sayısı, adım_sayısı)


call_price = european_option_price(S, K, r, T, option_type='call')
std_dev_call = np.std(S[:, -1])

Ust_Band_call = call_price + 1.96 * std_dev_call / np.sqrt(simulasyon_sayısı)
Alt_Band_call = call_price - 1.96 * std_dev_call / np.sqrt(simulasyon_sayısı)

put_price = european_option_price(S, K, r, T, option_type='put')
std_dev_put = np.std(S[:, -1])

Ust_Band_put = put_price + 1.96 * std_dev_put / np.sqrt(simulasyon_sayısı)
Alt_Band_put = put_price - 1.96 * std_dev_put / np.sqrt(simulasyon_sayısı)

print(f"Call Opsiyon Fiyatı: {call_price:.5f}")
print(f"Call Opsiyon Güven Aralığı: Üst Band: {Ust_Band_call:.5f} - Alt Band:
{Alt_Band_call:.5f}")
print(f"Call Standart Sapma: {std_dev_call:.5f}")


print(f"Put Opsiyon Fiyatı: {put_price:.5f}")
print(f"Put Opsiyon Güven Aralığı:  Üst Band: {Ust_Band_put:.5f} - Alt Band:
{Alt_Band_put:.5f}")
```

```
print(f"Put Standart Sapma: {std_dev_put:.5f}")
```

EK 5. Zıt Değişkenler VAY – Phyton Kodu

```
import numpy as np

# Zıt Değişkenler (Antithetic)
def heston_simulasyonu_euler_zit(S0, r, v0, T, K, rho, kappa, theta, xi, num_simulasyon, num_adim):
    dt = T / num_adim
    S = np.zeros((num_simulasyon, num_adim))
    S_ZIT = np.zeros((num_simulasyon, num_adim))
    v = np.zeros((num_simulasyon, num_adim))

    S[:, 0] = S0
    S_ZIT[:, 0] = S0
    v[:, 0] = v0

    for t in range(1, num_adim):
        Z1 = np.random.normal(0, 1, num_simulasyon)
        Z2 = rho * Z1 + np.sqrt(1 - rho ** 2) * np.random.normal(0, 1, num_simulasyon)

        v[:, t] = v[:, t-1] + kappa * (theta - np.maximum(0, v[:, t-1])) * dt + xi * np.sqrt(np.maximum(0, v[:, t-1])) * np.sqrt(dt) * Z1
        v[:, t] = np.maximum(0, v[:, t])

        S[:, t] = S[:, t-1] * np.exp((r - 0.5 * v[:, t-1]) * dt + np.sqrt(v[:, t-1] * dt) * Z2)
        S_ZIT[:, t] = S_ZIT[:, t-1] * np.exp((r - 0.5 * v[:, t-1]) * dt - np.sqrt(v[:, t-1] * dt) * Z2)

    call_odemesi = np.maximum(S[:, -1] - K, 0)
    put_odemesi = np.maximum(K - S[:, -1], 0)

    call_odemesi_ZIT = np.maximum(S_ZIT[:, -1] - K, 0)
    put_odemesi_ZIT = np.maximum(K - S_ZIT[:, -1], 0)

    call_fiyati = np.exp(-r * T) * np.mean((call_odemesi + call_odemesi_ZIT) / 2)
    put_fiyati = np.exp(-r * T) * np.mean((put_odemesi + put_odemesi_ZIT) / 2)


    StdSapma_call = np.std(call_odemesi)
    StdSapma_put = np.std(put_odemesi)

    return call_fiyati, put_fiyati, MSE_call, MSE_put, StdSapma_call, StdSapma_put

# Opsiyon ve piyasa parametreleri
S0 = 7016.34    # Başlangıç hisse senedi fiyatı
```

```
K = 6900        # Kullanım fiyatı (strike price)
T = 0.4685      # Vade süresi yıllar olarak (Maturity in years)
r = 0.0319      # Risksiz faiz oranı (Annual risk-free rate)
q = 0           # Temettü verimi (Dividend yield), bu örnekte 0

