



UNIVERSIDAD DE SEVILLA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

PROYECTO FIN DE CARRERA

ESTUDIO DE MATERIALES REFORZADOS CON FIBRAS EN PROBLEMAS DE CONTACTO

Autor: **José María Ruso Misa**

Dirigido por: **Luis Rodríguez de Tembleque Solano**

Sevilla, Noviembre de 2013

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos,
Teoría de Estructuras e Ingeniería del terreno.

Agradecimientos

Con estas líneas quisiera mostrar mi agradecimiento a mi tutor Luis Rodríguez de Tembleque Solano, por darme la oportunidad de realizar este proyecto y por su apoyo en los momentos de dificultad del mismo. Te considero un ejemplo de esfuerzo, consideración y mucha profesionalidad.

Quisiera dedicarle este trabajo a mis padres, por su apoyo incondicional y su tremendo sacrificio para poder terminar la carrera, siempre estuvisteis sosteniéndome en los momentos de debilidad y tristeza, gracias.

A mi novia Alizson, por tener la habilidad de sacarme una sonrisa cuando lo necesitaba, tú forma de ser y capacidad para salir adelante aun cuando los medios son escasos resulta un ejemplo de vida.

Agradecer a mis compañeros de carrera sus bromas (me sirvieron para espabilar) y ayuda en los numerosos trabajos y prácticas realizados durante la carrera, sin ellos los resultados no hubiesen sido los mismos. Especialmente a Alberto, José David, Fernando, David, ... y también a los que comenzaron y no pudieron terminar, aun hoy los tengo presentes.

No quisiera olvidar agradecer a los profesores que he tenido durante los años de carrera, por enseñarme cómo afrontar los estudios dejando de lado las subjetividades y haciendo imperar la razón. Hay que preguntarse el por qué y para qué se hacen las cosas, Miguel Bermejo Herrero.

Por último, quisiera condensar tantas horas de estudio en un principio de la economía que para mí también lo es de vida: *las personas racionales piensan en términos marginales.*

A mis padres,
Dolores y Manuel.

Índice general

Agradecimientos **2**

Índice general **4**

Índice de figuras **8**

1. Introducción **11**

2. Formulación de los problemas de contacto y desgaste **14**

2.1. Introducción 14
2.2. El problema elástico 15
2.3. El problema de Contacto 17
2.3.1. Ecuaciones cinemáticas del contacto 18
2.3.2. Ley de contacto unilateral. Condiciones de Signorini 20
2.3.3. Ley de fricción 21
2.3.4. Fuerzas de contacto 27
2.4. Formulación del problema de contacto 27
2.5. Problema de desgaste superficial 28
2.5.1. Ley de desgaste de Holm-Archard 29
2.5.2. Ley de desgaste ortótropa. 32
2.6. Formulación del desgaste en problemas de contacto 33

3. Materiales reforzados con fibras **36**

3.1. Introducción 36
3.2. Material transversalmente isótropo 36
3.2.1. Materiales objeto de estudio 37

3.2.2. Ley de comportamiento 37
3.2.3. Transformaciones de tensiones y deformaciones 39

4. Modelos Micromecánicos **43**
4.1. Introducción 43
4.2. Modelo de Hopkins and Chamis 43
4.2.1. Ley de mezclas 44
4.2.2. Módulo de Young longitudinal $\mathbf{E_1}$ 46
4.2.3. Módulo de Young transversal $\mathbf{E_2}$ 47
4.2.4. Módulo de Cizalladura longitudinal $\mathbf{G_{12}}$ 48
4.2.5. Módulo de Cizalladura transversal $\mathbf{G_{23}}$ 49
4.2.6. Coeficiente de Poisson longitudinal $\boldsymbol{\nu_{12}}$ 50
4.2.7. Coeficiente de Poisson transversal $\boldsymbol{\nu_{23}}$ 52
4.2.8. Ley de mezclas modificada 52
4.2.9. Expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Hopkins and Chamis 54
4.2.10. Resultados para los materiales objeto de estudio 54
4.3. Modelo de Hashin and Rosen 56
4.3.1. Expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Hashin and Rosen 56
4.3.2. Resultados para los materiales objeto de estudio 57
4.4. Modelo de Chamis 58
4.4.1. Expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Chamis 58
4.4.2. Resultados para los materiales objeto de estudio 59
4.5. Comparación de los modelos micromecánicos para fibras continuas . . 60
4.5.1. Material E-glass\MY750 60
4.5.2. Material S2-Glass\Epoxy 2 63
4.5.3. Material AS\Epoxy 1 65
4.5.4. Material IM7\8551-7 Epoxy 65
4.6. Comparación de los materiales para cada modelo micromecánico de fibras continuas 68
4.6.1. Modelo de Hopkins and Chamis 68
4.6.2. Modelo de Hashin and Rosen 68
4.6.3. Modelo de Chamis 68

4.7. Análisis de materiales reforzados con fibras cortas 72
4.7.1. Fibras cortas alineadas 73
4.7.2. Análisis de la tensión y resistencia de la fibra 74
4.7.3. Análisis del módulo 80
4.7.4. Modelo de Halpin-Tsai 83
4.7.5. Resultados para los materiales objeto de estudio 84
4.8. Comparación del modelo de Halpin-Tsai con los modelos de fibras continuas 87
4.8.1. E-glass\MY750 87
4.8.2. S2-Glass\Epoxy 2 89
4.8.3. AS\Epoxy 1 89
4.8.4. IM7\8551-7 Epoxy 89

5. Problemas de indentación en materiales reforzados con fibras 93
5.1. Introducción 93
5.2. Datos de entrada para la resolución de los problemas de indentación 94
5.2.1. Dependencia de la matriz de comportamiento 94
5.2.2. Indentación mediante el cilindro 95
5.2.3. Indentación mediante la esfera 96
5.3. Problemas de indentación para materiales reforzados con fibras continuas. 97
5.3.1. Resultados del problema de indentación con cilindro y esfera. Modelo de Hopkins-Chamis. 98
5.3.2. Resultados del problema de indentación con cilindro y esfera. Modelo de Hashin-Rosen. 113
5.3.3. Comparación de los modelos micromecánicos de fibras continuas para el material IM7 Carbon\8551-7 117
5.4. Problema de indentación en un material reforzado con fibras cortas . 117
5.4.1. Resultados del problema de indentación con esfera. Modelo de Halpin-Tsai. 119
5.4.2. Resultados del problema de indentación con esfera. Modelo de Halpin-Tsai vs Hopkins-Chamis 124

6. Desgaste por fatiga superficial (fretting wear) 126
6.1. Introducción 126

6.2. Fibras continuas 127
6.3. Fibras cortas 128

7. Conclusiones y trabajos futuros **134**
7.1. Micromecánica. 134
7.2. Problemas de indentación. 135
7.3. Problema de desgaste superficial. 137
7.4. Trabajos futuros 137

Bibliografía **139**

Índice de figuras

2.1. Sólido elástico y lineal 15
2.2. Descripción cinemática del movimiento del sólido Ω. Figura similar en [12]. . . . 18
2.3. Pareja I de puntos $P^\alpha \in \Omega^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ en contacto. Figura similar en [12]. . . . 19
2.4. Esquema de dos sólidos en contacto. Figura similar en [12]. 20
2.5. Fuerza de fricción y detalle de las rugosidades superficiales en la zona de contacto aparente Γ_c. Figura similar en [12]. 22
2.6. **(a)** Superficie ortótropa con estrías. **(b)** Ley de fricción ortótropa. Figura sacada de [15]. 25
2.7. Resultante de las fuerzas en la zona de contacto Γ_c 27
2.8. Orientación de la dirección de deslizamiento. 33

3.1. Cosenos directores. Figura sacada de [9]. 40
3.2. Rotaciones sucesivas para llegar al sistema $\{p', q', r'\}$. Figura sacada de [9]. . . . 41

4.1. Ilustración de la matriz, fibra y huecos. Figura sacada de [9]. 44
4.2. Elementos representativos, elemento 1 (izquierda) y elemento 2 (derecha). Figura sacada de [9]. 45
4.3. Elemento 1 sometido a una fuerza en la dirección de la fibra (izquierda), y el elemento 2 sometido a una fuerza en la dirección transversal (derecha). Figura sacada de [9]. 46
4.4. Elemento 2 sometido a una fuerza de corte y la deformación de la cara superior $\{ijkl\}$. Figura sacada de [9]. 49
4.5. Deformación del elemento 1 sometido a una fuerza longitudinal en dirección x_1. Figura sacada de [9]. 50
4.6. Modelo para la ley de mezclas modificada (arriba) y la representación de la capa media "b"(abajo). Figura sacada de [9]. 53

4.7. **Material E-glass\MY750**. Representación de E_1 y $E_2 = f(\upsilon_f)$ 61
4.8. **Material E-glass\MY750**. Representación de G_{12} y $G_{23} = f(\upsilon_f)$ 62
4.9. **Material E-glass\MY750**. Representación de ν_{12} y $\nu_{23} = f(\upsilon_f)$ 63
4.10. **Material S2-Glass\Epoxy 2**. Representación de las contantes ingenieriles. . . 64
4.11. **Material AS\Epoxy 1**. Representación de las contantes ingenieriles. 66
4.12. **Material IM7\8551-7 Epoxy**. Representación de las contantes ingenieriles. . . 67
4.13. **Modelo de Hopkins and Chamis**: Materiales y constantes ingenieriles 69
4.14. **Modelo de Hashin and Rosen**: Materiales y constantes ingenieriles 70
4.15. **Modelo de Chamis**: Materiales y constantes ingenieriles 71
4.16. Tipos de refuerzo de fibras cortas. 72
4.17. Elemento de volumen para compuesto con fibras cortas alineadas. 73
4.18. Representación de la deformación por cortante de la matriz de un compuesto de fibra corta. 74
4.19. Tensiones que actúan sobre un elemento diferencial de la fibra. 75
4.20. Curvas de tensión-deformación para el material de la matriz según los modelos de Kelly-Tyson y Cox. 76
4.21. Variación de la tensión tangencial τ, y normal σ_f en la fibra, con la distancia a lo largo de la fibra de acuerdo con el modelo de Kelly-Tyson. 77
4.22. Efecto de la longitud de la fibra en las tensiones según el modelo kelly-Tyson. . . 78
4.23. Variación de la tensión tangencial y normal en la fibra con la distancia a lo largo de la fibra de acuerdo con el modelo de Cox. 83
4.24. **Material E-glass\MY750**: $E_1 = f(\upsilon_f, r_{asp})$ Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas 87
4.25. **Material E-glass\MY750**: $E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$ y $\nu_{23} = f(\upsilon_f)$ Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas 88
4.26. **Material S2-Glass\Epoxy 2**: Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas . 90
4.27. **AS\Epoxy 1**: Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas 91
4.28. **IM7\8551-7 Epoxy**: Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas 92

5.1. **(a)** Esquema del cilindro y del tocho de compuesto. **(b)** Elementos de contorno de la malla. Figura sacada de [17]. 96
5.2. **(a)** Esquema de la esfera y el tocho de compuesto. **(b)** Elementos de contorno de la malla. Figura sacada de [17]. 97
5.3. **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 1 de P y Q en Cilindro y Esfera . 100

5.4. **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 2 de P y Q en Cilindro y Esfera . 101
5.5. **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 3 de P y Q en Cilindro y Esfera . 102
5.6. **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 1 de Q en la esfera para cada θ. . . 103
5.7. **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 2 de Q en la esfera para cada θ. . . 104
5.8. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de P y Q en Cilindro y Esfera 106
5.9. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de P y Q en Cilindro y Esfera 107
5.10. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 3 de P y Q en Cilindro y Esfera 108
5.11. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de Q en la esfera para cada θ. 109
5.12. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de Q en la esfera para cada θ. 110
5.13. Representación 1. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7 vs E-Glass\MY750** . . . 111
5.14. Representación 2. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7 vs E-Glass\MY750** . . . 112
5.15. **Hashin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de P y Q en Cilindro y Esfera 114
5.16. **Hashin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de P y Q en Cilindro y Esfera 115
5.17. **Hashin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 3 de P y Q en Cilindro y Esfera 116
5.18. **IM7 Carbon\8551-7:** Hashin-Rosen vs Hopkins-Chamis 118
5.19. **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 0 de P y Q en la Esfera 120
5.20. **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de P y Q en la Esfera 121
5.21. **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de P y Q en la Esfera 122
5.22. **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 3 de P y Q en la Esfera 123
5.23. **Halpin vs Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación de P y Q en la Esfera 125

6.1. Evolución de los desplazamientos prescritos con el tiempo 127
6.2. **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad y volumen de desgaste frente al número de ciclos, para cada θ y υ_f. Fibras continuas. 129
6.3. **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad de desgaste frente a la distancia de deslizamiento, para cada θ y υ_f. Fibras continuas. 130
6.4. **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad de desgaste frente al número ciclos con una $r_{asp} = 10\ y\ 500$, para cada θ y υ_f. Fibras cortas. 131
6.5. **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Volumen de desgaste frente al número de ciclos con una $r_{asp} = 10\ y\ 500$, para cada θ y υ_f. Fibras cortas. 132
6.6. **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad de desgaste frente a la distancia de deslizamiento con una $r_{asp} = 10\ y\ 500$, para cada θ y υ_f. Fibras cortas. 133

Capítulo 1

Introducción

Los materiales reforzados con fibras, son identificados por las siglas FRP en lengua inglesa: *"Fiber Reinforced Plastics"*. En español se designan por PRF: *Plásticos Reforzados con Fibras*. Éstos se obtienen mediante la unión de dos o más materiales, de manera que se optimicen las propiedades de la combinación. Desde la antigüedad se tiene constancia de su utilización, como es el caso de los adobes: unión de arcilla y fibras de paja o el yeso reforzado con crines de caballo, etc. En la actualidad, su composición está basada esencialmente en dos elementos. La *matriz resinosa*: que puede ser resina de epoxi o de algún otro tipo como poliéster, poliuretano, acrílica, etc, y un *refuerzo*: fibras o tejidos de vidrio o de carbono, etc. La resina tiene una elevada resistencia a compresión, pero no la tiene a tracción (como le ocurre al hormigón), al armarla con fibras de alta resistencia a la tracción (barras de acero corrugadas, caso del hormigón armado), se consigue un material compuesto de muy buenas cualidades. Como son: una mejor resistencia (incluso a altas temperaturas por su condición de aislante térmico), rigidez y alta relación resistencia/peso. El trabajo conjunto de ambos componentes se produce de la siguiente manera, el material de la matriz transmite la fuerza a las fibras evitando en caso de compresión el pandeo de estas, y proporciona ductilidad y tenacidad, mientras que las fibras soportan la mayor parte de la fuerza aplicada.

Algunos sectores industriales donde su aplicación tiene una importancia relevante son los siguientes: el *aeronáutico*, donde los materiales reforzados con fibras de carbono son utilizados en muchos componentes de su estructura por su alta resistencia y bajo peso. Lo mismo ocurre en la *automoción* donde son muy utilizados los refuerzos

con fibra de vidrio en la carrocería de los automóviles, por ser más económico que la fibra de carbono. También en la *edificación* los materiales reforzados con fibra de vidrio son usados como revestimiento en cubiertas, muros, etc, para proporcionar aislamiento térmico por su alta resistencia térmica, al ser capaces de inmovilizar el aire seco y confinarlo en el interior de celdillas más o menos estancas evitando la transferencia de calor por convección.

Este proyecto aborda el estudio de los materiales reforzados con fibras *continuas* o con fibras *cortas* unidireccionales sometidos a condiciones de *contacto con fricción*, incluyendo *desgaste*. Con esto se persigue sacar conclusiones de cara al diseño de materiales compuestos y componentes mecánicos implicados en problemas de contacto. Para ello, se estudiará la influencia que tienen sobre los problemas de contacto y desgaste, factores como: la orientación de las fibras, la micromecánica, o la dirección de deslizamiento.

Los modelos micromecánicos usados para un refuerzo con fibras continuas son: el modelo de Chamis, modelo de Hashin-Rosen y modelo de Hopkins-Chamis, los cuales serán comparados para intentar apreciar las posibles discrepancias entre ellos. Para un refuerzo con fibras cortas se hará uso del modelo de Halpin-Tsai, el cual se compara con los modelos de fibras continuas para ver si existe o no una similitud entre ellos cuando la relación de aspecto aumenta.

Una vez centrado los objetivos a alcanzar en este proyecto, ahora se procede a comentar como se va a realizar. En primer lugar elegiremos una clase concreta de material compuesto, usaremos *materiales transversalmente isótropos* concretamente elegiremos cuatro: dos con refuerzo de fibra de *vidrio* y dos con *carbono*. Con los modelos micromecánicos mencionados se obtendrán las cinco constantes elásticas independientes que caracterizan a los materiales transversalmente isótropos ($E_1,\ E_2,\ G_{12},\ \nu_{12}\ y\ \nu_{23}$), esto nos permititá calcular la *matriz de comportamiento* para cada material objeto de estudio. Esto último lo haremos para cada modelo variando la fracción de volumen de fibra (v_f), la orientación de la fibra (α) y si el refuerzo es con fibras cortas, la relación de aspecto de la fibra (r_{asp}).

Los materiales se someten a dos estudios de indentación, con un punzón de forma *cilíndrica* y *esférica*, ambos de acero. La resolución numérica se realizará mediante un código basado en el método de los elementos de contorno (MEC), desarrollado en [12] y ampliado en [14–17]. Esto nos permitirá ver la importancia que tienen en ambos problemas de indentación las variaciones de las propiedades del material compuesto, según los resultados obtenidos de las solicitaciones normal y tangencial acorde a los desplazamientos prescritos normal y tangencial considerados. En el planteamiento del problema de contacto y desgaste, se hará uso exclusivamente del problema de indentación de la esfera ya que los objetivos son: conocer las implicaciones de las variaciones de la propiedades del material compuesto en la *profundidad de desgaste y el volumen de material desgastado*. Para ello se plantea un problema de *desgaste superficial*, donde la aplicación de sucesivos ciclos de carga provocan tal desgaste. La ley de fricción contemplada en estos estudios es una *ley de fricción ortótropa*. Ya que, por poner un ejemplo, en el estudio que se hará mediante el problema de indentación con la esfera es necesaria al considerar distintas orientaciones (θ) en la dirección del desplazamiento tangencial prescrito, y direcciones de deslizamiento en el problema de desgaste superficial.

Capítulo 2

Formulación de los problemas de contacto y desgaste

2.1. Introducción

La Mecánica del contacto estudia el movimiento relativo y las fuerzas o tracciones de interacción existentes entre sólidos rígidos o deformables. Según Curnier "*la idea de contacto es la combinación de discontinuidad y repulsión, o mejor dicho, no cohesión*", es decir dos partículas sólidas son continuas si están contiguas y son impenetrables e inseparables. Pero estarán en contacto si son contiguas, impenetrables y *separables.* En este capítulo se presenta la formulación fuerte del problema de contacto cuasi-estático entre sólidos 3D, que poseen contornos "suaves", y presentan un comportamiento elástico-lineal, con pequeños desplazamientos y deformaciones, de forma análoga a [12]. También es objeto de análisis, el problema del desgaste superficial. El fenómeno del desgaste está vinculado al de fricción, y supone la pérdida de material de las superficies de los sólidos que interaccionan mecánicamente, o como dice Rabinowick [11] , *es la eliminación de material de la superficie de los sólidos en contacto, como resultado de la interacción mecánica.* Esto supone un añadido en la formulación del problema de contacto, es por ello que se finalizara el capítulo considerando en la formulación del problema de contacto, el desgaste superficial, tal y como se presenta en [12].

2.2. El problema elástico

Consideremos un sólido elástico-lineal e isótropo, de dominio Ω y contorno Γ, que está definido en un sistema de coordenadas cartesianas: $x_i = \{x_1, x_2, x_3\}$ en $\Re^3$, ver Figura 2.1.

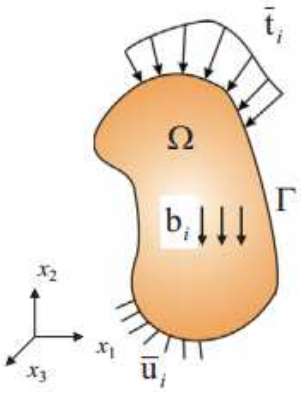


Figura 2.1: Sólido elástico y lineal

Este sólido se encuentra sometido a la acción de unas fuerzas de volumen b_i en Ω, unas tracciones prescritas en el contorno $\Gamma_{\overline{t}}$ y unos desplazamientos prescritos $\overline{u}_i$ sobre $\Gamma_{\overline{u}}$. Los contornos $\Gamma_{\overline{t}}$ y $\Gamma_{\overline{u}}$ son complementarios: $\Gamma = \Gamma_{\overline{t}} \cup \Gamma_{\overline{u}}$ y $\Gamma_{\overline{t}} \cap \Gamma_{\overline{u}} = \emptyset$. Este problema posee tres campos internos de incógnitas: desplazamientos u_i, deformaciones ε_{ij} y las tensiones σ_{ij}, definidos en Ω. A continuación, se expondrán de forma esquemática las ecuaciones que constituyen el problema elástico:

Ecuaciones de Equilibrio Interno:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad en \quad \Omega \tag{2.1}$$

Ecuaciones de Compatibilidad:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad en \quad \Omega \tag{2.2}$$

Ecuaciones de Comportamiento:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \quad en \quad \Omega \tag{2.3}$$

donde C_{ijkl} es el tensor elástico.

Estas ecuaciones pueden ser expresadas de forma más compacta definiendo los **pseudo vectores tensión y deformación:**

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left[\begin{array}{cccccc} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{13} & \sigma_{12} \end{array} \right] \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left[\begin{array}{cccccc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{12} \end{array} \right] \tag{2.5}$$

y el **operador gradiente:**

$$\mathbf{L}^T = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{array} \right] \tag{2.6}$$

De esta forma, podemos escribir las ecuaciones en forma matricial:

Ecuaciones de Equilibrio Interno:

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \quad en \quad \Omega \tag{2.7}$$

Ecuaciones de Compatibilidad:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\,\mathbf{u} \quad en \quad \Omega, \quad siendo \quad \mathbf{u} = [u_1\, u_2\, u_3]^T \tag{2.8}$$

Ecuaciones de Comportamiento:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon} \quad en \quad \Omega \tag{2.9}$$

Finalmente para cerrar el problema elástico debemos imponer las condiciones de contorno en desplazamiento y tensiones, se expondrán en forma matricial:

Ecuaciones de Compatibilidad en el Contorno:

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \quad sobre \quad \Gamma_{\overline{u}} \tag{2.10}$$

Ecuaciones de Equilibrio en el Contorno:

$$\mathbf{t} = \overline{\mathbf{t}} \quad sobre \quad \Gamma_{\overline{t}} \tag{2.11}$$

$$siendo: \quad \mathbf{t} = \mathbf{P}_n \, \boldsymbol{\sigma}, \; donde$$

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_1 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

2.3. El problema de Contacto

La resolución del problema de contacto entre sólidos deformables que interaccionan mecánicamente, permite obtener el conjunto de configuraciones que van tomando en cada instante.

Respecto del sistema de referencia $\{x_1, x_2, x_3\}$, la posición del punto $P \in \Omega$ en el instante τ es $\mathbf{x}$, la cual se expresa como suma de la configuración de referencia definida en el instante τ_0 que es $\mathbf{X}$, más el desplazamiento $\mathbf{a}$ en el instante τ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{a} \tag{2.13}$$

siendo representado en la Figura 2.2. El desplazamiento $\mathbf{a}$ se obtiene como suma del de sólido rígido $\mathbf{u}_0$ más el desplazamiento como sólido deformable $\mathbf{u}$ en el punto considerado: $\mathbf{a} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}$.

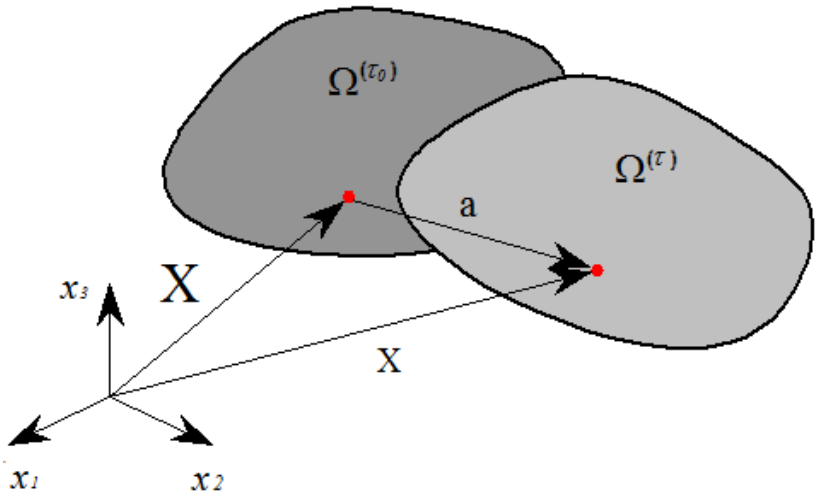


Figura 2.2: Descripción cinemática del movimiento del sólido Ω. Figura similar en [12].

2.3.1. Ecuaciones cinemáticas del contacto

Sean los sólidos Ω^α ($\alpha = 1, 2$), para conocer la posición relativa entre ambos cuerpos se define la variable *separación* para la pareja de puntos $I = \{P^1, P^2\}$, (donde $P^\alpha \in \Omega^\alpha, \alpha = 1, 2$),

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^T(\mathbf{x^2} - \mathbf{x^1}) = \mathbf{B}^T(\mathbf{X^2} - \mathbf{X^1}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{a^2} - \mathbf{a^1}) \tag{2.14}$$

$\mathbf{B}$=$[\boldsymbol{t_1}|\boldsymbol{t_2}|\boldsymbol{n}]$, es una matriz de cambio de base que permite pasar de coordenadas globales a locales, siendo la base ortonormal local $\{\boldsymbol{t_1}|\boldsymbol{t_2}|\boldsymbol{n}\}$ asociada a cada pareja I de puntos genéricos, $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a las superficies con sentido saliendo de Γ_c^1, y $\{\boldsymbol{t_1}|\boldsymbol{t_2}\}$ son los vectores unitarios tangentes (ver Figura 2.3).

Si los puntos de la pareja I están en contacto, el plano tangente es común en dicho punto y por tanto también lo son las rectas normales al plano. En la Figura 2.4, se puede observar la posición global de referencia de cada punto $\mathbf{X}^\alpha$ (configuración inicial antes de aplicar la carga) y su desplazamiento $\mathbf{a}^\alpha$ expresado en el sistema global de referencia.

Sabiendo que $\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{u}_0^\alpha + \mathbf{u}^\alpha$ la Ecuación (2.14) queda de esta forma

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^T(\mathbf{X^2} - \mathbf{X^1}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u_0^2} - \mathbf{u_0^1}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{u^2} - \mathbf{u^1}) \tag{2.15}$$

donde $\mathbf{B}^T(\mathbf{X^2} - \mathbf{X^1})$ es la *separación geométrica* entre los dos sólidos en la configuración de referencia $\mathbf{g}_g$ (también es conocida como *separación geométrica inicial*), y $\mathbf{B}^T(\mathbf{u_0^2} - \mathbf{u_0^1})$ es separación debida a los movimientos como sólido rígido $\mathbf{g}_o$. Finalmente la separación de la pareja I queda:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{go} + \mathbf{B}^T(\mathbf{u^2} - \mathbf{u^1}) \tag{2.16}$$

donde $\mathbf{g}_{go} = \mathbf{g}_g + \mathbf{g}_o$ es la suma de la separación geométrica inicial y la producida por los movimientos como sólido rígido, respectivamente.

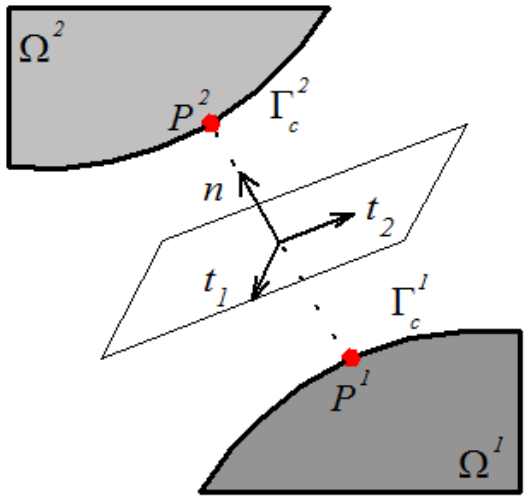


Figura 2.3: Pareja I de puntos $P^\alpha \in \Omega^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ en contacto. Figura similar en [12].

La separación como sólido rígido y como sólido deformable son del mismo orden en la zona de contacto y en sus proximidades, es por ello que utilizo la Ecuación (2.13) para describir el movimiento de cada sólido en las cercanías de la zona de contacto.

La Ecuación (2.16) se puede descomponer en la componente normal y tangencial:

$$g_n = g_{go,n} + u_n^2 - u_n^1 \tag{2.17}$$

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{go,t} + \mathbf{u_t^2} - \mathbf{u_t^1} \tag{2.18}$$

siendo u_n^α y $\mathbf{u}_t^\alpha$ las componentes normal y tangencial del desplazamiento, obtenidas a partir de los desplazamientos en globales $\mathbf{u}^\alpha : [\mathbf{u}_t^\alpha \; u_n^\alpha]^T = \mathbf{B}^T\mathbf{u}^\alpha$.

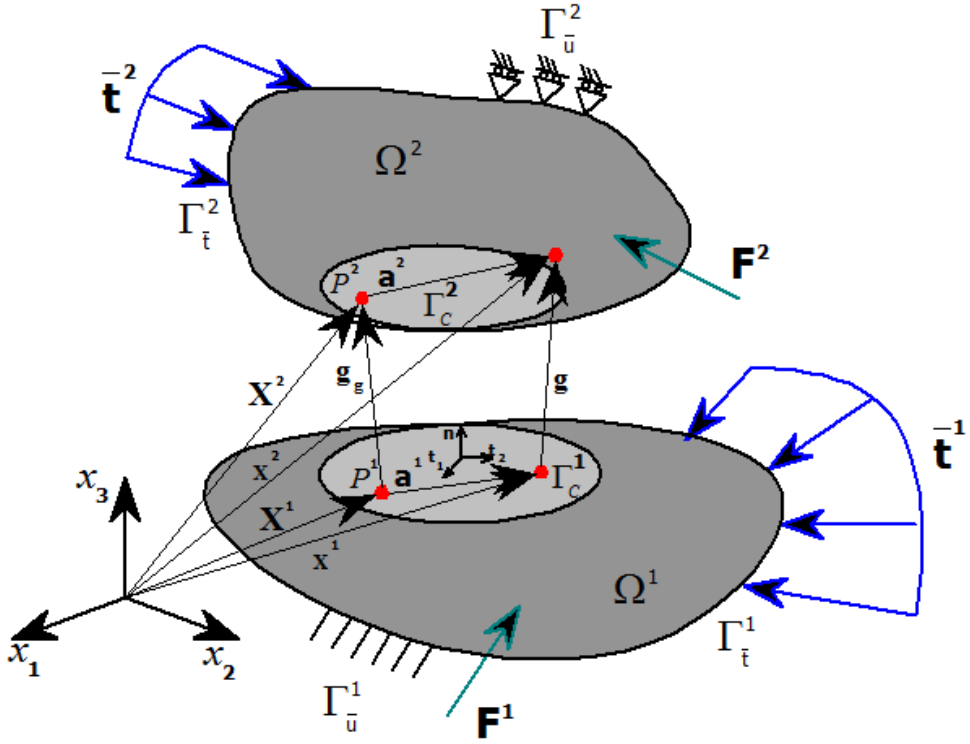


Figura 2.4: Esquema de dos sólidos en contacto. Figura similar en [12].

2.3.2. Ley de contacto unilateral. Condiciones de Signorini

Signorini definió las leyes de contacto unilateral, para el problema de un sólido elástico que entra en contacto sin fricción, con una superficie rígida. Estas leyes extendidas al caso de dos sólidos elásticos, se enuncian como:

- Dos sólidos que entran en contacto, cada uno de ellos formados por su dominio Ω^α y su contorno Γ^α ($\alpha = 1, 2$), no se interpenetran:

$$\Omega^1 \cap \Omega^2 = \emptyset \tag{2.19}$$

  Esto implica que la superficie de cada sólido está dividida en tres regiones según sean de contacto Γ^α_c , con condiciones de contorno en tracciones impuestas $\Gamma^\alpha_{\bar{t}}$ y condiciones de contorno en desplazamientos impuestas $\Gamma^\alpha_{\bar{u}}$, cumpliéndose:

$$\Gamma^\alpha = \Gamma^\alpha_c \cup \Gamma^\alpha_{\bar{t}} \cup \Gamma^\alpha_{\bar{u}} \quad y \quad \Gamma^\alpha_c \cap \Gamma^\alpha_{\bar{t}} \cap \Gamma^\alpha_{\bar{u}} = \emptyset \tag{2.20}$$

  El *área de contacto* es común en ambos sólidos, es decir: $\Gamma_c = \Gamma^1_c = \Gamma^2_c$.

- Los sólidos que están en contacto sin cohesionarse, son separables. Por lo que para cada pareja de puntos $I = \{P^1, P^2\} \in \Gamma_c$, se cumple:

$$g_n \geq 0 \quad y \quad t_n \leq 0 \tag{2.21}$$

  Donde g_n es la separación normal de la pareja I, y t_n es la tracción normal de contacto definida como,

$$t_n = \mathbf{B}_n^T \, \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_n^T \, \mathbf{t}^2 \tag{2.22}$$

  donde $\mathbf{t}^\alpha$ es la tracción del punto $P^\alpha \in \Gamma_c^\alpha$ en coordenadas globales y $\mathbf{B}_n = [\mathbf{n}]$ es la primera columna de la matriz de cambio de base: $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t|\mathbf{B}_n] = [\mathbf{t}_1|\mathbf{t}_2|\mathbf{n}]$, expuesta en el Apartado 2.3.1. Verificándose la tercera Ley de Newton, para las tracciones normales que actúan sobre la pareja de puntos en contacto I.

- Las variables g_n y t_n son complementarias,

$$g_n \, t_n = 0 \tag{2.23}$$

  si estamos en contacto $g_n = 0$ y por tanto aparece una $t_n < 0$ sobre cada punto de los sólidos en contacto para evitar que se interpenetren. Si no existe contacto $g_n > 0$ y $t_n = 0$.

2.3.3. Ley de fricción

En este apartado de van a exponer dos leyes: la ley clásica de Coulomb isótropa y una ley de fricción ortótropa, que será con está última con la que realizaremos los estudios que se desarrollan en este proyecto.

La ley clásica de Coulomb isótropa establecía que el límite fricción era proporcional a la carga normal mediante el coeficiente de fricción, el cual era independiente de la dirección de la superficie de contacto. Lo cual no es correcto si el estudio implica la posibilidad de contacto con fricción en varias direcciones, como puede ocurrir en el problema de indentación de una esfera de acero sobre un material compuesto, al variar la dirección del desplazamiento tangencial prescrito. Es por ello que en este proyecto se hace uso de una ley de fricción ortótropa, la cual se aproxima por un cono de fricción elíptico. Ambas leyes se exponen a continuación:

- **Ley de fricción clásica de Coulomb isótropa**

  En el deslizamiento entre dos cuerpos, se observa experimentalmente como aparece una fuerza tangencial ($\mathbf{F}_t$) conocida como *fuerza de rozamiento*, este fenómeno se conoce como *fricción* (ver Figura 2.5).

  La fuerza de fricción mantiene constante su módulo durante el deslizamiento entre los cuerpos, pero al cesar este decae su valor. Esto implica que el valor de la fuerza de fricción tiene un límite superior, conocido como *límite de fricción* (f). Se puede describir el comportamiento de la fuerza de fricción de la siguente forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t &= -f\,\dot{\mathbf{g}}_t/\|\dot{\mathbf{g}}_t\| \qquad \text{si} \quad \dot{\mathbf{g}}_t \neq 0 \\ F_t &< f \qquad\qquad\qquad\quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{g}}_t = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

  siendo $F_t = \|\mathbf{F}_t\|$.

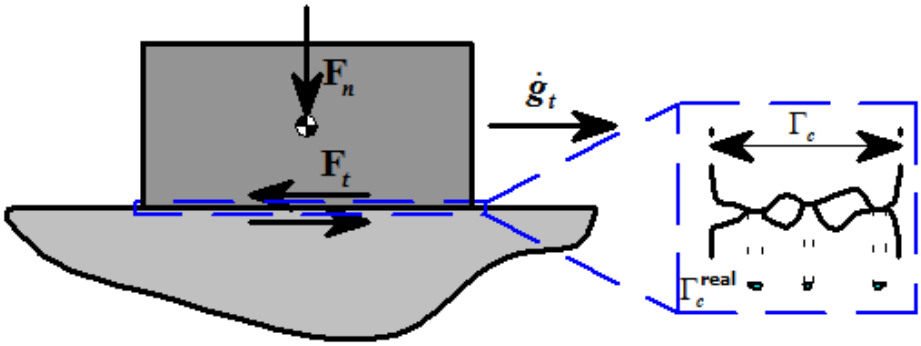


Figura 2.5: Fuerza de fricción y detalle de las rugosidades superficiales en la zona de contacto aparente Γ_c. Figura similar en [12].

  En 1875 Coulomb propuso que f era proporcional a la carga normal F_n mediante el *coeficiente de rozamiento* μ, siendo este ultimo dependiente de las propiedades de las superficies en contacto pero independiente del área de contacto.

$$f = \mu\, F_n \tag{2.25}$$

  Mediante el análisis microscópico, se observo que las superficies de los sólidos presentan rugosidades y es a partir de este análisis cuando se ha podido entender el mecánismo de fricción.

Teniendo en cuenta la existencia de estas rugosidades se hace una distinción entre el *área de contacto real* $\left(\Gamma_c^{real}\right)$ y el *área de contacto aparente* (Γ_c) (ver Figura 2.5). Esto permitió mediante los trabajos de Holm [5] (1938), y Archard [1] (1953), demostrar que el fenómeno de la fricción es debido a la adhesión que se produce en la cima de las rugosidades que constituyen Γ_c^{real}, esto explica la independencia del límite de fricción del área de contacto aparente que mencionaba Coulomb.

En la actualidad, se entiende que la ley de Coulomb es errónea aplicada localmente, pero desde un punto de vista ingenieril es una buena aproximación. Esto supone modelar el fenómeno de fricción en el problema de contacto de forma que todo punto $P \in \Gamma_c^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ satisface la ley de Coulomb.

La ley de fricción se establece a partir de las variables tangenciales de contacto $\{\dot{\mathbf{g}}_t\ ,\ \mathbf{t}_t\}$, velocidad de deslizamiento tangencial y tracción tangencial.

- La velocidad de deslizamiento tangencial, se define como:

$$\dot{\mathbf{g}}_t = \frac{d\mathbf{g}_t}{d\tau} \tag{2.26}$$

- Tracción tangencial:

$$\mathbf{t}_t = \mathbf{B}_t^T\ \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_t^T\ \mathbf{t}^2 \tag{2.27}$$

  donde $\mathbf{t}^\alpha$ es la tracción del punto $P^\alpha \in \Gamma_c$ en coordenadas globales, y $\mathbf{B}_t = [\mathbf{t}_1|\mathbf{t}_2]$ la matriz de cambio de base a coordenadas locales.

Ahora ya estamos en condiciones de poder establecer la ley de fricción para cada pareja $I = \{P^1\ ,\ P^2\}$ de puntos pertenecientes a Γ_c:

- El módulo de las tracciones tangenciales de contacto satisface la ley de Coulomb:

$$\|\mathbf{t}_t\| \leq \mu\ |t_n| \tag{2.28}$$

  donde μ es el coeficiente de fricción y $|\cdot|$ es el valor absoluto.

- La velocidad de deslizamiento tangencial y la tracción tangencial satisfacen el principio de máxima disipación de energía, de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{g}}_t = -\lambda\, \mathbf{t}_t \quad ; \quad \lambda \geq 0 \tag{2.29}$$

- Existe una relación complementariedad entre las variables: $\|\dot{\mathbf{g}}_t\|$ y $(\|\mathbf{t}_t\| - \mu\, |t_n|)$

$$\|\dot{\mathbf{g}}_t\|\ (\|\mathbf{t}_t\| - \mu\, |t_n|) = 0 \tag{2.30}$$

que se pondrá de manifiesto en el siguiente resumen.

La *condición de contacto unilateral* y la *ley de fricción* definidas para una pareja I de puntos se pueden recoger, según el estado de contacto:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Adhesión:} && t_n \leq 0 \quad ; \quad g_n = 0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{g}}_t = 0 \\
&\textbf{Deslizamiento} : && \begin{cases} t_n \leq 0 \quad ; \quad g_n = 0 \\ \|\mathbf{t}_t\| = \mu\, |t_n| \quad ; \quad \dot{\mathbf{g}}_t \cdot \mathbf{t}_t = -\|\dot{\mathbf{g}}_t\|\, \|\mathbf{t}_t\| \end{cases} \\
&\textbf{Separación:} && t_n = 0 \quad ; \quad g_n \geq 0 \quad ; \quad \mathbf{t}_t = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En problemas cuasi-estáticos en vez de $\dot{\mathbf{g}}_t$ se usa el incremento de deslizamiento $\Delta\mathbf{g}_t$, obtenido como la diferencia de separación tangencial entre dos instantes de carga consecutivos: $\Delta\mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t\,(\tau_i) - \mathbf{g}_t\,(\tau_{i-1})$.

- **Ley de fricción ortótropa:**

En muchas aplicaciones de ingeniería, una familia de modelos de fricción ortótropos se pueden aproximar con precisión por un cono de fricción elíptica convexa [15, 16], donde los ejes principales de la elipse coinciden con los ejes ortotropía del material $\{e_1,\ e_2\}$, ver Figura 2.6.

La forma del límite fricción ortótropo está dada por

$$f\,(\mathbf{t}_t, t_n) = \|\mathbf{t}_t\|_\mu - |t_n| = 0 \tag{2.32}$$

donde $\| \bullet \|_\mu$ denota la norma elíptica

$$\|\mathbf{t}_t\|_\mu = \sqrt{\left(\frac{t_{t_1}}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{t_{t_2}}{\mu_2}\right)^2} \tag{2.33}$$

y los coeficientes μ_1 y μ_2 son los coeficientes principales de fricción. La curva (2.32) constituye una elipse cuyos ejes principales son: $\mu_1|t_n|$ y $\mu_2|t_n|$. La ley de fricción clásica de Coulomb isótropa se recupera en la curva (2.32) al considerar $\mu = \mu_1 = \mu_2$.

