T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Anabilim Dalı
Sayısal Yöntemler Bilim Dalı

Doktora Tezi

SÜREKLİ ZAMANLI PORTFÖY SEÇİMİ VE İMKB'DE BİR UYGULAMA

Hazırlayan:
Mehmet HORASANLI

Öğrenci Numarası:
2502020106

Tez Danışmanı:
Doç.Dr.Erhan ÖZDEMİR

İstanbul,2005

ÖZ

Markowitz tarafından temelleri atılan Modern Portföy Teorisi tek periyotlu bir yatırım sürecini göz önüne almaktadır. Markowitz modeli'nde yatırımcı ilgili periyot için optimal yatırım stratejisini belirleyerek, dönem sonuna kadar portföy ağırlıklarında hiçbir değişiklikte bulunmamaktadır. Bu ise modelin en büyük eksikliği olarak belirtilebilir.Bu çalışmada Markowitz modelinin çok dönemli ve sürekli zamanlı hale geliştirilmesinin uygulanması ve sonuçları üzerinde durulmaktadır. Aynı zamanda, Istanbul Menkul Kıymetler Borsası verileri kullanılarak dönemsel ve sürekli zamanlı optimal portföyler ve ortalama-varyans etkin sınır elde edilmektedir. Son olarak Markowitz modeli ile karşılaştımalı olarak, göz önüne alınan modellerin risk ve beklenen getiri parametrelerine etkisi araştırılmaktadır. Dinamik portföy seçim modellerinin bu parametrelere pozitif etkilerinin olduğu savı araştırılmaktadır.

ABSTRACT

The mean-variance portfolio selection, which is a foundation of Markowitz, considers an investment environment in a single period. The investor allocates his wealth among a basket of securities and wait until the end of the period without taking any investment decisions. This is mentioned as a shortcoming of the model. This dissertation represents the usage of analytical optimal portfolio policy and the analytical expression of the mean-variance efficient frontier for the multiperiod and continuous time mean-variance formulation whereas the effects of the dynamic portfolio selection is investigated. The multiperiod and continuous time optimal portfolio policy is obtained by using the Istanbul Stock Exchange data. Finally, the impact of the dynamic models on the risk and return parameters compare to Markowitz's single period model is taken into consideration. The argument that dynamic portfolio selection procedure has a positive effect on these parameters is being researched.

ÖNSÖZ

Modern portföy teorisinin temelleri Harry Markowitz'in 1952 yılında yayınladığı "Portfolio Selection" isimli makale ile atılmıştır. Bu çalışmada Markowitz, risk kavramını varlığın getiri oranında meydana gelen sapma yani başka bir deyişle standart sapma olarak tanımlayarak bir ilke imza atmıştır. Aynı zamanda portföy riskinin, ayrı ayrı portföy içerisindeki varlıkların risklerinin ortalamalarından farklı olduğu sonucu elde edilmiş ve bu şekilde portföy riskinin düşürülebileceği sonucu ortaya çıkmıştır. Markowitz portföy teorisi, önceden belirlenen herhangi bir risk seviyesinde en yüksek beklenen getirinin veya belirli bir getiri oranı seviyesinde en düşük riskin elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Her ne kadar Markowitz, durağan portföy teorisi ile o dönem için yatırım kararlarının modellenmesi açısından büyük bir adım atmış olsa da, uzun dönemli yatırım hedeflerini yakalayamaması, işlem maliyetlerini göz önüne alamaması, hesaplanan optimal portföylerin girdi bilgilerinde meydana gelen küçük değişikliklere bağlı olarak büyük sapmalar göstermesi ve portföyün ağırlıklarının değiştirilmesine olanak tanımaması sebebiyle eleştiriler almıştır.

Bu çalışmada sözü edilen kısıtlamaların giderilebilmesi amacıyla, yatırım dünyasının dinamik doğasını modelleyebilecek, yatırım kararlarını dinamik hale dönüştürecek çok dönemli ve sürekli zamanlı modeller göz önüne alınmakta, IMKB-Ulusal 30 endeksi verileri kullanılarak her iki durum için optimal portföyler elde edilmektedir. Çalışmanın gerçekleştirilmesindeki esas amaç dinamik modellerin beklenen getiri ve risk parametrelerine etkisi olduğundan, ele alınan modeller ile hesaplanan beklenen getiri ve risk parametreleri, klasik Markowitz portföy seçimi modeli ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmaktadır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında göstermiş olduğu değerli katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç.Dr.Erhan ÖZDEMİR'e teşekkür ederim. Kendisi, çalışma süresince tecrübe ve birikimlerini benimle paylaşarak, her konuda yardım ve desteğini esirgememiştir.

Ayrıca, çalışmam süresince iş paylaşımında bana yardımcı olan kürsü arkadaşlarıma ve çalışmanın her safhasında değerli fikirlerinden yararlandığım hocalarım Sayın Prof. Dr. Yılmaz TULUNAY, Sayın Prof.Dr. Erdal BALABAN ve Sayın Prof. Dr. Neyran ORHUNBİLGE başta olmak üzere İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı'nın tüm öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Yine eğitim hayatım ve akademik yaşantım boyunca maddi ve manevi olarak desteklerini yanımda hissettiğim aileme ve akademik sorumluluklarımı yerine getirmem konusunda gösterdiği anlayıştan dolayı sevgili eşim Özlem'e teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet HORASANLI

Kasım 2005

İÇİNDEKİLER

ÖZ……...iii
ABSTRACT……...iii
ÖNSÖZ……...iv
TABLOLAR LİSTESİ……viii
ŞEKİLLER LİSTESİ……x
GRAFİKLER LİSTESİ……xi
GİRİŞ…….. 1

BİRİNCİ BÖLÜM
DURAĞAN PORTFÖY TEORİSİ……3
1.1 DURAĞAN PORTFÖY TEORİSİ TEMEL KAVRAMLAR……3
1.1.1 Risk Kavramı……...……3
1.1.1.1 Sistematik Risk……4
1.1.1.2 Sistematik Olmayan Risk……5
1.1.2 Fayda Teorisi ve Riskten Kaçınma……...6
1.1.2.1 Fayda Kavramı ve Fayda Fonksiyonu Çeşitleri……..…...7
1.1.2.2 Riskten Kaçınma Katsayısı……9

1.2 KLASİK MARKOWİTZ PORTFÖY TEORİSİ…….……10
1.2.1 Bireysel Varlıklar İçin Beklenen Getiri Oranı ve Risk……..……11
1.2.1.1 Beklenen Getiri Oranı…….……11
1.2.1.2 Risk……..12
1.2.2 Portföyün Beklenen Getiri Oranı ve Riski……..……13
1.2.3 Etkin Sınırın Elde Edilmesi……18
1.2.4 Fayda Fonksiyonu ve Kayıtsızlık Eğrileri……..20
1.2.5 Optimal Portföyün Elde Edilmesi……...21

İKİNCİ BÖLÜM
ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ…….27
2.1 ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ TEMEL KAVRAMLAR……...……....27
2.2 ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİM MODELİNİN OLUŞTURULMASI……...30
2.3 MODELİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN ELDE EDİLMESİ……35
2.4 PORTFÖYE RİSKSİZ VARLIĞIN EKLENMESİ HALİNDE MODEL FORMULASYONU……45
2.5 FAYDA MAKSİMİZASYONU İLE ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ……...48
2.6 MODELİN TEST EDİLMESİ……....53
2.6.1 Tümü Riskli Varlıklardan Oluşan Portföy…….…54
2.6.2 Risksiz ve Riskli Varlıklardan Oluşan Portföy……...61
2.6.3 Faydanın Beklenen Değerinin Maksimizasyonu ile Seçim……68

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
SÜREKLİ ZAMANLI ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ……71
3.1 SÜREKLİ ZAMANLI ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ TEMEL KAVRAMLAR……....71
3.1.1 Varlık Getirileri için Brownian Hareket……...71
3.1.1.1 Markov Özelliği……..73
3.1.1.2 Sürekli Zamanlı Stokastik Süreçler……75
3.1.1.3 Brownian Hareket……...77
3.1.2 Itô'nun Lemması……..80
3.1.3 Martingale Kavramı ve Varlık Fiyatlama……86
3.1.4 Varlık Fiyatlamanın Temel Teoremi……...88
3.1.5 Dinamik Programlama……89
3.1.5.1 Hamilton-Jacobi-Bellman Denklemi……90
3.1.5.2 Uzun Vadeli Yatırımlar için Tüketim ve Portföy Seçimi Problemi……92
3.2 SÜREKLİ ZAMANLI ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİM MODELİNİN OLUŞTURULMASI……..96
3.3 YARDIMCI PROBLEMİN OLUŞTURULMASI……..102
3.4 LİNEER KUADRATİK OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ……105
3.5 YARDIMCI PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ……...109
3.6 ETKİN SINIRIN ELDE EDİLMESİ……...112
3.7 MODELİN TEST EDİLMESİ……118

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
SÜREKLİ ZAMANLI PORTFÖY SEÇİMİ VE İMKB'DE BİR UYGULAMA……..…122
4.1 GİRİŞ…..……122
4.2 HİSSE SENETLERİNİN SEÇİMİ VE VARSAYIMLARA UYGUNLUĞUN İNCELENMESİ……...123
4.3 MARKOWITZ MODELİNE GÖRE OPTİMAL PORTFÖY SEÇİMİ……132
4.4 TÜMÜ RİSKLİ VARLIKLARDAN OLUŞAN DİNAMİK PORTFÖY SEÇİMİ……...141
4.5 YATIRIM ARAÇLARINA RİSKSİZ VARLIĞIN EKLENMESİ……...152
4.6 PORTFÖY SEÇİMİNİN SÜREKLİ ZAMANLI HALE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ……...163

SONUÇ VE ÖNERİLER……...170
KAYNAKÇA……..174
EKLER……179
Ek-1: Menkul kıymet getirilerine ilişkin histogram grafikleri ……179
Ek-2: Menkul kıymet getirilerine ilişkin korelogramlar……193
Ek-3: Durağan portföy seçimi matematik programlama modeli……..233
ÖZGEÇMİŞ……...236

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 4.1 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arası XU30……...124
Tablo 4.2 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arası XU30
(Ardışık hassasiyet:5, Homojenlik oranı:%75)……..…….125
Tablo 4.3 Haftalık getiri tanımsal istatistikleri ve Jacque-Bera test sonuçları…....126
Tablo 4.4 Aylık getiri tanımsal istatistikleri ve Jacque-Bera test sonuçları……127
Tablo 4.5 Normale dönüştürülmüş haftalık getiri tanımsal istatistikleri ve
Jacque-Bera test sonuçları……129
Tablo 4.6 Normale dönüştürülmüş aylık getiri tanımsal istatistikleri ve
Jacque-Bera test sonuçları……130
Tablo 4.7 Hisse senedi haftalık ve aylık beklenen getirileri……132
Tablo 4.8 Hisse senedi haftalık getirilere ait kovaryans matrisi(*10^4)……134
Tablo 4.9 Hisse senedi aylık getirilere ait kovaryans matrisi(*10^4)……135
Tablo 4.10 Haftalık ve aylık getiriler için elde edilen optimal
portföy ağırlıkları……...136
Tablo 4.11 Risksiz varlığın eklenmesi halinde haftalık ve aylık getiriler
için elde edilen optimal portföy ağırlıkları……....140
Tablo 4.12 Baz hisse senedini aşan beklenen getiri oranları……...142
Tablo 4.13 Çok dönemli portföy seçimi haftalık getirilere ait
kovaryans matrisi…….…..144
Tablo 4.14 Çok dönemli portföy seçimi aylık getirilere ait kovaryans matrisi…...145
Tablo 4.15 Kovaryans matrisinin pozitif definitliği(*10^4)…….…….146
Tablo 4.16 Optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında
kullanılacak parametreler……..147
Tablo 4.17 Optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak
yardımcı parametreler……147
Tablo 4.18 Haftalık getiriler ile oluşturulan dönemsel optimal portföy stratejisi…148
Tablo 4.19 Aylık getiriler ile oluşturulan dönemsel optimal portföy stratejisi…...149
Tablo 4.20 Dönemsel olarak baz hisse senedine yapılan yatırım(Haftalık)…….151
Tablo 4.21 Dönemsel olarak baz hisse senedine yapılan yatırım(Aylık)…….152
Tablo 4.22 Risksiz faiz oranını aşan getiri oranları……..153
Tablo 4.23 Risksiz varlığın eklenmesi halinde haftalık getirilere ait
kovaryans matrisi……...154
Tablo 4.24 Risksiz varlığın eklenmesi halinde aylık getirilere ait
kovaryans matrisi……...155
Tablo 4.25 Risksiz varlığın eklenmesi halinde kovaryans matrisinin
pozitif definitliği(*10^4)……..…156
Tablo 4.26 Risksiz varlığın eklenmesi halinde optimal portföy stratejisinin
hesaplanmasında kullanılacak parametreler……..157
Tablo 4.27 Optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak
yardımcı parametreler……..……..157
Tablo 4.28 Haftalık getiriler ile oluşturulan risksiz varlığın eklenmesi halinde
dönemsel optimal portföy stratejisi……158

Tablo 4.29 Aylık getiriler ile oluşturulan risksiz varlığın eklenmesi halinde dönemsel optimal portföy stratejisi……..…..159
Tablo 4.30 Dönemsel olarak risksiz faiz oranına yapılan yatırım(Haftalık)…..….160
Tablo 4.31 Dönemsel olarak risksiz faiz oranına yapılan yatırım(Aylık)……...160
Tablo 4.32 Risksiz faiz oranını aşan günlük beklenen getiri oranları……..165
Tablo 4.33 Risk primi süreci……165
Tablo 4.34 Risksiz varlık ile günlük getirilere ilişkin kovaryans matrisi……166
Tablo 4.35 Sürekli zamanlı optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak parametreler……...167
Tablo 4.36 Sürekli zamanlı ortalama-varyans optimal portföy……...168

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 Çeşitlendirme yoluyla riskin azaltılması……..5
Şekil 1.2 Varlık miktarı ile fayda arasındaki ilişki……...9
Şekil 1.3 Farklı korelasyon katsayısı değerleri için getiri risk ilişkisi……...16
Şekil 1.4 Beklenen getiri-Risk düzleminde farklı portföy alternatifleri……18
Şekil 1.5 Etkin Sınır……19
Şekil 1.6 Farklı tipte yatırımcılar için kayıtsızlık eğrileri……..20
Şekil 1.7 Optimal portföyün elde edilmesi……21
Şekil 1.8 Risksiz varlık ile I portföyünün birleşimi……...24
Şekil 1.9 Risksiz varlığın farklı riskli portföylerle birleşimi…….24
Şekil 1.10 Risksiz varlığın eklenmesi halinde optimum portföy seçimi……...25
Şekil 3.1 UK FTA Endeksi ve Brownian hareketin karşılaştırılması……72
Şekil 3.2 Para atışı deneyinin çıktıları……...73
Şekil 3.3 Atış sayısının artması neticesinde deney çıktıları……..…..77
Şekil 3.4 Fonksiyonun 1.7 civarında incelenmesi……79
Şekil 3.5 Brownian hareketin yakından incelenmesi…….80
Şekil 3.6 Genelleştirilmiş Wiener süreci……...82
Şekil 4.1 Haftalık getiriler ile oluşturulan Risk-Getiri Haritası……..……137
Şekil 4.2 Aylık getiriler ile oluşturulanRisk-Getiri Haritası……..……..138
Şekil 4.3 Aylık getiriler ile oluşturulan optimal portföy ağırlıkları ve
etkin sınır eğrisi……..……..……..139
Şekil 4.4 Risksiz varlığın eklenmesi halinde optimal portföy ağırlıkları ve
etkin sınır eğrisi……..……..141
Şekil 4.5 Hesaplamalara ilişkin örnek elektronik tablo sayfası…….……..162

GRAFİKLER LİSTESİ

Grafik 2.1 Riskli Varlıklar Ortalama-Varyans Etkin sınır (T = 4)……...59
Grafik 2.2 Ortalama-Varyans Etkin sınır (T = 4)……..…66
Grafik 3.1 Sürekli Zamanlı Ortalama-Varyans Etkin sınır…….121
Grafik 4.1 Haftalık ve aylık getiriler ile Ortalama-Varyans
Etkin Sınır (T=10)……..150
Grafik 4.2 Risksiz varlığın eklenmesi halinde haftalık ve aylık getiriler ile
Ortalama-Varyans Etkin Sınır (T=10)……161
Grafik 4.3 Hisse senetleri günlük getiri oranları serpilme diyagramı……..…..164

GİRİŞ

Harry Markowitz, 1952 yılında, risk kavramını varlığın getiri oranında meydana gelen sapma, başka bir deyişle standart sapma olarak tanımlamış ve çeşitlendirme yoluyla, belirli bir getiri seviyesinde riskin minimize edilmesine olanak sağlayacak ilk portföy seçim modelini oluşturarak bir ilke imza atmıştır. Aynı zamanda durağan portföy seçim modeli olarak da adlandırılan bu model, uzun yıllar bir çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve model bir çok yönüyle ele alınarak uzantıları geliştirilmiştir. Her ne kadar Markowitz, durağan portföy teorisi ile o dönem için yatırım kararlarının modellenmesi açısından büyük bir adım atmış olsa da, uzun dönemli yatırım hedeflerini yakalayamaması, işlem maliyetlerini göz önüne alamaması, hesaplanan optimal portföylerin girdi bilgilerinde meydana gelen küçük değişikliklere bağlı olarak büyük sapmalar göstermesi ve portföyün ağırlıklarının değiştirilmesine olanak tanımaması sebebiyle eleştiriler almıştır.

Bu kısıtlamaların giderilebilmesi amacıyla, yatırım dünyasının dinamik doğasını modelleyebilecek, yatırım kararlarını dinamik hale dönüştürecek çok dönemli modeller geliştirilmiştir. Dinamik portföy seçimi üzerine yapılan çalışmalarda, tek periyotlu, başka bir deyişle durağan portföy seçimi probleminin dönem sayısının arttırılarak yatırım ufkunun genişletilmesi üzerine yoğunlaşılmıştır. Çok dönemli portföy seçiminde temel amaç, yatırımcının uzun vadede yatırımdan beklediği faydayı maksimize edecek yatırım stratejisi dizisinin belirlenmesidir.

Çok dönemli portföy seçim probleminin analitik olarak çözümü üzerine yapılan çalışmaların birçoğunda araç olarak dinamik programlama kullanılmıştır. Dinamik programlama, her bir dönem için optimal portföy stratejilerinin sırasıyla elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Böylelikle yatırımcı, gözönüne aldığı dönem için optimal yatırım kararını elde ederken, aynı zamanda gelecek dönemler için de elindeki varlığı yatırım araçları arasında ne şekilde ayırması gerektiğine karar verebilmektedir.

Çok dönemli modeller, durağan portföy teorisinin kısıtlamalarının bir bölümünün giderilmesine olanak tanımaktadır. Ancak vadeli işlem piyasalarının etkin olarak kullanıldığı durumlarda, portföy ağırlıklarının çok küçük zaman

periyotları içerisinde otomatik olarak değiştirilebilmesi ve portföyün yeniden dengelenebilmesi gerekmektedir. Bu noktada göz önüne alınan zaman periyodu içerisinde dönem sayısının sınırsız biçimde arttırılması zorunluluğu doğmaktadır.

Dinamik programlama yaklaşımı, bu tip problemlerin çözümüne olanak sağlamamaktadır. Belirli bir zaman periyodu içerisinde dönem sayısının sınırsız arttırıldığı portföy seçimi modeli, sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçim modeli olarak adlandırılmakta olup, çözümü Merton tarafından 1971 yılında bir stokastik optimal kontrol problemi olarak ifade edilmiştir.

Dört bölümden oluşan çalışmanın birinci bölümünde, klasik Markowitz portföy seçimi teorisi olarak da bilinen durağan portföy teorisi açıklanmaktadır. Dinamik portföy teknikleri ile elde edilen optimal portföylerin beklenen getiri ve risk parametreleri ile karşılaştırma yapabilmek, göz önüne alınan tekniklerin etkinliklerini sorgulayabilmek amacıyla öncelikle klasik yaklaşım açıklanmaktadır.

İkinci bölümde eldeki varlığın dönemsel olarak hisse senetlerine atanmasında çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi modeli yaklaşımı, yatırımcının talepleri doğrultusunda, varyansın minimize edilmesi, beklenen getirinin maksimize edilmesi veya beklenen getiri oranı ve varyansın lineer kombinasyonunun maksimize edilmesi biçiminde açıklanmaktadır. Aynı zamanda bu bölümde Bu bölümde çok dönemli ortalama-varyans formülasyonu açıklanarak modelin tek periyotlu durağan Markowitz ortalama-varyans portföy seçim modeli ile karşılaştırılması üzerinde durulmakta ve model küçük bir uygulama ile test edilmektedir.

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçiminde belirli bir zaman aralığında göz önüne alınan dönem sayısı sınırsız arttırılarak elde edilen sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi modeli ve varlık getirilerinin modellenmesinde kullanılan Brownian hareket, Martingale kavramı gibi terimler üçüncü bölümde açıklanarak, yine Markowitz modeli ile elde edilen parametrelerle karşılaştırmalı olarak küçük bir uygulamaya yer verilmektedir.

Uygulama olarak adlandırılan dördüncü bölümde ise İstanbul Menkul Kıymetler Borsası XU30 endeksinde yer alan hisse senetleri arasından her üç model kullanılarak optimal portföyler seçilmekte ve her üç model için elde edilen beklenen getiri ve risk parametreleri karşılaştırılmaktadır.

BİRİNCİ BÖLÜM
DURAĞAN PORTFÖY TEORİSİ

1.1.DURAĞAN PORTFÖY TEORİSİ TEMEL KAVRAMLAR

1.1.1. Risk Kavramı

Genel anlamda risk arzu edilmeyen bir olayın meydana gelme olasılığı olarak tanımlanabilir.[1] Tam belirlilik hali dışında geleceğin büyük ölçüde belirsizlik içermesi, risk kavramının dikkatli bir biçimde açıklanmasını zorunlu kılmaktadır. Finans teorisi içerisinde risk gelecekte gerçekleşmesi beklenen olaylarda meydana gelecek sapmanın veya değişkenliğin ölçüsü olarak adlandırılabilir.[2] Yatırım kararı alma süreci açısından bakıldığında risk kavramı, yatırım kararı alınan dönem sonunda herhangi bir varlıktan beklenen verimin kesin olarak bilinememesi yani değişkenlik göstermesi anlamına gelmektedir.[3] Doğal olarak riskin ölçüsü de sapmanın şiddetini belirtecektir.

Belirlilik şartlarının geçerli olduğu durumlarda, yani yatırımcının herhangi bir karar aşamasında yatırım alternatiflerinin tümü hakkında kesin bir bilgiye sahip olması durumunda, dönem sonunda en yüksek verimi sağlayan yatırım aracına yatırım yapmak en rasyonel alternatif olmaktadır. Dönem sonunda ilgili yatırım araçlarının veriminin kesin olarak bilinmesi, risk kavramını ortadan kaldırmaktadır. Ancak belirsizlik durumunda, yani yatırım aracının dönem sonu veriminin kesin olarak bilinemediği durumlarda, yatırımcının her bir yatırım aracının barındırdığı risk faktörünü göz önüne alması gerekmektedir. İleride açıklanacağı üzere, bu gibi durumlarda beklenen getiri ve riskin bir bileşimi olarak yatırımcının beklediği faydayı maksimize etmek tercih edilebilmektedir. Her ne kadar riskin tanımlanmasında çok farklı yaklaşımlar olsa da, risk kaynakları konusunda ortak

---

[1] Cevat Sarıkamış, **Sermaye Pazarları**, Alfa Basım Yayım Dağıtım, 2000,İstanbul, s.157

[2] Öztin Akgüç, **Finansal Yönetim,** Avcıol Basım-Yayın, İstanbul, 2000, s.864

[3] Erdinç Altay,**Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**, Derin Yayınları:40, İstanbul, 2004, s.3

çizgiler bulmak olanaklıdır.[4] Herhangi bir varlığın getiri oranının beklenen getiri oranından farklı olmasına yol açacak bir çok neden olmakla birlikte risk kaynakları sistematik risk ve sistematik olmayan risk olarak iki ana başlık altında toplanabilir.

1.1.1.1.Sistematik Risk

Sistematik risk, finansal yapının kendisinden kaynaklanan ve finansal yapı içerisinde yer alan tüm varlıkları etkileyen risk kaynaklarına verilen isimdir ve bu nedenle pazar riski olarak da adlandırılır. Sistematik risk, ekonomik, politik ve sosyal yaşam içerisinde varolan değişkenlikten kaynaklanmaktadır ve bu nedenle yöneticiler tarafından kontrol edilemez. Sistematik risk sistem içerisindeki tüm varlıkları etkilemekle birlikte, bu etki çeşitli yatırım araçlarında farklılık gösterebilmektedir. İleride açıklanacak çeşitlendirme yoluyla risk belirli bir düzeye kadar azaltılabilse de toplam riskin minimum değeri sistematik risk olmaktadır. Sistematik risk, faiz oranı riski, enflasyon riski ve piyasa riski gibi üç ana başlıkta toplanabilir.

Faiz oranı riski, piyasa faiz oranındaki değişimlerden kaynaklanmaktadır. Piyasa faiz oranında meydana gelen değişimler sabit getirili varlığın fiyatında değişime yol açmasının yanında, hisse senedi fiyatları gelecekte beklenen nakit akımlarının bugünkü değeri olarak hesaplandıklarından, riskli varlıkları da etkilemektedir. Özetle faiz oranı riski temel olarak sabit gelir getiren finansal varlıklarda daha fazla olmakla birlikte, hisse senetleri için de söz konusu olmaktadır. Bunun yanında sabit getirili varlığın vadesi arttıkça belirsizlik de artacağından, faiz oranı riski de artmaktadır.

Satın alma gücü riski olarak da adlandırılan enflasyon riski, piyasadaki genel fiyat seviyesinin artması ile birlikte hisse senedi veriminde meydana gelen düşüşten kaynaklanan risk faktörüdür. Sabit getirili varlık ile hisse senetlerinin enflasyon riskine karşı direnci farklı olmaktadır. Enflasyon ile birlikte firmaların satış ve karlarının artması doğal olarak kar paylarının da artmasına yol açmaktadır. Bu ise hisse senedi sahiplerini enflasyon riskine karşı bir ölçüde korumaktadır. Bunun yanında sabit getirili varlığın enflasyon riskine karşı duyarlılığı daha yüksek

[4] Ö. Akgüç, **A.g.e.,** s.864

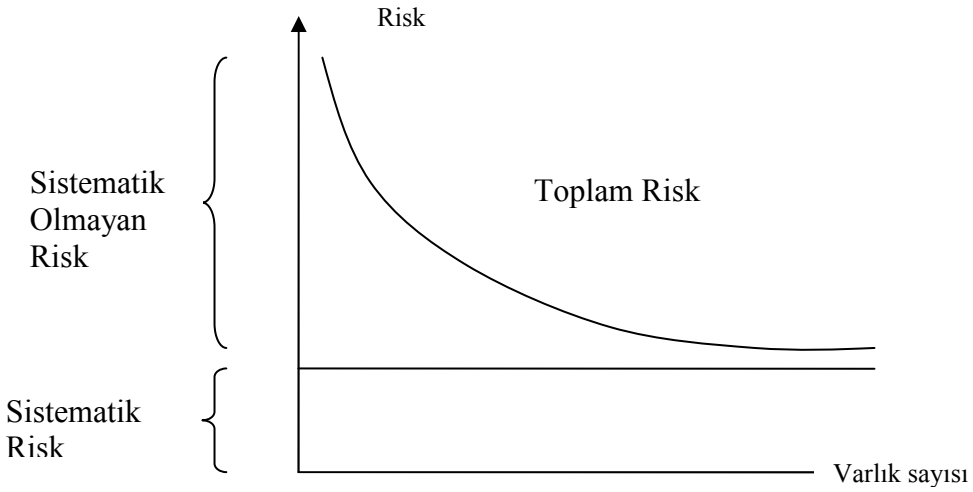
olmaktadır. Bunun sebebi sabit getirili varlığın ele alınan dönem için getirisinin sabit olmasıdır. Ancak dönem içinde fiyatlarda meydana gelecek artış elde edilen kazanımlar ile yapılacak satın alma gücünü düşüreceği olarak açıklanabilir.

Son olarak piyasa riski, konjonktüre bağlı olarak ekonomideki genel eğilimlerden kaynaklanan risk olarak adlandırılabilir. Yatırımcıların gelecek ile ilgili beklentilerinin yanında ulusal ve uluslar arası politik gelişmeler, piyasa riskinin temelini oluşturmaktadır.

1.1.1.2. Sistematik Olmayan Risk

Sistematik olamayan risk, finansal varlıkların ait oldukları işletmelerden ya da bu işletmelerin faaliyette bulundukları endüstriye ait birtakım özelliklerden ve değişimlerden meydana gelen risk türüdür.[5] Dolayısıyla herhangi bir menkul kıymete ait olan sistematik olmayan risk, diğer menkul kıymetlerden bağımsızdır. Sistematik olmayan riskin farklı varlıklar için birbirinden bağımsız olması, uygun varlıklar bir araya getirilerek sistematik olmayan risklerinin ortalamasının sıfır yapılabileceği anlamına gelmektedir. Bu ise portföy teorisinin temelini oluşturarak, istenildiğinde çeşitlendirme yoluyla sistematik olmayan risk tamamen oradan kaldırılabilmektedir.

Şekil 1.1 Çeşitlendirme yoluyla riskin azaltılması



[5] E. Altay, **A.g.e.**, s.9

Sistematik olmayan risk, finansal risk, faaliyet riski ve yönetim riski olarak üç ana başlık altında toplanabilmektedir. Finansal risk, firmaların sermayelerinde bulunan borç oranı ile ilgili bir risk türüdür. Bir çok firma borcun kaldıraç etkisinden faydalanmak amacıyla yabancı kaynağa başvurmaktadır. Yabancı kaynağın maliyetinin söz konusu borcun firmaya getirisinden büyük olması durumda hisse senedi fiyatı pozitif etkilenirken, borcun maliyetinin kazançtan büyük olduğu durumlarda işletme finansal yükümlülüklerini yerine getirememe riski ile karşı karşıya kalabilecektir. Kısacası finansal risk, borçlanma sonucu ortaya çıkan, firmanın yöneticilerinin kontrolü dahilinde gerçekleşen ve firmanın borcunu ödeyememesi olasılığından doğan risk türüdür.

Faaliyet riski ise firmanın toplam varlıkları içerisinde sabit varlık oranının artması neticesinde ortaya çıkan risk türüdür. Firmanın aktiflerinin içerisinde sabit varlık miktarının artması doğal olarak sabit maliyetleri arttırmakta ve bunun bir sonucu olarak da firma tarafından gerçekleştirilen satışların daha büyük bir bölümü bu maliyetleri karşılamak için kullanılmaktadır. Maliyetlerin artması firmanın karlılığını doğal olarak da hisse senedi fiyatını etkilemektedir.

Son olarak yönetim riski ise, adından da anlaşılacağı üzere firmanın kötü yönetilme riski olarak adlandırılabilir. Firmanın geleceğini etkileyecek yanlış kararlar doğal olarak firmanın finansal riskini de arttırmaktadır. Yönetime riski yabancı sermaye sahiplerinden çok özsermaye sahipleri tarafından dikkate alınmalıdır.

1.1.2. Fayda Teorisi ve Riskten Kaçınma

Her ne kadar riskten tamamen korunmak mümkün olmasa da bir çok finans teorisi riskten korunma için yollar önermekte veya riskten kaçınılamayan durumlarda bu riske değer biçme için yöntemler sunmaktadır. Kimi yatırımcılar riske karşı tutum alırken risk yokmuş gibi davranmakta, dolayısıyla da tüm riski göğüslemekte; bir diğer grup ise, geçmiş verilere ait ortalama ve standart sapma verilerini kullanarak riski çeşitlendirmenin yollarını aramaktadır.

Riskten kaçınma için göz önüne alınan bir diğer yaklaşım ise her bir alternatiften beklenen faydanın ortaya konmasıdır. Fayda kavramını, herhangi bir

nesneye sahip olma neticesinde edinilen mutluluk olarak tanımlamak mümkündür. Örneğin, herhangi bir kişi için bahçeli bir ev, garajı olan bir eve göre daha tercih edilebilir ise; bu kişinin bahçeli bir eve sahip olmaktan dolayı duyacağı mutluluk veya başka bir deyişle fayda, garajı olan bir eve sahip olmaktan duyacağı mutluluktan daha fazla olacaktır.

A, B ve C herhangi üç varlığı veya olayı temsil etmek üzere herhangi bir olayın bir diğerine tercih edilebilirliği A > B olarak gösterilirken, iki olay arasında kararsız kalınması A ~ B ile temsil edilmektedir. Herhangi bir çıktı neticesinde elde edilecek faydanın tanımlanabilmesi için öncelikle olayların karşılaştırılabilir olması gerekmektedir. Olayların karşılaştırılmalarında kullanılan aksiyomlar aşağıda tanımlanmaktadır.

Aksiyom 1: Herhangi iki A ve B olayı için aşağıda verilen üç koşuldan biri geçerlidir. Bu aksiyom tamlık olarak adlandırılabilir.

$$A>B \qquad A\sim B \qquad A<B$$

Aksiyom 2: Yansıma olarak adlandırılan bu aksiyon her olayın kendisi ile eşdeğer tercih edilme derecesine sahip olduğunu belirtmektedir.

$$A\sim A$$

Aksiyom 3: A olayı B olayına göre tercih edilebilir ve B olayı C olayına göre tercih edilebilir olması halinde, A olayı C olayına göre tercih edilebilirdir. Bu aksiyom geçişkenlik olarak adlandırılabilir.

$$A>B \quad \text{ve} \quad B>C \quad \rightarrow \quad A>B$$

Aksiyom 4: A>C>B koşulu varolması halinde, $[\phi A + (1-\phi)B] \sim C$ koşulunu sağlayacak bir ϕ olasılığını bulmak mümkündür. $(0 \le \phi \le 1)$ Bu aksiyom süreklilik olarak adlandırılır.

$$A>C>B \qquad [\phi A + (1-\phi)B] \sim C \quad ; \exists \phi, \quad 0 \le \phi \le 1$$

1.1.2.1. Fayda Kavramı ve Fayda Fonksiyonu Çeşitleri

Hatırlanacağı üzere fayda kavramı, herhangi bir nesneye sahip olma neticesinde edinilen mutluluk olarak tanımlanmıştı. Finansal açıdan bakıldığında, bahsedilen olay veya çıktılar varlık seviyesi olarak adlandırılmaktadır. Bu durumda

fayda kavramı, farklı varlık seviyelerinden beklenen parasal getiri olarak tanımlanabilmektedir.

Fayda fonksiyonu ise, verilen her olay veya çıktıya karşılık parasal bir getiri sunan fonksiyondur. Günlük hayatta nadiren kullanılmasına rağmen finans ve ekonomi literatüründe yatırımların karşılaştırılmasında fayda kavramına sıklıkla başvurulmaktadır. W simgesi, herhangi bir noktada varlık seviyesini göstermek üzere fayda fonksiyonu genellikle U(W) ile temsil edilir. Genel anlamda herhangi bir fayda U(W) fonksiyonunun aşağıda verilen özellikleri sağlaması beklenir.

- U(W) fayda fonksiyonu yatırımcılar için farklılık göstermektedir.

- Fayda fonksiyonu her zaman artandır. ($\partial U(W)/\partial W \geq 0$) Başka bir deyişle herhangi bir mal veya varlığın fazlası daha azına göre her zaman tercih edilir.

- Fayda fonksiyonunu azalarak artmaktadır, başka bir deyişle fonksiyonun birinci türevi pozitif iken ikinci türevi negatiftir.($\partial U^2(W)/\partial W^2 < 0$) Bu ifadelerin sonucu olarak da fayda fonksiyonunun konkav olduğu söylenebilir. İkinci türev ifadesi artıştaki artış veya azalış miktarını temsil ettiğinden, varlık miktarında arttıkça yatırımcıyı mutlu etmenin daha zor olduğu şeklinde yorumlanabilir. Ekonomide bu olgu azalan verim kanunu olarak adlandırılır.

Bu üç özellik benzer biçimde sırasıyla, fayda fonksiyonu tüm yatırımcılar için farklılık göstermekle birlikte her zaman pozitiftir, eğimi pozitif dolayısıyla artandır ve son olarak eğim yani artım miktarı sürekli olarak azalmaktadır şeklinde özetlenebilir.[6] Yukarıda tanımlanan fonksiyon von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.[7]

---

[6] Satyajit Das, **Risk Management and Financial Derivatives: A Guide to Mathematics,** Mac Millan Press Ltd., London, 1997, s.433

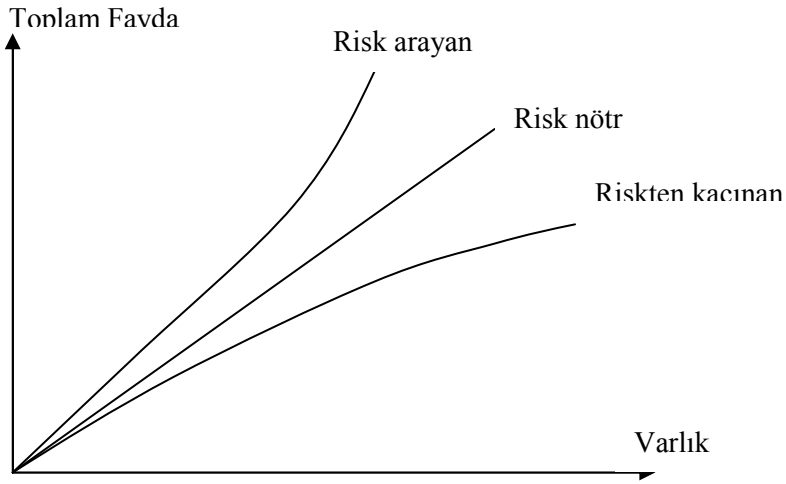
[7] Jürgen Eichberger, Ian R. Harper, **Financial Economics**, Oxford University Press, NewYork, 1997, s.79

1.1.2.2. Riskten Kaçınma Katsayısı

Riskten kaçınma kavramı bir çok finans teorisinin temel varsayımlarından bir tanesidir. Fayda teorisinde yatırımcılar riske karşı aldıkları tutuma göre üç farklı biçimde gruplandırılabilirler.[8]

Risk arayan bir yatırımcı, eşit beklenen getirilere sahip farklı risk seviyelerindeki yatırımlar arasından, eşit beklenen parasal getirilere rağmen daha riskli olanı tercih edecektir. Riskten kaçınan yatırımcı ise aynı koşullar altında daha az riskli olan yatırımı tercih edecektir. Risk nötr yatırımcı ise riske karşı duyarsız olduğundan her iki yatırımın beklenen getirisinin eşit olması halinde kararsız kalacaktır.

Şekil 1.2 Varlık miktarı ile fayda arasındaki ilişki



U(W) fonksiyonu yukarıda verilen koşulları sağlayan fayda fonksiyonu ve $U'(W)$ fayda fonksiyonunun varlık miktarına göre birinci türevini belirtmek üzere mutlak riskten kaçınma katsayısı aşağıda verilen biçimde tanımlanabilir.

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \qquad (1.1)$$

Riskten kaçınma katsayısı yatırımcının riske karşı duyarlılığını, başka bir deyişle, bir birim riske daha katlanmak için beklediği ek getiri oranını temsil

[8] J. Fred Weston, Eugene F. Brigham, **Managerial Finance,** Dryden Press, Great Britain, 1975, s.317

etmektedir. Elde edilen ek getirinin başlangıç getirisi üzerinden ne kadar arttığının yorumlanabilmesi için göreceli riskten kaçınma katsayısı kullanılabilir.

$$R(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} = W\,A(W) \qquad (1.2)$$

1.2.KLASİK MARKOWİTZ PORTFÖY TEORİSİ

Riskli ve risksiz varlıklar bir araya getirilerek oluşturulan ve çeşitlendirme yoluyla yatırımcılara düşük risk ile yüksek getiri sağlama imkanı tanıyan finansal varlıklar portföy olarak adlandırılmaktadır.

Modern portföy teorisinin temelleri Harry Markowitz'in 1952 yılında yayınladığı "Portfolio Selection" isimli makale[9] ile atılmıştır. Bu makalede, yukarıda tanımlanan risk kavramını varlığın getiri oranında meydana gelen sapma yani başka bir deyişle standart sapma olarak tanımlayarak bir ilke imza atmıştır. Aynı zamanda portföy riskinin, ayrı ayrı portföy içerisindeki varlıkların risklerinin ortalamalarından farklı olduğu sonucu elde edilmiş ve bu şekilde portföy riskinin düşürülebileceği sonucu ortaya çıkmıştır. Bu farklılığı sağlayan neden farklı varlıkların aynı etkiye tepkilerinin farklı olmasıdır ki bu fark varlık getirilerinin kovaryansı ile elde edilmektedir.[10]

Markowitz portföy teorisinde, önceden belirlenen herhangi bir risk seviyesinde en yüksek beklenen getiri veya belirli bir getiri oranı seviyesinde en düşük riskin elde edilmesi mümkün olmaktadır. Yukarıda bahsedilen koşulu sağlayan portföyler etkin olarak adlandırılırlar. Bu şekilde farklı yatırımcılar için, yatırımcılara ait fayda fonksiyonunun sadece beklenen getiri ve riskin bir fonksiyonu olduğu varsayılarak, optimum portföylerin seçimi mümkün olmaktadır. Markowitz portföy teorisinin varsayımları aşağıda verilen biçimde sıralanabilir.[11]

---

[9] Harry Markowitz, "Portfolio Selection", **Journal of Finance**, Vol.7, 1952, s.77-91

[10] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,** John Wiley& Sons,Inc., USA,2003,s.44

[11] Harry Markowitz, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,** John Wiley & Sons,Inc., USA, 1991,s.

1. Yatırımcılar rasyoneldir, riskten kaçınırlar ve beklenen faydalarını maksimize etmek amacındadırlar.
2. Hisse senedi getirileri normal dağılmaktadır.
3. Yatırımcıların tümü aynı yatırım ufkuna sahiptirler ve yatırım süresi tek periyottur.

Portföy seçimi problemi iki aşamada ele alınabilir. Birinci aşama, piyasanın gözlemlenerek hisse senetleri için beklenen getiri ve risk gibi parametrelerin elde edilmesidir. Markowitz ortalama-varyans portföy seçimi modeli ise ikinci aşamada, eldeki veriler kullanılarak optimum portföyün elde edilmesinde kullanılmaktadır.[12]

1.2.1. Bireysel Varlıklar İçin Beklenen Getiri Oranı ve Risk

Markowitz ortalama-varyans portföy seçiminin odak noktası yatırımcının belirli bir zaman aralığı içinde elinde bulunan varlığı, yatırım alternatiflerine ne şekilde paylaştıracağının tespit edilmesidir. Bu noktada yatırımcının amacı beklenen faydasını maksimize etmek olacaktır. Yatırımcının beklenen faydasının getiri ve riskten olduğu varsayımı hatırlanacak olursa, herhangi bir portföy belirleyen en temel iki unsurun ortalama getiri ve risk olduğu kolaylıkla görülebilir.[13]

1.2.1.1.Beklenen Getiri Oranı

Dikkate alınan dönem içerisinde riskli veya risksiz herhangi bir varlığa gerçekleştirilen yatırım neticesinde elde edilen göreceli kazanç getiri oranı olarak adlandırılmaktadır. Bir hisse senedinin herhangi bir dönem için getiri oranı aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.[14]

$$R_{i,t} = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-1}) + D_{i,t}}{P_{i,t-1}} \qquad (1.3)$$

[12] H. Markowitz, 1952, **A.g.e.**, s.77

[13] Marek Capinski, Tomasz Zastawniak, **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**, Springer-Verlag Ltd., USA, 2003, s.91

[14] E.Altay, **A.g.e.**, s.15

$R_{i,t}$: i. varlığın t anındaki getiri oranı

$P_{i,t}$: i. varlığın t anındaki fiyatı

$D_{i,t}$: i. varlığın t anında ödediği karpayı

(1.3) ile verilen ifade, herhangi bir varlığın yine herhangi bir noktada getirisini hesaplamamıza olanak sağlamaktadır. Bunun yanında bir varlığın beklenen getiri oranı, yatırım dönemi içinde varlığın getiri oranını etkileyecek bütün gelişmelerin meydana gelme olasılıkları ile, bu gelişmeler sonucu varlık getiri oranının alacağı sonuçların çarpımlarının toplamıdır.[15]

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^{n} P_j R_{ij} \qquad (1.4)$$

$E(R_i)$: i. varlığın beklenen getiri oranı

P_j : j. durumun gerçekleşme olasılığı

R_{ij} : j. durumun gerçekleşmesi halinde i. varlığın getiri oranı

Ancak incelenen kaynakların büyük bir çoğunluğunda (1.4) ile verilen beklenen getiri oranı ifadesi hesaplanırken, her bir durumun gerçekleşme olasılığı eşit olarak kabul edilmektedir. ($P_0= P_1=\ldots= P_n=1/n$) Bu kabulün sebepleri, hisse senedi getirilerinin normal dağılımı ve mümkün sonuçların sayısının arttıkça bu dağılıma yakınsama olarak sıralanabilir. Tabii ki bu durumda (1.4) ile verilen beklenen getiri ifadesi aşağıda verilen forma dönüşecektir.

$$E(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (1.5)$$

1.2.1.2. Risk

Herhangi bir riskli varlığın, beklenen getiri oranında sapmasının ölçüsü risk olarak tanımlanır ve standart sapma ile belirtilmektedir.[16] Risk ifadesi veya başka bir deyişle standart sapma, gerçekleşen getiri oranının beklenen getiri oranından ne ölçüde saptığını elde etmemize olanak sağlamaktadır.

---

[15] John L. Teall, Iftekhar Hasan, **Quantitative Methods for Finance and Investments,** Blackwell Publishing Ltd, UK, 2002, s.104

[16] M. Capinski, T. Zastawniak, **A.g.e.**, s.93

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} P_j \left[R_{ij} - E(R_i)\right]^2} \qquad (1.6)$$

σ_i : i. varlığın standart sapması

P_j : j. durumun gerçekleşme olasılığı

$E(R_i)$: i. varlığın beklenen getiri oranı

R_{ij} : j. durumun gerçekleşmesi halinde i. varlığın getiri oranı

(1.6) ifadesi içerisinde yer alan tam kare ifadesi, bir anlamda yatırımcının yatırım dönemi başında gerçekleştirdiği tahminlerden sapmaları ortaya koymaktadır. Dolayısıyla hesaplanan σ_i ifadesinin büyük bir ifade çıkması istenmeyen bir durumdur. Yine bir önceki bölümde olduğu gibi, her bir durumun gerçekleşme olasılığının eşit olarak kabul edilmesi halinde standart sapma veya risk ifadesi aşağıda verilen formda hesaplanabilecektir.[17]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[R_i - E(R)\right]^2} \qquad (1.7)$$

Varyans ifadesi (1.6) veya (1.7) ile verilen bağıntıların karesi olarak tanımlanır. Ancak uygulama standart sapma, beklenen getiri oranı ile aynı birimde olduklarından daha sık tercih edilmektedir.

1.2.2. Portföyün Beklenen Getiri Oranı ve Riski

Bir portföyün getiri oranı, portföyü oluşturan varlıkların portföy içerisindeki ağırlıkları ve beklenen getiri oranlarının ağırlıklı ortalaması şeklinde hesaplanır.[18] Portföy içerisindeki her bir varlığın beklenen getiri oranı (1.5) ile verilen ifade ile elde edilmektedir. Portföy ağırlıkları ise ilgili hisse senedine yatırılan varlık miktarının toplam varlık miktarına oranlanması ile elde edilecektir.[19]

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, E(R_i) \qquad (1.8)$$

[17] E. Elton, M. Gruber, **A.g.e.**, s.48

[18] M. Capinski, T. Zastawniak, **A.g.e.**, s.97

[19] E. Altay, **A.g.e.**, s.17

$E(R_P)$: Portföyün beklenen getiri oranı

$E(R_i)$: i. varlığın beklenen getiri oranı

X_i : i. varlığın portföy içerisindeki ağırlığı

(1.8) ile verilen ifade kullanılarak bir portföy beklenen getirisi kolaylıkla elde edilebilir. Ancak daha önce açıklandığı üzere, bir riskli varlık için geçerli olan sistematik olmayan risk portföy içerisindeki diğer riskli varlıkların sistematik olmayan riskleri ile istatistiksel anlamda bağımsız olabilir. Böylelikle hem portföyün varyansı portföy içerisindeki varlıkların varyansının maksimum değerini aşamamaktadır, hem de portföyün varyansı ayrı ayrı portföy içerisindeki varlıkların toplam varyanslarından küçük olabilmektedir.[20] Bu durumda, varlıkların birbirleri ile etkileşimlerinin, bir diğer ifade ile ortak hareketlerinin ölçüsünün tanımlanması gerekmektedir. İstatistikte bu kavram kovaryans ölçüsü ile tanımlanmaktadır.[21]

$$\sigma_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} P_j \left[\left(R_{ij} - E(R_i) \right) \left(R_{kj} - E(R_k) \right) \right] \qquad (1.9)$$

$\sigma_{i,k}$: i. ve k. varlık getirileri arası kovaryans

P_j : j. durumun gerçekleşme olasılığı

R_{ij} : j. durumun gerçekleşmesi halinde i. varlığın getiri oranı

R_{kj} : j. durumun gerçekleşmesi halinde k. varlığın getiri oranı

$E(R_i)$: i. varlığın beklenen getiri oranı

$E(R_k)$: k. varlığın beklenen getiri oranı

Ve yine olabilecek tüm durumların eşit olasılıklandırılması halinde kovaryans formülü aşağıda verilen formda elde edilir.

$$\sigma_{i,k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(R_{ij} - E(R_i) \right) \left(R_{kj} - E(R_k) \right) \right] \qquad (1.10)$$

(1.9) ile verilen varyans ifadesi varyans ifadesini andırmasına rağmen, iki farklı getirinin kendi ortalamalarından farklılığının ölçüsünü temsil etmektedir. Ancak varyans ile en büyük farklılığı, kovaryans teriminin negatif değerler de

[20] M. Capinski, T. Zastawniak, **A.g.e.**, s.100

[21] E. Elton, M. Gruber, **A.g.e.**, s.54

alabilmesidir. Hisse senedi getiri oranları, her ikisi için de ortalamalarının üzerinde değerleri aldığında veya her ikisi için de ortalamanın altında değerler aldığında kovaryans ifadesi pozitif olmaktadır.

Bununla birlikte, hisse senetlerinden bir tanesi ortalamanın üzerinde değerler alırken diğerinin ortalamanın altında değerler alması halinde kovaryans terimi negatif olacaktır. Dolayısıyla kovaryans, hisse senetlerinin birlikte hareket etme ölçüsü olarak tanımlanabilir.[22]

Kovaryans terimi her ne kadar hisse senetlerinin birlikte değişimini yorumlamamıza olanak sağlasa da, elde edilen kovaryansın büyüklüğünü yorumlamak genellikle güçtür. Bu güçlüğü yenmek adına, kovaryans teriminin standart hale dönüştürülmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Kovaryans teriminin iki varlığının standart sapmalarının çarpımı ifadesine oranlanması neticesinde, kovaryans ile benzer özellikler gösteren ancak -1 ve +1 arasında değerler alabilen bir değişken elde edilir. Bu değişken, korelasyon katsayısı olarak adlandırılmaktadır.[23]

$$\rho_{i,k} = \frac{\sigma_{i,k}}{\sigma_i \, \sigma_k} \qquad (1.11)$$

$\rho_{i,k}$: i. ve k. varlık getirileri arası korelasyon katsayısı

$\sigma_{i,k}$: i. ve k. varlık getirileri arası kovaryans

σ_i : i. varlığın getiri oranının standart sapması

σ_k : k. varlığın getiri oranının standart sapması

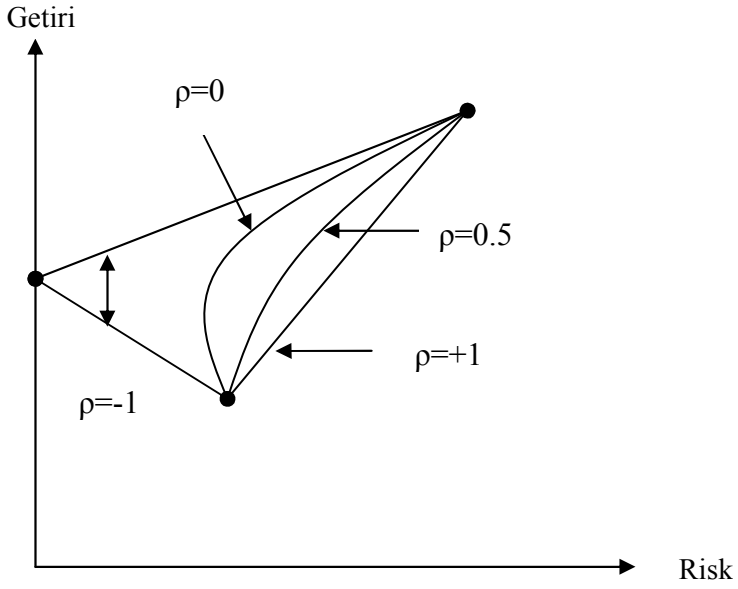
İki hisse senedinin kovaryansının yorumlanmasında uygulanan mantık benzer biçimde korelasyon katsayısının yorumlanmasında da kullanılmaktadır. İki hisse senedi getiri oranları arasındaki korelasyon katsayısının negatif olması, hisse senedi getiri oranlarından bir tanesi artarken diğerinin azaldığı, pozitif olması ise birinin artarken diğerinin de arttığı biçiminde yorumlanabilir. Bunun yanında korelasyon katsayısı birlikte hareketin ölçüsü hakkında da bilgi sahibi olmamıza yardımcı olmaktadır. Korelasyon katsayısının mutlak değerce bire yakın olması ilişkinin kuvvetliliğini, sıfıra yakın olması ise hisse senedi getiri oranlarının birbirinden

[22] E. Elton, M. Gruber, **A.g.e.**, s.54

[23] E.Altay, **A.g.e.**, s.19

bağımsız olduğunu belirtmektedir. Farklı korelasyon katsayısı için getiri oranı ve risk arasındaki ilişki aşağıda verilmektedir.