# Heston modeli parametreleri
kappa = 2.013   # Volatilitenin ortalamaya dönüş hızı (Speed of mean reversion for the volatility)
theta = 1       # Uzun vadeli volatilitenin ortalama seviyesi (Long-term mean level of volatility)
xi = 2          # Volatilitenin volatilitesi (Volatility of volatility)
v0 = 0.131      # Başlangıç'ta varsayılan volatilite (Initial level of volatility)
rho = -0.776    # Hisse senedi getirisi ile volatilitenin korelasyonu (Correlation between stock return and volatility)
lambda_ = 0     # Fiyat atlamalarının yoğunluğu için bir parametre, bu örnekte kullanılmamıştır (Jump intensity, not used in this example)


num_simulasyon = 10000
num_adim = 1000

# Opsiyon fiyatlarını, MSE ve Std Sapmayı hesapla
call_fiyati, put_fiyati, MSE_call, MSE_put, StdSapma_call, StdSapma_put = heston_simulasyonu_euler_zit(S0, r, v0, T, K, rho, kappa, theta, xi, num_simulasyon, num_adim)

# Alım için Güven Aralığı
Z_değeri = 1.96  # %95 güven düzeyi için
CI_call = Z_değeri * StdSapma_call / np.sqrt(num_simulasyon)
Ust_Bant_call = call_fiyati + CI_call
Alt_Bant_call = max(0, call_fiyati - CI_call)  # Negatif fiyat olmaması için kontrol edilir

# Satım için Güven Aralığı
CI_put = Z_değeri * StdSapma_put / np.sqrt(num_simulasyon)
Ust_Bant_put = put_fiyati + CI_put
Alt_Bant_put = max(0, put_fiyati - CI_put)  # Negatif fiyat olmaması için kontrol edilir

# Sonuçları Yazdır
print(f"Alım Opsiyonu Fiyatı: {call_fiyati:.5f}")
print(f"Alım Opsiyonu için Üst Sınır: {Ust_Bant_call:.5f}")
print(f"Alım Opsiyonu için Alt Sınır: {Alt_Bant_call:.5f}")
print(f"Alım Opsiyonu Ödemelerinin Standart Sapması: {StdSapma_call:.5f}")


print(f"Satım Opsiyonu Fiyatı: {put_fiyati:.5f}")
print(f"Satım Opsiyonu için Üst Sınır: {Ust_Bant_put:.5f}")
print(f"Satım Opsiyonu için Alt Sınır: {Alt_Bant_put:.5f}")
print(f"Satım Opsiyonu Ödemelerinin Standart Sapması: {StdSapma_put:.5f}")
```

EK 6. Kontrol Değişkenleri VAY – Phyton Kodu

```
# Kontrol Degiskenler

import numpy as np
import scipy.stats as stats

def heston_simulasyonu(S0, V0, r, kappa, theta, xi, rho, T, num_simulasyon, num_adim):
    dt = T / num_adim
    S_yollari = np.zeros((num_simulasyon, num_adim))
    V_yollari = np.zeros((num_simulasyon, num_adim))
    S_yollari[:, 0] = S0
    V_yollari[:, 0] = V0

    for t in range(1, num_adim):
        Z1 = np.random.normal(size=num_simulasyon)
        Z2 = rho * Z1 + np.sqrt(1 - rho**2) * np.random.normal(size=num_simulasyon)
        V_yollari[:, t] = np.maximum(V_yollari[:, t-1] + kappa * (theta - V_yollari[:, t-1]) *
dt + xi * np.sqrt(V_yollari[:, t-1]) * np.sqrt(dt) * Z2, 0)
        S_yollari[:, t] = S_yollari[:, t-1] * np.exp((r - 0.5 * V_yollari[:, t-1]) * dt +
np.sqrt(V_yollari[:, t-1]) * np.sqrt(dt) * Z1)