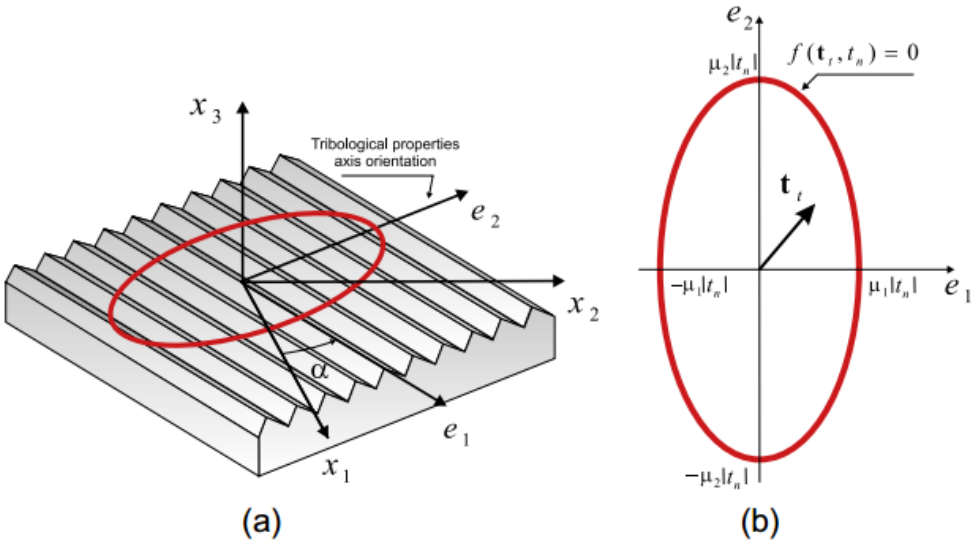


Figura 2.6: **(a)** Superficie ortótropa con estrías. **(b)** Ley de fricción ortótropa. Figura sacada de [15].

Las tracciones de contacto admisibles $\mathbf{t}_t$ deben satisfacer

$$f\left(\mathbf{t}_t, t_n\right) \leq 0 \tag{2.34}$$

la cual define una región convexa admisible para $\mathbf{t}_t$, *el cono de fricción*, C_f. Se considera una regla de deslizamiento asociada al cono de fricción, la dirección de deslizamiento está dada por el gradiente y su magnitud por el factor λ:

$$\dot{g}_{t_1} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial t_{t_1}} = -\frac{\lambda}{\mu_1^2} \frac{t_{t_1}}{\|\mathbf{t}_t\|_\mu} \tag{2.35}$$

$$\dot{g}_{t_2} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial t_{t_2}} = -\frac{\lambda}{\mu_2^2} \frac{t_{t_2}}{\|\mathbf{t}_t\|_\mu} \tag{2.36}$$

Ambas componentes se pueden expresar de forma vectorial de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{g}}_t = -\lambda \left(M^2\right)^{-1} \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|_\mu}, \quad donde \quad M = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Para satisfacer las relaciones de complementariedad

$$f(\mathbf{t}_t, t_n) \leq 0\ , \quad \lambda \geq 0\ , \quad \lambda f(\mathbf{t}_t, t_n) = 0 \tag{2.38}$$

la expresión para el factor λ es:

$$\lambda = \|\dot{\mathbf{g}}_t\|_\mu^* \tag{2.39}$$

donde la norma $\| \bullet \|_\mu^*$ es dual de $\| \bullet \|_\mu$, por lo que:

$$\|\dot{\mathbf{g}}_t\|_\mu^* = \sqrt{(\mu_1\ \dot{g}_{t_1})^2 + (\mu_2\ \dot{g}_{t_2})^2} \tag{2.40}$$

Por lo tanto las componentes de $\mathbf{t}_t$ son:

$$t_{t_1} = -\|\mathbf{t}_t\|_\mu \frac{\mu_1^2\ \dot{g}_{t_1}}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|_\mu^*} \tag{2.41}$$

$$t_{t_2} = -\|\mathbf{t}_t\|_\mu \frac{\mu_2^2\ \dot{g}_{t_2}}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|_\mu^*} \tag{2.42}$$

De esta forma, la *condición de contacto unilateral* y la *ley de fricción elíptica* definidas para una pareja I de puntos se pueden recoger, según el estado de contacto:

- **Adhesión:**

$$t_n \leq 0 \quad ; \quad g_n = 0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{g}}_t = 0 \tag{2.43}$$

- **Separación:**

$$t_n = 0 \quad ; \quad g_n \geq 0 \quad ; \quad \mathbf{t}_t = 0 \tag{2.44}$$

- **Deslizamiento:**

$$\begin{array}{ccc} t_n \leq 0 & ; & g_n = 0 \\ \mathbf{t}_t = -|t_n| M^2 \dot{\mathbf{g}}_t / \|\dot{\mathbf{g}}_t\|_\mu^* & ; & \dot{\mathbf{g}}_t \cdot \mathbf{t}_t = -\|\dot{\mathbf{g}}_t\|\ \|\mathbf{t}_t\| \end{array} \tag{2.45}$$

2.3.4. Fuerzas de contacto

Si establecemos como condición que Γ_c no posee gran combadura, podemos referir las tracciones a un mismo plano tangente (la base local $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1, \mathbf{n}\}$ es la misma para todas la parejas de puntos $I \in \Gamma_c$, ver Figura 2.7. Por tanto, la resultante de las fuerzas normales y tangenciales que existen en la superficie de contacto, se obtienen como se indica a continuación:

$$F_n = \int_{\Gamma_c} t_n \, d\Gamma \qquad ; \qquad \mathbf{F}_t = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_t \, d\Gamma \tag{2.46}$$

Ambas cargas satisfacen la ley de fricción, de forma que: $\|\mathbf{F}_t\| \leq |F_n|$. Cuando se da la igualdad, la zona de contacto entra completamente en deslizamiento y por tanto las tracciones tangenciales toman el valor indicado en la Ecuación (2.45).

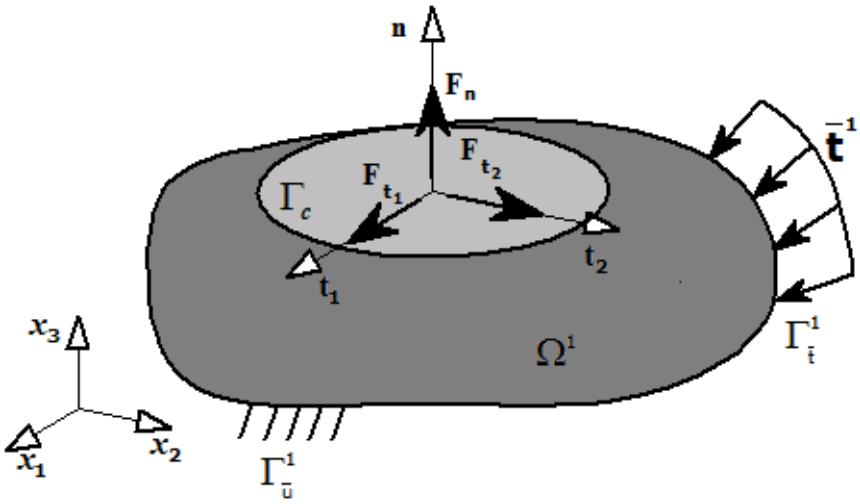


Figura 2.7: Resultante de las fuerzas en la zona de contacto Γ_c

2.4. Formulación del problema de contacto

Con la formulación del problema elástico y conocidas las ecuaciones cinemáticas del problema de contacto, así como sus leyes, podemos presentar la formulación del problema de contacto cuasi-estático entre dos sólidos Ω^α $(\alpha = 1, 2)$, para el instante τ_i, como:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}^\alpha + \mathbf{b}^\alpha = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \mathbf{L}\,\mathbf{u}^\alpha \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{C}^\alpha\,\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha \end{array}\right\} \quad en \quad \Omega^\alpha$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u}^\alpha = \overline{\mathbf{u}}^\alpha & \text{sobre} & \Gamma_{\overline{u}}^\alpha \\ \mathbf{t}^\alpha = \overline{\mathbf{t}}^\alpha & \text{sobre} & \Gamma_{\overline{t}}^\alpha \end{array} \tag{2.47}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} g_n = g_{go,n} + (u_n^2 - u_n^1) \\ \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{go,t} + (\mathbf{u}_t^2 - \mathbf{u}_t^1) \\ \Delta\mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t(\tau_{i-1}) \\ t_n = \mathbf{B}_n^T\,\mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_n^T\,\mathbf{t}^2 \\ \mathbf{t}_t = \mathbf{B}_t^T\,\mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_t^T\,\mathbf{t}^2 \\ g_n \geq 0, \quad t_n \leq 0 \quad y \quad g_n\,t_n = 0 \\ \|\mathbf{t}_t\|_\mu \leq |t_n| \quad siendo: \\ \quad \Delta\mathbf{g}_t = 0 \qquad\qquad si \quad \|\mathbf{t}_t\|_\mu < |t_n| \\ \quad \Delta\mathbf{g}_t = -\lambda\,(M^2)^{-1}\,\mathbf{t}_t/\|\mathbf{t}_t\|_\mu \qquad si \quad \|\mathbf{t}_t\|_\mu = |t_n| \\ \quad donde: \quad \lambda \geq 0 \quad y \quad M = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \quad sobre \quad \Gamma_c^\alpha \tag{2.48}$$

2.5. Problema de desgaste superficial

El desgaste, junto con la rotura o la corrosión, es una de las principales causas que hacen que un elemento mecánico o una herramienta dejen de ser funcionales. Básicamente existen cuatro formas de desgaste mecánico:

- **Desgaste por adhesión**: los fragmentos del material desgastado se eliminan de su superficie al adherirse a la otra durante el deslizamiento de sus contornos suaves.

- **Desgaste abrasivo**: aparece cuando el contacto con deslizamiento se produce entre una superficie rugosa y dura con otra blanda, produciéndose surcos en la blanda fruto del *arado*. El material que se desliga de los surcos da lugar al material desgastado.

- **Desgaste por corrosión**: se produce en ambientes corrosivos, como pueden ser lugares cercanos al mar, al desprenderse la película protectora de las superficies por el deslizamiento relativo, produciéndose entonces la corrosión en la superficie.

- **Desgaste por fatiga superficial**: se produce cuando el material es sometido a muchos ciclos de carga y descarga, lo que implica muchos deslizamientos relativos. Esto da como resultado la rotura de la superficie y formación de partículas desgastadas.

En este proyecto los resultados de los estudios relativos al problema de desgaste, serán por fatiga superficial (fretting wear).

2.5.1. Ley de desgaste de Holm-Archard

Según las evidencias experimentales obtenidas sobre materiales no lubricados, Holm estableció en [6] y Rabinowick en [11] las siguientes cuestiones:

- La cantidad de material desgastado es aproximadamente proporcional a la carga normal F_n y a la distancia deslizada D_s.

- La cantidad de material desgastado es de forma aproximada inversamente proporcional a la dureza superficial H de la superficie que se desgasta.

Esto posibilitó escribir una ley de desgaste por adhesión, que proporciona el volumen de material desgastado W_{W},

$$W_{\mathrm{W}} = c\,\frac{F_n}{H}\,D_s \tag{2.49}$$

siendo c una constante adimensional dependiente de los materiales en contacto y del grado de limpieza superficial.

Archard proporciona un modelo del proceso de deslizamiento que permitía obtener la expresión de Holm (2.49) y dar significado físico a c. Para ello asumía que

entre cada dos asperezas superficiales que entran en contacto formando una unión, está tiene una probabilidad constante k de dar lugar a un fragmento desprendido por adhesión. Para poder cuantificarla supone que cada fragmento desprendido es una semiesfera, de diámetro el de la unión.

Al considerar el caso de dos cuerpos en contacto, deslizando y bajo la acción de una fuerza F_n, llamamos H a la presión de fluencia del material más blando y A al área de contacto real, obtenemos la fuerza necesaria para la fluencia del material $F_n = A\ H$. Si se supone que todas las uniones tienen el mismo diámetro (d), todas tendrán una misma área $\pi d^2/4$, luego para obtener el área real solo tendremos que multiplicar por el número de uniones (n), dando a lugar $A = n\pi d^2/4$. Esto implica que $n = 4F_n/(\pi H d^2)$, donde las uniones se mantienen durante una distancia de deslizamiento igual al diámetro de la unión, después se rompe dicha unión y las asperezas entran en contacto con otras contiguas. Si la distancia de deslizamiento es una cualquiera, D_s, el número de uniones que se formarían seria el siguiente:

$$N = \frac{nD_s}{d} = \frac{4F_n D_s}{\pi H d^3} \tag{2.50}$$

La probabilidad de que se desprenda una partícula sólida de las uniones formadas, cuando la superficie desliza una distancia D_s, se obtiene a través del volumen del material desgastado, el de la semiesfera de diámetro d que se desprende y del número de uniones, mediante:

$$k = \frac{W_{\mathrm{W}}/(\pi d^3/12)}{4F_n D_s/(\pi H d^3)} = \frac{3W_{\mathrm{W}} H}{F_n D_s} \tag{2.51}$$

Despejando el volumen del material desgastado, obtenemos la ley de desgaste de Archard:

$$W_{\mathrm{W}} = \frac{k}{3}\frac{F_n}{H} D_s \tag{2.52}$$

que es igual que la de Holm (2.49), donde $c = k/3$. El factor proporcional de $1/3$ se debe a la geométria de la partícula desprendida, semiesfera.

Si dividimos la Ecuación (2.52) por el área aparente de la zona de contacto A_a, obtenemos la profundidad de desgaste media, g_{W}:

$$g_{\mathrm{W}} = \frac{k}{3}\frac{F_n}{H A_a} D_s \tag{2.53}$$

Introduciendo la tracción normal aparente en valor absoluto $|t_n| = F_n/A_a$ en la Ecuación (2.53), tenemos

$$g_{\mathrm{W}} = \frac{k}{3}\frac{|t_n|}{H}D_s \tag{2.54}$$

que definiendo $k_{ad} = k/3$, se tiene

$$g_{\mathrm{W}} = k_{ad}\,\frac{|t_n|}{H}D_s \tag{2.55}$$

El coeficiente de desgaste k_{ad} representa físicamente la probabilidad de que la interacción entre dos asperezas de lugar a una partícula de material dañado que se desprende de la superficies de los sólidos, su valor en caso de metales oscila entre:10^{-3} y 10^{-8}.

El rango de validez de la ley (2.55), se restringe a los casos de desgaste por adhesión en los que la velocidad por deslizamiento relativo sea baja para considerar despreciable los efectos térmicos. Podríamos considerar la misma expresión en el caso de desgaste abrasivo, aun teniendo un mecanismo de desgaste distinto al de adhesión. Para ello sustituimos el coeficiente de desgaste en la expresión (2.55), por k_{abr}, donde

$$g_{\mathrm{W}} = k_{abr}\,\frac{|t_n|}{H}D_s \tag{2.56}$$

k_{abr}, es el coeficiente de desgaste abrasivo, el cual tiene un valor que depende del ángulo medio de rugosidad, sus valores oscilan entre 10^{-2} y 10^{-5}.

La ley de desgaste de Holm-Archard puede ser usada también para predecir el desgaste en problemas de contacto por cargas cíclicas, será la utilizada en este proyecto, siendo

$$g_{\mathrm{W}} = k_{fr}\,\frac{|t_n|}{H}D_s \tag{2.57}$$

Con todo lo dicho anteriormente, la ley de desgaste de Holm-Archard se puede escribir como

$$g_{\mathrm{W}} = i_{\mathrm{W}}\,|t_n|\,D_s \tag{2.58}$$

siendo i_{W} el coeficiente de desgaste dimensional, que según sea la forma del desgaste, adquiere la forma de: k_{ad}/H, k_{abr}/H o k_{fr}/H.

Conocida la profundidad de desgaste, el volumen de material desgastado se obtiene integrando la profundidad de desgaste en la zona de contacto:

$$W_{\mathrm{W}} = \int_{\Gamma_c} g_{\mathrm{W}}\, d\Gamma \tag{2.59}$$

Como el proceso de desgaste ocurre con el paso del tiempo, es mejor expresar la Ecuación (2.58) en forma diferencial:

$$\dot{g}_{\mathrm{W}} = i_{\mathrm{W}}\, |t_n|\, \dot{D}_s \tag{2.60}$$

donde $\dot{D}_s$ es el módulo de la velocidad de deslizamiento: $\dot{D}_s = \|\dot{\mathbf{g}}_t\|$.

2.5.2. Ley de desgaste ortótropa.

La ley de desgaste ortótropa es inducida por la ley de fricción ortótropa, ver [15]. Ambas son usadas en este proyecto para el problema de desgaste superficial (fretting wear), ver Apartado 6. La fricción ortótropa es el resultado de la distribución ortótropa de las asperezas y huecos sobre las superficies en contacto y/o la ortotropía de las propiedades mecánicas de los materiales. Según esto, se asume que el coeficiente de desgaste i_W es fución de la orientación θ en la que se realice el deslizamiento, ver Figuras 2.8 y 2.6. Esto implica que la profundidad de desgaste y su variación temporal (ver Ecuaciones (2.58 , 2.60)) también son función de θ. En base a esto se considera un coeficiente de desgaste ortótropo:

$$i_{\mathrm{W}} = \sqrt{(i_1 \cos\theta)^2 + (i_2 \sin\theta)^2} \tag{2.61}$$

Donde: $\cos\theta = \dot{g}_{e_1}/\|\dot{\mathbf{g}}_t\|$, $\sin\theta = \dot{g}_{e_2}/\|\dot{\mathbf{g}}_t\|$ y i_1 e i_2 son los coeficientes de intensidad principales. Los cuales son proporcionales a la disipación de energía producida por la fricción, de la siguiente forma: $i_1 = k\mu_1|t_n|$, $i_2 = k\mu_2|t_n|$ donde k es el factor de desgaste. Si sustituimos en la Ecuación (2.61) las consideraciones anteriores, obtenemos:

$$i_{\mathrm{W}} = \frac{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|_i}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|}\,, \quad \textit{donde} \quad \|\dot{\mathbf{g}}_t\|_i = \sqrt{(i_1\ \dot{g}_{e_1})^2 + (i_2\ \dot{g}_{e_2})^2} \tag{2.62}$$

Finalmente, la ley de desgaste ortótropa queda definida de la siguiente forma:

$$\dot{g}_W = |t_n| \, \|\dot{\mathbf{g}}_t\|_i \tag{2.63}$$

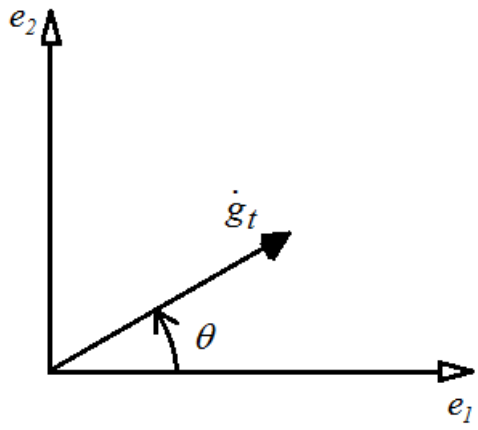


Figura 2.8: Orientación de la dirección de deslizamiento.

2.6. Formulación del desgaste en problemas de contacto

La consideración del desgaste de las superficies en la resolución del problema de contacto aumenta su dificultad, al requerir resolver un problema en el que se acoplan las variables de contacto normales y tangenciales, teniendo en cuenta el cambio de la geometría. En los casos en los que la cantidad de material desprendido es muy pequeña, se puede aplicar la ley (2.63) en fase de pos-procesado, al ser las variaciones de las tracciones de contacto (t_n) y las velocidades de deslizamiento ($\dot{\mathbf{g}}_t$) despreciables, al igual que el cambio de geometría. Pero en los problemas de contacto donde se someten a las superficies de los sólidos a cargas cíclicas o progresivas, el desprendimiento acumulado de material, origina cambios en las geometrías superficiales que modifican los valores de las variables de contacto. En estos casos la resolución del problema de contacto y desgaste se realiza de forma acoplada. Esto se debe, a que las variables dependen de las variaciones geométricas que se van produciendo en la superficie de los sólidos y a su vez el desgaste que tiene lugar depende de las tracciones de contacto y de los deslizamientos relativos de dichas superficies.

En muchos problemas ingenieriles el desgaste superficial en los sólidos es muy pequeño, esto permite, que a nivel global sea despreciable los cambios de volumen producidos. Esto permite formular el desgaste partiendo del problema de contacto definido en este capítulo, teniendo presente que la variable cinemática normal (g_n) en el instante τ_i, se define como:

$$g_n = g_{go,n} + \left(u_n^2 - u_n^1\right) + g_{\mathrm{W}} \tag{2.64}$$

La profundidad de desgaste en dicho instante τ_i, se calcula según (2.60), para problemas de contacto cuasi-estáticos como:

$$g_{\mathrm{W}} = g_{\mathrm{W}}\left(\tau_{i-1}\right) + |t_n| \, \|\Delta \mathbf{g}_t\|_i \tag{2.65}$$

El acoplamiento entre los problemas de contacto y desgaste se aprecian en las Ecuaciones (2.64) y (2.65). La profundidad de desgaste se calcula respecto a la del instante anterior más el que se produce en este instante y así sucesivamente. En cambio la variable de contacto g_n en cada instante depende de la profundidad de desgaste en ese mismo instante como muestra en la Ecuación (2.64).

La formulación del problema de contacto cuasi-estático entre dos sólidos Ω^α ($\alpha = 1, 2$), considerando el desgaste superficial, para el instante τ_i, se plantea como:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \mathbf{b}^\alpha = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \mathbf{L}\,\mathbf{u}^\alpha \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{C}^\alpha\,\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha \end{array}\right\} \quad en \quad \Omega^\alpha$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u}^\alpha = \overline{\mathbf{u}}^\alpha & \text{sobre} & \Gamma_{\overline{u}}^\alpha \\ \mathbf{t}^\alpha = \overline{\mathbf{t}}^\alpha & \text{sobre} & \Gamma_{\overline{t}}^\alpha \end{array} \tag{2.66}$$

y

$$
\left.
\begin{array}{l}
g_n = g_{go,n} + (u_n^2 - u_n^1) + g_{\mathrm{W}} \\
g_{\mathrm{W}} = g_{\mathrm{W}}(\tau_{i-1}) + |t_n| \, \|\Delta \mathbf{g}_t\|_i \\
\mathbf{g}_t = \mathbf{g}_{go,t} + (\mathbf{u}_t^2 - \mathbf{u}_t^1) \\
\Delta \mathbf{g}_t = \mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t(\tau_{i-1}) \\
t_n = \mathbf{B}_n^T \, \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_n^T \, \mathbf{t}^2 \\
\mathbf{t}_t = \mathbf{B}_t^T \, \mathbf{t}^1 = -\mathbf{B}_t^T \, \mathbf{t}^2 \\
g_n \geq 0, \quad t_n \leq 0 \quad y \quad g_n \, t_n = 0 \\
\|\mathbf{t}_t\|_\mu \leq |t_n| \quad \textit{siendo}: \\
\quad \Delta \mathbf{g}_t = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{si} \quad \|\mathbf{t}_t\|_\mu < |t_n| \\
\quad \Delta \mathbf{g}_t = -\lambda \, (M^2)^{-1} \, \mathbf{t}_t / \|\mathbf{t}_t\|_\mu \qquad \textit{si} \quad \|\mathbf{t}_t\|_\mu = |t_n| \\
\quad \textit{donde:} \quad \lambda \geq 0 \quad y \quad M = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}
\end{array}
\right\} \quad \textit{sobre} \quad \Gamma_c^\alpha \qquad (2.67)
$$

Capítulo 3

Materiales reforzados con fibras

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan los materiales que serán objeto de estudio durante el desarrollo del trabajo, mencionando tres aspectos clave: el tipo de fibra, si es continua o corta y su orientación. Posteriormente se establece la relación entre las tensiones y deformaciones a partir de la matriz de comportamiento $\mathbf{C}$, que nos permitirá caracterizar al material mediante sus constantes independientes, y finalmente se indicará como se pasa $\mathbf{C}$ desde un sistema de referencia local ligado a la fibra a otro global mediante las matrices de transformación.

3.2. Material transversalmente isótropo

En este trabajo los materiales estudiados bajo la condición de contacto con fricción son los *materiales transversalmente isótropos*, los cuales presentan igualdad de comportamiento en todas las direcciones de un plano. Para el caso de un polímero reforzado por fibras de vidrio o carbono paralelas, se da la existencia de una dirección preferente, la longitudinal (x_1) siendo todas las secciones transversales a la dirección preferente mecánicamente equivalentes ($x_2 - x_3$). Esto se justifica, al ser los materiales transversalmente isótropos un subtipo de material ortótropo, por lo que poseen tres planos de simetría con el añadido de que uno de ellos es de isotropía, simplificando el estudio al pasar de tener 9 a 5 constantes elásticas independientes.

3.2.1. Materiales objeto de estudio

Los materiales utilizados en los diferentes estudios que se exponen en este trabajo son los siguientes:

1. E-Glass\MY750
2. S2-Glass\Epoxy 2
3. AS\Epoxy 1
4. IM7\8551-7 Epoxy

(ver propiedades de la fibra y matriz en [7]). El estudio de la micromecánica de estos materiales y su influencia en los problemas de contacto aparece con el desarrollo de la industria aeronáutica, donde la necesidad de encontrar materiales con una relación resistencia/peso alta es crucial, depués otros sectores como la edificación o la automoción han ido utilizando cada vez más este tipo de materiales. Además, su ágil manipulación al poderse serrar como la madera, y fácil ensamblado obligan a conocer su respuesta en problemas de contacto con fricción y desgaste. Para ello se plantea el estudio de estos materiales en el caso de refuerzo con fibras continuas o cortas teniendo presente en ambos casos el porcentaje en volumen de fibra ($\%v_f$), su orientación (α), y en el caso de fibras cortas añadiríamos la relación de aspecto (r_{asp}).

3.2.2. Ley de comportamiento

Esta ley establece la relación entre las tensiones y las deformaciones a través de la matriz de comportamiento $\mathbf{C}$, esta relación también se puede plantear de forma inversa por ser $\mathbf{C}$ simétrica, mediante $\mathbf{S} = \mathbf{C^{-1}}$. En base a esto podemos particularizar para los materiales transversalmente isótropos lo siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{3.1}$$

Independientes	Dependientes
$E_1,\ E_2$	$E_3 = E_2,\ G_{13} = G_{12}$
G_{12}	$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}$
$\nu_{12},\ \nu_{23}$	$\nu_{13} = \nu_{12}$

Cuadro 3.1: Constantes ingenieriles para un material transversalmente isótropo

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

S tiene 9 constantes ingenieriles no nulas de las cuales 5 son independientes (ver Cuadro 3.1). Representado respecto a un sistema de referencia $\{x_1, x_2, x_3\}$ cuyos ejes son perpendiculares a los planos de simetría y concretamente x_1 perpendicular al plano de isotropía, de no ser elegido este sistema de referencia la matriz **S** aparecería con más elementos no nulos.

Asociando a cada elemento de **S** la siguiente nomenclatura, su representación queda:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

si invertimos **S** se obtiene:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Donde identificamos dos submatrices no nulas, **L** que es llena y **M** que es diagonal:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}^2) & E_2\,\nu_{12}(1+\nu_{23}) & E_2\,\nu_{12}(1+\nu_{23}) \\ E_2\,\nu_{12}(1+\nu_{23}) & E_2(1-\frac{E_2}{E_1}\,\nu_{12}^2) & E_2(\nu_{23}+\frac{E_2}{E_1}\,\nu_{12}^2) \\ E_2\,\nu_{12}(1+\nu_{23}) & E_2(\nu_{23}+\frac{E_2}{E_1}\,\nu_{12}^2) & E_2(1-\frac{E_2}{E_1}\,\nu_{12}^2) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$D = 1-\nu_{23}^2-2(1+\nu_{23})\frac{E_2}{E_1}\,\nu_{12}^2 \tag{3.7}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} & 0 & 0 \\ 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.2.3. Transformaciones de tensiones y deformaciones

Considerando dos sistemas de coordenadas cartesianas: $\{p, q, r\}$ y $\{p', q', r'\}$, ver [9]. La orientación del que lleva prima, respecto al sin prima, viene dada por los nueve cosenos directores (r_{11}, r_{21}, r_{31}), (r_{12}, r_{22}, r_{32}), (r_{13}, r_{23}, r_{33}) (ver Figura 3.1). La orientación del sistema con prima respecto al sin prima, se puede obtener también con la rotación sucesiva de los ejes del sistema sin prima , en una cuantía indicada por los ángulos $\Theta_p, \Theta_q, \Theta_r$. El sentido positivo de estos giros es el antihorario (ver Figura 3.2).

Estos ángulos están relacionados con los cosenos directores mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \Theta_q &= Atan2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2+r_{21}^2}) \\ \Theta_r &= Atan2(r_{21}/\cos\Theta_q, r_{11}/\cos\Theta_q) \\ \Theta_p &= Atan2(r_{32}/\cos\Theta_q, r_{33}/\cos\Theta_q) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Donde $Atan2(y, x)$, es una función de arco tangente con dos posibles argumentos:

$$\begin{aligned} Atan2(y,x) &= tan^{-1}(\tfrac{y}{x}) \qquad si \quad x>0 \\ Atan2(y,x) &= tan^{-1}(\tfrac{y}{x})+\pi \qquad si \quad x<0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

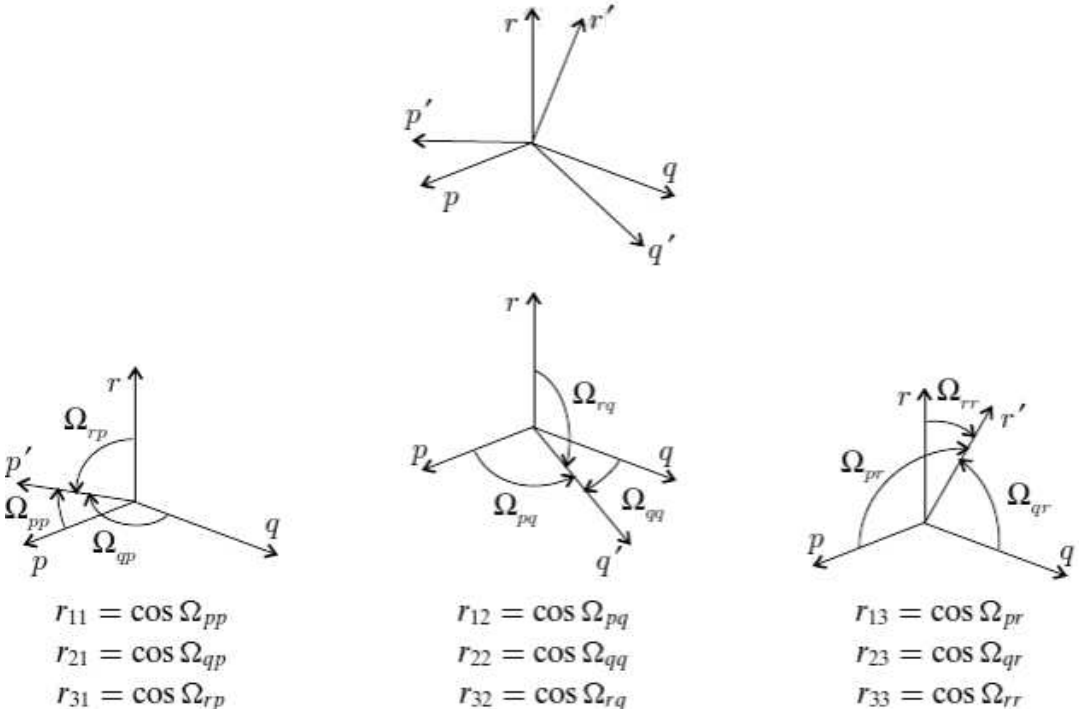


Figura 3.1: Cosenos directores. Figura sacada de [9].

Cuando $\Theta_q = 90°$, los valores de Θ_r y Θ_p son:

$$\Theta_r = 0° \qquad \Theta_p = Atan2(r_{12}, r_{22}) \tag{3.11}$$

Ahora particularizamos para el caso que nos ocupa, en el que el eje longitudinal ligado a la orientación de la fibra p' (sistema de referencia local) forma un ángulo α respecto del eje p (sistema de referencia global). Para poder componer el sistema local respecto al global tenemos que dar un giro $\Theta_q = \alpha$, esto nos permitirá pasar las tensiones y las deformaciones desde el sistema local ligado a la orientación de la fibra según p', al sistema global en la que p coincidiría con la dirección longitudinal de la fibra cuando esta formase respecto de el un ángulo de $\alpha = 0°$.

- **Transformación de tensiones**
  Partimos del sistema de referencia local donde la ley de comportamiento se expresa de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma'} = \boldsymbol{C'}\ \boldsymbol{\varepsilon'} \tag{3.12}$$

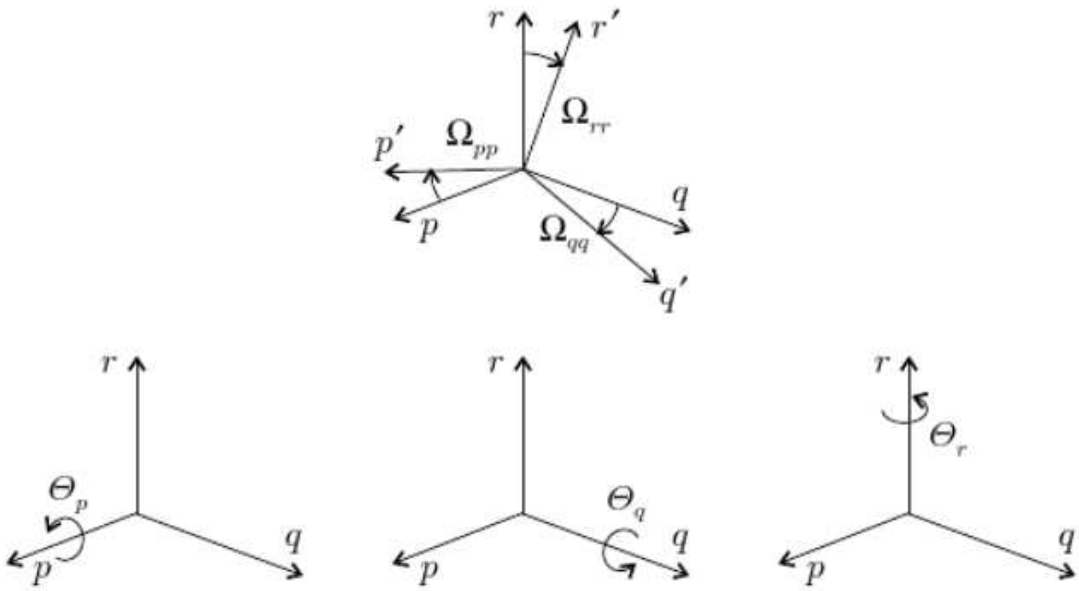


Figura 3.2: Rotaciones sucesivas para llegar al sistema $\{p', q', r'\}$. Figura sacada de [9].

Para girar las tensiones procedemos a premultiplicar por su matriz de giro:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_{\sigma}^{q}\, \boldsymbol{\sigma'} \tag{3.13}$$

$$\mathbf{T}_{\sigma}^{q} = \begin{bmatrix} c_q^2 & 0 & s_q^2 & 0 & 2c_q s_q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_q^2 & 0 & c_q^2 & 0 & -2c_q s_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_q & 0 & -s_q \\ -c_q s_q & 0 & c_q s_q & 0 & c_q^2 - s_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_q & 0 & c_q \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c_q = \cos\Theta_q \\ s_q = \sin\Theta_q \end{matrix} \tag{3.14}$$

- **Transformación de las deformaciones**

  Procediendo igual que antes, premultiplicamos las deformaciones por su matriz de giro:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_{\varepsilon}^{q}\, \boldsymbol{\varepsilon'} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{T}_{\varepsilon}^{q} = \begin{bmatrix} c_q^2 & 0 & s_q^2 & 0 & c_q s_q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_q^2 & 0 & c_q^2 & 0 & -c_q s_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_q & 0 & -s_q \\ -2c_q s_q & 0 & 2c_q s_q & 0 & c_q^2 - s_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_q & 0 & c_q \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c_q = \cos\Theta_q \\ s_q = \sin\Theta_q \end{matrix} \tag{3.16}$$

- **Matriz de comportamiento en globales**

  Teniendo presente que las matrices de giro son ortogonales, podemos escribir:

$$\mathbf{T}_{\sigma}^{q^T} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C'}\ \mathbf{T}_{\varepsilon}^{q^T} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.17}$$

  Finalmente podemos expresar en globales, las tensiones en función de las deformaciones, con solo multiplicar por $\mathbf{T}_{\sigma}^{q}$ la Ecuación (3.17):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_{\sigma}^{q} \boldsymbol{C'}\ \mathbf{T}_{\varepsilon}^{q^T} \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \textit{donde} \quad \boldsymbol{C} = \mathbf{T}_{\sigma}^{q} \boldsymbol{C'}\ \mathbf{T}_{\varepsilon}^{q^T} \tag{3.18}$$

Capítulo 4

Modelos Micromecánicos

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan tres modelos micromecánicos para *fibras continuas*: Hopkins-Chamis, Hashin-Rosen y por ultimo el de Chamis. Todos ellos serán particularizados para los cuatro materiales objeto de estudio (ver Apartado 3.2.1), permitiéndonos obtener las cinco constantes elásticas independientes para cada uno de ellos en función del contenido en fibra, para posteriormente hacer una comparación de los modelos micromecánicos con cada material. Después se presenta el modelo de Halpin-Tsai para *fibras cortas*, donde se hará lo mismo que lo anteriormente expuesto con los modelos de fibras largas, con la diferencia que introduciremos una nueva variable que nos permitirá caracterizar a la fibras cortas, la relación de aspecto (r_{asp}). Finalmente se hará una comparación del modelo de Hopkins-Chamis respecto al de Halpin-Tsai para el material IM7\8551-7 Epoxy, donde se apreciará la influencia de la relación de aspecto.

4.2. Modelo de Hopkins and Chamis

La micromecánica [4] se utiliza para estimar las propiedades mecánicas y higrotérmicas de materiales compuestos, a partir de los valores conocidos de las propiedades de la fibra y la matriz. Existen numerosos modelos disponibles, pero en este apartado nos centramos en dos de los modelos de la mecánica de materiales: la *ley de mezclas* y la *ley de mezclas modificada*, ver [9].

La ley de mezclas es la más sencilla, pero falla para representar algunas de las propiedades con una precisión razonable. La ley de mezclas modificada es una mejora con respecto a la ley de mezclas, y predice las propiedades con mejores precisiones.

4.2.1. Ley de mezclas

Si consideramos el volumen V del elemento mostrado en la Figura 4.1. El volumen de este elemento es:

$$V = V_f + V_m + V_V \tag{4.1}$$

donde los subíndices f, m y v se refieren a la fibra, matriz y huecos. Introduciendo las fracciones de volumen de la siguiente manera:

$$\upsilon_f = \frac{V_f}{V} \qquad \upsilon_m = \frac{V_m}{V} \qquad \upsilon_V = \frac{V_V}{V} \tag{4.2}$$

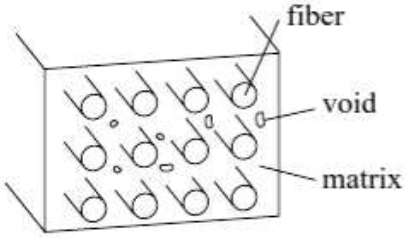


Figura 4.1: Ilustración de la matriz, fibra y huecos. Figura sacada de [9].

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) dan:

$$\upsilon_f + \upsilon_m + \upsilon_V = 1 \tag{4.3}$$

Cuando la fracción de huecos (υ_V) es insignificante, tenemos:

$$\upsilon_f = 1 - \upsilon_m \tag{4.4}$$

La masa del elemento de la Figura 4.1 es:

$$M = M_f + M_m + M_V \tag{4.5}$$

Al ser nula la masa de los huecos, podemos escribir esta ecuación como:

$$M = \rho_f \, V_f + \rho_m \, V_m \tag{4.6}$$

donde ρ_f y ρ_m son las densidades de la fibra y la matriz respectivamente. La densidad del compuesto es:

$$\rho_{comp} = \upsilon_f \, \rho_f + \upsilon_m \, \rho_m \tag{4.7}$$

A continuación, se indican las propiedades de los compuestos reforzados con fibra paralelas, utilizando dos tipos de elementos (ver Figura 4.2). El elemento 1 contiene un único haz de fibras de sección transversal circular. El elemento 2 consiste en una capa de fibra emparedada entre dos capas del material de la matriz. En el elemento 2, los volmenes de fibra y la matriz son los mismos que en elemento 1 ($V_{f1} = \upsilon_f \, L^3 = V_{f2} = L^2 \, L_f$). Por lo tanto, el espesor de la capa de fibras en el elemento 2 es $L_f = \upsilon_f \, L$.

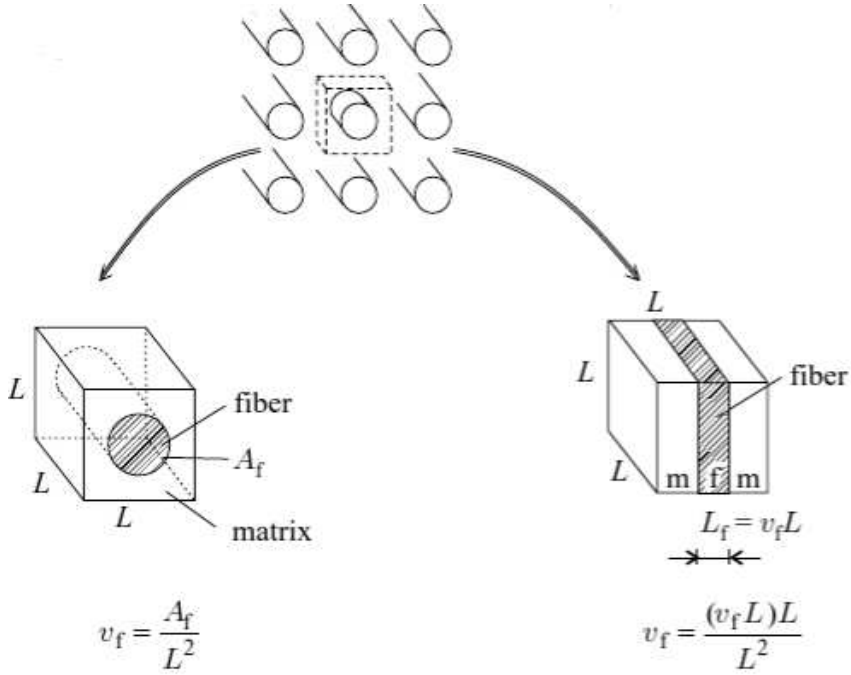


Figura 4.2: Elementos representativos, elemento 1 (izquierda) y elemento 2 (derecha). Figura sacada de [9].