Şekil 1.3 Farklı korelasyon katsayısı değerleri için getiri risk ilişkisi



Kaynak : E. Elton, M. Gruber, A.g.e., s.77

Böylelikle portföyün riskinin hesaplanabilmesi için gerekli tüm argümanlar elde edilmiş olur. Portföyde yer alan riskli varlıkların piyasaya ulaşan yeni bilgiler neticesinde farklı değişimler göstermesi portföyün riskinin, portföyün beklenen getiri oranının hesaplanmasında olduğu gibi ağırlıklı ortalama yoluyla hesaplanabilmesini engellemektedir. Bu durumda portföy riski, varlıkların getiri oranları arasındaki kovaryanslar dikkate alınarak aşağıda verilen formda hesaplanmaktadır.[24]

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i\, x_k\, \sigma_{i,k}} \qquad (1.12)$$

σ_p : portföyün standart sapması(riski)

x_i : i. varlığın portföy içerisindeki ağırlığı

x_k : k. varlığın portföy içerisindeki ağırlığı

$\sigma_{i,k}$: i. ve k. varlık getirileri arası kovaryans

[24] J. L. Teall, I. Hasan, **A.g.e.,** s.105

Dikkat edilecek olursa, portföy riskinin hesaplanmasında göz önüne alınan değişkenler her bir varlığın portföy içerisindeki ağırlığı ve varlık getirileri arasındaki kovaryans olmaktadır. Bu durumda portföy içerisine kovaryansı negatif olan varlıklar eklenerek veya nispeten kovaryansı düşük varlıklar seçilerek, toplam riskin minimum düzeyde tutulması sağlanabilmektedir.[25] Her bir varlığın portföy içerisindeki ağırlığının optimal değeri ise riski minimize edecek biçimde portföy ağırlığına göre kısmi türevlerin alınması neticesinde elde edilebilecektir. İki varlıktan oluşan portföyü göz önüne alarak varyansın değerini minimize edecek portföy ağırlıklarını elde etmeye çalışalım. İki varlıktan oluşan portföyün varyansı aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{1,2} \qquad (1.13)$$

(1.13) ile verilen ifadede portföy ağırlıkları toplamının bire eşit olması, portföy içerisindeki varlıklardan bir tanesinin diğer varlığın portföy ağırlığı cinsinden yazılabilmesine olanak sağlamaktadır.

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1 - x_1 \qquad (1.14)$$

(1.14) ile verilen ifadenin (1.13) bağıntısında yerine yazılması ile birlikte portföyün varyansı aşağıda verilen biçimde düzenlenebilir.

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + (1 - x_1)^2\,\sigma_2^2 + 2\,x_1(1 - x_1)\sigma_{1,2} \qquad (1.15)$$

Portföyün riskini minimize edecek x_1 portföy ağırlığının elde edilebilmesi için portföy varyansının x_1 portföy ağırlığına göre birinci dereceden kısmi türevi hesaplanarak sıfıra eşitlenmelidir.

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial x_1} = 2x_1\sigma_1^2 + 2(1 - x_1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{1,2} - 4x_1\sigma_{1,2} = 0 \qquad (1.16)$$

[25] J. L. Teall, I. Hasan, **A.g.e.**, s.110

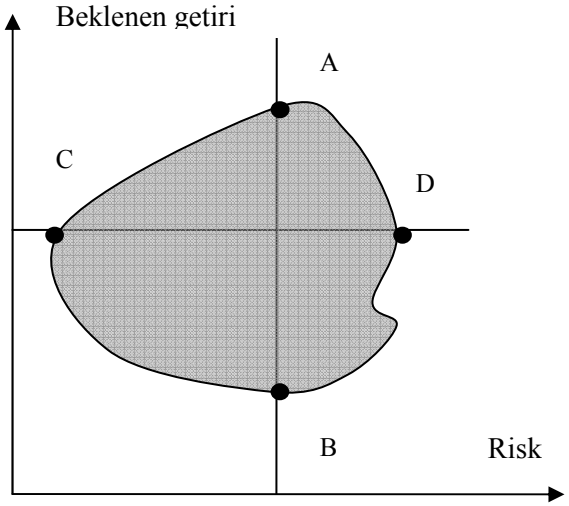
Portföy riskini minimize eden optimal x_1 portföy ağırlığı, (1.16) ile verilen ifade x_1 değişkeninin eşitliğin bir tarafında bırakılması ile aşağıda verilen biçimde elde edilir.

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}} \tag{1.17}$$

1.2.3. Etkin Sınırın Elde Edilmesi

Markowitz'in geliştirdiği etkin sınır kuramı, yatırımcının belirli bir getiri düzeyinde en düşük riskli veya belirli bir risk düzeyinde en yüksek getirili portföyü tercih edeceği varsayımı üzerine kurulmuştur. O halde yatırımcı portföy oluşturma aşamasında, yukarıda verilen koşulu göz önüne bulundurarak tercihlerini gerçekleştirmelidir. Herhangi bir kısıtlama olmaksızın tüm portföy kombinasyonlarının beklenen getiri ve risk koordinat düzleminde oluşturduğu serpilme diyagramı aşağıda verilmektedir.

Şekil 1.4 Beklenen getiri-Risk düzleminde farklı portföy alternatifleri

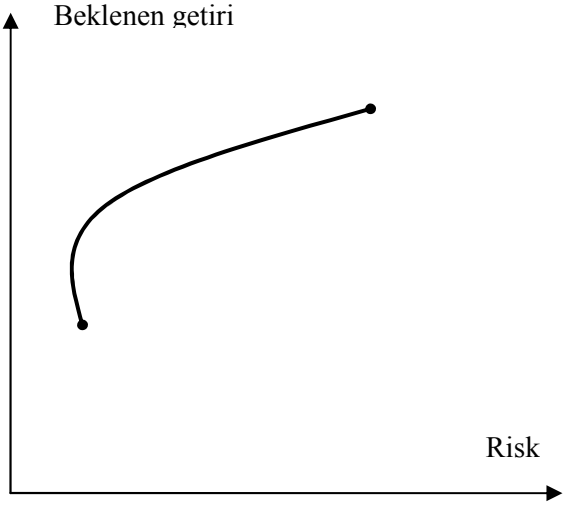


Şekil 1.4 'te verilen A, B, C ve D noktaları, beklenen getiri-risk düzleminde yer alan farklı portföyleri temsil etmektedir. Yatay ve dikey eksene çizilen dik çizgiler ise bu portföyleri beklenen getiri ve risk düzeylerinde karşılaştırma imkanı sağlamak amacıyla çizilmiştir.

Örneğin A ve B portföyleri incelenecek olursa, her iki portföyün de aynı risk düzeyinde oldukları görülür. Buna rağmen A portföyü, aynı risk düzeyinde B portföyünden daha yüksek getiri sağladığından, yatırımcı tarafından tercih edilecektir. Benzer biçimde, C ve D portföyleri karşılaştırıldıklarında, her iki portföyün de aynı getiri oranını sağladıkları görülür. Buna rağmen C portföyü, aynı getiri düzeyinde D portföyüne göre yatırımcıya daha düşük risk imkanı sağlamaktadır.

Belirli risk seviyesinde daha yüksek getiri ve belirli getiri seviyesinde daha düşük risk sağladıklarından dolayı A ve C portföyleri etkin olarak adlandırılırlar.[26] Bu nedenle de yatırımcı tarafından tercih edilecektir. Bu tip karşılaştırmaların mümkün tüm portföyler için yapılması neticesinde, etkin portföyler kümesi olarak adlandırılan etkin sınır aşağıda verilen biçimde elde edilir.[27]

Şekil 1.5 Etkin Sınır



Etkin sınır eğrisinin önemli bir özelliği konkav olmasıdır. Etkin sınırın konkav olması, fayda fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden türevlerinin işaretlerinin bir sonucudur. Dolayısıyla, etkin sınırın herhangi bir bölümü dahi konveks olmamalıdır. Bu noktaya kadar, portföyü oluşturan finansal varlıkların portföy ağırlıklarının pozitif olduğu varsayılmıştı. Ancak açığa satış olması halinde portföy ağırlıkları negatif olacaktır. Açığa satış, bir yatırımcının sahip olmadığı bir

[26] J. Eichberger, I. R. Harper, **A.g.e.**, s.80

[27] M. Capinski, T. Zastawniak, **A.g.e.**, s.116

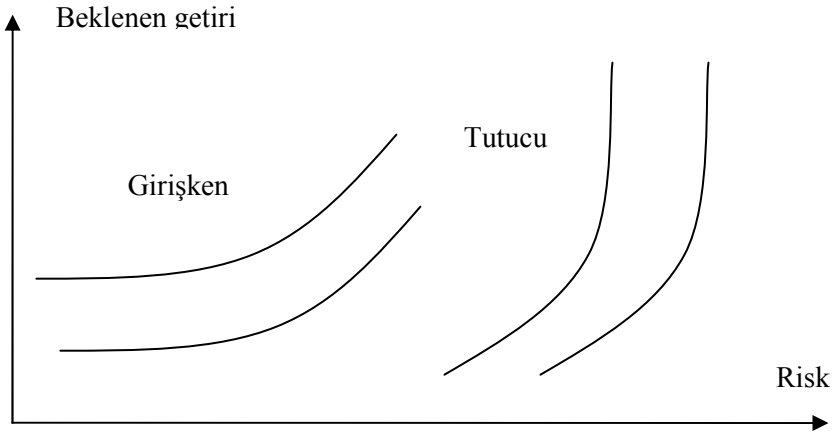
finansal varlığı, daha sonra ucuza satın almak umuduyla bugünden satılması işlemidir.[28] Açığa satış bir anlamda yatırımcının borçlanarak ek kaynak elde etmesi ve bu ek kaynağı diğer hisse senetlerinin finanse edilmesinde kullanılmaktadır.

1.2.4. Fayda Fonksiyonu ve Kayıtsızlık Eğrileri

Kayıtsızlık eğrileri, yatırımcının riskten kaçınma derecesi ile ilgilidir. Bu eğriler, yatırımcının bir birim daha fazla riske katlanması neticesinde beklediği ek getiri oranını temsil etmektedirler. Yatırımcıların etkin sınır üzerindeki portföylerden hangisini tercih edeceği, yatırımcının riske göre tutumuna bağlı olarak değişkenlik göstermektedir.

Risk tercihlerine göre yatırımcılar, riske tamamen duyarlı, riske tamamen duyarsız, tutucu ve girişken olarak dört ayrı grupta toplanabilir. Bu dört grupta toplanan yatırımcıların fayda fonksiyonları karakteristikleri birbirlerinden farklılık göstermektedir. Farklı eğimlere sahip kayıtsızlık eğrileri karşılaştırıldığında, düşük eğimli kayıtsızlık eğrisine sahip bir yatırımcının riske karşı daha az duyarlı olduğu, daha yüksek eğimli kayıtsızlık eğrisine sahip bir yatırımcının ise riske karşı daha duyarlı olduğu söylenebilir.[29]Bunun yanında, riske karşı tamamen duyarsız yatırımcılar için kayıtsızlık eğrilerinin risk eksenine paralel ve riske karşı tamamen duyarlı yatırımcıların beklenen getiri eksenine paralel oldukları söylenebilir.

Şekil 1.6 Farklı tipte yatırımcılar için kayıtsızlık eğrileri



[28] C.Sarıkamış, **A.g.e.**, s.98

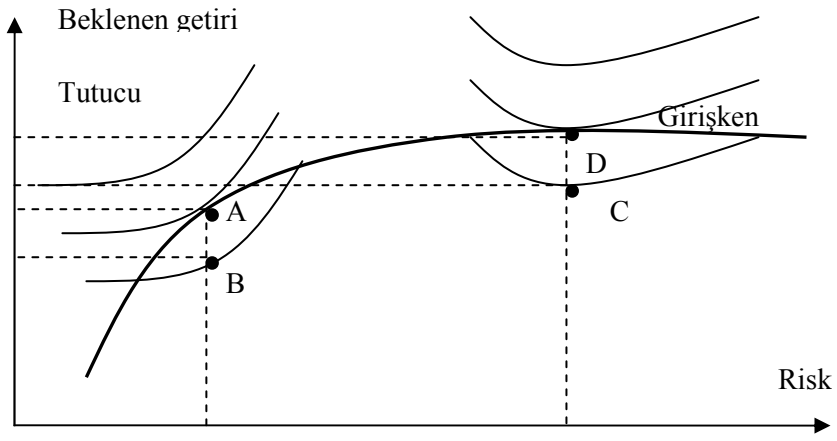
[29] E. Altay, **A.g.e.**, s29

Şekil 1.6'da farklı risk alma derecelerine sahip yatırımcılar için kayıtsızlık eğrileri verilmektedir. Dikkat edilecek olursa, grafikte girişken olarak nitelendirilen yatırımcılara ait kayıtsızlık eğrilerinin eğimi, tutucu olarak nitelendirilen yatırımcılara ait kayıtsızlık eğrilerinin eğiminden büyüktür. Bunun sonucu olarak da, tutucu olarak nitelendirilen yatırımcıların, bir birim daha ek risk almak için daha fazla getiri oranı artışı bekledikleri söylenebilir.

1.2.5. Optimal Portföyün Elde Edilmesi

Etkin sınırın ve farklı yatırımcı alternatifleri için kayıtsızlık eğrilerinin elde edilmesi ile birlikte optimal portföylerin belirlenmesi için gerekli argümanlar elde edilmiş olur.[30] Yatırımcılar olanaklar dahilinde ulaşılabilecek en yüksek faydayı sağlayacakları portföye yatırım yapacakları için, mümkün olduğunca üstteki kayıtsızlık eğrisine ulaşmaya çalışacaklardır.[31] Bu nedenle herhangi bir yatırımcı için optimal portföy, yatırımcıya ait kayıtsızlık eğrilerinin etkin sınıra teğet oldukları nokta olarak tanımlanmaktadır.[32]

Şekil 1.7 Optimal portföyün elde edilmesi



[30] J. Weston, E. Brigham, **A.g.e.**, s.371

[31] E. Altay, **A.g.e.**, s29

[32] S. Das, **A.g.e.**, s.442

Şekil 1.7 incelenecek olursa, daha dik eğimli kayıtsızlık eğrilerine sahip olan yatırımcı girişken, diğer yatırımcı ise tutucu olarak adlandırıldığı görülür. Tutucu olarak nitelendirilen yatırımcının kayıtsızlık eğrileri göz önüne alındığında A ve B gibi iki farklı portföyün varlığından söz edilebilir. Ancak aynı risk seviyesinde olmalarına rağmen, A portföyünün beklenen getirisinin B portföyünün beklenen getirisinden daha büyük olduğu açıktır. Benzer karşılaştırmaların sayısının arttırılması mümkündür. Sonuç olarak yatırımcının beklenen faydasını maksimize eden portföy, kayıtsızlık eğrisi ile etkin sınırın teğet olduğu noktada gerçekleşen A portföyüdür.

Bu noktaya kadar sadece riskli varlıklardan oluşan portföyler dikkate alınmıştır. Ancak portföye risksiz varlık eklendiğinde modelde meydana gelecek değişiklikler incelenmelidir. Riskli varlık, getirisinin yatırım dönemi içinde oluşacak çeşitli durumlara göre çeşitlilik gösterdiği, farklı durumlar karşısında gerçekleşecek getiri oranlarının değişiklikler gösterdiği varlıklardır.[33] Risksiz varlık ise getirisi kesin olarak bilinen yatırım aracıdır. Getiri kesin olarak bilindiğinden dolayı, standart sapma sıfıra eşit olmaktadır.[34] Risksiz yatırım aracına hazine bonosu örnek olarak verilebilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta yatırım dönemi ile hazine bonosunun vadesinin birbiri ile aynı olmasıdır.

Devletin hazine bonosu ihracı ile borçlanma sonucu ortaya çıkan yükümlülüklerini yerine getirememesi söz konusu olamayacağından hazine bonosunun risksiz varlık olarak kabul edilmesi doğaldır. Ancak risksiz varlığın, riskli varlıklar ile aynı portföyde bulunması kovaryans ile ifade edilen ortak değişimin yeniden incelenmesini zorunlu kılmaktadır. Bu incelemeyi yapabilmek amacıyla öncelikle risksiz varlığın getiri oranını R_f ile gösterelim.

(1.9) ile verilen kovaryans ölçüsü dikkate alınacak olursa, portföy içerisindeki menkul kıymetlerin ikişer ikişer kendi ortalamalarından farklarının çarpımlarının beklenen değerinin hesaplandığı görülmektedir. Risksiz varlığın getirisi göz önüne alınan dönem içerisinde değişmediğinden, kendi ortalamasından farkı sıfıra eşit olacaktır. Bu ise risksiz varlık ile tüm riskli varlıkların kovaryans katsayısının sıfıra

[33] E. Altay, **A.g.e.**, s.46

[34] E. Elton, M. Gruber, **A.g.e.**, s.85

eşit olması sonucunu doğuracaktır. Hatırlanacak olursa iki varlıktan oluşan portföy beklenen getiri ve varyansı aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$$
$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{1,2} \quad (1.18)$$

Portföy ağırlıkları toplamı bire eşit olduğundan, ikinci varlığın portföy içerisindeki ağırlığını temsil eden x_2 ifadesi yerine, onun eşiti olan $1\text{-}x_1$ ifadesi yazılabilir.

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + (1 - x_1)E(R_2)$$
$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2 + 2x_1(1 - x_1)\sigma_{1,2} \quad (1.19)$$

İkinci varlığın risksiz varlık olması halinde (1.19) ile verilen beklenen getiri ve varyans ifadesi aşağıda verilen forma indirgenebilecektir. Hatırlanacağı üzere ikinci varlığın risksiz varlık olması halinde, ikinci varlığın varyansını temsil eden σ_2^2 ifadesi ve iki varlık arasındaki ortak değişimi temsil eden $\sigma_{1,2}$ ifadesi sıfıra eşit olmaktadır.

$$E(R_p) = x_1 E(R_1) + (1 - x_1)R_f$$
$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 \quad (1.20)$$

(1.20) ifadesinin ikinci satırında yer alan varyans ifadesi, her iki tarafın karekökü alınarak, portföydeki birinci varlığın ağırlığını verecek biçimde düzenlenebilir. ($x_1=\sigma_p/\sigma_1$) Bu durumda portföyün beklenen getirisi aşağıda verilen formda düzenlenecektir.

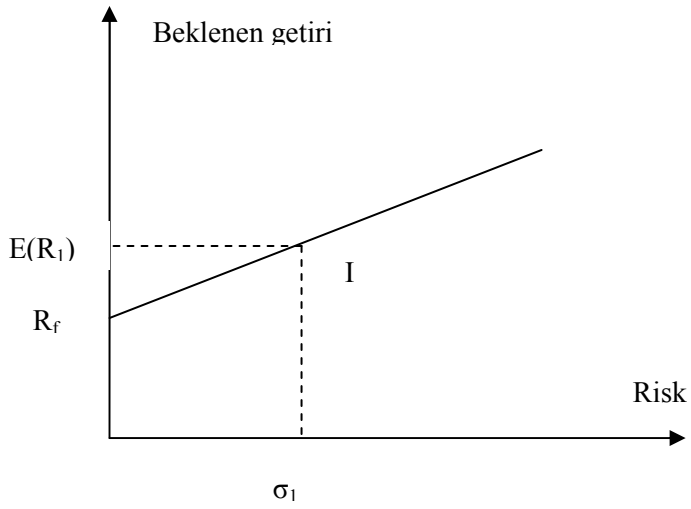
$$E(R_p) = \frac{\sigma_p}{\sigma_1} E(R_1) + (1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_1})R_f \quad (1.21)$$

(1.21) ifadesi bir riskli ve bir risksiz varlıktan oluşan portföyün beklenen getiri oranını tanımlamaktadır. Ancak daha uygun bir gruplandırma ile bir doğru denklemini verir hale dönüştürülebilir ki bu sonuç daha ilginçtir.

$$E(R_p) = R_f + \left(\frac{E(R_1) - R_f}{\sigma_1}\right)\sigma_p \quad (1.22)$$

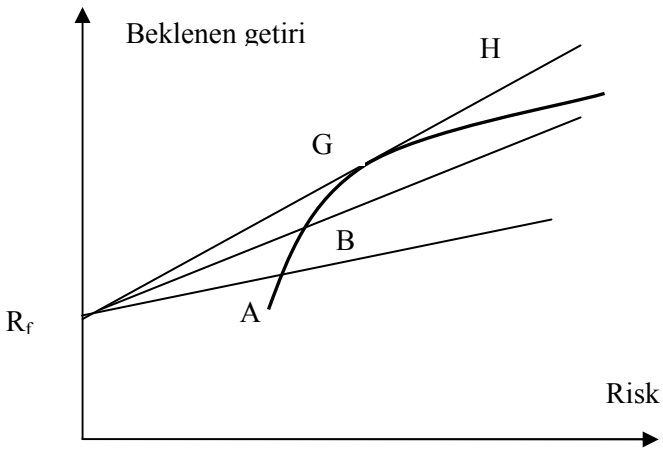
(1.22) ile verilen doğru, beklenen getiri-risk düzleminde mümkün tüm risksiz borç verme veya borçlanma kombinasyonlarını göstermektedir. Grafikte doğrunun getiri eksenini kestiği nokta R_f olmakla birlikte doğrunun eğiminin $(E(R_1)-R_f)/\sigma_1$ olduğu söylenebilir.

Şekil 1.8 Risksiz varlık ile I portföyünün birleşimi



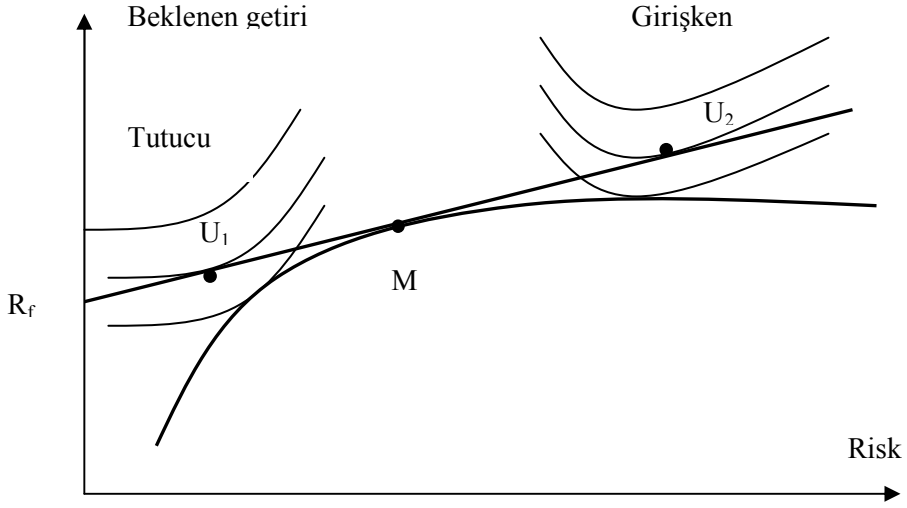
Şekil 1.8 ile, I portföyü ile risksiz varlığın tüm kombinasyonları gösterilmektedir. Herhangi bir portföy ile risksiz varlığın birleşimi bir doğru meydana getirmektedir. R_fI doğru parçası üzerinde yer alan her nokta risksiz varlık ile I portföyünün farklı oranlardaki bileşimini gösterirken, I noktasının sağında kalan her nokta, borçlanarak elde edilen tutar ile I portföyüne yapılan yatırımı temsil etmektedir. Yukarıda bahsedilen I portföyünün herhangi bir özelliği bulunmamaktadır. Dolayısıyla I portföyü yerine farklı beklenen getiri-risk düzeyinde portföyler de konulabilir.

Şekil 1.9 Risksiz varlığın farklı riskli portföylerle birleşimi



Bunun yanında Markowitz teorisi göz önünde bulundurulacak olursa, risksiz varlıkla riskli varlıkların birleşiminden oluşan portföy, risksiz varlıkla etkin sınırın üzerindeki bir portföyün birleşimi olmalıdır. R_fA doğrusu A riskli portföyü ile risksiz varlığın birleşimi sonucu ortaya çıkan doğruyu ve R_fB doğrusu B riskli portföyü ile risksiz varlığın birleşimi sonucu ortaya çıkan doğruyu temsil etmektedir. Aynı risk seviyesinde daha yüksek getiri sağladığından dolayı R_fB doğrusu üzerindeki kombinasyonların tümü R_fA üzerindekilere tercih edilecektir. Etkin sınır üzerinde yukarıya doğru yapılan kaydırma işlemi neticesinde son olarak, etkin sınıra teğet olan R_fG birleşimi elde edilir. Elde edilen bu yeni etkin sınır sermaye piyasası doğrusu olarak adlandırılır.[35] Yatırımcılar, ellerindeki varlığı riske karşı tutumlarına bağlı olarak R_fG veya GH kısmına yatıracaklardır.

Şekil 1.10 Risksiz varlığın eklenmesi halinde optimum portföy seçimi



Şekil 1.10 ile riske karşı tutumları farklı yatırımcılar için oluşan optimum portföyler gösterilmektedir. Tutucu olarak adlandırılan, riske karşı daha duyarlı yatırımcılar için optimum portföy daha düşük risk seviyesinde elde edilirken, girişken olarak adlandırılan riske karşı duyarsız yatırımcılar için optimum portföy daha yüksek risk seviyesinde elde edilmektedir.

[35] E.Altay, **A.g.e.**, s.58

Optimum portföylerin yatırımcıya ait kayıtsızlık eğrilerinin sermaye piyasası doğrusuna teğet olduğu noktada gerçekleşmesinin sebebi, bu noktada en yüksek beklenen faydanın sağlanmasıdır. Bu noktanın altında, etkin sınır üzerinde yer alan noktalar için aynı risk seviyesinde daha düşük getiri elde edilirken, bu noktadan daha yukarıda daha yüksek beklenen fayda elde edilmesine karşılık böyle bir portföy oluşturulması mümkün değildir.

Sermaye piyasası doğrusunun Markowitz etkin sınırına teğet olduğu M noktasının temsil ettiği portföy ayrı bir öneme sahiptir ve pazar portföyü olarak adlandırılır. Etkin yatırımcılar, portföylerinde bulundurdukları riskli yatırım tutarını yalnızca bu varlığa yatırmaktadırlar.[36]

[36] E.Altay, **A.g.e.**, s.64

İKİNCİ BÖLÜM

ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ

2.1. ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ TEMEL KAVRAMLAR

Portföy seçimi, varlığın belirli yatırım araçları arasında en uygun biçimde dağıtılması olarak adlandırılabilir. Portföy seçimi Harry Markowitz'in[37] 1952 yılında geliştirdiği ortalama-varyans formülasyonu ile durağan portföy seçimi probleminin çözümü için temel oluşturmuş ve modern finans teorisinin de başlangıcı ve diğer bir çok teorinin de dayanak noktası olarak kabul edilmiştir.[38] Markowitz ile birlikte risk kavramı, bir varlığın getiri oranının standart sapması veya varyansı olarak tanımlanmaya başlamıştır.[39] Markowitz, bu çalışması ile birlikte, yapılan yatırımın beklenen getirisi optimize edilirken, riskin çeşitlendirme yoluyla düşük tutulmasını sağlamış ve bu sayede uzun yıllar bir çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu çalışması ile 1990 yılı Nobel ödülüne layık görülmüştür.[40]

Markowitz'in tek dönemli modeli ile seçilen portföy ağırlıklarının zaman içerisinde sabit kalıp kalmayacağı veya çok dönemli optimum yatırım kararları ile tek dönemli yatırım kararları arasındaki ilişkinin varlığı yatırımcılar tarafından sıklıkla sorulmuştur.[41] Markowitz ortalama-varyans portföy seçimi, finans teorisinde bu kadar önemli bir yere sahip olmasına rağmen, uzun dönemli yatırımcıların taleplerini karşılayamaması ve işlem maliyetlerini göz önünde bulundurmaması sebebiyle dinamik portföy seçimi problemlerine cevap verememektedir.

---

[37] Harry Markowitz, "Portfolio Selection", **Journal of Finance,** Vol.7. 1952, s.77-91

[38] David Yao, Hangin Zhang, Xun Yu Zhou, **Stochastic Modelling and Optimization,** Springer-Verlag New York Inc., USA, 2003, s. 279

[39] Erdinç Altay,**Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**, Derin Yayınları:40, İstanbul, 2004, s.13

[40] Nieves Hicks Pedron, **Model-Based Asset Liability Management: A Comparative Study,** Cambridge Üniversitesi, Doktora Tezi, 1998, s. 2

[41] Richard Oberuc, **Dynamic Portfolio Theory and Management,** Mc Graw Hill, USA, 2004, s.219

Dinamik portföy seçimi üzerine yapılan ilk çalışmalarda, tek periyotlu portföy seçimi probleminin dönem sayısının arttırılarak yatırım ufkunun genişletilmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Çok dönemli portföy seçim probleminin analitik olarak çözümü üzerine yapılan çalışmaların birçoğunda araç olarak dinamik programlama kullanılmıştır.

Durağan portföy seçim probleminin analizi ile yola çıkan Mossin[42], dönemsel getiri oranını temel alarak dinamik programlama yaklaşımı ile modeli çok dönemli portföy seçimi problemine uyarlamıştır. Mossin, çok dönemli portföy seçimi probleminde modelin doğru bir biçimde kurulabilmesi için yatırımcının dönemsel toplam varlığının göz önünde bulundurulması gerekliliğini vurgulamıştır. Belirli bir varlık miktarının farklı hisse senetlerine yatırılması ile başlayan süreçte ikinci dönemde geçerli olacak portföy stratejisi gerçekleşen varlık seviyesi göz önünde bulundurularak kararlaştırılmaktadır.

Aynı zamanda, her bir portföy stratejisi dizisinin bir önceki dönemde alınan yatırım kararı ve gelecekteki olasılık dağılımlarına bağlı olduğunun altını çizmektedir. Son döneme ulaşılması ile birlikte portföy stratejisi, klasik tek dönemli ortalama-varyans portföy seçim modeli ile elde edilmektedir. Farklı periyotlardaki dönemsel getiri oranlarının istatistiksel olarak bağımsız olması ve işlem maliyetlerinin göz ardı edilmesi halinde, süreç geriye doğru çalıştırılarak ilk dönem için optimum portföy stratejisi elde edilmektedir.

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi modelinin formülasyonu ve çözümü konusunda Samuelson[43], kişilerin uzun vadede bekledikleri faydayı maksimize edecek biçimde yatırım ve harcama kararlarını modellemiştir. Samuelson, bulunulan noktada bütün bir hayat boyu harcama ve yatırım için verilecek kararların uzun vadede riski arttırıcı herhangi bir etkisi bulunmadığını göstermiştir.

Daha sonra bu çalışma Merton[44] tarafından sürekli-zamanlı tüketim ve yatırım kararlarının alınabildiği biçimde geliştirilmiştir. Samuelson tarafından geliştirilen çok dönemli yaklaşımda, ardışık olarak her dönem için yatırım ve tüketim

---

[42] J. Mossin, "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", **Journal of Business,** Vol: 41 No.2, 1968, s. 215-229

[43] P.A. Samuelson, "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming" , **The Review of Economics and Statistics,** Vol: 41 No.3, 1969, s. 239-246

[44] Robert C. Merton, "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case", **Reviews of Economical Statististics ,** Vol:51 ,1969, s.247-257

kararlarının alınabildiği stokastik programlama problemi türetilmiştir. Model optimal kararların başlangıç yatırımının bir fonksiyonu biçiminde elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Oluşturulan model çözülerek her dönem için riskli ve risksiz varlığa ne kadar yatırım yapılacağı ve her dönem için optimum tüketim miktarı elde edilebilmektedir.

Chen, Jen ve Zionts[45] değişen iç ve dış faktörlere bağlı olarak portföy ağırlıklarının dönemsel olarak yeniden gözden geçirildiği bir yaklaşım ortaya koymuşlardır. Her bir dönem piyasaya yeni bir bilginin ulaşması ile son bulmaktadır. Modelin işlerliği, yeni bilginin maliyetinin olmaması ve işlem maliyetlerinin sıfır olması varsayımlarına dayanmaktadır. Yazarlara göre portföy ağırlıklarının değiştirilmesine, gözden geçirmenin marjinal faydası gözden geçirmenin marjinal maliyetine eşit oluncaya dek devam edilebilmektedir.

Durağan portföy seçiminde olduğu gibi, çok dönemli portföy seçiminde de işlem maliyetlerinin optimum portföy stratejisinin belirlenmesinde büyük etkileri olmaktadır. Dumas ve Luciano[46] tarafından gerçekleştirilen çalışmada işlem maliyetlerinin optimum çözüme etkileri irdelenmiştir. Bu çalışmada belirli bir noktaya kadar elindeki varlığı harcamayan bir yatırımcı göz önüne alınmıştır. Yatırımcı o noktaya ulaşıldığında elindeki tüm varlığı yatırım kararlarına dönüştürerek beklenen faydayı maksimize etmektedir. Tüketimin geciktirilerek portföy stratejisine dönüştürülmesinin ertelenmesinde temel hedef mümkün olduğunda durağan bir yatırım kararı elde etmedir. Aynı zamanda çalışmada sürekli-zamanlı model için de çözüm önerisi geliştirilerek her iki durumda meydana gelen yatırım kararları karşılaştırılmaktadır.

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi konusunda yapılan bir diğer çalışmada Elton ve Gruber[47], çok dönemli getiri oranlarının beklenen faydasını gelecekteki çok dönemli getiri oranlarının geometrik ortalaması ile karşılaştırmışlardır. Yine belirli bir noktada yatırımcının beklenen faydasının maksimize edilmesi hedeflenmiş ve getirilerin belirli bir dağılıma bağlı olarak

[45] A. Chen, F. Jen, S. Zionts, "The Optimal Portfolio Revision Policy" , **Journal of Business** , Vol:44 No.1, 1971, s. 51-61

[46] B. Dumas, E. Luciano, "An Exact Solution to Dynamic Portfolio Choice under Transaction Costs" , **Journal of Finance** , Vol:46 No.2 , 1991, s. 577-595

[47] E. J. Elton, M. J. Gruber, "On the Optimality of Some Multiperiod Portfolio Selection Criteria" , **Journal of Business,** Vol:47 No. 2, 1974, s.231-243

değiştiği ve değişmediği durumlar için beklenen fayda incelenmiştir. Optimalliğin elde edilebilmesi için geometrik ortalamanın maksimum değeri ile nihai varlığın beklenen faydası birbirine yakınsaması gerekliliği sonucuna ulaşılmıştır.

Hakansson[48] ise durağan ortalama-varyans portföy seçiminin çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimine genişletilmesini, herhangi bir yatırımcının çok dönemli beklenen ortalama bileşik getiri oranını maksimize etmek istemesi halinde bu amaç ile tutarlı tek bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyonunun bulunduğunu ispatlayarak genelleştirmiştir. Elde edilen fayda fonksiyonu monoton artan olmakla birlikte, tek periyotlu yaklaşımda ortalama-varyans etkin bir portföy oluşturmamaktadır. Hakansson çalışmasında riskin dağıtılmasının çok dönemli optimum sonuca ulaşmada bir zorunluluk olduğunu vurgulamıştır.

Son olarak Li ve Ng[49] yine dinamik programlama yaklaşımını kullanarak ve dönemsel getiri oranlarının istatistiksel olarak bağımsız olduğu varsayımı altında çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi problemi için bir analitik çözüm elde etmiş ve etkin sınır elde edilmiştir. Li ve Ng, ortalama-varyans formulasyonunu çözümü daha kolay olan bir yardımcı probleme dönüştürerek her bir dönem için optimum portföy stratejisi elde etmektedir. Öncelikle riskli varlıklardan oluşan portföy göz önüne alınırken, portföye risksiz varlığın da eklenmesi ile birlikte problem daha genelleştirilmiş bir hale dönüşmektedir. Bu çalışma kapsamında da Li ve Ng tarafından geliştirilen dinamik programlama yaklaşımı benimseneceğinden modelin ayrıntıları takip eden bölümlerde açıklanacaktır.

2.2. ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİM MODELİNİN OLUŞTURULMASI

Çok dönemli portföy seçiminde temel amaç yatırımcının uzun vadede yatırımdan beklediği faydayı maksimize edecek yatırım stratejisi dizisini belirlemektir. Başka bir deyişle, dönemsel olarak her bir hisse senedinden elde ne

[48] N.H. Hakansson, "Multiperiod Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice", **Journal of Finance,** Vol:26 No.4 , 1971, s. 857-884

[49] Duan Li, Wan-Lung Ng, "Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-Variance Formulation", **Mathematical Finance,** Vol:10 No.3 ,2000, s.387-406

kadar bulundurulacağının hesaplanmasıdır. Eldeki varlığın dönemsel olarak hisse senetlerine atanmasında modelin yaklaşımı, yatırımcının talepleri doğrultusunda, varyansın minimize edilmesi, beklenen getirinin maksimize edilmesi veya beklenen getiri oranı ve varyansın lineer kombinasyonunun maksimize edilmesi olarak üç farklı biçimde ele alınabilmektedir.[50]

Bu bölümde çok dönemli ortalama-varyans formülasyonu açıklanarak modelin tek periyotlu durağan Markowitz ortalama-varyans portföy seçim modeli ile karşılaştırılması üzerinde durulacaktır. Bu amaçla (n+1) riskli hisse senedinden oluşan bir sermaye piyasası göz önüne alınarak, her bir hisse senedinin dönemsel getiri oranının rassal olduğu varsayılmaktadır.

Başlangıç varlığı x_0 olarak kabul edilerek (n+1) riskli hisse senedine atanacaktır. Mevcut varlık birbirini takip eden (T-1) dönem süresince (n+1) hisse senedine kararlaştırılan portföy stratejisi uyarınca dağıtılacaktır. Belirtilen (n+1) adet hisse senedinin dönemsel getiri oranı, e_t^i i.inci hisse senedi için t anında rassal getiri oranı olmak üzere $\mathbf{e_t} = \left[e_t^0, e_t^1, \cdots, e_t^n\right]'$ biçiminde tanımlanmaktadır. Hisse senetlerinin dönemsel ortalama getirileri birbirinden bağımsız olmak üzere $E(\mathbf{e_t}) = \left[E(e_t^0), E(e_t^1), \cdots, E(e_t^n)\right]'$ olarak gösterilebilir. Benzer biçimde kovaryans matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{e_t}) = \begin{bmatrix} \sigma_{t,00} & \cdots & \sigma_{t,0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{t,0n} & \cdots & \sigma_{t,nn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

x_t , t.inci dönemin başlangıcında yatırımcının toplam varlığı olmak üzere, $u_t^i \quad ; i = 1,2,\cdots,n$ i.inci hisse senedine t.inci dönemin başlangıcında yatırılan varlığın miktarını temsil etmektedir. n adet hisse senedine ayrılan varlık miktarı böylelikle tanımlanmış olmaktadır. Sıfır indeksi ile tanımlanan diğer hisse senedine t.inci dönem başlangıcında ayrılan miktar ise,

$$u_t^0 = x_t - \sum_{i=1}^{n} u_t^i \tag{2.2}$$

[50] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.e.,** s.388

şeklinde tanımlanır. Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi ile aranan, $\mathbf{u_t} = \left[u_t^0, u_t^1, \cdots, u_t^n\right]'$; $t = 0,1,2,\cdots,T-1$ ile tanımlanan yatırım stratejisidir.Bu yatırım stratejisi iki farklı matematiksel formda gösterilebilir.

(i) Birinci formda, varyans ($\mathrm{Var}(x_T)$) önceden belirlenen bir seviyeyi geçmeyecek biçimde nihai varlığın beklenen değerinin ($E(x_T)$) maksimize edilmesi söz konusudur. Model aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.[51]

Problem 1(σ) : $\max E(x_T)$

$$\mathrm{Var}(x_T) \le \sigma$$

$$x_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} e_t^i u_t^i + \left(x_t - \sum_{i=1}^{n} u_t^i\right) e_t^0 \qquad (2.3)$$

$$= e_t^0 x_t + \mathbf{P_t' u_t} \qquad t = 0,1,2,\cdots,T-1$$

(ii) İkinci formda, nihai varlığın beklenen değeri ($E(x_T)$) önceden belirlenen belirli bir seviyeden daha küçük olmayacak biçimde nihai varlığın varyansının ($\mathrm{Var}(x_T)$) minimize edilmesi söz konusudur. Model aşağıdaki gibi tanımlanabilir.[52]

Problem 2($\in$) : $\min \mathrm{Var}(x_T)$

$$E(x_T) \ge \in$$

$$x_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} e_t^i u_t^i + u_t^0 e_t^0 \qquad (2.4)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_t^i u_t^i + \left(x_t - \sum_{i=1}^{n} u_t^i\right) e_t^0$$

$$= e_t^0 x_t + \mathbf{P_t' u_t} \qquad t = 0,1,2,\cdots,T-1$$

Her iki durumda da $\mathbf{P_t}$ simgesi ile gösterilen vektör, risksiz faiz oranını aşan getiri oranını temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{P_t} = \left[P_t^1, P_t^2, \cdots, P_t^n\right]' = \left[(e_t^1 - e_t^0), (e_t^2 - e_t^0), \cdots, (e_t^n - e_t^0)\right]' \qquad (2.5)$$

[51] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.g.e.,** s.388
[52] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.e.,** s.390

Bu noktada, $E(\mathbf{e_t e_t'}) = Cov(\mathbf{e_t}) + E(\mathbf{e_t})E(\mathbf{e_t'})$ özelliği dikkate alınarak $E(\mathbf{e_t e_t'})$ matrisi hesaplanabilir. Her dönem boyunca pozitif definitlik koşulu göz önünde bulundurulmalıdır. Pozitif definitlik aşağıda belirtildiği biçimde tanımlanabilir.

$$E(\mathbf{e_t e_t'}) = \begin{bmatrix} E((e_t^0)^2) & E(e_t^0 e_t^1) & \cdots & E(e_t^0 e_t^n) \\ E(e_t^1 e_t^0) & E((e_t^1)^2) & \cdots & E(e_t^1 e_t^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E(e_t^n e_t^0) & E(e_t^n e_t^1) & \cdots & E((e_t^n)^2) \end{bmatrix} > 0 \qquad \forall t = 0,1,\cdots,T-1 \qquad (2.6)$$

(2.5) ve (2.6) numaralı eşitlikler bir arada düşünülecek olursa (2.6) eşitliği aşağıdaki gibi düzenlenebilir. Bu ise $E(\mathbf{P_t P_t'})>0$ sonucuna varmamıza yol açacaktır.

$$\begin{bmatrix} E((e_t^0)^2) & E(e_t^0 \mathbf{P_t'}) \\ E(e_t^0 \mathbf{P_t}) & E(\mathbf{P_t P_t'}) \end{bmatrix} = \qquad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} E(\mathbf{e_t}(\mathbf{e_t})') \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} > 0 \qquad \forall t = 0,1,\cdots,T-1$$

Yukarıda da bahsedildiği üzere (2.7) eşitliğinden $E(\mathbf{P_t P_t'}) > 0$ sonucuna varılır. $E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisi tek dönemli durağan portföy seçiminde yer alan kovaryans matrisinin çok dönemli dinamik portföy seçimindeki karşılığıdır ve zaman içerisinde hisse senetlerinin birbirine bağımlı değişimlerini temsil etmektedir. Yine (2.7) eşitliğinin sol tarafı dikkate alınarak, başka bir deyişle, burada görülen matrisin determinantı alınarak aşağıda verilen sonuca ulaşmak mümkün olacaktır.

$$E((e_t^0)^2) - E(e_t^0 \mathbf{P_t'}) E^{-1}(\mathbf{P_t P_t'}) E(e_t^0 \mathbf{P_t}) > 0 \qquad \forall t = 0,1,\cdots,T-1 \qquad (2.8)$$

Problemin (2.3) veya (2.4) gibi iki farklı formda verilmesinin yatırımcı açısından en önemli faydası, nihai varlığın beklenen değerinin maksimize edilmek istendiği durumlarda yatırımcının karşılayabileceği varyans seviyesinin belirlenmesi

veya riskin minimize edilmek istendiği durumlarda yatırımcının beklediği getiri seviyesinin tespit edilmesine olanak sağlamasıdır.

Yatırımcı açısından, modelin fayda maksimizasyonu yerine bu şekilde kurulması daha kolaydır ve yatırımcının amacının daha subjektif olarak karşılanmasını sağlamaktadır. Ancak bahsedilen formlar dışında çok dönemli ortalama-varyans portföy seçim modeli yatırımcının beklediği faydayı maksimize edecek biçimde aşağıda belirtilen formda da kurulabilir.

$$\begin{aligned} E(w): \quad & \max E(x_T) - w\,\mathrm{Var}(x_T) \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t'\mathbf{u}_t \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Her üç modelin de optimum çözümü bir çok dönemli portföy stratejisidir ve her dönem başında alınması gereken yatırım kararları dizisini temsil etmektedir. Çok dönemli portföy stratejisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \pi &= \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{T-1}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mu_0^1 \\ \mu_0^2 \\ \vdots \\ \mu_0^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_1^1 \\ \mu_1^2 \\ \vdots \\ \mu_1^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu_2^1 \\ \mu_2^2 \\ \vdots \\ \mu_2^n \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \mu_{T-1}^1 \\ \mu_{T-1}^2 \\ \vdots \\ \mu_{T-1}^n \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Başka bir deyişle , π t.inci dönem başında mevcut varlığı (x_t) o dönem boyunca geçerli olacak portföy kararına (μ_t) resmeden yatırım stratejisidir.

$$\begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ \vdots \\ u_t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_t^1(x_t) \\ \mu_t^2(x_t) \\ \vdots \\ \mu_t^n(x_t) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Herhangi bir çok dönemli portföy stratejisinin (π^*) etkin olabilmesi için, $E(x_T)\big|_{\pi} \geq E(x_T)\big|_{\pi^*}$ veya $\mathrm{Var}(x_T)\big|_{\pi} \leq \mathrm{Var}(x_T)\big|_{\pi^*}$ koşullarından en az bir tanesini kesin olarak sağlayan bir portföy stratejisi var olmamalıdır. (2.3) ile verilen problemde yer alan σ veya (2.4) ile verilen problemde yer alan $\in$ parametreleri için değişik değerler verilerek etkin sınırın elde edilmesi mümkün olacaktır.

(2.9) ile verilen modeldeki w parametresi riskten kaçınma katsayısını temsil etmektedir ve pozitif reel sayılar kümesinin bir elemanıdır. Yukarıda bahsedilen π^* etkin portföy stratejisi (2.9) ile verilen problemi çözdüğü gibi, $\sigma = \mathrm{Var}(x_T)\big|_{\pi^*}$ kısıtı altında (2.3) ile verilen problemi ve $\in = \mathrm{E}(x_T)\big|_{\pi^*}$ kısıtı altında (2.4) ile verilen problemi çözmektedir. w parametresi ile temsil edilen riskten kaçınma katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.[53]

$$w = \frac{\partial \mathrm{E}(x_T)}{\partial \mathrm{Var}(x_T)} \tag{2.12}$$

Riskten kaçınma katsayısı, nihai varlığın beklenen değerinin nihai varlığın varyansına göre kısmi türevi alınarak elde edildiğinden dolayı, bir anlamda yatırımcının riske karşı duyarlılığını göstermektedir. Diğer bir deyişle yatırımcının bir birim riske daha katlanmak için beklediği ek getiri oranı olarak da adlandırılabilir. Dolayısıyla yatırımcı hakkında bu bilginin edinilebildiği durumlarda çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi probleminin optimum çözümü, (2.9) ile verilen problemin çözülmesi neticesinde elde edilebilecektir.

2.3. MODELİN ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN ELDE EDİLMESİ

Verilen problemin değişken bir yapıya sahip olması, hangi formda düzenlenirse düzenlensin çözümün dinamik programlama yöntem ile çözümlenebileceğini göstermektedir. Bunun için öncelikle t anında geçerli olan bilgi kümesini I^t olarak tanımlayalım. Bilgi kümesinin zaman ilerledikçe büyüdüğünü vurgulamak için, $I^{t-1} \subset I^t \quad , \forall t$ özelliği vurgulanabilir. Bilgi kümesi iteratif beklenen değer operatörü özelliğini sağlamasına rağmen $\mathrm{E}(\mathrm{E}(\cdot \,|\, I^j) \,|\, I^k) = \mathrm{E}(\cdot \,|\, I^k), \quad \forall j > k$, iteratif varyans operatörü özelliğini $\mathrm{Var}(\mathrm{Var}(\cdot \,|\, I^j) \,|\, I^k) \neq \mathrm{Var}(\cdot \,|\, I^k), \quad \forall j > k$ sağlamamaktadır.

[53] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.g.e.,** s.390

Bu bölümde öncelikle (2.9) ile verilen E(w) maksimizasyonu problemi çözülecektir. Daha sonra fayda fonksiyonu ile beklenen getiri ve risk arasındaki ilişkiler kullanılarak (2.3) ve (2.4) problemleri için de çözüm yöntemi geliştirilecektir. Problemin optimum çözümü için başvurulacak yöntem, çözümü kolaylaştırmak adına bir yardımcı problem inşa etmektir. Yardımcı problem dinamik programlama anlamında ayrılabilir olmalıdır. Primal problem E(w) ile yardımcı problemin çözüm kümeleri arasındaki ilişkiler kullanılarak, yardımcı problemin optimum çözümü araştırılacak ve yardımcı problemin optimum çözümü kullanılarak E(w)' nin optimum çözümü elde edilecektir.

Riskten kaçınma katsayısı w' nin bir fonksiyonu olarak elde edilen fayda fonksiyonunun maksimizasyonu probleminin (E(w)) optimum çözümlerinden oluşan çözüm kümesini $\prod_{E}(w)$ ile gösterelim. Ayrılabilir formdaki yardımcı problem aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\widetilde{U}(\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^2),\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})) = \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}) - w\mathrm{Var}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})$$

$$= \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}) - w\left\{\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^2) - \mathrm{E}^2(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})\right\}$$

$$= -w\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^2) + \left\{w\mathrm{E}^2(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}) + \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})\right\} \qquad (2.13)$$

$\widetilde{U}$ fonksiyonunun $\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^2)$ ve $\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})$ 'nin konveks bir fonksiyonu olduğu açıktır. (2.9) ile verilen problemin çözümü için oluşturulan yardımcı problem aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$(\mathrm{A}(\lambda,w)): \qquad \max \quad \mathrm{E}\left\{-w\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^2 + \lambda\mathrm{x}_{\mathrm{T}}\right\} \qquad (2.14)$$

$$\mathrm{x}_{\mathrm{t+1}} = \mathrm{e}_{\mathrm{t}}^{0}\mathrm{x}_{\mathrm{t}} + \mathbf{P}_{\mathbf{t}}'\mathbf{u}_{\mathbf{t}} \qquad \mathrm{t} = 0,1,2,\cdots,\mathrm{T}-1$$

(2.14) ile verilen yardımcı problemin (2.9) ile verilen modelden farkı dinamik programlama açısından problemin ayrılabilir formda olmasıdır. Problemin amaç fonksiyonu kuadratik formda iken kısıtları lineer haldedir. Benzer biçimde, $(\mathrm{A}(\lambda,w))$ probleminin optimum çözümlerinden oluşan çözüm kümesini $\prod_{\mathrm{A}}(\lambda,w)$ ile gösterilebilir. Yardımcı problemin optimum çözümünün elde

edilmesinde kullanılmak üzere fayda fonksiyonunun nihai varlığın beklenen değerine göre kısmi türevini $d(\pi,\lambda)$ olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} d(\pi,\lambda) &= \frac{\partial \widetilde{U}(E(x_T^2),E(x_T))}{\partial E(x_T)}\bigg|_{\pi} \\ &= 1+2wE(x_T)\big|_{\pi} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Teorem 2.1: (2.9) ile verilen primal problemin optimum çözümü, aynı zamanda (2.14) ile verilen yardımcı problemin de optimum çözümüdür.[54]

$$\pi^* \in \prod_E(w) \quad \Rightarrow \quad \pi^* \in \prod_A(d(\pi^*,w),w)$$

İspat: Çelişki yaratmak amacıyla $\pi^* \notin \prod_A(d(\pi^*,w),w)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki bağıntıyı sağlayacak bir π çözümü bulunabilir.

$$\left[-w, d(\pi^*,w)\right]\begin{bmatrix}E(x_T^2)\\E(x_T)\end{bmatrix}\bigg|_{\pi} > \left[-w, d(\pi^*,w)\right]\begin{bmatrix}E(x_T^2)\\E(x_T)\end{bmatrix}\bigg|_{\pi^*} \tag{2.16}$$

Yukarıda belirtilen çarpımın (2.15) eşitliği ile birarada düşünülmesi neticesinde riskten kaçınma katsayısı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial \widetilde{U}(E(x_T^2),E(x_T))}{\partial E(x_T^2)} = -w \tag{2.17}$$

$\widetilde{U}$ fonksiyonunun $E(x_T^2)$ ve $E(x_T)$'nin konveks bir fonksiyonu olduğundan aşağıda verilen özellik sağlanır.