    return S_yollari, V_yollari

def siyah_scholes_fiyati(S, K, T, r, sigma, opsiyon_turu='alım'):
    sigma = max(sigma, 1e-5)  # Sıfıra bölme hatasından kaçınmak için
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    if opsiyon_turu == 'alım':
        return S * stats.norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * stats.norm.cdf(d2)
    else:
        return K * np.exp(-r * T) * stats.norm.cdf(-d2) - S * stats.norm.cdf(-d1)


def heston_kontrol_degiskenleri(S0, K, T, r, V0, kappa, theta, xi, rho, num_simulasyon,
num_adim, opsiyon_turu='alım'):
    S_yollari, V_yollari = heston_simulasyonu(S0, V0, r, kappa, theta, xi, rho, T,
num_simulasyon, num_adim)

    son_S = S_yollari[:, -1]
    son_V = V_yollari[:, -1]

    if opsiyon_turu == 'alım':
        heston_odemeleri = np.maximum(son_S - K, 0)
    else:
        heston_odemeleri = np.maximum(K - son_S, 0)
```

```
    bs_odemeleri = [siyah_scholes_fiyati(S0, K, T, r, np.sqrt(v), opsiyon_turu) for v in
son_V]

    beklenen_Black Scholes_odemesi = np.mean(bs_odemeleri)

    kovaryans = np.cov(heston_odemeleri, bs_odemeleri)[0, 1]
    bs_varyans = np.var(bs_odemeleri)

    c = -kovaryans / bs_varyans

    ayarlanmis_odemeler = heston_odemeleri + c * (bs_odemeleri -
beklenen_bs_odemesi)

    opsiyon_fiyat_tahmini = np.exp(-r * T) * np.mean(ayarlanmis_odemeler)

    std_sapma = np.std(ayarlanmis_odemeler)
    mse = np.mean((ayarlanmis_odemeler - opsiyon_fiyat_tahmini) ** 2)

    guven_araligi = 0.95
    serbestlik_derecesi = num_simulasyon - 1
    alpha = 1 - guven_araligi
    ci_yari_genislik = stats.t.ppf(1 - alpha / 2, serbestlik_derecesi) * std_sapma /
np.sqrt(num_simulasyon)
    alt_sinir = opsiyon_fiyat_tahmini - ci_yari_genislik
    ust_sinir = opsiyon_fiyat_tahmini + ci_yari_genislik

    return opsiyon_fiyat_tahmini, alt_sinir, ust_sinir, std_sapma, mse

# Modeller için Parametreler
S0 = 7016.34
K = 6900
T = 0.4685
r = 0.0319
q = 0

kappa = 2.013
theta = 1
xi = 2
V0 = 0.131
rho = -0.776

num_simulasyon = 10000  # simülasyon sayısı
num_adim = 1000  # her bir yol için adım sayısı

# Alım opsiyonu için istatistiklerin hesaplanması
alim_opsiyonu_istatistikleri = heston_kontrol_degiskenleri(S0, K, T, r, V0, kappa, theta,
xi, rho, num_simulasyon, num_adim, opsiyon_turu='alım')
```

```
print(f"Alım opsiyonu istatistikleri: Fiyat: {alim_opsiyonu_istatistikleri[0]}, Güven Aralığı: ({alim_opsiyonu_istatistikleri[1]}, {alim_opsiyonu_istatistikleri[2]}), Std Sapma: {alim_opsiyonu_istatistikleri[3]}, MSE: {alim_opsiyonu_istatistikleri[4]}")

# Satım opsiyonu için istatistiklerin hesaplanması
satim_opsiyonu_istatistikleri = heston_kontrol_degiskenleri(S0, K, T, r, V0, kappa, theta, xi, rho, num_simulasyon, num_adim, opsiyon_turu='put')
print(f"Satım opsiyonu istatistikleri: Fiyat: {satim_opsiyonu_istatistikleri[0]}, Güven Aralığı: ({satim_opsiyonu_istatistikleri[1]}, {satim_opsiyonu_istatistikleri[2]}), Std Sapma: {satim_opsiyonu_istatistikleri[3]}, MSE: {satim_opsiyonu_istatistikleri[4]}")
```

EK 7. Önem Örnekleme VAY – Phyton Kodu