4.2.2. Módulo de Young longitudinal E_1

El elemento 1 es sometido a una fuerza F_1 en la dirección de la fibra (ver Figura 4.3). La fuerza distribuida sobre la superficie es

$$F_1 = \sigma_1 \, A \tag{4.8}$$

donde σ_1 es la tensión normal longitudinal promedio a través de todo el área de sección transversal A ($A = L^2$).

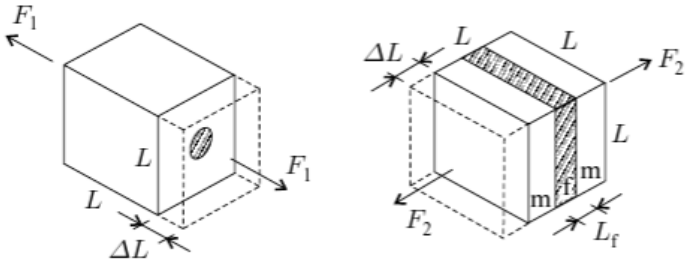


Figura 4.3: Elemento 1 sometido a una fuerza en la dirección de la fibra (izquierda), y el elemento 2 sometido a una fuerza en la dirección transversal (derecha). Figura sacada de [9].

Parte de la fuerza se soporta por las fibras y parte por la matriz, de modo:

$$\sigma_1 \, A = A_f \, \sigma_{f1} + A_m \, \sigma_{m1} \tag{4.9}$$

A_f y A_m son las áreas de sección transversal del haz de fibras y la matriz, respectivamente. Cuando el efecto de Poisson no se tiene en cuenta, las tensiones normales en el compuesto, en el haz de fibras y en la matriz son:

$$\sigma_1 = E_1 \, \varepsilon_1 \qquad \sigma_{f1} = E_{f1} \, \varepsilon_{f1} \qquad \sigma_{m1} = E_m \, \varepsilon_{m1} \tag{4.10}$$

donde E_1 y E_{f1} son los módulos de Young longitudinales del compuesto y de la fibra, respectivamente y E_m es el módulo de Young de la matriz. Las ecuaciones (4.9) y (4.10) dan:

$$E_1 \, \varepsilon_1 = \frac{A_f}{A} \, E_{f1} \, \varepsilon_{f1} + \frac{A_m}{A} \, E_m \, \varepsilon_{m1} \tag{4.11}$$

Los alargamientos ΔL, y por lo tanto, las deformaciones longitudinales normales del compuesto ε_1, la fibra ε_{f1} y la matriz ε_{m1} son iguales:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1} \tag{4.12}$$

Las fracciones de volumen son:

$$v_f = \frac{A_f}{A} \qquad v_m = \frac{A_m}{A} \tag{4.13}$$

Las ecuaciones (4.11-4.13) dan como resultado la siguiente expresión para el módulo longitudinal del compuesto en función de los módulos de la fibra y la matriz:

$$E_1 = v_f\, E_{f1} + v_m\, E_m = v_f\, E_{f1} + (1 - v_f)\, E_m \tag{4.14}$$

4.2.3. Módulo de Young transversal E_2

Se considera un elemento cúbico de lado L compuesto de tres capas (Elemento 2, ver Figura 4.3), la capa interior es una lámina de fibra con el mismo volumen que el haz de fibras del elemento 1. La longitud y el módulo de Young transversal (dirección x_2) de la capa interior, se indican por L_f y E_{f2} respectivamente, la longitud y el módulo de Young de las capas externas serian $L_m = (L - L_f)/2$ y E_m. El elemento 2 se somete a una fuerza F_2, distribuida uniformemente a través de la superficie A ($A = L^2$). La tensión normal en la dirección transversal es $\sigma_2 = F_2/A$, que se puede expresar como:

$$\sigma_2 = E_2\, \varepsilon_2 \tag{4.15}$$

donde E_2 es el mdulo de Young transversal del elemento y ε_2 es la deformación transversal:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L}{L} \tag{4.16}$$

El cambio en la longitud del elemento es:

$$\Delta L = 2\, L_m\, \varepsilon_{m2} + L_f\, \varepsilon_{f2} \tag{4.17}$$

donde ε_{m2} y ε_{f2} son las deformaciones transversales de la matriz y capa de fibra. Al despreciar el efecto Poisson, tenemos:

$$\varepsilon_{m2} = \frac{\sigma_{m2}}{E_m} \qquad \varepsilon_{f2} = \frac{\sigma_{f2}}{E_{f2}} \qquad \textit{donde} \quad E_m = E_{m1} = E_{m2} \tag{4.18}$$

Introduciendo las ecuaciones (4.17) y (4.18) en la Ecuación (4.16), obtenemos:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2L_m}{L}\frac{\sigma_{m2}}{E_m} + \frac{L_f}{L}\frac{\sigma_{f2}}{E_{f2}} \tag{4.19}$$

Los esfuerzos transversales normales en el compuesto σ_2 , la matriz σ_{m2} y la capa de fibra σ_{f2} son iguales:

$$\sigma_2 = \sigma_{m2} = \sigma_{f2} \tag{4.20}$$

Las fracciones de volumen de la matriz y la fibra son:

$$\upsilon_f = \frac{L_f}{L} \qquad \upsilon_m = \frac{2L_m}{L} \tag{4.21}$$

Finalmente haciendo las siguientes operaciones, llegamos al módulo de Young transversal:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_2}{\upsilon_m \varepsilon_{m2} + \upsilon_f \varepsilon_{f2}} = \frac{\sigma_2}{\upsilon_m \frac{\sigma_2}{E_{m2}}} + \frac{\sigma_2}{\upsilon_f \frac{\sigma_2}{E_{f2}}}$$

$$E_2 = \left(\frac{\upsilon_f}{E_{f2}} + \frac{\upsilon_m}{E_m}\right)^{-1} = \left(\frac{\upsilon_f}{E_{f2}} + \frac{1-\upsilon_f}{E_m}\right)^{-1} \tag{4.22}$$

4.2.4. Módulo de Cizalladura longitudinal G_{12}

Considerando el elemento 2, la longitud y el módulo de cizalladura longitudinal de la capa interior, se indican por L_f y G_{f12} respectivamente, la longitud y el módulo de cizalladura de las capas externas son L_m y G_m. El elemento se somete a una fuerza de cizallamiento F_{12} (ver Figura 4.4) distribuida uniformemente a través de la superficie A ($A = L^2$). El esfuerzo cortante $\tau_{12} = F_{12}/A$ es

$$\tau_{12} = \gamma_{12}\, G_{12} \tag{4.23}$$

donde G_{12} es el módulo de cizallagura longitudinal del elemento y γ_{12} es la distorsión de la proyección en planta del elemento,

$$\gamma_{12} \cong \tan \gamma_{12} = \frac{\Delta L}{L} \tag{4.24}$$

donde ΔL es debida a las deformaciones de cizalladura de la matriz y la capa de fibra.

$$\Delta L = 2\, L_m\, \gamma_{m12} + L_f\, \gamma_{f12} \tag{4.25}$$

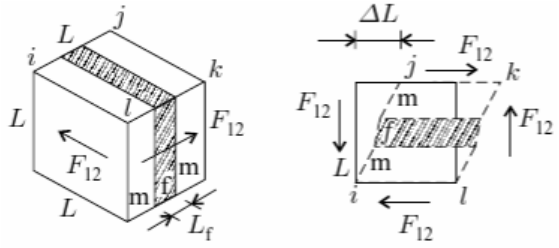


Figura 4.4: Elemento 2 sometido a una fuerza de corte y la deformación de la cara superior $\{ijkl\}$. Figura sacada de [9].

siendo γ_{m12} y γ_{f12} son las deformaciones de tangenciales de las capas de matriz y fibra, expresadas siguiente manera:

$$\gamma_{m12} = \frac{\tau_{m12}}{G_m} \qquad \gamma_{f12} = \frac{\tau_{f12}}{G_{f12}} \tag{4.26}$$

La tensión tangencial en el material compuesto, la matriz y la capa de fibra son iguales:

$$\tau_{12} = \tau_{m12} = \tau_{f12} \tag{4.27}$$

Finalmente haciendo las siguientes operaciones, llegamos al módulo de cizalladura longitudinal:

$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{12}}{\upsilon_m\, \gamma_{m12} + \upsilon_f\, \gamma_{f12}} = \frac{\tau_{12}}{\upsilon_m\, \frac{\tau_{12}}{G_m} + \upsilon_f\, \frac{\tau_{12}}{G_{f12}}}$$

$$G_{12} = \left(\frac{\upsilon_f}{G_{f12}} + \frac{\upsilon_m}{G_m} \right)^{-1} = \left(\frac{\upsilon_f}{G_{f12}} + \frac{1 - \upsilon_f}{G_m} \right)^{-1} \tag{4.28}$$

4.2.5. Módulo de Cizalladura transversal G_{23}

Una vez más, se considera el elemento 2 formado por tres capas (ver Figura 4.4). El módulo de cizalladura transversal G_{23} de este elemento se obtiene de la misma manera que el módulo de cizalladura longitudinal G_{12}. El resultado es

$$G_{23} = \left(\frac{\upsilon_f}{G_{f23}} + \frac{1 - \upsilon_f}{G_m} \right)^{-1} \tag{4.29}$$

4.2.6. Coeficiente de Poisson longitudinal ν_{12}

El elemento 1, que se muestra en la Figura 4.2, se somete a una fuerza F_1 en la dirección longitudinal x_1. Debido a esta fuerza el elemento se deforma, como se ilustra en la Figura 4.5. Los lados del elemento deformado son $(L + \Delta L_1)$, $(L - \Delta L_2)$ y $(L - \Delta L_3)$. El cambio en el área de la sección transversal A es

$$\Delta A = A - (L - \Delta L_2)(L - \Delta L_3) \tag{4.30}$$

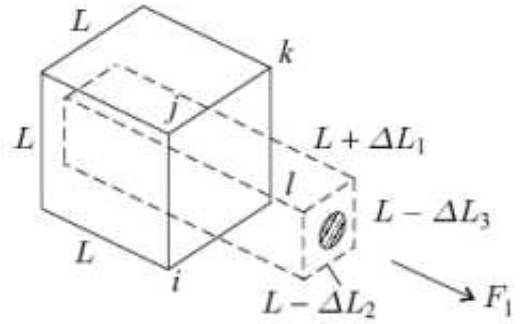


Figura 4.5: Deformación del elemento 1 sometido a una fuerza longitudinal en dirección x_1. Figura sacada de [9].

Las deformaciones normales según las direcciones x_2 y x_3 son

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta L_2}{L} \qquad \varepsilon_3 = -\frac{\Delta L_3}{L} \tag{4.31}$$

Debido a la simetría, $\Delta L_2 = \Delta L_3$ y, por tanto tenemos

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \tag{4.32}$$

Haciendo uso de las ecuaciones (4.30 - 4.32) y despreciando los términos de orden superior se obtiene

$$\Delta A = A\,(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2\ A\ \varepsilon_2 \tag{4.33}$$

Por las misma razón, los cambios en las áreas de la matriz y la fibra son

$$\Delta A_f = 2\ A_f\ \varepsilon_{f2} \qquad \Delta A_m = 2\ A_m\ \varepsilon_{m2} \tag{4.34}$$

El cambio en el área A, es la suma de los cambios de área de las zonas de fibra y de matriz

$$\Delta A = \Delta A_f + \Delta A_m \tag{4.35}$$

Bajo la acción de la tensión normal longitudinal, las deformaciones normales transversales están relacionadas con la deformación normal longitudinal por

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\,\varepsilon_1 \qquad \varepsilon_3 = -\nu_{13}\,\varepsilon_1 \tag{4.36}$$

Debido a las ecuaciones (4.32) y (4.36), tenemos

$$\nu_{12} = \nu_{13} \tag{4.37}$$

Utilizando las ecuaciones (4.36) y (4.33), obtenemos

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\Delta A}{2A}\frac{1}{\varepsilon_1} \tag{4.38}$$

Ahora combinamos las ecuaciones (4.35) y (4.38) para posteriormente introducir en la expresión resultante la Ecuación (4.34), dando lugar a

$$\nu_{12} = -\frac{2A_f\varepsilon_{f2} + 2A_m\varepsilon_{m2}}{2A}\frac{1}{\varepsilon_1} = -\frac{A_f}{A}\frac{\varepsilon_{f2}}{\varepsilon_1} - \frac{A_m}{A}\frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_1} \tag{4.39}$$

Los cambios en las longitudes de la fibra, la matriz, y el material compuesto son iguales. Por consiguiente, en la dirección x_1 las deformaciones normales en el material compuesto, en la fibra y en la matriz son iguales como se indica:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1} \tag{4.40}$$

Con las definiciones

$$\upsilon_f = \frac{A_f}{A} \qquad \upsilon_m = \frac{A_m}{A} \qquad \nu_{f12} = -\frac{\varepsilon_{f2}}{\varepsilon_{f1}} \qquad \nu_m = -\frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{m1}} \tag{4.41}$$

Finalmente, las ecuaciones (4.39 - 4.41), dan lugar al coeficiente de Poisson longitudinal:

$$\nu_{12} = \upsilon_f\,\nu_{f12} + \upsilon_m\,\nu_m \tag{4.42}$$

4.2.7. Coeficiente de Poisson transversal ν_{23}

Para un material transversalmente isótropo, el módulo de cizalladura y el de Young transversales, están relacionados por la siguiente expresión

$$G_{23} = \frac{E_2}{2\,(1+\nu_{23})} \tag{4.43}$$

Despejando ν_{23} de la Ecuación (4.43), obtenemos la expresión del coeficiente de Poisson transversal

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2\,G_{23}} - 1 \tag{4.44}$$

Expresiones más precisas para E_2 y el G_{23}, se obtienen mediante la ley de mezclas modificada.

4.2.8. Ley de mezclas modificada

La ley de mezclas modificada es algo más compleja que la ley de mezclas, pero da las propiedades transversales con mayor precisión. Se explican las principales caractersticas del modelo a través de la modificación del módulo de Young transversal. Se parte de un elemento en el que se toma el haz de fibras de sección transversal rectangular. La fracción de volumen de este haz de fibras rectangular, es la misma que la fracción de volumen del haz de fibras circular, ver Figura 4.6.

Como primer paso se reemplaza este elemento por otro con con tres capas, las dos capas exteriores se componen de la matriz, mientras que, por ahora se toma la capa media por un material homogéneo ficticio. Este ultimo elemento se compara con el elemento 2 que se muestra en la Figura 4.2. Para este elemento, la capa media (designado por b) se puede identificar con la lámina de fibra media en el elemento 2. Por lo tanto, el módulo de Young transversal de este elemento cuya capa media es un material homogéneo ficticio, viene dada por la Ecuación (4.22) con el subíndice f sustituido por b.

$$E_2 = \left(\frac{\upsilon_b}{E_{b2}} + \frac{1-\upsilon_b}{E_m}\right)^{-1} \tag{4.45}$$

La fracción de volumen de la capa media υ_b, se determina como sigue. La anchura de la capa media L_b es la misma que la anchura del haz de fibras rectangular.

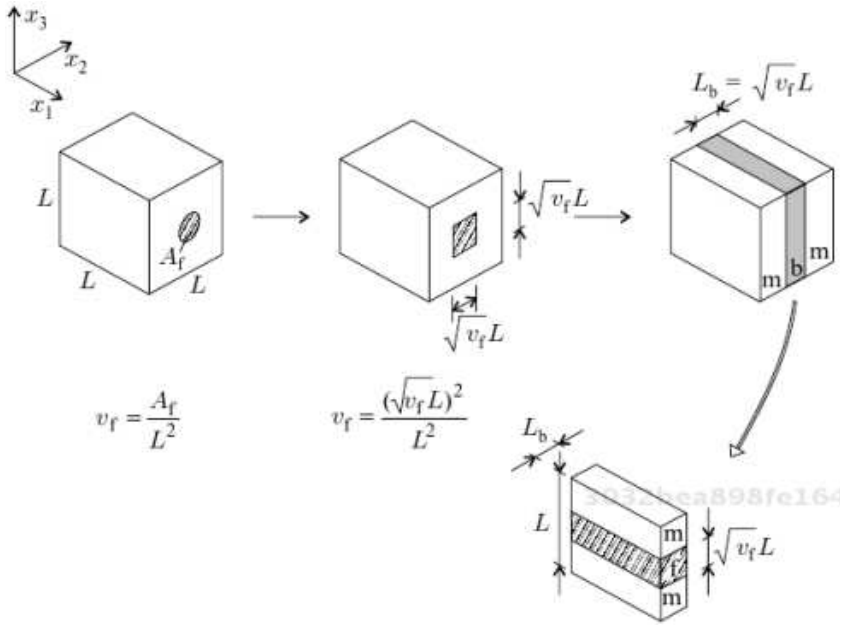


Figura 4.6: Modelo para la ley de mezclas modificada (arriba) y la representación de la capa media "b"(abajo). Figura sacada de [9].

Por lo tanto v_b es

$$v_b = \frac{(L)\,(L_b)}{L^2} = \frac{L\sqrt{v_f}}{L} = \sqrt{v_f} \tag{4.46}$$

donde v_f es la fracción de volumen de fibra del haz de sección transversal rectangular $\left(v_f = (\sqrt{v_f}L)^2/L^2\right)$ ver Figura 4.6.

El módulo de Young E_{b2} de la capa media se obtiene mediante la sustitución de esta capa ficticia homogeneizada, por una capa que formadaen por un haz de fibras rectangular rodeada de la matriz. La fracción de volumen, del haz de fibras, en esta capa intermedia es $\frac{(\sqrt{v_f}\,L)L_b}{L\,L_b} = \sqrt{v_f}$. Ahora aplicamos la ley longitudinal de mezclas (ver Ecuación (4.14)) a la capa intermedia. El resultado es

$$E_{b2} = \sqrt{v_f}\,E_{f2} + (1 - \sqrt{v_f})\,E_m \tag{4.47}$$

Las ecuaciones (4.45 - 4.47) dan el módulo de Young transversal. Otras propiedades se pueden obtener de manera similar, sus resultados se presentan en el siguiente apartado.

4.2.9. Expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Hopkins and Chamis

En el siguiente recuadro se muestra como obtener las propiedades mecánicas macroscópicas a partir de la microestructura, según el modelo de Hopkins-Chamis.

Modelo Hopkins and Chamis

Módulo de Young longitudinal	$E_1 = \upsilon_f \, E_{f1} + \upsilon_m \, E_m$
Módulo de Young transversal	$E_2 = \left(\frac{\sqrt{\upsilon_f}}{E_{b2}} + \frac{1-\sqrt{\upsilon_f}}{E_m} \right)^{-1}$ $donde \quad E_{b2} = \sqrt{\upsilon_f} \, E_{f2} + (1 - \sqrt{\upsilon_f}) \, E_m$
Módulo de Cizalladura longitudinal	$G_{12} = \left(\frac{\sqrt{\upsilon_f}}{G_{b12}} + \frac{1-\sqrt{\upsilon_f}}{G_m} \right)^{-1}$ $donde \quad G_{b12} = \sqrt{\upsilon_f} \, G_{f12} + (1 - \sqrt{\upsilon_f}) \, G_m$
Módulo de Cizalladura transversal	$G_{23} = \left(\frac{\sqrt{\upsilon_f}}{G_{b23}} + \frac{1-\sqrt{\upsilon_f}}{G_m} \right)^{-1}$ $donde \quad G_{b23} = \sqrt{\upsilon_f} \, G_{f23} + (1 - \sqrt{\upsilon_f}) \, G_m$
Coeficiente de Poisson longitudinal	$\nu_{12} = \upsilon_f \, \nu_{f12} + \upsilon_m \, \nu_m$
Coeficiente de Poisson transversal	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2 \, G_{23}} - 1$

4.2.10. Resultados para los materiales objeto de estudio

Resultados de las constantes ingenieriles según el modelo de Hopkins-Chamis, para los materiales presentados en el Apartado 3.2.1.

Modelo Hopkins and Chamis E-glass\MY750						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	24.545	6.7552	2.5242	2.5242	0.305	0.33807
45	35.142	8.97	3.3635	3.3635	0.2825	0.33342
60	45.74	12.404	4.6758	4.6758	0.26	0.32636
75	56.337	18.722	7.127	7.127	0.2375	0.31348

Modelo Hopkins and Chamis S2-Glass\Epoxy 2						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	28.34	6.5577	2.4757	2.4757	0.305	0.32443
45	40.91	8.7597	3.3151	3.3151	0.2825	0.32117
60	53.48	12.223	4.6437	4.6437	0.26	0.31612
75	66.05	18.763	7.1797	7.1797	0.2375	0.30666

Modelo Hopkins and Chamis AS\Epoxy 1						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	71.54	5.05	2.2757	1.9919	0.305	0.26766
45	105.71	6.1268	2.9545	2.4625	0.2825	0.24401
60	139.88	7.507	3.9528	3.0873	0.26	0.21578
75	174.05	9.3982	5.6339	3.9871	0.2375	0.17859

Modelo Hopkins and Chamis IM7\8551-7 Epoxy						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	85.656	6.4285	2.9288	2.3383	0.326	0.37459
45	126.44	7.7945	3.8642	2.8396	0.299	0.37248
60	167.23	9.5436	5.2921	3.4832	0.272	0.36995
75	208.02	11.937	7.851	4.3671	0.245	0.36664

4.3. Modelo de Hashin and Rosen

En este apartado se van detallar solo las expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Hashin-Rosen [8] y sus resultados respecto a los materiales objeto de estudio. Ver expresiones alternativas en [18].

4.3.1. Expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Hashin and Rosen

En el siguiente recuadro se muestra como obtener las propiedades mecánicas macroscópicas a partir de la microestructura, según el modelo de Hashin-Rosen.

Modelo Hashin and Rosen

Módulo de Young longitudinal $$E_1 = E_f\ \upsilon_f + E_m\ \upsilon_m + \frac{4\ \upsilon_f\ \upsilon_m\ (\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{\upsilon_m}{k_f} + \frac{\upsilon_f}{k_m} + \frac{1}{G_m}}$$

Módulo de Young transversal $$E_2 = \frac{4\ k_t^*\ G_t^*}{k_t^* + G_t^* \left(1 + \frac{4\ k_t^*\ \nu_{12}^2}{E_1}\right)}$$

Módulo de Cizalladura longitudinal $$G_{12} = G_m\ \frac{\upsilon_m\ G_m + (1+\upsilon_f) G_f}{(1+\upsilon_f) G_m + \upsilon_m\ G_f}$$

Módulo de Cizalladura transversal $$G_{23} = \frac{E_2}{2\ (1+\nu_{23})}$$

Coeficiente de Poisson longitudinal $$\nu_{12} = \upsilon_f\ \nu_f + \upsilon_m\ \nu_m + \frac{\upsilon_f\ \upsilon_m\ (\nu_f - \nu_m)\left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_f}\right)}{\frac{\upsilon_m}{k_f} + \frac{\upsilon_f}{k_m} + \frac{1}{G_m}}$$

Coeficiente de Poisson transversal $$\nu_{23} = \frac{E_2}{2\ G_t^*} - 1$$

donde:

$$k_f = E_f/(2\ (1 - \nu_f - \ \nu_f^2)) \qquad k_m = E_m/(2\ (1 - \nu_m - \ \nu_m^2))$$

$$k_t^* = \frac{k_m\ k_f + (\upsilon_f\ k_f + \upsilon_m\ k_m) G_m}{\upsilon_m\ k_f + \upsilon_f\ k_m + G_m} \qquad G_t^* = G_m\ \frac{(\alpha + \beta_m\ \upsilon_f)(1 + \rho\ \upsilon_f^3) - 3\ \upsilon_f\ \upsilon_m^2\ \beta_m^2}{(\alpha - \upsilon_f)(1 + \rho\ \upsilon_f^3) - 3\ \upsilon_f\ \upsilon_m^2\ \beta_m^2}$$

$$\alpha = (\gamma + \beta_m)/(\gamma - 1) \qquad \beta_m = \frac{1}{3 - 4\ \nu_m} \qquad \beta_f = \frac{1}{3 - 4\ \nu_f}$$

$$\rho = (\beta_m - \gamma\ \beta_f)/(1 + \gamma\ \beta_f) \qquad \gamma = G_f/G_m$$

4.3.2. Resultados para los materiales objeto de estudio

Resultados de las constantes ingenieriles según el modelo de Hashin-Rosen, para los materiales presentados en el Apartado 3.2.1.

Modelo Hashin and Rosen E-glass\MY750						
$\%v_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	24.566	6.4517	2.1892	2.2616	0.29715	0.42632
45	35.167	9.048	3.0008	3.2782	0.27359	0.38001
60	45.763	13.101	4.3156	4.9077	0.25166	0.33473
75	56.354	20.182	6.8122	7.7702	0.2312	0.29868

Modelo Hashin and Rosen S2-Glass\Epoxy 2						
$\%v_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	28.361	6.3063	2.1369	2.2101	0.29691	0.42668
45	40.933	8.9091	2.9462	3.2311	0.27332	0.37867
60	53.502	13.05	4.2738	4.8982	0.25141	0.33209
75	66.066	20.512	6.852	7.9181	0.23102	0.29528

Modelo Hashin and Rosen AS\Epoxy 1						
$\%v_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	71.561	6.5646	2.1928	2.276	0.29649	0.44214
45	105.73	9.4876	3.0774	3.4173	0.27286	0.38819
60	139.9	14.428	4.5862	5.3978	0.251	0.33646
75	174.07	24.325	7.7395	9.3972	0.23072	0.29426

Modelo Hashin and Rosen IM7\8551-7 Epoxy						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	85.693	8.7864	2.6994	2.9203	0.31785	0.50438
45	126.49	12.99	3.7872	4.5096	0.2897	0.44029
60	167.27	20.051	5.641	7.2779	0.26325	0.3775
75	208.05	33.88	9.5095	12.778	0.23837	0.32572

4.4. Modelo de Chamis

En este apartado se van detallar solo las expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Chamis [8] y sus resultados respecto a los materiales objeto de estudio.

4.4.1. Expresiones de las constantes ingenieriles del modelo de Chamis

En el siguiente recuadro se muestra como obtener las propiedades mecánicas macroscópicas a partir de la microestructura, según el modelo de Chamis.

Modelo Chamis

Módulo de Young longitudinal	$E_1 = E_{1f}\,\upsilon_f + E_m\,\upsilon_m$
Módulo de Young transversal	$E_2 = \frac{E_m}{1-\upsilon_f\,(1-E_m/E_{2f})}$
Módulo de Cizalladura longitudinal	$G_{12} = \frac{G_m}{1-\upsilon_f\,(1-G_m/G_{12f})}$
Módulo de Cizalladura transversal	$G_{23} = \frac{G_m}{1-\upsilon_f\,(1-G_m/G_{23f})}$
Coeficiente de Poisson longitudinal	$\nu_{12} = \upsilon_f\,\nu_{12f} + \upsilon_m\,\nu_m$
Coeficiente de Poisson transversal	$\nu_{23} = \frac{E_2}{2\,G_{23}} - 1$

4.4.2. Resultados para los materiales objeto de estudio

Resultados de las constantes ingenieriles según el modelo de Chamis, para los materiales presentados en el Apartado 3.2.1.

Modelo Chamis E-glass\MY750						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	24.545	4.6946	1.7414	1.7414	0.305	0.34796
45	35.142	5.8734	2.1826	2.1826	0.2825	0.34547
60	45.74	7.8425	2.9235	2.9235	0.26	0.3413
75	56.337	11.798	4.4255	4.4255	0.2375	0.33293

Modelo Hashin and Rosen S2-Glass\Epoxy 2						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	28.34	4.5005	1.6901	1.6901	0.305	0.33139
45	40.91	5.6482	2.1239	2.1239	0.2825	0.32968
60	53.48	7.5817	2.8571	2.8571	0.26	0.3268
75	66.05	11.528	4.3636	4.3636	0.2375	0.32091

Modelo Hashin and Rosen AS\Epoxy 1						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	71.54	4.1885	1.6575	1.597	0.305	0.31139
45	105.71	4.9536	2.0478	1.9134	0.2825	0.29441
60	139.88	6.0606	2.6786	2.3864	0.26	0.26984
75	174.05	7.8049	3.871	3.1698	0.2375	0.23113

Modelo Hashin and Rosen IM7\8551-7 Epoxy						
$\%\upsilon_f$	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	85.656	5.3374	2.063	1.9362	0.326	0.3783
45	126.44	6.3096	2.5721	2.2914	0.299	0.37679
60	167.23	7.715	3.4146	2.8062	0.272	0.37462
75	208.02	9.9257	5.0781	3.6194	0.245	0.37119

4.5. Comparación de los modelos micromecánicos para fibras continuas

En este apartado se van a representar gráficamente las contantes ingenieriles, según los tres modelos micromecánicos estudiados para fibras continuas, particularizados para los cuatro materiales estudiados (ver Apartado 3.2.1).

4.5.1. Material E-glass\MY750

La Figura 4.7 muestra para los tres modelos, la evolución del modulo de elasticidad longitudinal (E_1) y tranversal (E_2) en función de la fracción de volumen de fibra (υ_f). Para E_1 se observa una clara coincidencia en los tres modelos, E_2 tiene una buena coincidencia para los modelos de Hopkins-Chamis y Hashin-Rosen, quedándose por debajo de ambos el modelo de Chamis. Se observa para ambas constantes un aumento al aumentar la υ_f. En el caso de E_1 esta relación es lineal con una pendiente importante que da cuenta de la alta dependencia de esta constante frente υ_f, esto se debe desde el punto de vista físico al aumento de la sección transversal de la fibra. Para (E_2) este aumento se hace más acusado dependiendo del modelo micromecánico, pero podemos decir que su incremento es más acusado cuando el contenido de fibra ya es alto.

Propiedades mecánicas de las fibras				
Tipo de fibra:	E-Glass	S2-Glass	AS	IM7
E_{f1}[GPa]	74	87	231	276
E_{f2}[GPa]	74	87	15	19
G_{f12}[GPa]	30.8	36	15	27
ν_{f12}	0.2	0.2	0.2	0.2
G_{f23}[GPa]	30.8	36	7	7
Propiedades mecánicas de las matrices				
Tipo de matriz:	MY750	Epoxy 2	Epoxy 1	8551-7 Epoxy
E_m[GPa]	3.35	3.2	3.2	4.08
G_m[GPa]	1.24	1.2	1.2	1.478
ν_m	0.35	0.35	0.35	0.38

Cuadro 4.1: Propiedades de la fibra y matriz según [7] para los materiales objeto de estudio.

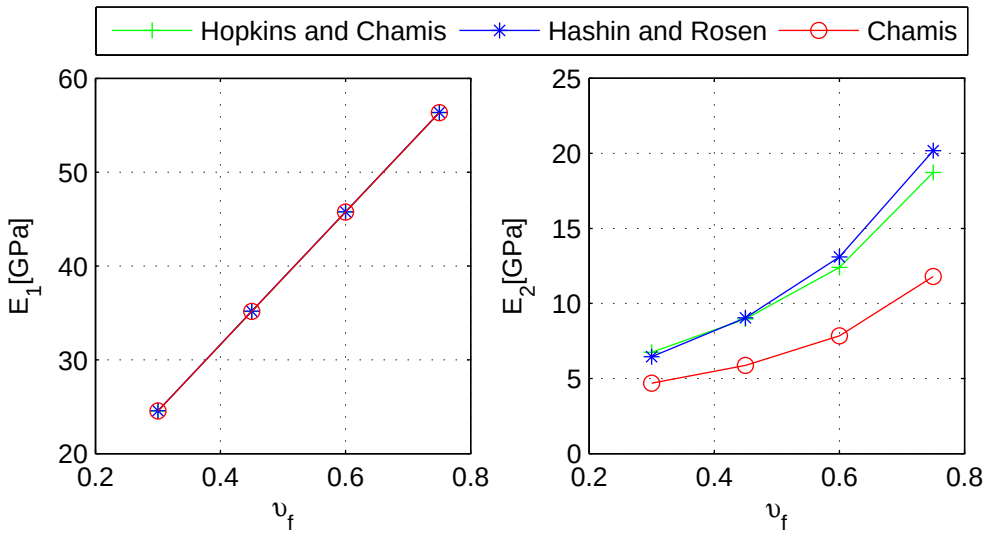


Figura 4.7: **Material E-glass\MY750**. Representación de E_1 y $E_2 = f(\upsilon_f)$

En la Figura 4.8, se observa la evolución del modulo de cizalladura longitudinal G_{12} y transversal G_{23} frente a υ_f. Para ambas constantes, independientemente del modelo su evolución es creciente con υ_f. Esto se puede reflexionar primero para G_{12}, ante una misma fuerza tangencial F_{12} el aumento de υ_f provocaría una disminución de la distorsión γ_{12} al disminuir ΔL_{x_1}, en el caso de G_{23} al aumentar υ_f disminuye ΔL_{x_2} ante una misma fuerza F_{23} provocando que γ_{23} sea menor. Para este material (E-glass/MY750) G_{12} y G_{23} toman exactamente los mismos valores en los modelos Hopkins-Chamis y Chamis. Esto se debe al valor de las propiedades de la fibra $G_{f12} = G_{f23} = 30{,}8$ GPa (ver Cuadro 4.1), en el modelo de Hashin and Rosen no coinciden exactamente debido a que G_{23} se obtuvo directamente haciendo uso de la expresión que la relaciona con las constantes independientes para un material transversalmente isótropo (ver Apartado 4.3.1).

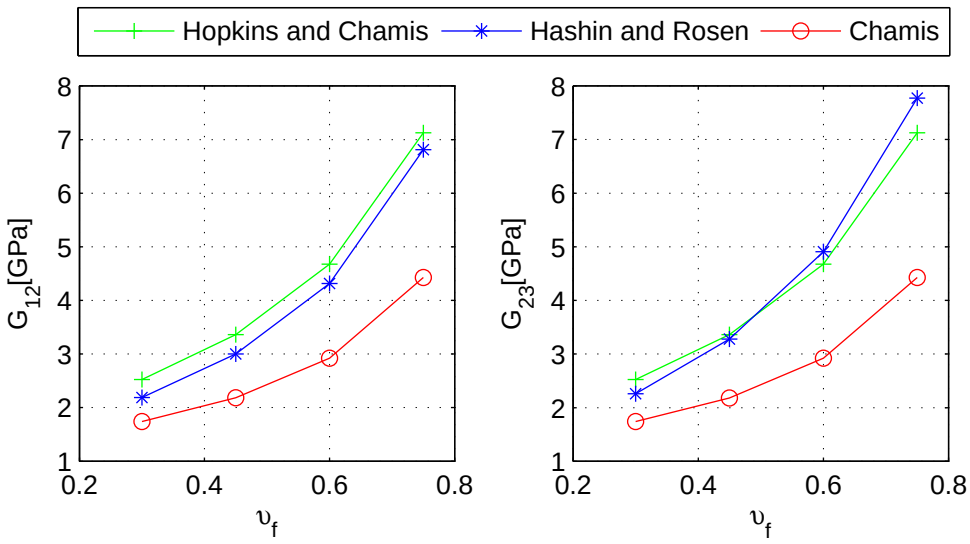


Figura 4.8: **Material E-glass\MY750**. Representación de G_{12} y $G_{23} = f(\upsilon_f)$

En la Figura 4.9, se observa la evolución del coeficiente de Poisson longitudinal ν_{12} y transversal ν_{23} frente υ_f. Ambas constantes decrecen conforme aumenta υ_f, para ν_{12} esta disminución es lineal mientras que en ν_{23}, depende del modelo micromecánico considerado. Esta evolución decreciente no es fácilmente perceptible en ambas constantes, si consideramos el ensayo de tracción, la determinación de ν_{12} vendría dada por la relación entre el acortamiento según x_2 (ε_{t_2}) y el alargamiento según x_1 (ε_{l_1}) y estos modelos predicen su disminución conforme aumenta υ_f. Esto

se debe a que ambas deformaciones decrecen en valor absoluto, pero $|\varepsilon_{t_2}|$ más que ε_{l_1}. Un razonamiento similar es el que provoca la disminución de ν_{23} con el aumento de υ_f.

Para ν_{12} los modelos de Hopkins-Chamis y Chamis coinciden plenamente mientras que el modelo de Hashin-Rosen está por defecto siempre de los anteriores, independientemente del material. Esto se debe al incorporar un tercer sumando que resta, al ser $\mathrm{E_f} >> \mathrm{E_m}$ eso hace que $k_m < k_f$ por lo que invirtiendo términos cambia la desigualdad para ser determinante el hecho $\nu_f < \nu_m$ para marcar el signo de este tercer sumando de ν_{12} (ver Apartado 4.3.1). Para ν_{23} los modelos de Hopkins-Chamis y Chamis son similares, discrepando de ellos para para valores bajos de υ_f el modelo de Hashin-Rosen.

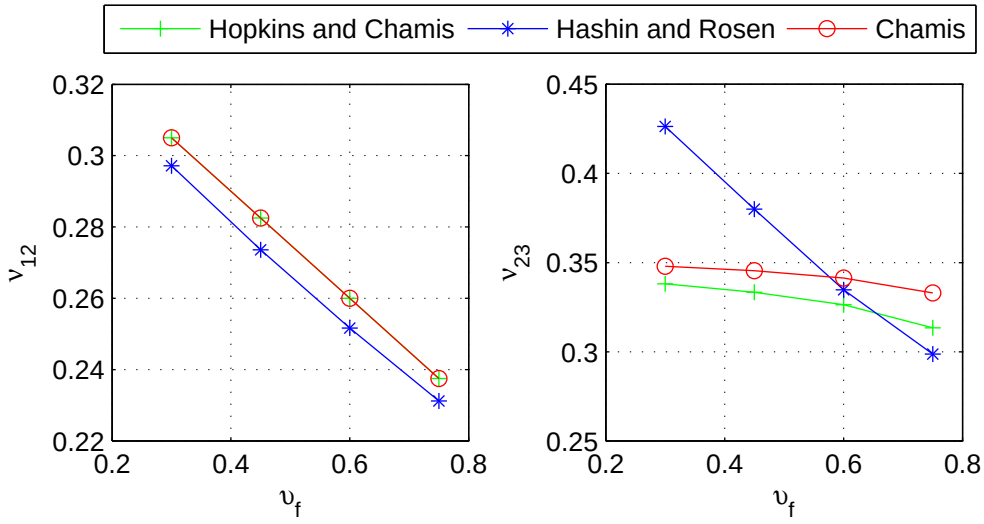


Figura 4.9: **Material E-glass\MY750**. Representación de ν_{12} y $\nu_{23} = \mathrm{f}(\upsilon_\mathrm{f})$

4.5.2. Material S2-Glass\Epoxy 2

Los resultados de las constantes ingenieriles para este refuerzo de fibra de vidrio son muy similares al anterior, debido a que las propiedades de está fibra de vidrio son levemente superiores y las de matriz similares (ver Cuadro 4.1). La Figura 4.10 muestra estos resultados.

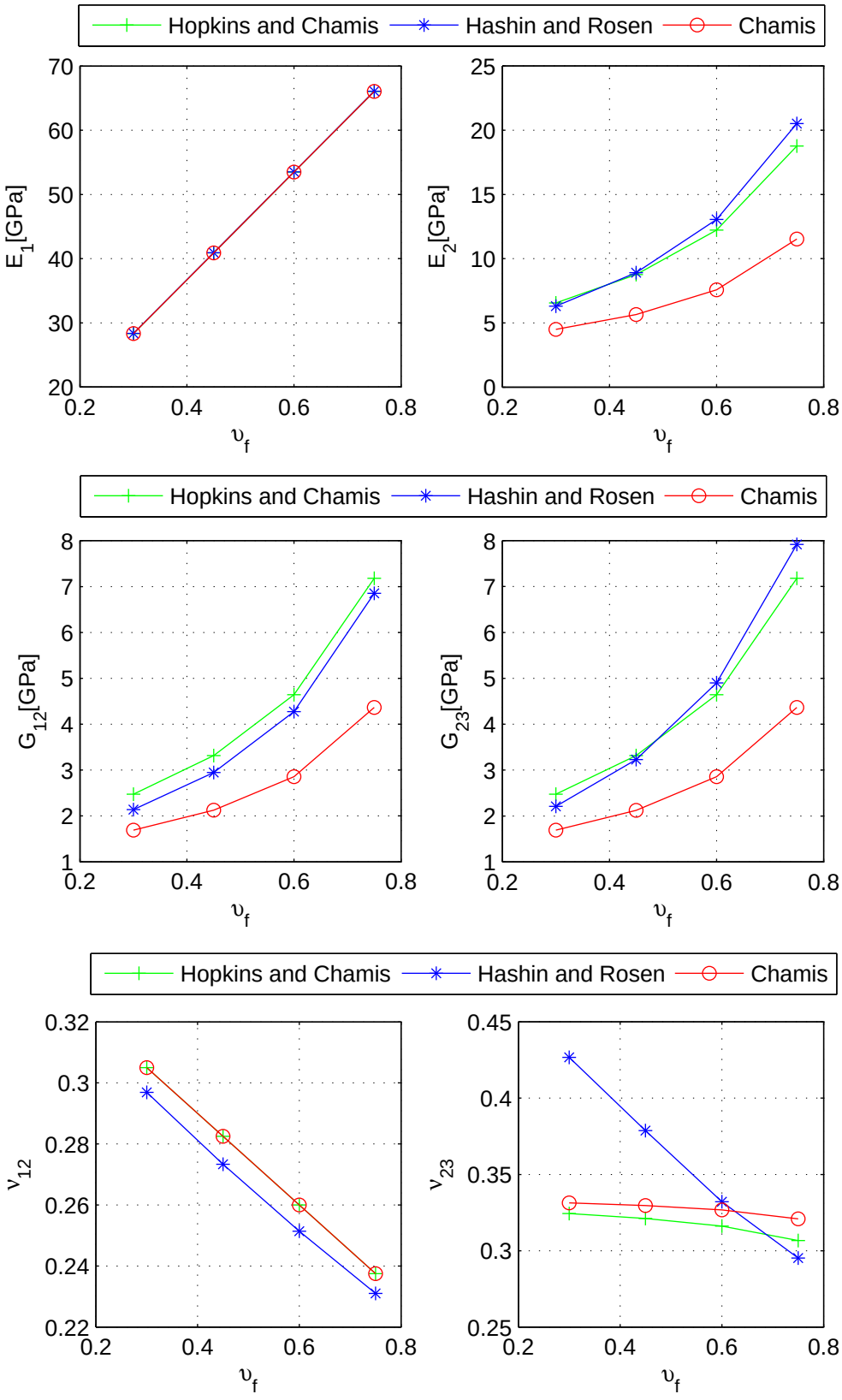


Figura 4.10: **Material S2-Glass\Epoxy 2**. Representación de las contantes ingenieriles.