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(E(x_T^2),E(x_T))\big|_{\pi} \geq\ & \widetilde{U}(E(x_T^2),E(x_T))\big|_{\pi^*} \\ & + \left[-w, d(\pi^*,w)\right]\left\{\begin{bmatrix}E(x_T^2)\\E(x_T)\end{bmatrix}\bigg|_{\pi} - \begin{bmatrix}E(x_T^2)\\E(x_T)\end{bmatrix}\bigg|_{\pi^*}\right\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.16) ve (2.18) bağıntılarının birleştirilmesi neticesinde başlangıç varsayımı $\pi^* \in \prod_E(w)$ ile çelişki yaratan aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\widetilde{U}\left(E(x_T^2),E(x_T)\right)\big|_{\pi} > \widetilde{U}\left(E(x_T^2),E(x_T)\right)\big|_{\pi^*} \tag{2.19}$$

□

[54] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.g.e.,** s.393

Teorem 2.1'den çıkartılan sonuç (2.9) ile verilen problemin çözüm kümesinin, (2.14) ile verilen yardımcı problemin çözüm kümesinin bir alt kümesi olduğudur. Dolayısıyla yatırımcının fayda fonksiyonunun kuadratik olması halinde çözülmesi güç beklenen fayda maksimizasyonu problemi, çözülebilir $A(\lambda, w)$ problemine dönüştürülmüş olacaktır. Yardımcı problemin çözüme ulaştırılabilmesi için $A(\lambda, w)$ probleminin çözümünün hangi koşullar altında E(w) için optimal çok dönemli portföy stratejisi oluşturduğunun belirlenmesi gerekmektedir.[55]

Teorem 2.2: π^* , yardımcı problemin bir optimum çözümü olsun ($\pi^* \in \prod_A(\lambda, w)$). Bu problemin aynı zamanda primal problemin de optimum çözümü olabilmesi için gerek koşul, λ^* 'ın aşağıda verilen formda olmasıdır.

$$\lambda^* = 1 + 2wE(x_T)\big|_{\pi^*}$$

İspat: Verilen herhangi bir riskten kaçınma katsayısı (w) için $A(\lambda, w)$ problemi λ'nın bir fonksiyonu olarak elde edilebilir. Diğer bir deyişle, $\prod_A(\lambda, w)$ içerisindeki her nokta $\{E(x_T^2(\lambda, w)), E(x_T(\lambda, w))\}$ biçiminde λ'nın bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

(2.9) probleminin optimum çözüm kümesi olan $\prod_E(w)$, (2.14) probleminin optimum çözüm kümesi olan $\prod_A(\lambda, w)$'nin alt kümesi ($\prod_E(w) \subset \prod_A(\lambda, w)$) olduğundan, (2.9) ile verilen beklenen faydanın maksimizasyonu problemi aşağıda verilen basit forma indirgenebilir.

$$\begin{aligned}
&\underset{\lambda}{\text{Max}} \quad \tilde{U}(E(x_T^2(\lambda, w)), E(x_T(\lambda, w))) \\
&= \underset{\lambda}{\text{Max}} \quad \{E(x_T(\lambda, w)) - wVar(x_T(\lambda, w))\} \\
&= \underset{\lambda}{\text{Max}} \quad \{E(x_T(\lambda, w)) - w\{E(x_T^2(\lambda, w)) - E^2(x_T(\lambda, w))\}\} \\
&= \underset{\lambda}{\text{Max}} \quad \{-wE(x_T^2(\lambda, w)) + \{wE^2(x_T(\lambda, w)) + E(x_T(\lambda, w))\}\} \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

[55] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.g.e.,** s.394

Optimal λ'nın elde edilmesi amacıyla, λ'ya göre kısmi türevin alınması ile birlikte, birinci derece optimallik koşulu elde edilmiş olur.

$$-w\frac{\partial \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^{2}(\lambda^{*},w))}{\partial\lambda}+\left[1+2w\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})\mid_{\pi^{*}}\right]\frac{\partial \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}(\lambda^{*},w))}{\partial\lambda}=0 \qquad (2.21)$$

Diğer yandan (2.15) eşitliği göz önünde bulundurulması ile birlikte verilen ifade son halini almaktadır.[56]

$$-w\frac{\partial \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^{2}(\lambda^{*},w))}{\partial\lambda}+\lambda^{*}\frac{\partial \mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}}(\lambda^{*},w))}{\partial\lambda}=0 \qquad (2.22)$$

$\left[-w\ ,\ 1+2w\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})\mid_{\pi^{*}}\right]$ sıralı ikilisinin, $\left[-w,\lambda^{*}\right]$ sıralı ikilisine eşit olabilmesi ancak ve ancak $\lambda^{*}=1+2w\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})\mid_{\pi^{*}}$ eşitliğinin sağlanması halinde mümkündür. Böylelikle, $\lambda^{*}=1+2w\mathrm{E}(\mathrm{x}_{\mathrm{T}})\mid_{\pi^{*}}$ sonucu elde edilmiş olur.

□

Yukarıda ispatlanan teoremler ışığında optimal çok dönemli ortalama-varyans portföy stratejisinin elde edilebilmesi için (2.14) ile verilen yardımcı problemin çözümlenmesi gerekmektedir. Yardımcı problemin çözümü dinamik programlama ile gerçekleştirilmektedir. Bunun için (2.14) ile verilen kesikli stokastik kontrol problemini göz önüne alalım. T-1 inci dönemde başlayan dinamik programlama algoritması, x_{T-1} için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.[57]

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\quad \mathrm{J}_{\mathrm{T-1}}(\mathrm{u}_{\mathrm{T-1}}\mid \mathrm{x}_{\mathrm{T-1}})=\text{Max}\quad\left\{-w\mathrm{x}_{\mathrm{T}}^{2}+\lambda\mathrm{x}_{\mathrm{T}}\right\}\\
&=\text{Max}\quad \mathrm{E}\left\{-w\left(\mathrm{e}_{\mathrm{T-1}}\mathrm{x}_{\mathrm{T-1}}+\mathbf{P}'_{\mathbf{T-1}}\mathbf{u}_{\mathbf{T-1}}\right)^{2}+\lambda\left(\mathrm{e}_{\mathrm{T-1}}\mathrm{x}_{\mathrm{T-1}}+\mathbf{P}'_{\mathbf{T-1}}\mathbf{u}_{\mathbf{T-1}}\right)\right\}\\
&=\text{Max}\quad\left\{-w\mathrm{E}\left(\mathrm{e}_{\mathrm{T-1}}^{2}\right)\mathrm{x}_{\mathrm{T-1}}^{2}+\lambda\mathrm{E}\left(\mathrm{e}_{\mathrm{T-1}}\right)\mathrm{x}_{\mathrm{T-1}}\right\}\\
&\quad+\left[\lambda\mathrm{E}(\mathbf{P}'_{\mathbf{T-1}})-2w\mathrm{x}_{\mathrm{T-1}}\mathrm{E}(\mathrm{e}_{\mathrm{T-1}}\mathbf{P}'_{\mathbf{T-1}})\right]\mathbf{u}_{\mathbf{T-1}}-w\mathbf{u}'_{\mathbf{T-1}}\mathrm{E}(\mathbf{P}_{\mathbf{T-1}}\mathbf{P}'_{\mathbf{T-1}})\mathbf{u}_{\mathbf{T-1}}
\end{aligned} \qquad (2.23)$$

[56] R.W. Reid, S.J. Citron, "On Non-inferior Performance Index Vector" , **Journal of Optimization Theory and Applications**, Vol:7 , 1971, s. 11-28

[57] Duan Li, T.F. Chan, W.L. Ng, "Safety-first dynamic portfolio selection" , **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,** Vol: 4 ,1998, s.585-600

(2.23) problemi için optimum portföy stratejisinin bulunabilmesi ancak T-1 inci dönem için portföy stratejisine göre (u_{T-1}) türevinin sıfıra eşitlenerek çözülmesi ile mümkün olacaktır.

$$\frac{dJ_{T-1}(u_{T-1} \mid x_{T-1})}{du_{T-1}} = 0 \tag{2.24}$$

Türev alma işleminin gerçekleştirilmesi ve denklemin u_{T-1} değişkenini ifade edecek biçimde düzenlenmesi ile birlikte T-1 inci dönem için optimal portföy stratejisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{u}^{*}_{\mathbf{T-1}} = E^{-1}\left(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}}\right)\left[E(\mathbf{P_{T-1}})\frac{\lambda}{2w} - E\left(e_{T-1}\mathbf{P_{T-1}}\right)x_{T-1}\right] \tag{2.25}$$

(2.25) ile elde edilen optimum portföy stratejisinin (2.23) ile verilen yatırımcının beklenen faydasının tanımlandığı $J_{T-1}(x_{T-1})$ fonksiyonunda yerine konulması ile birlikte beklenen faydanın maksimum değeri $J^{*}_{T-1}(x_{T-1})$ aşağıdaki biçimde elde edilebilecektir.

$$\begin{aligned} J^{*}_{T-1}(x_{T-1}) = &-w\left[E\left(e^2_{T-1}\right) - E\left(e_{T-1}\mathbf{P'_{T-1}}\right)E^{-1}\left(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}}\right)E\left(e_{T-1}\mathbf{P_{T-1}}\right)\right]x^2_{T-1} \\ &+ \lambda\left[E\left(e_{T-1}\right) - E(\mathbf{P'_{T-1}})E^{-1}\left(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}}\right)E\left(e_{T-1}\mathbf{P_{T-1}}\right)\right]x_{T-1} \\ &+ \frac{\lambda^2}{4w}E\left(\mathbf{P'_{T-1}}\right)E^{-1}\left(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}}\right)E\left(\mathbf{P_{T-1}}\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Beklenen fayda fonksiyonunu daha sade bir biçimde ifade edebilmek amacıyla çeşitli tanımlamaların yapılması mümkündür.

$$w_{T-1} = w\left[E(e^2_{T-1}) - E\left(e_{T-1}\mathbf{P'_{T-1}}\right)E^{-1}\left(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}}\right)E\left(e_{T-1}\mathbf{P_{T-1}}\right)\right] \tag{2.27}$$

$$\lambda_{T-1} = \lambda\left[E\left(e_{T-1}\right) - E(\mathbf{P'_{T-1}})E^{-1}\left(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}}\right)E\left(e_{T-1}\mathbf{P_{T-1}}\right)\right] \tag{2.28}$$

$$\alpha_{T-1} = \frac{\lambda^2}{4w} \tag{2.29}$$

Bu tanımlamalar ile birlikte (2.26) ile tanımlanan yatırımcının beklenen faydasının maksimum değeri ($J^{*}_{T-1}(x_{T-1})$), aşağıdaki gibi daha sade bir formda yazılabilir.

$$J^{*}_{T-1}(x_{T-1}) = -w_{T-1}x^{2}_{T-1} + \lambda_{T-1}x_{T-1} + \alpha_{T-1}E(\mathbf{P'_{T-1}})E^{-1}(\mathbf{P_{T-1}P'_{T-1}})E(\mathbf{P_{T-1}}) \quad (2.30)$$

(2.30) eşitliği nihai döneme gelindiğinde alınan portföy stratejisi kararının optimum değerini temsil etmektedir. Ancak, geriye dönük işlemler gerçekleştirilerek $0 \le t \le T-1$ aralığındaki her dönem için benzer biçimde optimum portföy stratejisini elde etmek mümkün olmaktadır. Dolayısıyla, en genel anlamda $0 \le t \le T-2$ aralığındaki her dönem için optimal portföy stratejisi aşağıdaki biçimde türetilebilir.

$$u^{*}_{t}(x_t) = E^{-1}(\mathbf{P_t P'_t})\left[E(\mathbf{P_t})\frac{\lambda_{t+1}}{2w_{t+1}} - E(e_t\mathbf{P_t})\,x_t \right]$$

$$= E^{-1}(\mathbf{P_t P'_t})E(\mathbf{P_t})\frac{\lambda\prod_{k=t+1}^{T-1}\left(E(e_k) - E(\mathbf{P'_k})E^{-1}(\mathbf{P_k P'_k})E(e_k\mathbf{P_k})\right)}{2w\prod_{k=t+1}^{T-1}\left(E(e_k^2) - E(e_k\mathbf{P'_k})E^{-1}(\mathbf{P_k P'_k})E(e_k\mathbf{P_k})\right)}$$

$$- E^{-1}(\mathbf{P_t P'_t})E(e_t\mathbf{P_t})\,x_t \quad (2.31)$$

(2.31) bağıntısı verilen yardımcı problemin çözümü olmakla birlikte, (2.3), (2.4) ve (2.9) problemleri için de analitik bir çözüm oluşturmaktadır. Böylelikle, uygun tanımlamaların yapılması ile birlikte çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi gerçekleştirilebilir. Bu tanımlamalar uygulamanın daha kolay gerçekleştirilebilmesine olanak sağlamaktadır. Problemin optimum çözümü için yapılan tanımlamalar aşağıdadır.

$$B_t = E(\mathbf{P'_t})E^{-1}(\mathbf{P_t P'_t})E(\mathbf{P_t}) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \quad (2.32)$$

$$A^{1}_{t} = E(e^{0}_{t}) - E(\mathbf{P'_t})E^{-1}(\mathbf{P_t P'_t})E(e^{0}_{t}\mathbf{P_t}) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \quad (2.33)$$

$$A^{2}_{t} = E(e^{0}_{t})^2 - E(e^{0}_{t}\mathbf{P'_t})E^{-1}(\mathbf{P_t P'_t})E(e^{0}_{t}\mathbf{P_t}) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \quad (2.34)$$

$$B_t^1 = B_t \frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{2\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2} \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.35}$$

$$B_t^2 = B_t \left(\frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{2\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2} \right)^2 \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.36}$$

Hesaplanan A_t^1 ve A_t^2 parametreleri bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum B_t^1 ve B_t^2 için geçerli değildir. Dolayısıyla her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Dikkat edilecek olursa son döneme ulaşıldığında $\prod_{k=T}^{T-1} A_k^i$, $i = 1,2$ ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak çarpım sembolü böyle bir özelliğe sahip olmadığından bu mümkün değildir. Bu durumda $\prod_{k=T}^{T-1} A_k^i = 1$, $i = 1,2$ olarak tanımlanarak sorun giderilmektedir.

$$\mu = \prod_{t=0}^{T-1} A_t^1 \tag{2.37}$$

$$\nu = \sum_{t=0}^{T-1} \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1 \right) B_t^1 \tag{2.38}$$

$$\tau = \prod_{t=0}^{T-1} A_t^2 \tag{2.39}$$

$$a = \frac{\nu}{2} - \nu^2 \tag{2.40}$$

$$b = \frac{\mu\nu}{a} \tag{2.41}$$

$$c = \tau - \mu^2 - ab^2 \tag{2.42}$$

Bu tanımlamalar ışığında (2.31) bağıntısı ile verilen dönemsel optimal portföy stratejisi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{*} = -\mathrm{E}^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})\,\mathrm{E}(\mathrm{e}_{\mathrm{t}}^{0}\mathbf{P_t})\,\mathrm{x}_{\mathrm{t}}$$

$$+\frac{1}{2}(\mathrm{bx}_0+\frac{\nu}{2w^{*}\mathrm{a}})\left(\prod_{\mathrm{k=t+1}}^{\mathrm{T-1}}\frac{\mathrm{A_k^1}}{\mathrm{A_k^2}}\right)\mathrm{E}^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})\mathrm{E}(\mathbf{P_t}) \qquad \forall \mathrm{t}=0,1,\cdots,\mathrm{T}-2 \tag{2.43}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{T-1}}^{*} = -\mathrm{E}^{-1}(\mathbf{P_{T-1}P_{T-1}'})\,\mathrm{E}(\mathrm{e}_{\mathrm{T-1}}^{0}\mathbf{P_{T-1}})\,\mathrm{x}_{\mathrm{T-1}}$$

$$+\frac{1}{2}(\mathrm{bx}_0+\frac{\nu}{2w^{*}\mathrm{a}})\;\mathrm{E}^{-1}(\mathbf{P_{T-1}P_{T-1}'})\mathrm{E}(\mathbf{P_{T-1}}) \tag{2.44}$$

Yukarıda verilen (2.43) ve (2.44) çözüm takımlarında yer alan w^{*} parametresi daha önce de bahsedildiği üzere riskten kaçınma katsayısını temsil etmektedir. Fayda fonksiyonu bilindiğine göre türev alma işlemi aracılığıyla bu parametrenin optimum değerini elde etmek de mümkün olacaktır. Riskten kaçınma katsayısının optimum değeri her iki problem tipi için de aşağıda verilmektedir.[58]

$$w^{*}=\begin{cases}\dfrac{\nu}{2\sqrt{\mathrm{a}\left(\sigma-\mathrm{cx}_0^2\right)}} & ;(2.3)\quad \text{için}\\[2ex] \dfrac{\nu^2}{2\mathrm{a}\left[\in-(\mu+\mathrm{b}\nu)\mathrm{x}_0\right]} & ;(2.4)\quad \text{için}\end{cases} \tag{2.45}$$

Son olarak verilen problem için ortalama-varyans etkin sınır verilen tanımlamalar ile birlikte aşağıda verilen biçimde elde edilecektir.

$$\mathrm{Var}(\mathrm{x_T})=\frac{\mathrm{a}}{\nu^2}\left[\mathrm{E}(\mathrm{x_T})-(\mu+\mathrm{b}\nu)\mathrm{x}_0\right]^2+\mathrm{cx}_0^2$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{x_T})\geq(\mu+\mathrm{b}\nu)\,\mathrm{x}_0 \tag{2.46}$$

Etkin sınır verilen herhangi bir risk seviyesi için beklenen getirinin veya tam tersine herhangi bir getiri seviyesine karşılık gelen riskin hesaplanmasında kullanılabilmektedir. Ancak çok dönemli optimal portföy stratejisinin nihai beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mathrm{E}(\mathrm{x_T}(w))=(\mu+\mathrm{b}\nu)\mathrm{x}_0+\frac{\nu^2}{2w\mathrm{a}} \tag{2.47}$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{x_T}(w))=\frac{\nu^2}{4\mathrm{a}w^2}+\mathrm{cx}_0^2 \tag{2.48}$$

[58] Duan Li, Wan-Lung Ng, **A.g.e.,** s.392

(2.43) ile elde edilen optimal çok dönemli portföy stratejisinin uygulamada kullanımı oldukça basittir. (2.32)-(2.42) arasında verilen parametreler hesaplanarak (2.43) ve (2.44) çözüm takımlarında yerine konulması neticesinde, yatırımcı tarafından dönemsel olarak her bir hisse senedine ayrılacak varlık miktarı elde edilebilmektedir.

Bunun yanında (2.43) ile verilen bağıntının önemli bir özeliği, bağıntının yatırımcının riske karşı tutumu ve mevcut varlığı gibi iki farklı terimden oluşmasıdır. İkinci satırda verilen terim yatırımcının riske karşı tutumuna bağlı iken yatırımcının mevcut varlığından bağımsızdır.

Yatırımcının riske karşı tutumu gerçek yatırım süreci başlamadan tespit edilerek, optimal portföy stratejisi buna göre yeniden gözden geçirilebilmektedir. Diğer taraftan ilk satırda geçen terim tam tersine, yatırımcının mevcut varlığına bağımlı iken yatırımcının riske karşı tutumundan etkilenmemektedir. Bu ise mevcut varlığın her dönem sonunda kontrol edilerek, hesaplanan yeni değerin mevcut varlık olarak kullanımını zorunlu kılmaktadır. Bu önemli özelliği vurgulamak adına (2.43) ile verilen çözüm riske karşı tutum ve mevcut varlığın toplamı biçiminde de ayrı ayrı ifade edilebilmektedir.

$$\mathbf{u_t^*}(x_t;\gamma) = -\mathbf{K_t}x_t + \mathbf{v_t}(\gamma) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.49}$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{w} \tag{2.50}$$

$$\mathbf{K_t} = E^{-1}(\mathbf{P_t}\mathbf{P_t'})E(e_t^0\mathbf{P_t}) \tag{2.51}$$

$$\mathbf{v_t}(\gamma) = \frac{\gamma}{2}\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{A_k^1}{A_k^2}\right)E^{-1}(\mathbf{P_t}\mathbf{P_t'})E(\mathbf{P_t}) \qquad t = 0,1,\cdots,T-2 \tag{2.52}$$

$$\mathbf{v_{T-1}}(\gamma) = \frac{\gamma}{2}E^{-1}(\mathbf{P_{T-1}}\mathbf{P_{T-1}'})E(\mathbf{P_{T-1}}) \tag{2.53}$$

2.4. PORTFÖYE RİSKSİZ VARLIĞIN EKLENMESİ HALİNDE MODEL FORMULASYONU

Hatırlanacak olursa bir önceki bölümde çok dönemli ortalama-varyans portföy seçim modeli açıklanarak, dinamik programlama ile her bir dönem için optimal portföy stratejisinin elde edilmesi üzerinde durulmuştu. Bu amaçla (n+1) riskli hisse senedinden oluşan bir sermaye piyasası göz önüne alınarak, her bir hisse senedinin dönemsel getiri oranının rassal olduğu varsayılmaktaydı.

Bu bölümde bahsedilen (n+1) hisse senedinden bir tanesinin, örneğin dönemsel getirisi e_t^0 ile gösterilen birinci hisse senedinin, risksiz bir varlık olması durumunda modelde meydana gelecek değişiklikler üzerinde durulacaktır.

İlk olarak, modele risksiz bir varlığın eklenmesi, hisse senetlerinden bir tanesinin gelecekteki getirisinin kesin olarak bilinmesi yani rassal olmaması anlamına gelmektedir. Bu durumda birinci hisse senedinin getirisi ($e_t^0 = s_t$) biçiminde sabit olarak kabul edilebilir. Bu durumda diğer bütün hisse senetlerinin birinci hisse senedi ile birlikte değişimini simgeleyen kovaryans terimi ($\mathrm{cov}(e_t^0, e_t^i) = 0$, $i = 0,1,\cdots,n$ ve $\forall t = 0,1,\cdots T-1$) biçiminde sıfıra eşit olacaktır.

Modelde yer alan (n+1) hisse senedinden bir tanesinin getirisinin kesin olarak bilinmesi halinde (2.32)-(2.36) eşitlikleri ile tanımlanan parametreler aşağıda verilen formda yeniden düzenlenecektir.

$$B_t = E(\mathbf{P}_t')\,E^{-1}(\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t')\,E(\mathbf{P}_t) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.54}$$

$$A_t^1 = s_t(1-B_t) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.55}$$

$$A_t^2 = s_t^2(1-B_t) \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.56}$$

$$B_t^1 = \frac{B_t}{2\prod_{k=t+1}^{T-1} s_k} \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.57}$$

$$B_t^2 = \frac{B_t}{4\left(\prod_{k=t+1}^{T-1} s_k\right)^2} \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \tag{2.58}$$

Hesaplanan A_t^1 ve A_t^2 parametreleri bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum B_t^1 ve B_t^2 için geçerli değildir. Dolayısıyla her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Dikkat edilecek olursa son döneme ulaşıldığında $\prod_{k=T}^{T-1} s_k$ ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak çarpım sembolü böyle bir özelliğe sahip olmadığından bu mümkün değildir. Bu durumda $\prod_{k=T}^{T-1} s_k = 1$ olarak tanımlanarak sorun giderilmektedir. Bu durumda (2.37)-(2.42) arasında verilen μ, ν, τ ve a, b, c ifadeleri aşağıdaki biçimde sadeleştirilmektedir.

$$\mu = \prod_{t=0}^{T-1} s_t (1 - B_t) \tag{2.59}$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left[1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)\right] \tag{2.60}$$

$$\tau = \prod_{t=0}^{T-1} s_t^2 (1 - B_t) \tag{2.61}$$

$$a = \frac{1}{4}\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)\left[1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)\right] \tag{2.62}$$

$$b = 2\prod_{t=0}^{T-1} s_t \tag{2.63}$$

$$c = 0 \tag{2.64}$$

(2.59)-(2.64) arasındaki ifadelerin elde edilmesinde dikkat edilmesi gereken bir nokta, $\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t) = 1 - \sum_{t=0}^{T-1}\prod_{k=t+1}^{T-1}(1 - B_k)B_t$ bağıntısının kullanılmasıdır. Bu tanımlamalar ışığında dönemsel optimal portföy stratejisi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^{*} = -s_t\, E^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})\, E(\mathbf{P_t})\, x_t$$

$$+\left[\prod_{k=0}^{T-1} s_k x_0 + \frac{1}{2w^{*}\left(\prod_{k=0}^{T-1}(1-B_k)\right)}\right]\left(\prod_{k=t+1}^{T-1}\frac{1}{s_k}\right) E^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})E(\mathbf{P_t}) \qquad (2.65)$$

$$\forall t = 0,1,\cdots,T-2$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{T-1}}^{*} = -s_{T-1}E^{-1}(\mathbf{P_{T-1}P_{T-1}'})\,E(\mathbf{P_{T-1}})x_{T-1}$$

$$+\left[\prod_{k=0}^{T-1} s_k x_0 + \frac{1}{2w^{*}\left(\prod_{k=0}^{T-1}(1-B_k)\right)}\right]\; E^{-1}(\mathbf{P_{T-1}P_{T-1}'})E(\mathbf{P_{T-1}}) \qquad (2.66)$$

Yukarıda verilen (2.65) ve (2.66) çözüm takımlarında yer alan *w* parametresi daha önce de bahsedildiği üzere riskten kaçınma katsayısını temsil etmektedir. Fayda fonksiyonu bilindiğine göre türev alma işlemi aracılığıyla bu parametrenin optimum değerini elde etmek de mümkün olacaktır. Riskten kaçınma katsayısının optimum değeri her iki problem tipi için de aşağıda verilmektedir.

$$w^{*} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}{\sigma\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}} & ;(2.3)\quad \text{için} \\ \dfrac{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}{2\left[\in -\left(\prod_{t=0}^{T-1}s_t x_0\right)\left(\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)\right]} & ;(2.4)\quad \text{için} \end{cases} \qquad (2.67)$$

Son olarak verilen problem için ortalama-varyans etkin sınır yukarıda verilen tanımlamalar ile birlikte aşağıdaki biçimde elde edilecektir.

$$\mathrm{Var}(x_T) = \frac{\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)}{\left(1-\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)\right)}\left(E(x_T) - x_0\prod_{t=0}^{T-1}s_t\right)^2 \qquad (2.68)$$

$$E(x_T) \geq \prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0$$

Etkin sınır verilen herhangi bir risk seviyesi için beklenen getirinin veya tam tersine herhangi bir getiri seviyesine karşılık gelen riskin hesaplanmasında kullanılabilmektedir. Ancak çok dönemli optimal portföy stratejisinin nihai beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$E(x_T(w)) = \prod_{t=0}^{T-1} s_t x_0 + \frac{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)\right)}{2w\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)} \tag{2.69}$$

$$Var(x_T(w)) = \frac{\left(1 - \prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)\right)}{4w^2\prod_{t=0}^{T-1}(1 - B_t)} \tag{2.70}$$

(2.65) ve (2.66) ile verilen optimal portföy stratejisi risksiz varlıklardan oluşan portföyde olduğundan farklı olarak $E^{-1}(\mathbf{P_t}\mathbf{P_t'})E(\mathbf{P_t})x_t$ terimi ile orantılı olarak elde edilmektedir. Bu ise yatırımcının elindeki varlığın riskli hisse senetlerine aynı göreceli oran ile dağıtıldığı anlamına gelmektedir. Diğer taraftan, yatırımcı tarafından riskli hisse senetlerine yatırılan varlığın risksiz hisse senede yatırılan varlığa oranı yatırımcının riske karşı tutumuna bağlıdır ve her dönem başında tekrardan gözden geçirilmektedir.

2.5. FAYDA MAKSİMİZASYONU İLE ÇOK DÖNEMLİ ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ

Bu bölümde çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi problemi için en genel hal olarak bilinen fayda fonksiyonu maksimizayonu ile çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi açıklanmaya çalışılacaktır.

Ele alınan amaç fonksiyonu $U(E(x_T), Var(x_T))$ olarak tanımlanmakla birlikte, nihai varlığın beklenen değeri ve varyansının bir fonksiyonudur. Yatırımcılar genellikle nihai varlıklarının varyansını en düşük seviyede tutarken nihai varlıklarının beklenen değerini maksimize etmek istediklerinden $U(E(x_T), Var(x_T))$ fonksiyonunun aşağıda verilen koşulları sağladığı varsayılmaktadır.

$$\frac{\partial U(E(x_T), Var(x_T))}{\partial E(x_T)} > 0 \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial U(E(x_T), Var(x_T))}{\partial Var(x_T)} < 0 \qquad (2.72)$$

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi probleminin fayda fonksiyonu maksimizasyonu ile çözümünde ele alınan yöntem daha önceki bölümlerde ele alınan çözüm yöntemi ile aynıdır. Bu benzerlik, Kroll, Levy ve Markowitz[59] tarafından incelenerek, her iki yöntem ile elde edilen portföyler arasında büyük bir benzerlik tespit edilmiştir. Fayda fonksiyonu ile çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi problemi aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} U: \quad & \max \quad U(E(x_T), Var(x_T)) \\ & x_{t+1} = e_t^0 x_t + \mathbf{P}_t' \mathbf{u}_t \qquad t = 0,1,\cdots,T-1 \end{aligned} \qquad (2.73)$$

Fayda fonksiyonunun ($U(E(x_T), Var(x_T))$) maksimizasyonu probleminin optimum çözümlerinden oluşan çözüm kümesini $\prod_U$ ile gösterelim. (2.73) ile verilen problem çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi probleminin en genel halini temsil etmekle birlikte verilen fayda fonksiyonu, nihai varlığın beklenen değeri ve varyansının doğrusal olmayan bir fonksiyonudur. Ancak bundan önceki bölümlerde (2.3), (2.4) ve (2.9) ile verilen problemlerde ele alınan fayda fonksiyonunun, (2.73) ile verilen problemin özel bir hali olarak, nihai varlığın beklenen değeri ve varyansının doğrusal bir fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır. Problemin optimum çözümünün varlığı, $\prod_U$ kümesinin bir elemanı olan optimum çözüm vektörünün aynı zamanda $\prod_E(w)$ kümesinin de bir elemanı olmasına bağlıdır. Bu varsayımı doğrulamak amacıyla aşağıda verilen teoremi ve ispatını inceleyelim.[60]

[59] Y. Kroll, H. Levy, H. Markowitz, "Mean-Variance versus Direct Utility Maximization", **Journal of Finance,** Vol:39 ,1984, s.47-61

[60] Duan Li, Wan-Lung Ng, 2000, **A.g.e.,** s.400

Teorem 2.3: π^* vektörü $\prod_U$ çözüm kümesinin bir elemanı ise aynı zamanda $\prod_E(w)$ kümesinin de elemanı olmasını sağlayacak pozitif bir riskten korunma katsayısı mevcuttur. ($\pi^* \in \prod_U \quad \Rightarrow \quad \exists w > 0, \quad \pi^* \in \prod_E(w)$)

İspat: Teoremin ispatı için $U(E(x_T), Var(x_T))$ fonksiyonunun daha dikkatli incelenmesi gerekmektedir. (2.71) ve (2.72) koşulları göz önüne alındığı takdirde, fayda fonksiyonunun nihai varlığın beklenen değerine göre kısmi türevi pozitif olduğundan, fayda fonksiyonu, beklenen değere göre artandır.

Bunun yanında fayda fonksiyonunun nihai varlığın varyansına göre kısmi türevi negatif olduğundan, fayda fonksiyonu nihai varlığın varyansına göre azalandır. Bu nedenle $U(E(x_T), Var(x_T))$ fonksiyonunun optimum çözümü, $[E(x_T),Var(x_T)]$ uzayının ortalama varyans etkin sınırı üzerinde yer almalıdır. (2.46) ile verilen etkin sınır bağıntısı incelendiğinde nihai varlığın varyansının, nihai varlığın beklenen değerinin konveks bir fonksiyonu olduğu görülebilir. Bu noktadan hareketle, $\prod_U$ kümesinin elemanı olan her π^* optimum çözüm vektörü, aynı zamanda $E(w)$ yardımcı problemi tarafından da yaratılabilecektir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

□

Aşağıda verilen tanımlamalar π^* optimum çözüm vektörünün elde edilebilmesi için gerekli koşulların belirlenmesinde kullanılmaktadır.

$$U_E(\pi) = \frac{\partial U(E(x_T), Var(x_T))}{\partial E(x_T)} \Bigg|_{\pi} \tag{2.74}$$

$$U_V(\pi) = \frac{\partial U(E(x_T), Var(x_T))}{\partial Var(x_T)} \Bigg|_{\pi} \tag{2.75}$$

Teorem 2.4: π^* optimum çözüm vektörünün $E(w)$ yardımcı probleminin optimum çözüm kümesi olan $\prod_E(w^*)$'nin bir elemanı olduğunu varsayalım. π^* vektörünün (2.73) probleminin optimum çözümü olabilmesi için gerek koşul, $w^* = -(U_V(\pi^*))/(U_E(\pi^*))$ şartını sağlamasıdır.

İspat: [$E(x_T)$,$Var(x_T)$] uzayının ortalama varyans etkin sınırı riskten kaçınma katsayısının bir fonksiyonu olarak elde edilebilir. Başka bir deyişle etkin sınır üzerinde bulunan her bir nokta, ($E(x_T(w))$,$Var(x_T(w))$) biçiminde yazılabilir. Sadece pozitif riskten kaçınma katsayısı içeren çözümlerden oluşan $\prod_U$ kümesi $\prod_E(w)$ kümesinin bir alt kümesi olduğundan, (2.73) ile verilen fayda fonksiyonu maksimizasyonu problemi aşağıda verilen forma indirgenebilir.

$$\max_{w\geq 0} \quad U\big(E(x_T(w)), Var(x_T(w))\big) \tag{2.76}$$

Optimum riskten kaçınma katsayısının pozitif olması gerek koşulunun sağlanabilmesi için (2.76) ile verilen ifadenin riskten kaçınma katsayısına göre türevi alınarak sıfıra eşitlenmelidir.

$$U_E(\pi^*)\frac{\partial E(x_T(w^*))}{\partial w} + U_V(\pi^*)\frac{\partial Var(x_T(w^*))}{\partial w} = 0 \tag{2.77}$$

İkinci terimin eşitliğin sağ tarafına atılması ve eşitliğin her iki yanının $U_E(\pi^*)$ 'ye oranlanması neticesinde ifade aşağıda verilen forma dönüşür.[61]

$$U_E(\pi^*)\frac{\partial E(x_T(w^*))}{\partial w} = -U_V(\pi^*)\frac{\partial Var(x_T(w^*))}{\partial w}$$

$$\frac{\partial E(x_T(w^*))}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial Var(x_T(w^*))} = \frac{-U_V(\pi^*)}{U_E(\pi^*)}$$

$$\frac{\partial E(x_T(w^*))}{\partial Var(x_T(w^*))} = -\frac{U_V(\pi^*)}{U_E(\pi^*)} \tag{2.78}$$

Yukarıda verilen eşitliğin sol yanındaki ifade riskte meydana gelen bir birimlik değişikliğin beklenen getiri üzerindeki etkisini belirtmektedir. Diğer bir deyişle, yatırımcının riske karşı tutumunu temsil etmektedir. Dolayısıyla bu ifade yerine riskten kaçınma katsayısı konulabilir. Bu durumda istenilen ifade elde edilmiş olur. ($w^* = -U_V(\pi^*)/U_E(\pi^*)$)

□

[61] Duan Li, Wan-Lung Ng, 2000, **A.g.e.,** s.401

Teorem 2.3, (2.73) ile verilen ($U(E(x_T), Var(x_T))$) fayda fonksiyonu maksimizasyonu ile portföy seçimi probleminin (2.9) ile verilen $E(w)$ formuna dönüştürülebileceğini söylemektedir. Buna karşılık Teorem 2.4, $E(w)$ probleminin optimum çözümünün aynı zamanda fayda fonksiyonunun maksimizasyonu ile portföy seçimi probleminin de bir optimum çözümü olabilmesi için gerek koşulu tanımlamaktadır.

Daha önceki bölümlerde gerçekleştirilen tanımlamalar dikkate alındığında, ($U(E(x_T), Var(x_T))$) fonksiyonunu maksimize etme problemini aynı zamanda (2.14) ile verilen ($A(\lambda, w)$) yardımcı problemine dönüştürmek mümkün olmaktadır. Dolayısıyla, yardımcı problemin optimum çözümünün aynı zamanda ($U(E(x_T), Var(x_T))$) fayda fonksiyonunun maksimizasyonu probleminin de bir optimum çözümü olduğu gösterilebilir.[62]

Çözümün varlığı için gerek koşullar, Teorem 2.3 ve Teorem 2.4'te verilen gerek koşulların bir kombinasyonu neticesinde elde edilebilir. Bu durumda yardımcı problemin bir optimum çözüm olan π^* vektörünün aynı zamanda (2.73) probleminin de bir optimum çözümü olabilmesi için gerek koşul,

$$\lambda^* = 1 - 2\frac{U_V(\pi^*)}{U_E(\pi^*)}E(x_T)\Bigg|_{\pi^*} \tag{2.79}$$

biçiminde tanımlanabilir. Verilen herhangi bir $\gamma = \lambda / w$ değeri için ($A(\lambda, w)$) yardımcı probleminin optimum çözümü, ($U(E(x_T), Var(x_T))$) fonksiyonunun γ parametresine göre türevinin alınması ile kolaylıkla elde edilebilir.

Fayda fonksiyonunun γ parametresine göre türevinin alınması ile oluşacak ifade aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dU}{d\gamma} = \left(\frac{\partial U}{\partial E(x_T)} - 2E(x_T)\frac{\partial U}{\partial Var(x_T)}\right)\frac{dE(x_T)}{d\gamma} + \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)}\frac{dE(x_T^2)}{d\gamma} \tag{2.80}$$

$dE(x_T)/d\gamma = \nu$ ve $dE(x_T^2)/d\gamma = \nu\gamma$ eşitliklerinin (2.80) ifadesinde yerine yazılması ile birlikte daha sade bir ifade elde edilmiş olur.

[62] Duan Li, Wan-Lung Ng, 2000, **A.g.e.,** s.401

$$\frac{dU}{d\gamma} = \left(\frac{\partial U}{\partial E(x_T)} - 2E(x_T) \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)} \right) \nu + \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)} \nu\gamma \qquad (2.81)$$

Optimal γ parametresinin elde edilebilmesi (2.81) ile verilen türev alma ifadesinin sıfıra eşitlenmesi ile mümkündür. Bu durumda elde edilen ifade aşağıda verilmektedir.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial E(x_T)} - 2E(x_T) \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)} \right) + \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)} \gamma = 0 \qquad (2.82)$$

Son olarak, γ parametresi eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılarak optimum değer elde edilmiş olur.

$$\gamma^* = 2E(x_T) - \frac{\partial U}{\partial E(x_T)} \Big/ \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)} \qquad (2.83)$$

(2.83) ile verilen eşitlikte yer alan $E(x_T)$ ve $Var(x_T)$ ifadelerinin her ikisi de γ parametresine bağlıdır. Bu ise (2.82) veya (2.83) ile verilen denklemlerin çözümünü zorlaştırmaktadır. Bu durumda doğrusal olmayan optimizasyon tekniklerinden tek boyutlu arama teknikleri kullanılarak γ parametresinin optimum değeri elde edilebilir.

Elde edilen optimum γ değerinin (2.49) ile verilen ifadede yerine konması ile birlikte yatırımcının fayda fonksiyonunu maksimize eden çok dönemli optimal portföy stratejisi elde edilmiş olur.

2.6. MODELİN TEST EDİLMESİ

Bu bölümde, çok dönemli ortalama-varyans portföy seçim modelinin uygulamada kullanımını daha net bir biçimde uygulayabilmek amacıyla çeşitli örneklere yer verilecektir. İlk önce sadece riskli varlıklardan oluşan portföy seçimi üzerinde durulurken daha sonra portföye risksiz varlığın eklenmesi durumunda modelde gerçekleştirilen değişikliklere değinilecektir. Son olarak da beklenen fayda maksimizasyonu ile portföy seçimine ilişkin bir uygulama gerçekleştirilecektir.

2.6.1. Tümü Riskli Varlıklardan Oluşan Portföy

Tümü riskli varlıklardan oluşan portföy seçimine örnek olarak kullanılan ortalama getiri ve kovaryans matrisi verileri, İMKB'de işlem gören hisse senetlerinden Akbank(A), Garanti(B), Migros(C) ve Tüpraş(D)'ın 12.03.1999-03.04.2003 tarihleri arasında günlük kapanış fiyatlarından yola çıkılarak elde edilmiştir. Başlangıçta yatırımcının bir birim varlığı olduğunu varsayarak önümüzdeki dört dönem içerisinde oluşacak (T = 4) optimum portföyleri elde etmeye çalışalım. Amaç yatırımcının nihai varlığının beklenen değerini, portföy riski 2 değerini aşmayacak biçimde maksimize etmek olsun. ($\sigma = 2$) Her bir hisse senedinin bahsedilen dönem içerisindeki ortalama getirisi sırasıyla, $E(e_t^A) = 1{,}002706$ $E(e_t^B) = 1{,}002566$, $E(e_t^C) = 1{,}001446$ ve $E(e_t^D) = 1{,}001679$; $t = 0,1,2,3$ olarak hesaplanmıştır. Belirtilen dönem için kovaryans matrisi aşağıda verilmektedir.

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{e_t}) = \begin{bmatrix} 0{,}001753 & 0{,}001481 & 0.001036 & 0{,}001117 \\ 0{,}001481 & 0{,}002285 & 0{,}001042 & 0{,}001186 \\ 0{,}001036 & 0{,}001042 & 0{,}001378 & 0{,}000997 \\ 0{,}001117 & 0{,}001186 & 0{,}000997 & 0{,}001699 \end{bmatrix}, \quad t = 0,1,2,3$$

En düşük ortalama getiri oranına sahip olan hisse senedini temel kabul ederek getiri vektörünü oluşturalım.

$$E(\mathbf{P_t}) = \left[e_t^A - e_t^C ; e_t^B - e_t^C ; e_t^D - e_t^C\right]'$$

$$= \left[0{,}00126 \; ; \; 0{,}00112 \; ; \; 0{,}000233\right]' \qquad t = 0,1,2,3$$

$\mathbf{P_t}$ vektörü kullanılarak $E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisi elde edilebilir. $E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisi tek dönemli durağan portföy seçiminde yer alan kovaryans matrisinin çok dönemli dinamik portföy seçimindeki karşılığıdır ve zaman içerisinde hisse senetlerinin birbirine bağımlı değişimlerini temsil etmektedir.

$$E(\mathbf{P_t P_t'}) = E\left[\begin{pmatrix} e_t^A - e_t^C \\ e_t^B - e_t^C \\ e_t^D - e_t^C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_t^A - e_t^C & e_t^B - e_t^C & e_t^D - e_t^C \end{pmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (e_t^A)^2 - 2e_t^A e_t^C + (e_t^C)^2 & e_t^A e_t^B - e_t^A e_t^C - e_t^B e_t^C + (e_t^C)^2 & e_t^A e_t^D - e_t^A e_t^C - e_t^D e_t^C + (e_t^C)^2 \\ e_t^A e_t^B - e_t^A e_t^C - e_t^B e_t^C + (e_t^C)^2 & (e_t^B)^2 - 2e_t^B e_t^C + (e_t^C)^2 & e_t^B e_t^D - e_t^B e_t^C - e_t^C e_t^D + (e_t^C)^2 \\ e_t^A e_t^D - e_t^A e_t^C - e_t^D e_t^C + (e_t^C)^2 & e_t^B e_t^D - e_t^B e_t^C - e_t^C e_t^D + (e_t^C)^2 & (e_t^D)^2 - 2e_t^D e_t^C + (e_t^C)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00106 & 0{,}00078 & 0{,}00047 \\ 0{,}00078 & 0{,}00157 & 0{,}00053 \\ 0{,}00047 & 0{,}00053 & 0{,}00109 \end{bmatrix}, \qquad t = 0,1,2,3$$

Yukarıda elde edilen $E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisindeki değerlere netlik kazandırmak açısından yapılan hesaplamalar aşağıda verilmektedir.

$$E\left[(e_t^A - e_t^C)^2\right] = E\left[(e_t^A)^2\right] - 2E\left[e_t^A e_t^C\right] + E\left[(e_t^C)^2\right] = \{1{,}00717\} - 2\{1{,}00519\} + \{1{,}00427\} = 0{,}00106$$

$$E\left[(e_t^B - e_t^C)^2\right] = E\left[(e_t^B)^2\right] - 2E\left[e_t^B e_t^C\right] + E\left[(e_t^C)^2\right] = \{1{,}00742\} - 2\{1{,}00506\} + \{1{,}00427\} = 0{,}00157$$

$$E\left[(e_t^D - e_t^C)^2\right] = E\left[(e_t^D)^2\right] - 2E\left[e_t^D e_t^C\right] + E\left[(e_t^C)^2\right] = \{1{,}00506\} - 2\{1{,}00412\} + \{1{,}00427\} = 0{,}00109$$

$$E\left[(e_t^A - e_t^C)(e_t^B - e_t^C)\right] = E(e_t^A e_t^B) - E(e_t^A e_t^C) - E(e_t^B e_t^C) + E(e_t^C)^2$$

$$= \{1{,}00676\} - \{1{,}00519\} - \{1{,}00506\} + \{1{,}00427\} = \{0{,}00078\}$$

$$E\left[(e_t^A - e_t^C)(e_t^D - e_t^C)\right] = E(e_t^A e_t^D) - E(e_t^A e_t^C) - E(e_t^C e_t^D) + E(e_t^C)^2$$

$$= \{1{,}00551\} - \{1{,}00519\} - \{1{,}00412\} + \{1{,}00427\} = \{0{,}00047\}$$

$$E\left[(e_t^B - e_t^C)(e_t^D - e_t^C)\right] = E(e_t^B e_t^D) - E(e_t^B e_t^C) - E(e_t^C e_t^D) + E(e_t^C)^2$$

$$= \{1{,}00544\} - \{1{,}00506\} - \{1{,}00412\} + \{1{,}00427\} = \{0{,}00053\}$$

Yukarıda açıklanan hesaplamalar gerçekleştirilirken $E(\mathbf{e_t e_t'}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{e_t}) + E(\mathbf{e_t})E(\mathbf{e_t'})$ bağıntısı gözönünde bulundurulmalıdır. Benzer biçimde $E(e_t^C \mathbf{P_t'})$ vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(e_t^C \mathbf{P}_t') = E\left[e_t^A e_t^C - \left(e_t^C\right)^2 \quad e_t^B e_t^C - \left(e_t^C\right)^2 \quad e_t^D e_t^C - \left(e_t^C\right)^2 \right]$$
$$= \left[0{,}00092 \quad 0{,}00079 \quad -0{,}00015\right], \qquad t = 0,1,2,3$$

Dönemsel olarak optimum portföyün ve etkin sınırın elde edilebilmesi için μ, ν, τ ve a, b, c parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu amaçla ilk önce B_t, A_t^1, A_t^2, B_t^1 ve B_t^2 parametrelerinin elde edilmesi gerekmektedir.

$$B_t = E(\mathbf{P}_t') E^{-1}(\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t') E(\mathbf{P}_t)$$

$$= \left[0{,}00126 \quad 0{,}00112 \quad 0{,}000233\right] \begin{bmatrix} 1598{,}478 & -671{,}732 & -362{,}63 \\ -671{,}732 & 1044{,}308 & -218{,}137 \\ -362{,}63 & -218{,}137 & 1179{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}00126 \\ 0{,}00112 \\ 0{,}000233 \end{bmatrix}$$

$$= 0{,}001689$$

$$A_t^1 = E(e_t^C) - E(\mathbf{P}_t') E^{-1}(\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t') E(e_t^C \mathbf{P}_t)$$

$$= 1{,}001446 - \left[1{,}17725 \quad 0{,}272417 \quad -0{,}42632\right] \begin{bmatrix} 0{,}00092 \\ 0{,}00079 \\ -0{,}00015 \end{bmatrix} = 1{,}000084$$

$$A_t^2 = E(e_t^C)^2 - E(e_t^C \mathbf{P}_t') E^{-1}(\mathbf{P}_t \mathbf{P}_t') E(e_t^C \mathbf{P}_t)$$

$$= 1{,}00427 - 0{,}001207 = 1{,}003063$$

Hesaplanan A_t^1 ve A_t^2 parametreleri bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum B_t^1 ve B_t^2 için geçerli değildir. Dolayısıyla her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir.

$$B_t^1 = B_t \frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{2\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2}, \qquad t = 0,1,2,3$$

t=0 için $\quad B_0^1 = (0{,}001689)\dfrac{(1{,}000084)^3}{2(1{,}003063)^3} = 0{,}0008369$

t=1 için $\quad B_1^1 = (0{,}001689)\dfrac{(1{,}000084)^2}{2(1{,}003063)^2} = 0{,}0008395$

t=2 için $B_2^1 = (0{,}001689)\dfrac{(1{,}000084)}{2(1{,}003063)} = 0{,}0008420$

t=3 için $B_3^1 = (0{,}001689)\dfrac{1}{2} = 0{,}0008445$

Benzer biçimde B_t^2 parametresi de aşağıdaki gibi elde edilebilecektir.

$$B_t^2 = B_t \left(\frac{\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^1}{2\prod_{k=t+1}^{T-1} A_k^2} \right)^2 \quad , \qquad t = 0,1,2,3$$

t=0 için $B_0^2 = (0{,}001689)\left(\dfrac{(1{,}000084)^3}{2(1{,}003063)^3} \right)^2 = 0{,}000415$

t=1 için $B_1^2 = (0{,}001689)\left(\dfrac{(1{,}000084)^2}{2(1{,}003063)^2} \right)^2 = 0{,}000417$

t=2 için $B_2^2 = (0{,}001689)\left(\dfrac{(1{,}000084)}{2(1{,}003063)} \right)^2 = 0{,}000420$

t=3 için $B_3^2 = (0{,}001689)\left(\dfrac{1}{2} \right)^2 = 0{,}000422$

Dikkat edilecek olursa son döneme ulaşıldığında $\prod_{k=T}^{T-1} A_k^i \ , \quad i = 1,2$ ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. Örneğin ele alınan problem için $\prod_{k=4}^{3} A_k^1$ ve $\prod_{k=4}^{3} A_k^2$ ifadelerinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak çarpım sembolü böyle bir özelliğe sahip olmadığından bu mümkün değildir. Bu durumda $\prod_{k=T}^{T-1} A_k^i = 1 \ , \quad i = 1,2$ olarak tanımlanarak sorun giderilmektedir. B_t , A_t^1, A_t^2, B_t^1 ve B_t^2 parametrelerinin elde edilmesi ile birlikte μ, ν, τ ve a, b, c parametreleri hesaplanabilecektir.

$$\mu = \prod_{t=0}^{3} A_t^1 = A_0^1\, A_1^1\, A_2^1\, A_3^1 = (1{,}000084)^4 = 1{,}00034$$

$$\tau = \prod_{t=0}^{3} A_t^2 = A_0^2\, A_1^2\, A_2^2\, A_3^2 = (1{,}003063)^4 = 1{,}01231$$

$$\nu = \sum_{t=0}^{3}\left(\prod_{k=t+1}^{3} A_k^1\right) B_t^1 = \left(\prod_{k=1}^{3} A_k^1\right) B_0^1 + \left(\prod_{k=2}^{3} A_k^1\right) B_1^1 + \left(\prod_{k=3}^{3} A_k^1\right) B_2^1 + \left(\prod_{k=4}^{3} A_k^1\right) B_3^1$$

$$= (1{,}000084)^3 (0{,}0008369) + (1{,}000084)^2 (0{,}0008395) + (1{,}000084)(0{,}0008420)$$

$$+ (0{,}0008445) = 0{,}003363$$

$$a = \frac{\nu}{2} - \nu^2 = \frac{0{,}003363}{2} - (0{,}003363)^2 = 0{,}00167$$

$$b = \frac{\mu\nu}{a} = \frac{(1{,}00034)(0{,}003363)}{(0{,}00167)} = 2{,}0145$$

$$c = \tau - \mu^2 - ab^2 = 1{,}01231 - (1{,}00034)^2 - (0{,}00167)(2{,}0145)^2 = 0{,}004853$$

Verilen problem için ortalama-varyans etkin sınır aşağıdaki biçimde elde edilebilecektir. Ek olarak dönem sayısının arttırılması ile birlikte etkin sınırda meydana gelen değişimlerin incelenmesi de mümkündür.

$$\mathrm{Var}(x_T) = \frac{a}{\nu^2}\left[E(x_T) - (\mu + b\nu)x_0\right]^2 + cx_0^2$$

$$E(x_T) \geq (\mu + b\nu)\, x_0$$

$$\mathrm{Var}(x_4) = \frac{0{,}00167}{(0{,}003363)^2}\left[E(x_4) - (1{,}00034 + (2{,}0145)(0{,}003363))\right]^2 + 0{,}004853$$

$$E(x_4) \geq (1{,}00034 + (2{,}0145)(0{,}003363))$$

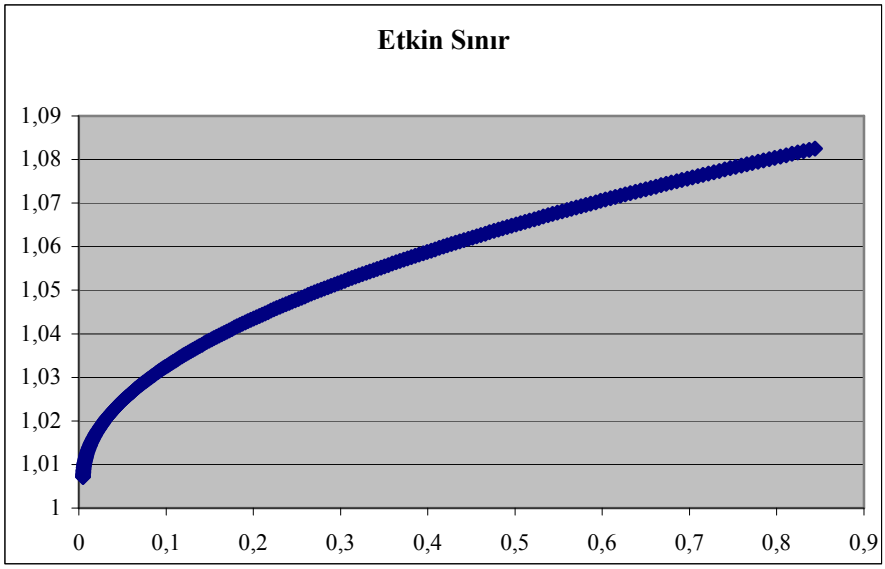
Gerekli sadeleştirmeler gerçekleştirildiği takdirde etkin sınır elde edilmiş olur. Böylece yatırımcı, belirli bir risk seviyesinde elde edebileceği en yüksek getiri oranını veya belirli bir getiri seviyesinde elde edebileceği en düşük riski hesaplayabilecektir.

$$\mathrm{Var}(x_4) = 147{,}66\left[\mathrm{E}(x_4) - 1{,}00712\right]^2 + 0{,}004853$$

$$\mathrm{E}(x_4) \geq 1{,}00712$$

Şimdi etkin sınırı grafik üzerinde göstermeye çalışalım. Grafikte y-ekseni nihai varlığın beklenen değerini temsil ederken x-ekseni varyansı temsil etmektedir.