```
import numpy as np
# Önem Örn. (Importance)
# Opsiyon ve piyasa parametreleri
S0 = 7016.34    # Başlangıç hisse senedi fiyatı
K = 6900        # Kullanım fiyatı (strike price)
T = 0.4685      # Vade süresi yıllar olarak (Maturity in years)
r = 0.0319      # Risksiz faiz oranı (Annual risk-free rate)
q = 0           # Temettü verimi (Dividend yield), bu örnekte 0

# Heston modeli parametreleri
kappa = 2.013   # Volatilitenin ortalamaya dönüş hızı (Speed of mean reversion for the volatility)
theta = 1       # Uzun vadeli volatilitenin ortalama seviyesi (Long-term mean level of volatility)
xi = 2          # Volatilitenin volatilitesi (Volatility of volatility)
v0 = 0.131      # Başlangıç'ta varsayılan volatilite (Initial level of volatility)
rho = -0.776    # Dayanak varlık getirisi ile volatilitenin korelasyonu (Correlation between stock return and volatility)
lambda_ = 0     # Fiyat atlamalarının yoğunluğu için bir parametre

M = 1000        # adım sayısı
I = 10000       # simülasyon sayısı
dt = T / M      # time increment

# Simülasyon Set-up
# np.random.seed(1000)
Z = np.random.standard_normal((M + 1, I, 2))
S = np.zeros((M + 1, I))
v = np.zeros((M + 1, I))
S[0] = S0
v[0] = v0
h = np.zeros((M + 1, I))

for t in range(1, M + 1):
```

```
    Z1 = Z[t, :, 0]
    Z2 = Z[t, :, 1]
    h[t] = -1 / S[t-1] * np.sqrt(v[t-1])  # bu, h için yer tutucu bir değerdir
    S[t] = S[t-1] * np.exp((r - 0.5 * v[t-1] - np.sqrt(v[t-1]) * h[t-1]) * dt + np.sqrt(v[t-1] *
dt) * Z1)
    v[t] = v[t-1] + kappa * (theta - v[t-1]) * dt - np.sqrt(v[t-1]) * xi * rho * h[t-1] * dt + xi
* np.sqrt(v[t-1] * dt) * (rho * Z1 + np.sqrt(1 - rho**2) * Z2)
    v[t] = np.maximum(0, v[t])  # Negatif olmayan varyans - Truncation

# Radon-Nikodym türeviden hesaplama
HT = np.exp(np.sum(h[1:] * np.sqrt(dt) * Z[1:, :, 0] - 0.5 * h[1:]**2 * dt, axis=0))

# Önem örnekleme ile opsiyon fiyatlandırması
P = np.maximum(S[-1] - K, 0)  # Avrupa tipi alım opsiyonu ödemesi
P_discounted = np.exp(-r * T) * P  # ödemenin iskonto edilmesi

# Yeni ölçü altında opsiyon fiyatı
option_price = np.mean(P_discounted * HT)

print(f"Opsiyon Fiyatı: {option_price:.4f}")

num_simulations = I

# Avrupa tipi alım opsiyonu istatistikleri
call_price = option_price  # 'option_price' olarak hesaplama
call_std_dev = np.std(S[-1])  # Son dayanak varlık fiyatının standart sapması

call_confidence_interval = 1.96 * call_std_dev / np.sqrt(num_simulations)
Ust_Band_call = call_price + call_confidence_interval
Alt_Band_call = max(0, call_price - call_confidence_interval)  # Alt bant sıfırın altına
inmemeli