4.5.3. Material AS\Epoxy 1

Este material tiene como refuerzo fibra de carbono, esto supone un aumento cuantitativo notable en E_1 para toda v_f. Este aumento se debe al valor de las propiedades de la fibra, concretamente al valor de E_{f1} un orden de magnitud superior a los anteriores de fibra de vidrio (ver propiedades en el Cuadro 4.1). Para E_2 toma valores inferiores a los obtenidos con la fibra de vidrio, excepto al representarlo mediante el modelo de Hashin-Rosen. G_{23} se dispara para valores de v_f altos en el modelo de Hashin-Rosen, respecto a los otros dos. Con ν_{23} se observa, a diferencia de como ocurría con la fibra de vidrio como el modelo de Hashin-Rosen no se cruza con los demás, manteniéndose los tres en una linea descendente similar. Para G_{12} y ν_{12} los valores no varían significativamente respecto a los obtenidos con fibra de vidrio. Lo comentado anteriormente se puede observar en la Figura 4.11, donde se representan las constantes ingenieriles en función de v_f.

4.5.4. Material IM7\8551-7 Epoxy

Los resultados para este refuerzo de fibra de carbono, son similares al anterior. Destacar que de forma general, las constantes ingenieriles en el rango de estudio de v_f están por encima de las obtenidas anteriormente. Esto se debe a los valores de la fibra y la matriz de este material (ver propiedades en el Cuadro 4.1). Los resultados obtenidos para las constantes ingenieriles se pueden ver en la Figura 4.12.

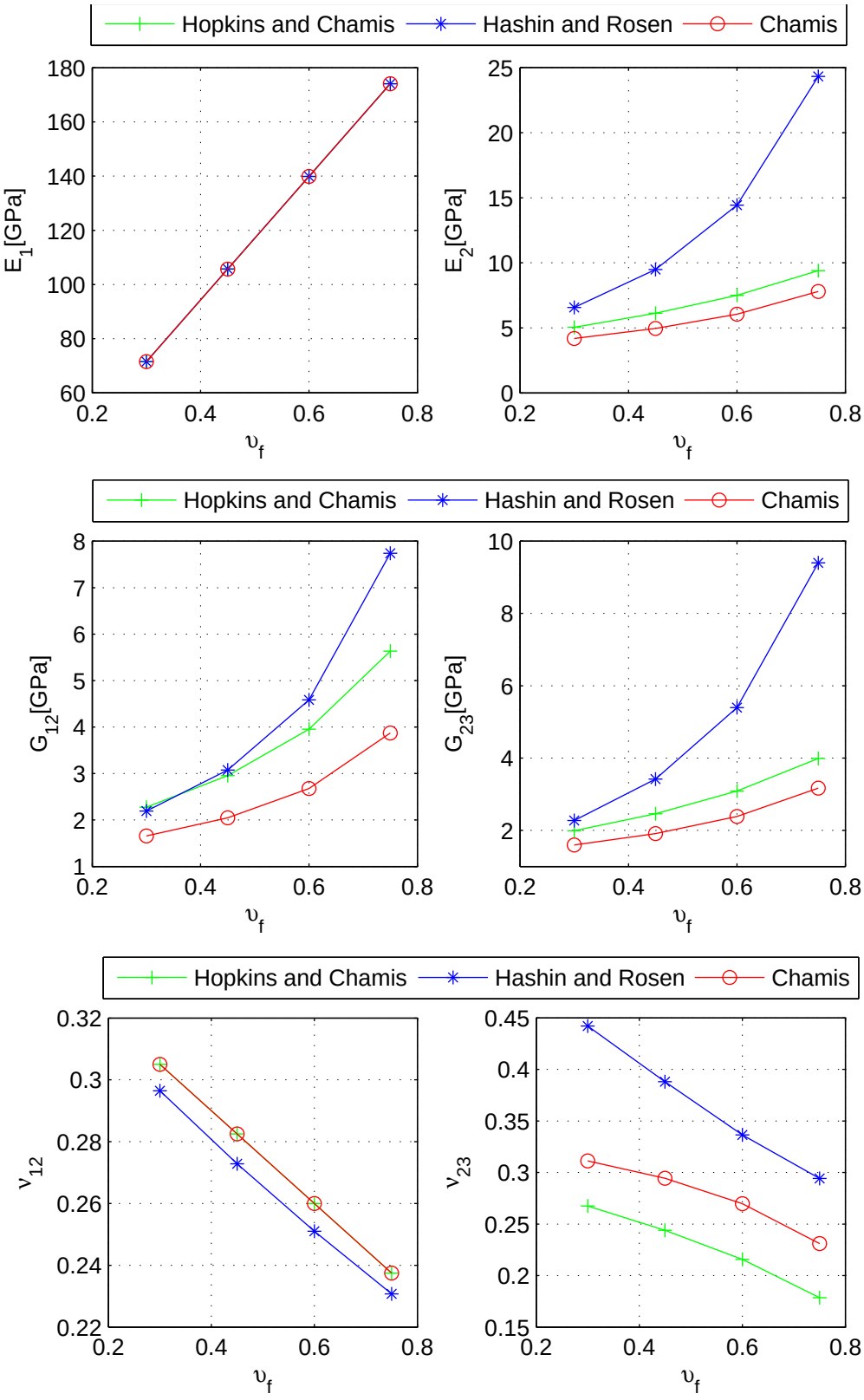


Figura 4.11: **Material AS\Epoxy 1**. Representación de las contantes ingenieriles.

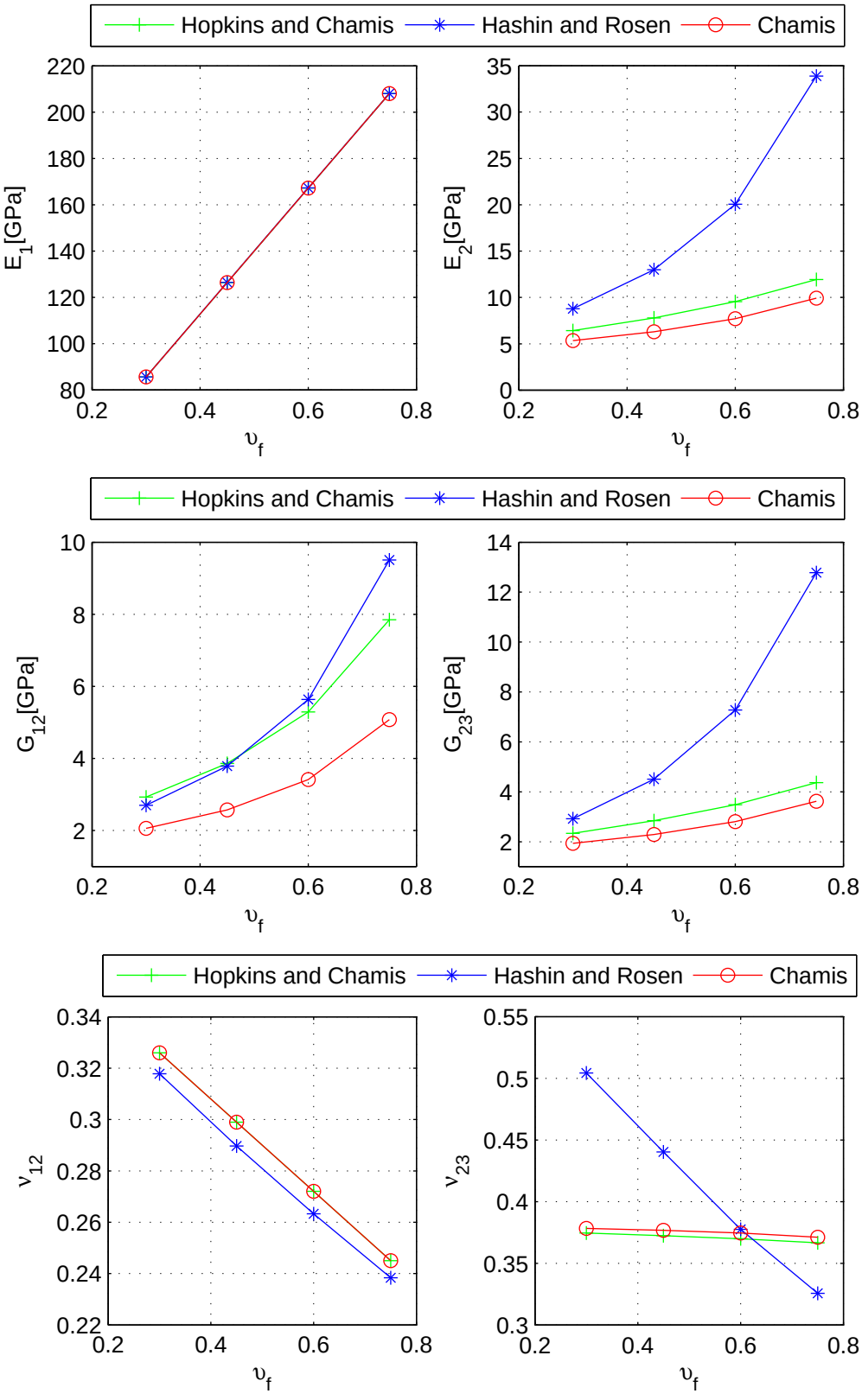


Figura 4.12: **Material IM7\8551-7 Epoxy**. Representación de las contantes ingenieriles.

4.6. Comparación de los materiales para cada modelo micromecánico de fibras continuas

En este apartado se compararan los materiales estudiados para cada modelo micromecánico considerado. Se pretende con este estudio visualizar mejor las diferencias entre cada uno de los materiales a partir de la representación de sus constantes ingenieriles frente a la fracción de volumen de fibra.

4.6.1. Modelo de Hopkins and Chamis

Esta representación (ver Figura 4.13) recoge mejor lo comentado en apartados anteriores, vemos como los dos materiales de fibra de vidrio son muy parecidos. Respecto a los dos de fibra de carbono, se aprecian más deferencias entre ellos en la representación de sus constantes ingenieriles, estando siempre IM7\8551-7 Epoxy por encima del AS\Epoxy 1.

4.6.2. Modelo de Hashin and Rosen

Este modelo predice valores de las constantes ingenieriles para cada material, por encima del de Hopkins-Chamis (ver Figura 4.14).

4.6.3. Modelo de Chamis

Este modelo predice para algunas constantes E_2, G_{12}, G_{23} valores inferiores a los dos modelos anteriores (ver Figura 4.15), para el resto de constantes sus valores son similares a los obtenidos con Hopkins and Chamis

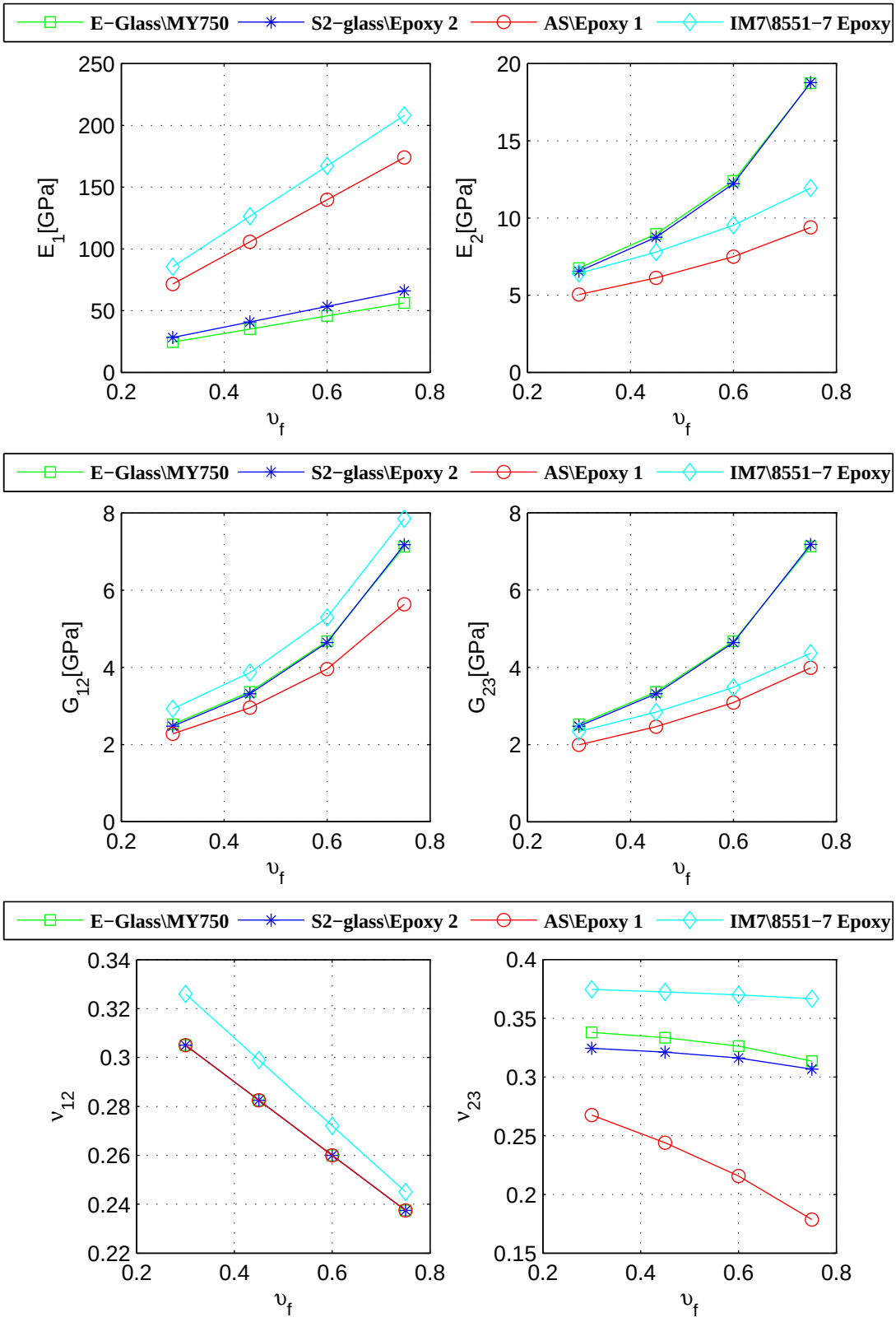


Figura 4.13: **Modelo de Hopkins and Chamis**: Materiales y constantes ingenieriles

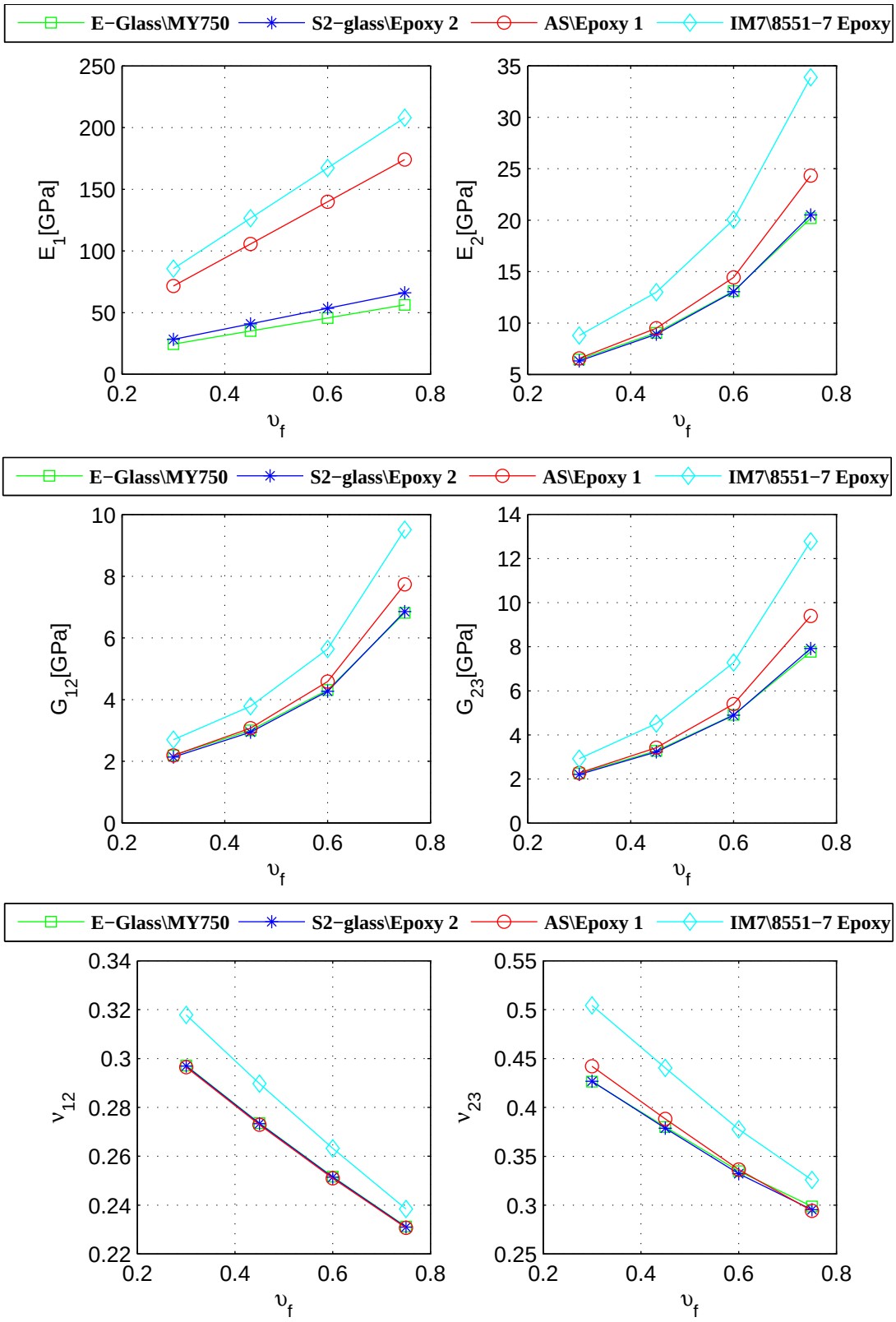


Figura 4.14: **Modelo de Hashin and Rosen**: Materiales y constantes ingenieriles

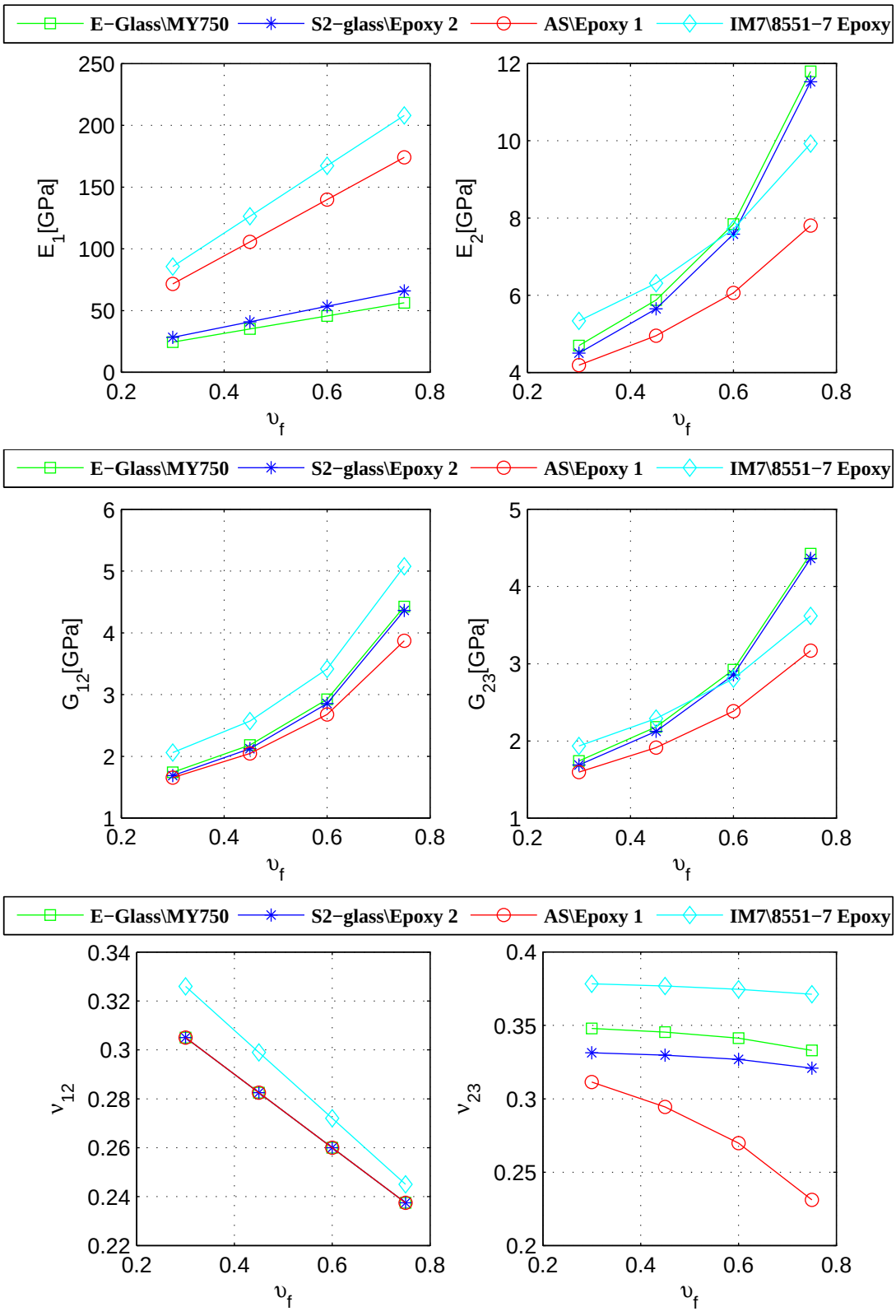


Figura 4.15: **Modelo de Chamis**: Materiales y constantes ingenieriles

4.7. Análisis de materiales reforzados con fibras cortas

En los apartados anteriores de este capítulo, se ha discutido el análisis de compuestos reforzados con fibras continuas. Los efectos de la discontinuidad de la fibra o la longitud de está, en el comportamiento mecánico del material compuesto no se tuvieron en cuenta en estos análisis, al suponerse que las fibras se extendían desde un extremo de la lámina hasta el otro extremo. Esta parte del capítulo se ocupa de las propiedades mecánicas de los materiales reforzados con fibras cortas, ver [3].

Los compuestos reforzados con fibras cortas no son tan fuertes o rígidos como los reforzados con fibras continuas, además son susceptibles de ser utilizados en aplicaciones estructurales críticas, tales como estructuras primarias de aeronaves (pero esto puede cambiar a medida que todo el potencial de nuevos refuerzos discontinuos como los nonotubos de carbono, se desarrollen). Por otra parte, los materiales compuestos de fibras cortas tienen varias caractersticas que los hacen atractivos y dignos de consideración para otras aplicaciones. Por ejemplo, en componentes que tienen contornos geométricos complejos, las fibras continuas no pueden adaptarse a la forma deseada sin ser dañado o deformado el patrón deseado. Sin embargo, la fibra corta se puede mezclar fácilmente con la resina de matriz líquida, y la mezcla de resina/fibra puede ser por inyección o moldeado por compresión para producir piezas que tienen formas complejas.

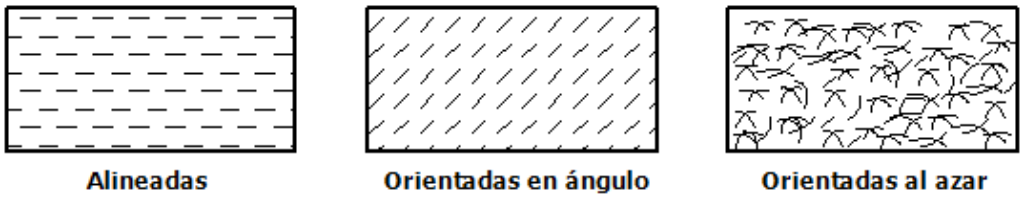


Figura 4.16: Tipos de refuerzo de fibras cortas.

Aunque los materiales compuestos de fibras cortas, orientadas al azar son los más ampliamente utilizados de los tres tipos (ver Figura 4.16), el desarrollo de los modelos analíticos comienza lógicamente con el caso más simple — fibras cortas alineadas, que será el desarrollado en este cápitulo .

4.7.1. Fibras cortas alineadas

El análisis de los materiales reforzados con fibras cortas alineada, ortótropo (ver Figura 4.16) se inicia con la selección de un elemento de volumen representativo que consta de una fibra corta incrustada en un cilindro de material de la matriz, como se muestra en la Figura 4.17.

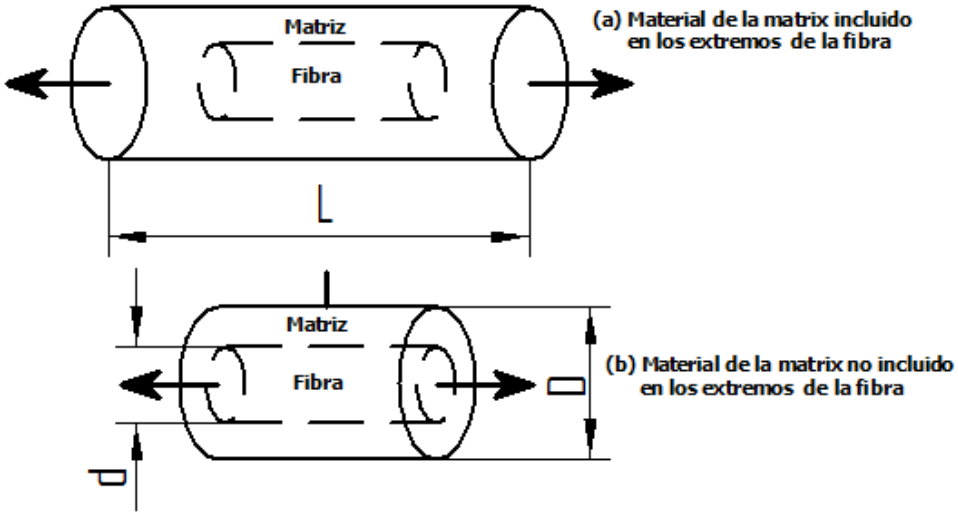


Figura 4.17: Elemento de volumen para compuesto con fibras cortas alineadas.

El elemento de volumen en la Figura 4.17(b), no incluye material de la matriz en los extremos de la fibra como si lo hace el modelo de la Figura 4.17(a). Antes de comenzar el análisis, se considera la geometría de la deformación en el elemento de la Figura 4.17(a). Como se muestra por las líneas de la cuadrícula antes y después de la deformación en el elemento de la Figura 4.18, la falta de coincidencia entre la rigidez de la fibra y la matriz ($E_f \gg E_m$) conduce a grandes deformaciones por cortante cerca de los extremos de las fibras, pero no se producen en la parte media de la fibra. Es decir, si $E_f = E_m$, no existe falta de coincidencia entre la rigidez de la fibra y la matriz, y no se produce tensiones tangenciales en la interfase . Como veremos más adelante, la transferencia de la tensión entre la matriz y la fibra se produce principalmente a través de las tensiones tangenciales en la interfase, que es mayor cerca de los extremos de las fibras. Por otro lado, la tensión normal en la fibra se construye a partir un mínimo en los extremos de la fibra llegando al máximo en el centro de la fibra.

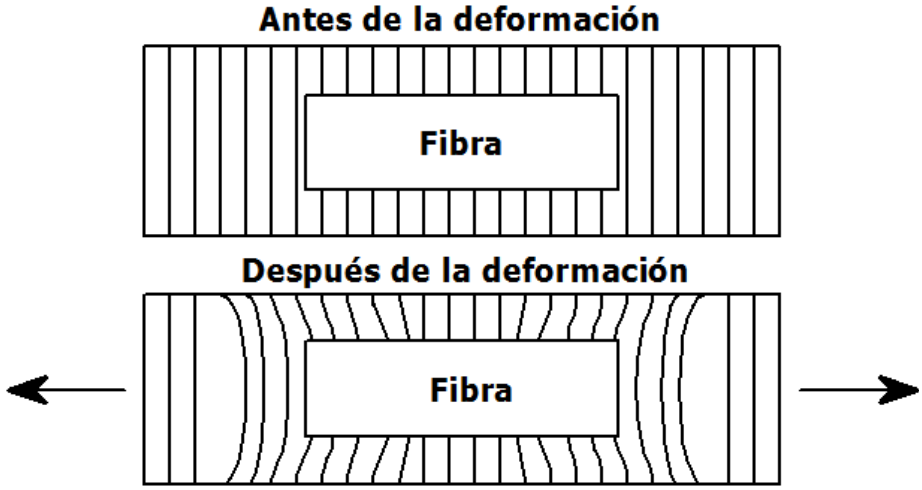


Figura 4.18: Representación de la deformación por cortante de la matriz de un compuesto de fibra corta.

4.7.2. Análisis de la tensión y resistencia de la fibra

Las observaciones anteriores sobre las tensiones sobre el elemento de la Figura 4.18, serán confirmadas teniendo en cuenta el diagrama de un elemento diferencial de la fibra, como se muestra en la Figura 4.19. Haciendo equilibrio estático de las fuerzas a lo largo de la dirección x,

$$\sum F_x = (\sigma_f + d\sigma_f)\ \frac{\pi d^2}{4} - \sigma_f\ \frac{\pi d^2}{4} - \tau\,(\pi d)\,dx \tag{4.48}$$

donde

$\sigma_f \equiv$ es la tensión normal de la fibra en dirección x, a una distancia x desde el extremo de la fibra.
$F_x \equiv$ fuerza a lo largo de la dirección x.
$\tau \equiv$ tensión tangencial en la interfase a una distancia x desde el extremo de la fibra.
$d \equiv$ diámetro de la fibra, una constante.
$dx \equiv$ longitud del elemento diferencial.
$d\sigma_f \equiv$ diferencial de tensión normal de la fibra.

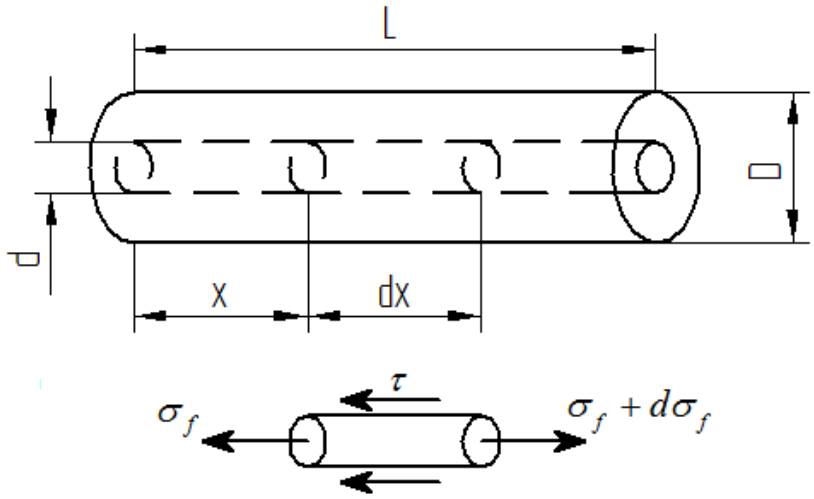


Figura 4.19: Tensiones que actúan sobre un elemento diferencial de la fibra.

Simplificando y reordenando la Ecuación (4.48), se obtiene la ecuación diferencial que relaciona la velocidad de cambio de la tensión normal de la fibra a lo largo de la dirección x con la tensión tangencial:

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{4\tau}{d} \tag{4.49}$$

Separando las variables e integrando, nos encontramos con

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_f} d\sigma_f = \frac{4}{d}\int_0^x \tau \, dx \tag{4.50}$$

Se da por supuesto que la totalidad de la transferencia de tensión tangencial entre la matriz y la fibra se produce alrededor de la periferia de la fibra, y que la tensión normal de la fibra (σ_0), que se transfiere a través de los extremos de la fibra, es insignificante. Con este supuesto, la Ecuación (4.50) se convierte en

$$\sigma_f = \frac{4}{d}\int_0^x \tau \, dx \tag{4.51}$$

Por lo tanto, si queremos determinar la tensión en la fibra (σ_f) debemos conocer la tensión tangencial (τ) en función de la coordenada x. Se han propuesto dos enfoques básicos, los cuales se basan en suposiciones respecto al comportamiento del material de matriz.

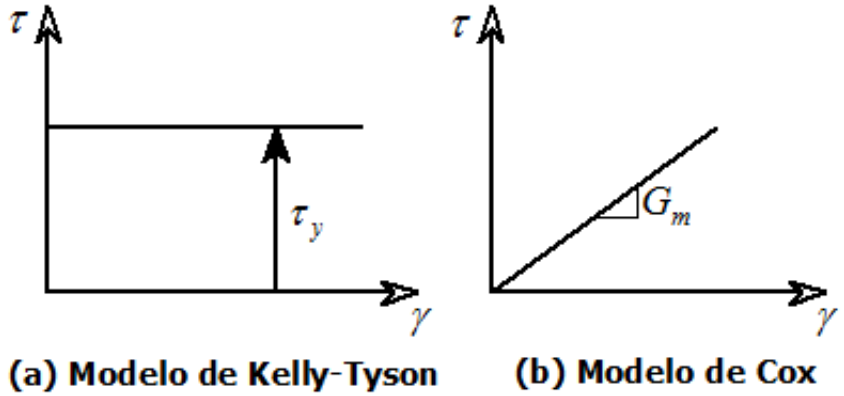


Figura 4.20: Curvas de tensión-deformación para el material de la matriz según los modelos de Kelly-Tyson y Cox.

Kelly y Tyson supone que la matriz tiene un comportamiento elasto-plástico, como se muestra en la curva de tensión-deformación en la Figura 4.20(a). Cox asume que la matriz tiene un comportamiento elástico lineal, como se muestra en la Figura 4.20(b). Vamos a considerar los dos modelos, pero es conveniente usar el modelo de Kelly-Tyson con fines ilustrativos en este punto. El modelo Kelly-Tyson es mucho más simple que el modelo de Cox debido a que el tensión tangencial en la interfase (τ), es igual a la tensión de fluencia de la matriz (τ_y). Por lo tanto, para el modelo Kelly-Tyson, la tensión en la fibra como resultado de la Ecuación 4.51, es ahora

$$\sigma_f = \frac{4}{d}\,\tau_y\,x \tag{4.52}$$

La Ecuación (4.52) nos dice que la tensión en la fibra varía linealmente con la distancia desde el extremo de la fibra, pero además la distribución de tensión normal de las fibras debe ser simétrica con respecto a $x = L/2$. Al haberse supuesto que $\sigma_f = \sigma_0$ en $x = 0$ y, por simetría, en $x = L$, la distribución de la tensión normal y tangencial en la fibra es como se muestra en la Figura 4.21. Las distribuciones de tensiones en la Figura 4.21 son solamente validas para las fibras con longitudes menores de un cierto valor, como veremos más adelante. La tensión normal máxima en la fibra se produce en $x = L/2$ y está dada por

$$\sigma_{f_{max}} = \frac{4}{d}\,\tau_y\,\frac{L}{2} = \frac{2\tau_y L}{d} \leq \frac{E_{f1}\sigma_1}{E_1} \tag{4.53}$$

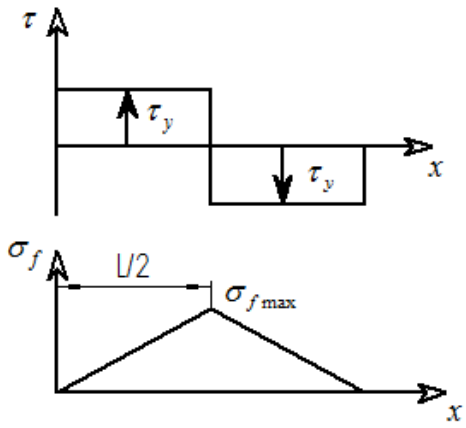


Figura 4.21: Variación de la tensión tangencial τ, y normal σ_f en la fibra, con la distancia a lo largo de la fibra de acuerdo con el modelo de Kelly-Tyson.

La tensión máxima de la fibra no puede seguir aumentando de forma indefinida a medida que aumenta la longitud de la fibra L, sin embargo. Si se supone que la fibra al ser elástica, $\sigma_{f_{max}}$ no puede exceder el valor $E_{f1}\sigma_1/E_1$, siendo σ_1 la tensión normal en un material compuesto de fibra continua. Por lo tanto, como $\sigma_{f_{max}}$ se acerca al valor lmite $E_{f1}\sigma_1/E_1$, la longitud de la fibra L, se aproxima a un valor L_i, que se ha denominado como "longitud efectiva", o la "longitud de transferencia de carga". La ecuación para L_i es por lo tanto

$$L_i = \frac{dE_{f1}\sigma_1}{2\tau_y E_1} \tag{4.54}$$

El efecto de aumentar la longitud de la fibra en la tensiones se muestra gráficamente en la Figura 4.22. La longitud L_i se conoce como "longitud efectiva"porque la tensión a lo largo de la fibra es inferior al valor máximo, también es conocida por el término "longitud de transferencia de carga", debido al hecho de que la transferencia de carga entre la fibra y la matriz se produce sólo en esta porción de la fibra. Aunque estos resultados son para el modelo Kelly-Tyson, se obtienen resultados similares desde el modelo de Cox.

Otro valor límite de la tensión en la fibra se produce cuando $\sigma_{f_{max}}$ es igual a la resistencia a la tracción de la fibra, $S_{f1}^{(+)}$. En este caso, la tensión aplicada en el material compuesto es

$$\frac{E_{f1}\sigma_1}{E_1} = \sigma_{f_{max}} = S_{f1}^{(+)} \tag{4.55}$$

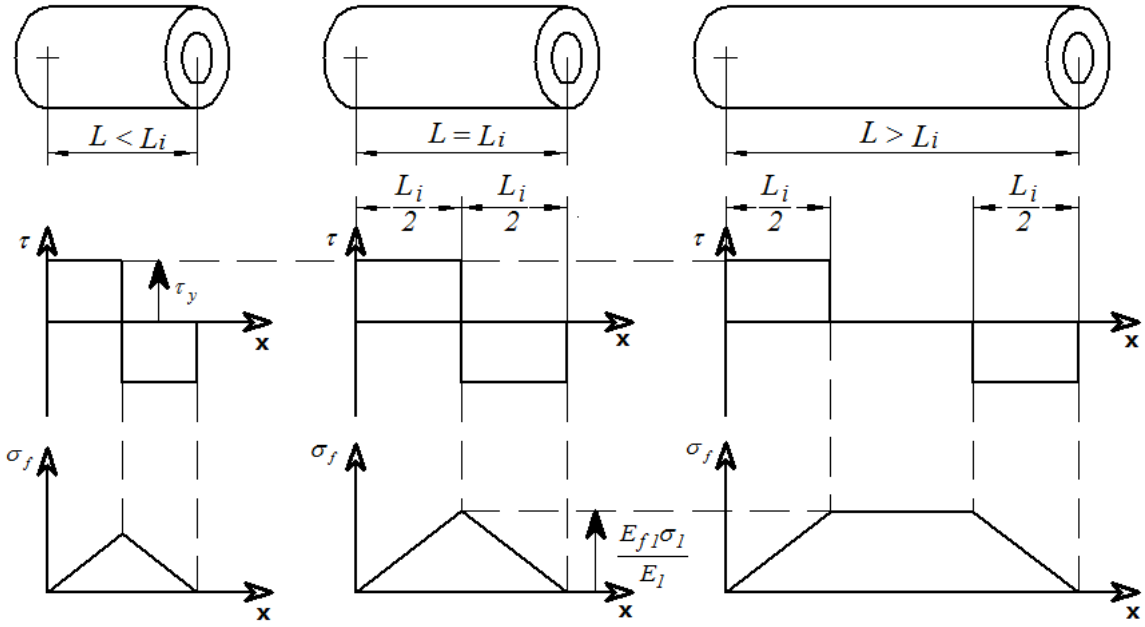


Figura 4.22: Efecto de la longitud de la fibra en las tensiones según el modelo kelly-Tyson.

La longitud de la fibra se convierte ahora en $L = L_c$, donde L_c se conoce como la "longitud crtica". Para obtener esta condición, la sustitución de la Ecuación (4.55) en la Ecuación (4.53) permite obtener la ecuación de la longitud crítica como

$$L_c = \frac{dS_{f1}^{(+)}}{2\tau_y} \tag{4.56}$$

La longitud crítica tiene implicaciones importantes para el cálculo de la tensión media longitudinal.

$$\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_{f1}\ \upsilon_f + \overline{\sigma}_{m1}\ \upsilon_m \tag{4.57}$$

A partir de los desarrollos anteriores llegamos a la conclusión de que de las fibras discontinuas no sufren tensiones uniformes a lo largo de toda su longitud, y que la longitud de la fibra debe ser tenida en cuenta. Para las fibras discontinuas, la tensión media longitudinal en la fibra se puede obtener mediante

$$\overline{\sigma}_{f1} = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \sigma_{f1}\ dx \tag{4.58}$$

La evaluación de esta integral depende de la longitud de la fibra. De la Figura 4.22, se puede observar que para $L < L_i$ la tensión de la fibra varía linealmente con x,

$$\sigma_{f1} = \frac{\sigma_{f_{max}} x}{L_i/2} \tag{4.59}$$

y la Ecuación (4.58) se convierte

$$\overline{\sigma}_{f1} = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{\sigma_{f_{max}} x}{L_i/2}\, dx = \frac{\sigma_{f_{max}} L}{2L_i} \tag{4.60}$$

mientras que para el caso $L > L_i$, la tensión media correspondiente es

$$\overline{\sigma}_{f1} = \frac{2}{L} \int_0^{L_i/2} \frac{\sigma_{f_{max}} x}{L_i/2}\, dx + \int_{L_i/2}^{L/2} \sigma_{f_{max}}\, dx = \left(1 - \frac{L_i}{2L}\right) \sigma_{f_{max}} \tag{4.61}$$

Se debe tener en cuenta que L es la longitud de la fibra, la cual es variable y L_i es la longitud específica de la fibra sobre la que se realiza la transferencia de carga. Por lo tanto, para el caso del fallo de la fibra y por tanto del material compuesto correspondiente, la sustitución de las condiciones $\sigma_{f_{max}} = S_{f1}^{(+)}$, $\overline{\sigma}_1 = S_L^{(+)}$, $\overline{\sigma}_{m1} = S_{mf1}^{(+)}$, y $L_i = L_c$ en las ecuaciones (4.60) y (4.57) se obtiene la resistencia longitudinal del compuesto para el caso

$$S_L^{(+)} = \frac{S_{f1}^{(+)} L}{2L_c}\, v_f + S_{mf1}^{(+)}\, (1 - v_f) \qquad para\ L \leq L_c \tag{4.62}$$

realizando las mismas sustituciones en las ecuaciones (4.61) y (4.57) se obtiene la resistencia longitudinal del compuesto para el caso

$$S_L^{(+)} = \left(1 - \frac{L_c}{2L}\right) S_{f1}^{(+)}\, v_f + S_{mf1}^{(+)}\, (1 - v_f) \qquad para\ L \geq L_c \tag{4.63}$$

La Ecuación (4.63), que da la resistencia longitudinal de un compuesto con fibras discontinuas para $L \geq L_c$ tiende al valor de la resistencia longitudinal de un compuesto con fibras continuas cuando $L \gg L_c$. La Ecuación (4.56) puede reordenarse para dar la tensión de fluencia de la matriz, τ_y, correspondiente a la longitud crítica

$$\tau_y = \frac{dS_{f1}^{(+)}}{2L_c} \tag{4.64}$$

Esta ecuación se ha usado para determinar la tensión de fluencia de la matriz a partir de mediciones de la longitud crítica. En un experimento, una muestra que consta de una sola fibra embebida en una tira de material de la matriz traslúcida está montada bajo un microscopio y después se somete a una carga de tracción cada vez mayor. Una vez que la tensión de la fibra llega a $S_{f1}^{(+)}$, la fibra se rompe en segmentos que tienen una distribucin estadística cerca de la longitud crítica, L_c, permitiendo calcular tensión de fluencia mediante la Ecuación (4.64).