Grafik 2.1 Riskli Varlıklar Ortalama-Varyans Etkin sınır (T = 4)



Etkin sınırın elde edilmesi ile birlikte sadece her bir dönem için optimal portföy stratejisinin belirlenmesi kalmaktadır. Optimal portföy stratejisinin belirlenmesi ile birlikte dönemsel olarak her bir varlıktan hangi miktarda elde bulundurulacağı kararlaştırılmış olur. Ancak optimal portföy stratejisinin değişkenlerinden bir tanesi riskten kaçınma katsayısı olduğundan öncelikle yatırımcı için bu parametrenin belirlenmesi gerekmektedir. Riskten kaçınma katsayısı, verilen örnekte (2.3) ile ifade edilen problem çözüldüğünden

$$w^* = \frac{\nu}{2\sqrt{a(\sigma - cx_0^2)}} = \frac{0{,}003363}{2\sqrt{(0{,}00167)(2 - 0{,}004853)}} = 0{,}02913$$

biçiminde hesaplanacaktır. Hesaplanan riskten kaçınma katsayısına karşılık gelen optimal portföy stratejisi aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$u_t^* = -\mathbf{K_t} x_t + \mathbf{v_t}$$

$$\mathbf{K_t} = E^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})E(e_t^C \mathbf{P_t}) = \begin{bmatrix} 0{,}99433 \\ 0{,}23973 \\ -0{,}68293 \end{bmatrix}, \qquad t = 0,1,2,3$$

$$\mathbf{v_t} = \frac{1}{2}(bx_0 + \frac{\nu}{2w^* a})\left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_k^1}{A_k^2}\right) E^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})E(\mathbf{P_t}), \qquad t = 0,1,2,3$$

Hesaplanan $\mathbf{K_t}$ vektörü bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum $\mathbf{v_t}$ vektörü için geçerli değildir. Dolayısıyla her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir. Her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanan optimal portföy stratejisi aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 21{,}3405 \\ 4{,}9382 \\ -7{,}7281 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 21{,}4041 \\ 4{,}9529 \\ -7{,}7511 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 21{,}4679 \\ 4{,}9677 \\ -7{,}7742 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 21{,}5318 \\ 4{,}9825 \\ -7{,}7974 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen vektörler her bir dönem için sırasıyla Akbank, Garanti ve Tüpraş hisse senetlerine yatırılan varlık miktarlarıdır. Tüpraş için verilen miktarın negatif olması açığa satışın varolduğunu göstermektedir. Açığa satış neticesinde elde edilen varlık, diğer hisse senetlerini finanse etmede kullanılmaktadır. Açığa satış miktarı için herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır.

Uygulamanın başlangıcında temel olarak seçilen Migros hisse senedi için ayrılan varlık miktarı ise yine her bir dönem için $(x_t - \sum u_t^i)$ bağıntısı kullanılarak elde edilebilecektir. Bu bağıntı, Migros hisse senedi için yapılacak yatırımın başlangıç varlığı ile açığa satış neticesinde elde edilen toplam varlıktan diğer senetlere yapılan yatırımın çıkartılması ile elde edilebileceğini söylemektedir.

Çok dönemli portföy stratejisinin uygulanması neticesinde karşılaşılan beklenen getiri ve varyans değeri aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$E(x_4) = (\mu + b\nu)x_0 + \frac{\nu}{2wa}$$

$$= (1{,}00034 + (2{,}0145)(0{,}003363)) + \frac{0{,}003363}{2(0{,}02913)(0{,}00167)} = 34{,}8112$$

$$\mathrm{Var}(x_4) = \frac{\nu^2}{4aw^2} + cx_0^2$$

$$= \frac{(0{,}003363)^2}{4(0{,}00167)(0{,}02913)^2} + 0{,}004853 = 2$$

Zaten hatırlanacak olursa problem formulasyonunda amaç yatırımcının nihai varlığının beklenen değerini, risk 2 değerini aşmayacak biçimde maksimize etmekti. Yukarıda elde edilen $\mathrm{Var}(x_4) = 2$ değeri bir anlamda yapılan işlemlerin ve elde edilen parametrelerin doğruluğunu test etmektedir.

2.6.2. Risksiz ve Riskli Varlıklardan Oluşan Portföy

Riskli ve risksiz varlıklardan oluşan portföy seçimine örnek olarak bir önceki bölümde kullanılan verilere ek olarak beklenen getirisi kesin olarak bilinen risksiz varlık eklenecektir. Ancak işlem sayısının fazlalılığı sebebiyle hisse senetlerinden sadece üç tanesi (Akbank(A), Garanti(B), Migros(C)) portföye eklenecektir. Dördüncü varlık ise risksiz faiz oranını temsil etmektedir.

Başlangıçta yatırımcının bir birim varlığı olduğunu varsayarak önümüzdeki dört dönem içerisinde oluşacak (T = 4) optimum portföyleri elde etmeye çalışalım. Bunun yanında yatırımcının riskte kaçınma katsayısının 2 olduğunu varsayalım.($\partial \mathrm{E}(x_4)/\partial \mathrm{Var}(x_4) = 2$) Bu durumda amaç $\mathrm{E}(x_4)$-$2\mathrm{Var}(x_4)$ fonksiyonunu maksimize etmek olacaktır. Her bir hisse senedinin bahsedilen dönem içerisindeki ortalama getirisi sırasıyla, $\mathrm{E}(e_t^A) = 1{,}002706$ $\mathrm{E}(e_t^B) = 1{,}002566$ $\mathrm{E}(e_t^C) = 1{,}001446$ ve $s_t = \mathrm{E}(e_t^D) = 1{,}001;$ $t = 0,1,2,3$ olarak hesaplanmıştır. Kovaryans matrisi bir önceki bölümde tanımlandığı gibidir.

En düşük ortalama getiri oranına sahip olan varlık risksiz varlık olduğundan, s_t temel kabul ederek getiri vektörünü oluşturalım.

$$\mathrm{E}(\mathbf{P_t}) = \left[e_t^A - s_t\,;\, e_t^B - s_t\,;\, e_t^C - s_t\right]'$$

$$= \left[0{,}001706\,;\, 0{,}001566\,;\, 0{,}000466\right]' \qquad t = 0,1,2,3$$

$E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisi tek dönemli durağan portföy seçiminde yer alan kovaryans matrisinin çok dönemli dinamik portföy seçimindeki karşılığıdır ve zaman içerisinde hisse senetlerinin birbirine bağımlı değişimlerini temsil etmektedir. $\mathbf{P_t}$ vektörü kullanılarak $E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisi aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$E(\mathbf{P_t P_t'}) = E\left[\begin{pmatrix} e_t^A - s_t \\ e_t^B - s_t \\ e_t^C - s_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_t^A - s_t & e_t^B - s_t & e_t^C - s_t \end{pmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (e_t^A - s_t)^2 & (e_t^A - s_t)(e_t^B - s_t) & (e_t^A - s_t)(e_t^C - s_t) \\ (e_t^A - s_t)(e_t^B - s_t) & (e_t^B - s_t)^2 & (e_t^B - s_t)(e_t^C - s_t) \\ (e_t^A - s_t)(e_t^C - s_t) & (e_t^B - s_t)(e_t^C - s_t) & (e_t^C - s_t)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}0017556 & 0{,}0014837 & 0{,}0010368 \\ 0{,}0014837 & 0{,}002288 & 0{,}001043 \\ 0{,}0010368 & 0{,}001043 & 0{,}001378 \end{bmatrix}, \qquad t = 0,1,2,3$$

Yukarıda elde edilen $E(\mathbf{P_t P_t'})$ matrisindeki değerlerin daha kolay anlaşılabilmesi açısından yapılan hesaplamalar aşağıda verilmektedir.

$$E(e_t^A - s_t)^2 = E^2(e_t^A) - 2s_t E(e_t^A) + (s_t)^2 = 1{,}007172 - 2(1{,}0037087) + (1{,}001)^2 = 0{,}0017556$$

$$E(e_t^B - s_t)^2 = E^2(e_t^B) - 2s_t E(e_t^B) + (s_t)^2 = 1{,}007424 - 2{,}007137 + (1{,}001)^2 = 0{,}002288$$

$$E(e_t^C - s_t)^2 = E^2(e_t^C) - 2s_t E(e_t^C) + (s_t)^2 = 1{,}004312 - 2(1{,}0024675) + (1{,}001)^2 = 0{,}001378$$

$$E(e_t^A - s_t)(e_t^B - s_t) = E(e_t^A e_t^B) - s_t\left(E(e_t^A) + E(e_t^B)\right) + (s_t)^2$$
$$= 1{,}00676 - (1{,}001)(2{,}005272) + (1{,}001)^2 = 0{,}0014837$$

$$E(e_t^A - s_t)(e_t^C - s_t) = E(e_t^A e_t^C) - s_t\left(E(e_t^A) + E(e_t^C)\right) + (s_t)^2$$
$$= 1{,}005212 - (1{,}001)(2{,}004172) + (1{,}001)^2 = 0{,}0010368$$

$$E(e_t^B - s_t)(e_t^C - s_t) = E(e_t^B e_t^C) - s_t\left(E(e_t^B) + E(e_t^C)\right) + (s_t)^2$$
$$= 1{,}005078 - (1{,}001)(2{,}006036) + (1{,}001)^2 = 0{,}001043$$

Yukarıda açıklanan hesaplamalar gerçekleştirilirken $E(\mathbf{e_t e_t'}) = \mathrm{Cov}(\mathbf{e_t}) + E(\mathbf{e_t})E(\mathbf{e_t'})$ bağıntısı gözönünde bulundurulmalıdır. Dönemsel olarak optimum

portföyün ve etkin sınırın elde edilebilmesi için μ, ν, τ ve a, b, c parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu amaçla öncelikle B_t , A_t^1, A_t^2, B_t^1 ve B_t^2 parametrelerinin elde edilmesi gerekmektedir.

$$B_t = E(\mathbf{P}_t')\,E^{-1}(\mathbf{P}_t\mathbf{P}_t')\,E(\mathbf{P}_t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}001706 & 0{,}001566 & 0{,}000466 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1539{,}611 & -718{,}1 & -614{,}87 \\ -718{,}1 & 1002{,}241 & -218{,}296 \\ -614{,}87 & -218{,}296 & 1353{,}541 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}001706 \\ 0{,}001566 \\ 0{,}000466 \end{bmatrix}$$

$$= 0{,}0020995 \qquad ; t = 0,1,2,3$$

$$A_t^1 = s_t(1 - B_t) = (1{,}001)(1 - 0{,}0020995) = 0{,}998898 \qquad ; t = 0,1,2,3$$

$$A_t^2 = s_t^2(1 - B_t) = (1{,}001)^2(1 - 0{,}0020995) = 0{,}999897 \qquad ; t = 0,1,2,3$$

Hesaplanan A_t^1 ve A_t^2 parametreleri bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum B_t^1 ve B_t^2 için geçerli değildir. Bu nedenle, B_t^1 ve B_t^2 parametrelerinin her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanmaları gerekmektedir.

$$B_t^1 = \frac{B_t}{2\prod_{k=t+1}^{3} s_k} \qquad ; t = 0,1,2,3$$

t=0 için $$B_0^1 = \frac{B_0}{2\prod_{k=1}^{3} s_k} = \frac{0{,}0020995}{2(1{,}001)^3} = 0{,}0010466$$

t=1 için $$B_1^1 = \frac{B_1}{2\prod_{k=2}^{3} s_k} = \frac{0{,}0020995}{2(1{,}001)^2} = 0{,}0010477$$

t=2 için $$B_2^1 = \frac{B_2}{2\prod_{k=3}^{3} s_k} = \frac{0{,}0020995}{2(1{,}001)} = 0{,}0010487$$

t=3 için $$B_3^1 = \frac{B_3}{2\prod_{k=4}^{3} s_k} = \frac{0{,}0020995}{2} = 0{,}0010498$$

Benzer biçimde B_t^2 parametresi de aşağıdaki gibi elde edilebilecektir.

$$B_t^2 = \frac{B_t}{4\left(\prod_{k=t+1}^{3} s_k\right)^2} \qquad ; t = 0,1,2,3$$

t=0 için $$B_0^2 = \frac{B_0}{4\left(\prod_{k=1}^{3} s_k\right)^2} = \frac{0,0020995}{4(1,001)^6} = 0,00052174$$

t=1 için $$B_1^2 = \frac{B_1}{4\left(\prod_{k=2}^{3} s_k\right)^2} = \frac{0,0020995}{4(1,001)^4} = 0,00052278$$

t=2 için $$B_2^2 = \frac{B_2}{4\left(\prod_{k=3}^{3} s_k\right)^2} = \frac{0,0020995}{4(1,001)^2} = 0,00052383$$

t=3 için $$B_3^2 = \frac{B_3}{4\left(\prod_{k=4}^{3} s_k\right)^2} = \frac{0,0020995}{4} = 0,00052488$$

Dikkat edilecek olursa son döneme ulaşıldığında $\prod_{k=T}^{T-1} s_k$ ifadesinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak çarpım sembolü böyle bir özelliğe sahip olmadığından bu mümkün değildir. Bu durumda $\prod_{k=T}^{T-1} s_k = 1$ olarak tanımlanarak sorun giderilmektedir. Bunun yanında özel olarak , $\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t)$ ifadesi elde edilirken $\prod_{t=0}^{T-1}(1-B_t) = 1 - \sum_{t=0}^{T-1}\prod_{k=t+1}^{T-1}(1-B_k)B_t$ bağıntısı kullanılmaktadır.

$$\prod_{t=0}^{3}(1-B_t) = 1 - \sum_{t=0}^{3}\prod_{k=t+1}^{3}(1-B_k)B_t = 1 - \left\{B_0\prod_{k=1}^{3}(1-B_k) + B_1\prod_{k=2}^{3}(1-B_k)\right\}$$

$$+ B_2\prod_{k=3}^{3}(1-B_k) + B_3\prod_{k=4}^{3}(1-B_k)$$

$$\prod_{t=0}^{3}(1-B_t) = 1-((0{,}0020995)(1-0{,}0020995)^3 + (0{,}0020995)(1-0{,}0020995)^2$$

$$+ (0{,}0020995)(1-0{,}0020995) + (0{,}0020995)) = 0{,}9916244$$

B_t, A_t^1, A_t^2, B_t^1 ve B_t^2 parametrelerinin elde edilmesi ile birlikte μ, ν, τ ve a, b, c parametreleri hesaplanabilecektir.

$$\mu = \prod_{t=0}^{3} s_t(1-B_t) = (1{,}001)^3(0{,}9916244) = 0{,}994602$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left[1-\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)\right] = \frac{1}{2}(1-0{,}9916244) = 0{,}004188$$

$$\tau = \prod_{t=0}^{3} s_t^2(1-B_t) = (1{,}001)^6(0{,}9916244) = 0{,}997590$$

$$a = \frac{1}{4}\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)\left[1-\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)\right] = \frac{1}{4}(0{,}9916244)(1-0{,}9916244) = 0{,}0020764$$

$$b = 2\prod_{t=0}^{3} s_t = 2(1{,}001)^3 = 2{,}006 \quad \text{ve} \quad c = 0$$

Bütün parametrelerin elde edilmesi ile birlikte verilen problem için ortalama-varyans etkin sınır aşağıdaki biçimde elde edilebilecektir. Ek olarak dönem sayısının arttırılması ile birlikte etkin sınırda meydana gelen değişimlerin incelenmesi de mümkündür.

$$\mathrm{Var}(x_4) = \frac{\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)}{1-\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)}\left[E(x_4) - x_0\prod_{t=0}^{3} s_t\right]^2$$

$$E(x_4) \geq \prod_{t=0}^{3} x_0 s_t$$

$$\mathrm{Var}(x_4) = \frac{0{,}9916244}{1-0{,}9916244}\left[E(x_4) - (1{,}001)^3\right]^2$$

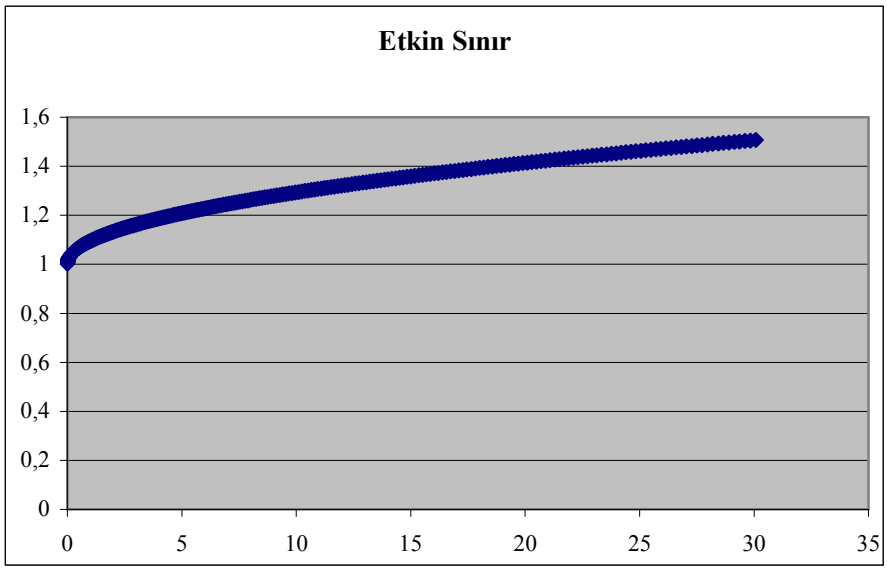
$$E(x_4) \geq (1{,}001)^3$$

Gerekli sadeleştirmeler gerçekleştirildiği takdirde etkin sınır elde edilmiş olur. Böylece yatırımcı, belirli bir risk seviyesinde elde edebileceği en yüksek getiri oranını veya belirli bir getiri seviyesinde elde edebileceği en düşük riski hesaplayabilecektir.

$$\mathrm{Var}(x_4) = 118{,}3944\left[\mathrm{E}(x_4) - 1{,}003\right]^2$$
$$\mathrm{E}(x_4) \geq 1{,}003$$

Şimdi etkin sınırı grafik üzerinde göstermeye çalışalım. Grafikte y-ekseni nihai varlığın beklenen değerini temsil ederken x-ekseni varyansı temsil etmektedir.

Grafik 2.2 Ortalama-Varyans Etkin sınır (T = 4)



Etkin sınırın elde edilmesi ile birlikte sadece her bir dönem için optimal portföy stratejisinin belirlenmesi kalmaktadır. Optimal portföy stratejisinin belirlenmesi ile birlikte dönemsel olarak her bir varlıktan hangi miktarda elde bulundurulacağı kararlaştırılmış olur. Ancak optimal portföy stratejisinin değişkenlerinden bir tanesi riskten kaçınma katsayısı olduğundan öncelikle yatırımcı için bu parametrenin belirlenmesi gerekmektedir. Verilen örnekte özel olarak bu değer $w = 2$ olarak seçilmiştir. Belirlenen riskten kaçınma katsayısına karşılık gelen optimal portföy stratejisi aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$u_t^* = -\mathbf{K_t} x_t + \mathbf{v_t}$$

$$\mathbf{K_t} = s_t\, \mathrm{E}^{-1}(\mathbf{P_t P_t'})\mathrm{E}(\mathbf{P_t}) = \begin{bmatrix} 1{,}21672 \\ 0{,}24295 \\ -0{,}76083 \end{bmatrix}, \qquad t = 0{,}1{,}2{,}3$$

$$\mathbf{v_t} = \left(\prod_{k=0}^{3} s_k x_0 + \frac{1}{2w\left(\prod_{k=0}^{3}(1-B_k)\right)} \right) \left(\prod_{k=t+1}^{3} \frac{1}{s_k} \right) E^{-1}(\mathbf{P_t}\mathbf{P_t'}) E(\mathbf{P_t})$$

Hesaplanan $\mathbf{K_t}$ vektörü bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum $\mathbf{V_t}$ vektörü için geçerli değildir. Dolayısıyla her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir. Her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanan optimal portföy stratejisi aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1{,}48073 \\ 0{,}29596 \\ -0{,}92592 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}52255 \\ 0{,}030402 \\ -0{,}95207 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1{,}524073 \\ 0{,}030432 \\ -0{,}953022 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1{,}525597 \\ 0{,}0304623 \\ -0{,}953975 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen vektörler her bir dönem için sırasıyla Akbank, Garanti ve Migros hisse senetlerine yatırılan varlık miktarlarıdır. Migros için verilen miktarın negatif olması açığa satışın varolduğunu göstermektedir. Açığa satış neticesinde elde edilen varlık, diğer hisse senetlerini finanse etmede kullanılmaktadır. Açığa satış miktarı için herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır.

Uygulamanın başlangıcında temel olarak seçilen risksiz faiz oranı için ayrılan varlık miktarı ise yine her bir dönem için $(x_t - \sum u_t^i)$ bağıntısı kullanılarak elde edilebilecektir. Bu bağıntı, bankadan borçlanılacak miktarın başlangıç varlığı ile açığa satış neticesinde elde edilen toplam varlıktan diğer senetlere yapılan yatırımın çıkartılması ile elde edilebileceğini söylemektedir. Çok dönemli portföy stratejisinin uygulanması neticesinde karşılaşılan beklenen getiri ve varyans değeri aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır.

$$E(x_4) = \prod_{t=0}^{3} s_t x_0 + \frac{1-\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)}{2w\left(\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)\right)} = (1{,}001)^3 + \frac{1-0{,}9916244}{4(0{,}9916244)} = 1{,}00511$$

$$Var(x_4) = \frac{1-\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)}{4w^2\left(\prod_{t=0}^{3}(1-B_t)\right)} = \frac{1-0{,}9916244}{16(0{,}9916244)} = 0{,}000528$$

2.6.3. Faydanın Beklenen Değerinin Maksimizasyonu ile Seçim

Faydanın beklenen değerinin maksimizasyonu ile çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimine örnek olarak bir önceki bölümde ele alınan veriler kullanılacaktır. Ancak yatırımcıya ait fayda fonksiyonunun aşağıda verilen biçimde olduğu varsayılmaktadır. Faydanın beklenen değeri maksimizasyonu ile portföy seçimi yatırımcıya ait fayda fonksiyonunu bu şekilde farklı biçimlerde seçme olanağı sağlamaktadır.

$$U\left(E(x_4), Var(x_4)\right) = E^2(x_4) - e^{Var(x_4)}$$

Bu durumda (2.81) bağıntısı kullanılarak fayda fonksiyonunu γ parametresine göre ekstremum değerlerinin elde edilmesi mümkün olacaktır.

$$\nu = \frac{1}{2}\left[1 - \prod_{t=0}^{3}(1 - B_t)\right] = \frac{1}{2}(1 - 0{,}9916244) = 0{,}004188$$

$$\frac{dU}{d\gamma} = \left(\frac{\partial U}{\partial E(x_T)} - 2E(x_T)\frac{\partial U}{\partial Var(x_T)}\right)\nu + \frac{\partial U}{\partial Var(x_T)}\nu\gamma$$

$$= \left[2E(x_4) + 2E(x_4)e^{Var(x_4)}\right]\nu - e^{Var(x_4)}\nu\gamma$$

$$= 2E(x_4)\left(1 + e^{Var(x_4)}\right)\nu - e^{Var(x_4)}\nu\gamma$$

$$= 0{,}008376\,E(x_4)\left(1 + e^{Var(x_4)}\right) - 0{,}004188e^{Var(x_4)}\gamma$$

Yukarıda elde edilen türev ifadesini sıfır yapan γ değeri fayda fonksiyonunu maksimize edecektir. Eşitlikte yer alan $E(x_T)$ ve $Var(x_T)$ ifadelerinin her ikisi de γ parametresine bağlıdır. Bu ise çözümü güçleştirmektedir. Bu durumda doğrusal olmayan optimizasyon tekniklerinden tek boyutlu arama teknikleri kullanılarak γ parametresinin optimum değeri elde edilebilir.

γ parametresinin optimum değerinin hesaplanabilmesi için paket programların da kullanımı mümkündür. Örneğin doğrusal olmayan fonksiyonların optimizasyonuna olanak sağlayan LINGO programı ile optimum γ aşağıda verilen model ile elde edilebilecektir. Modele bir önceki bölümde elde edilen etkin sınırın da eklenmesi gerekliliği göz önünde bulundurulmalıdır.

$MAX = E^2(x_4) - e^{Var(x_4)};$

$0{,}008376\ E(x_4)\ (1+e^{Var(x_4)}) - 0{,}004188\ e^{Var(x_4)}\ \gamma = 0;$

$Var(x_4) = 118{,}3944\ (E(x_4)-1{,}003)^2;$

$E(x_4) \geq 1{,}003;$

END

Modelin çözülmesi neticesinde optimum γ değeri ve γ parametresinin bu değerine karşılık fayda fonksiyonunun alacağı değer aşağıda verilen biçimde elde edilecektir.

$U(E(x_4), Var(x_4)) = 0{,}014542$

$E(x_4) = 1{,}011491$

$Var(x_4) = 0{,}008535$

$\gamma = 4{,}02877$

Belirlenen optimum γ parametresine karşılık gelen çok dönemli optimal portföy stratejisi aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$u_t^* = -\mathbf{K_t} x_t + \mathbf{v_t}$$

$$\mathbf{K_t} = s_t\, E^{-1}(\mathbf{P_t}\mathbf{P_t'})E(\mathbf{P_t}) = \begin{bmatrix} 1{,}21672 \\ 0{,}24295 \\ -0{,}76083 \end{bmatrix}, \qquad t = 0,1,2,3$$

$$\mathbf{v_t}(\gamma) = \frac{1}{2}\,\gamma \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{A_k^1}{A_k^2} \right) E^{-1}(\mathbf{P_t}\mathbf{P_t'})E(\mathbf{P_t}), \qquad t = 0,1,2,3$$

Hesaplanan $\mathbf{K_t}$ vektörü bütün dönemler için birbirine eşittir. Ancak aynı durum $\mathbf{V_t}$ vektörü için geçerli değildir. Dolayısıyla her bir dönem için ayrı ayrı

hesaplanması gerekmektedir. Her bir dönem için ayrı ayrı hesaplanan optimal portföy stratejisi aşağıda verilmektedir.

$$\mathbf{v}_0(\gamma) = \frac{1}{2}(4{,}02877)\left(\frac{0{,}998898}{0{,}999897}\right)^3 \begin{bmatrix} 1{,}215504 \\ 0{,}242705 \\ -0{,}76007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}44116 \\ 0{,}487437 \\ -1{,}52650 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1(\gamma) = \frac{1}{2}(4{,}02877)\left(\frac{0{,}998898}{0{,}999897}\right)^2 \begin{bmatrix} 1{,}215504 \\ 0{,}242705 \\ -0{,}76007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}443603 \\ 0{,}487925 \\ -1{,}528016 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2(\gamma) = \frac{1}{2}(4{,}02877)\left(\frac{0{,}998898}{0{,}999897}\right) \begin{bmatrix} 1{,}215504 \\ 0{,}242705 \\ -0{,}76007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}446047 \\ 0{,}488413 \\ -1{,}529544 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3(\gamma) = \frac{1}{2}(4{,}02877) \begin{bmatrix} 1{,}215504 \\ 0{,}242705 \\ -0{,}76007 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}448493 \\ 0{,}488901 \\ -1{,}531074 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen vektörler her bir dönem için sırasıyla Akbank, Garanti ve Migros hisse senetlerine yatırılan varlık miktarlarıdır. Migros için verilen miktarın negatif olması açığa satışın varolduğunu göstermektedir. Açığa satış neticesinde elde edilen varlık, diğer hisse senetlerini finanse etmede kullanılmaktadır. Açığa satış miktarı için herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır. Uygulamanın başlangıcında temel olarak seçilen risksiz faiz oranı için ayrılan varlık miktarı ise yine her bir dönem için ($x_t - \sum u_t^i$) bağıntısı kullanılarak elde edilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
SÜREKLİ ZAMANLI ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ

3.1 SÜREKLİ ZAMANLI ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİMİ TEMEL KAVRAMLAR

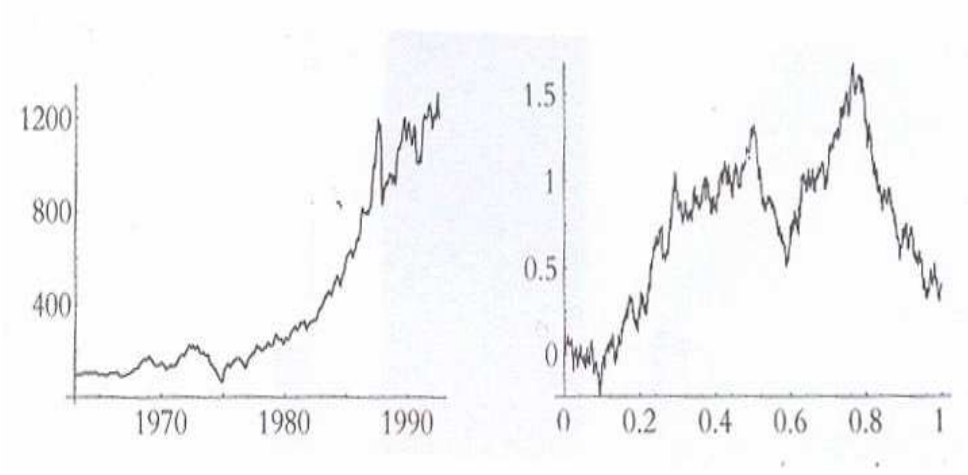
Bu bölümde sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi modelinin oluşturulması ve problemin çözülmesi safhalarında kullanılacak teorik altyapının kısaca tanıtılması hedeflenmektedir. Varlık getirilerinin modellenmesinde kullanılan Brownian hareket bir paranın ardı ardına atılması deneyi gibi çok basit olaylardan yola çıkılarak açıklanmaktadır. Aynı zamanda uygun yaklaşımlar kullanılarak sürekli zamanlı finans teorisine temel teşkil eden Brownian hareket, Itô'nun lemması ve Martingale gibi kavramlar açıklanmaktadır. Hisse senedi getirilerinin matematik modellenmesinde kullanılacak matematik teknikler olabildiğince açık bir biçimde tanıtılmaktadır. Son olarak uzun vadeli yatırımlar için tüketim ve portföy seçimi problemi yine bu bölümde açıklanmaktadır. Yine bu bölümde durağan portföy yönetiminin sürekli zamanlı hale genişletilmesinde uzun vadeli yatırımlar için tüketim ve portföy seçimi probleminin çözümünün ne şekilde kullanıldığı vurgulanmaktadır.

3.1.1. Varlık Getirileri için Brownian Hareket

Kimi zaman Wiener süreci olarak da adlandırılan Brownian Hareket, olasılık teorisinin uygulamada en çok kullanılan stokastik süreçlerden biridir. İskoç botanist Robert Brown tarafından tamamen sıvı veya gaz içerisine daldırılmış parçacıkların hareketini gözlemlemesi sonucu elde edilmiştir.[63] Brownian hareketin keşfinden sonra kuantum mekaniğinde atom içerisindeki herhangi bir partikülün yerinin tespitinde ve finansal piyasalarda fiyat seviyelerinin belirlenmesinde kullanılmıştır.

[63] Sheldon Ross, **Stochastic Processes,** John Wiley& Sons,Inc. ,Canada, 1996, s.356

Şekil 3.1 UK FTA Endeksi ve Brownian hareketin karşılaştırılması



Kaynak: Martin Baxter, Andrew Rennie, Financial Calculus:An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge University Pres, United Kingdom, 2003, s.45

Brownian hareket hakkında verilen ilk bilgiler 1905 yılında Einstein tarafından yayınlanmıştır. Albert Einstein yine süspansiyondaki parçacıkların bir modeli olarak Brownian hareketi düşünmüş ve Avagadro sayısını tahmin etmek için kullanmıştır.[64] Ancak tam olarak matematiksel modeli 1923 yılında Wiener tarafından oluşturulduğundan Brownian hareket aynı zamanda Wiener süreci olarak da adlandırılmaktadır.

Aslında, Louis Bachelier'nin Sorbonne Üniversitesi'nde 1900 yılında yazdığı "Spekülasyon Teorisi" isimli Doktora Tezi, yukarıda bahsedilen tekniklerin tümünü içermektedir. Ancak ne yazık ki dönemin finans ve ekonomi literatürü henüz bu kavramlara çok da hazır olmadığından tezi reddedilmiştir.[65] Bachelier'nin keşfi ile birlikte hisse senedi fiyatları, faiz oranları, döviz kurları ve fiyat endeksleri Brownian hareket ile tanımlanabilmektedir.[66] Aşağıda verilen bölümlerde varlık getirilerinin modellenmesinde kullanılan Brownian hareketi en basit halinden yani kesikli formdan başlayarak açıklanmaktadır.

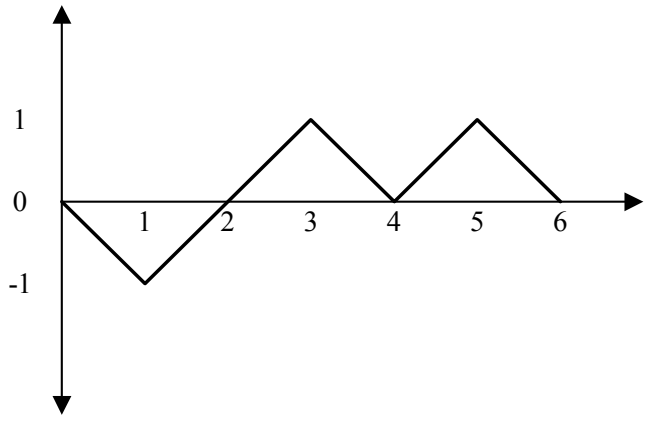
[64] Ömer Önalan, **Finans Mühendisliğinde Matematiksel Modelleme,** Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 2004, s.159
[65] Robert C. Merton, **Continuous-Time Finance,** Blackwell Publishers Inc., USA, 1998, s.xiv
[66] Thomas Mikosch, **Elementary Stochastic Calculus with Finance in View**, World Scientific Publishing Co.,USA, 2000, s.42

3.1.1.1. Markov Özelliği

Hisse senedi getirilerinin modellenmesinde stokastik süreçler sıklıkla kullanılmaktadır. Markov süreci olarak bu bölümde açıklanacak olan süreç, stokastik süreçlerin bir özel hali olarak adlandırılabilir. Markov süreçlerinin hisse senedi getirileri ile örtüşen en önemli özelliği olan Markov özelliği, herhangi bir değişkenin şu anki değerinin, değişkenin geçmişte aldığı değerlerden bağımsız olması olarak vurgulanabilir. Örneğin herhangi bir hisse senedinin Markov özelliğine sahip olması veya Markov sürecini takip etmesi durumunda, hisse senedi fiyatı için yapılabilecek en geçerli tahmin hisse senedinin şu anki fiyatıdır. Gelecek tahminleri belirsizdir ve olasılık dağılımları ile ifade edilmelidirler.[67]

Markov özelliğinin açıklanmasında hilesiz bir paranın peş peşe atılarak gözlemlenmesi örnek olarak verilebilir.[68] Örneğin hilesiz bir paranın ardı ardına altı defa atılarak TYYTYT dizisinin elde edildiğini düşünelim. Paranın hilesiz olması halinde, altıncı defa atılması neticesinde gözlemlenen tura yüzü daha önce elde edilen değerlerden bağımsızdır. Gözlemlenen her bir tura için bir birim varlık kaybettiğimizi ve her bir yazı için bir birim varlık kazandığımızı düşünelim. Hilesiz para atışı sonucu elde edilen getirinin atışa bağlı olarak grafiği aşağıda görülmektedir.

Şekil 3.2 Para atışı deneyinin çıktıları



Kaynak: Paul Wilmott, A.g.e.,s.65

[67] Ö. Önalan, **A.g.e.**, s.158
[68] Paul Wilmott, **Paul Wilmott on Quantitative Finance Vol. I,** John Wiley & Sons Ltd., USA, 2000, s.65

R_i rassal değişkeninin i.inci adımdaki kazancı veya kaybı temsil etmesi halinde değişkene ait ortalama, varyans ve kovaryans parametreleri $E(R_i)=0$, $E[(R_i)^2]=1$ ve $E(R_i\ R_j)=0$ olarak hesaplanabilir. Bu ise gözlemlenen atışlar neticesinde elde edilen getiriler dizisinin ortalamasının sıfır ve varyansının bir olduğunu, aynı zamanda atışlarda elde edilen sonuçların birbirinden bağımsız olduğunu vurgulamaktadır. Başka bir deyişle, bu örnekte beklentilerin geçmiş ile bağlantılı olup olmamasının bir önemi yoktur. Dizide görülen beş adet atışın sonucu altıncı atışın sonucunu kesinlikle etkilememektedir.

Bununla birlikte S_i rassal değişkenini i.inci atış dahil olmak üzere i.inci atışa kadar elde edilen toplam kazanç olarak tanımlayalım. Başlangıçta hiçbir varlığın olmaması tanımlamamızı daha kolaylaştıracaktır. ($S_0=0$) Ortalama ve varyans terimlerini S_i değişkeni için hesaplayacak olursak, $E(S_i)=0$ ve $E[(S_i)^2] = E[(R_1)^2 +2R_1R_2+\ldots] =i$ sonuçları elde edilir. Burada 'i' simgesi ile atış sayısı temsil edilmektedir. Diğer taraftan şimdiye kadar 5 atışın gerçekleştirildiğini düşünelim. Bu bilgi ışığında altı atışın beklenen değeri aşağıda verilen biçimde hesaplanacaktır. Elde edilen bu sonuç Markov özelliği olarak adlandırılabilir.

$$E\left[S_6 \mid \ R_1, R_2, \cdots, R_5\right] = S_5 \qquad (3.1)$$

Ancak (3.1) bağıntısının yorumlanmasında sıklıkla hata yapılmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli nokta, değişkenin bir önceki dönem değerine eşit olmak zorunda olmamasıdır. (3.1) bağıntısı sadece değişken için yapılacak en iyi tahminin değişkenin bir önceki dönemde aldığı değer olduğunun vurgulamaktadır.[69]

Piyasaya yeni bilginin ulaşması veya yeniden örneğimize dönecek olursak, paranın tekrar atılması sonucu gözlemlenecek değer bu sonuçtan farklı olabilir. İleride gerçekleştirilecek diğer tanımlamalar da Markov özelliğini sağlamaktadır ve yorumlama esnasında bu kriter göz önünde bulundurulmalıdır. Varolan finans literatürünün büyük bir kısmı Markov süreçleri üzerine kurulmuştur ve modeller ile kısmi türevli diferansiyel denklemler arasındaki ilişkiyi kurmaktadır.[70] Paranın her

[69] D.Lamberton, B. Lapeyre, **Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance ,** Chapman &Hall /CRC, USA, 2000, s.32

[70] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, **Methods of Mathematical Finance,** Springer-Verlag New York Inc., USA, 1998, s.5

bir atılışında bir birim varlık kazanma veya bir birim varlık kaybetme ihtimallerinden sadece bir tanesi geçerli olduğundan $\left|S_i - S_j\right| = 1$ olduğu söylenebilir. Kareli farklar göz önüne alındığında ele alınan problem için kuadratik değişim aşağıda verilen biçimde tanımlanabilir.

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2 = i \tag{3.2}$$

(3.2) bağıntısı para atılması deneyinde varyansı ifade eden kareli farkların atış sayısı ile orantılı olarak arttığını belirtmektedir. Bu noktada paranın atılması için herhangi bir zamanlama kısıtı göz önüne alınmamaktadır. Başka bir deyişle gözlemlerin kesikli olduğu söylenebilir. Ancak sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi açısından gözlemlerin sürekli zamanlı hale dönüştürülmesi daha uygun olacaktır. Gözlemlerin sürekli hale dönüşmesi ile birlikte atış sayısının yerini zaman alacaktır.

3.1.1.2. Sürekli Zamanlı Stokastik Süreçler

Zamana bağlı olarak değeri belirsiz biçimde değişen her değişken stokastik süreç olarak adlandırılır ve sürekli ve kesikli olarak iki grupta sınıflandırılabilir. Değişkenin değerinin sadece belirli zamanlarda değiştiği stokastik süreçler kesikli olarak adlandırılırken, gözlemin sürekli olarak gerçekleştirilmesi durumunda sürekli zamanlı stokastik süreçler olarak adlandırılacaktır.

Menkul kıymetler piyasası göz önünde bulundurulacak olursa, gözlemlerin sadece piyasa açık olduğu zaman gerçekleştirilmesinden dolayı, hisse senedi fiyatlarının kesikli zamanlı stokastik süreçlere uygun olduğunu söylemek daha doğru olacaktır. Ancak yapılacak çeşitli varsayımlar ile hisse senedi fiyatlarının sürekli zamanlı stokastik süreçlere uygun olduğunu belirtmek ileriki bölümlerde gerçekleştirilecek uygulamalar açısından daha uygun olacaktır. Bu noktada hilesiz para atma uygulamamızın sürekli zamanlı stokastik süreçlere uygun hale dönüştürülmesi gerekmektedir.

Markov sürecini takip eden bir değişkenin μ ortalama ve σ standart sapma ile normal dağılım gösterdiğini varsayalım. Dönem sayısının arttırılması durumunda dikkate alınan ortalama ve standart sapma parametrelerinin tespit edilmesinde normal

dağılım özellikleri kullanılmaktadır. Göz önüne alınan değişken Markov sürecini takip ettiğinden iki ayrı dönem için dikkate alınan dağılımlar birbirinden bağımsızdır. Dolayısıyla iki bağımsız normal değişkenin toplanması neticesinde oluşan yeni değişkenin ortalaması ayrı ayrı değişkenlerin ortalamaları toplamı ve yeni değişkenin varyansı ayrı ayrı değişkenlerin varyansları toplamı olmaktadır.[71] ($X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$; $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$)

Tekrar para atma örneğimize dönecek olursak, altı adet zarın atılması için gereken toplam süre t saniye olsun. Bu durumda her bir atış t/6 saniye gerektirecektir. Bunun yanında her bir atış için kazanılacak veya kaybedilecek varlık miktarı $\sqrt{t/6}$ olacaktır. Yeni durumda incelenen değişken yine Markov özelliği göstermektedir ve kuadratik değişimi aşağıda verildiği gibi hesaplanabilir.

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2 = 6 \times \left(\sqrt{\frac{t}{6}} \right)^2 = t \qquad (3.3)$$

Burada amaç kuadratik değişimi zaman cinsinden tanımlayabilmektir. Böylelikle para atış miktarının arttırılması neticesinde sürekli zamanlı stokastik süreç elde edilmiş olur. Yukarıda bahsedilen S_j- S_{j-1} farkları sıfır ortalama ve t varyans ile dağılmaktadır.[72]

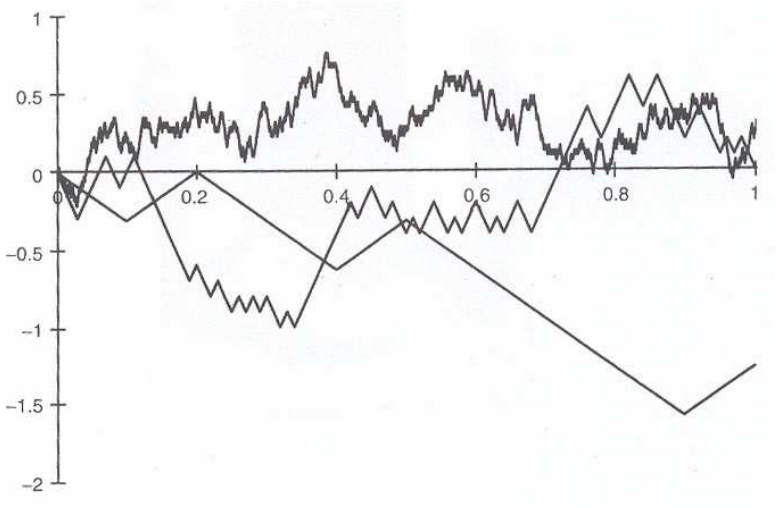
$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2 = n \times \left(\sqrt{\frac{t}{n}} \right)^2 = t \qquad (3.4)$$

Atışlar arası geçen sürenin kısaltılması veya başka bir deyişle, limit alma işlemi ile atış sayısının(n) sonsuz büyütülmesi ve her bir atış için daha küçük bahis miktarı yatırılması ile birlikte kesikli zamanlı stokastik süreç, sürekli zamanlı stokastik sürece dönüştürülmüş olur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, zaman ölçeğinin 1/n ile orantılı biçimde küçültülürken, bahis miktarının $1/\sqrt{n}$ ile orantılı biçimde küçültülmesidir. [73] Bu ise varlık getirilerinin Brownian harekete uygun davranmasının bir sonucudur.

---

[71] John C. Hull, **Options, Futures and Other Derivatives Fifth Edition,** Prentice Hall, USA, 2003, s.217
[72] M. Baxter, A. Rennie, **A.g.e.** , s.48
[73] M. Baxter, A. Rennie, **A.e.** , s.46

Şekil 3.3 Atış sayısının artması neticesinde deney çıktıları



Kaynak : Paul Wilmott, A.g.e. , s.68

Yukarıda farklı para atma sayıları için elde edilen getirinin grafiği görülmektedir. Atışlar arası geçen sürenin kısalması veya atış sayısının arttırılması neticesinde getirilerin grafiği bir sonraki bölümde daha detaylı olarak açıklayacağımız Brownian hareketi andırmaktadır.

3.1.1.3. Brownian Hareket

Wiener süreci tanımlamasından dolayı W sembolü ile temsil edilen Brownian hareket $\Re^d$ uzayında aşağıda verilen koşulları sağlayan bir stokastik süreçtir.[74]

- Süreç süreklidir ve sıfırdan başlamaktadır.

$$P(W_0=0)=1$$

- Sürece ait artım miktarları, sıfır ortalama ve t varyans ile normal dağılmaktadır.

$$\forall s > t\,, \qquad W_s - W_t \sim N(0,t)$$

- Sürece ait artım miktarları birbirinden bağımsızdır.

$$\forall\, t_0, t_1, \cdots, t_n \text{ için } 0 < t_0 < \cdots < t_n < \infty \text{ olmak üzere}$$

$$Cov(W(t_i)-W(t_{i-1}),\ W(t_j)-W(t_{j-1})) = 0$$

[74] Ales Cerny, **Mathematical Techniques in Finance,** Princeton University Press, USA, 2004, s.223

Brownian hareketin en önemli karakteristiği artım miktarlarının istatistiksel olarak bağımsız olmasıdır. Bu özellik daha önceki bölümlerde açıklanan Markov özelliği ile örtüşmektedir ve geçmişte gözlemlenen değişikliklerin geleceği tahmin etmede kullanılamayacağı anlamına gelmektedir. Bir başka önemli özellik ise değişkenliğin yani varyansın zamana doğrusal olarak bağımlı olmasıdır. Bu ise yapılacak tahminlerin zaman ilerledikçe daha anlamsız hale geleceğini vurgulamaktadır. Brownian hareketin artım miktarı dW_t simgesi ile gösterilmekte olup $dW_t = W_{t+dt}-W_t$ biçiminde tanımlanmaktadır. Dikkat edilecek olursa bu ifade zamanda meydana gelecek çok küçük bir artım neticesinde meydana gelecek değişim miktarını temsil etmektedir. dW_t parametresi piyasaya ulaşan yeni bilgi neticesinde hisse senedi fiyatında gerçekleşen önceden tahmin edilemeyen değişiklik olarak yorumlanabilir. Bunun yanında Brownian hareket daha bir çok ilginç özelliğe sahiptir.[75]

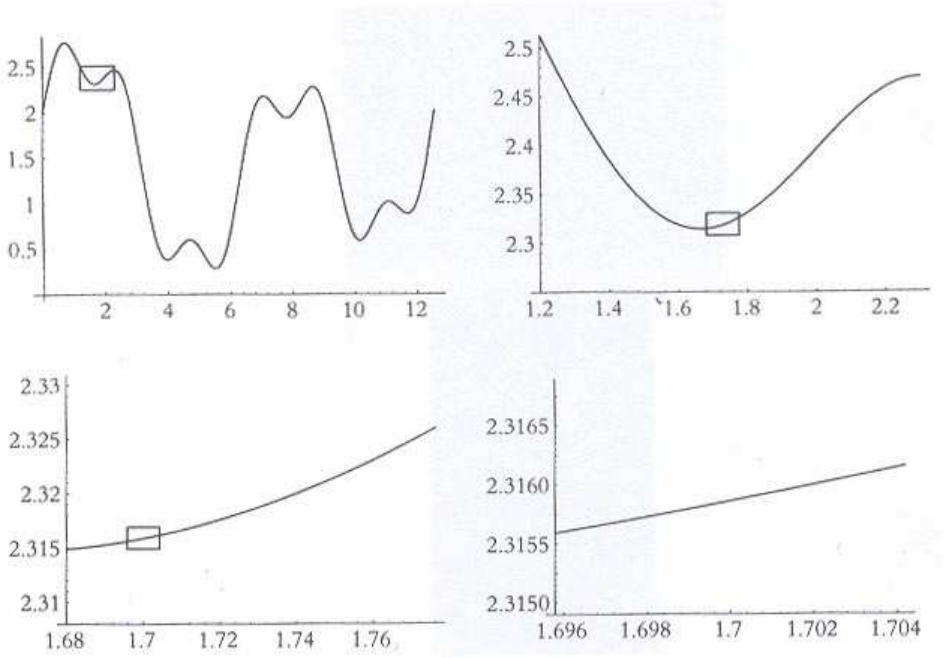
- Brownian hareket her yerde sürekli olmasına rağmen hiçbir yerde türevlenebilir değildir.
- Sınırsız büyüme ve sınırsız küçülme özelliğine sahiptir. Dolayısıyla verilen herhangi bir nokta Brownian hareket tarafından ne kadar büyük veya ne kadar küçük olursa olsun (1 olasılıkla) kesilecektir.
- Brownian hareket bir noktaya ulaşacak olursa, o noktayı sonsuz defa daha kesecektir.
- Brownian hareketi ne kadar küçük bir ölçek ile incelerseniz inceleyin yine kendisine benzer bir yapı gösterecektir.Diğer bir değişle Brownian hareket fraktal bir yapı göstermektedir.