# Satım opsiyonu için önce ödemeyi hesaplamamız gerekiyor.
P_put = np.maximum(K - S[-1], 0)  # Avrupa tipi satım opsiyonu ödemesi
P_discounted_put = np.exp(-r * T) * P_put  # ödemenin iskonto edilmesi
put_price = np.mean(P_discounted_put * HT)  # Yeni ölçü altında opsiyon fiyatı için
satım opsiyonu

put_std_dev = np.std(S[-1])  # Son dayanak varlık fiyatının standart sapması

put_confidence_interval = 1.96 * put_std_dev / np.sqrt(num_simulations)
Ust_Band_put = put_price + put_confidence_interval
Alt_Band_put = max(0, put_price - put_confidence_interval)  # Alt bant sıfırın altına
inmemeli

# istatistikler
print(f"Alım Opsiyonu Fiyatı: {call_price:.5f}")
```

```
print(f"Alım Opsiyonu Güven Aralığı: Üst Bant: {Ust_Band_call:.5f} - Alt Bant: {Alt_Band_call:.5f}")
print(f"Alım Opsiyonu Standart Sapma: {call_std_dev:.5f}")


print(f"Satım Opsiyonu Fiyatı: {put_price:.5f}")
print(f"Satım Opsiyonu Güven Aralığı: Üst Bant: {Ust_Band_put:.5f} - Alt Bant: {Alt_Band_put:.5f}")
print(f"Satım Opsiyonu Standart Sapma: {put_std_dev:.5f}")
```

EK 8. Tabakalı Örnekleme VAY – Phyton Kodu

```
import numpy as np

def heston_simulation_euler_stratified(S_0, K, r, v_0, T, rho, kappa, theta, xi,
num_simulations, num_steps, num_bins):
dt = T / num_steps
S = np.zeros((num_simulations, num_steps))
v = np.zeros((num_simulations, num_steps))
S[:, 0] = S_0
v[:, 0] = v_0
NB = num_simulations // num_bins  # Number of samples per bin

for t in range(1, num_steps):
for i in range(num_bins):
z1 = np.random.normal(0, 1, NB)
z2 = rho * z1 + np.sqrt(1 - rho * rho) * np.random.normal(0, 1, NB)

v[i*NB:(i+1)*NB, t] = v[i*NB:(i+1)*NB, t-1] + kappa * (theta - np.maximum(0,
v[i*NB:(i+1)*NB, t-1])) * dt + xi * np.sqrt(np.maximum(0, v[i*NB:(i+1)*NB, t-1])) *
np.sqrt(dt) * z2
v[i*NB:(i+1)*NB, t] = np.maximum(0, v[i*NB:(i+1)*NB, t])

S[i*NB:(i+1)*NB, t] = S[i*NB:(i+1)*NB, t-1] * np.exp((r - 0.5 * v[i*NB:(i+1)*NB, t-
1]) * dt + np.sqrt(v[i*NB:(i+1)*NB, t-1] * dt) * z1)

return S, v

def option_price(S, K, r, T, option_type='call'):
if option_type == 'call':
payoff = np.maximum(S[:, -1] - K, 0)
elif option_type == 'put':
payoff = np.maximum(K - S[:, -1], 0)
return np.exp(-r * T) * np.mean(payoff)

# Opsiyon ve piyasa parametreleri
S_0 = 7016.34    # Başlangıç hisse senedi fiyatı
```

```
K = 6800        # Kullanım fiyatı
T = 1           # Vade süresi yıllar olarak
r = 0.0319      # Risksiz faiz oranı
q = 0           # Temettü verimi, bu örnekte 0

# Heston modeli parametreleri
kappa = 2.013   # Volatilitenin ortalama dönüş hızı
theta = 1       # Uzun vadeli volatilitenin ortalama seviyesi
xi = 2        # Volatilitenin volatilitesi
v_0 = 0.131      # Başlangıçta varsayılan volatilite
rho = -0.776    # Hisse senedi getirisi ile volatilitenin korelasyonu
lambda_ = 0     # Fiyat atlamalarının yoğunluğu için bir parametre, bu örnekte
kullanılmamıştır

num_simulations = 10000
num_steps = 1000
num_bins = 100

S, v = heston_simulation_euler_stratified(S_0, K, r, v_0, T, rho, kappa, theta, xi,
num_simulations, num_steps, num_bins)