4.7.3. Análisis del módulo

Se pueden encontrar expresiones del módulo longitudinal para materiales reforzados con fibras cortas alineadas utilizando el modelo de Kelly-Tyson o el modelo de Cox. Éste, para el elemento de volumen de la Figura 4.17(b) no considera constante la tensión tangencial con γ, esto se indica para la Ecuación (4.49) que relaciona la velocidad de cambio de la tensión normal de la fibra a lo largo de la dirección x con la tensión tangencial. Proponiendo que la tensión tangencial es proporcional a la diferencia entre u_f y u_m, donde u_f es el desplazamiento axial en un punto en la fibra y u_m es el desplazamiento axial que tendría la matriz en el mismo punto sin ninguna fibra presente. Teniendo esto presente, la variación de la carga axial P con x está dada por

$$\frac{dP}{dx} = H\left(u_f - u_m\right) \tag{4.65}$$

donde H es una constante de proporcionalidad determinada a partir de la geometría y propiedades de los materiales. Diferenciando la Ecuación (4.65) una vez, encontramos que

$$\frac{d^2P}{dx^2} = H\left(\frac{du_f}{dx} - \frac{du_m}{dx}\right) = H\left(\frac{P}{A_f E_{f1}} - e\right) \tag{4.66}$$

donde la expresión

$$\frac{du_f}{dx} = \frac{P}{A_f E_{f1}} \tag{4.67}$$

fue tomada de la mecánica de materiales y

$$\frac{du_m}{dx} = e \tag{4.68}$$

es la deformación la matriz sin presencia de fibras.

La Ecuación (4.66) se puede reorganizar para dar lugar a una ecuación de diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \beta^2 P = -He \tag{4.69}$$

donde

$$\beta^2 = \frac{H}{A_f E_{f1}} \tag{4.70}$$

La solución de la Ecuación (4.69) es de la forma

$$P = P_p + P_h \tag{4.71}$$

donde

$P_p \equiv$ es la solución particular $= A_f E_{f1} e$

$P_h \equiv$ es la solución de la ecuación homogenea $= R\ \sinh \beta x + S\ \cosh \beta x$

Los coeficientes R y S deben determinarse a partir de las condiciones de contorno $P = 0$ en $x = 0$ y $x = L$. Después de usar las identidades trigonométricas y posterior manipulación, la tensión resultante en la fibra es

$$\sigma_f = \frac{P}{A_f} = E_{f1} e \left[1 - \frac{\cosh \beta\,(0{,}5L - x)}{\cosh\,(0{,}5\beta L)}\right] \tag{4.72}$$

La tensión media en la fibra será

$$\overline{\sigma}_f = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \sigma_f\ dx = E_{f1} e \left[1 - \frac{\tanh\,(\beta L/2)}{\beta L/2}\right] \tag{4.73}$$

Teniendo presente la ecuación (4.57), en la que se hace uso de la regla de las mezclas para obtener la tensión media longitudinal, ahora lo hacemos para el módulo longitudinal. Sustituyendo la Ecuación (4.73) en la Ecuación (4.57) y dividiendo la ecuación por e, donde se ha supuesto que la tensión aplicada produce la misma deformación, e, en el compuesto, fibra y matriz. Posteriormente haciendo uso la ley de Hooke obtenemos la ecuación para el módulo longitudinal del modelo de Cox

$$E_1 = E_{f1} \left[1 - \frac{\tanh\,(\beta L/2)}{\beta L/2}\right] \upsilon_f + E_m\ \upsilon_m \tag{4.74}$$

La suposición de la igualdad de deformación en la fibra y la matriz no viola los supuestos originales sobre la diferencia entre u_f y u_m, porque u_m es el desplazamiento en un punto de la matriz, cuando no está reforzada con fibra. El término dentro del corchete de la Ecuación (4.74) representa el efecto de la longitud de la fibra en el módulo longitudinal del compuesto.

El parámetro β en las ecuaciones anteriores y la tensión tangencial,τ, fueron determinadas por Kelly considerando la deformación por cortante en la matriz. Los resultados son

$$\beta^2 = \frac{2\pi G_m}{A_f E_{f1} \ln\left(D/d\right)} \tag{4.75}$$

y

$$\tau = \frac{dE_{f1}e\beta}{4}\left[\frac{\sinh\left[\beta\left(0{,}5L - x\right)\right]}{\cosh\left(0{,}5\beta L\right)}\right] \tag{4.76}$$

Donde G_m es el de módulo de cizalladura de la matriz y D es el diámetro exterior del elemento de volumen, como se muestra en la Figura 4.17. Las variaciones de la tensión normal de la fibra y la tensión tangencial del modelo de Cox cuando la longitud de la fibra $L < L_i$ se muestran esquemáticamente en la Figura 4.23. Nótese la diferencia entre estas distribuciones de tensiones y las del modelo Kelly-Tyson en la Figura 4.21. Para el modelo de Cox, se evalúa en el punto medio de la fibra ($x = L/2$), cuando $L \longrightarrow L_i$, los términos entre corchetes en la Ecuación (4.72) se acercan al valor de 1, mientras que el término entre corchetes en la Ecuación (4.76) se aproxima a cero.

Aunque el modelo de Kelly-Tyson y de Cox proporcionan información valiosa sobre los conceptos de transferencia de carga, longitud de la fibra y análisis del módulo, ninguno de ellos predice con precisión las distribuciones de tensiones. Por ejemplo, los más recientes resultados de los análisis de elementos finitos y la fotoelasticidad experimental indican que tanto la magnitud y la tasa de cambio de la tensión tangencial cerca del extremo de la fibra son muy superiores a los predichos por los modelos de Kelly-Tyson o Cox. Es por ello por lo que se plantea en el siguiente apartado un modelo licromecánico para fibras discontinuas para el que posteriormente se harán estudios con los materiales comentados en el Apartado 3.2.1.

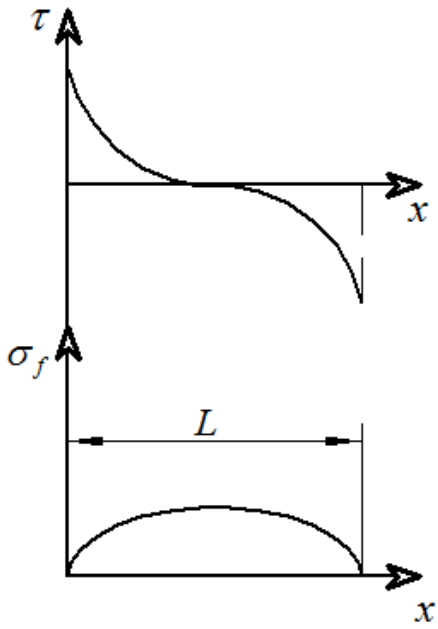


Figura 4.23: Variación de la tensión tangencial y normal en la fibra con la distancia a lo largo de la fibra de acuerdo con el modelo de Cox.

4.7.4. Modelo de Halpin-Tsai

Las ecuaciones de Halpin-Tsai (ver [10], [2]) son expresiones aproximadas de las soluciones desarrolladas por Hill. Los valores del módulo obtenidos con estas ecuaciones, tienen un acuerdo razonable con los resultados experimentales obtenidos, para distintas geometrías de las fibras.

Las ecuaciones de Halpin-Tsai para materiales reforzado con fibras cortas se exponen a continuación:

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1 + \zeta\ \eta\ \upsilon_f}{1 - \eta\ \upsilon_f} \tag{4.77}$$

con

$$\eta = \frac{(p_f/p_m) - 1}{(p_f/p_m) + \zeta} \tag{4.78}$$

donde

$p \equiv$ propiedad del material compuesto, p-ej: E_1, E_2, G_{12}, G_{23} y ν_{23}

$p_f \equiv$ propiedad del refuerzo de fibra, p-ej: E_f, G_f y ν_f

$p_m \equiv$ propiedad de la matriz, p-ej: E_m, G_m y ν_m

$\zeta \equiv$ una medida de la geometría del refuerzo, de la geometría de empaque y de las condiciones carga

$v_f \equiv$ fracción de volumen de refuerzo

Estimaciones fiables sobre el factor ζ se obtienen comparando las ecuaciones Halpin-Tsai con las soluciones numéricas de las ecuaciones micromecánica.

$$\zeta = 2\,\frac{l}{t} + 40\,v_f^{10} \quad \textit{para} \;\; E_1 \tag{4.79}$$

$$\zeta = 2\,\frac{w}{t} + 40\,v_f^{10} \quad \textit{para} \;\; E_2 \tag{4.80}$$

$$\zeta = \left(\frac{w}{t}\right)^{1,732} + 40\,v_f^{10} \quad \textit{para} \;\; G_{12} \tag{4.81}$$

donde l, w, y t son la longitud, ancho, y espesor del refuerzo, respectivamente. Para una fibra de sección circular, $l = l_f$ y $t = w = d_f$, y para un refuerzo esférico $l = t = w$. El término que contiene v_f en las expresiones para ζ es relativamente pequeño hasta $v_f = 0{,}7$, por lo que se puede despreciar. Halpin concluyó que E_2, G_{12}, y ν_{12} no se ven afectados de manera significativa por la longitud de la fibra, ni por distintas secciones transversales de la misma.

4.7.5. Resultados para los materiales objeto de estudio

Los resultados son obtenidos para un refuerzo de fibra de sección transversal circular, para las relaciones de aspecto: $\mathrm{r_{asp}} = \mathrm{l_f/d_f}$ =10, 20, 50, 100, 200, 500 y 1000. Esto implica la dependencia del módulo longitudinal con estas relaciones de aspecto $\mathrm{E_1} = f\,(v_f, \mathrm{r_{asp}})$, las demás constantes ingenieriles no variaran con ella (ver ecuaciones (4.79 - 4.81).

Modelo Halpin-Tsai E-glass\MY750							
E_1 [GPa] donde $r = r_{asp}$							
$\%\upsilon_f$	r = 10	r = 20	r = 50	r = 100	r = 200	r = 500	r = 1000
30	15.796	18.934	21.842	23.095	23.792	24.237	24.39
45	23.835	28.133	31.868	33.408	34.249	34.778	34.959
60	33.691	38.542	42.48	44.035	44.867	45.386	45.562
75	46.544	50.58	53.763	54.998	55.654	56.06	56.198

$\%\upsilon_f$	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	6.9299	2.1892	2.1892	0.305	0.58275
45	9.9066	3.0109	3.0109	0.2825	0.6451
60	15.118	4.6161	4.6161	0.26	0.63752
75	29.794	10.472	10.472	0.2375	0.42255

Modelo Halpin-Tsai S2-Glass\Epoxy 2							
E_1 [GPa] donde $r = r_{asp}$							
$\%\upsilon_f$	r = 10	r = 20	r = 50	r = 100	r = 200	r = 500	r = 1000
30	16.623	20.573	24.478	26.239	27.241	27.888	28.112
45	25.574	31.109	36.204	38.389	39.603	40.375	40.641
60	36.874	43.296	48.766	50.992	52.201	52.959	53.218
75	52.242	57.787	62.303	64.089	65.046	65.643	65.845

$\%\upsilon_f$	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	6.7359	2.1364	2.1364	0.305	0.57644
45	9.725	2.9554	2.9554	0.2825	0.64529
60	15.083	4.5818	4.5818	0.26	0.646
75	31.178	10.849	10.849	0.2375	0.43686

Modelo Halpin-Tsai AS\Epoxy 1							
E_1 [GPa] donde $r = r_{asp}$							
$\%v_f$	r = 10	r = 20	r = 50	r = 100	r = 200	r = 500	r = 1000
30	23.462	34.048	48.962	57.963	63.986	68.299	69.879
45	39.002	55.645	77.076	88.998	96.592	101.85	103.74
60	61.597	84.055	109.88	122.94	130.82	136.1	137.96
75	99.978	124.24	148.93	160.29	166.83	171.07	172.55

$\%v_f$	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	5.1029	2.024	1.8465	0.305	0.38178
45	6.374	2.6996	2.3249	0.2825	0.3708
60	8.066	3.9131	3.0686	0.26	0.31429
75	10.729	7.3752	4.5875	0.2375	0.16934

Modelo Halpin-Tsai IM7\8551-7 Epoxy							
E_1 [GPa] donde $r = r_{asp}$							
$\%v_f$	r = 10	r = 20	r = 50	r = 100	r = 200	r = 500	r = 1000
30	29.402	42.238	59.881	70.289	77.154	82.023	83.797
45	48.667	68.695	93.863	107.57	116.2	122.12	124.24
60	76.431	103.18	133.23	148.15	157.07	163	165.09
75	122.89	151.31	179.68	192.57	199.93	204.69	206.34

$\%v_f$	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	G_{23} [GPa]	ν_{12}	ν_{23}
30	6.4953	2.5651	2.1959	0.326	0.47894
45	8.1066	3.4871	2.7079	0.299	0.49688
60	10.249	5.2303	3.466	0.272	0.47846
75	13.611	10.977	4.8737	0.245	0.39639

4.8. Comparación del modelo de Halpin-Tsai con los modelos de fibras continuas

En este apartado se va a comparar para cada material objeto de estudio, el modelo micromecánico de fibras cortas de Halpin-Tsai con los modelos micromecánicos estudiados para fibras continuas, los resultados gráficos se exponen a continuación:

4.8.1. E-glass\MY750

En la figura 4.24 vemos como al aumentar la relación de aspecto (curvas de color rojo), el modelo de fibras cortas de Halpin-Tsai se aproxima a los resultados obtenidos para los modelos de fibra continua para la constante E_1.

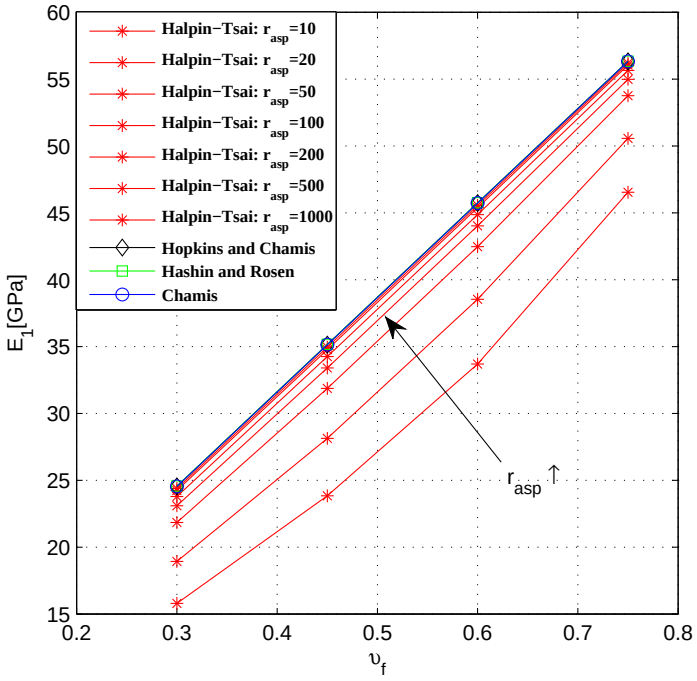


Figura 4.24: **Material E-glass\MY750**: $E_1 = f(\upsilon_f, r_{asp})$ Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas

La figura 4.25 nos muestra la comparación, del modelo de Halpin-Tsai con los modelos de fibras continuas para las demás constantes ingenieriles. Se puede apreciar gráficamente, como ya no aparece la dependencia con la relación de aspecto para estas constantes en el modelo de Halpin-Tsai

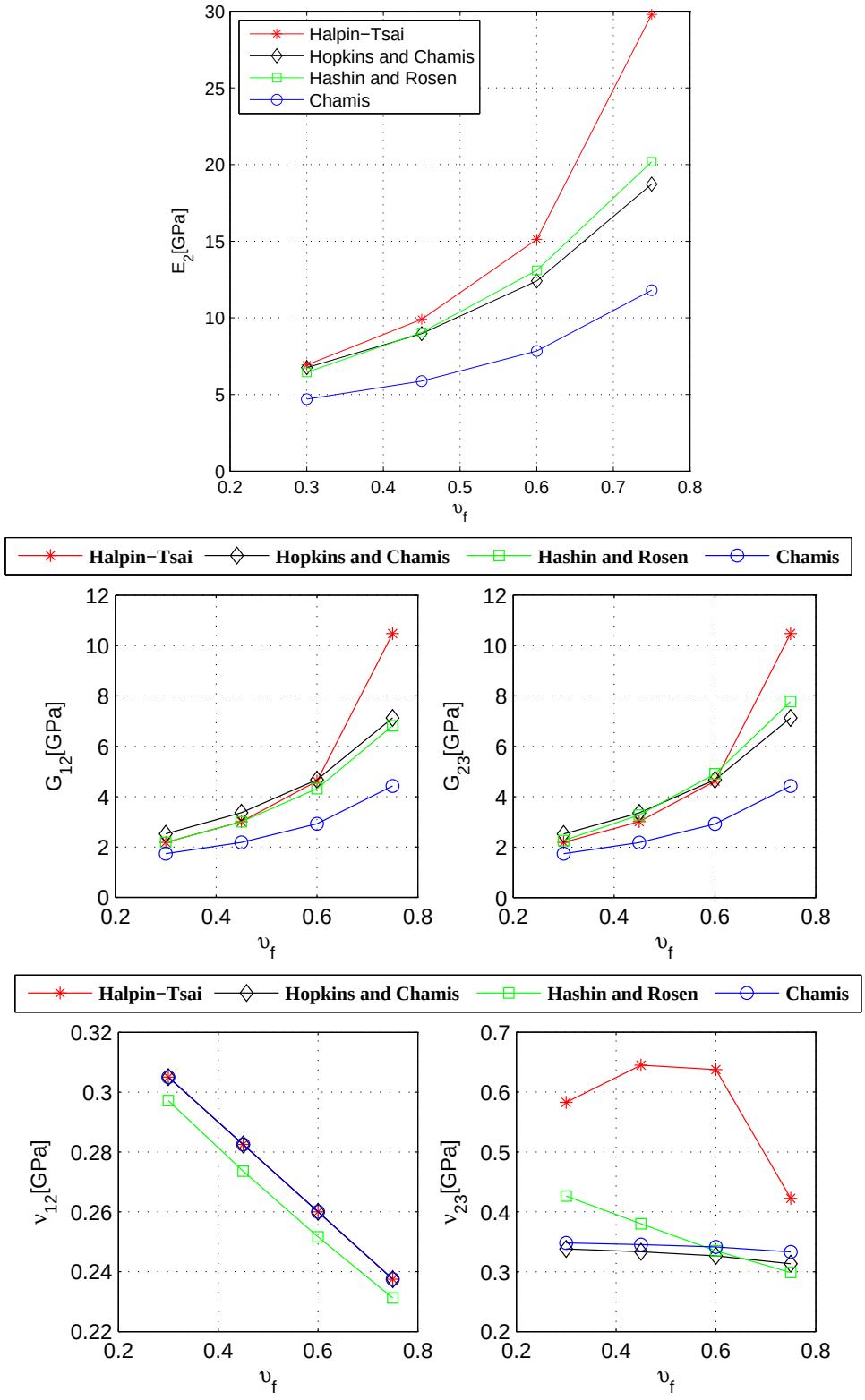


Figura 4.25: **Material E-glass\MY750**: $E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}$ y $\nu_{23} = f(v_f)$ Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas

4.8.2. S2-Glass\Epoxy 2

En la figura 4.26 se puede observar la comparación gráfica del modelo de Halpin-Tsai con los modelos de fibras continuas , para el material S2-Glass\Epoxy 2, representando todas las constantes ingenieriles contempladas.

4.8.3. AS\Epoxy 1

En la figura 4.27 se puede observar la comparación gráfica del modelo de Halpin-Tsai con los modelos de fibras continuas , para el material AS\Epoxy 1, representando todas las constantes ingenieriles contempladas.

4.8.4. IM7\8551-7 Epoxy

En la figura 4.28 se puede observar la comparación gráfica del modelo de Halpin-Tsai con los modelos de fibras continuas , para el material IM7\8551-7 Epoxy, representando todas las constantes ingenieriles contempladas.

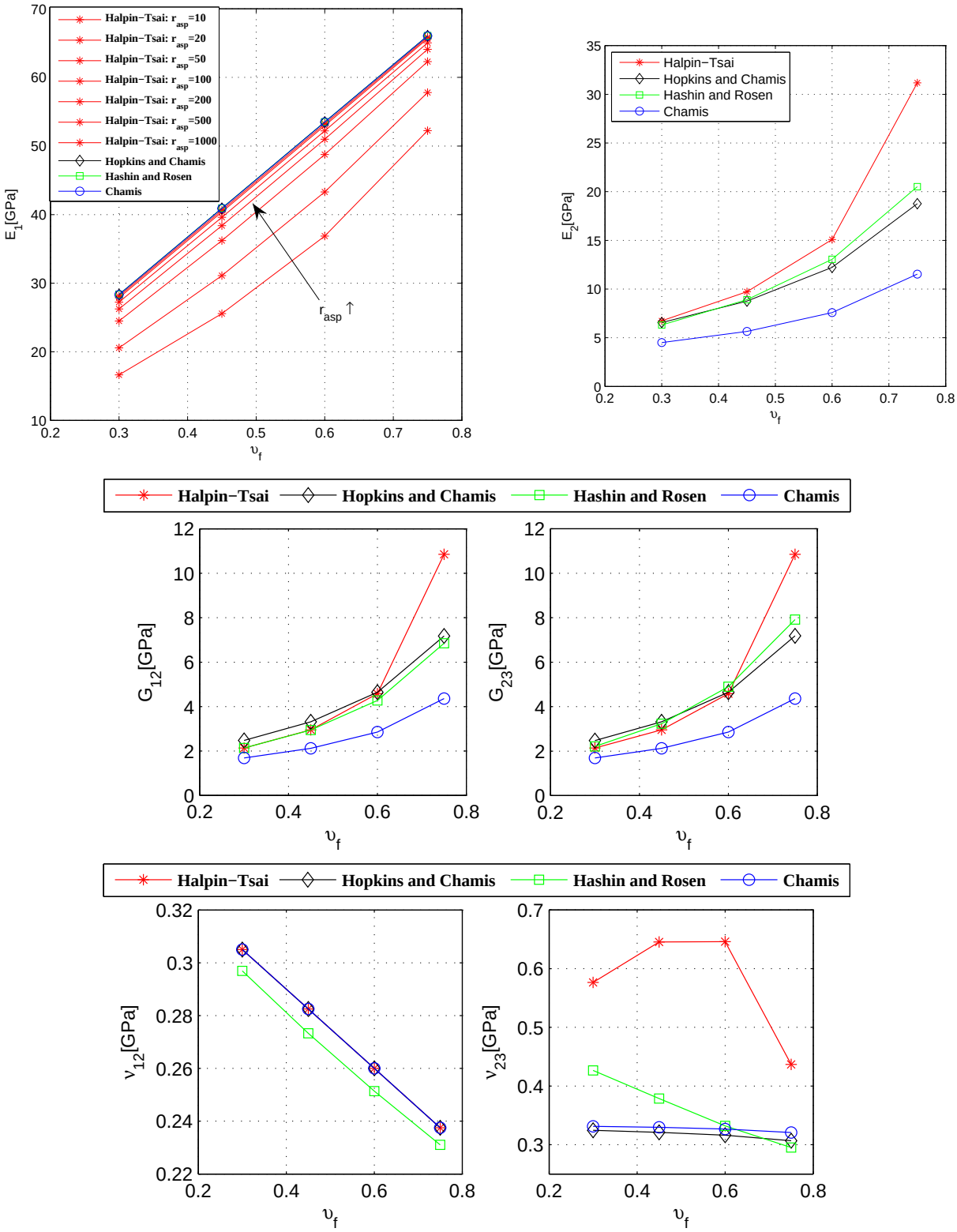


Figura 4.26: **Material S2-Glass\Epoxy 2**: Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas

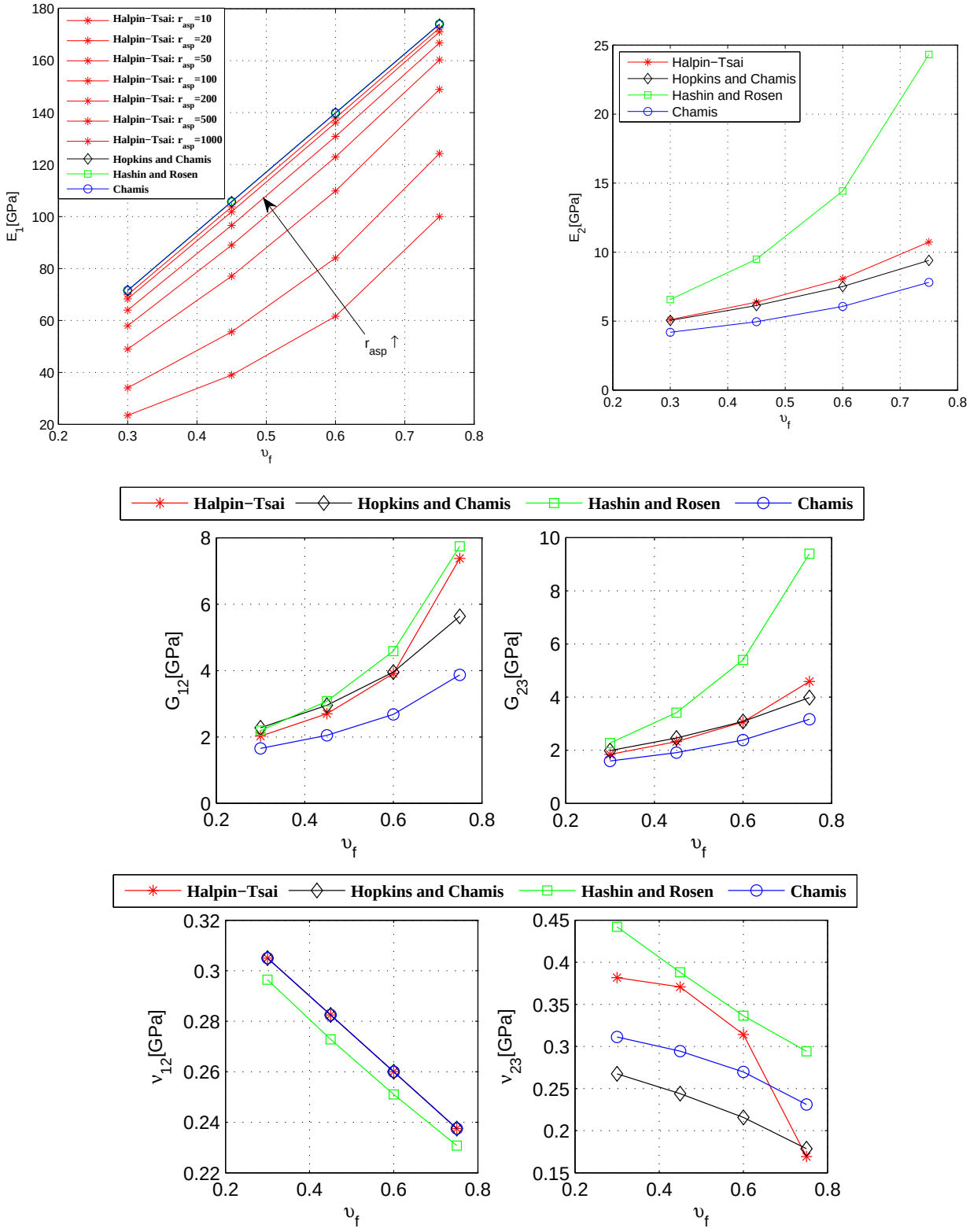


Figura 4.27: **AS\Epoxy 1**: Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas

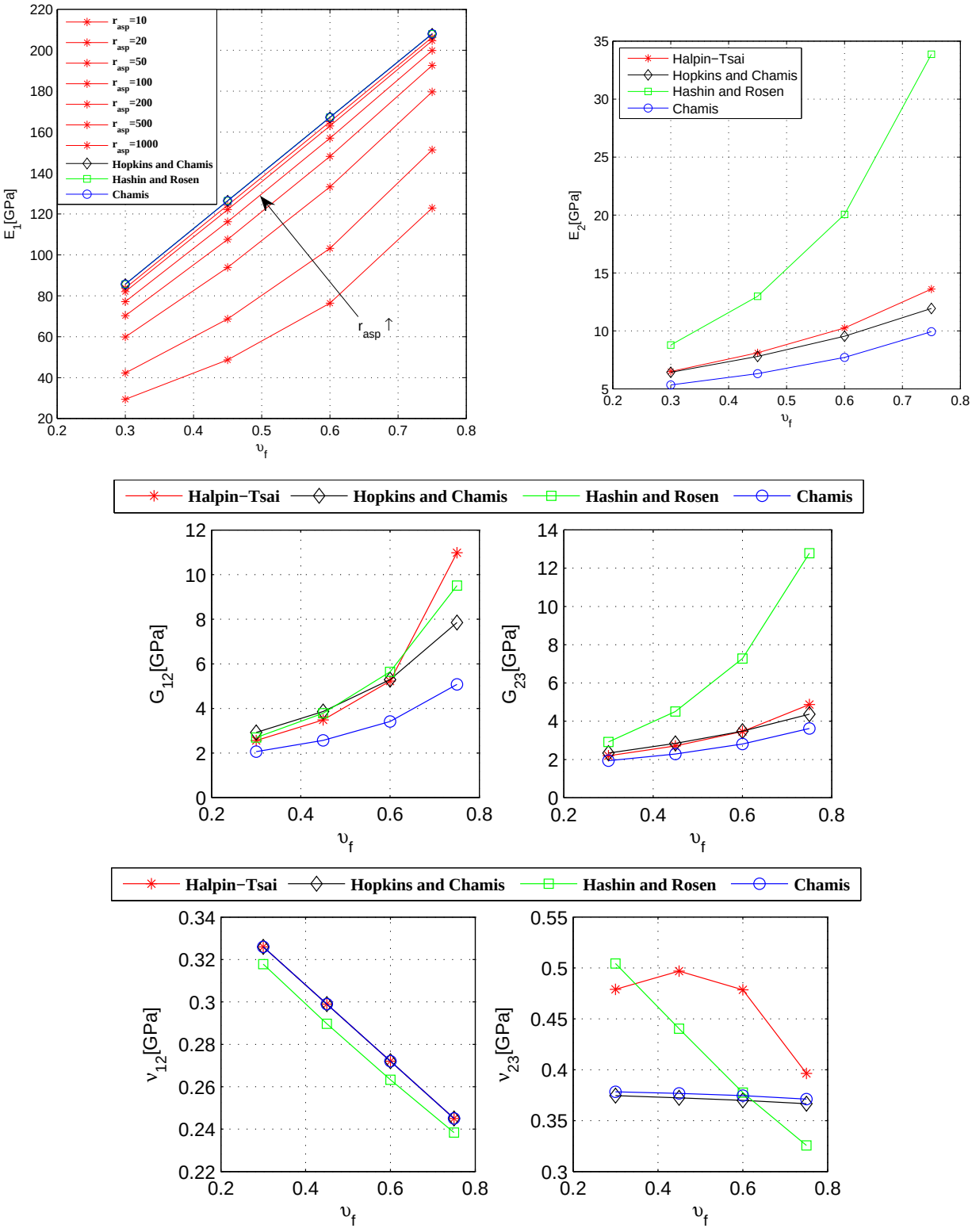


Figura 4.28: **IM7\8551-7 Epoxy**: Halpin-Tsai frente a Modelos fibras continuas

Capítulo 5

Problemas de indentación en materiales reforzados con fibras

5.1. Introducción

En este capítulo se pretende estudiar para los materiales reforzados con fibra, la influencia de la orientación y la fracción de volumen de fibra, α_1 y v_f respectivamente. Para ello realizamos el estudio del problema de indentación prescrita ante una combinación de solicitaciones normales y tangenciales, P y Q respectivamente, haciendo uso de dos elementos para realizar la indentación: cilindro y esfera, ambos de acero. Poniendo de manifiesto que los resultados obtenidos mediante el uso de los distintos programas desarrollados por mi tutor: L. Rodríguez−Tembleque, están basados en el Método de los Elementos de Contorno (ver [12], [17], [16] y [15]). Para los cuales solo he sido responsable como usuario para la realización de las simulaciones necesarias que permitieran generar los resultados que se exponen en los capítulos 5 y 6 del proyecto. Estos programas requieren para cada problema de indentación, de la introducción de las constantes de la matriz de comportamiento $\mathbf{C}$ del material compuesto, los valores de los desplazamientos prescritos normal y tangencial, y los valores de los coeficientes de fricción para definir la ley de fricción ortótropa empleada. Para el caso del problema de indentación con la esfera se considera también la posibilidad de variar la orientación del desplazamiento tangencial prescrito según la coordenada θ, esto nos permitirá observar su influencia en los resultados de Q para la ley de fricción ortótropa adoptada. Para realizar estos estudios consideraremos para el caso de fibras continuas los modelos micromecánicos de Hopkins-Chamis y

Hashin-Rosen, para el caso de fibras cortas se considera el modelo de Halpin-Tsai, variando la relación de aspecto.

5.2. Datos de entrada para la resolución de los problemas de indentación

En este apartado se pretende establecer las condiciones bajo las que se están resolviendo cada problema en cada situación. En primer lugar habría que indicar tanto para el caso de la esfera como del cilindro las constantes de la matriz de comportamiento **C**, esto se indica en el siguiente apartado. Antes de ello, indicar que como el contacto se produce entre dos sólidos de distinto material, se trata tanto para el problema de indentación del cilindro como para la esfera, de dos problemas de contacto no similares. Lo que implica el acoplamiento de las variables de contacto normales y tangenciales.

5.2.1. Dependencia de la matriz de comportamiento

Antes de indicar la dependencia de las constantes de **C** habría que hacer una distinción entre el tipo de fibra que se está estudiando, ya sea continua o discontinua.

- **Fibras continuas**

  Para el caso de fibras continuas, la matriz de comportamiento será dependiente del modelo micromecánico empleado, del contenido de fibra del material v_f y de la orientación de la fibra α_1.

$$\mathbf{C} = f\,(\textit{Modelo micromecánico},\ v_f,\ \alpha_1) \tag{5.1}$$

  - Los modelos micromecánicos empleados son:

    Hopkins-Chamis y Hashin-Rosen

  - Los porcentajes de fibra contemplados son:

    $v_f\,[\,\%] = \{30,\ 45,\ 60,\ 75\}$

  - Los ángulos contemplados para la orientación de la fibra son:

    $\alpha_1 = \{0\,^\circ,\ 30\,^\circ,\ 45\,^\circ,\ 60\,^\circ,\ 90\,^\circ\}$

- **Fibras cortas**

  Para el caso de fibras cortas, la matriz de comportamiento será dependiente de las condiciones establecidas para las fibras continuas con el añadido de la relación de aspecto r_{asp}. Este parámetro nos da la relación contemplada entre la longitud L de la fibra y su diámetro d.

$$\mathbf{C} = f\,(\textit{Modelo micromecánico},\ \upsilon_f,\ \alpha_1,\ r_{asp}) \tag{5.2}$$

  - El modelo micromecánico empleado es:

    Halpin-Tsai

  - Los porcentajes de fibra contemplados son:

    $\upsilon_f\,[\,\%] = \{30,\ 45,\ 60,\ 75\}$

  - Los ángulos contemplados para la orientación de la fibra son:

    $\alpha_1 = \{0\,^\circ,\ 30\,^\circ,\ 45\,^\circ,\ 60\,^\circ,\ 90\,^\circ\}$

  - Las relaciones de aspecto contempladas son:

    $r_{asp} = \{10,\ 20,\ 50,\ 100\}$

5.2.2. Indentación mediante el cilindro

En este apartado se pretende indicar las condiciones del contacto con fricción entre un cilindro de acero (*isótropo*) y un material reforzado con fibras continuas (*transversalmente isótropo*), lo que provoca que el problema de contacto sea no similar. Las dimensiones del bloque de material compuesto (ver Figura 5.1(a)) objeto de estudio son las siguientes: longitud $L_1 = 1 \times 10^3\ mm$, espesor $L_2 = 0{,}2 \times 10^3\ mm$ y alto $L_3 = 0{,}4 \times 10^3\ mm$. El radio del cilindro y su longitud son: $R_{cil} = 0{,}5 \times 10^3\ mm$ y $L_{cil} = L_2$, respectivamente. Los valores de las dos constantes elásticas del acero empleado para el cilindro son: módulo de Young $E = 200\ GPa$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}3$. Los desplazamientos normal y tangencial prescritos de acuerdo al sistema de referencia global son: $g_{o,x_3} = -4{,}5\ mm$ y $g_{o,x_1} = 0{,}4\ mm$, respectivamente. Respecto a los elementos de contorno de la malla (ver Figura 5.1(b)), cada dominio es discretizado por 1252 elementos en la frontera, siendo el tipo de elemento cuadrilátero lineal. Utilizando 20×14 elementos en la zona potencial de contacto. El valor del único coeficiente de fricción que gobierna el problema fruto a la geometría

de este y la dirección de la aplicación de la carga tangencial Q es: $\mu_1 = 0{,}1$, según el eje x_1. Finalmente indicar que existe una coherencia entre los ejes globales utilizados para describir el problema y los ejes del material compuesto.

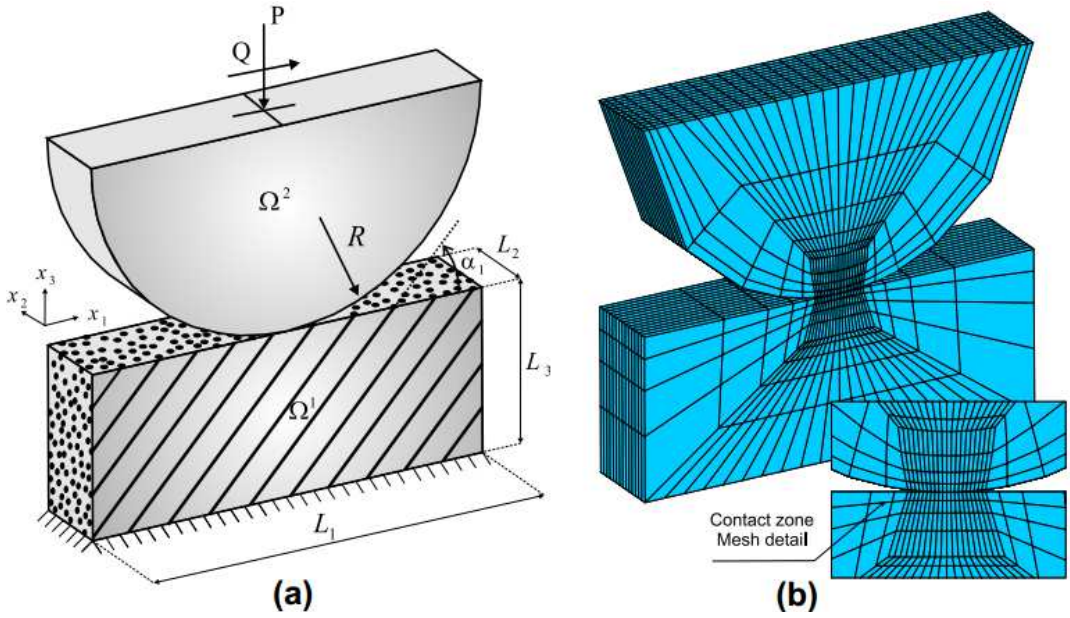


Figura 5.1: **(a)** Esquema del cilindro y del tocho de compuesto. **(b)** Elementos de contorno de la malla. Figura sacada de [17].

5.2.3. Indentación mediante la esfera

En este apartado se establece el contacto con friccíon entre una esfera de acero y un material reforzado con *fibras continuas* y también se consiera cuando el refuerzo es con *fibras cortas*, problema no similar. Como las dimensiones de los cuerpos en contacto son mucho mayores que la propia zona de contacto (Γ_c), por el principio de *Saint-Venant*, las tracciones de contacto no se ven muy influenciadas por la forma de los cuerpos en las lejanías de Γ_c. Si a esto se le añade que la región de contacto es casi plana, se pueden modelar el comportamiento de los cuerpos en la zona de contacto por semiespacíos elásticos, ver Figura 5.2. La extensión de las superficies de los semiespacíos elásticos considerados son: $S = L \times L$ donde $L = 1{,}2\ mm$, en ambos sólidos. El radio de la esfera y propiedades del acero empleado en ella son los siguientes: $R_{esf} = 50\ mm$, $E = 200\ GPa$ y $\nu = 0{,}3$, respectivamente. Los desplazamientos normal y tangencial prescritos con refuerzo de *fibras continuas*

o cortas respecto al sistema de referencia global empleado (coherente con el del material compuesto) son: $g_{o,x_3} = -0{,}02\ mm$ y $g_{o,t} = 0{,}001\ mm$, respectivamente, formando $g_{o,t}$ un ángulo θ con el eje x_1 y siendo $\theta = \{0\,^\circ,\ 30\,^\circ,\ 45\,^\circ,\ 60\,^\circ,\ 90\,^\circ\}$. Los valores de los coeficientes de fricción, que componen la ley de fricción otótropa son los siguientes: $\mu_1 = 0{,}1$ según el eje x_1 y $\mu_2 = 0{,}2$ según el eje x_2.