Bunun dışında Brownian hareket her ne kadar bir ve iki boyutta verilen her noktaya ulaşma özelliğine sahip olsa da üç boyutlu uzay için bu özellik geçerli değildir. Rus matematikçi Polya bu özelliği "Sarhoş bir adam evinin yolunu her zaman bulur, sarhoş bir kuş ise asla!" sözü ile özetlemektedir. Son olarak, Brownian hareket kısaca rassal yürüyüşün sonsuzda limiti olarak tanımlanabilir. Bu noktada özellikle Brownian hareketin fraktal yapısı üzerinde durmak gerekmektedir.

[75] M. Baxter, A. Rennie, **A.g.e**.,s.49

Açıklamamızı daha rahat yapabilmek açısından aşağıda verilen grafik faydalı olacaktır.

Şekil 3.4 Fonksiyonun 1.7 civarında incelenmesi

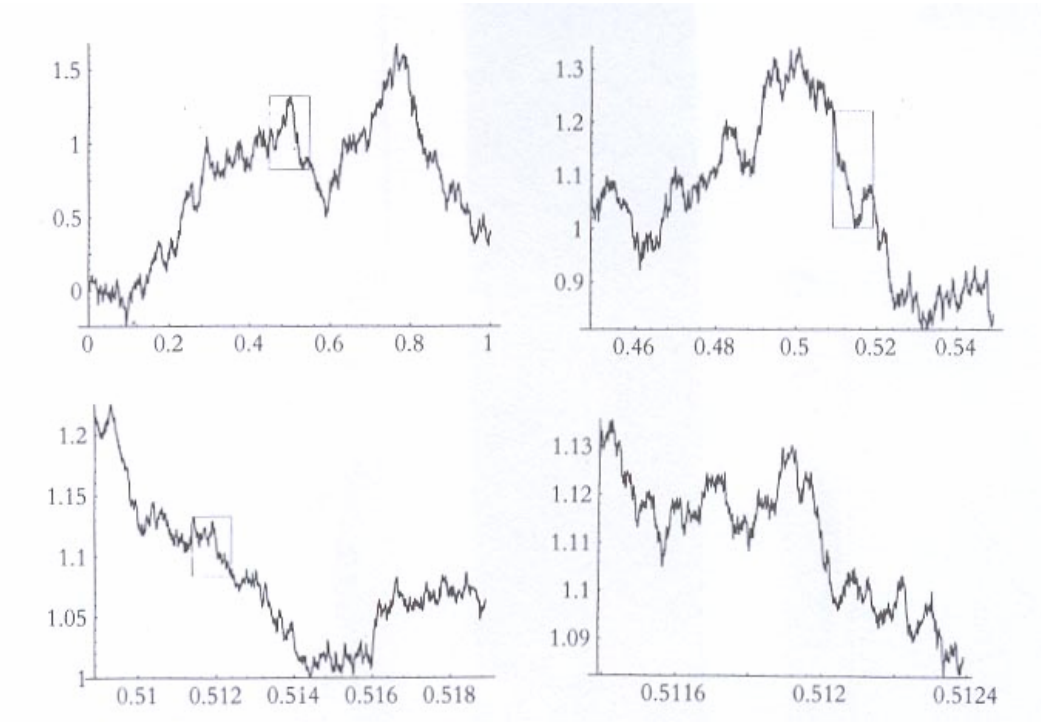


Kaynak: M. Baxter, A. Rennie, A.g.e.,s.52

Görüldüğü üzere verilen nokta etrafında daha yakından incelenme yapıldıkça fonksiyonun değişim hızı sabit bir değere yakınsamaktadır. İlk grafik fonksiyonun primal halini verirken, fonksiyonun 1.7 civarında daha yakından incelenmesi neticesinde bir parabole benzediği görülmektedir. Son grafiğe gelindiğinde eğrinin artık bir doğruya dönüştüğü, başka bir deyişle artış hızının sabit bir reel sayıya yakınsadığı görülmektedir.

Fonksiyonun bir nokta civarında daha da küçülen bir aralıkta değişiminin incelenmesi ise türev kavramını çağrıştırmaktadır. Elde edilen sabit sayı, fonksiyona bu noktada çizilen teğetin eğimi yani fonksiyonun bu noktadaki türev değeridir.

Şekil 3.5 Brownian hareketin yakından incelenmesi



Kaynak: M. Baxter, A. Rennie, A.g.e.,s.54

Yukarıda verilen grafikte ise her bir adımda Brownian hareketin yakından incelenmesi görülmektedir. Şekil 3.4'te verilen fonksiyonun aksine Brownian hareketin daha yakından incelenmesi neticesinde yine kendisine benzer yapıda bir grafik ortaya çıkmaktadır. Bu ise Brownian hareketin hiçbir yerde türevlenememesi sonucunu doğurmaktadır. Daha doğrusu bilinen klasik türev operatörü Brownian hareketi takip eden bir stokastik süreç için hiçbir noktada kullanılamamaktadır. Itô'nun lemması ile ifade edilen yeni türev alma operatörü bu tip durumlarda türev alma işlemini mümkün kılmaktadır.

3.1.2. Itô'nun Lemması

Hatırlanacağı üzere bir önceki bölümde Brownian hareketin her yerde sürekli olduğu fakat fraktal yapısından dolayı hiçbir yerde türevinin alınamadığından bahsedilmişti. Bu bölümde stokastik matematiğin en önemli kurallarından bir tanesi olan Itô'nun lemması yani bu tip durumlarda türev alma işleminin ne şekilde gerçekleştirileceği açıklanmaya çalışılacaktır. Itô'nun lemması açıklanmadan önce

Itô sürecinin tanımlanması gerekmektedir. Aşağıda verilen biçimde tanımlanan sürekli zamanlı stokastik süreç Itô süreci olarak adlandırılmaktadır.

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \tag{3.5}$$

(3.5) ifadesi ile verilen bağıntı bir stokastik diferansiyel denklemdir.[76] Bu ifadede yer alan μ terimi trend (drift) olarak adlandırılmaktadır ve yapılan yatırım neticesinde elde edilmesi beklenen sermaye kazançlarını temsil etmektedir. İkinci terimde yer alan σ ifadesi ise difüzyon (diffusion) olarak adlandırılmaktadır. Difüzyon terimi ise beklenen sermaye kazançlarından meydana gelecek sapmaları temsil etmektedir. Difüzyon teriminin göz ardı edilmesi halinde ifade adi diferansiyel denkleme dönüşmektedir ve çözümü stokastik diferansiyel denkleme göre nispeten daha kolaydır.

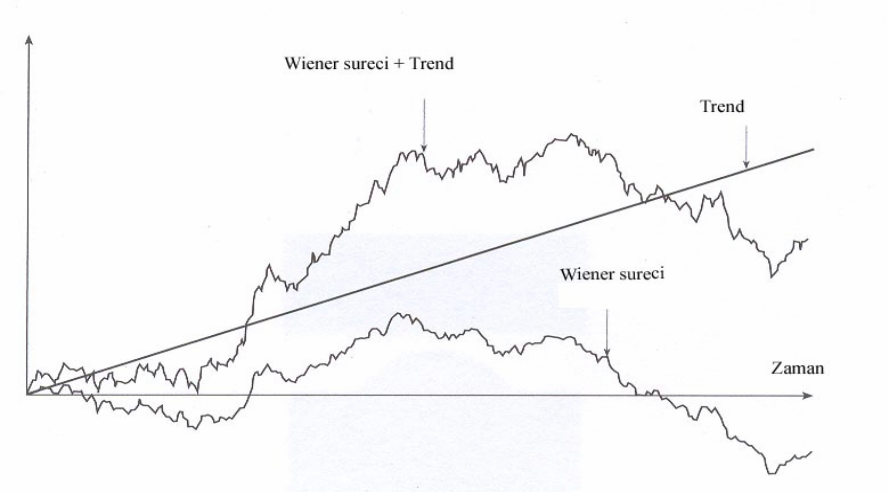
(3.5) denkleminde yer alan trend (μ_t) ve difüzyon parametreleri (σ_t) anlaşılacağı üzere zamana bağlı olarak değişim göstermektedir ve gerçekleşen değerlerinin hesaplanması zordur. Bu nedenle de ilgili parametreler yerine gözlemlenmesi daha kolay sabit değerlerin kullanılması (3.5) stokastik diferansiyel denkleminin çözümünü kolaylaştıracaktır. Yukarıda bahsedilen trend ve difüzyon terimleri hisse senedi fiyatının bir fonksiyonu olduklarından $\mu_t = \mu X_t$ ve $\sigma_t = \sigma X_t$ dönüşümleri ile piyasada gözlemlenmesi daha kolay sabit parametrelere dönüştürülmüş olacaktır.[77] Bu durumda elde edilen ifade geometrik Brownian hareket olarak adlandırılır ve aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{3.6}$$

Wiener süreci olarak da adlandırılan Brownian hareketin grafik üzerindeki gösterimi aşağıda verilmektedir. Wiener sürecine trendin eklenmesi sonucu oluşan grafik (3.6) ile oluşan ifadenin grafiğidir.

[76] Ales Cerny, **A.g.e.,** s.224
[77] T. Mikosch, **A.g.e.**, s.41

Şekil 3.6 Genelleştirilmiş Wiener süreci



Kaynak : John C. Hull, A.g.e., s.221

Wiener sürecine trendin eklenmesinin en önemli faydası, (3.6) ile verilen stokastik diferansiyel denklemin grafiğinin negatif olmayan hale dönüştürülmesini sağlamasıdır. Dikey eksende sağlanan bu öteleme grafikten de kolaylıkla görülebilmektedir. Aritmetik ortalamalar normal dağıldığından ve eşit varyanslı olduklarından (3.6) ifadesi aşağıda verilen formda düzenlenebilir.

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \tag{3.7}$$

İfadenin (3.7) biçiminde yazılması geometrik Brownian hareketin daha kolay bir biçimde çözülmesi açısından önemlidir. İntegral alma işlemi neticesinde geometrik Brownian hareketin bir diğer adının üstel Brownian hareket olmasının sebebi anlaşılmaktadır.[78]

$$X_t = e^{\mu t + \sigma W_t} \tag{3.8}$$

Itô'nun lemmasını tanımlamadan önce son olarak gözlemler arası sürenin sınırsız küçültüldüğünde yukarıda bahsedilen parametrelerde ne gibi değişiklikler olduğunun incelenmesi gerekmektedir. Bu noktada takip edilecek yaklaşım Itô sürecine yerel olarak çok kısa bir periyot için yaklaşılması, yani sonsuz küçük değişimler ekleyerek yeni sürecin oluşturulmasıdır. Bu işlem toplam diferansiyelin

[78] T. Mikosch, **A.g.e.**, s.42

hesaplanmasını gerektirdiğinden, öncelikle diferansiyel kavramının rassal değişkenler için ne anlama geldiğinin irdelenmesi gerekmektedir.

Fonksiyonların sonsuz küçük aralıklarda seviyelerinin karşılaştırılabilmeleri açısından sonsuz küçük kavramının vurgulanması gerekmektedir. Herhangi bir fonksiyonun sonsuz küçük olabilmesi için $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ şartının sağlanması gerekmektedir. Sonsuz küçük iki fonksiyonun karşılaştırılması u ve v, x değişkeninin sonsuz küçük iki fonksiyonu olmak üzere ise aşağıda verilen biçimde gerçekleşmektedir.

- $|x| < \varepsilon$ olmak üzere, $A < |u/v| < B$ şartını sağlayan A ve B gibi kesinlikle pozitif iki sabit sayının bulunabilmesi halinde u ve v fonksiyonlarının aynı dereceden oldukları söylenir ve O(u)=O(v) biçiminde gösterilir.
- $|x| < \varepsilon$ olmak üzere, $\lim_{x\to 0}|u/v| = 0$ veya $\lim_{x\to 0}|v/u| = \infty$ koşullarından birinin sağlanması halinde u fonksiyonunun derecesinin v'den büyük olduğu söylenir ve O(u)>O(v) biçiminde gösterilir.

Esasen derece kavramı sıfıra çok yakın (sınırsız küçük) bazı terimlerin göz ardı edilmesinde kullanılmaktadır. Derece kavramının Taylor serisine açılımda kullanımı açıklayabilmek amacıyla bir fonksiyonunun Taylor serisine açılımını göz önüne alalım.[79]

$$\Delta f = f_x(X_0)\Delta X + \frac{1}{2} f_{xx}(X_0)(\Delta X)^2 + \frac{1}{3!} f_{xxx}(X_0)(\Delta X)^3 + R$$
$$df = f_x dx \qquad (3.9)$$

(3.9) bağıntısında yer alan R ifadesi Taylor serisi açılımında üçten daha büyük dereceli terimleri içermektedir. Dolayısıyla R = $O((\Delta X)^3)$ biçiminde göstermek mümkündür. X değişkeninin sonlu farklarının giderek küçültülmesi neticesinde ($\Delta X \to dX$) Taylor serisi açılımı diferansiyele yakınsamaktadır. Bu noktada derecesi birden büyük diferansiyel terimlerinin göz ardı edilmesi

[79] John L. Teall, Iftekhar Hasan, **Quantitative Techniques for Finance and Investments,** Blackwell Publishing Ltd., UK, 2002, s.166

gerekmektedir. ($(dX)^c=0$, $c>1$) Gözlemler arası geçen süre zaten sınırsız küçültüldüğünden dt ifadesi sıfıra çok yakın bir sayı olmaktadır. Dolayısıyla bu sayının karesinin alınması sayının sıfıra çok daha fazla yakınsamasına yol açmaktadır ki bu nedenle iki ve daha yüksek dereceli terimlerin göz ardı edilmesi genellememizi bozmamaktadır. Stokastik matematikte Brownian hareketin sınırsız küçük değişiminin derecesi, zamanın sınırsız küçük değişiminin karekökünün derecesine eşit olarak kabul edilmektedir. Brownian hareketin varyansının zamana eşit olması ve dolayısıyla standart sapmasının zamanın karekköküne eşit olması bu sonucu doğurmaktadır. Başka bir deyişle $(dW_t)^2$ değişkeni stokastik değildir, deterministiktir ve dt'ye eşittir.[80] Dolayısıyla stokastik matematikte kullanacağımız tanımlamalar aşağıda verilen biçimde özetlenebilir.

$$(dt)^c = 0 \qquad ;c > 1$$

$$(dt)(dW) = 0 \quad ;O((dt)^{3/2}) \tag{3.11}$$

$$(dW)^2 = dt$$

Bu tanımlamalar ile birlikte stokastik matematikte türev alma imkanını sağlayacak Itô'nun lemmasının tanımlanması mümkün olmaktadır. X değişkeninin (3.5) ifadesi ile tanımlanan bir Itô süreci olduğunu varsayalım. İkinci dereceden sürekli, türevlenebilir $f : \Re^2 \to \Re$ fonksiyonu $Y = f(X_t,t)$ bağıntısı sağlanacak biçimde verilmiş olsun. Bu durumda Itô'nun lemması aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.[81]

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(dX_t)^2 \tag{3.12}$$

(3.12) ifadesi hisse senedi fiyatı (X_t) ve zamanın (t) bir fonksiyonu olan Y sürecinin türev almasında izlenecek kuralı tanımlamaktadır. (3.5) ifadesi ile verilen Itô sürecinin (3.12) eşitliğinde yerine yazılması neticesinde Itô'nun lemması aşağıda verilen biçimde elde edilebilecektir.

[80] Ö. Önalan, **A.g.e.**, s.200
[81] M. Baxter, A. Rennie, **A.g.e.**, s.59

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(dX_t)^2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)^2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(\sigma_t^2 (dW_t)^2)$$

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial X_t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}\right)dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial X_t}dW_t \qquad (3.13)$$

Genellikle finans problemlerinde bir stokastik (X) ve bir deterministik (t) değişkenden oluşan problemler göz önüne alınmaktadır. Bu gibi durumlarda (3.12) ifadesi ile verilen Itô'nun lemması ilgili değişkenin artım miktarını hesaplamamıza yardımcı olmaktadır.

Bunun yanında zamanın yanısıra birden fazla değişkene bağlı fonksiyonlar da tanımlanabilir. İki veya daha fazla hisse senedi üzerine yazılan opsiyonlar buna örnek olarak verilebilir. Bu gibi durumlarda Itô'nun lemmasının çok boyutlu hale dönüştürülmesi gerekmektedir. Z_t stokastik sürecinin X_t ve Y_t değişkenleri ve zamana bağlı olduğunu varsayalım. X_t ve Y_t değişkenlerinin birbirleri ile ilişkili iki farklı Brownian hareket tarafından türetilmiş olsun. Bu varsayımlar aşağıda verilen sistem ile özetlenebilir.

$$Z_t = f(X_t, Y_t, t)$$

$$dX_t = \mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t^X \qquad (3.14)$$

$$dY_t = \mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t^Y$$

Hatırlanacak olursa iki Brownian hareketin birbirleri ilişkili olduklarından bahsedilmişti. Bu normal dağılım gösteren sıfır ortalamalı, dt varyanslı ve aralarındaki korelasyon katsayısı ρ olan iki farklı artım miktarı olduğu anlamına gelmektedir. Bu durumda Itô'nun lemmasının çok boyutlu duruma uyarlanmasında

$(dW_t^X)^2 = dt,\ (dW_t^Y)^2 = dt$ ve $dW_t^X dW_t^Y = \rho dt$ bağıntılarının kullanılması anlamına gelmektedir. Bu durumda çok boyutlu Itô'nun lemması aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.[82]

$$dZ_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}dX_t + \frac{\partial f}{\partial Y_t}dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(dX_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y_t^2}(dY_t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_t \partial Y_t}(dX_t)(dY_t) \tag{3.15}$$

(3.14) ile verilen her iki Brownian hareketin artım miktarı bağıntılarının çok boyutlu Itô'nun lemması formulasyonunda yerine konması neticesinde aşağıda verilen ifade elde edilecektir.

$$dZ_t = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}(\mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t^X) + \frac{\partial f}{\partial Y_t}(\mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t^Y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(\mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t^X)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y_t^2}(\mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t^Y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X_t \partial Y_t}(\mu_t^X dt + \sigma_t^X dW_t^X)(\mu_t^Y dt + \sigma_t^Y dW_t^Y)$$

Trend ve difüzyon terimlerinin uygun biçimde gruplandırılması neticesinde çok boyutlu Itô'nun lemması formulasyonu aşağıda verilen biçimde özetlenebilir.

$$dZ_t = [\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t^X \frac{\partial f}{\partial X_t} + \mu_t^Y \frac{\partial f}{\partial Y_t} + \frac{1}{2}\left(\sigma_t^X\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} + \frac{1}{2}\left(\sigma_t^Y\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Y_t^2} + \rho\sigma_t^X\sigma_t^Y \frac{\partial^2 f}{\partial X_t \partial Y_t}]dt + \sigma_t^X \frac{\partial f}{\partial X_t}dW_t^X + \sigma_t^Y \frac{\partial f}{\partial Y_t}dW_t^Y \tag{3.16}$$

3.1.3. Martingale Kavramı ve Varlık Fiyatlama

Hatırlanacak olursa daha önceki bölümlerde Markov süreci ve Markov özelliğinden bahsedilerek, herhangi bir stokastik sürecin koşullu dağılımının o ana kadar verilen bilgi kümesine bağlı olduğu belirtilmişti. Martingale kavramı da Markov özelliği ile benzerlikler göstermektedir. Markov özelliği verilen bilgi kümesi

[82] P.Wilmott, **A.g.e.**, s.75

altında o ana kadarki istatistiksel dağılımın yine aynı bilgi kümesi altında sabit kalacağını söylerken, Martingale kavramı herhangi bir bilgi kümesi altında koşullu beklenen değerin bilgi kümesi değişmedikçe değişmeyeceğini belirtmektedir.

$(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanan $M = \{M_t\}_{t\in T}$ stokastik sürecini göz önüne alalım. Burada $\Im$, bilgi kümesini ve P olasılık ölçümünü temsil etmektedir. M stokastik sürecinin bir Martingale belirtebilmesi için aşağıda verilen üç özellik sağlanmalıdır.

1. M stokastik süreci $\Im$ bilgi kümesine adaptedir.

Başka bir deyişle bu özellik, eğer herhangi bir t anında, o ana kadarki bilgi kümesine sahip isek fiyatı da bildiğimiz anlamına gelmektedir.

2. Verilen her bir t için M_t stokastik sürecinin beklenen değeri sonludur. $(E^P[|M_t|] < \infty)$

Başka bir deyişle bu özellik, M_t stokastik sürecinin verilen her bir t anında integrallenebilme koşulunu ortaya koymaktadır.

3. Verilen herhangi bir s>t noktasında M_s stokastik sürecinin t anındaki $\Im_t$ bilgi kümesi altında koşullu beklenen değeri stokastik sürecin t anındaki değeridir. $(E^P[M_s \mid \Im_t] = M_t, \forall s > t)$

Başka bir deyişle bu özellik, M_t stokastik sürecinin t anındaki $\Im$ bilgi kümesi altında verilebilecek en iyi tahminin stokastik sürecin t anındaki değeri olduğunu belirtmektedir.

Martingale kısaca sabit kavramının stokastik karşılığıdır. En açık ifadesi ile Martingale kavramı, yansız bir oyunun matematiksel modeli olarak adlandırılabilir.[83] Martingale kavramı piyasaların etkinliğinde arbitrajın olmaması varsayımını desteklediğinden finans literatüründe en faydalı kavramlardan biri olarak değerlendirilmektedir. Önceki bölümlerde açıklanan Brownian hareket yukarıda

[83] S. Ross, **A.g.e.**, s.295

tanımlanan her üç özelliği sağlamaktadır. Bu nedenle de Martingale olarak adlandırılabilir. Bu noktada dikkat edilmesi gereken husus stokastik sürecin trende sahip olmamasıdır. Yani (3.5) ile verilen Itô sürecinin sıfır trendli olması halinde $dX_t = \sigma_t dW_t$ ifadesi bir Martingale belirtecektir. (3.6) ifadesinde belirtilen σ parametresi stokastik olabilir. Hatta başka değişkenler aracılığıyla X_t'ye bağlı da olabilir. Ancak bu sürecin bir Martingale belirtmesi, gelecekte herhangi bir noktada fonksiyonun değeri için yapılacak en iyi tahminin fonksiyonun bugünkü değeri olduğunu belirtmektedir.[84]

3.1.4. Varlık Fiyatlamanın Temel Teoremi

Aslında Martingale kavramı finansal piyasaların etkin olması, başka bir ifadeyle arbitraj imkanının olmamasının matematiksel olarak tanımlanmasıdır. Arbitraj kavramı başlangıç yatırımı olmaksızın gelecekte herhangi bir noktada pozitif getiri elde etme durumu olarak adlandırılabilir ki bir çok finans teorisi arbitrajın yokluğu üzerine inşa edilmiştir.

Hatırlanacak olursa yine bir önceki bölümde Martingale kavramı P olasılık ölçümü üzerinde tanımlanmıştır. P olasılık ölçümü fiziksel olasılıkları temsil etmektedir. Örneğin bir paranın atılması deneyinde tura gelmesi olasılığının ½ olması veya bir zarın atılması deneyinde üstte gelen yüzün çift sayı olma olasılığının yine ½ olması fiziksel olasılıkların bir sonucudur. Ancak finansal piyasalarda durum biraz daha farklı olmaktadır. Finansal yatırım stratejileri insani kararların bir sonucu olduğundan, yatırımcının riske karşı tutumu da yatırım kararlarının alınmasında göz önüne alınmalıdır. Dolayısıyla herhangi bir hisse senedi fiyatının bir senaryo dahilinde artma ihtimali fiziksel olasılığı temsil ederken, yatırımcının o hisse senedi fiyatının artacağına olan inancının kuvvetliliği yeni bir olasılık ölçüsünü temsil etmektedir.

Stokastik matematikte bu ifade denk Martingale ölçümü olarak adlandırılarak genellikle **Q** ile gösterilir. Denk Martingale ölçümü, riske karşı kayıtsız bir dünyayı tasvir etmektedir. Bu dünyada bütün varlıklar risksiz faiz oranı kadar artış

[84] John C. Hull, **A.g.e.,** s.488

göstermektedir. Başka bir deyişle denk Martingale ölçümü veya **Q** ölçümü altında bütün hisse senetleri bir Martingale belirtmektedir.

Dolayısıyla varlık fiyatlamada temel yaklaşım tüm hisse senedi fiyatlarının bir Martingale belirttiği uygun **Q** ölçümünün elde edilmesidir. Bu tanımlar ışığında varlık fiyatlamanın temel teoremi aşağıda verilen biçimde tanımlanmaktadır.

Piyasadaki her bir hisse senedi için arbitraj imkanının varolmaması tek bir **Q** denk Martingale ölçümü olmasına bağlıdır.

$X=(X_1, X_2,\ldots)$ hisse senetleri için arbitraj imkanı yoktur.

⇕

Altında tüm hisse senetleri Martingale olacak bir **Q** ölçümü vardır.

⇕

Her bir hisse senedinin fiyatı **Q** altında
gelecekte yaratması muhtemel
beklenen getirilerinin bugünkü değeri toplamına eşittir.

$$X_t = E_t^Q\left[\exp(-\int_t^T r_u du)X_T\right]$$

3.1.5. Dinamik Programlama

Dinamik programlama çok yaygın kullanım alanı olan yineleme denklemi ile optimizasyon tekniğidir. "Yineleme denklemi ile optimizasyon tekniği" deyimi ile optimizasyonunun bir önceki aşamanın içerdiği bilgilerden yararlanılarak aşama-aşama yapıldığı anlatılmak istenir.[85] Wiener sürecinin integral formunu göz önüne alalım.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \qquad ,t > 0 \qquad (3.17)$$

Dinamik programlama tekniğinin sürekli zamanlı modele uyarlanabilmesi için karar değişkeninin karakteristiklerinin Markov özelliğini sağlayacak biçimde, ne kadar küçük olursa olsun dt aralığı üzerinde tanımlanabilmesi gerekmektedir. Bu tip

[85] Osman Halaç, **Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması)**, Alfa Basım Yayım Dağıtım,1995, s.157

süreçler zamana bağlı olarak sınırsız ayrılabilir olarak adlandırılmaktadır.[86] Aynı zamanda bu tip süreçler hiçbir yerde türevlenemez olduğundan, bu tip süreçlerin karakteristiklerinin belirlenmesi açısından daha farklı diferansiyel denklemlerin kullanımı zorunludur. Bahsedilen diferansiyel denklemler (3.5) bağıntısı ile verilen stokastik diferansiyel denklemler olmaktadır ve türev alma işlemi (3.12) bağıntısı ile verilen Itô'nun lemması ile gerçekleşmektedir. Birbirleri ile ilişkili bir dizi finansal kararın alınması gereken çok dönemli portföy yönetimi problemlerinde bu nedenle dinamik programlama tekniğine sıklıkla başvurulmaktadır. Ancak problemin sürekli zamanlı forma dönüştürülmesi halinde dinamik programlama problemi stokastik kontrol problemine dönüşmektedir.

3.1.5.1. Hamilton-Jacobi-Bellman Denklemi

Dinamik programlama tekniğinin sürekli zamanlı hali stokastik kontrol olarak adlandırılmaktadır. Herhangi bir stokastik kontrol probleminin elemanları aşağıda verildiği gibi tanımlanmaktadır.[87]

- Karar değişkenleri kümesi: $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
- Kontrol değişkenleri kümesi: $u_1, u_2, \ldots, u_m$;
- Kontrol edilen trend fonksiyonu: $g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$;
- Kontrol edilen difüzyon fonksiyonu: $h(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$;
- Anlık ödül fonksiyonu: $f(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$;
- Nihai ödül fonksiyonu: $F(\mathbf{x}(t),t)$;

Tanımlanan herhangi bir kontrol değişkeninin (u) uygulanabilir olması için, bu kontrol değişkenine karşılık verilen karar değişkeninin aşağıda verilen biçimde tek bir Itô sürecini takip etmesi gerekmektedir.

$$dx_t = g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)dt + h(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)d\mathbf{Z_t} \quad ; x_0 = y \tag{3.18}$$

Verilen herhangi bir başlangıç noktası x(0) için yukarıda tanımlanan tüm u değişkenlerinin kümesini U ile gösterelim. Herhangi bir $u \in U$ uygulanabilir stratejisinin fayda fonksiyonu bu durumda aşağıda belirtilen biçimde verilebilir.

---

[86] N.H.Pedron, **A.g.e.**, s.62
[87] N.H. Pedron, **A.e.**,s.63

$$V(\mathbf{x}(0)) = E\left[\int_0^T f(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)dt + F(\mathbf{x}(T),T)\right] \tag{3.19}$$

Bu durumda verilen kontrol probleminin optimal değeri (3.19) ile tanımlanan fayda fonksiyonunun beklenen değerini maksimum yapan kontrol değişkeni olacaktır.

$$V^*(\mathbf{x}(t)) = \max_{\mathbf{u}(t)} V(\mathbf{x}(t)) \tag{3.20}$$

(3.20) eşitliğinden çıkartılacak sonuç **x** noktasında $V^*(x) = V(x)$ değerinin sağlanmasıdır. Bellman denklemini sağlayan herhangi bir J fonksiyonu için $V^*(\mathbf{x}) = J(x,0)$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım.

$$\max_{\mathbf{u}(t)} \quad dJ(\mathbf{x}(t),t) + f(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) = 0 \tag{3.21}$$

(3.21) denkleminde tanımlanan $dJ(\mathbf{x}(t),t)$ ifadesi maksimize edilen fayda fonksiyonu J'nin türevini belirtmektedir. Ancak J fonksiyonu sürekli zamanlı bir stokastik süreç olduğundan dolayı türev alma işleminde (3.12) ile belirtilen Itô'nun lemmasının kullanılması gerekmektedir. Itô'nun lemması ile $dJ(\mathbf{x}(t),t)$ ifadesi aşağıda verilen biçimde türevlenebilir.

$$\begin{aligned} dJ(\mathbf{x}(t),t) = {} & \frac{\partial J(\mathbf{x}(t),t)}{\partial t} + \frac{\partial J(\mathbf{x}(t),t)}{\partial x}\, g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) \\ & + \frac{1}{2}\, iz[h(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)h(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)' \frac{\partial^2 J(\mathbf{x}(t),t)}{\partial x^2}] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Yukarıda verilen "iz" ifadesiyle bir matrisin izi temsil edilmektedir ve matrisin köşegeni üzerindeki elemanlar toplamı tanımlanmaktadır. Problemin sınır koşulunun $J(\mathbf{x}(T),T)=F(\mathbf{x}(T),T)$ olduğu açıktır. (3.21) ifadesi ile verilen sürekli zamanlı Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) denklemi doğrusal olmayan sistemler için verilen stokastik kontrol probleminin optimal çözümünü sağlamaktadır. Ancak bir çok durumda ortaya çıkan stokastik diferansiyel denkleminin analitik olarak çözümlenmesi çok zor olmaktadır. Bu durumda problemin geriye doğru işletilerek (t=T'den başlanarak) çözümlenmesi gerekmektedir.

3.1.5.2 Uzun Vadeli Yatırımlar için Tüketim ve Portföy Seçimi Problemi

Klasik Markowitz portföy teorisi yatırım kararlarını tek dönem için sınırlandırmaktadır ve dönem sona ermeden optimal yatırım kararı tespit edildikten sonra portföy stratejisinin değiştirilmesine imkan tanımamaktadır. Ancak uygulamada piyasa verileri sürekli olarak değiştiğinden yatırım kararlarının da bu verilere göre sürekli olarak değiştirilmesi gerekmektedir. Portföy stratejisinde gerekli bu değişikliğin yapılmasındaki en büyük kısıtlardan bir tanesi işlem maliyetleri olmaktadır.

Uzun vadeli yatırımlar için tüketim ve portföy seçimi problemi olarak da adlandırılabilecek sürekli zamanlı varlık atama problemi iki farklı yolla çözümlenebilir.[88] Bu yaklaşımlar Dinamik programlama yaklaşımı(Bellman yaklaşımı) ve Martingale yaklaşımı(Cox-Huang yaklaşımı) olarak adlandırılabilir. Bu çalışma kapsamında uzun vadeli yatırımlar için tüketim ve portföy seçimi problemi dinamik programlama yaklaşımı ile çözümlenecektir.Bu amaçla bir önceki bölümde tanımlanan Bellman denkleminin ne şekilde elde edildiği üzerinde durulacaktır. Bellman denklemi dinamik optimizasyon problemini diferansiyel denkleme dönüştürmemize olanak sağlamaktadır.[89] Bellman'ın optimallik koşulunun yatırım kararlarına uygulanması problemi Merton tarafından çözümlenmiştir.[90]

Problemin formulasyonunun oluşturulabilmesi için bir riskli ve bir risksiz varlıktan oluşan bir piyasayı göz önüne alalım. Tabii ki piyasadaki belirsizliği tanımlayabilmek amacıyla bir adet de karar değişkeninin tanımlanması gerekmektedir. Analizimiz sürekli zamanlı yapılacağından her üç değişken de Itô sürecini takip edecektir.

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{P_t} &= \mu_P dt + \sigma_P dZ_P \\ \frac{dB_t}{B_t} &= r\,dt \\ dS_t &= \mu_S dt + \sigma_S dZ_S \end{aligned} \tag{3.23}$$

[88] John Campbell, Luis Viceira, **Strategic Asset Allocation,** Oxford University Press, 2002, s.108
[89] P.Wilmott, **A.g.e.**, s.730
[90] Robert C. Merton , "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case", **Reviews of Economical Statistics**, Vol:51, 1969, s.247-257

Piyasada varolan iki belirsizlik kaynağı Z_P ve Z_S'nin birbiri ile ilişkili olduğu kabul edilmektedir. Bu ifade $dZ_P.dZ_S=\rho dt$ eşitliği ile elde edilir. Model oluşturulurken varlığın her bir dönem için belirli bir miktarının(α) riskli varlığa kalanının ise risksiz varlığa yatırıldığı varsayılmaktadır. Modelde ayrıca her bir dönem için ne kadar tüketim yapılabileceği de modellenmiştir(C). O halde amaç yatırımcının beklenen faydasını maksimum yapan optimum α ve C parametrelerinin elde edilmesidir.

Yukarıda tanımlanan piyasa içerisinde zaman içerisinde herhangi bir yatırımcının varlık miktarının değişmesinin üç farklı sebebi vardır. Her üç sebebi ayrı ayrı göz önüne alarak yatırımcı için bütçe kısıtını oluşturmaya çalışalım. Öncelikle yatırımcı göz önüne alınan her bir dönem için belirli bir miktarda tüketim gerçekleştirebilecektir.

$$dW = -Cdt + \cdots \tag{3.24}$$

Bunun yanında, risksiz varlığa yatırılan miktardan dolayı faiz getirisi kazanılacaktır. Bütçe kısıtında varlık miktarında meydana gelecek değişim aşağıda verilen biçimde modellenecektir.

$$dW = -Cdt + (1-\alpha)rWdt + \cdots \tag{3.25}$$

Son olarak riskli varlığın fiyatının durum değişkenine bağlı olarak değişmesinden dolayı, yatırımcının varlığı dikkate alınan her bir dt döneminde değişecektir. Bu durumda bütçe kısıtında varlık miktarında meydana gelecek değişim aşağıda verilen biçimde modellenecektir.

$$dW = -Cdt + (1-\alpha)rWdt + \alpha W(\mu_P dt + \sigma_P dZ_P) \tag{3.26}$$

(3.25) denklemi bütçe kısıtı olarak adlandırılır ve yatırımcının varlığındaki dönemsel değişiklikleri simgelemektedir. Terimlerin gruplandırılması ile birlikte bütçe kısıtı aşağıda verilen forma sadeleştirilebilir.

$$dW = \left[(\alpha(\mu_P - r) + r)W - C\right]dt + \alpha W\sigma_P dZ_P \tag{3.27}$$

Zamana bağlı olarak ayrılabilir tüketim miktarı ve pozitif başlangıç varlığının verilmesi ile birlikte Merton tarafından geliştirilen uzun vadeli yatırımlar için tüketim ve portföy problemi aşağıda verilen biçimde düzenlenebilir.

$$\max_{C,\alpha} E_0\left[\int_0^{\infty} U(C,t)dt\right]$$
$$dW = \left[(\alpha(\mu_P - r) + r)W - C\right]dt + \alpha W\sigma_P dZ_P \tag{3.28}$$

J(W,S,t) maksimum fayda fonksiyonunu temsil etmek üzere Bellman denklemi aşağıda verilen formda tanımlanmaktadır. Dikkat edilecek olursa, maksimum fayda fonksiyonu bütçeye, riskli varlığa bağlı karar değişkenine ve zamana bağlıdır.

$$\max_{C,\alpha}\left\{U(C,t) + \frac{1}{dt}E_t\left[dJ(W,S,t)\right]\right\} = 0 \tag{3.29}$$

Bir diğer önemli nokta, (3.29) denkleminin içerisinde fayda fonksiyonunun türevinin alınması gerekliliğidir. Uygun başlangıç koşulları altında Itô'nun lemması kullanılarak dJ(W,S,t) ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$dJ(W,S,t) = \frac{\partial J}{\partial t}dt + \frac{\partial J}{\partial W}dW + \frac{\partial J}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}(dW)^2 + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial S}(dW)(dS) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial S^2}(dS)^2 \tag{3.30}$$

(3.30) ifadesinde yer alan dW ve dS için ilgili stokastik diferansiyel denklemlerin yerine yazılması ve gerekli değişikliklerin yapılması neticesinde amaç fonksiyonundaki beklenen anlık değişim aşağıdaki formda yeniden düzenlenebilir.

$$\max_{C,\alpha}\left\{U(C,t) + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial W}\left[(\alpha(\mu_P - r) + r)W - C\right] + \mu_S\frac{\partial J}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}\alpha^2 W^2\sigma_P^2 + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial S}\rho\alpha W\sigma_P\sigma_S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial S^2}\sigma_S^2\right\} = 0 \tag{3.31}$$

İfadenin maksimum değerinin elde edilebilmesi açısından, C ve α parametrelerine göre kısmi türevlerinin alınarak sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Böylelikle beklenen faydayı maksimum yapan tüketim miktarı ve toplam varlığın riskli varlığa yatırılacak yüzdesi elde edilmiş olacaktır. Böylelikle risksiz varlığa yatırılacak miktarı tespit etmek de mümkün olmaktadır.

$$\frac{\partial U}{\partial C} = \frac{\partial J}{\partial W} \qquad \Rightarrow \qquad C_t = \frac{\partial U}{\partial C}^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial W}\right) \tag{3.32}$$

$$\alpha = -\frac{\partial J / \partial W}{\left(\partial^2 J / \partial W^2\right)W}\left(\frac{\mu_P - r}{\sigma_P^2}\right) - \frac{\partial^2 J / \partial W \partial S}{\left(\partial^2 J / \partial W^2\right)W}\left(\frac{\sigma_S}{\sigma_P}\rho\right) \tag{3.33}$$

C değişkenine göre türev alma işleminin sonucu olan (3.32) eşitliği optimum tüketim stratejisini belirtmektedir. C_t parametresi her bir dönemde yapılacak optimum tüketim miktarını belirlerken, dikkat edilecek olursa ek bir birim tüketimin ek bir birim varlığa eşit olduğu noktada gerçekleşmektedir. Bu miktar bize gelecek tüketimleri finanse etmek için gerekli olan ek varlığı tanımlamaktadır.

Bunun yanı sıra, α parametresine göre alınan türev alma işleminin sonucu olan (3.33) ifadesi riskli varlığa yapılacak optimum yatırımı belirtmektedir. Aynı ifadenin birden fazla riskli varlık için geliştirilmesi neticesinde α parametresi optimum portföy ağırlıklarını belirtecektir.

(3.29) ile verilen eşitliğin çözülmesi neticesinde uzun vadeli optimum portföy stratejisinin elde edilmesi mümkün olmaktadır. Ancak bu ifadenin (3.30) ile verilen anlık fayda fonksiyonu değişimi ifadesine bağlı olması çözümü zorlaştırmaktadır. (3.32) ve (3.33) ifadelerinde yer alan fayda fonksiyonu parametreleri yerine çeşitli fayda fonksiyonu tiplerinin yazılması neticesinde optimum portföy ağırlıkları daha basit bir formda elde edilebilmektedir. Ancak yine Merton'un aynı çalışmasında Bellman denkleminin analitik çözümünün fayda fonksiyonunun logaritmik veya fayda fonksiyonu üstel iken yatırım imkanlarının sabit olması halinde varolduğu belirtilmektedir.

3.2 SÜREKLİ ZAMANLI ORTALAMA-VARYANS PORTFÖY SEÇİM MODELİNİN OLUŞTURULMASI

Bir önceki bölümde Markowitz tarafından ortaya konan tek dönemli durağan ortalama-varyans portföy seçiminin, dinamik yatırım problemlerine uyarlanabilmesi amacıyla çok dönemli hale dönüştürülmesinde izlenecek metodoloji açıklanmıştı. Dinamik portföy seçimi üzerine yapılan ilk çalışmalarda, tek periyotlu portföy seçimi probleminin dönem sayısının arttırılarak yatırım ufkunun genişletilmesi üzerinde durulmuştur. Çok dönemli portföy seçim probleminin analitik olarak çözümü üzerine yapılan çalışmaların birçoğunda araç olarak dinamik programlama kullanılmıştır.

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi problemi için etkin sınırın ve optimal portföy stratejisinin geliştirilebilmesi, uzun vadeli yatırımlar hedefleyen yatırımcılara, alacakları finansal kararlar konusunda yardımcı olmaktadır. Ancak yatırım ufkunun sadece dönemlerle ifade edilebilmesi her ne kadar portföy stratejisine dinamik karar verme kabiliyetini sağlasa da, dönem sayısında meydana gelecek çok büyük artışlar sonucu ortaya çıkacak gerekliliklere cevap verememektedir.

Özellikle stokastik süreçler üzerine yapılan çalışmalarda görülen hızlı artış portföy teorisi ile kontrol teorisi arasındaki bağların kuvvetlenmesinde ve sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi probleminin çözümünde etkili olmuştur.[91] Çok dönemli portföy seçiminde ele alınan dinamik programlama yaklaşımı, dönem sayısının sonsuz büyütülmesi neticesinde optimal kontrol tekniği ile çözüm yoluna gidilmesine sebep olmuştur. Bir önceki bölümde ele alındığı gibi, sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi probleminin optimum çözümü ve etkin sınır Zhou ve Li[92] tarafından geliştirilmiştir.

Bunun yanında Korn[93] sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi için başka bir çözüm önermektedir. Korn tarafından geliştirilen modelde bütün

[91] Andrew E. B. Lim, Xun Yu Zhou, "Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market", **Mathematics of Operations Research,** Vol:21 No:1, 2002, s.102

[92] X.Y. Zhou, D.Li, "Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: A Stochastic LQ Framework", **Applied Mathematical Optimization,** Vol:42, 2000, s.19-33

[93] Ralf Korn, **Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time,** World Scientific Press, Singapore, 1999, s. 48

katsayıların zamandan bağımsız ve deterministik oldukları varsayılarak, nihai varlığın beklenen değerinin negatif olmaması kısıtı yer almaktadır. Bu çalışmada temel olarak Lagrange çarpanları metodu ile dinamik optimizasyon probleminin izlenmesi kullanılmaktadır. Ancak Korn çalışmasını tüm piyasa parametrelerini rassal kabul edecek biçimde geliştirememektedir. Bu ise modelin eksik tarafı olarak yorumlanabilir. Bu nedenle piyasanın işleyişine daha uygun olarak optimal kontrol yönteminin tercih edilmesi daha anlamlı olmaktadır. Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi probleminde ele alınan değişkenlerin tümünün lineer ve amaç fonksiyonun kuadratik olması sebebiyle bu yaklaşım, stokastik lineer kuadratik kontrol olarak da adlandırılmaktadır.[94] Zhou ve Li tarafından geliştirilen modelin oluşturulmasında kullanılacak notasyon aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.[95]

$\Re^m$	: m boyutlu sütun vektörler uzayı
M'	: Herhangi bir M matrisi veya vektörünün transpozesi
$\lvert M\rvert$	$:= \sqrt{\sum_{i,j} m_{ij}^2}$, herhangi bir matris veya vektör için
σ_ξ	: ξ rassal değişkeninin standart sapması
$C(0,T;\Re^d)$	:[0,T] aralığı üzerinde $\Re^d$- değerli sürekli fonksiyonların Banach uzayı
$L_{\Im}^2(0,T;\Re^d)$	: $E\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt < \infty$ koşulunu sağlayan tüm $\Re^d$- değerli, ölçülebilir f(t) fonksiyonları kümesi
$L_{\Im}^{\infty}(\Omega,C,(0,T;\Re^d))$	: $\sup_{t\in[0,T],w\in\Omega}\lvert f(t,w)\rvert < \infty$ koşulunu sağlayan tüm $\Re^d$- değerli, $\Im_t$ bilgi kümesine adapte, sürekli stokastik süreçler kümesi

Modelin geliştirilmesi amacıyla biri risksiz varlık ve m riskli hisse senedi olmak üzere (m+1) menkul kıymetten oluşan bir piyasa göz önüne alınacaktır.

[94] David D. Yao, Hangin Zhang, X. Y. Zhou, **Stochastic Modelling and Optimization with Applications in Queues, Finance and Supply Chain,** Springer-Verlag Inc., USA, 2003, s.279
[95] D. Yao, H. Zhang, X.Y.Zhou, **A.e.,** s. 281

Sırasıyla risksiz ve riskli varlıklar aşağıda belirtilen stokastik süreçleri takip etmektedir.[96]

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt & ;t \in [0,T] \\ P_0(0) = p_0 > 0 & ;i = 1,2,...,m \end{cases} \tag{3.34}$$

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t)\left\{b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right\} & ,t \in [0,T], \\ P_i(0) = p_i > 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

(3.34) ifadesi ile verilen eşitlik bir adi diferansiyel denklem olmakla birlikte, $P_0(t)$ ile temsil edilen risksiz varlığın zamana bağlı olarak değişimini gösteren fiyat sürecidir. $r(t)>0$ risksiz faiz oranını temsil etmektedir. Risksiz varlığın adi diferansiyel denklem ile temsil edilebilmesi, fiyat sürecinin deterministik olduğu anlamına gelmektedir ancak, aynı ifade riskli varlıklar yani hisse senetleri için geçerli değildir.

(3.35) ifadesi ile verilen eşitlik ise $dW_j(t)$ terimine bağlı olarak bir stokastik diferansiyel denklem olmakla birlikte $P_i(t)$ ile temsil edilen m adet riskli varlığın zamana bağlı olarak değişimini gösteren fiyat sürecidir. Burada $W(t) \equiv (W_1(t), W_2(t),\ldots, W_m(t))'$ ifadesi $(\Omega,F,P,\{F_t\}_{t\geq 0})$ olasılık uzayına adapte, m-boyutlu Brownian hareketi temsil etmektedir. Böylelikle (3.35) ifadesi, (3.5) ile gösterilen Itô sürecine uygunluk göstermektedir.

$b_i(t)$ ifadesi ise (i=1,2,…,m) her bir riskli varlık için ortalama getiri oranını temsil etmektedir. Bunun yanında, $\sigma_i(t) \equiv (\sigma_{i1}(t), \sigma_{i2}(t),\ldots, \sigma_{im}(t))$: $[0,T]\times\Omega \to \Re^m$ volatilite veya hisse senedi fiyatlarının standart sapması olarak adlandırılır. Bu durumda kovaryans matrisi aşağıda verilen biçimde tanımlanabilir.

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_m(t) \end{pmatrix} \equiv (\sigma_{ij}(t))_{m\times m} \quad \in \Re^{m\times m} \tag{3.36}$$

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçim modelinde olduğu gibi pozitif definitlik çözümün elde edilmesi aşamasında dejenerasyonla karşılaşılmaması

[96] X.Y Zhou. , D. Li, "Explicit efficient frontier of a Continuous-Time Mean Variance Portfolio Selection Problem", **Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems**, Boston: Kluver, 1999, s.323-330

açısından önemlidir. Bu amaçla pozitif definitlik koşulu pozitif bir δ sayısı için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\sigma(t)\sigma'(t) \geq \delta I_m \quad , \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.37}$$

Bu noktada yatırımcının varlık fonksiyonunun tanımlanması gerekmektedir. Doğal olarak varlık miktarı, her bir hisse senedinden elde bulundurulan miktar ile hisse senedi fiyatı çarpımlarının toplamı olduğundan, $N_i(t)$ i.inci hisse senedinden (i=0,1,…,m) elde bulundurulan miktarı göstermek üzere aşağıda verilen biçimde tanımlanacaktır.[97]

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m} N_i(t) P_i(t) \quad , \quad t \geq 0 \tag{3.38}$$

Bir önceki bölümde ele alınan çok dönemli modelden farklı olarak, sürekli zamanlı portföy seçiminin gerçekleştirilebilmesi bir takım varsayımları da beraberinde getirmektedir. Bu durumda varlıkta meydana gelen anlık değişimlerin incelenmesi türev alma işlemi ile gerçekleştirilebilecektir.

$$dx(t) = \sum_{i=0}^{m} N_i(t)\, dP_i(t) \tag{3.39}$$

Dikkat edilecek olursa, toplam sembolündeki indeks hem risksiz hem de riskli varlıklar için varlıktaki anlık değişimin hesaplanmasını zorunlu kılmaktadır. İndeksin sıfır değeri için $dP_0(t)$ ifadesi risksiz varlığın fiyatındaki anlık değişimi simgelerken, i=1,2,…,m arasındaki değerler için $dP_i(t)$, riskli varlığın fiyatındaki anlık değişimi temsil etmektedir. Bu durumda (3.34) ve (3.35) ifadeleri kullanılarak (3.39) ile verilen yatırımcının varlığındaki anlık değişim ifadesi aşağıda verilen biçimde genişletilebilir.

$$\begin{aligned} dx(t) = \sum_{i=0}^{m} N_i(t)\, dP_i(t) = & \left\{ r(t) N_0(t) P_0(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t) N_i(t) P_i(t) \right\} dt \\ & + \sum_{i=1}^{m} N_i(t) P_i(t) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t) dW_j(t) \end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) ile ifade edilen yatırımcının toplam varlığındaki anlık değişim ifadesinin uygun biçimde düzenlenmesi ve yatırımcının i.inci hisse senedi veya

[97] X.Y Zhou. , D. Li,**A.g.e.**,s.325

risksiz faiz oranına yatırdığı varlık miktarı $u_i(t)=N_i(t)P_i(t)$, i=0,1,2,…,m ile tanımlanması ile birlikte yatırımcının varlığındaki anlık değişim aşağıda verilen formda sadeleştirilebilir.[98]

$$\begin{cases} dx(t) = \left\{ r(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} \left[b_i(t) - r(t) \right] u_i(t) \right\} dt \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sigma_{ij}(t)\, u_i(t)\, dW_j(t), \qquad (3.41) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

$u_i(t)$ teriminin zamana bağlı olarak değiştirilmesi neticesinde yatırımcının i.inci senedine yatırdığı varlığın miktarının, tabii ki böylelikle portföy stratejisinin değişeceği açıktır. Bunun yanında $u_i(t)<0$ olması halinde, i.inci varlığın açığa satışının gerçekleştirildiği söylenirken $u_0(t)<0$ olması halinde, risksiz faiz oranı r(t) üzerinden $|u_0(t)|$ miktarında borçlanıldığı söylenebilir. Açığa satış veya borçlanma neticesinde elde edilen varlık, diğer hisse senetlerini finanse etmede kullanılmaktadır. Açığa satış veya borçlanma miktarı için herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır.

Yukarıda yapılan tanımlamalar ışığında $u(t)= (u_1(t), u_2(t),\ldots, u_m(t))'$ ifadesi yatırımcının zamana bağlı portföy stratejisi olarak tanımlanabilir. Bu aşamada birbiri ile çelişki içerisinde olan iki farklı hedef tanımlanmaktadır. Bunlardan birincisi yatırımcının beklenen getirisini maksimize eden portföy stratejisinin elde edilmesi iken ikinci varyansın minimizasyonudur.

Aynı anda birden fazla amacın bir arada elde edilmeye çalışılması çok amaçlı programlama kavramını çağrıştırmaktadır. Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi problemin çözümlenmesinde, birbiri ile karşıtlık yaratan bu iki amacın gerçekleştirilmesinde çok amaçlı programlama yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu durumda amaç fonksiyonu, nihai varlığın beklenen değerini (Ex(T)) maksimize ederken, nihai varlığın varyansını ($Varx(T)=Ex^2(T)-[Ex(T)]^2$) minimize etmek olacaktır. İki farklı amaç gerçekleştirilirken göreceli olarak önem dereceleri belirli katsayılarla ağırlıklandırılabilmektedir. Sürekli zamanlı ortalama-varyans

[98] D. Yao, H. Zhang, X. Y. Zhou, **A.g.e.**, s.282

probleminde amaç, nihai varlığın beklenen değerini maksimize ederken varyansı en düşük seviyede tutacak u(t) portföy stratejisinin elde edilmesidir.

Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi modelinin oluşturulabilmesi için bir takım tanımlamalar yapılması gerekmektedir. Örneğin önceden tanımladığımız notasyona uygun olarak herhangi bir $u(\cdot)$ portföy stratejisinin uygun olabilmesi için $u(\cdot) \in L^2_{\Im}(0, T; \Re^m)$ olması gerekmektedir. Bu tanımlama neticesinde en genel hali ile sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi problemi aşağıda verilen biçimde tanımlanabilir.[99]

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \left(J_1(u(\cdot)), J_2(u(\cdot))\right) \equiv \left(-E\,x(T), Var\,x(T)\right) \\ & u(\cdot) \in L^2_{\Im}(0, T; \Re^m) \\ & \left(x(\cdot), u(\cdot)\right) \quad (3.41) \text{ eşitliğini sağlar.} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy problemi en basit haliyle yukarıda verilen biçimde tanımlanmaktadır. Ancak daha önce de bahsedildiği üzere, aynı anda ulaşılması gereken iki hedef ağırlıklandırılarak çok amaçlı optimizasyon problemine dönüştürülebilecektir. Örneğin $\mu>0$ parametresinin, varyansın amaç fonksiyon içerisindeki önem derecesini belirleyen ağırlığı olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.42) ile verilen problem aşağıdaki biçimde düzenlenebilir.[100]

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J_1(u(\cdot)) + \mu\, J_2(u(\cdot)) \equiv -E\,x(T) + \mu\, Var\,x(T) \\ & u(\cdot) \in L^2_{\Im}(0, T; \Re^m) \\ & \left(x(\cdot), u(\cdot)\right) \quad (3.41) \text{ eşitliğini sağlar.} \end{aligned} \tag{3.43}$$

(3.43) ile verilen sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi problemi bir optimal kontrol problemidir. Varyansın $\mu>0$ ağırlığının değiştirilmesi ile birlikte etkin sınırın elde edilebilmesi mümkün olmaktadır. Etkin sınır kavramı doğal olarak durağan, çok dönemli veya sürekli zamanlı portföy seçim problemlerinde farklılık göstermemektedir. Ancak notasyonda meydana gelebilecek karışıklıkları önlemek amacıyla etkin sınır tanımını tekrarlamak yararlı olacaktır. Herhangi bir $\tilde{u}(\cdot)$ uygun

[99] A. E. B. Lim, X. Y. Zhou, **A.g.e.**, s.105
[100] X.Y Zhou. , D. Li,**A.g.e.,**s.326

portföyü, $J_1(u(\cdot)) \le J_1(\tilde{u}(\cdot))$ veya $J_2(u(\cdot)) \le J_2(\tilde{u}(\cdot))$ eşitsizliklerinden en az bir tanesinin kesin olarak sağlanması durumunda $(J_1(\tilde{u}(\cdot)), J_2(\tilde{u}(\cdot))) \in \Re^2$ etkin olarak adlandırılır. Bütün etkin portföylerin $\Re^2$ kartezyen uzayında göz önüne alınması neticesinde etkin sınır elde edilmiş olacaktır. Dolayısıyla sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi probleminin çözümü (3.43) ile verilen optimal kontrol probleminin çözülmesi ile elde edilecektir. Böylelikle nihai varlığın varyansını minimize ederken, yatırımcının nihai varlığının beklenen getirisini maksimum yapan portföy stratejisi ve etkin sınır böylelikle elde edilmiş olacaktır. Problemin çözüm kümesini temsil etmek adına (3.43) problemini $P(\mu)$ ile simgeleyelim.

$$\prod_{P(\mu)} = \{ u(\cdot) \mid u(\cdot),\ P(\mu) \text{ probleminin optimal kontrolü} \} \qquad (3.44)$$

Problemin optimum çözümü için başvurulacak yöntem, bir önceki bölümde olduğu gibi, çözümü kolaylaştırmak adına bir yardımcı problem inşa etmektir. Yardımcı problem dinamik programlama anlamında ayrılabilir olmalıdır. Primal problem $P(\mu)$ ile yardımcı problemin çözüm kümeleri arasındaki ilişkiler kullanılarak, yardımcı problemin optimum çözümü araştırılacak ve yardımcı problemin optimum çözümü kullanılarak, $P(\mu)$ probleminin optimum çözümü elde edilecektir. Ancak öncelikle genel olarak doğrusal kuadratik optimal kontrol problemlerinin çözümüne göz atılması gerekmektedir.

3.3. YARDIMCI PROBLEMİN OLUŞTURULMASI

Yardımcı problemin oluşturulması gerekliliği, (3.43) ile ele alınan problemin bir standart stokastik optimal kontrol problemi belirtmemesinden dolayı ortaya çıkmaktadır. Problemin standart formdan farklı olması, amaç fonksiyonu içerisinde yer alan $[Ex(T)]^2$ ifadesinin dinamik programlama anlamında ayrılabilir formda olmamasından kaynaklanmaktadır. Aynı zamanda katsayıların zamana bağlı olarak değişkenlik göstermesi, problemin çözümünü zorlaştıran bir diğer etken olmaktadır. Bu noktada ele alınan yaklaşım, (3.43) ile verilen problemin daha kolay izlenebilir hale gelmesini sağlayacak bir yardımcı probleme dönüştürmek ve bu yardımcı

problem ile primal problem arasında gerekli ilişkileri kurmaktır. Ele alınan yardımcı problem, dinamik programlama anlamında ayrılabilir formda olmalıdır.

Bir önceki bölümde, portföy seçimi için çok dönemli metodolojinin açıklanmasında kullanılan yardımcı problem hatırlanacak olursa, (2.14) ile verilen optimizasyon probleminin dinamik programlama anlamında ayrılabilir formda olduğu görülür. Aynı zamanda, problemin amaç fonksiyonu kuadratik formda iken kısıtları lineer haldedir. Bu ise yardımcı problemin aslında bir doğrusal kuadratik optimal kontrol problemi olarak ele alınabileceğini belirtmektedir. Problemin bu formda ifade edilebilmesi ile birlikte kontrol teorisi kullanılarak optimal çözümü elde etmek mümkün olacaktır. Elde edilen optimum çözüm, yardımcı problem için geçerli olmaktadır ancak yardımcı problem ile primal problem arasıda uygun ilişkiler inşa edilerek, (3.43) ile verilen primal problemin optimum çözümünün elde edilmesi mümkün olmaktadır.[101] (3.43) için verilen yardımcı problem aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & J(u(\cdot);\mu,\lambda) \equiv E\left\{\mu\left[x(T)\right]^2 - \lambda\, x(T)\right\} \\ & u(\cdot) \in L^2_{\Im}(0,T;\Re^m) \\ & \left(x(\cdot),u(\cdot)\right) \quad (3.41) \text{ eşitliğini sağlar.} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Daha önceden tanımlandığı üzere, (3.45) probleminde yer alan $\mu>0$ parametresi birinci terimin amaç fonksiyonu içerisindeki ağırlığını simgelerken, $-\infty<\lambda<\infty$ parametresi ikinci terimin ağırlığını temsil etmektedir. Yine ikinci bölümdekine benzerlik gösterecek biçimde (3.45) ile tanımlanan yardımcı problemi $A(\mu,\lambda)$ ile gösterecek olursak problemin çözüm kümesi aşağıda verilen formda tanımlanabilir.

$$\prod_{A(\mu,\lambda)} = \{u(\cdot) \mid u(\cdot),\ A(\mu,\lambda) \text{ probleminin optimal kontrolü}\} \tag{3.46}$$

$A(\mu,\lambda)$ yardımcı problemi ile $P(\mu)$ problemi arasındaki ilişkiyi tanımlamak adına aşağıda verilen teoremin ve ispatının irdelenmesi faydalı olacaktır.

[101] A. E. B. Lim, X. Y. Zhou, **A.g.e.**, s.107

Teorem 3.1: Herhangi bir μ >0 ağırlığı için aşağıda verilen koşulun sağlanması halinde, (3.43) ile verilen primal problemin optimum çözüm kümesi , farklı $-\infty < \lambda < \infty$ parametreleri için (3.45) ile verilen yardımcı problemin optimum çözüm kümelerinin birleşimidir.[102]

$$\prod_{P(\mu)} \subseteq \bigcup_{-\infty<\lambda<\infty} \prod_{A(\mu,\lambda)} \tag{3.47}$$

Bunun yanısıra $\tilde{x}(\cdot)$ varlık süreci olmak üzere, $\tilde{\lambda} = 1 + 2\mu E(\tilde{x}(T))$ koşulu altında, $\tilde{u}(\cdot) \in \prod_{P(\mu)}$ olması halinde $\tilde{u}(\cdot) \in \prod_{A(\mu,\tilde{\lambda})}$ gerçekleşecektir. Başka bir deyişle $\tilde{\lambda} = 1 + 2\mu E(\tilde{x}(T))$ koşulu altında yardımcı problemin bir optimal çözümü aynı zamanda primal problemin de optimal çözümü olmaktadır.

İspat: Birinci ifade ikinci ile direkt bağlantılı olduğundan sadece ikinci ifadenin ispatlanması yeterli olacaktır. $\tilde{u}(\cdot) \in \prod_{P(\mu)}$ olduğunu kabul edelim. Çelişki yaratmak amacıyla $\tilde{u}(\cdot) \notin \prod_{A(\mu,\tilde{\lambda})}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıda verilen koşula uygun bir portföy stratejisi $u(\cdot)$ ve portföy stratejisine karşılık gelen varlık süreci $x(\cdot)$ tanımlanabilir.

$$\mu\left(E\,x(T)^2 - E\,\tilde{x}(T)^2\right) - \tilde{\lambda}\left(E\,x(T) - E\,\tilde{x}(T)\right) < 0 \tag{3.48}$$

x ve y'nin konkav fonksiyonu olmak üzere, $\pi(x, y) = \mu x - \mu y^2 - y$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon aşağıda verilen formda düzenlenebilir.

$$\pi(Ex(T)^2, Ex(T)) = -Ex(T) + \mu\,Varx(T) \tag{3.49}$$

$\pi(x, y) = \mu x - \mu y^2 - y$ fonksiyonunun x ve y değişkenine göre kısmi türevi $\partial\pi/\partial x = \mu$ ve $\partial\pi/\partial y = -(1 + 2\mu y)$ olarak elde edilebilir. Dikkat edilecek olursa (3.49) ile verilen fonksiyon (3.43) probleminin amaç fonksiyonu ile aynıdır. π

[102] X.Y. Zhou, D.Li, 2000,**A.g.e.,** s.24

fonksiyonunun konkavlık koşulu göz önüne alınacak olursa aşağıda verilen eşitsizlik elde edilir.

$$\pi(Ex(T)^2, Ex(T)) \le \pi(Ex(T)^2, Ex(T)) + \mu\left(Ex(T)^2 - E\tilde{x}(T)^2\right) - (1 + 2\mu E\tilde{x}(T))(Ex(T) - E\tilde{x}(T)) < \pi(E\tilde{x}(T)^2, E\tilde{x}(T)) \tag{3.50}$$

Eşitsizliğin son halkası (3.48) bağıntısı kullanılarak elde edilmiştir. Ancak elde edilen (3.50) eşitsizliği $\tilde{u}(\cdot)$ portföy stratejisi $P(\mu)$ probleminin bir optimal kontrol olmadığı sonucunu doğurur. Böylelikle istenilen çelişki yaratılmış olur.

□

Yukarıda ispatlanan Teorem 3.1'den elde edilen sonuç (3.43) ile verilen $P(\mu)$ probleminin optimum çözümünün varolması halinde, bu optimum çözümün aynı zamanda $A(\mu,\lambda)$ yardımcı probleminin de optimal çözümü olduğunu belirtmesidir. Dikkat edilecek olursa $A(\mu,\lambda)$ yardımcı problemi, parametreleri (μ,λ) olan stokastik optimal kontrol problemidir. Aynı zamanda problemin amaç fonksiyonu E(U(x(T))) biçiminde ifade edilebilir ki bu da lineer kuadratik yapıyı desteklemektedir.

3.4. LİNEER KUADRATİK OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, $A(\mu,\lambda)$ yardımcı problemi de dahil olmak üzere genel halde stokastik lineer kuadratik optimizasyon problemlerinin çözümü üzerinde durulacaktır.[103] Ele alınan problem aşağıda tanımlanan Itô sürecini takip etmektedir.

$$\begin{cases} dx(t) = \left[A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)\right]dt + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)\,u(t)\,dW_j(t) \\ x(0) = x_0 \quad \in \Re^n \end{cases} \tag{3.51}$$

Yukarıda (3.51) eşitliği ile tanımlanan ifade bir stokastik diferansiyel denklem belirtmektedir. Dikkat edilecek olursa trend ifadesi

[103] A. E. B. Lim, X. Y. Zhou, **A.g.e.**, s.105

$(A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t))$ varlık, portföy stratejisi ve zamanın bir fonksiyonu biçiminde tanımlanmaktadır. Bunun yanında stokastik diferansiyel denklemin difüzyon olarak adlandırılan ikinci terimi $(\sum_{j=1}^{m} D_j(t)\,u(t)\,dW_j(t))$, riskli varlıkların fiyat değişimlerinde ve doğal olarak yatırımcının varlığında meydana gelen değişimin belirsizliğini temsil etmektedir. Kısacası varlık miktarındaki değişimi simgeleyen Brownian hareket olarak adlandırılabilir. İkinci satırda yer alan x_0 ifadesi başlangıçta yatırımcının sahip olduğu varlık miktarını temsil etmektedir.

Bu durumda her bir portföy stratejisine karşılık gelen fayda fonksiyonu değeri, diğer bir deyişle amaç fonksiyon, aşağıda verilen biçimde tanımlanabilir.

$$J(u(\cdot)) = E\left\{\int_0^T \frac{1}{2}\left[x(t)'Q(t)\,x(t)+u(t)'R(t)\,u(t)\right]dt+\frac{1}{2}x(T)'H\,x(T)\right\} \qquad (3.52)$$

Kontrol teorisi anlamında varlık $(x(\cdot))$ ve portföy stratejisi $(u(\cdot))$ süreçleri bir çift oluşturmaktadır. Aynı zamanda, $x(\cdot)$ ile gösterilen yatırımcının varlığı ifadesi $u(\cdot)$ ile temsil edilen portföy stratejisine cevap olarak adlandırılabilir. Varlık miktarının dinamikleri (3.51) ifadesi ile elde edilerek, bu varlık miktarına karşılık gelen portföy stratejisi cevap olarak elde edilecektir. (3.52) ile verilen kontrol probleminde amaç $L_{\Im}^{2}(0,T;\Re^m)$ üzerinde $J(\cdot)$ fonksiyonunun minimize edilmesi olacaktır. Aşağıda problemin çözümünde kullanılacak Riccati diferansiyel denklemi $(\dot{P}(t))$ ve $\dot{g}(t)$ eşitliği ile tanımlanmaktadır.

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A(t)'P(t) - Q(t) \\ \qquad\qquad + P(t)B(t)\left(R(t)+\sum_{j=1}^{m} D_j(t)'P(t)D_j(t)\right)^{-1} B(t)'P(t) \\ P(t) = H \\ K(t) \equiv R(t)+\sum_{j=1}^{m} D_j(t)'P(t)D_j(t) \quad > 0 \quad , \quad \forall t \in [0,T] \end{cases} \qquad (3.53)$$

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = -A(t)'g(t) + P(t)B(t)\left(R(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'g(t) \\ \qquad\qquad - P(t)f(t) \\ g(T) = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

(3.53) ve (3.54) ile verilen Riccati diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin varolması durumunda (3.51) ve (3.52) ile verilen stokastik lineer kuadratik optimal kontrol probleminin çözümünün varolduğu söylenebilir. Çözümün varlığına ilişkin teorem ve ispatı aşağıda verilmektedir.[104]

Teorem 3.2: (3.53) ve (3.54) ile verilen Riccati diferansiyel denklemlerinin P(t) ve g(t) çözümlerinin varolması durumunda (3.51) ve (3.52) ile verilen stokastik lineer kuadratik optimal kontrol probleminin çözümü vardır ve aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$u^*(t,x) = -\left(R(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'\left(P(t)x + g(t)\right) \tag{3.55}$$

Bunun yanısıra amaç fonksiyonu değeri aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$J^* = \frac{1}{2}\int_0^T \left(2f(t)'g(t) - g(t)B(t)\left(R(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)'P(t)D_j(t) \right)^{-1} B(t)'g(t) \right) dt \tag{3.56}$$
$$+ \frac{1}{2}x_0'P(0)x_0 + x_0 g(0)$$

İspat: Itô'nun lemmasının uygulanması neticesinde $x'Px$ ifadesinin türevi aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\frac{1}{2}d(x'Px) = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{j=1}^{m} u'D_j'PD_ju + x'(-Q + PBK^{-1}B'P)x \right. \tag{3.57}$$
$$\left. + 2u'B'Px + 2x'Pf \right\}dt + \frac{1}{2}\{\cdots\}dW(t)$$

[104] X.Y. Zhou, D.Li, 2000,**A.g.e.,** s.26

$$d(x'g) = \left\{u'B'g + x'PBK^{-1}B'g + f'g - x'Pf\right\}dt + \{\cdots\}dW(t) \qquad (3.58)$$

(3.57) ve (3.58) ile verilen ifadelerin integralinin [0,T] aralığında hesaplanması ve beklenen değerinin alınması ve son olarak ifadelerin birbirine eklenmesi neticesinde aşağıda verilen eşitlik elde edilir.

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}E\int_0^T \{u'Ku + 2u'B'(Px+g) + x'PBK^{-1}B'Px$$

$$+ 2x'PBK^{-1}B'g + f'g\}dt + \frac{1}{2}x_0'P(0)x_0 + x_0g(0)$$

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}E\int_0^T [\{u + K^{-1}B'(Px+g)]'K[u + K^{-1}B'(Px+g)] \qquad (3.59)$$

$$+ 2f'g - gBK^{-1}B'g\}dt + \frac{1}{2}x_0'P(0)x_0 + x_0g(0)$$

Bu durumda optimal kontrol ifadesi (3.55) ile elde edilmektedir ve amaç fonksiyonunun optimal değeri (3.56) ile verilen eşitlik aracılığıyla hesaplanmaktadır. Bu ise (3.51) kısıtı altında, (3.55) ile verilen optimal çözümün var olduğuna işarettir. Böylelikle, (3.51) ifadesi aşağıda verilen forma indirgenebilir.

$$\begin{cases} dx(t) = \left[A(t)x(t) - B(t)K(t)^{-1}B(t)'(P(t)x(t) + g(t))\right]dt \\ \qquad\qquad - \sum_{j=1}^{m} D_j(t)K(t)^{-1}B(t)'(P(t)x(t) + g(t))\,dW_j(t) \qquad (3.60) \\ x(0) = x_0 \quad \in \Re^n \end{cases}$$

Böylelikle ifade homojen olmayan stokastik optimal kontrol problemine dönüştürülmüş olur. Bu ise sadece tek bir çözümün varlığına işarettir.

□

Lineer kuadratik modelleri, optimal kontrol problemleri içerisindeki yeri önemlidir. Amaç fonksiyonunun kuadratik ve kısıtların doğrusal olması halinde dinamik optimizasyon problemlerinin Riccati diferansiyel denklemlerine dönüştürülmesine ve böylelikle de optimal çözümün elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi problemleri

yukarıda bahsedilen özellikleri barındırdıklarından, stokastik lineer kuadratik kontrol problemi olarak ifade edilebilir ve böylelikle de kolaylıkla çözülebilirler. Bir sonraki bölümde, daha önceden ele alınan yardımcı problemin bu bölümde ele alınan en genel halde optimal kontrol probleminin özel bir hali olduğu üzerinde durularak çözümü gerçekleştirilecektir.

3.5. YARDIMCI PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (3.45) ile verilen yardımcı problemin stokastik lineer kuadratik optimal kontrol tekniği ile çözümü üzerinde durulacaktır. Yardımcı problemin daha basit bir forma indirgenebilmesi açısından $\gamma=\lambda/\mu$ ve $y(t)=x(t)-\gamma$ tanımlamasının yapılması uygundur. Bu tanımlamalar ile birlikte, (3.45) ile verilen yardımcı problemin minimizasyonu ile aşağıda verilen problemin minimizasyonunun eşdeğer olduğu gösterilebilir.

$$E\left[\frac{1}{2}\mu y(T)^2\right] \tag{3.61}$$

Benzer bir biçimde aynı tanımlamalar ışığında (3.41) ile verilen varlık miktarındaki anlık değişim bağıntısı aşağıdaki biçimde yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{cases} dy(t) = \{A(t)y(t) + B(t)u(t) + b(t)\}dt + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)u(t)dW_j(t) \\ y(0) = x_0 - \gamma \end{cases} \tag{3.62}$$

(3.62) bağıntısı ile verilen yatırımcının varlık miktarındaki anlık değişim ifadesi hesaplanırken ele alınan B(t) vektörü, risksiz faiz oranını aşan getiri oranını temsil etmektedir. Bunun yanında risksiz varlığın getirisi, başka bir deyişle risksiz faiz oranı A(t) ile gösterilmektedir. Aynı zamanda $D_j(t)$ ifadesi volatilite, yani hisse senedi getirilerinin standart sapması yerine kullanılmıştır. Bütün bu tanımlamalar aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{cases} A(t) = r(t), & B(t) = \left(b_1(t) - r(t), \cdots, b_m(t) - r(t)\right) \\ b(t) = \gamma r(t), & D_j(t) = \left(\sigma_{1j}(t), \sigma_{2j}(t), \cdots, \sigma_{mj}(t)\right) \end{cases} \tag{3.63}$$

(3.62) ile tanımlanan problemin dinamikleri lineer ve (3.61) ile tanımlanan amaç fonksiyonu kuadratik olduğundan ele alınan yardımcı problem lineer kuadratik kontrol problemi olarak ele alınabilir. Bir önceki bölümde ele alınan ilişkiler kullanılarak problemin optimal çözümü aşağıda verilen teoremin ispatında açıklanmaktadır.

Teorem 3.3: Yardımcı problem A(μ,λ) kontrol probleminin optimal çözümü aşağıdaki bağıntı ile elde edilmektedir.[105]

$$\tilde{u}(t,x) = \left(\tilde{u}_1(t,x),\cdots,\tilde{u}_m(t,x)\right) = \left(\sigma(t)\sigma(t)'\right)^{-1} B(t)' \left(\gamma e^{-\int_t^T r(s)ds} - x \right) \tag{3.64}$$

İspat: Öncelikle ele alınan yardımcı problem ile bir önceki bölümde açıklanan en genel halde doğrusal kuadratik optimal kontrol problemlerinin çözümü arasındaki ilişkinin açıklanması gerekmektedir.

Dikkat edilecek olursa (3.61)-(3.62) problemi, bir önceki bölümde açıklanan (3.51)-(3.52) probleminin (Q(t),R(t))=(0,0) ve H=μ başlangıç koşulları uygulanmış özel bir halinden ibarettir. Bu nedenle problemin optimum çözümü benzer bir yaklaşım ile elde edilebilir.

Problemde verilen R(t)=0 tanımlaması, problemin tekil hale dönüşümünü sağlarken, x(t) karar değişkeninin ve P(t) Riccati denkleminin tek boyutlu olması (3.53) ifadesinin çözümünü kolaylaştırmaktadır.

$$\begin{aligned} \rho(t) &= B(t)\left[\sum_{j=1}^{m} D_j(t)' D_j(t)\right]^{-1} B(t)' \\ &= B(t)\left[\sigma(t)\sigma(t)'\right]^{-1} B(t)' \end{aligned} \tag{3.65}$$

Yukarıda yapılan tanımlamalar ile birlikte (3.53) Riccati denklemi aşağıda verilen forma sadeleştirilebilir.

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = \left(\rho(t) - 2r(t)\right)P(t) \\ P(T) = \mu \\ P(t)\left[\sigma(t)\sigma(t)'\right] > 0 \end{cases} \tag{3.66}$$

[105] X.Y. Zhou, D.Li, 2000,**A.g.e.,** s.28

(3.66) ile verilen problemin çözümü $P(t) = \mu e^{-\int_t^T (\rho(s)-2r(s))ds}$ ifadesidir. Hatırlanacak olursa, (3.37) ile daha önceden tanımlanan çözümün elde edilmesi aşamasında dejenerasyonla karşılaşılmaması koşulu sayesinde, (3.66) probleminin üçüncü kısıtı sağlanmaktadır. Böylelikle (3.54) ifadesi aşağıda verilen forma indirgenebilir.

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = (\rho(t) - r(t))g(t) - \gamma\, r(t)P(t) \\ \\ g(T) = 0 \end{cases} \tag{3.67}$$

(3.67) koşulu aynı zamanda ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünün tekliğini garantilemektedir. Teorem 3.2'de tanımlanan (3.55) optimum çözümü bu tanımlamalar ile aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\tilde{u}(t,y) \equiv \left(\tilde{u}_1(t,y), \cdots, \tilde{u}_m(t,y)\right) = \left[\sigma(t)\sigma(t)'\right]^{-1} B(t)' \left(y + \frac{g(t)}{P(t)} \right) \tag{3.68}$$

h(t)=g(t)/P(t) tanımlaması ve (3.66) ve (3.67) eşitliklerinin dikkate alınması neticesinde $\dot{h}(t)$ fonksiyonu aşağıda verilen biçimde elde edilebilir.

$$\dot{h}(t) = \frac{P(t)\dot{g}(t) - \dot{P}(t)g(t)}{P(t)^2} = \frac{r(t)P(t)g(t) - \gamma\, r(t)P(t)^2}{P(t)^2} = r(t)h(t) - \gamma\, r(t) \tag{3.69}$$

g(t) fonksiyonunun karakteristiğinin tanımlandığı (3.67) ifadesi dikkate alınacak olursa, aralığın nihai değeri T için fonksiyonun değerinin sıfır olduğu görülür.(g(T)=0) Bu noktadan hareketle, benzer biçimde h(t)=g(t)/P(t) tanımlamasından dolayı aralığın nihai değeri T için h(t) fonksiyonun da değerinin sıfır olduğu söylenebilir. (h(T)=0) Başlangıç koşulunun elde edilmesi ile birlikte optimal kontrol probleminin çözümü aşağıda verilen biçimde elde edilecektir.

$$\frac{g(t)}{P(t)} = h(t) = \gamma \left(1 - e^{-\int_t^T r(s)ds} \right) \tag{3.70}$$

(3.70) ile elde edilen h(·) fonksiyonunun optimal çözümün tanımlandığı (3.68) bağıntısında yerine yazılması ile birlikte ve tabii ki bölüm başlangıcında gerçekleştirilen $\gamma=\lambda/\mu$ ve $y(t)=x(t)-\gamma$ tanımlamaları dikkate alınarak, teoremde ispatlanmaya çalışılan optimal çözüm elde edilmiş olur.

$$\tilde{u}(t,x) \equiv \left(\tilde{u}_1(t,,x),\cdots,\tilde{u}_m(t,x)\right)$$

$$= -\left[\sigma(t)\sigma(t)'\right]^{-1} B(t)' \left[x - \gamma + \gamma \left(1 - e^{-\int_t^T r(s)ds} \right) \right]$$

$$= -\left[\sigma(t)\sigma(t)'\right]^{-1} B(t)' \left(\gamma e^{-\int_t^T r(s)ds} - x \right) \qquad (3.71)$$

Yukarıda verilen ifadede yer alan γ parametresi aynı zamanda aşağıda verilen biçimde tanımlanabilmektedir.

$$\gamma = \frac{Ex(T) - x_0 e^{\int_0^T (r(t)-\rho(t))dt}}{1 - e^{-\int_0^T \rho(t)dt}} \qquad (3.72)$$

□

(3.71) ifadesi kullanılarak yatırımcının elindeki varlığı [0,T] aralığının herhangi bir noktasında hangi yatırım araçlarına hangi miktarda ayırması gerektiği, başka bir deyişle optimum portföy stratejisi elde edilmiş olur. Benzer biçimde, çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi modelinde olduğu gibi, optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi, varyansı ve etkin sınırının elde edilmesi de mümkündür.

3.6. ETKİN SINIRIN ELDE EDİLMESİ

Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi probleminin çözülmesi ve belirli bir [0,T] aralığına ait her nokta için optimal portföy stratejisinin belirlenmesi ile birlikte, portföy getirisinin ve varyansının hesaplanması hatta işlemin geliştirilerek etkin sınırın elde edilmesi mümkün olmaktadır. Etkin sınırın elde edilmesi ile birlikte, verilen herhangi bir risk seviyesi için beklenen getiri veya tam

tersine herhangi bir getiri seviyesine karşılık gelen risk kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

Bu noktada amaç, (3.42) ile verilen orijinal ortalama-varyans problemi için etkin sınırın elde edilmesidir. (3.71) optimal kontrolünün göz önünde bulundurulması ile birlikte, (3.45) ile tanımlanan $A(\mu,\lambda)$ yardımcı problemine ait yatırımcının varlık miktarındaki anlık değişim ifadesi aşağıda verilen biçimde yeniden düzenlenecektir. Yatırımcının toplam varlığındaki anlık değişim ifadesinin beklenen değerinin alınması ve aynı ifadenin karesinin beklenen değerinin alınması, optimal portföy stratejisinin beklenen değeri ve varyansını elde etmemize imkan sağlamaktadır.

$$\begin{cases} dx(t) = \left\{ \left(r(t)-\rho(t)\right)x(t) + \gamma\, e^{-\int_t^T r(s)ds}\rho(t) \right\} dt \\ \qquad + B(t)\left(\sigma(t)\sigma(t)'\right)^{-1}\sigma(t)\left(\gamma\, e^{-\int_t^T r(s)ds} - x(t) \right) dW(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.73}$$

Benzer bir biçimde $x(t)^2$ ifadesine Itô'nun lemmasının uygulanması ile birlikte $dx(t)^2$ ifadesi elde edilmiş olur.

$$\begin{cases} dx(t)^2 = \left\{ \left(2r(t)-\rho(t)\right)x(t)^2 + \gamma^2\, e^{-2\int_t^T r(s)ds}\rho(t) \right\} dt \\ \qquad + 2x(t)B(t)\left(\sigma(t)\sigma(t)'\right)^{-1}\sigma(t)\left(\gamma\, e^{-\int_t^T r(s)ds} - x(t) \right) dW(t) \\ x(0) = x_0^2 \end{cases} \tag{3.74}$$

Yukarıda bahsedildiği üzere (3.73) ve (3.74) bağıntıları ile verilen $dx(t)$ ve $dx(t)^2$ ifadelerinin her iki yanının beklenen değerinin alınması neticesinde, yatırımcının toplam varlık miktarındaki anlık değişimin beklenen değeri ve

varyansının elde edilmesi mümkün olacaktır. Beklenen değerin alınması ile birlikte (Ex(t)) ve ($Ex(t)^2$) ifadeleri elde edilir.

$$\begin{cases} dEx(t) = \left\{ (r(t) - \rho(t))Ex(t) + \gamma\, e^{-\int_t^T r(s)ds}\, \rho(t) \right\} dt \\ E(x(0)) = x_0 \end{cases} \tag{3.75}$$

$$\begin{cases} dEx(t)^2 = \left\{ (2r(t) - \rho(t))Ex(t)^2 + \gamma^2\, e^{-2\int_t^T r(s)ds}\, \rho(t) \right\} dt \\ E(x(0)^2) = x_0^2 \end{cases} \tag{3.76}$$

(3.75) ve (3.76) ifadelerinin her ikisi de γ parametresini içermektedir. Dolayısıyla, bu iki bağıntı kullanılarak Ex(T) ve $Ex(T)^2$ ifadeleri γ parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edilebilir.

$$\begin{cases} Ex(T) = e^{\int_0^T (r(t)-\rho(t))dt}\, x_0 + \left(1 - e^{-\int_0^T \rho(t)dt} \right) \gamma \\ Ex(T)^2 = e^{\int_0^T (2r(t)-\rho(t))dt}\, x_0^2 + \left(1 - e^{-\int_0^T \rho(t)dt} \right) \gamma^2 \end{cases} \tag{3.77}$$

Yukarıda verilen ifadelerin daha basit bir formda görünmesi adına bir takım dönüşümler gerçekleştirilebilir.

$$\alpha = e^{\int_0^T (r(t)-\rho(t))dt}, \quad \beta = 1 - e^{-\int_0^T \rho(t)dt}, \quad \delta = e^{\int_0^T (2r(t)-\rho(t))dt} \tag{3.78}$$

Bu tanımlamalar ile birlikte $Ex(T) = \alpha x_0 + \beta\gamma$ ve $Ex(T)^2 = \delta x_0^2 + \beta\gamma^2$ eşitlikleri elde edilmiş olur. Hatırlanacak olursa Teorem 3.1 ile, varolması durumunda optimal çözümün sağlaması gereken şartları tanımlanmıştı. Teorem 3.1'de verilen koşullar ve aynı zamanda Ex(T) ve $Ex(T)^2$ için yapılan tanımlamalar göz özüne alınarak $P(\mu)$ probleminin optimum çözümü aşağıda verilen biçimde tanımlanabilir.

$$\tilde{\lambda} = 1 + 2\mu E\tilde{x}(T) = 1 + 2\mu\left(\alpha x_0 + \beta\frac{\tilde{\lambda}}{2\mu}\right) \tag{3.79}$$

Dikkat edilecek olursa ifadenin her iki yanında $\tilde{\lambda}$ parametresi yer almaktadır. $\tilde{\lambda}$ parametresinin eşitliğin bir yanında yalnız bırakılması ve $\gamma = \tilde{\gamma} = \tilde{\lambda}/2\mu$ eşitliğinin kullanılması ile P(μ) probleminin optimal kontrolü aşağıda verilen biçimde elde edilebilir.

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 + 2\mu\alpha x_0}{1-\beta} = e^{\int_0^T \rho(t)dt} + 2\mu x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} \tag{3.80}$$

Artık Ex(T) ve $Ex(T)^2$ ifadeleri açık bir biçimde elde edilmiştir. Bu durumda varyans içinde geçerli ($Varx(T) = Ex(T)^2 - [Ex(T)]^2$) bağıntısı kullanılarak nihai varlığın varyansı kolaylıkla elde edilebilir.

$$\begin{aligned} Var\tilde{x}(T) &= E\tilde{x}(T)^2 - \left[E\tilde{x}(T)\right]^2 \\ &= \beta(1-\beta)\tilde{\gamma}^2 - 2\alpha\beta x_0\tilde{\gamma} + (\delta - \alpha^2)x_0^2 \\ &= \frac{(1-\beta)}{\beta}\left[\beta^2\tilde{\gamma}^2 - 2\frac{\alpha\beta^2 x_0\tilde{\gamma}}{1-\beta} + \frac{\beta(\delta-\alpha^2)}{1-\beta}x_0^2\right] \\ &= \frac{(1-\beta)}{\beta}\left[\left(\beta\tilde{\gamma} + \alpha x_0\right)^2 - 2\frac{\alpha\beta^2 x_0\tilde{\gamma}}{1-\beta} + \frac{\beta(\delta-\alpha^2)}{1-\beta}x_0^2\right] \end{aligned} \tag{3.81}$$

Son olarak (3.81) ile verilen ifadede, daha önceden $\beta\tilde{\gamma} = E\tilde{x}(T) - \alpha x_0$ olarak tanımlanan bağıntının kullanılması ile yatırımcının nihai varlığının varyansı elde edilmiş olacaktır. Bu dönüşümün yapılması, etkin sınır elde edilmesi açısından önem taşımaktadır. Böylelikle, içerisinde hem beklenen değer, hem de varyans barındıran bir eşitlik elde edilmiş olur.

$$Var\tilde{x}(T) = \frac{(1-\beta)}{\beta}\left[\left(E\tilde{x}(T)\right)^2 - 2\frac{\alpha}{1-\beta}x_0 E\tilde{x}(T) + \frac{\beta\delta + \alpha^2}{1-\beta}x_0^2\right]$$

$$= \frac{(1-\beta)}{\beta}\left(E\tilde{x}(T) - x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} \right)^2$$

$$= \frac{e^{-\int_0^T \rho(t)dt}}{1-e^{-\int_0^T \rho(t)dt}}\left(E\tilde{x}(T) - x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} \right)^2 \qquad (3.82)$$

Son olarak elde edilen (3.82) ifadesi etkin sınır olarak adlandırılır. (3.82) ifadesi kullanılarak herhangi bir getiri düzeyinde katlanılması gereken risk miktarı veya tersine herhangi bir risk seviyesinde elde edilecek getiriyi elde etmek mümkün olmaktadır.

Bunun yanında etkin sınır, bir anlamda yatırımcının riske karşı tutumunu temsil etmektedir. (3.82) ile verilen ifade bir tamkare olması bir takım faydaları da beraberinde getirmektedir. Örneğin yatırımcının en ufak bir risk almamak istemesi durumunda, yani riskin sıfır olarak kabul edilmesi halinde yatırımcının beklenen getirisi aşağıda verilen biçimde gerçekleşecektir.

$$0 = \frac{e^{-\int_0^T \rho(t)dt}}{1-e^{-\int_0^T \rho(t)dt}}\left(E\tilde{x}(T) - x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} \right)^2$$

$$E\tilde{x}(T) = x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} \qquad (3.83)$$

(3.83) ifadesi yatırımcının elinde bulundurduğu varlığın tamamını risksiz varlıkta değerlendirmesi sonucu elde edeceği getiriyi göstermektedir. Bu sonuç, risksiz varlığın portföye eklenmesi durumunda etkin sınırın yukarıda görüldüğü gibi tamkare biçiminde elde edileceğini doğrulamaktadır. Risksiz varlığın portföyden çıkartılmasında durumunda tamkare ifadesi ortadan kalkmaktadır. Bu ise yatırımcının risksiz bir portföy elde edemeyeceği anlamına gelmektedir.

Böylelikle sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi modelinin oluşturulması ve çözümü sonucu elde edilecek optimum portföy stratejisi ve bu

stratejiye bağlı olarak nihai varlığın beklenen getirisi ve varyansı, etkin sınır elde edilmiş olur. Optimum portföy stratejisinin bulunmasında takip edilecek yöntemin adım adım özetlenmesi faydalı olacaktır.[106]

Adım 1: Modelin oluşturulmasında kullanılacak hisse senedi getiri vektörü, risksiz faiz oranı ve korelasyon matrisi elde edilir. Bu parametreler kullanılarak, risksiz faiz oranını aşan getiri miktarını temsil eden B(t) vektörü hesaplanır.

Adım 2: (3.65) bağıntısı ile tanımlanan risk primi süreci elde edilir. Ancak, öncelikle (3.65) ifadesi içerisinde yer alan kovaryans matrisinin transpozesi ve tersi hesaplanmalıdır. Risk primi sürecinin elde edilmesi ile birlikte yatırımcının beklediği getiri oranının tespit edilir. Bu parametre kullanılarak optimum portföy stratejisinde yer alan γ parametresi hesaplanabilecektir.

Adım 3: Gerekli bütün paramerelerin hesaplanması ile birlikte optimum portföy stratejisi (3.71) kullanılarak elde edilebilir. Optimum portföy stratejisi, mevcut riskli ve risksiz varlıklara yapılacak yatırım miktarını belirlemektedir. Risksiz varlığa yapılan yatırım miktarının negatif sonuç vermesi borçlanma miktarını belirtirken, riskli varlıklarda elde edilen negatif sonuç, ilgili hisse senedi için açığa satış miktarını belirtmektedir. Böylelikle, belirlenen portföye karşılık gelen beklenen getiri ve varyans değerleri sırasıyla, (3.77) ve (3.81) ile hesaplanabilecektir.

Adım 4: Beklenen getiri ve varyansın hesaplanması ile birlikte etkin sınır, (3.82) bağıntısı kullanılarak elde edilebilir. Aynı zamanda varyans ve beklenen getiri arasındaki ilişki kullanılarak sermaye piyasası doğrusunun da elde edilmesi mümkündür. Bu parametrelerin elde edilmesi ile birlikte yatırımcının herhangi bir getiri düzeyinde katlanmak zorunda olduğu risk miktarı hesaplanarak yorumlanabilmektedir.

[106] D. Yao, H. Zhang, X.Y.Zhou, **A.g.e.,** s.284

3.7. MODELİN TEST EDİLMESİ

Bu bölümde, sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçim modelinin uygulamada kullanımını daha net bir biçimde ortaya koyabilmek amacıyla bir uygulama gerçekleştirilecektir. Bu bölümde üç riskli varlık ve risksiz varlıktan oluşan bir örnek dikkate alınacaktır. [107]

Belirli bir zaman aralığına ait herhangi bir noktada optimum portföy stratejisi, etkin sınır ve gerçekleştirilen portföy stratejisi neticesinde elde edilecek nihai varlığın beklenen değeri ve varyansı hesaplanacaktır. Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçiminin uygulamada ne şekilde kullanılacağını gösterebilmek amacıyla, getirileri b(t)=(0,01;0,05;0,06) vektörü ile temsil edilen üç hisse senedi göz önüne alınacaktır. İlgili periyot için risksiz faiz oranının r(t)=0,02 olduğu varsayılarak hisse senetlerine ait kovaryans matrisi aşağıda verilmektedir.

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Öncelikle yatırımcının beklediği getiri oranının %10 olduğunu varsayalım. İlk olarak (3.63) eşitliği ile verilen ve risksiz faiz oranını aşan getiri miktarını temsil eden B(t) vektörü aşağıda verilen biçimde hesaplanacaktır.

$$B(t)\equiv(b_1(t)-r(t),\ b_2(t)-r(t),\ b_3(t)-r(t))=(-0{,}01;\ 0{,}03;\ 0{,}04)$$

Hatırlanılacak olursa risk primi süreci risksiz faiz oranını aşan getiri miktarını temsil eden B(t) vektörü ile kovaryans matrisinin transpozesinin tersinin çarpımından oluşmakta idi. Bu nedenle risk primi sürecinin elde edilebilmesi için kovaryans matrisinin tersinin elde edilmesi gerekmektedir. Kovaryans matrisinin simetrik olduğu düşünülecek olursa, sadece tersinin hesaplanması da yeterli olacaktır.

$$\left[\sigma(t)'\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

[107] D. Yao, H. Zhang, X.Y.Zhou, **A.g.e.,** s. 288

Böylelikle, (3.65) bağıntısı ile tanımlanan risk primi süreci aşağıda verilen biçimde elde edilebilir.

$$\theta(t) \equiv \left(\theta_1(\cdot),\cdots,\theta_m(\cdot)\right) = B(t)\left[\sigma(t)'\right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,01 & 0,03 & 0,04 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,03 & 0,06 \end{pmatrix}$$

$$\rho(t) = \theta(t)\theta(t)' = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,03 & 0,06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,05 \\ 0,03 \\ 0,06 \end{pmatrix} = \frac{7}{1000}$$

Öncelikle yatırımcının beklediği getiri oranının %10 olduğu varsayılmakta idi. Bu ifade Ex(T)=1,1 biçiminde gösterilebilir. Yatırımcının yatırım ufkunun bir yıl olduğu varlık miktarının bir birim olduğunun varsayılması ile birlikte γ parametresi (3.72) bağıntısının kullanılarak aşağıda verilen biçimde hesaplanır.

$$\gamma = \frac{Ex(T) - x_0 e^{\int_0^T (r(t)-\rho(t))dt}}{1 - e^{-\int_0^T \rho(t)dt}} = \frac{1,1 - e^{\int_0^1 (0,02-0,007)dt}}{1 - e^{-\int_0^1 0,007dt}} = \frac{0,0869000}{0,0069756} = 12,4588$$

γ parametresi hedef varlık seviyesi olarak da adlandırıldığından elde edilen sonuç para birimi cinsindendir. Bu değer ise yatırımcının bir birim varlığa karşılık 12,4588 bugünkü değeri elde edinceye kadar yatırıma devam edeceğini göstermektedir. Bu ifade dönem başlangıcı için 12,2145 olarak hesaplanabilir.

Gerekli parametrelerin elde edilmesi ile birlikte optimal portföy stratejisi (3.71) bağıntısı kullanılarak aşağıda verilen biçimde belirlenebilir.

$$\tilde{u}(t,x) = -\left[\sigma(t)\sigma(t)'\right]^{-1} B(t)' \begin{pmatrix} \gamma e^{-\int_t^T r(s)ds} - x \end{pmatrix}$$

$$= -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,03 \\ 0,04 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 12,4588\, e^{-\int_0^1 0,02ds} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3,25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,03 \\ 0,04 \end{bmatrix}(11,2121) = (11,2121)\begin{bmatrix} -0,05 \\ 0,03 \\ 0,14 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -0,5607 \\ 0,3364 \\ 1,5699 \end{bmatrix}$$

Elde edilen (-0,5607;0,3364;1,5699) vektörü üç adet riskli hisse senedine yatırılacak varlık miktarını temsil etmektedir. Birinci hisse senedi için elde edilen negatif değer, açığa satış miktarını ifade etmektedir. Açığa satış sonucu elde edilen varlık, diğer iki hisse senedine yatırım amacıyla kullanılacaktır. Yatırımcının elinde başlangıçta bir birim varlık olduğu göz önüne alınacak olursa, yukarıda verilen portföy stratejisinin gerçekleştirilebilmesi için bankadan 0,3456 birim varlık borçlanılmalıdır. (-1,5699 -0,3364 +0,5607 +1 = 0,3456)

Nihai varlığın beklenen değeri ve varyansı arasındaki ilişkiler kullanılarak, sermaye piyasası doğrusunun sürekli zamanlı halinin de elde edilmesi mümkündür. Böylelikle bir birim riske daha katlanılması neticesinde elde edilecek getiri hesaplanabilmektedir.

$$E\tilde{x}(T) = x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} + \sqrt{e^{\int_0^T \rho(t)dt} - 1}\;\tilde{\sigma}(T)$$

$$E\tilde{x}(1) = e^{\int_0^1 0,02\,dt} + \sqrt{e^{\int_0^1 0,007\,dt} - 1}\;\tilde{\sigma}(1)$$

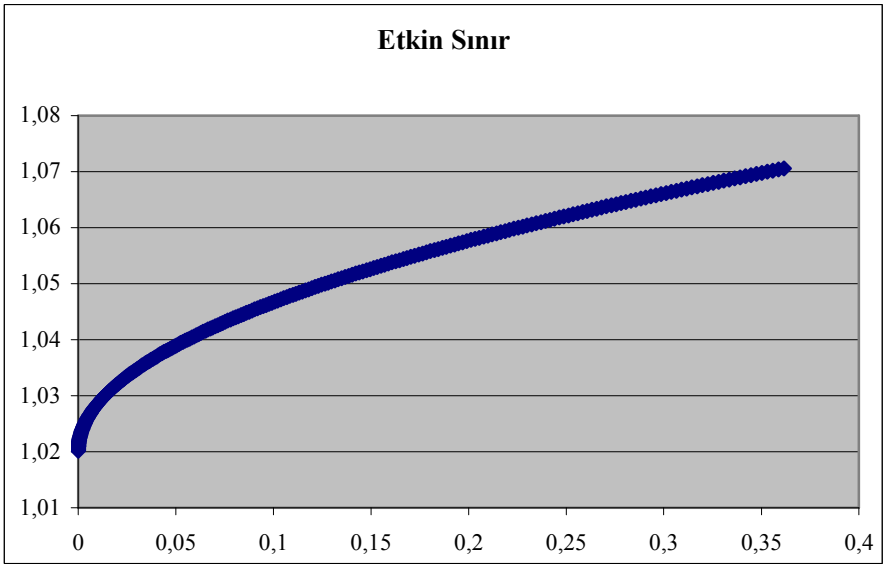
Dolayısıyla sermaye piyasası doğrusu, $E\tilde{x}(1) = 0,0202 + 0,0838\tilde{\sigma}(1)$ olarak elde edilecektir. Örneğin gerçekleştireceği yatırımdan %10 getiri bekleyen bir yatırımcının katlanması gereken risk veya başka bir deyişle standart sapma, sermaye piyasası doğrusu kullanılarak %95,23 olarak hesaplanır. Son olarak (3.82) ile tanımlanan etkin sınır aşağıda verilen biçimde elde edilebilecektir.

$$\operatorname{Var}\tilde{x}(T) = \frac{e^{-\int_0^T \rho(t)dt}}{1-e^{-\int_0^T \rho(t)dt}} \left(E\tilde{x}(T) - x_0 e^{\int_0^T r(t)dt} \right)^2$$

$$\operatorname{Var}\tilde{x}(T) = 142{,}3568 \left(E\tilde{x}(T) - 1{,}0202 \right)^2$$

Tabii ki etkin sınır $E\tilde{x}(T) \geq 1{,}0202$ kısıtı ile birlikte göz önüne alınmalıdır. Şimdi etkin sınırı grafik üzerinde göstermeye çalışalım. Grafikte y-ekseni nihai varlığın beklenen değerini temsil ederken x-ekseni varyansı temsil etmektedir.

Grafik 3.1 Sürekli Zamanlı Ortalama-Varyans Etkin sınır



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

SÜREKLİ ZAMANLI PORTFÖY SEÇİMİ VE İMKB'DE BİR UYGULAMA

4.1 GİRİŞ

Portföy seçimi problemi, yatırımcının elindeki varlığı çeşitli yatırım araçlarına optimum biçimde dağıtması olarak özetlenebilir. Daha açık bir ifade ile portföy seçimi, yatırımcının belirli bir yatırım ufku için herbir menkul kıymetten ne kadar elde bulunduracağına karar verme sürecidir. Portföy seçim problemi üzerine geliştirilen ilk çözüm, ortalama-varyans modeli olarak da adlandırılan Markowitz modelidir. Markowitz modelinin oluşturulabilmesi için, gözönüne alınan rassal değişkenlerin sadece beklenen değer ve kovaryans parametrelerinin hesaplanması yeterlidir. Yatırımcılara sağladığı kullanım kolaylığı açısından bu model, halen bankaların risk yönetimi departmanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Ele alınan zaman aralığı için beklenen değer ve kovaryansların hesaplanması ile birlikte model kolaylıkla oluşturulabilir ve kuadratik programlama ile çözülerek hangi yatırım aracına varlığın ne kadarının ayrılması gerektiği hesaplanabilir. Ancak bu noktadan sonra Markowitz modeli tarafından önerilen, yatırımcının gerçekleştirdiği yatırım kararında hiçbir değişiklikte bulunmadan dönem sonuna kadar beklemesidir. Bu ise değişen piyasa koşullarına karşılık yatırımcıları güçsüz bırakmaktadır.

Bu bölümde uygulama kapsamında, portföy seçimi probleminin ne şekilde dinamik hale dönüştürülebileceği İstanbul Menkul Kıymetler Borsası verileri kullanılarak gösterilmeye çalışılacaktır. Bu noktada dinamik portföy seçiminin getirdiği faydaların araştırılması hedeflenmektedir. Bununla birlikte, ele alınan modellerin Türkiye piyasalarına uygunluğunun irdelenmesi amaçlanmaktadır. Uygulama kapsamında öncelikle hangi menkul kıymetler arasından seçim yapılacağı kararlaştırılmaktadır. Bu noktada dinamik portföy seçimi modellerinin

varsayımlarının sağlanması önem kazanmaktadır. Daha sonra ilk olarak Markowitz modeli ile portföy seçimi yapılmakta ve bu sayede ileride gözönüne alınacak modeller ile karşılaştırma imkanı sağlanmaktadır. Bir sonraki adımda, portföy seçimi probleminin dinamik hale dönüştürülmesi ile yatırım kararlarında meydana gelecek değişiklikler ve bu değişikliklerin yatırım periyodu sonunda beklenen getiri ve risk parametrelerine etkileri sorgulanmaktadır.

4.2 HİSSE SENETLERİNİN SEÇİMİ VE VARSAYIMLARA UYGUNLUĞUN İNCELENMESİ

Bu bölümde portföy seçimi sürecinde gözönüne alınacak hisse senetlerinin seçimi, kapanış verilerinin hangi tarihler arasında alınacağı ve model varsayımlarını sağlayan hisse senetlerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Böylelikle yatırımcının portföy seçimini hangi hisse senetleri arasından gerçekleştirmesinin daha uygun olduğu belirlenecektir.

Herhangi bir yatırımcı, portföy seçim sürecinde İstanbul Menkul Kıymetler Borsası(IMKB)'nda işlem gören tüm hisse senetleri arasından portföy oluşturabileceği gibi, daha kısıtlı sayıda hisse senedi içeren endeksler üzerinden de yatırım kararı alabilmektedir. Daha küçük bir hisse senedi grubu ile çalışmaya sebep olarak tüm hisse senetlerine ait piyasa verilerine ulaşmanın zorluğu verilebileceği gibi, yatırımcı özel olarak bankalar arasından, gıda veya tekstil şirketleri arasından seçim yapmak isteyebilir.