# Call Option
call_price = option_price(S, K, r, T, option_type='call')
call_std_dev = np.std(S[:, -1])
call_mse = np.mean((S[:, -1] - K)**2)
call_confidence_interval = 1.96 * call_std_dev / np.sqrt(num_simulations)
Ust_Band_call = call_price + call_confidence_interval
Alt_Band_call = max(0, call_price - call_confidence_interval)

# Put Option
put_price = option_price(S, K, r, T, option_type='put')
put_std_dev = np.std(S[:, -1])
put_mse = np.mean((K - S[:, -1])**2)
put_confidence_interval = 1.96 * put_std_dev / np.sqrt(num_simulations)
Ust_Band_put = put_price + put_confidence_interval
Alt_Band_put = max(0, put_price - put_confidence_interval)

print(f"Call Option Price: {call_price:.5f}")
print(f"Call Option Confidence Interval: Upper Band: {Ust_Band_call:.5f} - Lower
Band: {Alt_Band_call:.5f}")
print(f"Call Standard Deviation: {call_std_dev:.5f}")
print(f"Call MSE: {call_mse:.5f}")

print(f"Put Option Price: {put_price:.5f}")
print(f"Put Option Confidence Interval: Upper Band: {Ust_Band_put:.5f} - Lower
Band: {Alt_Band_put:.5f}")
print(f"Put Standard Deviation: {put_std_dev:.5f}")
print(f"Put MSE: {put_mse:.5f}")
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	Sibel UÇAR VATANSEVER		
Doğum Yeri ve Yılı			
Bildiği Yabancı	Danca (Anadil), İngilizce, Almanca, Türkçe		
Eğitim Durumu	**Başlama - Bitirme**		**Kurum Adı**
Lise	2001	2003	Herning HF (Danimarka)
Lisans	2003	2006	University Of Westminter (İngiltere)
Yüksek Lisans	2008	2010	Aarhus University (Danimarka)
Doktora	2014	2024	Uludağ Üniversitesi
Çalıştığı Kurum	**Başlama - Ayrılma**		**Çalışılan Kurumun Adı**
1.	2006	2007	Bloomberg (Financial Data Analyst)
2.	2009	2010	Royal Bank of Scotland (Structured Product Specialist)
3.	2012	2014	Componenta Döktaş (Finansal Kontrolör)
Katıldığı Proje ve Toplantılar Yayınlar:	Makale: YILDI Makale: YILDIZ, H., & UÇAR VATANSEVER, S. "Önem Örneklemesinin Black Scholes Opsiyon Fiyatlandırma Modeline Etkisinin İncelenmesi", Kapanaltı Muhasebe Finans Ekonomi Dergisi, (Sayı: 5), 2024 ID:1398592 Kongre: YILDIZ, H., & UÇAR VATANSEVER, S. "Gençlerde Hastane İmajı Algısının Değerlendirilmesi". Selçuk 9. Uluslararası Sosyal Bilimler Kongresi, 15-17 Aralık, 2023, Konya Kongre: YILDIZ, H., & UÇAR VATANSEVER, S., "Türkiye'de Sağlık Alanında Maliyet Analizi Konusunda Yapılan Lisansüstü Tezlerin İncelenmesi: Sistematik Derleme ", Selçuk 9. Uluslararası Sosyal Bilimler Kongresi, 15-17 Aralık, 2023, Konya Kongre: YILDIZ, H., & UÇAR VATANSEVER, S., "Önem Örneklemenin Black Scholes Opsiyon Fiyatlandırma Modeline Etkisinin İncelenmesi, " I.Uluslararası Karaelmas Disiplinlerarası Sosyal Bilimler Kongresi, 16-19 Kasım 2023, Zonguldak		
İletişim (e-posta):			

Tarih:	01.03.2024
İmza:	
Adı-Soyadı:	