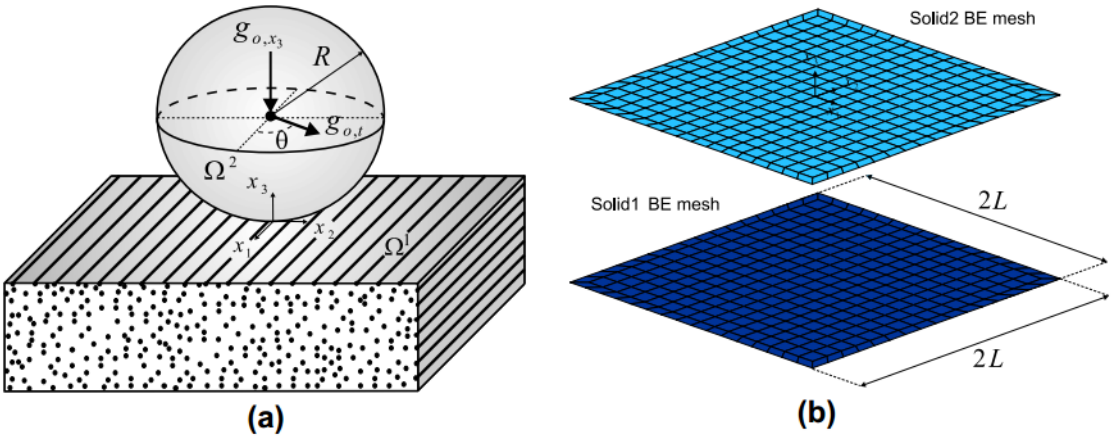


Figura 5.2: **(a)** Esquema de la esfera y el tocho de compuesto. **(b)** Elementos de contorno de la malla. Figura sacada de [17].

5.3. Problemas de indentación para materiales reforzados con fibras continuas.

En este apartado se hace el estudio del problema de indentación prescrita (ver apartados 5.2.2 - 5.2.3) ante una combinación de solicitaciones normales y tangenciales, P y Q respectivamente. Los materiales que serán objeto de estudio tanto para la indentación con el cilindro como con la esfera serán:

- E-Glass\MY750
- IM7 Carbon\8551-7 epoxy

Como el refuerzo es con fibras continuas haremos uso de dos de los modelos micromecánicos asociados a este tipo de fibra, Hopkins-Chamis y Hashin-Rosen, con al primero se estudiará tanto la fibra de vidrio como la de carbono y con el segundo solo la de carbono, para finalmente hacer una comparativa de los resultados entre

ambos modelos micromecánicos con la fibra de carbono. Indicar que para la esfera también se indicarán los resultados del valor de la carga tangencial Q, cuando el desplazamiento tangencial prescrito $g_{o,t}$ es función de θ.

5.3.1. Resultados del problema de indentación con cilindro y esfera. Modelo de Hopkins-Chamis.

En este apartado presentaremos los resultados obtenidos para los valores de P y Q en el cilindro y la esfera cuando variamos el contenido en fibra de los materiales objeto de estudio y la orientación de la misma.

- **E-Glass\MY750: Estudio de P y Q en el cilindro y esfera en función de α_1, para cada v_f. Modelo micromecánico de Hopkins-Chamis.**

  En la Figura 5.3, tenemos la *representación 1* que consiste en la adimensionalización de la solicitación normal y tangencial respecto al valor obtenido cuando la orientación de la fibra es $\alpha_1 = 0\,^\circ$, para cada contenido de fibra. Eso hace que todas las gráficas de la representación 1 nazcan en la unidad. En está representación vemos como la solicitación normal y tangencial en el cilindro aumentan sustancialmente a partir de $\alpha_1 = 45\,^\circ$ en adelante. Pero lo más significativo es como en el intervalo inicial de $[0\,^\circ, 30\,^\circ]$ existe una cedencia disminuyendo el valor inicial de P y Q en el cilindro, esto ultimo tanbién ocurre para P en la esfera. Pero con la esfera para la solicitación tangencial ocurre justamente lo contrario, en las inmediaciones de $\alpha_1 = 30\,^\circ$ alcanza su máximo para todos los porcentajes de fibra

  La *representación 2*, ver Figura 5.4, nos va a permitir establecer cuestiones respecto al contenido de fibra. En esta representación adimensionalizamos al igual que antes para el valor obtenido cuando $\alpha_1 = 0\,^\circ$, pero ahora fijando el contenido en fibra en el $30\,\%$, esto hace que solo sea en este porcentaje de fibra en el que nazcan las curvas en la unidad. Vemos como conforme aumentamos el contenido de la fibra tanto en el cilindro como en la esfera para ambas solicitaciones las curvas se trasladan hacia arriba, indicándonos que conforme aumenta el contenido en fibra el valor de las solicitaciones también aumenta. Pero como no puede ser de otro modo también vemos como cuando fijamos el contenido de la fibra, por ejemplo en el cilindro, las solicitaciones aumentan

sustancialmente a partir de $\alpha_1 = 45\,^\circ$, mientras que en el intervalo posterior no parece que exista una dependencia clara respecto a la orientación de la fibra, salvo la pequea disminución entorno a los $\alpha_1 = 30\,^\circ$. En la esfera al igual que en el cilindro se aprecia con claridad los desfases existentes para cada porcentaje de fibra, y el máximo de Q entorno a $\alpha_1 = 30\,^\circ$.

En la *representación 3*, ver Figura 5.3.1, se pretende hacer una representación en modo inverso a como lo hemos hecho anteriormente. En este caso parametrizamos respecto a la orientación de la fibra haciendo variar su contenido. Esto nos permitirá ver para que orientaciones de fibra en el cilindro y en la esfera, es necesario un mayor valor de la combinación de solicitaciones para la indentación prescrita. En el cilindro se observa claramente como cuando $\alpha_1 = 90\,^\circ$ las solicitaciones son mayores, tambieñ nos permite verificar el mínimo observado anteriormente para $\alpha_1 = 30\,^\circ$, curva verde, y como es a partir de $\alpha_1 = 45\,^\circ$ como la influencia de la orientación de la fibra se hace notable. En la esfera para P ocurre lo mencionado en el cilindro, mientras que para Q las curvas se superponen unas con otras, lo que hace percibir la independencia de la solicitación tangencial en la esfera respecto a la orientación de la fibra, concluyendo que no es significativa.

- **E-Glass\MY750: Estudio de Q en la esfera en función de α_1, para cada θ. Modelo micromecánico de Hopkins-Chamis.**

  Ahora se va realizar el análisis de la solicitación tangencial en la esfera, cuando la dirección del desplazamiento tangencial prescrito es variable con θ. En la Figura 5.6, vemos la *representación 1* de este análisis (la nomenclatura de las representaciones es la misma en todos los estudios), donde representamos la carga tangencial adimensionalizada respecto al primer valor de la orientación de la fibra, para cada porcentaje de ella. Observamos en está gráfica como independientemente del contenido de la fibra y de la dirección del desplazamiento tangencial prescrito, a partir de $\alpha_1 = 30\,^\circ$ en adelante disminuye la carga tangencial necesaria para conseguir el desplazamiento tangencial prescrito.

  En *representación 2* de este estudio, ver Figura 5.7, podemos hacer un análisis respecto al contenido de la fibra para Q. En está representación vemos como al aumentar el porcentaje de fibra aumenta la carga tangencial para una misma orientación del desplazamiento tangencial prescrito θ. Verificándose lo mencio-

nado en la representación 1 de este análisis. Además se puede observar como para porcentajes bajos de fibra, independientemente de la orientación del desplazamiento tangencial θ, la *carga tangencial* no varia con la orientación de la fibra α_1. Solo lo hace mínimamente cuando el contenido en fibra es alto. El eje de ordenadas no tiene su amplitud unificada en está representación para poder apreciar como para $\theta = 0\,^\circ$ (curva negra) para una orientación de la fibra de $\alpha_1 = 30\,^\circ$ el valor de la carga tangencial aumenta para posteriormente decrecer, esto ocurre en todos los porcentajes de fibra contemplados.

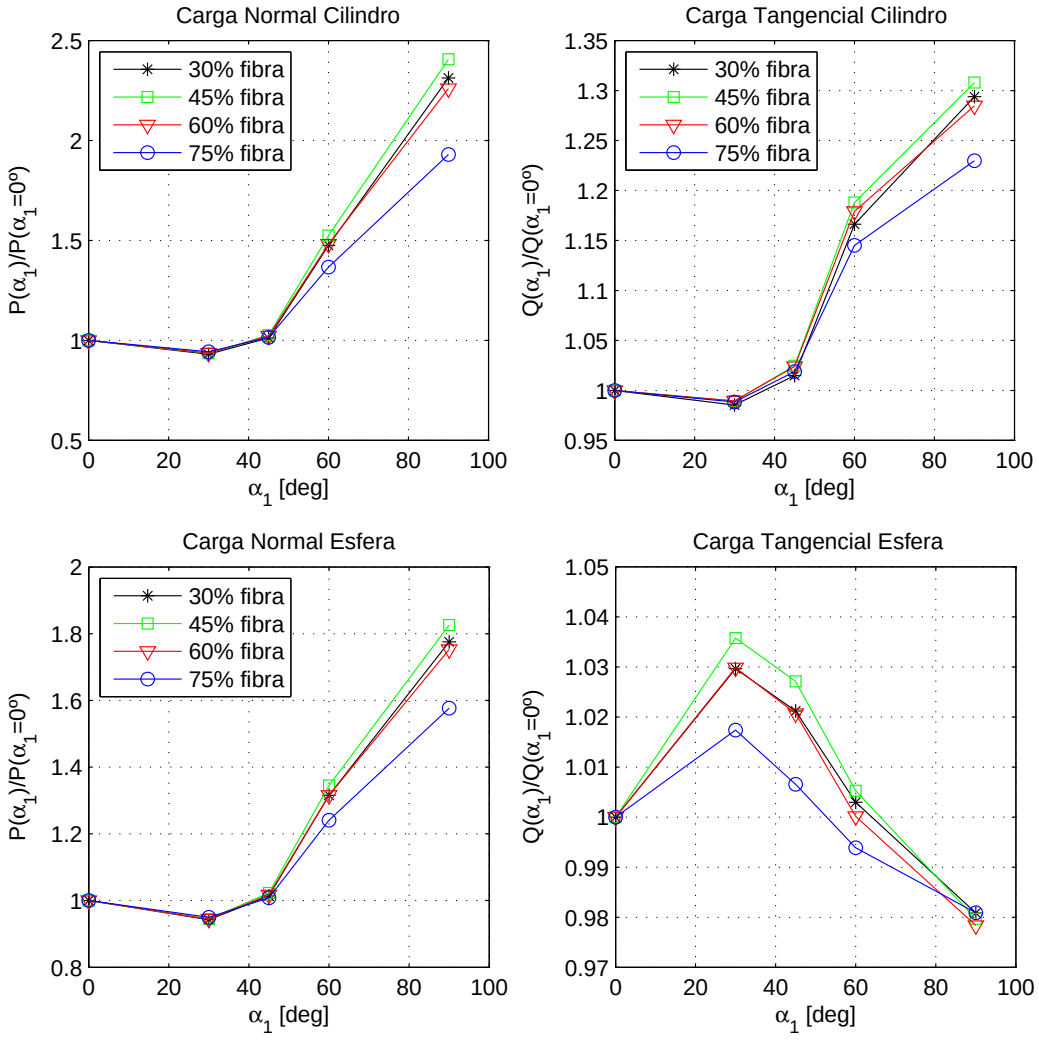


Figura 5.3: **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 1 de P y Q en Cilindro y Esfera

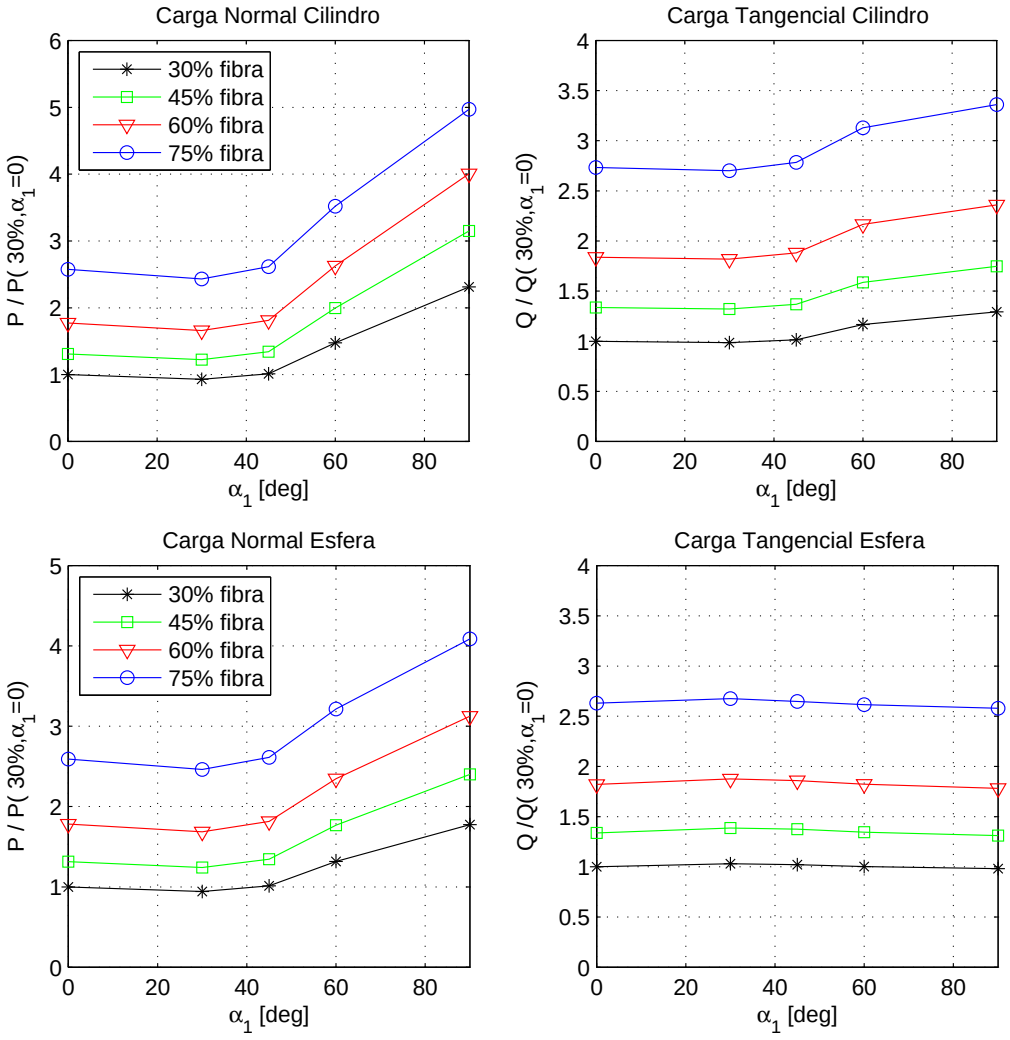


Figura 5.4: **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 2 de P y Q en Cilindro y Esfera

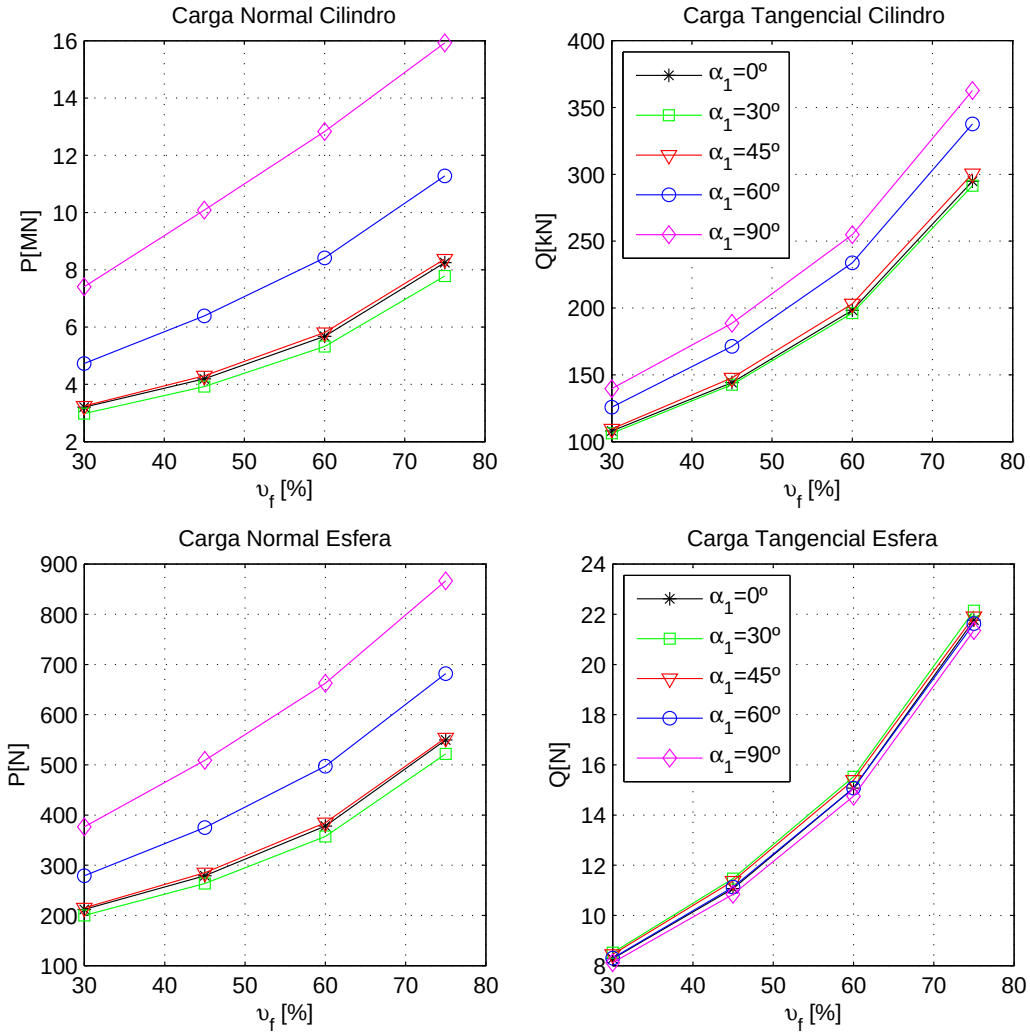


Figura 5.5: **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 3 de P y Q en Cilindro y Esfera

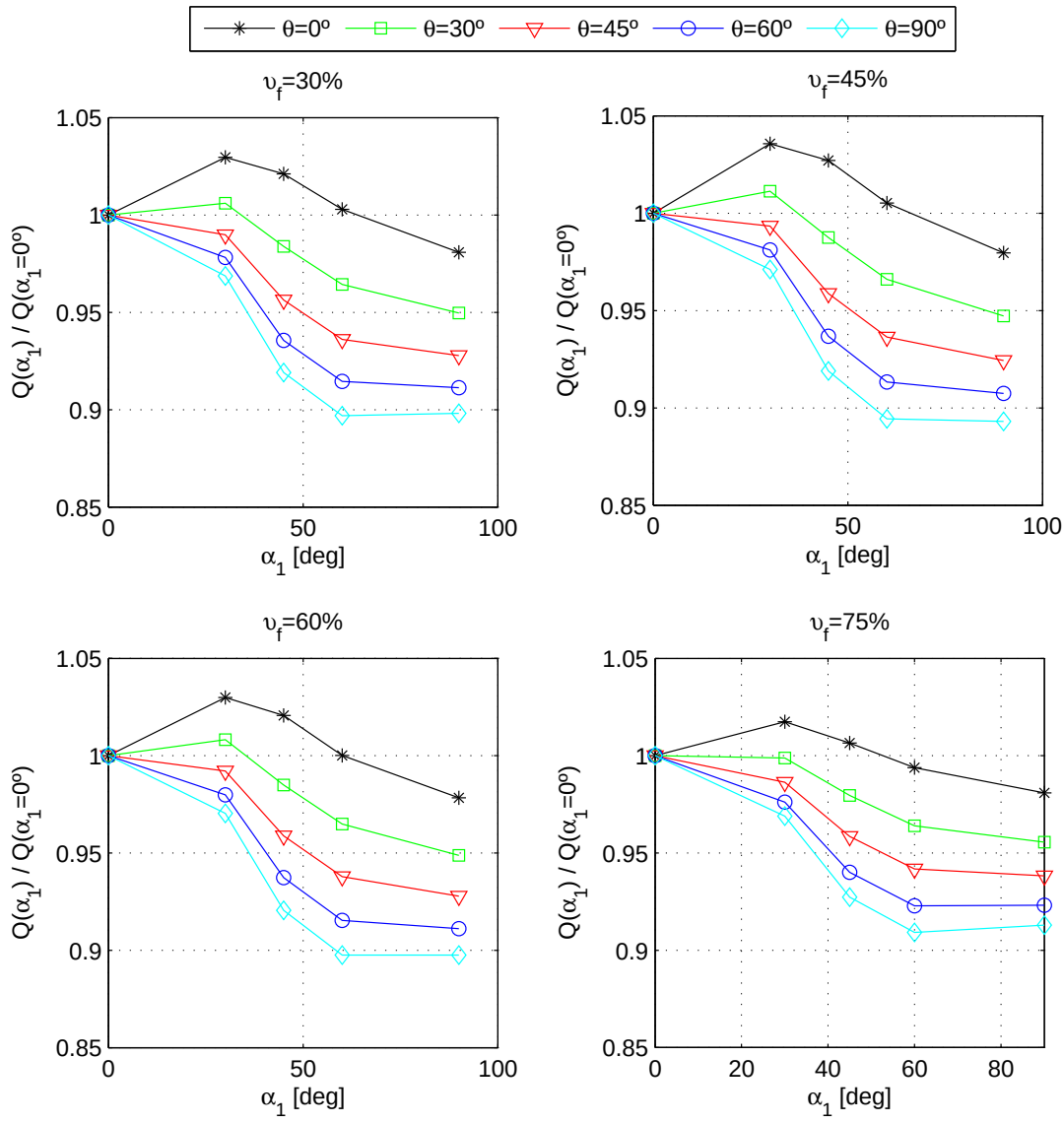


Figura 5.6: **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 1 de Q en la esfera para cada θ.

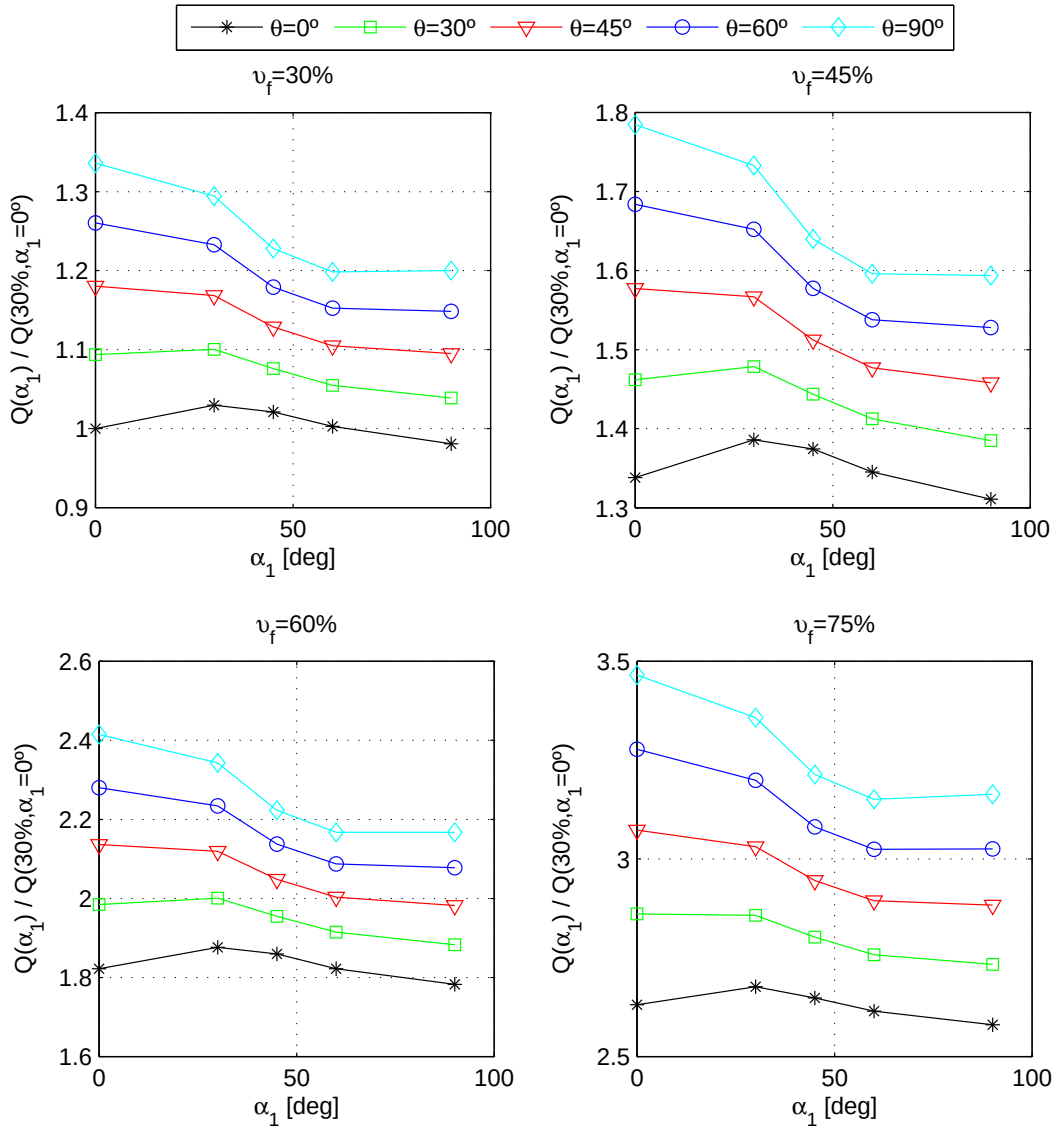


Figura 5.7: **Hopkins: E-Glass\MY750**. Representación 2 de Q en la esfera para cada θ.

- **IM7 Carbon\8551-7: Estudio de P y Q en el cilindro y esfera en función de α_1, para cada v_f. Modelo micromecánico de Hopkins-Chamis.**

  Para este refuerzo con fibra de carbono, se verifican las mismas cuestiones planteadas que con el anterior material; salvo por el hecho de que este material no experimenta el escalón de cedencia para las solicitaciones que aparecía anteriormente en el cilindro y esfera, cuando la orientación de la fibra rondaba $\alpha_1 = 30\,^\circ$. En las figuras 5.8 - 5.10 aparecen las representaciones anteriormente comentadas.

- **IM7 Carbon\8551-7: Estudio de Q en la esfera en función de α_1, para cada θ. Modelo micromecánico de Hopkins-Chamis.**

  Los resultados para este material son cualitativamente los mismos que los obtenidos con la fibra de vidrio, ver figuras 5.11 y 5.12. Se podría destacar de está segunda figura respecto de su gemela del material anterior (ver Figura 5.7) que para el material con refuerzo de fibra de carbono, cuando la orientación de la fibra es $\alpha_1 = 30\,^\circ$, el incremento de la solicitación tangencial de este punto respecto al anterior para $\alpha_1 = 0\,^\circ$, se manifiesta claramente para una dirección de deslizamiento tangencial de $\theta = 0\,^\circ,\ 30\,^\circ,\ 45\,^\circ,\ 60\,^\circ$ para todo v_f y para $\theta = 90\,^\circ$ a partir de $v_f = 45\,\%$. Hecho que en la fibra de vidrio solo se manifestaba en $\theta = 0\,^\circ$ para todo v_f.

- **Comparación: IM7 Carbon\8551-7 Vs E-Glass\MY750: Modelo micromecánico de Hopkins-Chamis.**

  En este punto representamos de forma simultanea los resultados anteriormente obtenidos para la fibra de carbono (curva trazo discontinuo) y fibra de vidrio (trazo continuo), en los problemas de indentación del cilindro y esfera ante una combinación de solicitaciones normales y tangenciales, ver figuras 5.13 y 5.14. En las representaciónes 1 y 2 podemos ver como cuando la orientación de la fibra es superior a $\alpha_1 = 45\,^\circ$ para todo porcentaje de fibra, el compuesto de fibra de carbono proporciona valores de P y Q superiores a la fibra de vidrio en el cilindro y esfera.

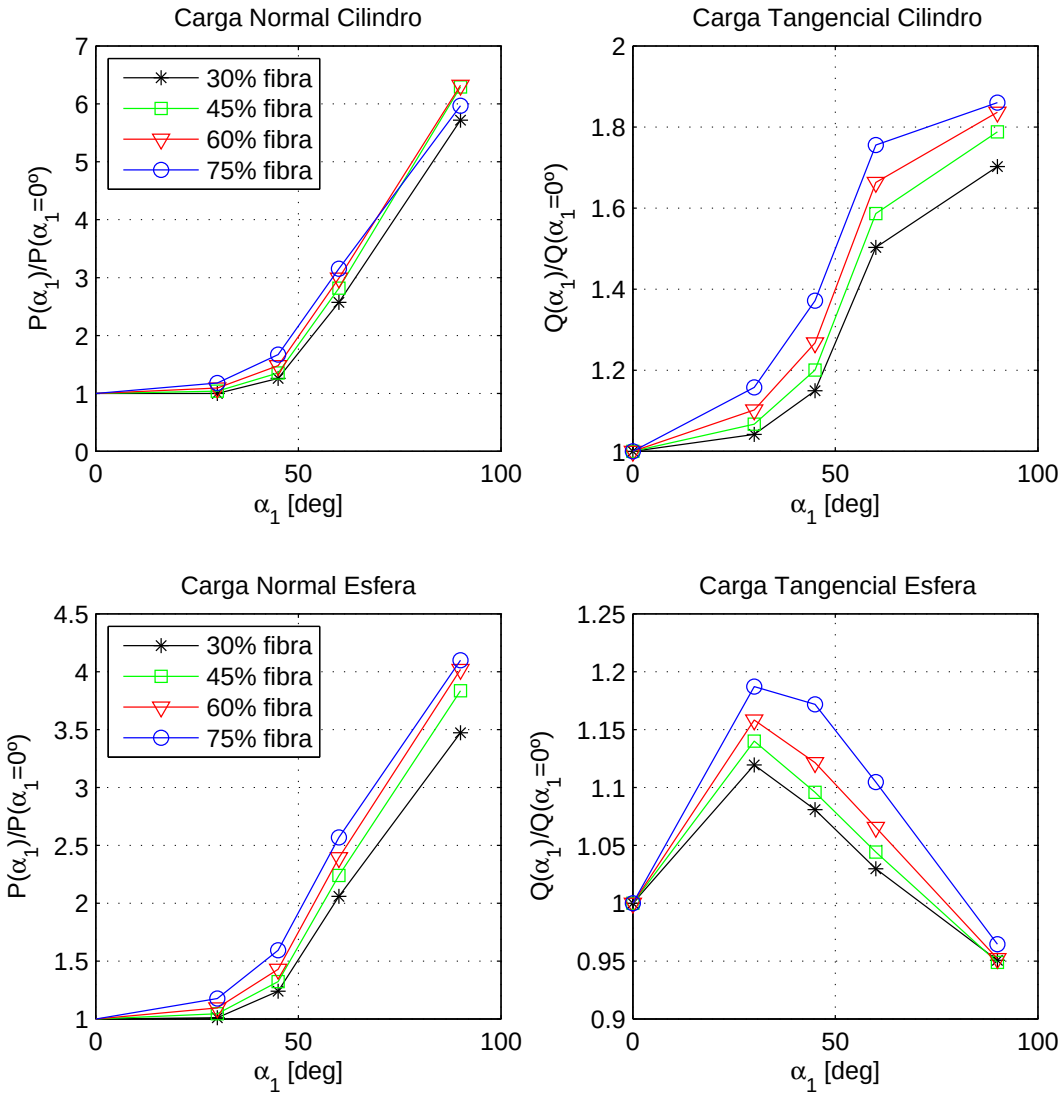


Figura 5.8: **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de P y Q en Cilindro y Esfera

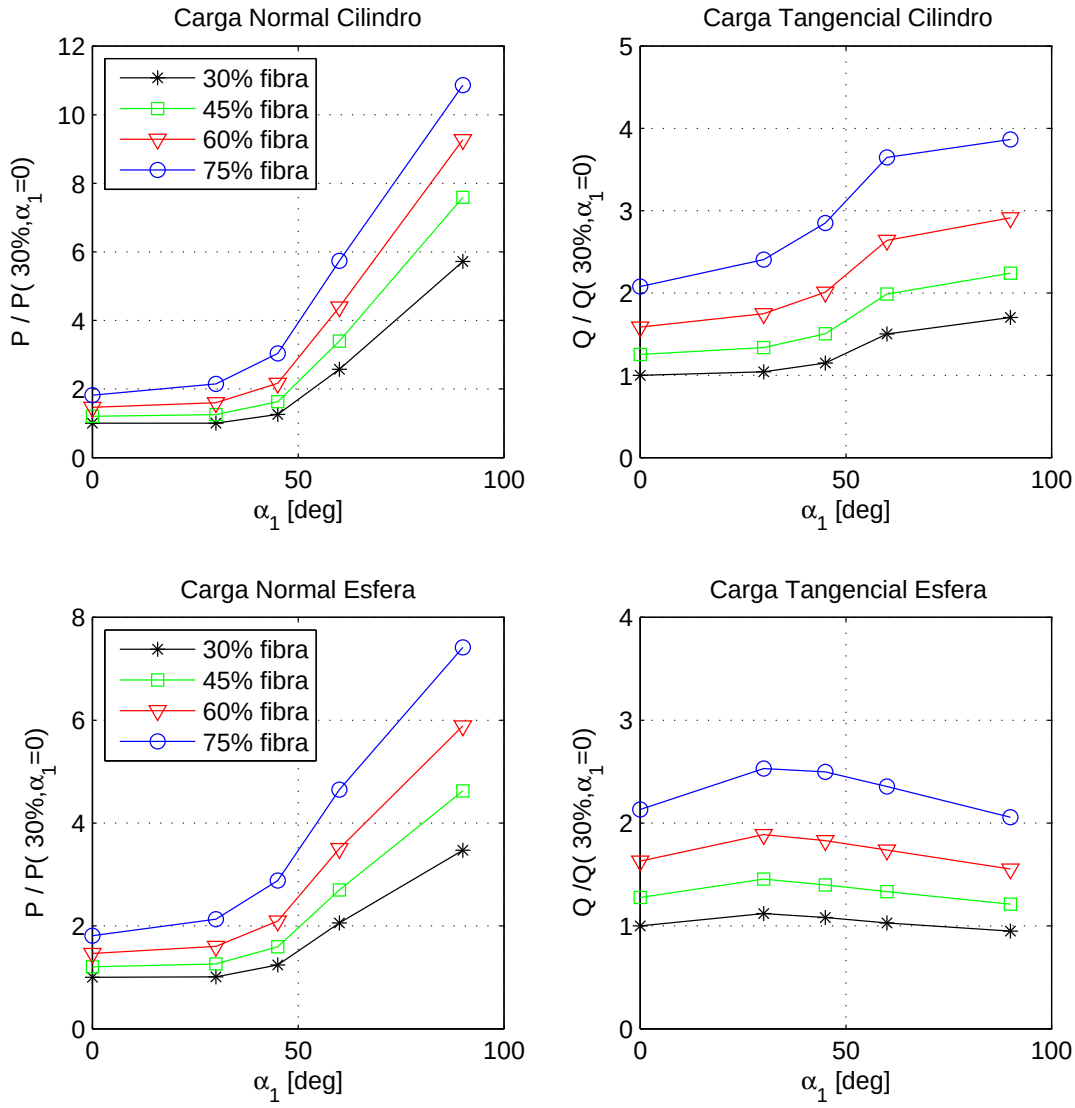


Figura 5.9: **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de P y Q en Cilindro y Esfera

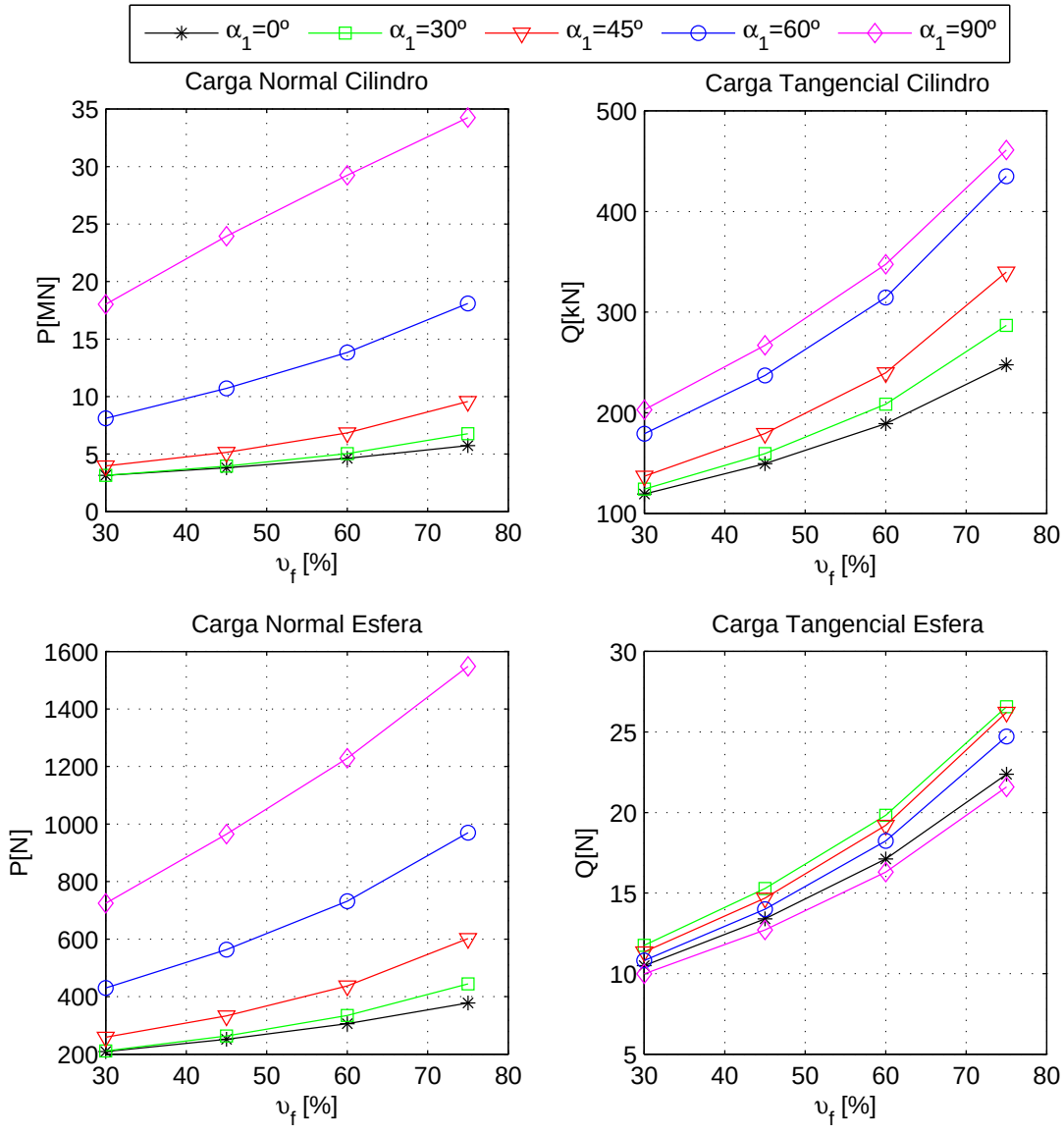


Figura 5.10: **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 3 de P y Q en Cilindro y Esfera

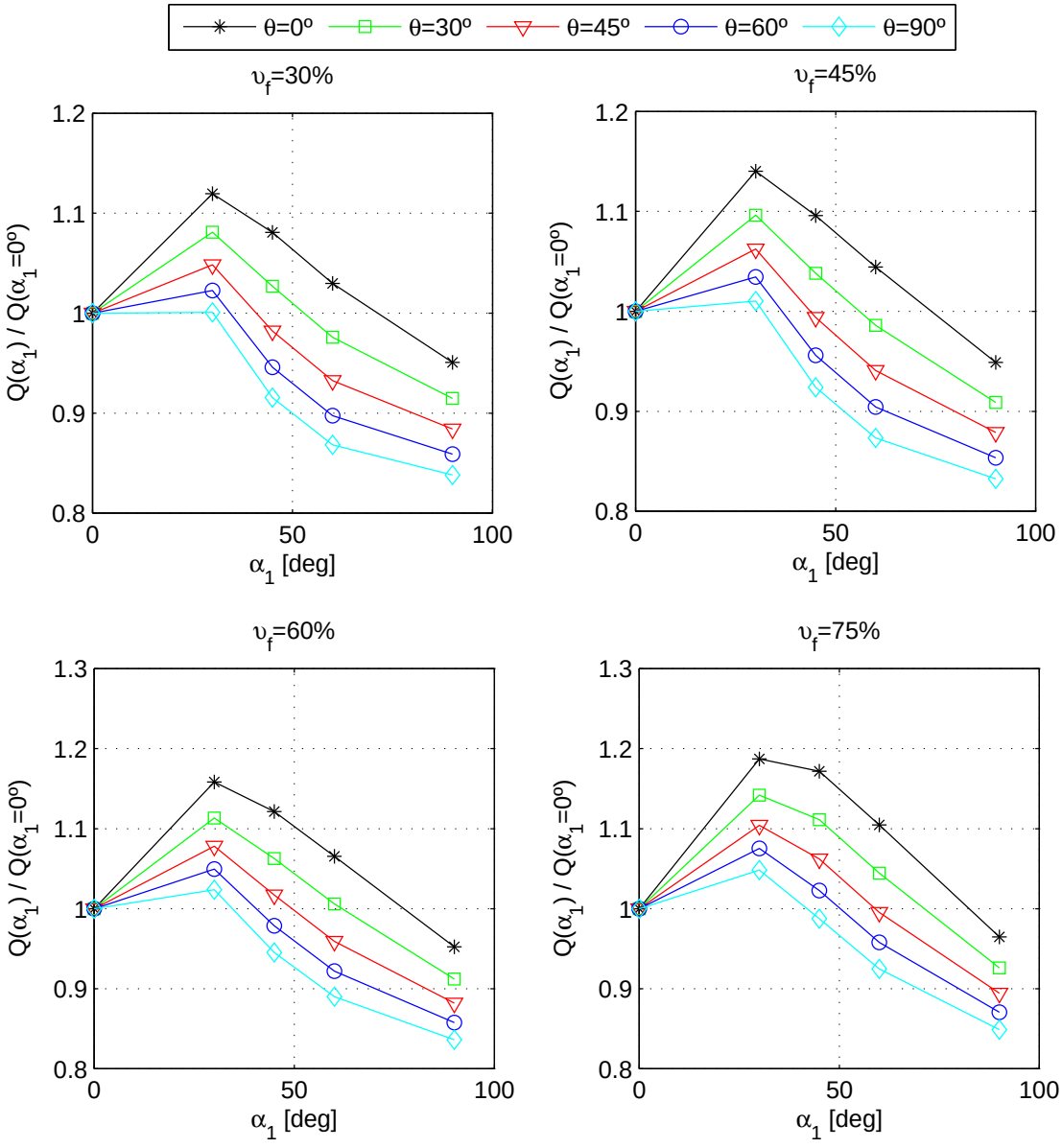


Figura 5.11: **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de Q en la esfera para cada θ.