Çalışma kapsamında durağan ve dinamik portföy seçimi aşamalarında Ulusal 30 endeksinde yer alan hisse senetleri tercih edilecektir. Bilindiği gibi Ulusal30 endeksinde yer alan hisse senetleri IMKB yetkilileri tarafından açıklanmakta ve zaman içerisinde endekste yer alan hisse senetlerinde değişiklikler oluşabilmektedir. Bu değişikliği önlemek amacıyla çalışma kapsamında 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arasında Ulusal30 endeksinde yer alan 22 adet hisse senedi gözönüne alınmaktadır. Bu hisse senetleri aşağıda sıralanmaktadır.

Tablo 4.1 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arası XU30

AKBNK	AKGRT
ARCLK	DOHOL
ENKAI	EREGL
FINBN	FROTO
GARAN	HURGZ
ISCTR	KCHOL
MIGRS	SAHOL
SISE	THYAO
TNSAS	TOASO
TUPRS	ULKER
VESTL	YKBNK

Yukarıda sıralanan 22 hisse senedi, varsayımlara uygunluğu kuvvetlendirmek açısından bir diğer elemeye tabi tutulabilir. IMKB'de yer alan bazı hisse senetleri borsa işlem görse dahi çeşitli sebeplerden dolayı işlem tahtasından birkaç günlüğüne çıkartılabilir. Bu ise hisse senedinin o günlerde işlem görmemesi, dolayısıyla da endeksin işlem tarihleri ile bire bir uyuşmaması anlamına gelir. Bu çalışma kapsamında ard arda 5 gün işlem görmeyen hisse senetleri hesaba katılmayacaktır. Başka bir deyişle ardışık hassasiyet 5 olarak kabul edilecektir.

Bununla birlikte çalışma kapsamında, homojenlik oranı %75 olarak kabul edilmiştir. Bu ise 100 adet kapanış verisi alındığında, herhangi bir hisse senedi için en az 75 kapanış verisinin bulunması gerektiğini göstermektedir. Kapanış verileri eksik olan hisse senetlerinin analizden çıkartılmak istendiği durumlarda homojenlik oranı %100 oarak seçilebilir. Bu kısıtlamalar altında THYAO ve TUPRS hisse senetleri listeden çıkartılarak, menkul kıymet sayısı 20 olmaktadır.

Tablo 4.2 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arası XU30 (Ardışık hassasiyet:5, Homojenlik oranı:%75)

AKBNK	AKGRT
ARCLK	DOHOL
ENKAI	EREGL
FINBN	FROTO
GARAN	HURGZ
ISCTR	KCHOL
MIGRS	SAHOL
SISE	TNSAS
TOASO	ULKER
VESTL	YKBNK

Uygulamada ele alınan hisse senetlerinin seçimi ile birlikte, varsayımlar test edilebilir. Hisse senetlerinin ele alınan süre zarfında getirilerinin normal dağılıma uygun hareket edip etmediği incelenmelidir. 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arasında yer alan 379 adet haftalık ve 90 adet aylık kapanış verisi[108] göz önüne alınmaktadır. Elde edilen getirilerin normal dağılıma uygunluğu Jarque-Bera testi kullanılarak test edilmiştir. Test sonuçları ve her bir hisse senedine ait tanımsal istatistik ölçüleri Eviews paket programı ile elde edilerek düzenlenmiştir. Eviews paket programı ile elde edilen sonuçlar ve tanımsal istatistik ölçüleri Tablo 4.3 ve Tablo 4.4 'te verilmektedir..

H_0: Getiriler normal dağılıma uygundur.

H_1: Getiriler normal dağılıma uygun değildir.

[108] Belirtilen tarihler arasında oluşan kapanış fiyatları FINNET (Financial Information News Network) firması tarafından sağlanmıştır.

Tablo 4.3 Haftalık getiri tanımsal istatistikleri ve Jacque-Bera test sonuçları

	AKBNK	AKGRT	ARCLK	DOHOL	ENKAI	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	HURGZ
Ortalama	0,006929	0,020092	0,006839	0,018668	0,007507	0,006002	0,009126	0,014253	0,013865	0,028639
Medyan	0,000000	0,019420	0,000000	0,012170	0,000000	0,005130	0,010865	0,011363	0,011170	0,038181
Maksimum	0,336476	0,520546	0,376053	0,668885	0,281415	0,282233	0,490189	0,485508	0,439952	0,851617
Minimum	-0,321208	-0,718472	-0,336469	-0,916288	-0,336483	-0,241178	-0,530604	-0,481304	-0,693147	-0,837182
St.Sapma	0,081867	0,153378	0,092805	0,196013	0,080594	0,080328	0,097664	0,126963	0,138690	0,212183
Çarpıklık	0,299257	-0,798884	0,261962	-0,140061	-0,241671	-0,113593	-0,290578	0,151475	-0,560038	-0,204868
Basıklık	4,831232	6,324888	4,800303	5,041117	5,088559	3,856954	8,469867	4,878086	5,508203	4,970930
Jarque-Bera	58,45817	213,1880	55,37049	66,49916	72,38221	12,37925	476,5507	56,84821	118,5296	63,31950
Anlamlılık	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,002051	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Gözlem	378	378	378	378	378	378	378	378	378	378

	ISCTR	KCHOL	MIGRS	SAHOL	SISE	TNSAS	TOASO	ULKER	VESTL	YKBNK
Ortalama	0,005128	0,013533	0,005369	0,005810	0,004785	0,004823	0,003580	0,009287	0,018187	0,010885
Medyan	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,005372	0,000000	0,000000	0,000000	0,014392	0,017700
Maksimum	0,428452	0,486812	0,353279	0,298152	0,366455	0,527632	0,424831	0,506605	0,663725	0,514268
Minimum	-0,242561	-0,693147	-0,226527	-0,329312	-0,301103	-0,599956	-0,318456	-0,234840	-0,613104	-0,594710
St.Sapma	0,085416	0,160431	0,069138	0,076935	0,088035	0,101801	0,096346	0,083217	0,163440	0,156115
Çarpıklık	0,570344	0,102113	0,494753	0,151988	-0,038731	-0,200889	0,374976	0,875512	0,208536	-0,334263
Basıklık	5,934846	4,189876	5,343577	4,700082	5,190182	8,764817	5,353853	7,789079	5,997482	5,032089
Jarque-Bera	156,1532	22,83438	101,9257	46,97724	75,64566	525,9640	96,12307	409,5214	143,4886	71,88623
Anlamlılık	0,000000	0,000011	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Gözlem	378	378	378	378	378	378	378	378	378	378

Tablo 4.4 Aylık getiri tanımsal istatistikleri ve Jacque-Bera test sonuçları

	AKBNK	AKGRT	ARCLK	DOHOL	ENKAI	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	HURGZ
Ortalama	0,029741	0,030027	0,029623	0,025814	0,032307	0,026500	0,037947	0,030883	0,030976	0,029299
Medyan	0,010693	0,040123	0,027778	0,015505	0,027398	0,035717	0,063020	0,015473	0,027857	0,033335
Maksimum	0,668456	0,565442	0,479570	0,632524	0,573346	0,492048	0,727056	0,714205	0,659813	0,885509
Minimum	-0,474886	-0,916300	-0,570563	-0,777452	-0,727711	-0,533730	-0,568805	-0,664955	-0,592044	-0,603209
St.Sapma	0,181155	0,210327	0,214962	0,249144	0,183076	0,183438	0,222485	0,198240	0,216696	0,228936
Çarpıklık	0,240773	-0,894393	-0,132279	-0,155651	-0,391373	-0,086202	0,084056	0,053494	-0,258923	0,198604
Basıklık	4,313378	6,652974	2,891197	4,254072	6,081693	3,682026	4,105015	5,467071	3,826217	5,051107
Jarque-Bera	7,256651	61,35056	0,303449	6,191454	37,48948	1,835187	4,632898	22,61300	3,525883	16,18618
Anlamlılık	0,026561	0,000000	0,859225	0,045242	0,000000	0,399479	0,098623	0,000012	0,171540	0,000306
Gözlem	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89

	ISCTR	KCHOL	MIGRS	SAHOL	SISE	TNSAS	TOASO	ULKER	VESTL	YKBNK
Ortalama	0,021153	0,019767	0,022803	0,024906	0,021368	0,019434	0,015917	0,039729	0,025406	0,023594
Medyan	0,012527	0,000000	0,023811	0,009855	0,035511	0,033901	0,012122	0,021504	0,021986	0,031272
Maksimum	0,752573	0,507430	0,498990	0,631590	0,757229	0,510828	0,708405	0,813074	0,619040	0,585900
Minimum	-0,413562	-0,541922	-0,400162	-0,614453	-0,438916	-0,690167	-0,535513	-0,465882	-0,626452	-0,812692
St.Sapma	0,198005	0,199854	0,144444	0,186246	0,196733	0,224360	0,226002	0,202827	0,201796	0,238396
Çarpıklık	0,451330	0,159564	0,182077	0,165338	0,174602	-0,538978	0,374091	0,638520	0,080727	-0,448307
Basıklık	4,483115	3,625427	3,712375	4,645136	4,366539	4,027121	3,672740	5,000500	4,539529	4,172349
Jarque-Bera	11,17849	1,828215	2,373656	10,44199	7,377251	8,221254	3,754156	20,88841	8,885967	8,077932
Anlamlılık	0,003738	0,400874	0,305188	0,005402	0,025006	0,016397	0,153037	0,000029	0,011761	0,017616
Gözlem	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89

Haftalık ve aylık kapanış fiyatlarından elde edilen getirilere ait tanımsal istatistik ölçüleri incelenecek olursa, getirilerin dağılımının normale uygunluk göstermediği görülür. Jacque-Bera istatistiklerinin çok yüksek ve dolayısıyla anlamlılık değerlerinin sıfıra çok yakın olması, H_0 hipotezinin reddedilmesi ve dağılımın normale uygun olmadığını belirtmektedir. Tanımsal istatistik ölçüleri içerisinde belirgin olarak normal dağılımdan farklılık gösteren parametre basıklık ölçüsüdür. Normal dağılım için 3 olması gereken basıklık, tablolarda görüldüğü gibi çok daha yüksek değerler almaktadır. Bu ise serilerin leptokurtik veya sivri olması sonucunu doğurarak normal dağılımdan farklılığa sebep olmaktadır. Menkul kıymet getirilerine ilişkin histogram grafikleri EK-1'de verilmektedir.

Aslında finans literatüründe menkul kıymet getirilerinin belirli fiyat adımları ile hareket etmesi sıklıkla karşılaşılan bir durumdur. Belirli değerlere yönelme neticesinde sivriliğin ortaya çıkması doğaldır. Uygulamanın ileriki safhalarında ele alınacak metotlar ile elde edilecek sonuçların geçerlilik kazanabilmesi için normallik ve bağımsızlık varsayımlarının sağlanması gerekmektedir. Varsayımların sağlanmadığı durumlarda değişkenlere bazı dönüşümler uygulanarak problem giderilebilmektedir. Bu durumda teoride, logaritmik, hiperbolik veya kareköklü dönüşümler neticesinde normal dağılıma uygunluğun elde edilebileceği belirtilmektedir.

Yukarıda sıralanan dönüşümün hangisinin kullanılacağı, değişkenin çarpıklık ve basıklık ölçülerine göre değişebilmektedir. Teoride sivri bir değişkenin normale yakın dağılmasını sağlamak için $x^* = \arcsin\sqrt{x}$, $x^* = \log(\frac{x}{1-x})$, $x^* = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x^* = x^2$ veya $x^* = \sqrt{x}$ dönüşümlerinden biri kullanılabilmektedir.[109] Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'da $x^* = \sqrt{x}$ dönüşümü ile normale dönüştürülmüş haftalık ve aylık getirilere ait tanımsal istatistik ölçüleri ve Jacque-Bera test sonuçları verilmektedir.

[109] J.Stevens, **Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences,** Lawrence Erlbaum Associates Inc., New Jersey, 1996, s.246

Tablo 4.5 Normale dönüştürülmüş haftalık getiri tanımsal istatistikleri ve Jacque-Bera test sonuçları

	AKBNK	AKGRT	ARCLK	DOHOL	ENKAI	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	HURGZ
Ortalama	0,217457	0,829324	0,231518	0,758160	0,828980	0,218251	0,821624	0,268726	0,286794	0,744051
Medyan	0,213426	0,825608	0,220865	0,753429	0,830469	0,212989	0,820463	0,266369	0,276353	0,744493
Maksimum	0,580065	1,000000	0,613232	1,000000	1,000000	0,531256	1,000000	0,696784	0,832555	1,000000
Minimum	0,000000	0,603741	0,000000	0,510926	0,632883	0,000000	0,578561	0,000000	0,000000	0,520066
St.Sapma	0,113780	0,081145	0,121168	0,094538	0,074438	0,112786	0,081700	0,141886	0,143310	0,087956
Çarpıklık	0,236890	0,229670	0,227408	0,248392	0,134157	0,109099	0,176857	0,373807	0,343945	0,092638
Basıklık	3,183688	3,082954	3,177320	2,965098	3,015763	2,736296	3,245250	3,032162	3,207417	2,908374
Jarque-Bera	4,066776	3,431519	3,753221	3,885541	1,137791	1,845118	2,917859	8,796060	8,108877	0,667541
Olasılık	0,130891	0,179827	0,153108	0,143306	0,566150	0,397501	0,232485	0,012302	0,017345	0,716218
Gözlem	378	378	378	378	378	378	378	378	378	378

	ISCTR	KCHOL	MIGRS	SAHOL	SISE	TNSAS	TOASO	ULKER	VESTL	YKBNK
Ortalama	0,827520	0,315856	0,837669	0,214142	0,828087	0,822563	0,821591	0,832492	0,784038	0,776215
Medyan	0,825116	0,305554	0,838183	0,211234	0,824525	0,822706	0,819073	0,829008	0,788468	0,781729
Maksimum	1,000000	0,832555	1,000000	0,573857	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
Minimum	0,604389	0,000000	0,627206	0,000000	0,622915	0,563517	0,605404	0,584193	0,551057	0,564597
St.Sapma	0,078119	0,148626	0,069228	0,107219	0,081550	0,084890	0,083451	0,078418	0,092958	0,083397
Çarpıklık	0,226458	0,300154	0,147770	0,244746	0,176868	0,109226	0,220759	0,170355	-0,032514	-0,107741
Basıklık	3,077567	3,033107	3,195880	3,212562	2,800306	3,066753	2,929762	3,204054	3,025912	2,800236
Jarque-Bera	3,325620	5,662983	1,979987	4,485361	2,598855	0,821790	3,147964	2,484116	0,076767	1,356235
Olasılık	0,189605	0,058925	0,371579	0,106174	0,272688	0,663057	0,207218	0,288789	0,962344	0,507572
Gözlem	378	378	378	378	378	378	378	378	378	378

Tablo 4.6 Normale dönüştürülmüş aylık getiri tanımsal istatistikleri ve Jacque-Bera test sonuçları

	AKBNK	AKGRT	ARCLK	DOHOL	ENKAI	EREGL	FINBN	FROTO	GARAN	HURGZ
Ortalama	0,330974	0,746449	0,378435	0,762677	0,762677	0,347857	0,382999	0,770081	0,366052	0,361153
Medyan	0,319856	0,739218	0,378292	0,757659	0,757659	0,346130	0,377699	0,772216	0,344119	0,365414
Maksimum	0,817592	0,966060	0,755356	1,000000	1,000000	0,730568	0,852676	1,000000	0,812289	0,941015
Minimum	0,000000	0,510925	0,000000	0,550179	0,550179	0,000000	0,000000	0,541974	0,000000	0,000000
St.Sapma	0,164132	0,088839	0,171728	0,094295	0,094295	0,151153	0,166733	0,101958	0,177311	0,190920
Çarpıklık	0,304163	0,052924	-0,166065	0,344188	0,344188	0,292063	0,296617	-0,031847	0,227736	0,347550
Basıklık	2,924963	2,566493	2,649472	2,905155	2,905155	3,038052	3,443776	2,551287	2,706192	3,101487
Jarque-Bera	1,393187	0,738449	0,864710	1,790592	1,790592	1,270661	2,035369	0,761692	1,089428	1,829926
Olasılık	0,498280	0,691270	0,648979	0,408487	0,408487	0,529760	0,361431	0,683283	0,580008	0,400531
Gözlem	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89

	ISCTR	KCHOL	MIGRS	SAHOL	SISE	TNSAS	TOASO	ULKER	VESTL	YKBNK
Ortalama	0,344246	0,355692	0,313176	0,754485	0,352464	0,743659	0,821591	0,832492	0,784038	0,776215
Medyan	0,322488	0,345865	0,311710	0,743511	0,335110	0,744493	0,819073	0,829008	0,788468	0,781729
Maksimum	0,867510	0,736153	0,706393	1,000000	0,870189	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
Minimum	0,000000	0,000000	0,084971	0,557188	0,000000	0,546220	0,605404	0,584193	0,551057	0,564597
St.Sapma	0,171336	0,162253	0,129960	0,087261	0,162550	0,096006	0,083451	0,078418	0,092958	0,083397
Çarpıklık	0,296333	0,355530	0,324432	0,341469	0,290713	0,147186	0,220759	0,170355	-0,032514	-0,107741
Basıklık	2,982937	2,941465	2,960165	3,303660	3,058873	2,544725	2,929762	3,204054	3,025912	2,800236
Jarque-Bera	1,303641	1,887662	1,567185	2,071528	1,266480	5,320219	3,147964	2,484116	0,076767	1,356235
Olasılık	0,521096	0,389134	0,456762	0,354955	0,530869	0,069941	0,207218	0,288789	0.962344	0,507572
Gözlem	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89

Görüldüğü üzere, Jacque-Bera istatistikleri daha düşük değerler almakla birlikte istatistiksel olarak anlamlı sonuçlar elde edilmektedir. Bu sonuca olasılık satırından ulaşılabileceği gibi, çarpıklık ve basıklık değerlerinin sırasıyla normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri olan sıfır ve üçe yaklaşması ve ortalama ve medyan değerlerinin birbirine yakın olması ile de doğrulanabilir. Böylelikle, kareköklü dönüşüm neticesinde normal dağılıma uygunluk sağlanır.

Varsayımlara uygunluğun incelenmesi aşamasında, normal dağılıma uygunluğun yanısıra dönemsel getirilerin bağımsızlığının da incelenmesi gerekmektedir. Başka bir ifade ile hisse senetlerine ait dönemsel getirilere ilişkin otokorelasyon katsayılarının anlamlı olmaması gerekmektedir. Otokorelasyonun varlığının araştırılmasında korelogramın incelenmesine sıklıkla başvurulmaktadır. Eviews paket programı ile elde edilen sonuçlar EK-2 içerisinde verilmekle birlikte, yapılan incelemelerde haftalık ve aylık dönemsel getiriler için belirgin bir otokorelasyon görülmemektedir. Ancak TOASO ve ULKER hisse senetlerine ait haftalık getirilere ait korelogram incelendiğinde otokorelasyonun olmadığı kesin olarak söylenememektedir. Yapılan incelemenin geçerlilik kazanması için birim köklerin varlığı araştırılabilir. Bu noktada Eviews programı tarafından olanak sağlanan $\Delta x_t = \gamma x_{t-1} + \varepsilon_t$ (sabit ve trend yok), $\Delta x_t = c_0 + \gamma x_{t-1} + \varepsilon_t$ (sabit var, trend yok) ve $\Delta x_t = c_0 + c_1 t + \gamma x_{t-1} + \varepsilon_t$ (sabit ve trend var) modellerinden en uygunu seçilerek test gerçekleştirilecektir. İlgili test sonuçları yine EK-2 içerisinde görülebilir.

H_0: Birim kök var. (Seri durağan değil-otokorelasyon var)
H_1: Birim kök yok. (Seri durağan-otokorelasyon yok)

ULKER hisse senedi için tahmin edilen modelde trend değişkeninin anlamsız olduğu görülmektedir. Bu durumda sadece sabit içeren model temel alınarak Dickey-Fuller test istatistiği (-16.94856), 0.01, 0.05 ve 0.10 anlamlılık düzeylerinde MacKinnon kritik değerleri ile karşılaştırıldığında (-3.447487, -2.868988, -2.570805) H_0 hipotezi red edilmektedir. Dolayısıyla birim kök yoktur ve otokorelasyon mevcut değildir.

Benzer biçimde, TOASO hisse senedi için de sadece sabit içeren model temel alınarak Dickey-Fuller test istatistiği (-11.79049) ile 0.01, 0.05 ve 0.10 anlamlılık düzeylerinde MacKinnon kritik değerleri (-3.447534, -2.869009, -2.570816) karşılaştırıldığında, H_0 hipotezi red edilerek birim kök olmadığı, dolayısıyla otokorelasyonun varolmadığı sonucu elde edilir.

4.3 MARKOWITZ MODELİNE GÖRE OPTİMAL PORTFÖY SEÇİMİ

Dinamik portföy yönetiminde kullanılan tekniklerin uygulamada meydana getirdiği farklılıklara değinmeden önce klasik Markowitz modeli ile portföy seçiminin gerçekleştirilmesi, ileriki aşamalarda karşılaştırma yapabilmek açısından faydalı olacaktır. Bu nedenle Markowitz modeli ile portföy seçimi haftalık ve aylık kapanış fiyatları için ayrı ayrı uygulanacaktır. Herbir hisse senedinin haftalık ve aylık getirileri aşağıda Tablo 4.7'de verilmektedir. Haftalık ve aylık beklenen getiriler geometrik ortalama ile elde edilmiştir.

Tablo 4.7 Hisse senedi haftalık ve aylık beklenen getirileri

HİSSE SENEDİ	HAFTALIK GETİRİ	AYLIK GETİRİ	HİSSE SENEDİ	HAFTALIK GETİRİ	AYLIK GETİRİ
AKBNK	0,006953	0,030188	ISCTR	0,005141	0,021379
AKGRT	0,006626	0,030483	KCHOL	0,004199	0,019963
ARCLK	0,006863	0,030066	MIGRS	0,005384	0,023065
DOHOL	0,006066	0,02615	SAHOL	0,005827	0,025219
ENKAI	0,007636	0,032835	SISE	0,004796	0,021598
EREGL	0,006020	0,026854	TNSAS	0,004834	0,019624
FINBN	0,009168	0,038676	TOASO	0,003587	0,016044
FROTO	0,006905	0,031364	ULKER	0,009330	0,040529
GARAN	0,006948	0,031461	VESTL	0,005885	0,025732
HURGZ	0,007192	0,029733	YKBNK	0,005407	0,023875

Bir sonraki aşamada hisse senetlerine ilişkin beklenen getiriler kullanılarak portföy getirisi elde edilecektir. Bunun yanında portföy riskinin elde edilebilmesi için kovaryans matrisinin hesaplanması gerekmektedir. Hatırlanacağı üzere Markowitz modeli, belirli bir getiri seviyesinde riski minimize etmeye veya belirli bir risk seviyesinde getiriyi maksimize etmeye olanak sağlamaktadır. Uygulamada belirli bir getiri seviyesi için riski minimize etme yaklaşımı kullanılmakta olup ilgili model aşağıda verilmektedir.

$$\text{Min} \qquad \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{i,j}}$$

$$\begin{aligned} & \mu_p \geq \mu_0 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \qquad ;\forall\, i = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{4.1}$$

σ_p : portföyün standart sapması(riski)
x_i : i. varlığın portföy içerisindeki ağırlığı
x_j : j. varlığın portföy içerisindeki ağırlığı
$\sigma_{i,j}$: i. ve j. varlık getirileri arası kovaryans
μ_p : portföyün beklenen getirisi
μ_0 : yatırım neticesinde hedeflenen getiri

(4.1) modeli ile verilen kısıtlar portföy getirisinin hedeflenen getiriden düşük olmamasını, portföy içerisinde yer alan varlıklara yapılan yatırım toplamının eldeki toplam varlığa eşit olmasını ve herbir varlığa yapılan yatırım miktarının negatif olmamasını sağlamaktadır. İlk denklem ise amaç fonksiyonunu belirtmekte olup, portföy riskini temsil etmektedir. Portföy riski matris formunda x^TCx biçiminde gösterilmekte olup C simgesi kovaryans matirisini temsil etmektedir. Bu durumda portföy riskini hesaplamada kullanılacak kovaryans matrisi haftalık ve aylık getiriler için aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.8 Hisse senedi haftalık getirilere ait kovaryans matrisi(*10^4)

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	TOA	ULK	VES	YKB
AKB	70,83	55,72	57,74	60,27	39,96	46,63	52,49	50,71	57,67	56,28	53,66	53,05	39,73	52,60	50,82	50,83	49,44	34,54	51,42	65,05
AKG	55,72	76,69	57,64	64,35	47,30	48,13	53,57	53,09	59,35	55,26	54,67	55,88	42,49	53,23	53,92	53,54	50,82	42,11	52,89	65,53
ARC	57,74	57,64	91,42	69,48	43,45	53,54	51,83	50,55	58,39	60,90	52,43	59,71	38,66	53,28	54,06	53,85	56,70	38,49	63,14	61,66
DOH	60,27	64,35	69,48	112,90	53,25	59,11	72,68	66,88	69,53	81,81	62,67	71,65	43,68	62,08	66,58	65,23	69,04	47,52	67,26	80,04
ENK	39,96	47,30	43,45	53,25	73,08	43,32	42,31	43,18	46,01	49,56	43,55	47,89	38,87	39,64	44,13	49,98	47,24	32,77	46,48	49,13
ERE	46,63	48,13	53,54	59,11	43,32	65,55	46,74	47,88	49,16	53,17	48,22	51,79	35,53	43,95	51,32	43,65	48,81	34,87	50,43	56,08
FIN	52,49	53,57	51,83	72,68	42,31	46,74	98,60	54,04	64,99	60,86	54,93	54,44	38,49	47,89	58,55	60,59	56,38	38,70	55,37	75,75
FRO	50,71	53,09	50,55	66,88	43,18	47,88	54,04	81,01	56,01	60,85	50,52	57,22	40,03	47,36	54,44	50,75	63,97	40,90	52,96	54,74
GAR	57,67	59,35	58,39	69,53	46,01	49,16	64,99	56,01	88,77	63,69	58,22	56,47	40,19	48,86	55,01	60,81	56,83	40,49	55,50	78,01
HUR	56,28	55,26	60,90	81,81	49,56	53,17	60,86	60,85	63,69	113,39	54,84	61,53	38,30	49,34	56,42	54,13	61,03	42,42	63,14	64,03
ISC	53,66	54,67	52,43	62,67	43,55	48,22	54,93	50,52	58,22	54,84	79,20	52,74	40,83	49,16	54,12	50,16	55,63	34,31	51,28	71,24
KCH	53,05	55,88	59,71	71,65	47,89	51,79	54,44	57,22	56,47	61,53	52,74	77,13	41,79	54,28	56,10	53,14	58,02	37,78	57,90	59,22
MIG	39,73	42,49	38,66	43,68	38,87	35,53	38,49	40,03	40,19	38,30	40,83	41,79	50,67	38,52	41,45	47,29	42,03	31,75	40,32	45,29
SAH	52,60	53,23	53,28	62,08	39,64	43,95	47,89	47,36	48,86	49,34	49,16	54,28	38,52	61,47	47,22	46,96	50,99	36,31	50,38	58,02
SIS	50,82	53,92	54,06	66,58	44,13	51,32	58,55	54,44	55,01	56,42	54,12	56,10	41,45	47,22	79,70	54,94	59,50	41,65	55,39	63,43
TNS	50,83	53,54	53,85	65,23	49,98	43,65	60,59	50,75	60,81	54,13	50,16	53,14	47,29	46,96	54,94	107,66	54,91	42,79	49,94	59,09
TOA	49,44	50,82	56,70	69,04	47,24	48,81	56,38	63,97	56,83	61,03	55,63	58,02	42,03	50,99	59,50	54,91	99,53	43,25	52,08	58,69
ULK	34,54	42,11	38,49	47,52	32,77	34,87	38,70	40,90	40,49	42,42	34,31	37,78	31,75	36,31	41,65	42,79	43,25	78,08	37,11	41,36
VES	51,42	52,89	63,14	67,26	46,48	50,43	55,37	52,96	55,50	63,14	51,28	57,90	40,32	50,38	55,39	49,94	52,08	37,11	85,91	62,68
YKB	65,05	65,53	61,66	80,04	49,13	56,08	75,75	54,74	78,01	64,03	71,24	59,22	45,29	58,02	63,43	59,09	58,69	41,36	62,68	129,07

Tablo 4.9 Hisse senedi aylık getirilere ait kovaryans matrisi(*10^4)

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	TOA	ULK	VES	YKB
AKB	392,2	334,1	334,9	364,5	256,8	268,6	334,1	319,2	339,9	322,6	343,0	306,4	226,9	325,0	324,4	307,2	316,3	209,2	300,6	343,7
AKG	334,1	441,3	376,7	423,7	331,3	327,9	334,4	337,4	394,3	397,3	375,5	376,2	228,8	344,7	362,9	340,4	382,2	299,1	372,3	412,8
ARC	334,9	376,7	507,3	424,8	287,7	315,7	319,9	345,3	404,1	408,4	329,7	398,3	218,6	341,0	326,1	335,6	391,8	277,9	378,1	397,7
DOH	364,5	423,7	424,8	714,4	367,3	395,8	433,7	426,4	454,0	533,3	439,7	467,0	234,8	441,1	448,6	442,0	477,3	297,3	458,4	491,7
ENK	256,8	331,3	287,7	367,3	367,3	269,3	258,2	280,8	296,9	339,1	274,0	316,8	190,1	278,9	290,8	283,2	332,5	217,3	311,7	319,8
ERE	268,6	327,9	315,7	395,8	269,3	371,1	278,9	298,0	295,3	337,7	316,5	334,4	191,8	294,6	318,9	265,4	345,6	220,2	316,7	336,9
FIN	334,1	334,4	319,9	433,7	258,2	278,9	606,6	356,8	383,4	335,6	364,0	319,6	225,7	330,2	400,0	357,2	381,0	264,2	344,9	399,0
FRO	319,2	337,4	345,3	426,4	280,8	298,0	356,8	472,2	373,1	404,0	364,1	332,8	215,3	325,1	356,2	346,6	430,9	254,4	333,7	373,7
GAR	339,9	394,3	404,1	454,0	296,9	295,3	383,4	373,1	517,1	473,0	385,8	368,3	212,5	326,6	358,8	391,2	409,4	307,4	365,6	469,5
HUR	322,6	397,3	408,4	533,3	339,1	337,7	335,6	404,0	473,0	674,3	376,8	417,5	204,2	330,3	379,5	411,6	475,6	325,1	391,7	454,8
ISC	343,0	375,5	329,7	439,7	274,0	316,5	364,0	364,1	385,8	376,8	491,1	349,9	231,7	354,6	386,6	343,2	393,4	263,6	346,6	431,2
KCH	306,4	376,2	398,3	467,0	316,8	334,4	319,6	332,8	368,3	417,5	349,9	459,8	220,3	376,3	334,0	336,9	403,2	246,8	381,7	387,7
MIG	226,9	228,8	218,6	234,8	190,1	191,8	225,7	215,3	212,5	204,2	231,7	220,3	233,3	230,8	219,9	226,0	222,0	163,0	219,6	242,0
SAH	325,0	344,7	341,0	441,1	278,9	294,6	330,2	325,1	326,6	330,3	354,6	376,3	230,8	408,2	336,9	322,4	365,2	225,3	353,6	363,7
SIS	324,4	362,9	326,1	448,6	290,8	318,9	400,0	356,2	358,8	379,5	386,6	334,0	219,9	336,9	460,2	356,2	409,6	296,2	360,5	378,2
TNS	307,2	340,4	335,6	442,0	283,2	265,4	357,2	346,6	391,2	411,6	343,2	336,9	226,0	322,4	356,2	509,4	349,8	267,2	317,1	375,9
TOA	316,3	382,2	391,8	477,3	332,5	345,6	381,0	430,9	409,4	475,6	393,4	403,2	222,0	365,2	409,6	349,8	630,7	316,1	378,9	443,1
ULK	209,2	299,1	277,9	297,3	217,3	220,2	264,2	254,4	307,4	325,1	263,6	246,8	163,0	225,3	296,2	267,2	316,1	563,1	248,7	280,8
VES	300,6	372,3	378,1	458,4	311,7	316,7	344,9	333,7	365,6	391,7	346,6	381,7	219,6	353,6	360,5	317,1	378,9	248,7	478,4	396,2
YKB	343,7	412,8	397,7	491,7	319,8	336,9	399,0	373,7	469,5	454,8	431,2	387,7	242,0	363,7	378,2	375,9	443,1	280,8	396,2	598,4

Bilindiği gibi (4.1) ile verilen problemin optimum çözümü kuadratik programlama ile elde edilebilir. Uygulamada optimal portföyler Ms Excel ve LINGO paket programları aracılığıyla elde edilmiştir. Aynı zamanda FINNET tarafından sağlanan paket program kullanılarak da aynı portföyler elde edilmiş ve bir anlamda hesaplamaların sağlaması yapılmıştır. Markowitz modeline göre haftalık ve aylık getiriler gözönüne alınarak elde edilen optimal portföyler aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.10 Haftalık ve aylık getiriler için elde edilen optimal portföy ağırlıkları

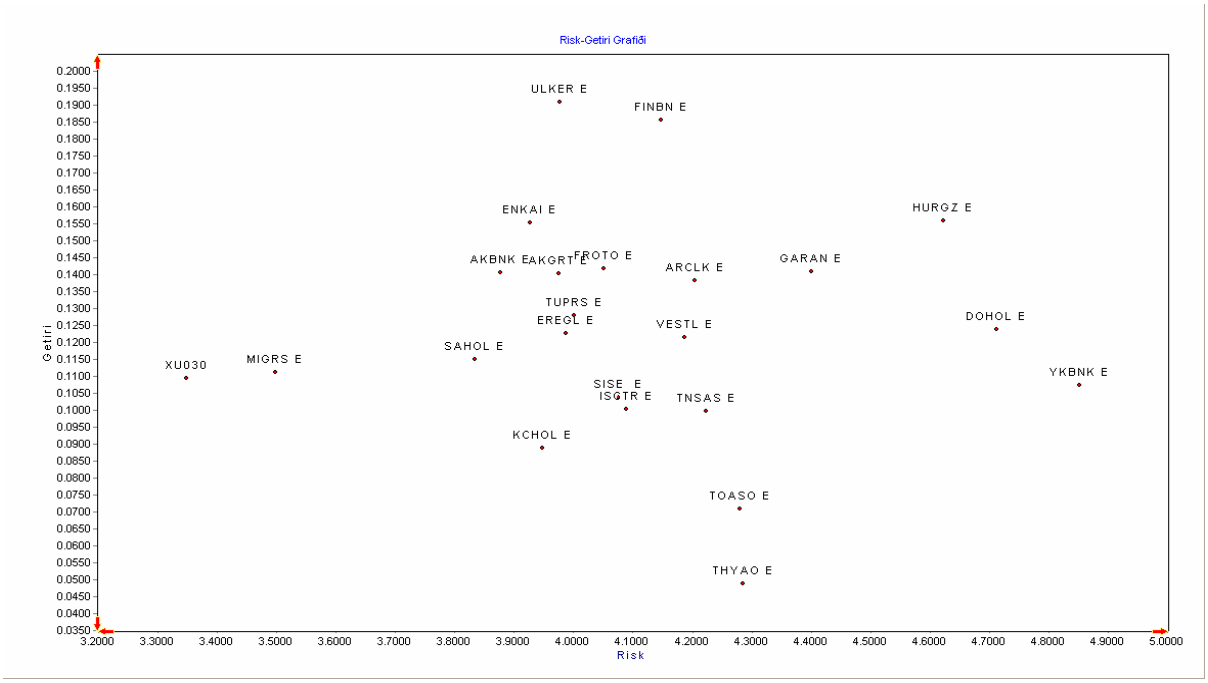
HİSSE SENEDİ	PORTFÖY AĞIRLIKLARI		HİSSE SENEDİ	PORTFÖY AĞIRLIKLARI	
	HAFTALIK GETİRİ İLE	AYLIK GETİRİ İLE		HAFTALIK GETİRİ İLE	AYLIK GETİRİ İLE
AKBNK	0,09427	0,00000	ISCTR	0,00000	0,00000
AKGRT	0,00000	0,00000	KCHOL	0,00000	0,00000
ARCLK	0,00000	0,00000	MIGRS	0,20224	0,25343
DOHOL	0,00000	0,00000	SAHOL	0,00000	0,00000
ENKAI	0,20574	0,30799	SISE	0,00000	0,00000
EREGL	0,03478	0,00000	TNSAS	0,00000	0,00000
FINBN	0,12473	0,14099	TOASO	0,00000	0,00000
FROTO	0,00000	0,00000	ULKER	0,33825	0,29759
GARAN	0,00000	0,00000	VESTL	0,00000	0,00000
HURGZ	0,00000	0,00000	YKBNK	0,00000	0,00000

Her iki durumda da portföyün büyük bir kısmı MIGRS, ULKER, ENKAI ve FINBN hisse senetleri ile oluşturulmaktadır. Aylık getiriler ile oluşturulan portföyün tamamı bu dört hisse senedinden meydana gelirken, haftalık getiriler ile oluşturulan portföyün %87,10'i yine bu dört hisse senedinden oluşmaktadır.

Risk-getiri grafiği, her bir hissenin riski ve getirisi arasındaki ilişkiyi gözler önüne sermektedir. Hisse senetlerine ait risk-getiri haritası incelendiğinde, adı geçen hisse senetlerinden ULKER, FINBN ve ENKAI en yüksek getiriye sahip hisse senetleri olarak sıralanabilir. ENKAI ile HURGZ getiri seviyesi açısından birbirine yakın olsa da her iki hisse senedinin riski incelendiğinde ENKAI'nin aynı getiri

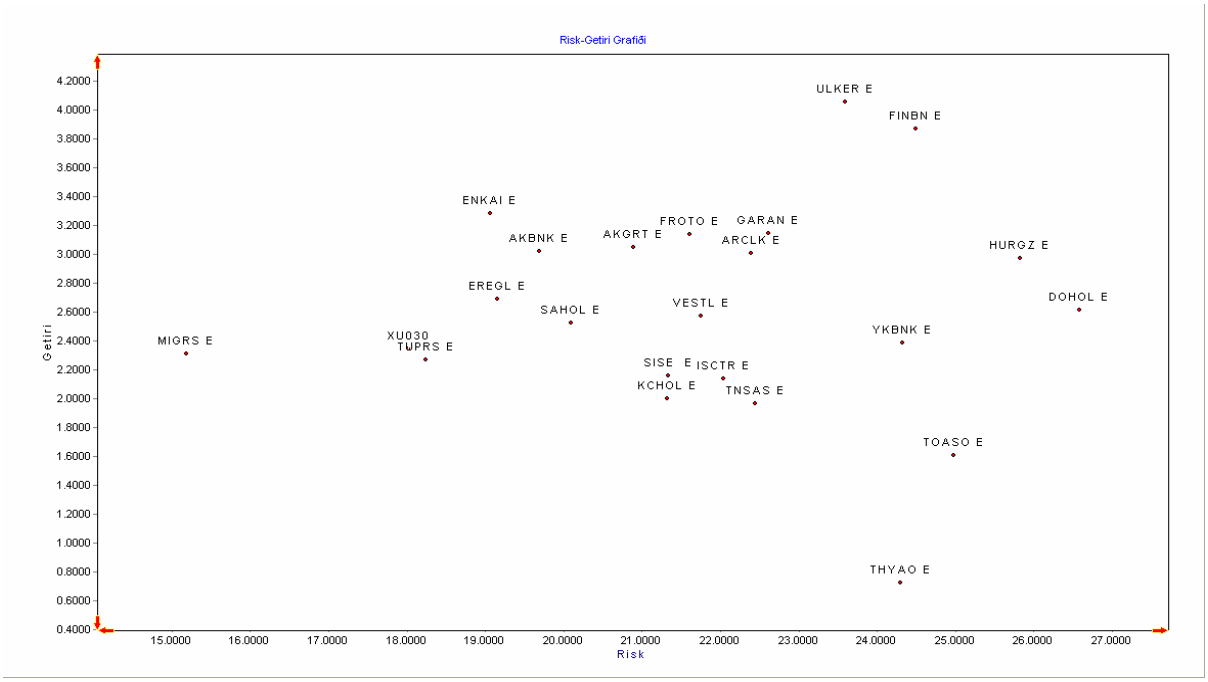
oranını çok daha düşük bir risk seviyesinde yakaladığı görülmektedir. Her iki durumda da portföyde büyük bir ağırlığa sahip olan MIGRS hisse senedi ise, yatırımcıya çok düşük bir risk seviyesinde yatırım yapma imkanı sağlamaktadır. Bu açıklamalar Şekil 4.1 ile verilen risk-getiri haritasında rahatlıkla görülebilir.

Şekil 4.1 Haftalık getiriler ile oluşturulan Risk-Getiri Haritası



Risk-getiri haritası aylık getiriler için incelendiğinde daha ilginç bir sonuç karşımıza çıkmaktadır. MIGRS hisse senedi endekse çok yakın bir getiriyi, endeksten çok daha düşük bir risk yüzdesi ile elde etmektedir. Aylık bazda yapılan incelemelerde ENKAI benzer bir seyir takip ederken, ULKER ve FINBN hisse senetleri risk-getiri haritasında yüksek riskli bölgede yer almaktadır. Ancak yüksek getiri oranları sebebiyle aylık getiriler gözönüne alınarak oluşturulan portföyün %43,86'sı bu iki hisse senedi tarafından oluşturulmaktadır. Yine bu açıklamalar kolaylıkla aylık getiriler için hesaplanan risk-getiri haritasında görülebilir.

Şekil 4.2 Aylık getiriler ile oluşturulanRisk-Getiri Haritası

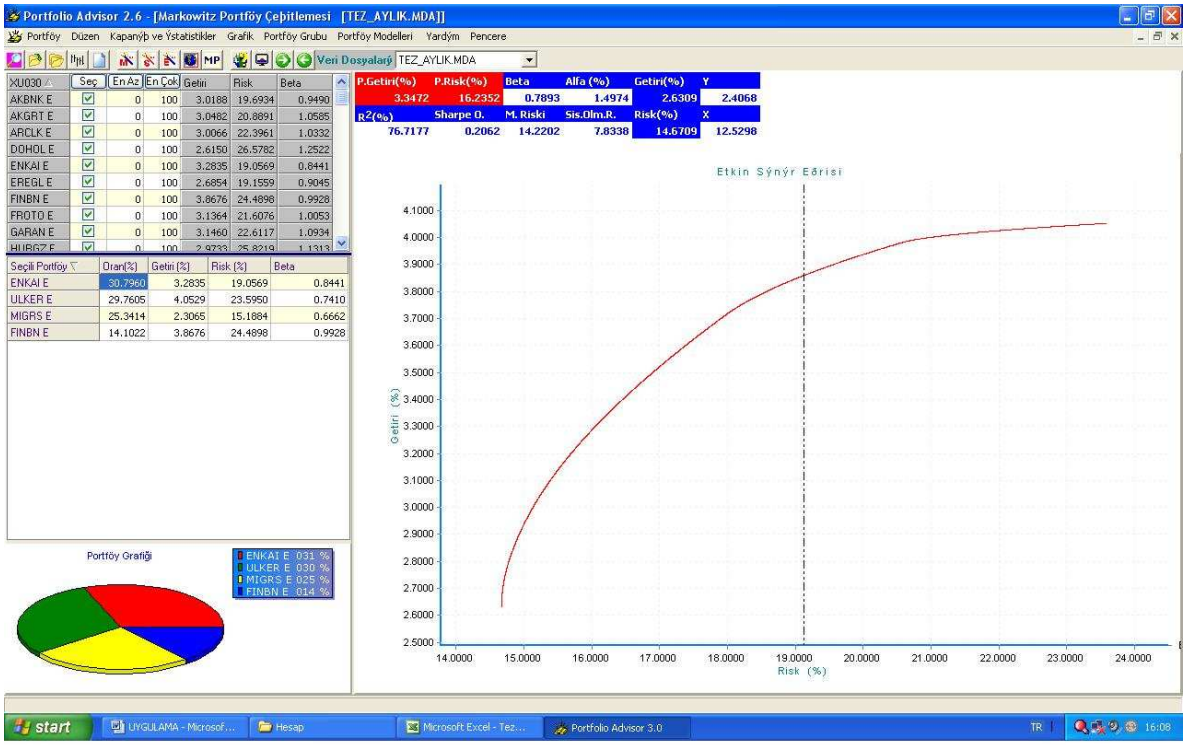


Hedeflenen getiri oranını değiştirerek etkin sınırı oluşturmak mümkündür. Haftalık ve aylık getiriler için optimal portföylerin elde edilmesinde kullanılan matematik programlama modeli EK-3'de verilmektedir.

Markowitz modeli ile haftalık kapanış fiyatları gözönüne alınarak oluşturulan portföyün haftalık beklenen getirisi %0,7840 olarak hesaplanırken portföy riski %6,7092 olarak elde edilmektedir. Bunun yanında, aylık kapanış fiyatları göz önüne alınarak oluşturulan portföyün aylık beklenen getirisi %3,3472 olarak elde edilirken portföy riski %16,2352 olarak hesaplanmaktadır.

Yukarıda elde edilen beklenen getiriler, kovaryans matrisi, optimal portföy ağırlıkları, portföyün beklenen getiri ve risk değerleri, Ms Excel aracılığıyla elde edilmiştir. Benzer optimal portföyler FINNET tarafından sağlanan paket program ile aşağıda verilen biçimde hesaplanmaktadır. Aynı zamanda portföy getirisi, portföy riski optimal portföy ağırlıkları ve etkin sınır eğrisi de görülmektedir. Şekil 4.3'te görülen optimal portföy ağırlıkları ile Tablo 4.10 ile verilen portföy ağırlıkları karşılaştırılabilir.

Şekil 4.3 Aylık getiriler ile oluşturulan optimal portföy ağırlıkları ve etkin sınır eğrisi



Böylelikle Markowitz modeli ile optimal portföylerin elde edilmesi süreci tamamlanmış olur. Burada üzerinde önemle durulması gereken nokta her iki alternatif için elde edilen portföy beklenen getirisi ve portföy riski parametreleridir. Bu değerler ileride gerçekleştirilecek dinamik portföy seçimi modelleri ile karşılaştırılarak daha yüksek beklenen getiri iddiası test edilecektir.

Hatırlanacağı üzere, ikinci bölümde çok dönemli ortalama varyans portföy seçimi ile ilgili teorik altyapı oluşturularak, portföye risksiz varlığın eklenmesi halinde optimal portföy stratejisinde meydana gelen değişiklikler incelenmişti. Dinamik portföy modelleri ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla önceki örneklerde olduğu gibi, Markowitz modelinde de risksiz varlığın, seçimi gerçekleştirilecek menkul değerler arasında yer alması sonucunda oluşacak optimal portföy ve bu strateji ile elde edilecek portföy getirisi ve portföy riski parametreleri sorgulanmalıdır.

Hisse senetlerinden oluşan portföye risksiz varlığın da eklenmesi halinde, haftalık kapanış fiyatları gözönüne alınarak Markowitz modeli ile oluşturulan portföyün haftalık beklenen getirisi %0,7914 olarak hesaplanırken, portföy riski

%6,7016 olarak elde edilmektedir. Bunun yanında, aylık kapanış fiyatları göz önüne alınarak oluşturulan portföyün aylık beklenen getirisi %3,3607 olarak elde edilirken portföy riski %16,2216 olarak hesaplanmaktadır. Tümü riskli varlıklardan oluşan portföy getiri ve riskleri ile karşılaştırmalı olarak incelendiğinde, her iki durumda da benzer risk seviyelerinde daha yüksek portföy getirisinin elde edildiğini söylemek mümkündür. Haftalık ve aylık getiriler gözönüne alınarak elde edilen optimal portföyler aşağıda verilmektedir.

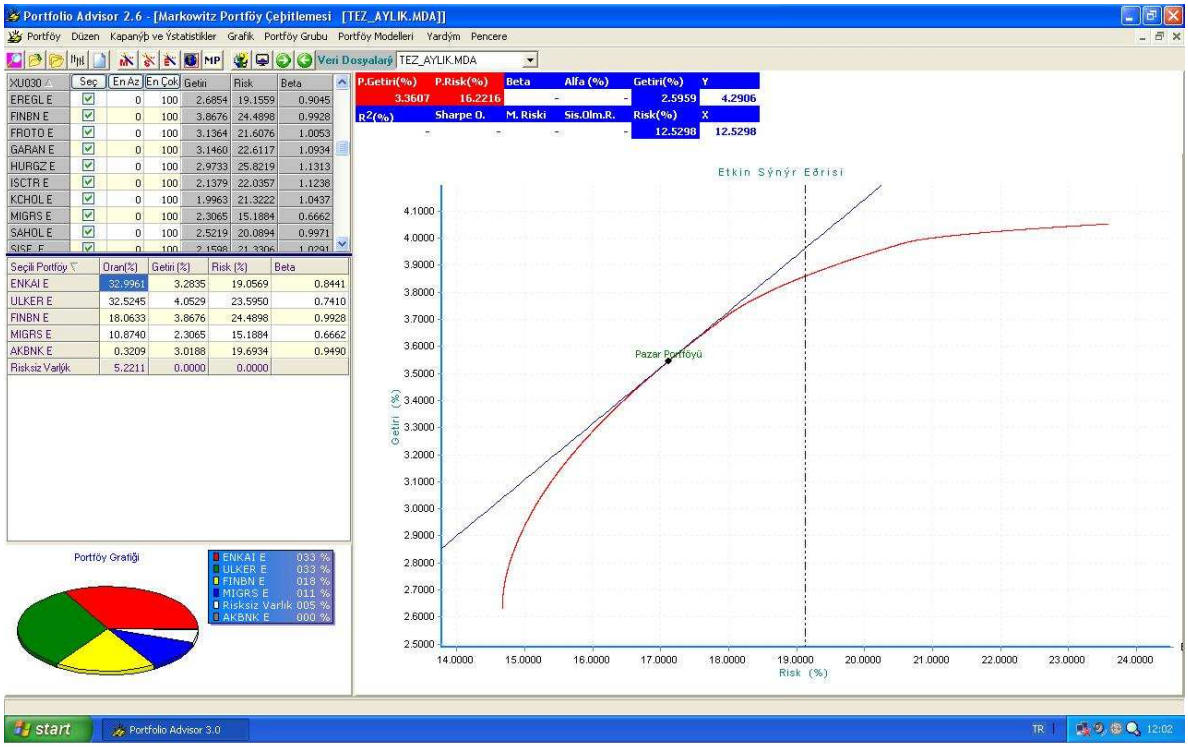
Tablo 4.11 Risksiz varlığın eklenmesi halinde haftalık ve aylık getiriler için elde edilen optimal portföy ağırlıkları

HİSSE SENEDİ	PORTFÖY AĞIRLIKLARI		HİSSE SENEDİ	PORTFÖY AĞIRLIKLARI	
	HAFTALIK GETİRİ İLE	AYLIK GETİRİ İLE		HAFTALIK GETİRİ İLE	AYLIK GETİRİ İLE
AKBNK	0,11460	0,00320	ISCTR	0,00000	0,00000
AKGRT	0,00000	0,00000	KCHOL	0,00000	0,00000
ARCLK	0,00000	0,00000	MIGRS	0,00000	0,10870
DOHOL	0,00000	0,00000	SAHOL	0,00000	0,00000
ENKAI	0,00000	0,32990	SISE	0,00000	0,00000
EREGL	0,00000	0,00000	TNSAS	0,00000	0,00000
FINBN	0,27440	0,18060	TOASO	0,00000	0,00000
FROTO	0,00000	0,00000	ULKER	0,49320	0,32520
GARAN	0,00000	0,00000	VESTL	0,00000	0,00000
HURGZ	0,00000	0,00000	YKBNK	0,00000	0,00000

Haftalık getiriler ile oluşturulan portföy stratejisinde, portföy ağırlıklı olarak ULKER hisse senedinden oluşmakta iken, aylık getiriler ile oluşturulan portföyün %65,51'i ENKAI ve ULKER hisse senetlerinden oluşmaktadır. Dikkat edilecek olursa her iki durumda da portföy ağırlıkları toplamı bire ulaşmamaktadır. Bu farklılık, risksiz varlığa yapılan yatırımdan kaynaklanmakta olup, haftalık getiriler ile hesaplanan optimal portföyün %11,78'i ve aylık getiriler ile hesaplanan optimal portföyün %5,24'ü risksiz varlıkta değerlendirilen varlık miktarıdır. Riskli varlıklardan oluşan portföye risksiz varlığın eklenmesi sonucu oluşan etkin sınır

aşağıda verilmektedir. Bilindiği üzere etkin sınır ile risksiz faiz oranının doğrusunun kesiştiği yerde oluşan portföy pazar portföyü olarak adlandırılır.

Şekil 4.4 Risksiz varlığın eklenmesi halinde optimal portföy ağırlıkları ve etkin sınır eğrisi



Böylelikle bir sonraki aşamada yatırım araçlarına risksiz varlığın eklenmesi halinde oluşacak dinamik portföy stratejileri ile karşılaştırma imkanı sağlayacak durağan portföy seçimi verileri hesaplanmış olur. Bir sonraki aşamada yatırım kararlarının dinamik hale dönüştirilmesi neticesinde beklenen getiri ve risk parametrelerinde meydana gelecek değişim incelenecektir.