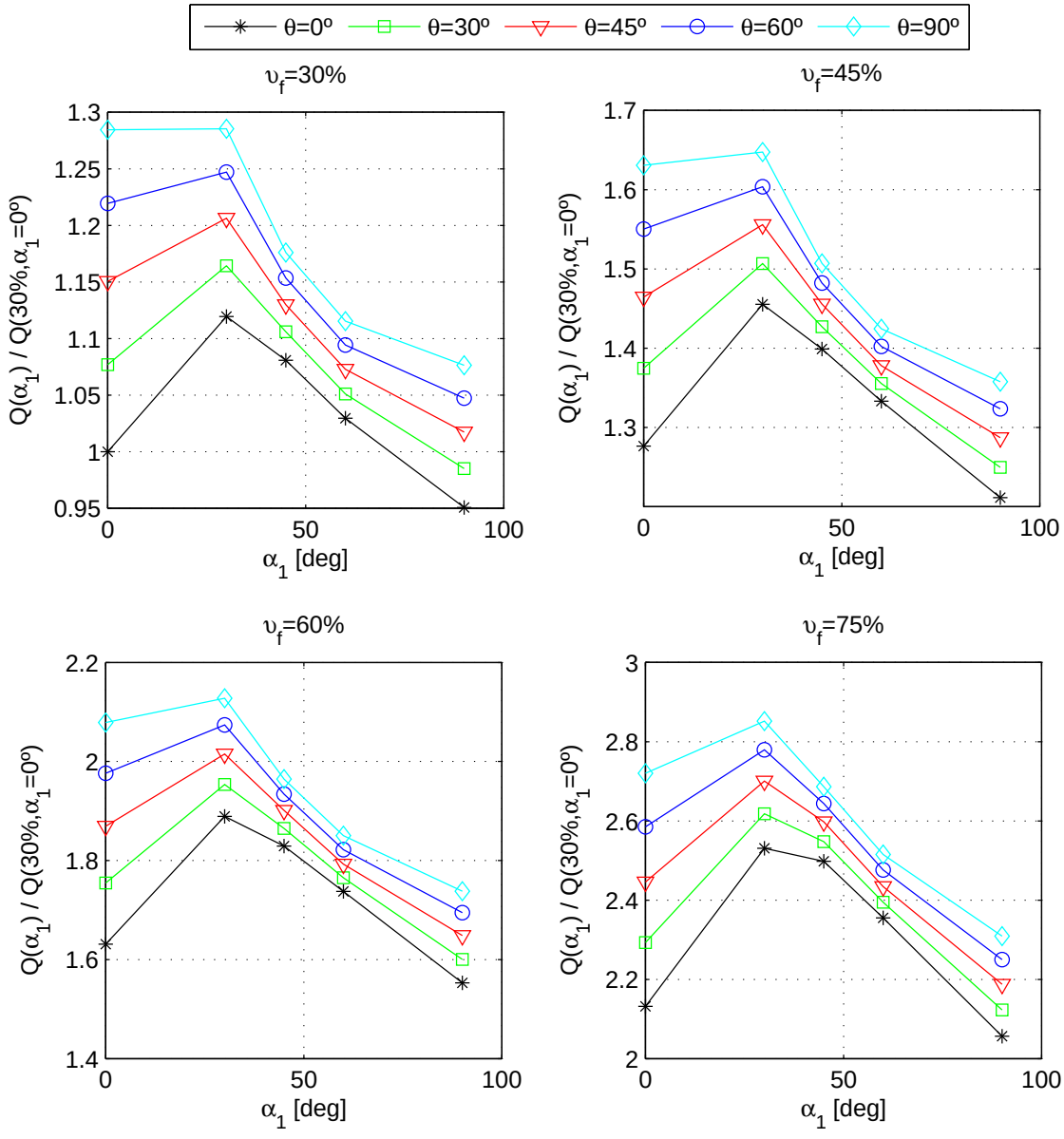


Figura 5.12: **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de Q en la esfera para cada θ.

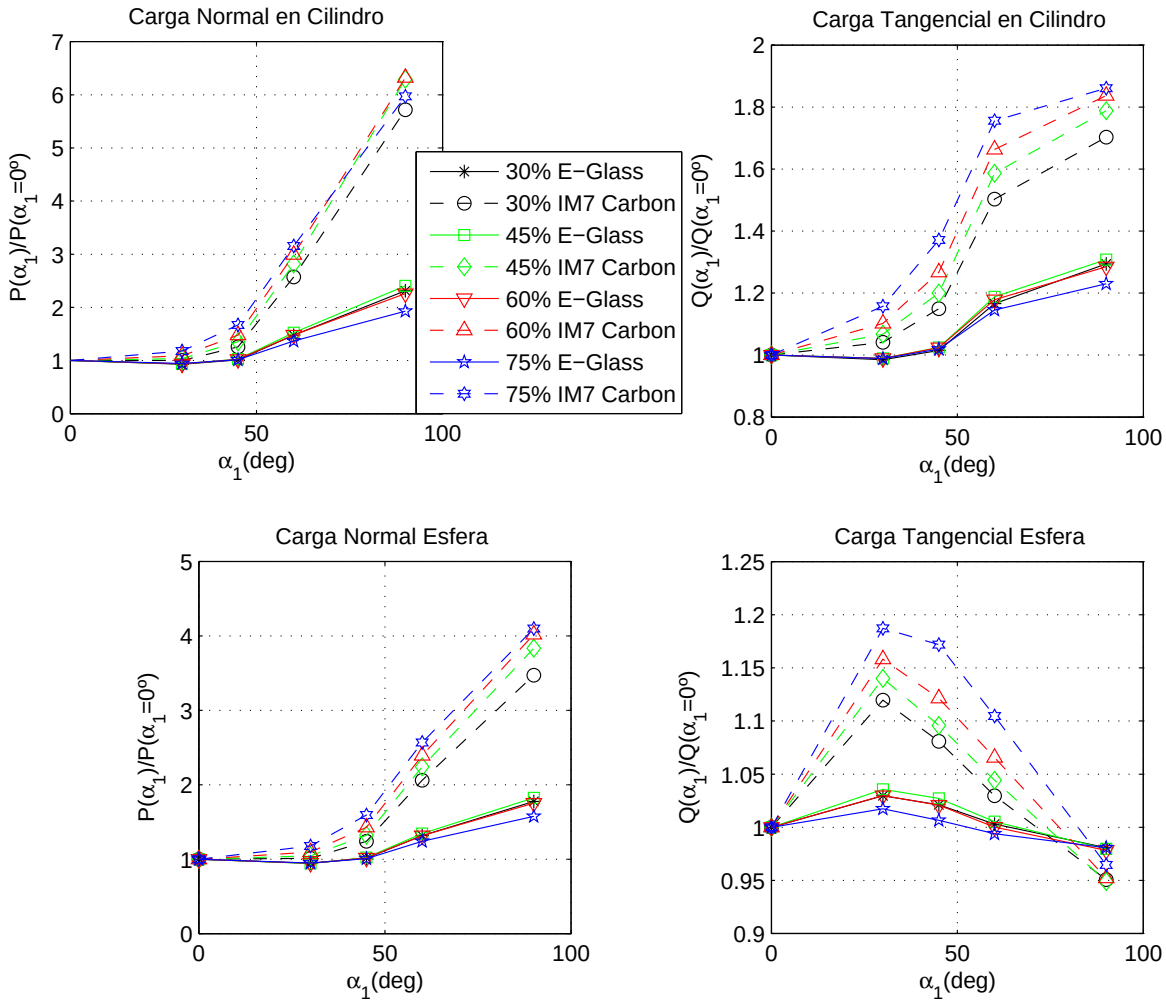


Figura 5.13: Representación 1. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7 vs E-Glass\MY750**

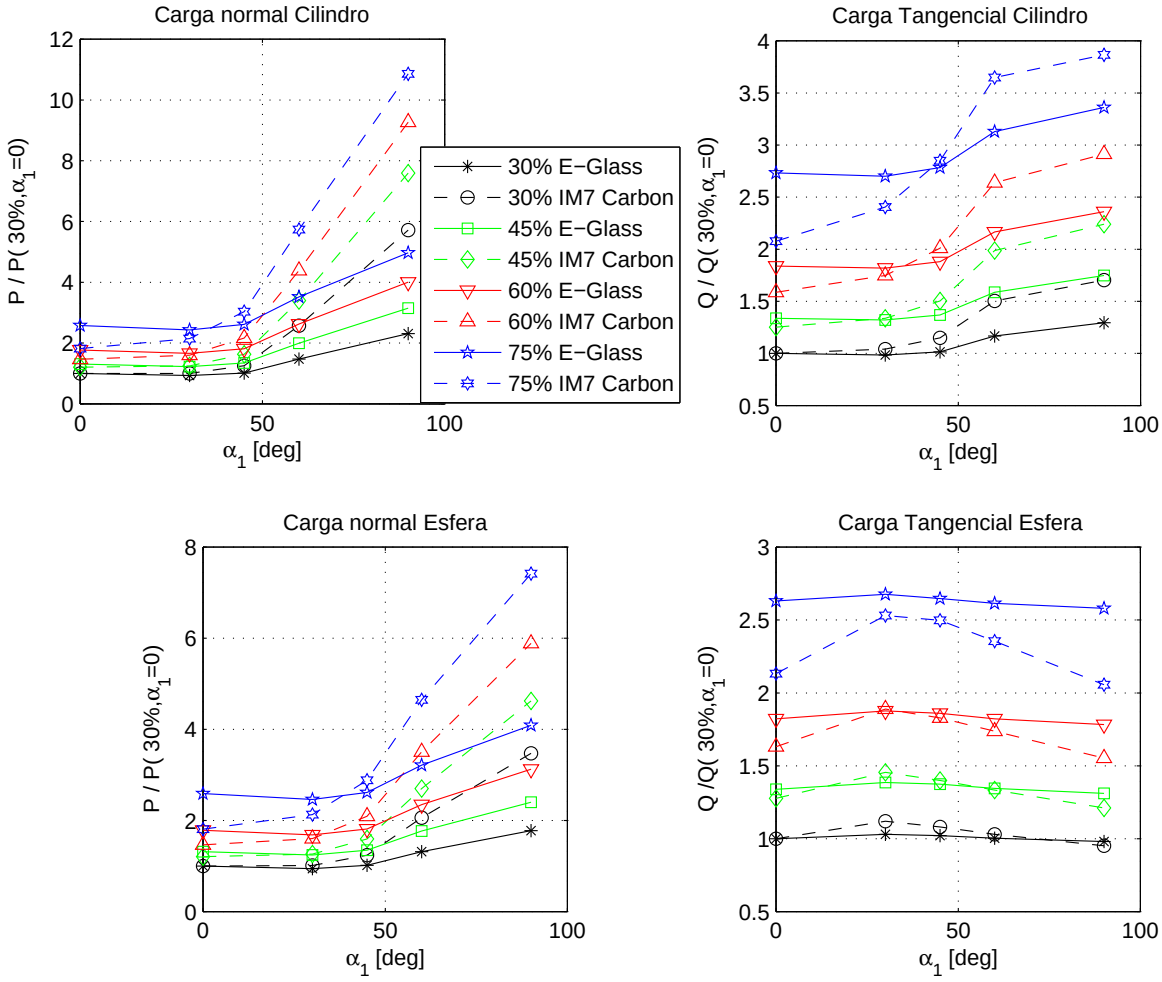


Figura 5.14: Representación 2. **Hopkins: IM7 Carbon\8551-7 vs E-Glass\MY750**

5.3.2. Resultados del problema de indentación con cilindro y esfera. Modelo de Hashin-Rosen.

En este apartado se van a mostrar las representaciones de las solicitaciones normales y tangenciales que fueron usadas en el modelo de Hopkins-Chamis para el material IM7 Carbon\8551-7, pero haciendo uso ahora del modelo de Hashin-Rosen.

En la figuras 5.15 - 5.17, observamos las tres representaciones contempladas de la solicitación normal y tangencial para el cilindro y la esfera según el modelo de Hashin-Rosen. Todas estas representaciones muestran un *aumento* en los valores de P y Q respecto a los obtenidos con el modelo de Hopkins-Chamis, basta para ello observar el eje de ordenadas en las tres representaciones asociadas a cada modelo, ver figuras 5.8 - 5.10. En las representaciones 1 y 2 Hashin tiene un menor intervalo de valores que Hopkins, para las mismas representaciones al estar adimensionalizados por valores más altos pero en la representación 3 se observa claramente como los valores de P y Q de Hashin son superiores a los de Hopkins.

Además es de destacar una diferencia clara entre estos modelos, con Hopkins-Chamis no aparecía este escalón de cedencia que se da para P y Q en el cilindro y P en en la esfera, para la fibra de carbono (si para la fibra de vidrio). Para la solicitación tangencial en la esfera, el modelo de Hashin no predice un máximo tan claro como si lo hacia Hopkins cuando la orientación de la fibra es $\alpha_1 = 30\,^\circ$, es más no predice una dependencia de la orientación de la fibra para Q, solo de su contenido de fibra. Estas conclusiones se podrán observar con mayor claridad en el siguiente apartado donde se comparan ambos modelos micromecánicos, en donde aparecen unos mínimos en todas las gráficas donde se pone lo anteriormente comentado de manifiesto.

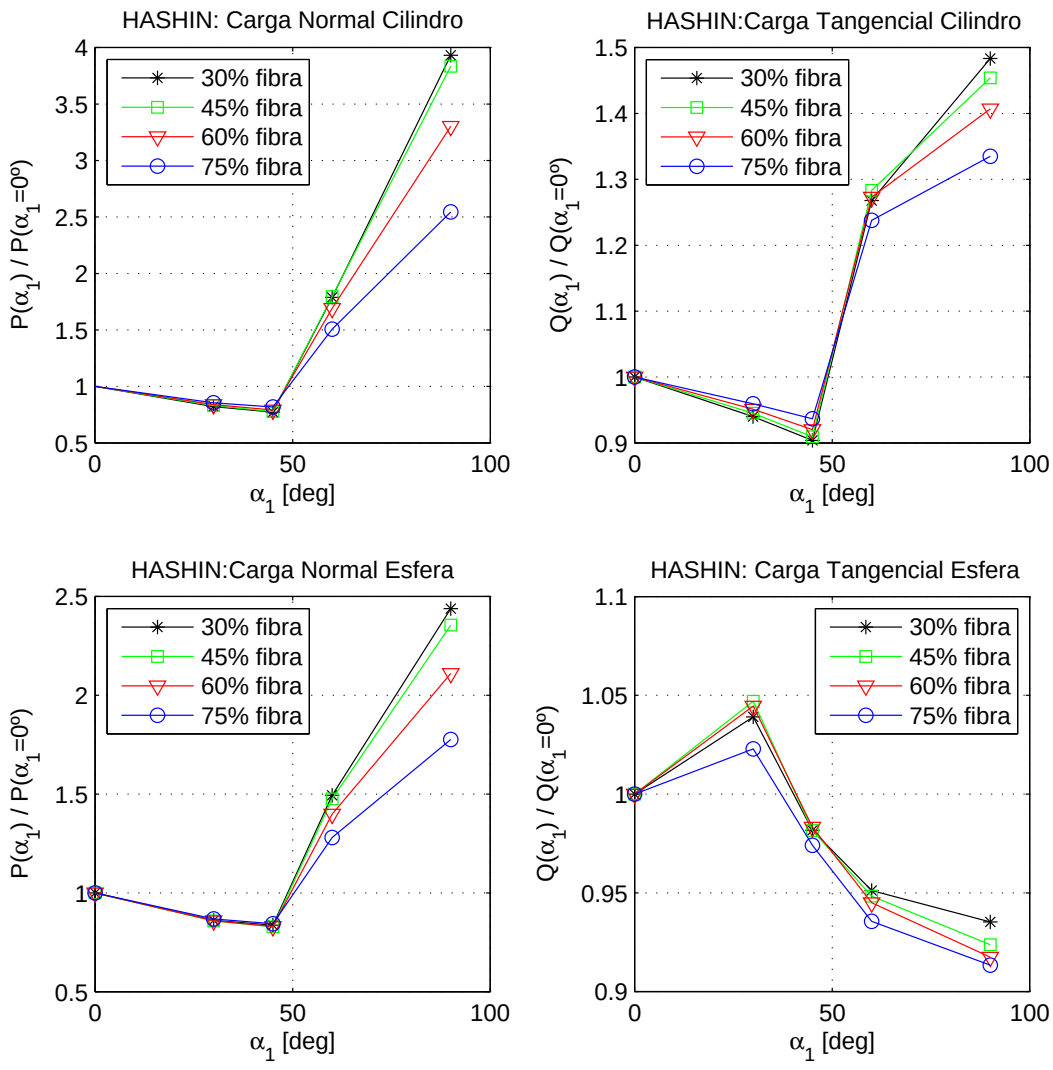


Figura 5.15: **Hashin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de P y Q en Cilindro y Esfera

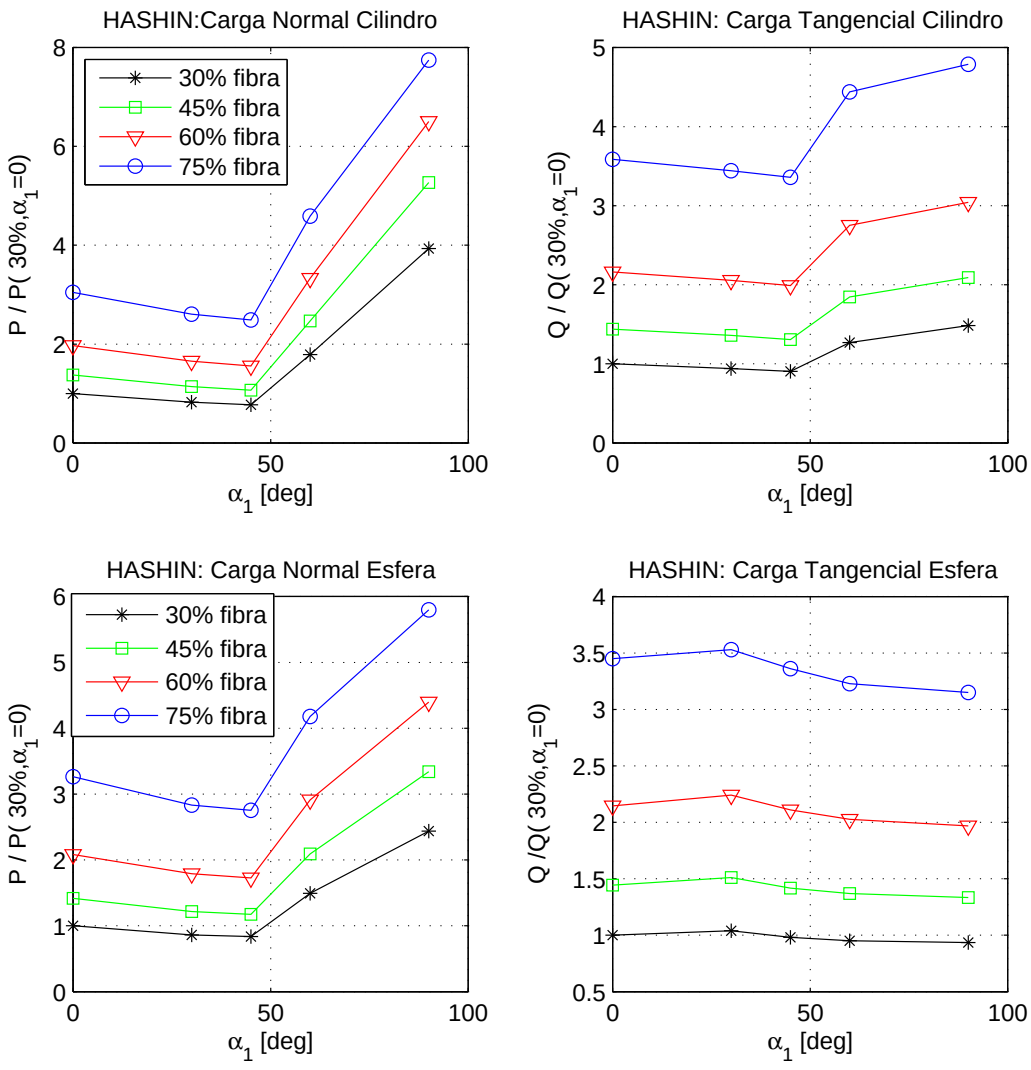


Figura 5.16: **Hashin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de P y Q en Cilindro y Esfera

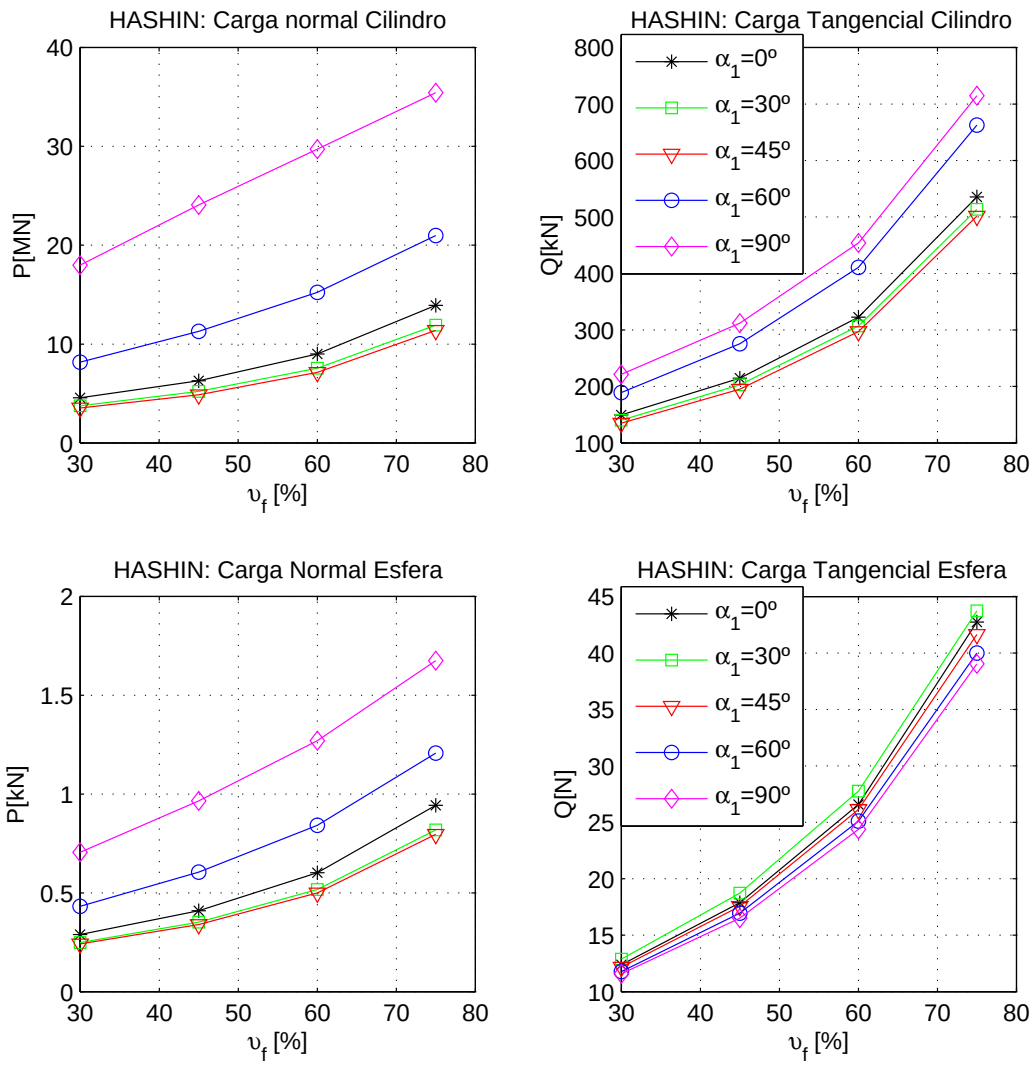


Figura 5.17: **Hashin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 3 de P y Q en Cilindro y Esfera

5.3.3. Comparación de los modelos micromecánicos de fibras continuas para el material IM7 Carbon\8551-7

En este apartado comparamos los modelos micromecánicos de Hashin-Rosen y Hopkins-Chamis. En la Figura 5.18, representamos la carga normal y tangencial del cilindro y esfera, para ambos modelos micromecánicos. Se observa claramente un mínimo en $\alpha_1 = 45\,^\circ$ para P y Q en el cilindro y para P en la esfera, viniendo para orientaciones de fibra menores en una clara disminución. Esto verifica lo anteriormente comentado al respecto de los mayores valores obtenidos con el modelo de Hashin-Rosen para P y Q en el cilindro y esfera. Además este mínimo indica el ángulo de la orientación de la fibra a partir del cual ambos modelos son más parecidos, es más la solicitación normal es coincidente en ambos modelos para el cilindro y esfera cuando $\alpha_1 = 90\,^\circ$. Para la solicitación tangencial en la esfera aparece un mínimo entorno a $\alpha_1 = 45\,^\circ$ que pone de manifiesto que los valores obtenidos por Hashin-Rosen en ese entorno son más parecidos a lo obtenidos con Hopkins-Chamis, aunque independiente del modelo estudiado la carga tangencial en la esfera no es tan sensible a la orientación de la fibra como lo es a su contenido en fibra.

5.4. Problema de indentación en un material reforzado con fibras cortas

En este apartado se pretende haciendo el uso solo del problema de indentación mediante la *esfera*, sobre el material **IM7 Carbon\8551-7**, donde el refuerzo es con *fibras cortas de carbono*, estudiar los resultados de P y Q. Los desplazamientos prescritos no cambian respecto a los considerados en el caso de refuerzo con fibras continuas, lo que nos permitirá comparar los resultados obtenidos mediante el modelo de Halpin-Tsai (fibras cortas), por ejemplo con el modelo micromecánico de Hopkins-Chamis (fibras continuas). Esto nos permitirá hacer reflexiones respecto a la relación de aspecto de la fibra.

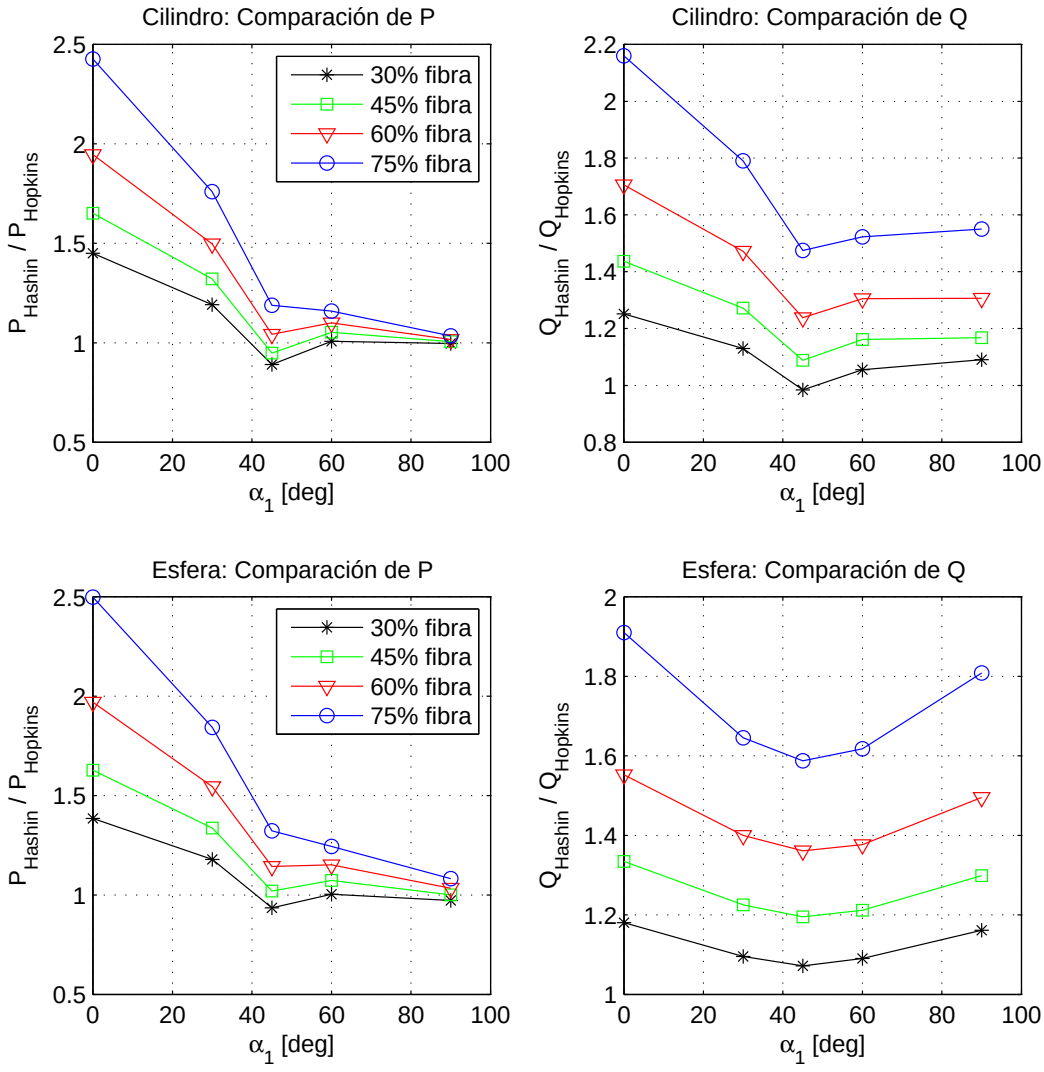


Figura 5.18: **IM7 Carbon\8551-7:** Hashin-Rosen vs Hopkins-Chamis

5.4.1. Resultados del problema de indentación con esfera. Modelo de Halpin-Tsai.

A continuación se expondrán los resultados de las solicitaciones normales y tangenciales para el problema de indentación de la esfera, cuando la relación de aspecto de la fibra del material IM7 Carbon\8551-7 va aumentando.

En la figuras 5.19 - 5.22, tenemos cuatro representaciones de este estudio. Las representaciones 1,2 y 3 son del mismo tipo que las anteriormente comentadas en el estudio de las fibras continuas, la representación 0 (figura 5.19) solo representa los valores obtenidos de P y Q directamente. En estas representaciones podemos ver como el efecto del aumento de la relación de aspecto de la fibra se estabiliza a partir de un valor de $r_{asp} = 50$ para la solicitación normal, P. En cambio para la solicitación tangencial, Q, los valores son independientes de la relación de aspecto, prácticamente. En la Figura 5.22, en la que se observa como la solicitación tangencial, Q, además de ser independiente respecto de la r_{asp} como ya se ha dicho, lo es también respecto de la orientación de la fibras cortas, al aparecer las curvas parametrizadas en función de α_1 superpuestas. Hecho que ya ocurría en el caso de fibras continuas.

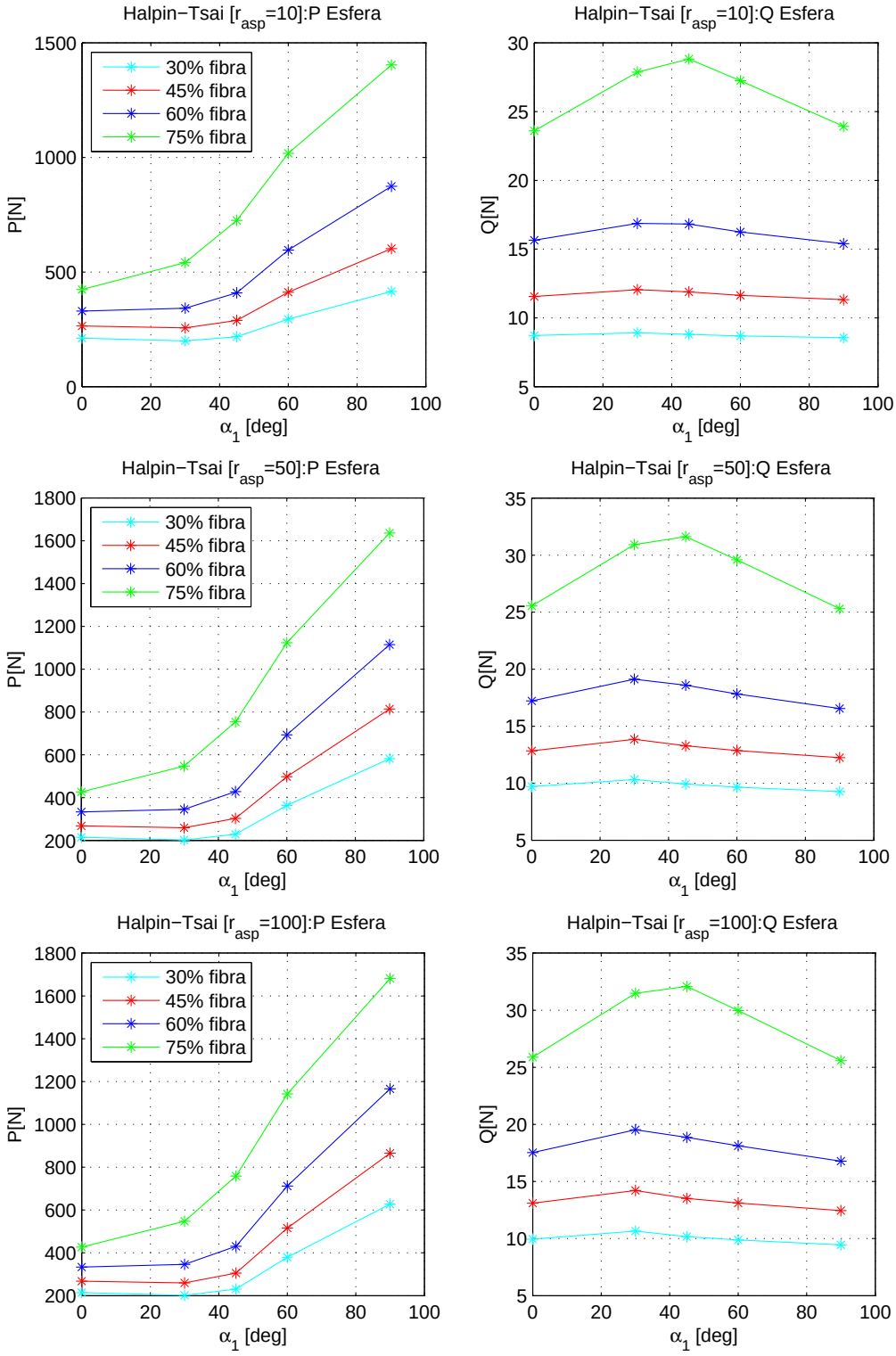


Figura 5.19: **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 0 de P y Q en la Esfera

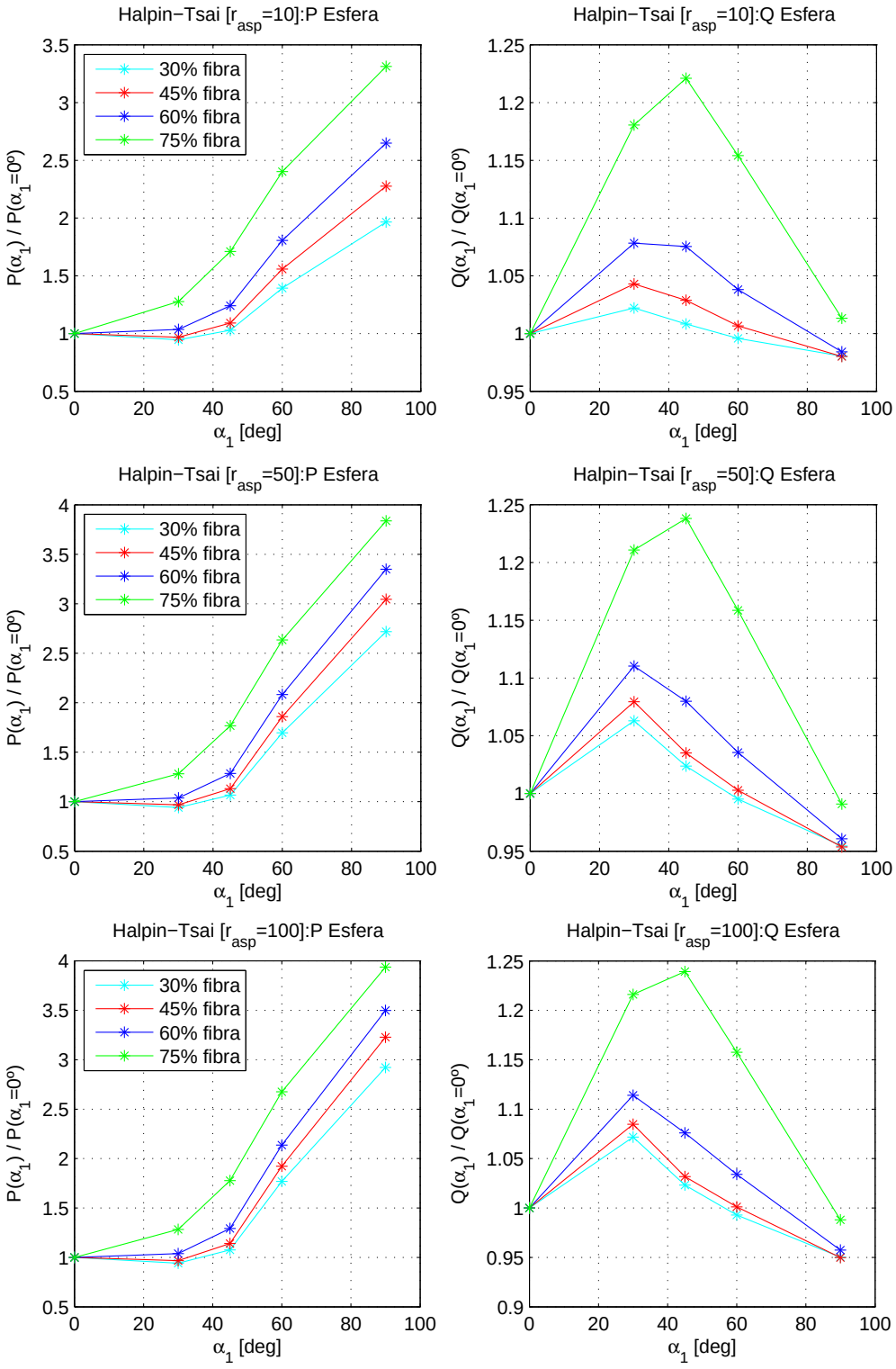


Figura 5.20: **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 1 de P y Q en la Esfera

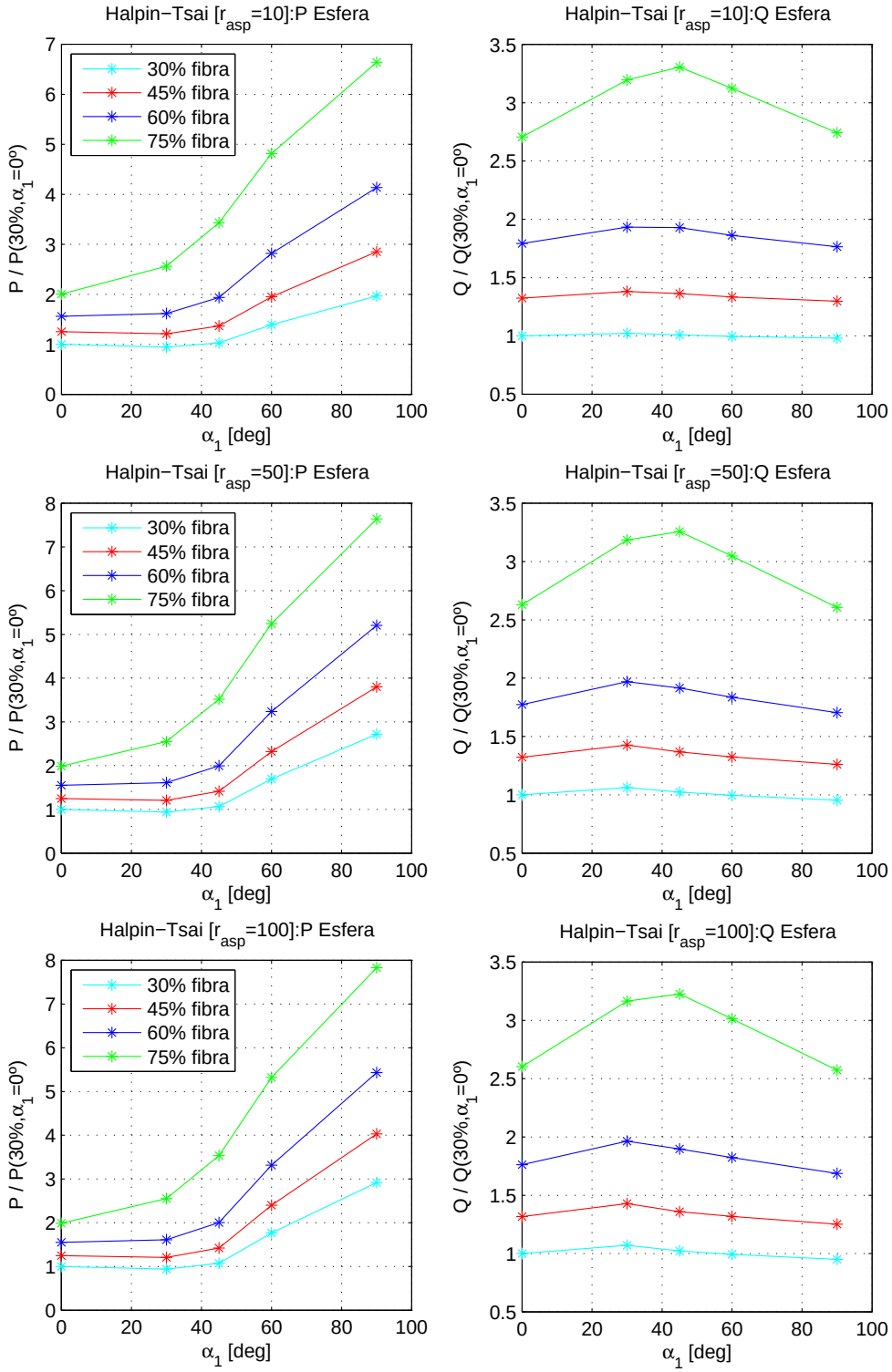


Figura 5.21: **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 2 de P y Q en la Esfera

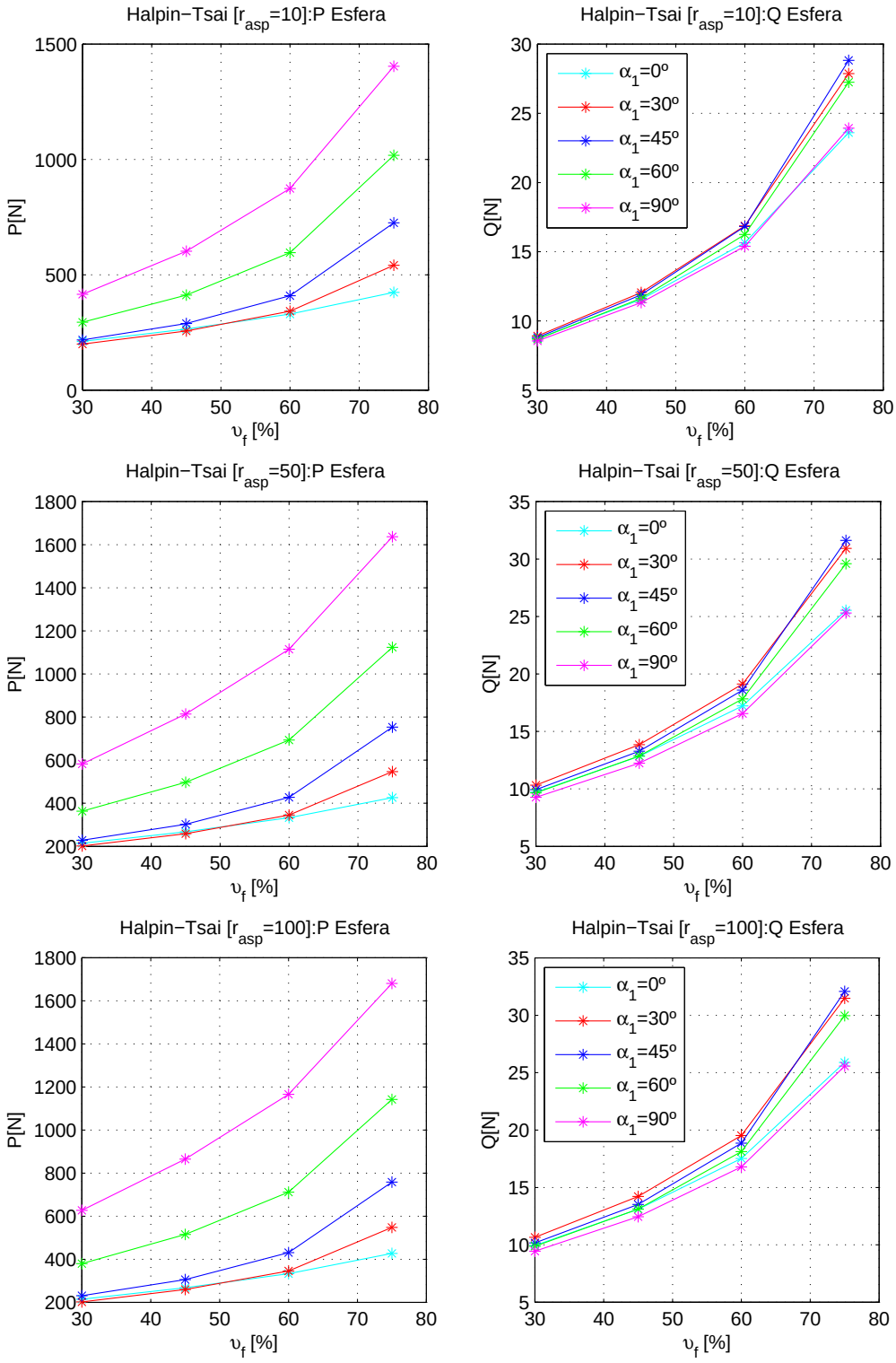


Figura 5.22: **Halpin: IM7 Carbon\8551-7**. Representación 3 de P y Q en la Esfera

5.4.2. Resultados del problema de indentación con esfera. Modelo de Halpin-Tsai vs Hopkins-Chamis

Ahora en este apartado se hará una comparación entre los modelos micromecánicos de Hopkins-Chamis y Halpin-Tsai para cada relación de aspecto, esto nos permitirá evaluar las similitudes y discrepancias entre los modelos en función de ella.

En la Figura 5.23 se representa comparación mencionada, en ella podemos observar como conforme la relación de aspecto aumenta, el eje de ordenada tanto para P y Q se reduce, esto implica que conforme la relación de aspecto aumenta los dos modelos micromecánicos son más parecidos. Esto era de esperar ya que al tener las fibras cortas más longitud, su efecto se aproxima para cuando son continuas. Destacar también como independientemente de la r_{asp} cuando los porcentajes de fibra son: $v_f[\,\%] = \{30,\ 45,\ 60\}$, el modelo de Hopkins-Chamis proporciona valores superiores a los obtenidos con Halpin-Tsai para la solicitación normal P. En cambio para $v_f = 75\,\%$ Halpin-Chamis predice valores superiores para todo valor de la orientación de la fibra en P, alcanzándose en este ultimo caso un máximo cuando $\alpha_1 = 45\,^\circ$.

Respecto a la solicitación tangencial, Q, para los porcentajes de fibra: $v_f[\,\%] = \{30,\ 45,\ 60\}$ se alcanza un mínimo alrededor de $\alpha_1 = 45\,^\circ$, independientemente de r_{asp}, esto también ocurría cuando de comparaban los modelos micromecánicos de fibras continuas. Al igual que en el caso de la solicitación normal, para Q también cuando el contenido de fibra es de $v_f = 75\,\%$ Halpin-Chamis predice valores superiores para todo valor de la orientación de la fibra.

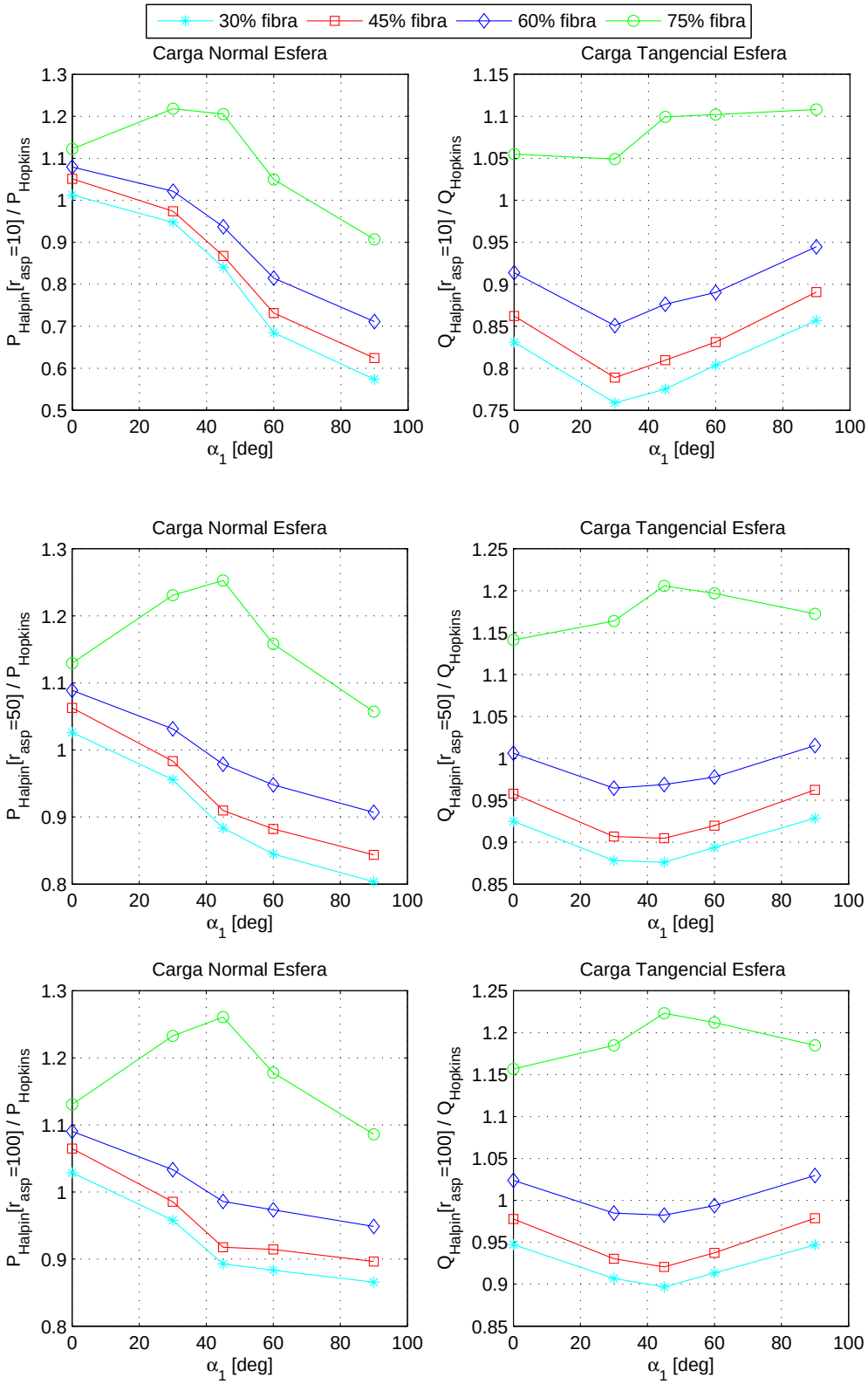


Figura 5.23: **Halpin vs Hopkins: IM7 Carbon\8551-7**. Representación de P y Q en la Esfera

Capítulo 6

Desgaste por fatiga superficial (fretting wear)

6.1. Introducción

En este capítulo se va estudiar el problema de indentación de la esfera de acero sobre el material compuesto **IM7 Carbon\8551-7**, para los casos de refuerzo con *fibras continuas o cortas* , pero siendo además sometido a *desgaste por fatiga superficial* [13]. Para ello mantenemos las mismas consideraciones que se establecieron en el Apartado 5.2.3, salvo por los detalles que se comentan en el siguiente párrafo.

Los modelos micromecánicos considerados para la obtención de la matriz de comportamiento $\mathbf{C}$ para los casos de refuerzo con fibras continuas o cortas son: Hopkins-Chamis y Halpin-Tsai, respectivamente. Se considera una única orientación de las fibras $\alpha_1 = 0\,^\circ$, ya sean continuas o cortas. Los desplazamientos prescritos normal y tangencial (ver Figuras 5.2 **(a)** y 6.1) tanto para un material reforzado con *fibras continuas o cortas* son: $g_{0,x_3} = -0{,}02\ mm$ y $g_{o,t} = 0{,}02\ mm$, respectivamente. Formando $g_{o,t}$ un ángulo θ con el eje x_1, siendo los valores de $\theta = \{0\,^\circ,\ 30\,^\circ,\ 45\,^\circ,\ 60\,^\circ,\ 90\,^\circ\}$. El coeficiente de desgaste y el número de ciclos son: $i_w = 5 \times 10^{-10} MPa^{-1}$ y $10^6\ ciclos$, respectivamente. Para los materiales reforzados con fibras continuas se analiza la influencia del contenido de fibra, y en el caso de refuerzo con fibras cortas además se analiza la relación de aspecto de la fibra, en relación a la profundidad de desgaste y el volumen de material desgastado.

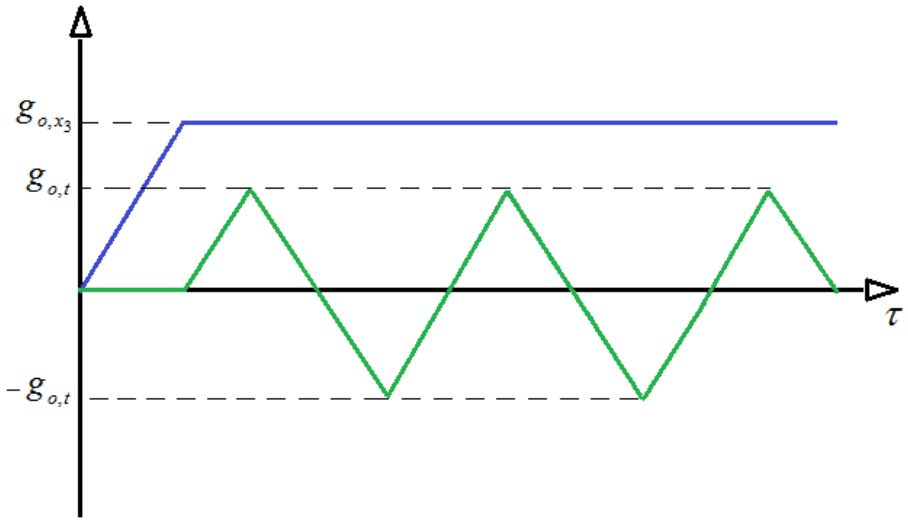


Figura 6.1: Evolución de los desplazamientos prescritos con el tiempo

6.2. Fibras continuas

En la Figura 6.2 se representa la profundidad de desgaste y el volumen de material desgastado frente al número de ciclos para cada ángulo θ en el que se oriente la dirección de deslizamiento (ver Figura 5.2(a)) y contenido de fibra (υ_f). Donde podemos apreciar como para un contenido de fibra cualquiera, por ejemplo $\upsilon_f = 30\,\%$, cuando el ángulo que marca la dirección de deslizamiento θ va aumentando la profundidad y lógicamente el volumen de material desgastado aumenta, dándose el máximo cuando este es perpendicular $\theta = 90\,^\circ$. Además en está misma figura podemos observar como el aumento del contenido de fibra produce un aumento de la profundidad de desgaste para un mismo θ, esto también es aplicable al volumen de material desgastado.

La evolución de la profundidad de desgaste frente a la distancia de deslizamiento x se representa en la Figura 6.3, para cada ángulo θ en el que se oriente la dirección de deslizamiento y contenido de fibra υ_f. En ella además de las consideraciones anteriores, podemos apreciar la huella que va dejando el punzón en el material compuesto conforme se desliza sobre el.

6.3. Fibras cortas

En este apartado discutiremos si la relación de aspecto de la fibra (r_{asp}), tiene o no importancia en el desgaste. En las Figuras 6.4 y 6.5 podemos apreciar la profundidad de desgaste y volumen de material desgastado, respectivamente, para dos relaciones de aspecto distintas: 10 y 500, si analizamos las figuras columna a columna observaremos como la relación de aspecto de la fibra no tiene importancia en el desgaste, al menos cuando la orientación de la fibra es $\alpha_1 = 0\,^\circ$. En la Figura 6.6 podemos refrendar esto y además ver como la huella del punzón esférico no varia con la relación de aspecto.

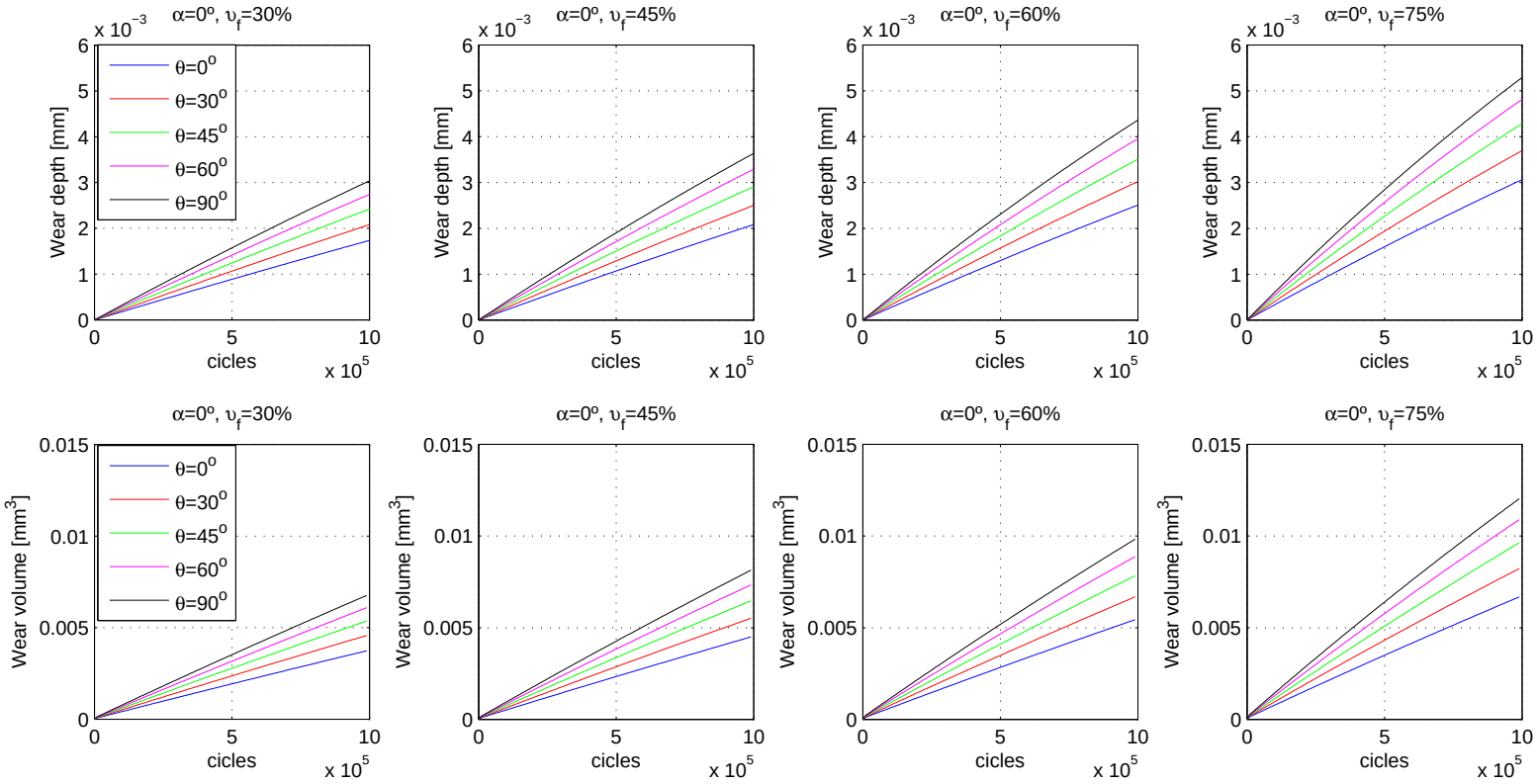


Figura 6.2: **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad y volumen de desgaste frente al número de ciclos, para cada θ y υ_f. Fibras continuas.

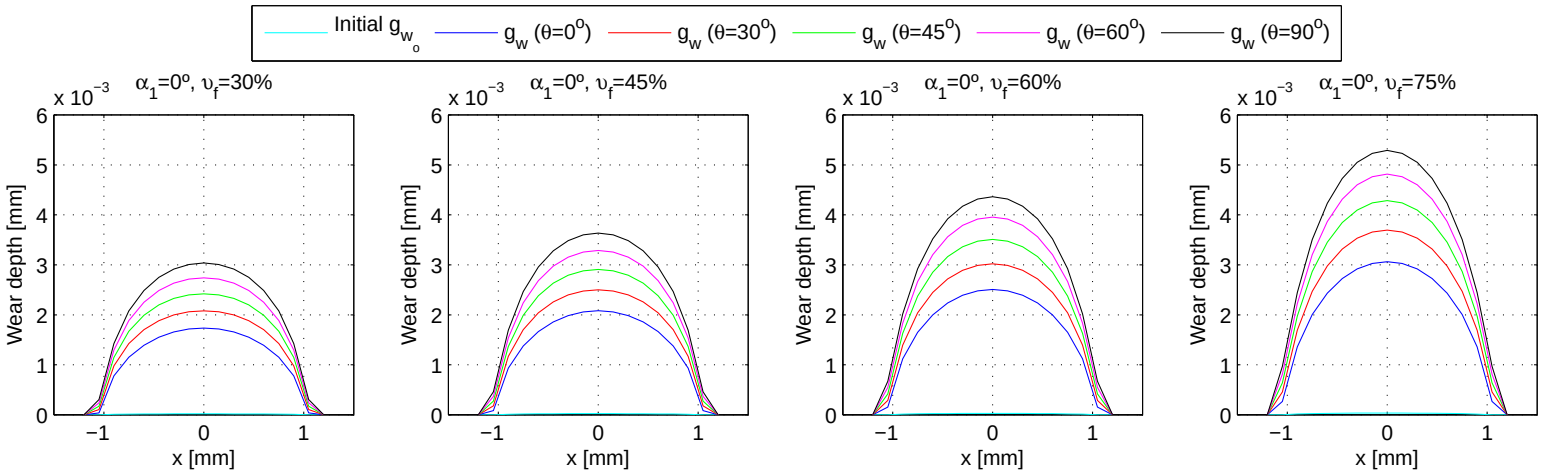


Figura 6.3: **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad de desgaste frente a la distancia de deslizamiento, para cada θ y υ_f. Fibras continuas.

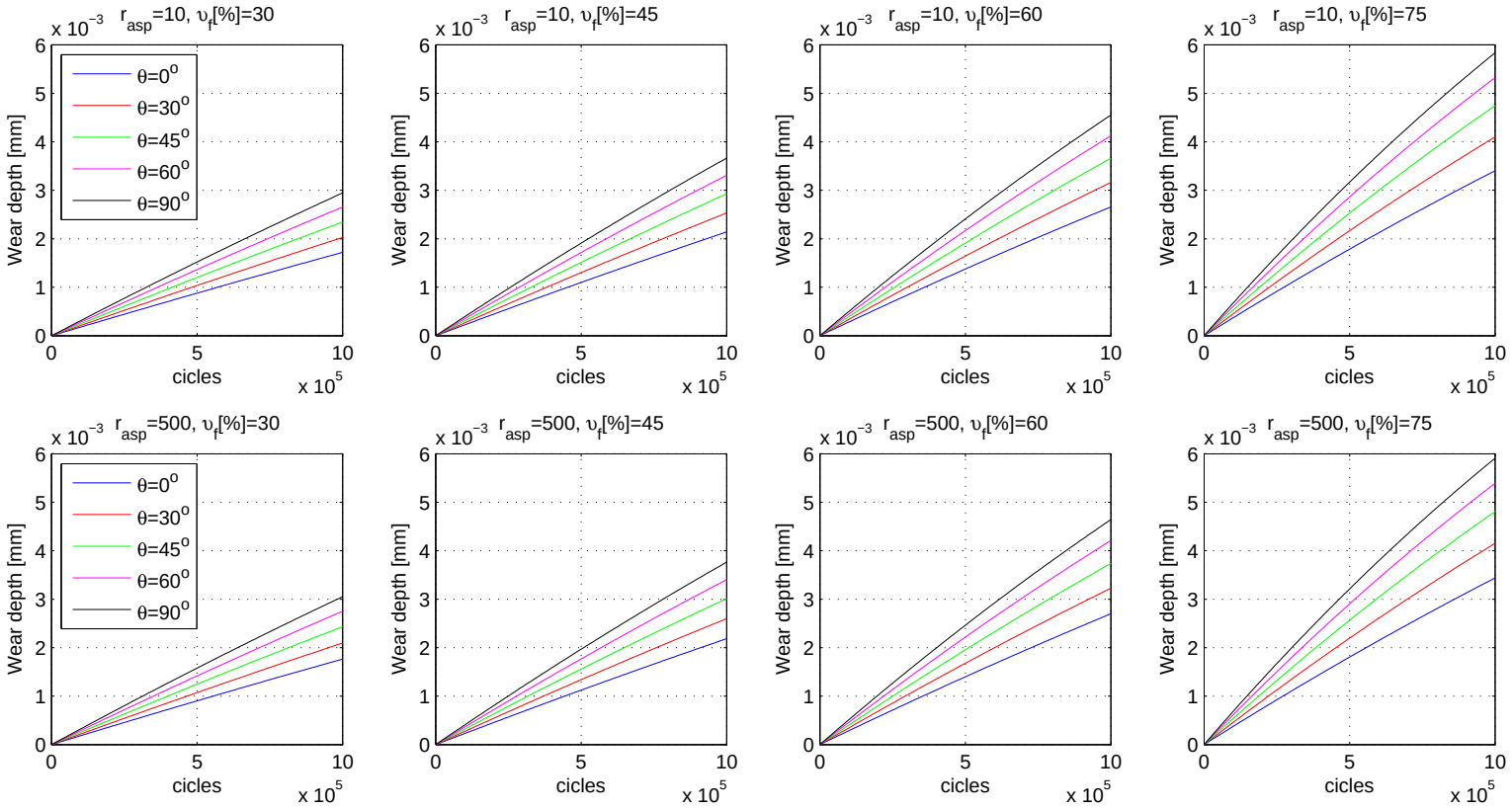


Figura 6.4: **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad de desgaste frente al número ciclos con una $r_{asp} = 10\ y\ 500$, para cada θ y υ_f. Fibras cortas.

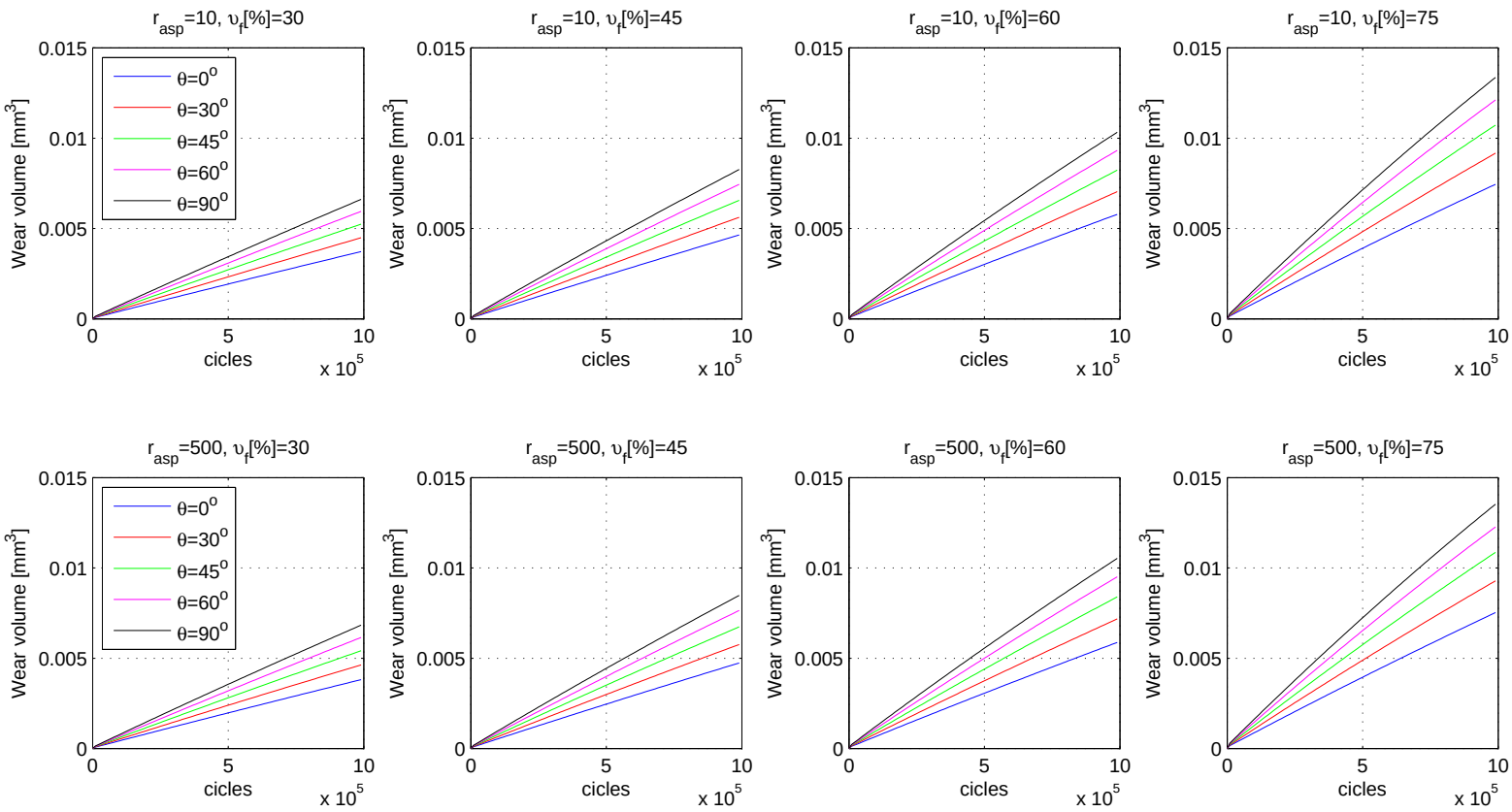


Figura 6.5: **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Volumen de desgaste frente al número de ciclos con una $r_{asp} = 10$ *y* 500, para cada θ y v_f. Fibras cortas.

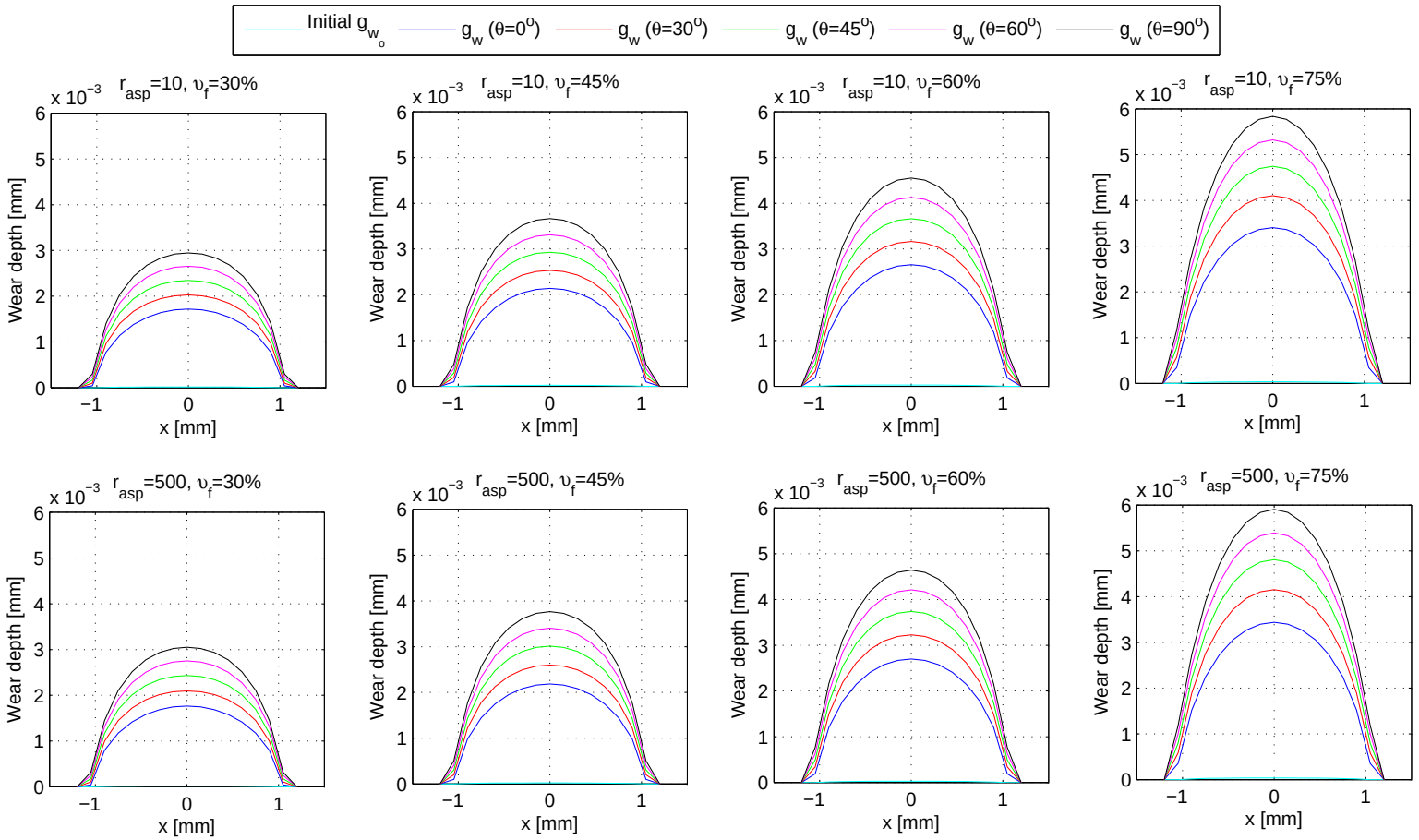


Figura 6.6: **Material: IM7 Carbon\8551-7**. Profundidad de desgaste frente a la distancia de deslizamiento con una $r_{asp} = 10$ *y* 500, para cada θ y v_f. Fibras cortas.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajos futuros

7.1. Micromecánica.

Comenzando por el estudio de la micromecánica, se han realizado las representaciones de la cinco constantes elásticas independientes que caracterizan a un material transversalmente isótropo, en función de la fracción de volumen de fibra en materiales reforzados con fibras continuas, y además para distintas relaciones de aspecto cuando el refuerzo era con fibras cortas. Haciendo uso de tres modelos micromecánicos para el caso de refuerzo con fibras continuas: Chamis, Hashin-Rosen y Hopkins-Chamis, y para el caso de fibras cortas: Halpin-Tsai. Aplicados a cuatro materiales compuestos: dos con refuerzo de fibra de vidrio y otros dos de carbono. Esto permitió observar la evolución de estas constantes elásticas frente al contenido de fibra, de forma conjunta para cada uno de los modelos micromecánicos de fibras continuas que se aplican a los materiales objeto de estudio, donde se ha podido comparar los modelos y ver sus diferencias en cada material. Además para observar las diferencias no ya entre los modelos sino entre los materiales estudiados, se ha representado conjuntamente los cuatro materiales para cada modelo micromecánico de fibras continuas, que permite ver las diferencias entre los materiales y verificar las conclusiones sacadas con los modelos. Finalmente se presento la comparación de los modelos de fibras continuas con el modelo de fibras cortas al aumentar la relación de aspecto, para cada material y de está forma ver que constantes elásticas son dependientes de la relación de aspecto. En base a todo esto se puede decir lo siguiente:

- Las constantes elásticas: E_1, E_2, G_{12} aumentan su valor conforme aumenta el contenido de fibra, en cambio ν_{12} *y* ν_{23} disminuyen, para cada modelo micromecánico contemplado, independientemente de si el refuerzo es con fibras continuas o cortas. Como era de esperar.

- El comportamiento de cada uno de los modelos para cada constante elástica es más o menos similar, para cada uno de los materiales estudiados. Alcanzándose más diferencias entre los modelos de Chamis y Hashin, siendo el modelo de Hopkins el que tiene un comportamiento intermedio entre los anteriores.

- El estudio de los cuatro materiales con cada modelo micromecánico de fibras continuas, revela que las dos fibras de vidrio tienen un comportamiento muy similar. Los dos materiales con refuerzo de carbono son también parecidos. Teniendo el material IM7 Carbon\8551-7 unos valores de las constantes elásticas superiores a los obtenidos con el material AS Carbon\epoxy.

- En la comparación entre los modelos micromecánicos de fibras continuas respecto al de fibras cortas haciendo variar la relación de aspecto. Se aprecia como para E_1 al aumentar la r_{asp} aparece la coincidencia entre los cuatro modelos micromecánicos, para todos los materiales estudiados. Lo que demuestra que el modelo de fibras cortas tiende al modelo de fibras continuas cuando la r_{asp} aumenta. El modelo de Halpin no recoge variaciones de las demás constantes elásticas al variar la r_{asp} para una fibra de sección transversal circular ni tampoco para una amplia gama de secciones estudiadas por Halpin.

7.2. Problemas de indentación.

Respecto a los problemas de indentación mediante un cilindro y una esfera, ambos de acero, sobre los materiales compuestos que fueron objeto de estudio, se puede decir lo siguiente:

- Las solicitaciones normal P y tangencial Q, en cilindro y esfera aumentan con el contenido de fibra de los materiales.

- Los valores de P y Q en el cilindro y de P en la esfera aumentan conforme aumenta la orientación de la fibra, dándose los valores máximos cuando esta orientación es de $90\,^{\circ}$. Los valores de Q en la esfera son independientes de la orientación de la fibra, cuando la dirección de la carga Q se mantiene fija en $\theta = 0\,^{\circ}$.

- Cuando se considera variable en la esfera la dirección de la carga Q con θ, se observa que es necesario aplicar una Q mayor conforme θ aumenta para un contenido de fibra fijo, algo lógico por los valores de los coeficientes de fricción, en la ley de fricción ortótropa elíptica empleada. Este aumento de Q también ocurre para una misma dirección θ al aumentar el contenido de fibra. Pero también se observa como independientemente de la dirección θ contemplada para Q, cuando la orientación de la fibra supera los $30\,^{\circ}$ los valores de Q disminuyen, estando todos también muy próximos para cada θ.

- Los valores de P y Q en el cilindro y P en la esfera son superiores para el refuerzo de fibra de carbono respecto al de vidrio estudiados, cuando la orientación de la fibra es de $45\,^{\circ}$ en adelante. Para Q en la esfera los resultados son muy similares en ambos materiales, alcanzándose alguna diferencia cuando el contenido en fibra ya es alto en ambos.

- En la comparación realizada para la fibra de carbono estudiada, entre los modelos de Hashin y Hopkins, vemos como los valores de P y Q en el cilindro y en la esfera, para el modelo de Hashin son superiores a los de Hopkins.

- En el estudio de la influencia de la relación de aspecto, para el caso de refuerzo con fibras cortas, de carbono. Solo se contemplo el problema de indentación con esfera, ya que con este era suficiente para caracterizar la influencia de la r_{asp} en los problemas de contacto. Donde se observo como para P con una $r_{asp} = 50$ no se obtenían variaciones cuando se aumentaba hasta el valor de 500. Para la solicitación tangencial se concluye que Q no depende en la esfera de la r_{asp} ni de la orientación de la fibra.

- En la comparación de los modelos de Hopkins y Halpin al variar la relación de aspecto, se concluye para el problema de la esfera, que los resultados de P y Q en ambos modelos se parecen más conforme la relación de aspecto aumenta. Estando el modelo de Halpin por debajo del de Hopkins para toda orientación

de la fibra, cuando el contenido de está es menor o igual que el 60 %, para un valor de contenido en fibra del 75 % el modelo de Halpin se pone por encima.

7.3. Problema de desgaste superficial.

Finalmente, en relación al problema de desgaste superficial haciendo uso del problema de indentación mediante la esfera, se sacarón las siguientes conclusiones:

- Tanto para un refuerzo con fibras continuas o cortas, de carbono, la profundidad de desgaste y consecuentemente el volumen de material desgastado, aumenta conforme aumenta el contenido en fibra, para una misma dirección θ de deslizamiento. También se puede apreciar como para un mismo contenido de fibra, cuando aumenta la orientación de la dirección de deslizamiento θ, la profundidad de desgaste aumenta. Llegando al máximo cuando está es de $90\,^{\circ}$, como no podía ser de otra forma al ser en esa dirección donde se encuentra el mayor valor del coeficiente de fricción que conforma la ley de friccción contemplada.

- Por último indicar que la profundidad de desgaste en los refuerzos con fibras cortas, no dependen de la relación de aspecto, al menos cuando la orientación de la fibra es $\alpha_1 = 0\,^{\circ}$. Evidentemente tampoco depende de ella el volumen de material desgastado.

7.4. Trabajos futuros

De cara a futuros análisis seria interesante realizar los siguientes estudios:

- Manteniendo la línea de investigación respecto a problemas de contacto no similares, pero estableciendo ahora la interacción entre dos materiales reforzados con fibras, que sean distintos. Esto permitiría hacer las combinaciones entre ambos materiales alternando el refuerzo con fibras, ya sean continuas o cortas para cada material y ver si en las aplicaciones oportunas el material acero es sustituible.

- En lo estudios planteados se considero un laminado unidireccional en el que se variaba la orientación de la fibra, se podría realizar los mismos estudios considerando un laminado bidireccional donde las laminas se apilasen desfasadas

90 ° alternativamente o incluso haciendo variar progresivamente este desfase. Sería muy interesante sobretodo en el problema de desgaste superficial.

- En los estudios planteados no se estableció ninguna arquitectura respecto al refuerzo con fibras, solo se hacían variar los valores de su contenido. Pero los contenidos volumétricos de fibra que posee una lámina también pueden determinarse a partir de la arquitectura del refuerzo. Así, por ejemplo, se podrían considerar unas estructuras de refuerzo hexagonal o cuadrado.

Bibliografía

[1] J. F. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces. *J. Appl. Phys.*, 24: 981−988, 1953.

[2] A. G. Facca, M. T. Kortschot y N. Yan. Predicting the elastic modulus of natural fibre reinforced thermoplastics. *Composites*, Part A 37: 1660−1671, 2006

[3] R. F. Gibson. *Principles of composite material mechanics.* CRC Press, Boca Raton Florida, 2007.

[4] B. Harris. *Engineering composite materials.* London IOM Communications, 1999.

[5] R. Holm. Die Reibungskraft über die reale Kontaktfläche. *Wiss. Veröff. Siemens-Werk*, 17: 38−42, 1938.

[6] R. Holm. *Electric Contacts.* Almquist and Wiksells, Stockholm, 1946.

[7] A. S. Kaddour y M. J. Hinton. Input data for test cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites. *Composite Materials*, 54: 2295−2312, 2012.

[8] J.-H. Kim, H. Ryou, M.-G. Lee, K. Chung, J. R. Youn y T. J. Kang. Micromechanical Modeling of Fiber Reinforced Composites Based on Elastoplasticity and its Application for 3D Braided Glass/Kevlar Composites. *Polym Compos*, 28: 722−732, 2007.

[9] L. P. Kollar. *Mechanics of composite structures.* Cambridge University Press, New York, 2003.

[10] P. K. Mallick. *Fiber-Reinforced Composites Materials, Manufacturing, and Design.* CRC Press, 2007.

[11] E. Rabinowick. *Friction and Wear of Materials.* Wiley, New York, 1999.

[12] L. Rodríguez−Tembleque. *Formulación numérica de la interacción mecánica entre superficies de sólidos 3D.* Sevilla: Universidad de Sevilla, Escuela Superior de Ingenieros, 2009.

[13] L. Rodríguez−Tembleque y R. Abascal. Desgaste y fricción ortótropa en problemas de contacto 3D. En *XIX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, 2010.

[14] L. Rodríguez−Tembleque, F.C. Buroni, R. Abascal y A. Sáez. 3D frictional contact of anisotropic solids using BEM. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30: 95−104, 2011.

[15] L. Rodríguez−Tembleque, R. Abascal y M. H. Aliabadi. Anisotropic wear framework for 3D contact and rolling problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1-19: 241−244, 2012.

[16] L. Rodríguez−Tembleque y R. Abascal. Fast FE−BEM algorithms for orthotropic frictional contact. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 94: 687−707, 2013.

[17] L. Rodríguez−Tembleque, F.C. Buroni, R. Abascal y A. Sáez. Analysis of FRP composites under frictional contact conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 50: 3947−3959, 2013.

[18] R. Younes, A. Hallal, F. Fardoun y F. H. Chehade. *Composites and Their Properties.* CC BY, 2012.