4.4 TÜMÜ RİSKLİ VARLIKLARDAN OLUŞAN DİNAMİK PORTFÖY SEÇİMİ

Markowitz modelinde yatırımcı, yatırım periyodu sona erene kadar portföy ağırlıklarında herhangi bir değişiklikte bulunmazken, dinamik portföy seçimi teknikleri portföy dağılımını zaman içerisinde yeniden gözden geçirme olanağı sağlamaktadır. Markowitz modeline göre portföy seçiminde kullanılan beklenen

getiri ve kovaryans verileri dinamik modelde de girdi olarak kullanılmaktadır. Dolayısıyla Tablo 4.7 ile verilen haftalık ve aylık beklenen getiri oranları ile Tablo 4.8 ve Tablo 4.9 ile verilen kovaryans matrisleri dönemsel optimal portföylerin hesaplanmasında kullanılacaktır. Bu bölümde başlangıçta yatırımcının bir birim varlığı olduğunu varsayarak, önümüzdeki on dönem içerisinde oluşacak (T=10) optimum portföyler elde edilmektedir.

Hatırlanacağı üzere çok-dönemli ortalama varyans portföy seçiminde ilk adım, en düşük beklenen getiri oranına sahip baz hissenin tespit edilerek beklenen getiri vektörünün oluşturulmasıdır. Haftalık ve aylık kapanış fiyatları gözönüne alınarak yapılan hesaplamalarda baz hissenin TOASO olduğu görülür. Baz hissenin getirisini aşan beklenen getiri oranları hesaplanarak beklenen getiri vektörü elde edilir.

Tablo 4.12 Baz hisse senedini aşan beklenen getiri oranları

HİSSE SENEDİ	HAFTALIK GETİRİ	AYLIK GETİRİ	HİSSE SENEDİ	HAFTALIK GETİRİ	AYLIK GETİRİ
AKBNK	0,00336621	0,014144000	ISCTR	0,00155379	0,005335000
AKGRT	0,00303949	0,014439000	KCHOL	0,00061245	0,003919000
ARCLK	0,00327555	0,014022000	MIGRS	0,00179646	0,007021000
DOHOL	0,00247879	0,010106000	SAHOL	0,00223958	0,009175000
ENKAI	0,00404876	0,016791000	SISE	0,00120907	0,005554000
EREGL	0,00243343	0,010810000	TNSAS	0,00124732	0,003580000
FINBN	0,00558088	0,022632000	TOASO	0,00000000	0,000000000
FROTO	0,00331839	0,015320000	ULKER	0,00574348	0,024485000
GARAN	0,00336062	0,015417000	VESTL	0,00229801	0,009688000
HURGZ	0,00360474	0,013689000	YKBNK	0,00182052	0,007831000

Böylelikle hisse senetlerine ait beklenen getiri oranları elde edilmiş olur. Beklenen getiri oranları, en düşük beklenen getiri oranına sahip hisse senedi olan TOASO baz alınarak gerçekleştirilmektedir. Model hisse senedine yatırılan varlık miktarı için pozitiflik koşulu içermediğinden açığa satışı mümkün kılmaktadır. İşte bu noktada baz hisse senedi yatırımcının açığa satış neticesinde elde bulundurduğu

varlık miktarını artırarak, getirisi daha yüksek hisse senetlerine yatırım yapma ve daha büyük beklenen getiri elde etme imkanı sağlamaktadır.

Markowitz modeli ile karşılaştırmalı olarak bakıldığında, beklenen getirilerin elde edilmesi ile birlikte, hisse senetlerinin karşılıklı etkileşimlerinin ölçüsü olan kovaryans matrisinin hesaplanması gerekmektedir. Örneğin AKBNK hisse senedinin kendi fiyat değişimlerinden ortaya çıkan riskinin ölçüsü aşağıda verildiği biçimde hesaplanmaktadır. Tabii ki bu hesaplamalar da, baz hisse TOASO'nun beklenen getirisi gözönünde bulundurularak gerçekleştirilmektedir.

$$E\left[\left(e_t^{AKBNK} - e_t^{TOASO}\right)^2\right] = E\left[\left(e_t^{AKBNK}\right)^2\right] - 2\,E\left[e_t^{AKBNK} e_t^{TOASO}\right] + E\left[\left(e_t^{TOASO}\right)^2\right]$$
$$= \{1{,}021037\} - 2\{1{,}015509\} + \{1{,}011714\} = 0{,}007159$$

Yukarıda görüldüğü üzere, bir hisse senedinin kendi fiyat hareketlerine bağlı değişiminin ölçüsü elde edilebileceği gibi, herhangi bir hisse senedinin fiyatında meydana gelen değişimin diğer hisse senetlerinde meydana getireceği değişimin ölçüsü de hesaplanabilir. Örneğin DOHOL hisse senedinin fiyatında meydana gelen değişimin, AKBNK hisse senedinde meydana getirdiği değişikliğin ölçüsü aşağıda verildiği gibi hesaplanabilir.

$$E\left[\left(e_t^{AKBNK} - e_t^{TOASO}\right)\left(e_t^{DOHOL} - e_t^{TOASO}\right)\right]$$
$$= E\left(e_t^{AKBNK} e_t^{DOHOL}\right) - E\left(e_t^{AKBNK} e_t^{TOASO}\right) - E\left(e_t^{DOHOL} e_t^{TOASO}\right) + E\left(e_t^{TOASO}\right)^2$$
$$= \{1{,}019088\} - \{1{,}015509\} - \{1{,}016578\} + \{1{,}017140\} = \{0{,}004141\}$$

Yukarıda verilen hesaplamalar haftalık beklenen getiriler kullanılarak elde edilmiştir. Benzer biçimde aylık getiri oranları için de hesaplamalar gerçekleştirilebilir. Yukarıda verilen hesaplamalar tüm hisse senetleri için gerçekleştirilerek kovaryans matrisleri haftalık ve aylık kapanış fiyatlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 4.13 Çok dönemli portföy seçimi haftalık getirilere ait kovaryans matrisi

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	ULK	VES	YKB
AKB	0,0072	0,0055	0,0051	0,0041	0,0043	0,0048	0,0046	0,0037	0,0051	0,0045	0,0048	0,0045	0,0048	0,0052	0,0041	0,0046	0,0042	0,0050	0,0057
AKG	0,0055	0,0075	0,0050	0,0044	0,0049	0,0048	0,0046	0,0038	0,0051	0,0043	0,0048	0,0047	0,0049	0,0051	0,0043	0,0047	0,0048	0,0050	0,0056
ARC	0,0051	0,0050	0,0078	0,0043	0,0039	0,0048	0,0038	0,0030	0,0044	0,0043	0,0040	0,0045	0,0040	0,0045	0,0037	0,0042	0,0038	0,0047	0,0046
DOH	0,0041	0,0044	0,0043	0,0074	0,0037	0,0041	0,0047	0,0033	0,0043	0,0051	0,0038	0,0030	0,0060	0,0042	0,0038	0,0041	0,0035	0,0046	0,0052
ENK	0,0043	0,0049	0,0039	0,0037	0,0078	0,0047	0,0038	0,0032	0,0042	0,0041	0,0040	0,0042	0,0049	0,0041	0,0037	0,0047	0,0042	0,0047	0,0043
ERE	0,0048	0,0048	0,0048	0,0041	0,0047	0,0068	0,0041	0,0035	0,0043	0,0043	0,0043	0,0045	0,0044	0,0044	0,0043	0,0039	0,0042	0,0049	0,0048
FIN	0,0046	0,0046	0,0038	0,0047	0,0038	0,0041	0,0086	0,0033	0,0051	0,0043	0,0043	0,0040	0,0040	0,0033	0,0042	0,0049	0,0039	0,0047	0,0060
FRO	0,0037	0,0038	0,0030	0,0033	0,0032	0,0035	0,0033	0,0053	0,0042	0,0043	0,0038	0,0042	0,0041	0,0040	0,0038	0,0039	0,0041	0,0044	0,0039
GAR	0,0051	0,0051	0,0044	0,0043	0,0042	0,0043	0,0051	0,0042	0,0075	0,0046	0,0046	0,0042	0,0041	0,0041	0,0039	0,0049	0,0041	0,0047	0,0063
HUR	0,0045	0,0043	0,0043	0,0051	0,0041	0,0043	0,0043	0,0043	0,0046	0,0091	0,0042	0,0047	0,0063	0,0042	0,0040	0,0042	0,0043	0,0048	0,0055
ISC	0,0048	0,0048	0,0040	0,0038	0,0040	0,0043	0,0043	0,0038	0,0046	0,0042	0,0067	0,0038	0,0042	0,0041	0,0038	0,0038	0,0034	0,0036	0,0056
KCH	0,0045	0,0047	0,0045	0,0030	0,0042	0,0045	0,0040	0,0042	0,0042	0,0047	0,0038	0,0061	0,0043	0,0046	0,0040	0,0041	0,0038	0,0049	0,0044
MIG	0,0048	0,0049	0,0040	0,0060	0,0049	0,0044	0,0040	0,0041	0,0041	0,0063	0,0042	0,0043	0,0066	0,0031	0,0025	0,0036	0,0032	0,0031	0,0030
SAH	0,0052	0,0051	0,0045	0,0042	0,0041	0,0044	0,0033	0,0040	0,0041	0,0042	0,0041	0,0046	0,0031	0,0059	0,0031	0,0035	0,0036	0,0042	0,0043
SIS	0,0041	0,0043	0,0037	0,0038	0,0037	0,0043	0,0042	0,0038	0,0039	0,0040	0,0038	0,0040	0,0025	0,0031	0,0179	0,0043	0,0042	0,0046	0,0048
TNS	0,0046	0,0047	0,0042	0,0041	0,0047	0,0039	0,0049	0,0039	0,0049	0,0042	0,0038	0,0041	0,0036	0,0035	0,0043	0,0097	0,0044	0,0043	0,0045
ULK	0,0042	0,0048	0,0038	0,0035	0,0042	0,0042	0,0039	0,0041	0,0041	0,0043	0,0034	0,0038	0,0032	0,0036	0,0042	0,0044	0,0091	0,0041	0,0039
VES	0,0050	0,0050	0,0047	0,0046	0,0047	0,0049	0,0047	0,0044	0,0047	0,0048	0,0036	0,0049	0,0031	0,0042	0,0046	0,0043	0,0041	0,0081	0,0051
YKB	0,0057	0,0056	0,0046	0,0052	0,0043	0,0048	0,0060	0,0039	0,0063	0,0055	0,0056	0,0044	0,0030	0,0043	0,0048	0,0045	0,0039	0,0051	0,0111

Tablo 4.14 Çok dönemli portföy seçimi aylık getirilere ait kovaryans matrisi

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	ULK	VES	YKB
AKB	0,0392	0,0268	0,0260	0,0203	0,0241	0,0239	0,0271	0,0205	0,0247	0,0163	0,0265	0,0218	0,0320	0,0275	0,0230	0,0272	0,0211	0,0238	0,0216
AKG	0,0268	0,0310	0,0235	0,0196	0,0250	0,0232	0,0205	0,0157	0,0236	0,0172	0,0231	0,0222	0,0256	0,0229	0,0203	0,0240	0,0235	0,0243	0,0219
ARC	0,0260	0,0235	0,0356	0,0188	0,0196	0,0210	0,0181	0,0156	0,0236	0,0174	0,0176	0,0235	0,0237	0,0216	0,0156	0,0225	0,0204	0,0175	0,0195
DOH	0,0203	0,0196	0,0188	0,0392	0,0190	0,0205	0,0208	0,0150	0,0200	0,0213	0,0200	0,0163	0,0399	0,0230	0,0193	0,0246	0,0137	0,0234	0,0203
ENK	0,0241	0,0250	0,0196	0,0190	0,0336	0,0224	0,0179	0,0151	0,0188	0,0164	0,0180	0,0212	0,0267	0,0213	0,0180	0,0232	0,0204	0,0233	0,0176
ERE	0,0239	0,0232	0,0210	0,0205	0,0224	0,0312	0,0185	0,0154	0,0173	0,0149	0,0209	0,0217	0,0256	0,0215	0,0195	0,0201	0,0192	0,0224	0,0180
FIN	0,0271	0,0205	0,0181	0,0208	0,0179	0,0185	0,0480	0,0179	0,0227	0,0113	0,0222	0,0167	0,0255	0,0179	0,0241	0,0258	0,0203	0,0218	0,0207
FRO	0,0205	0,0157	0,0156	0,0150	0,0151	0,0154	0,0179	0,0243	0,0216	0,0180	0,0221	0,0180	0,0244	0,0211	0,0197	0,0247	0,0192	0,0206	0,0181
GAR	0,0247	0,0236	0,0236	0,0200	0,0188	0,0173	0,0227	0,0216	0,0331	0,0249	0,0243	0,0215	0,0241	0,0212	0,0200	0,0292	0,0245	0,0238	0,0277
HUR	0,0163	0,0172	0,0174	0,0213	0,0164	0,0149	0,0113	0,0180	0,0249	0,0356	0,0234	0,0265	0,0446	0,0216	0,0220	0,0312	0,0262	0,0200	0,0327
ISC	0,0265	0,0231	0,0176	0,0200	0,0180	0,0209	0,0222	0,0221	0,0243	0,0234	0,0335	0,0197	0,0260	0,0240	0,0227	0,0243	0,0198	0,0154	0,0238
KCH	0,0218	0,0222	0,0235	0,0163	0,0212	0,0217	0,0167	0,0180	0,0215	0,0265	0,0197	0,0284	0,0248	0,0261	0,0174	0,0237	0,0181	0,0253	0,0195
MIG	0,0320	0,0256	0,0237	0,0399	0,0267	0,0256	0,0255	0,0244	0,0241	0,0446	0,0260	0,0248	0,0421	0,0116	0,0060	0,0126	0,0098	0,0091	0,0049
SAH	0,0275	0,0229	0,0216	0,0230	0,0213	0,0215	0,0179	0,0211	0,0212	0,0216	0,0240	0,0261	0,0116	0,0309	0,0177	0,0223	0,0161	0,0225	0,0171
SIS	0,0230	0,0203	0,0156	0,0193	0,0180	0,0195	0,0241	0,0197	0,0200	0,0220	0,0227	0,0174	0,0060	0,0177	0,1091	0,0256	0,0231	0,0232	0,0185
TNS	0,0272	0,0240	0,0225	0,0246	0,0232	0,0201	0,0258	0,0247	0,0292	0,0312	0,0243	0,0237	0,0126	0,0223	0,0256	0,0441	0,0233	0,0219	0,0214
ULK	0,0211	0,0235	0,0204	0,0137	0,0204	0,0192	0,0203	0,0192	0,0245	0,0262	0,0198	0,0181	0,0098	0,0161	0,0231	0,0233	0,0568	0,0187	0,0154
VES	0,0238	0,0243	0,0175	0,0234	0,0233	0,0224	0,0218	0,0206	0,0238	0,0200	0,0154	0,0253	0,0091	0,0225	0,0232	0,0219	0,0187	0,0352	0,0206
YKB	0,0216	0,0219	0,0195	0,0203	0,0176	0,0180	0,0207	0,0181	0,0277	0,0327	0,0238	0,0195	0,0049	0,0171	0,0185	0,0214	0,0154	0,0206	0,0343

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi modelinde elde edilen portföylerin tutarlı olabilmesi açısından Tablo 4.13 ve Tablo 4.14 ile verilen kovaryans matrislerinin pozitif definit olmaları gerekmektedir. Bir matrisin pozitif definitliği, alt determinantlarının veya özdeğerlerinin sıfırdan farklı olduğu gösterilerek kanıtlanabilir. Kovaryans matrislerine ait alt determinantlar aşağıda verilmektedir. Benzer biçimde özdeğerlerin incelenmesi ile de aynı sonuç elde edilebilir.

Tablo 4.15 Kovaryans matrisinin pozitif definitliği(*10^4)

BOYUT	ALT DETERMİNANTLAR (HAFTALIK)	ALT DETERMİNANTLAR (AYLIK)
1x1	7,08E+01 > 0	1,25E+01 > 0
2x2	2,33E+03 > 0	1,03E+02 > 0
3x3	9,26E+04 > 0	8,72E+02 > 0
4x4	4,44E+06 > 0	8,05E+03 > 0
5x5	1,80E+08 > 0	6,25E+04 > 0
6x6	4,33E+09 > 0	3,63E+05 > 0
7x7	1,98E+11 > 0	3,11E+06 > 0
8x8	6,39E+12 > 0	2,17E+07 > 0
9x9	1,84E+14 > 0	1,32E+08 > 0
10x10	8,56E+15 > 0	1,25E+09 > 0
11x11	2,47E+17 > 0	6,68E+09 > 0
12x12	5,00E+18 > 0	2,89E+10 > 0
13x13	1,00E+20 > 0	1,24E+11 > 0
14x14	1,35E+21 > 0	2,75E+11 > 0
15x15	3,49E+22 > 0	7,46E+12 > 0
16x16	1,71E+24 > 0	6,63E+13 > 0
17x17	6,39E+25 > 0	5,83E+14 > 0
18x18	3,02E+27 > 0	3,68E+15 > 0
19x19	8,76E+28 > 0	1,47E+16 > 0

Dönemsel olarak optimum portföyün ve etkin sınırın elde edilebilmesi için ikinci bölümde detaylı açıklamaları yapılan μ, ν, τ ve a, b, c parametrelerinin

hesaplanması gerekmektedir. Hesaplamalar (2.37)-(2.42) arasında belirtilen bağıntılar ile gerçekleştirilmiştir.

Tablo 4.16 Optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak parametreler

Parametre	Haftalık	Aylık
μ	0,923098712	0,536949327
τ	1,072686979	1,099297163
υ	0,078626451	0,302902389
a	0,033131107	0,059701337
b	2,190689744	2,72428126
c	0,061575538	0,367896669

Tablo 4.16 ile verilen parametrelerin hesaplanması ile birlikte etkin sınırın ve her bir dönem için optimal portföylerin elde edilmesi safhasına geçilebilir. Ancak (2.37)-(2.42) ile verilen değerlerin elde edilebilmesi için (2.32)-(2.42) arasında verilen parametrelerin hesaplanması gerektiği unutulmamalıdır. Bu hesaplamalara ilişkin sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.17 Optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak yardımcı parametreler

Parametre	Haftalık	Aylık	Parametre	Haftalık	Aylık
B_t	0,01721531	0,1018969	B_9^1	0,00860766	0,05094845
A_t^1	0,99203002	0,9397089	B_0^2	0,00328436	0,00701413
A_t^2	1,00704134	1,0095121	B_1^2	0,00338450	0,00809487
B_0^1	0,00751939	0,02673421	B_2^2	0,00348771	0,00934214
B_1^1	0,00854008	0,03341718	B_3^2	0,00359406	0,01078159
B_2^1	0,00774868	0,03085345	B_4^2	0,00370365	0,01244283
B_3^1	0,00786593	0,03314530	B_5^2	0,00381659	0,01436004
B_4^1	0,00798496	0,03560739	B_6^2	0,00393297	0,01657265
B_5^1	0,00810578	0,03825237	B_7^2	0,00405290	0,01912618
B_6^1	0,00822843	0,04109382	B_8^2	0,00417648	0,02207317
B_7^1	0,00835295	0,04414633	B_9^2	0,00430383	0,02547423
B_8^1	0,00847935	0,04742560			

Gerekli bütün parametrelerin elde edilmesi ile birlikte dönemsel optimal portföy stratejisi elde edilebilir. Dönemsel optimal portföy stratejisi ile, yatırımcının her bir dönem için ilgili yatırım aracına elindeki varlığın ne kadarlık kısmını ayıracağı belirlenmektedir. Herhangi bir dönem için, herhangi bir yatırım aracına ayrılan varlık miktarının negatif olması halinde, açığa satış durumunun söz konusu olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumda yatırımcı, ilgili yatırım aracını açığa satarak bir miktar daha varlık elde etmekte ve bu miktarı diğer yatırım araçlarında değerlendirmektedir. Haftalık kapanış fiyatları ile hesaplanan dönemsel optimal portföy stratejisi aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.18 Haftalık getiriler ile oluşturulan dönemsel optimal portföy stratejisi

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
AKB	0,992	-1,768	-1,139	-1,320	-1,308	-1,343	-1,367	-1,394	-1,421	-1,448
AKG	0,499	-0,289	-0,105	-0,154	-0,147	-0,153	-0,157	-0,161	-0,165	-0,169
ARC	5,872	11,621	10,459	10,951	11,052	11,249	11,427	11,613	11,800	11,991
DOH	-7,606	-16,523	-14,693	-15,435	-15,567	-15,850	-16,101	-16,365	-16,631	-16,901
ENK	4,972	6,802	6,491	6,693	6,774	6,885	6,992	7,102	7,213	7,326
ERE	0,416	-1,478	-1,051	-1,179	-1,175	-1,203	-1,224	-1,246	-1,269	-1,292
FIN	8,340	15,667	14,202	14,842	14,984	15,249	15,489	15,740	15,993	16,250
FRO	11,211	19,692	18,025	18,789	18,977	19,309	19,612	19,928	20,247	20,570
GAR	-1,387	-2,415	-2,214	-2,307	-2,330	-2,371	-2,408	-2,447	-2,486	-2,525
HUR	2,689	4,515	4,161	4,330	4,375	4,451	4,520	4,593	4,666	4,740
ISC	-5,855	-12,260	-10,952	-11,491	-11,592	-11,802	-11,989	-12,184	-12,382	-12,582
KCH	-16,474	-33,481	-30,027	-31,471	-31,754	-32,325	-32,836	-33,371	-33,910	-34,459
MIG	1,442	6,146	5,133	5,487	5,516	5,625	5,716	5,813	5,911	6,010
SAH	4,557	11,608	10,133	10,699	10,781	10,981	11,156	11,341	11,527	11,716
SIS	-0,310	-0,266	-0,281	-0,283	-0,288	-0,292	-0,296	-0,300	-0,305	-0,309
TNS	-3,097	-5,261	-4,840	-5,038	-5,090	-5,179	-5,260	-5,344	-5,429	-5,516
ULK	1,769	2,493	2,366	2,443	2,472	2,513	2,552	2,592	2,633	2,674
VES	-1,612	-1,354	-1,441	-1,447	-1,472	-1,492	-1,515	-1,537	-1,560	-1,583
YKB	-0,606	1,059	0,679	0,788	0,781	0,802	0,816	0,832	0,848	0,864

Yukarıda Tablo 4.18 ile verilen dönemsel optimal portföy stratejisi haftalık kapanış fiyatlarından yola çıkılarak hesaplandığından, ilgili işlem haftasını takip eden on hafta için alınacak optimal yatırım stratejisini belirtmektedir. Tabloda görülen pozitif değerler ilgili yatırım aracına belirtilen miktar kadar varlığın yatırıldığını gösterirken, negatif değerler ilgili yatırım aracından belirtilen miktar kadar açığa satış olduğuna işaret etmektedir. Açığa satış neticesinde elde edilen

varlık, başlangıç varlığı olan bir para birimine eklenerek t=0'da görülen portföy stratejisi oluşturulmaktadır.

Markowitz modelinde yapılan hesaplamalar hatırlanacak olursa, haftalık ve aylık olarak seçilen portföylerin büyük bir bölümü MIGRS, ULKER, ENKAI ve FINBN hisse senetlerinden oluşmakta idi. Bu dört hisse senedi yine çok dönemli optimal portföy stratejisinde de pozitif yatırım miktarı ile değerlendirilmektedir. Yani başka bir deyişle, yatırımcı tarafından elde bulundurulan varlığın büyük bölümü yine bu dört yatırım aracında değerlendirilmektedir. Bu hisse senetlerine ek olarak ARCLK, SAHOL ve FROTO senetlerine de yine büyük miktarda yatırım yapılmaktadır. Negatif varlık miktarı gösteren KCHOL, ISCTR ve DOHOL gibi hisse senetleri risk-getiri haritasında incelenecek olursa daha düşük getirili bölgede yer aldıkları görülmektedir. Ek olarak TNSAS hisse senedi için de büyük miktarda açığa satış gerçekleştirilmektedir. Yine TNSAS'da risk-getiri haritasında düşük risk ve düşük getirili bölgede olması ile dikkat çekmektedir.

Tablo 4.19 Aylık getiriler ile oluşturulan dönemsel optimal portföy stratejisi

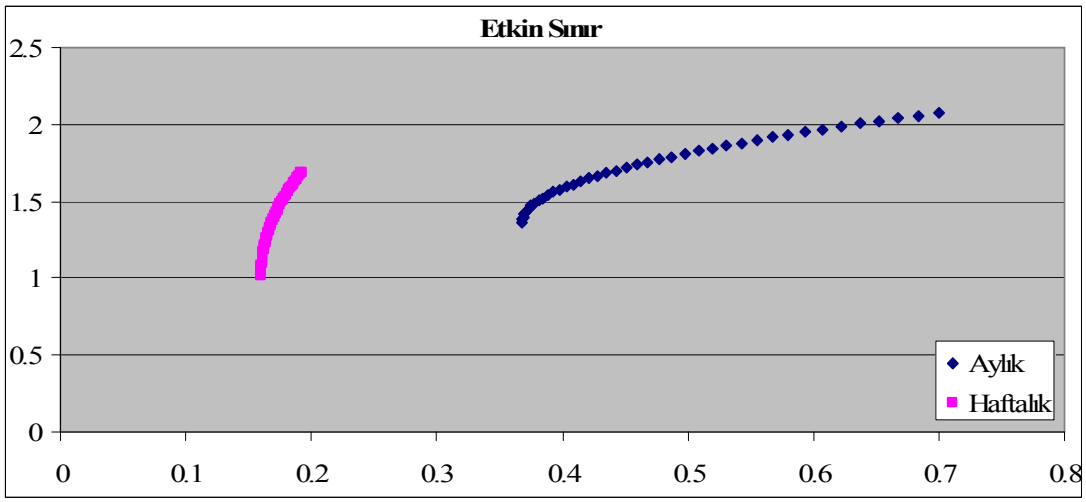
	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
AKB	-12,59	-8,72	-6,76	-10,00	-10,79	-11,61	-12,49	-13,44	-14,45	-15,54
AKG	55,12	43,61	38,38	50,12	54,01	58,07	62,44	67,14	72,18	77,59
ARC	-33,95	-27,95	-25,40	-32,14	-34,62	-37,22	-40,02	-43,02	-46,25	-49,71
DOH	-5,32	-4,38	-3,97	-5,03	-5,42	-5,83	-6,27	-6,74	-7,24	-7,79
ENK	-6,49	-3,91	-2,54	-4,47	-4,84	-5,21	-5,61	-6,03	-6,49	-6,99
ERE	23,28	20,23	19,13	23,28	25,06	26,94	28,95	31,12	33,45	35,95
FIN	15,17	12,37	11,16	14,23	15,33	16,48	17,72	19,05	20,47	22,01
FRO	59,76	48,67	43,85	55,96	60,28	64,81	69,68	74,91	80,53	86,57
GAR	21,76	18,25	16,83	21,00	22,61	24,31	26,13	28,09	30,20	32,46
HUR	-1,48	-1,24	-1,14	-1,43	-1,54	-1,65	-1,78	-1,91	-2,05	-2,20
ISC	-110,35	-89,23	-79,95	-102,58	-110,51	-118,83	-127,76	-137,35	-147,66	-158,73
KCH	-24,19	-18,41	-15,67	-21,15	-22,80	-24,52	-26,37	-28,35	-30,49	-32,78
MIG	11,47	9,07	7,97	10,42	11,23	12,07	12,98	13,96	15,01	16,13
SAH	62,60	49,93	44,25	57,39	61,84	66,50	71,50	76,87	82,64	88,84
SIS	4,83	3,87	3,44	4,45	4,79	5,15	5,54	5,96	6,40	6,88
TNS	-14,01	-11,46	-10,36	-13,18	-14,19	-15,26	-16,41	-17,64	-18,96	-20,38
ULK	3,39	3,15	3,11	3,62	3,90	4,19	4,50	4,84	5,20	5,59
VES	-71,93	-58,83	-53,20	-67,65	-72,87	-78,35	-84,24	-90,56	-97,35	-104,65
YKB	34,73	27,41	24,07	31,50	33,94	36,50	39,25	42,20	45,37	48,77

Tablo 4.19 ise Tablo 4.18'dan farklı olarak aylık kapanış fiyatları gözönüne alınarak hesaplandığından, işlemin gerçekleştirildiği ayı takip eden 10 aylık yatırım

stratejisini belirtmektedir. Aylık beklenen getiri ve risk verileri kullanıldığından dolayı yatırılan varlık miktarının bir önceki tabloya göre daha fazla olduğu görülmektedir.

GARAN hisse senedinin bulunduğu satır ile t=3 sütunun kesiştiği hücrede yer alan 21,00 sayısı üç ay sonra GARAN hisse senedine yatırmak üzere 21,00 para birimi varlığın ayrılması gerektiğini vurgulamaktadır. Bir önceki ayda bu hisse senedine ayrılan miktarın 16,83 olduğuna dikkat edilirse GARAN hisse senedine 4,17 para birimi daha varlık yatırılmalıdır. Daha önceden de belirtildiği gibi negatif değerler ise açığa satışı temsil etmektedir. Örneğin DOHOL hisse senedinin bulunduğu satır ile t=4 sütunun kesiştiği hücrede yer alan -5,42 değeri, yatırım periyodunun dördüncü ayında DOHOL hisse senedinin ilgili miktarının açığa satılarak 5,42 para birimi kadar varlığın elde edileceğini göstermektedir. Bir sonraki hücrede yer alan -5,83 ise açığa satılan miktarın artırılarak 0,41 para birimi kadar daha varlığın diğer yatırım araçlarını finanse etmede kullanılabileceğini belirtmektedir. Her iki yatırım periyodu için optimal portföy stratejileri böylelikle elde edilmiş olur. Bunun yanında her iki durum için etkin sınır (2.46) denklem takımı kullanılarak elde edilebilir.

Grafik 4.1 Haftalık ve aylık getiriler ile Ortalama-Varyans Etkin Sınır (T=10)



Grafik 4.1'de koyu renk ile aylık getiriler kullanılarak oluşturulan portföyler için etkin sınır belirtilirken, açık renk ile haftalık getiriler kullanılarak oluşturulan

portföyler için etkin sınır belirtilmektedir. Aylık getirilerin haftalık getirilerden daha yüksek olduğu düşünülecek olursa, haftalık getiriler için çizilen etkin sınırın eksenlere daha yakın olması doğaldır.

Son olarak Markowitz modeli aracılığıyla elde edilen portföy stratejisi ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla, her iki durum için elde edilen beklenen getiri ve risk parametrelerinin hesaplanması gerekmektedir. Haftalık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi 15,0553 olarak hesaplanırken, portföy riski 6,5182 olarak elde edilmektedir. Elde edilen risk değeri, Markowitz ile hesaplanan risk değerine oldukça yakın iken yatırımcının başlangıçta sahip olduğu 1 para birimi varlık on dönemin sonunda 15,0553 para birimine dönüşmektedir. İşlem maliyetlerinin çıkartılması ile birlikte bu miktarda azalma olacağı açıktır ancak yine de Markowitz modelinden daha yüksek bir getiri elde edilmektedir.

Benzer kıyaslama aylık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinde de yapılabilir. Bu durumda beklenen getiri 67,08272 olarak gerçekleşirken risk 16,06953 seviyesinde gerçekleşmektedir. Bu değer de yine Markowitz ile elde edilen risk değerine yakındır.

Tablo 4.18 ve Tablo 4.19 ile verilen optimal portföy stratejileri incelendiğinde TOASO hisse senedine ayrılan varlık miktarı tabloda görülmemektedir. TOASO baz hisse olduğundan, bu yatırım aracına ayrılan varlık miktarı nihai olarak hesaplanmaktadır. Başlangıç varlığına açığa satış ile elde edilen varlık miktarı eklenerek, diğer hisse senetlerine yapılan yatırım çıkartıldığında, TOASO senedine ayrılan varlık miktarı hesaplanmış olur.

Tablo 4.20 Dönemsel olarak baz hisse senedine yapılan yatırım(Haftalık)

Dönem	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Başlangıç yatırımı	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Açığa satış	37,00	69,43	62,34	65,32	65,91	67,09	68,15	69,26	70,38	71,52
Yatırım	39,93	73,94	67,24	70,22	70,90	72,15	73,28	74,47	75,66	76,88
Baz hisse	-1,93	-3,51	-3,90	-3,90	-3,99	-4,06	-4,13	-4,20	-4,28	-4,36

Tablo 4.20 incelendiğinde başlangıç optimal portföy stratejisi neticesinde TOASO hisse senedinden 1,93 para birimlik miktarın açığa satışının gerçekleştiği görülmektedir. Bir sonraki dönemde bu miktar 3.51'e çıkmaktadır. Benzer hesaplamalar aylık dönemsel optimal portföy stratejisi için de gerçekleştirilebilir.

Tablo 4.21 Dönemsel olarak baz hisse senedine yapılan yatırım(Aylık)

Dönem	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Başlangıç yatırımı	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Açığa satış	438,95	432,37	382,09	497,95	536,33	576,45	619,54	665,84	715,57	768,99
Yatırım	461,28	456,22	407,42	525,48	565,90	608,22	653,68	702,50	754,96	811,31
Baz hisse	-21,33	-22,85	-24,33	-26,52	-28,57	-30,77	-33,13	-35,67	-38,39	-41,32

Hesaplamalar aylık getiriler üzerinden yapıldığından herbir dönem bir aya karşılık gelmektedir. Bu nedenle baz hisse senedi olan TOASO için açığa satılan miktar daha yüksek olarak hesaplanmıştır. Baz hisse ve diğer hisse senetlerinin açığa satışından elde edilen miktar diğer yatırım araçlarını finanse etmekte kullanılmaktadır.

Yukarıda verilen hesaplamalara ek olarak belirtilmelidir ki, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda açığa satışa izin verilmemektedir. Bu handikap baz hisse senedi yerine risksiz faiz oranının koyulması ile düzeltilebilir. Bu durumda eldeki varlığı açığa satış ile artırmak yerine, hazine bonosu ile risksiz faiz oranı üzerinden borçlanma tercih edilecektir.

4.5 YATIRIM ARAÇLARINA RİSKSİZ VARLIĞIN EKLENMESİ

Bu bölümde gerçekleştirilecek uygulamada hisse senetlerinin beklenen getirileri ve kovaryans matrisinde herhangi bir değişiklik olmamakla birlikte, risksiz faiz oranı da bir yatırım aracı olarak portföyde yer alacaktır. Dolayısıyla, Tablo 4.7 ile verilen hisse senedi haftalık ve aylık beklenen getirileri ile Tablo 4.8 ve Tablo 4.9 ile verilen kovaryans matrisleri hesaplamalarda kullanılacaktır. Bunun yanında risksiz varlığın getiri oranı için 15.06.2005 ihraç tarihli, 14.09.2005 itfa tarihli, 91 günlük TRB140905T18 hazine bonosunun ortalama basit ihraç faizi olan %14,13

kullanılacaktır. Hatırlanacağı üzere tümü riskli varlıklardan oluşan çok-dönemli ortalama varyans portföy seçiminde ilk olarak, en düşük beklenen getiri oranına sahip baz hisse tespit edilerek beklenen getiri vektörü oluşturulmaktadır. Bu noktada en düşük beklenen getiri oranına sahip yatırım aracı risksiz faiz oranı olacağından, baz hissenin beklenen getirisi yerine risksiz faiz oranının getirisi kullanılacaktır. Bu durumda oluşacak beklenen getiri vektörü aşağıda verilen biçimde elde edilir.

Tablo 4.22 Risksiz faiz oranını aşan getiri oranları

HİSSE SENEDİ	HAFTALIK GETİRİ	AYLIK GETİRİ	HİSSE SENEDİ	HAFTALIK GETİRİ	AYLIK GETİRİ
AKBNK	0,004069	0,017688	ISCTR	0,002256	0,008879
AKGRT	0,003742	0,017983	KCHOL	0,001315	0,007463
ARCLK	0,003978	0,017566	MIGRS	0,002499	0,010565
DOHOL	0,003181	0,013650	SAHOL	0,002942	0,012719
ENKAI	0,004751	0,020335	SISE	0,001911	0,009098
EREGL	0,003136	0,014354	TNSAS	0,001950	0,007124
FINBN	0,006283	0,026176	TOASO	0,000702	0,003544
FROTO	0,004021	0,018864	ULKER	0,006446	0,028029
GARAN	0,004063	0,018961	VESTL	0,003000	0,013232
HURGZ	0,004307	0,017233	YKBNK	0,002523	0,011375

Beklenen getirilerin elde edilmesi ile birlikte, hisse senetlerinin karşılıklı etkileşimlerinin ölçüsü olan kovaryans matrisinin hesaplanması gerekmektedir. Ancak bu defa hesaplamalarda baz hisse yerine risksiz faiz oranının beklenen getirisi gözönünde bulundurulacaktır. AKBNK'ın kendi fiyat değişimlerine duyarlılığı $E\left(e_t^{AKBNK} - r_t\right)^2 = E^2(e_t^{AKBNK}) - 2\,r_t E(e_t^{AKBNK}) + (r_t)^2 =$ 0,007099 biçiminde hesaplanırken, GARAN senedinin fiyat hareketlerinin AKBNK'ta meydana getirdiği değişiklik, $E\left(e_t^{AKBNK} - r_t\right)\left(e_t^{GARAN} - r_t\right) = E(e_t^{AKBNK} e_t^{GARAN}) - r_t\left(E(e_t^{AKBNK}) + E(e_t^{GARAN})\right) + (r_t)^2 =$ 0,005783 olarak elde edilir. Mümkün tüm kombinasyonların hesaplanması ile kovaryans matrisleri haftalık ve aylık kapanış fiyatlarına için elde edilir.

Tablo 4.23 Risksiz varlığın eklenmesi halinde haftalık getirilere ait kovaryans matrisi

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	ULK	VES	YKB
AKB	0,0071	0,0056	0,0058	0,0060	0,0040	0,0047	0,0053	0,0051	0,0058	0,0056	0,0054	0,0053	0,0040	0,0053	0,0051	0,0051	0,0049	0,0035	0,0052
AKG	0,0056	0,0077	0,0058	0,0064	0,0047	0,0048	0,0054	0,0053	0,0060	0,0055	0,0055	0,0056	0,0043	0,0053	0,0054	0,0054	0,0051	0,0042	0,0053
ARC	0,0058	0,0058	0,0092	0,0070	0,0044	0,0054	0,0052	0,0051	0,0059	0,0061	0,0053	0,0060	0,0039	0,0053	0,0054	0,0054	0,0057	0,0039	0,0063
DOH	0,0060	0,0064	0,0070	0,0113	0,0053	0,0059	0,0073	0,0067	0,0070	0,0082	0,0063	0,0072	0,0044	0,0062	0,0067	0,0065	0,0069	0,0048	0,0067
ENK	0,0040	0,0047	0,0044	0,0053	0,0073	0,0043	0,0043	0,0043	0,0046	0,0050	0,0044	0,0048	0,0039	0,0040	0,0044	0,0050	0,0047	0,0033	0,0047
ERE	0,0047	0,0048	0,0054	0,0059	0,0043	0,0066	0,0047	0,0048	0,0049	0,0053	0,0048	0,0052	0,0036	0,0044	0,0051	0,0044	0,0049	0,0035	0,0051
FIN	0,0053	0,0054	0,0052	0,0073	0,0043	0,0047	0,0099	0,0054	0,0065	0,0061	0,0055	0,0055	0,0039	0,0048	0,0059	0,0061	0,0056	0,0039	0,0056
FRO	0,0051	0,0053	0,0051	0,0067	0,0043	0,0048	0,0054	0,0081	0,0056	0,0061	0,0051	0,0057	0,0040	0,0047	0,0055	0,0051	0,0064	0,0041	0,0053
GAR	0,0058	0,0060	0,0059	0,0070	0,0046	0,0049	0,0065	0,0056	0,0089	0,0064	0,0058	0,0057	0,0040	0,0049	0,0055	0,0061	0,0057	0,0041	0,0056
HUR	0,0056	0,0055	0,0061	0,0082	0,0050	0,0053	0,0061	0,0061	0,0064	0,0114	0,0055	0,0062	0,0038	0,0049	0,0057	0,0054	0,0061	0,0043	0,0063
ISC	0,0054	0,0055	0,0053	0,0063	0,0044	0,0048	0,0055	0,0051	0,0058	0,0055	0,0079	0,0053	0,0041	0,0049	0,0054	0,0050	0,0056	0,0034	0,0051
KCH	0,0053	0,0056	0,0060	0,0072	0,0048	0,0052	0,0055	0,0057	0,0057	0,0062	0,0053	0,0077	0,0042	0,0054	0,0056	0,0053	0,0058	0,0038	0,0058
MIG	0,0040	0,0043	0,0039	0,0044	0,0039	0,0036	0,0039	0,0040	0,0040	0,0038	0,0041	0,0042	0,0051	0,0039	0,0041	0,0047	0,0042	0,0032	0,0040
SAH	0,0053	0,0053	0,0053	0,0062	0,0040	0,0044	0,0048	0,0047	0,0049	0,0049	0,0049	0,0054	0,0039	0,0062	0,0047	0,0047	0,0051	0,0036	0,0050
SIS	0,0051	0,0054	0,0054	0,0067	0,0044	0,0051	0,0059	0,0055	0,0055	0,0057	0,0054	0,0056	0,0041	0,0047	0,0080	0,0055	0,0060	0,0042	0,0055
TNS	0,0051	0,0054	0,0054	0,0065	0,0050	0,0044	0,0061	0,0051	0,0061	0,0054	0,0050	0,0053	0,0047	0,0047	0,0055	0,0108	0,0055	0,0043	0,0050
ULK	0,0049	0,0051	0,0057	0,0069	0,0047	0,0049	0,0056	0,0064	0,0057	0,0061	0,0056	0,0058	0,0042	0,0051	0,0060	0,0055	0,0100	0,0043	0,0052
VES	0,0035	0,0042	0,0039	0,0048	0,0033	0,0035	0,0039	0,0041	0,0041	0,0043	0,0034	0,0038	0,0032	0,0036	0,0042	0,0043	0,0043	0,0079	0,0037
YKB	0,0052	0,0053	0,0063	0,0067	0,0047	0,0051	0,0056	0,0053	0,0056	0,0063	0,0051	0,0058	0,0040	0,0050	0,0055	0,0050	0,0052	0,0037	0,0086

Tablo 4.24 Risksiz varlığın eklenmesi halinde aylık getirilere ait kovaryans matrisi

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	ULK	VES	YKB
AKB	0,0395	0,0337	0,0338	0,0367	0,0260	0,0271	0,0339	0,0323	0,0343	0,0326	0,0345	0,0308	0,0229	0,0327	0,0326	0,0308	0,0317	0,0214	0,0303
AKG	0,0337	0,0445	0,0380	0,0426	0,0335	0,0331	0,0339	0,0341	0,0399	0,0400	0,0377	0,0378	0,0231	0,0347	0,0365	0,0342	0,0383	0,0304	0,0375
ARC	0,0338	0,0380	0,0510	0,0427	0,0291	0,0318	0,0325	0,0349	0,0407	0,0411	0,0331	0,0400	0,0220	0,0343	0,0328	0,0337	0,0392	0,0283	0,0380
DOH	0,0367	0,0426	0,0427	0,0716	0,0370	0,0398	0,0437	0,0429	0,0457	0,0536	0,0441	0,0468	0,0236	0,0443	0,0450	0,0443	0,0478	0,0301	0,0460
ENK	0,0260	0,0335	0,0291	0,0370	0,0371	0,0272	0,0263	0,0285	0,0301	0,0343	0,0276	0,0318	0,0192	0,0281	0,0293	0,0285	0,0333	0,0223	0,0314
ERE	0,0271	0,0331	0,0318	0,0398	0,0272	0,0373	0,0283	0,0301	0,0298	0,0340	0,0318	0,0336	0,0193	0,0296	0,0320	0,0266	0,0346	0,0224	0,0319
FIN	0,0339	0,0339	0,0325	0,0437	0,0263	0,0283	0,0613	0,0362	0,0388	0,0340	0,0366	0,0322	0,0228	0,0334	0,0402	0,0359	0,0382	0,0271	0,0348
FRO	0,0323	0,0341	0,0349	0,0429	0,0285	0,0301	0,0362	0,0476	0,0377	0,0407	0,0366	0,0334	0,0217	0,0328	0,0358	0,0348	0,0432	0,0260	0,0336
GAR	0,0343	0,0399	0,0407	0,0457	0,0301	0,0298	0,0388	0,0377	0,0521	0,0476	0,0388	0,0370	0,0215	0,0329	0,0361	0,0393	0,0410	0,0313	0,0368
HUR	0,0326	0,0400	0,0411	0,0536	0,0343	0,0340	0,0340	0,0407	0,0476	0,0677	0,0378	0,0419	0,0206	0,0332	0,0381	0,0413	0,0476	0,0330	0,0394
ISC	0,0345	0,0377	0,0331	0,0441	0,0276	0,0318	0,0366	0,0366	0,0388	0,0378	0,0492	0,0351	0,0233	0,0356	0,0387	0,0344	0,0394	0,0266	0,0348
KCH	0,0308	0,0378	0,0400	0,0468	0,0318	0,0336	0,0322	0,0334	0,0370	0,0419	0,0351	0,0460	0,0221	0,0377	0,0335	0,0337	0,0403	0,0249	0,0383
MIG	0,0229	0,0231	0,0220	0,0236	0,0192	0,0193	0,0228	0,0217	0,0215	0,0206	0,0233	0,0221	0,0234	0,0232	0,0221	0,0227	0,0222	0,0166	0,0221
SAH	0,0327	0,0347	0,0343	0,0443	0,0281	0,0296	0,0334	0,0328	0,0329	0,0332	0,0356	0,0377	0,0232	0,0410	0,0338	0,0323	0,0366	0,0229	0,0355
SIS	0,0326	0,0365	0,0328	0,0450	0,0293	0,0320	0,0402	0,0358	0,0361	0,0381	0,0387	0,0335	0,0221	0,0338	0,0461	0,0357	0,0410	0,0299	0,0362
TNS	0,0308	0,0342	0,0337	0,0443	0,0285	0,0266	0,0359	0,0348	0,0393	0,0413	0,0344	0,0337	0,0227	0,0323	0,0357	0,0510	0,0350	0,0269	0,0318
ULK	0,0317	0,0383	0,0392	0,0478	0,0333	0,0346	0,0382	0,0432	0,0410	0,0476	0,0394	0,0403	0,0222	0,0366	0,0410	0,0350	0,0631	0,0317	0,0379
VES	0,0214	0,0304	0,0283	0,0301	0,0223	0,0224	0,0271	0,0260	0,0313	0,0330	0,0266	0,0249	0,0166	0,0229	0,0299	0,0269	0,0317	0,0571	0,0252
YKB	0,0303	0,0375	0,0380	0,0460	0,0314	0,0319	0,0348	0,0336	0,0368	0,0394	0,0348	0,0383	0,0221	0,0355	0,0362	0,0318	0,0379	0,0252	0,0480

Tümü riskli varlıklardan oluşan portföy seçiminde olduğu gibi risksiz varlığın eklenmesi halinde de kovaryans matrisinin pozitif definitliğinin kontrol edilmesi gerekmektedir. Alt matrislerin determinant değerleri haftalık ve aylık getirilerden hesaplanan kovaryans matrisleri için aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.25 Risksiz varlığın eklenmesi halinde kovaryans matrisinin pozitif definitliği(*10^4)

BOYUT	ALT DETERMİNANTLAR (HAFTALIK)	ALT DETERMİNANTLAR (AYLIK)
1x1	7,10E+01 > 0	3,95E+02 > 0
2x2	2,33E+03 > 0	6,20E+04 > 0
3x3	9,28E+04 > 0	1,04E+07 > 0
4x4	4,45E+06 > 0	2,92E+09 > 0
5x5	1,80E+08 > 0	3,25E+11 > 0
6x6	4,34E+09 > 0	3,34E+13 > 0
7x7	2,00E+11 > 0	9,36E+15 > 0
8x8	6,43E+12 > 0	1,40E+18 > 0
9x9	1,84E+14 > 0	1,53E+20 > 0
10x10	8,56E+15 > 0	2,69E+22 > 0
11x11	2,47E+17 > 0	3,01E+24 > 0
12x12	5,02E+18 > 0	2,29E+26 > 0
13x13	1,00E+20 > 0	1,90E+28 > 0
14x14	1,35E+21 > 0	9,24E+29 > 0
15x15	3,50E+22 > 0	7,87E+31 > 0
16x16	1,72E+24 > 0	1,19E+34 > 0
17x17	6,44E+25 > 0	1,83E+36 > 0
18x18	3,06E+27 > 0	5,70E+38 > 0
19x19	8,85E+28 > 0	5,76E+40 > 0
20x20	3,76E+30 > 0	6,67E+42 > 0

Bütün alt matrislerin determinantlarının sıfırdan büyük olması kovaryans matrisinin pozitif definitliğini işaret etmektedir. Böylelikle dönemsel optimal portföy stratejisinin belirlenmesinde kullanılacak parametreler hesaplanabilir.

Tablo 4.26 Risksiz varlığın eklenmesi halinde optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak parametreler

Parametre	Haftalık	Aylık
μ	0,8549901	0,5471435
τ	0,8774448	0,6118662
υ	0,0834450	0,2553665
a	0,0347594	0,0624712
b	2,0525262	2,2365844
c	0,0000000	0,0000000

Tablo 4.26 ile verilen parametrelerin hesaplanabilmesi için (2.32)-(2.42) bağıntıları kullanılarak elde edilen parametrelerin de hesaplanması gerekmektedir. Bu hesaplamalara ilişkin detaylı açıklamalar Bölüm 2 içerisinde gerçekleştirilmiş olup, ortaya çıkan sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.27 Optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak yardımcı parametreler

Parametre	Haftalık	Aylık	Parametre	Haftalık	Aylık
B_t	0,0180933	0,0689895	B_9^1	0,0090466	0,0344947
A_t^1	0,9847392	0,9426482	B_0^2	0,0042948	0,01379154
A_t^2	0,9875797	0,9544313	B_1^2	0,0043196	0,01413847
B_0^1	0,0088151	0,0308459	B_2^2	0,0043445	0,01449414
B_1^1	0,0088405	0,0312315	B_3^2	0,0043696	0,01485876
B_2^1	0,0088661	0,0316219	B_4^2	0,0043949	0,01523255
B_3^1	0,0088916	0,0320172	B_5^2	0,0044203	0,0156157
B_4^1	0,0089173	0,0324174	B_6^2	0,0044458	0,01600857
B_5^1	0,0089430	0,0328226	B_7^2	0,0044715	0,0164113
B_6^1	0,0089688	0,0332329	B_8^2	0,0044973	0,01682414
B_7^1	0,0089947	0,0336483	B_9^2	0,0045233	0,01724737
B_8^1	0,0090206	0,0340689			

Böylelikle dönemsel optimal portföy stratejisinin elde edilebilmesi için gerekli olan tüm parametreler hesaplanmış olur.Haftalık kapanış fiyatları ile

hesaplanan dönemsel optimal portföy stratejisi aşağıda verilmektedir. Tablo 4.28 ile verilen dönemsel optimal yatırım stratejileri ile, her bir dönemde ilgili hisse senedine yatırılması veya ilgili hisse senedinden açığa satılması gereken varlık miktarı tanımlanmaktadır.

Tablo 4.28 Haftalık getiriler ile oluşturulan risksiz varlığın eklenmesi halinde dönemsel optimal portföy stratejisi

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
AKB	0,1487	0,3226	0,5259	0,7637	1,0418	1,9669	2,4489	3,0126	3,6718	4,4427
AKG	-0,0634	-0,1375	-0,2243	-0,3257	-0,4443	-0,8388	-1,0443	-1,2847	-1,5658	-1,8946
ARC	0,1615	0,3503	0,5711	0,8294	1,1314	2,1361	2,6595	3,2717	3,9876	4,8248
DOH	-0,0589	-0,1278	-0,2083	-0,3025	-0,4127	-0,7791	-0,9700	-1,1933	-1,4544	-1,7598
ENK	0,2797	0,6068	0,9893	1,4366	1,9598	3,7000	4,6067	5,6671	6,9071	8,3574
ERE	0,0300	0,0652	0,1063	0,1543	0,2105	0,3975	0,4949	0,6088	0,7421	0,8979
FIN	0,3347	0,7261	1,1838	1,7191	2,3451	4,4276	5,5126	6,7815	8,2654	10,0008
FRO	0,1809	0,3925	0,6399	0,9292	1,2676	2,3932	2,9796	3,6655	4,4676	5.4056
GAR	0,0572	0,1240	0,2022	0,2937	0,4006	0,7564	0,9417	1,1585	1,4120	1,7084
HUR	0,0318	0,0690	0,1125	0,1634	0,2229	0,4209	0,5240	0,6446	0,7857	0,9507
ISC	-0,0372	-0,0807	-0,1315	-0,1910	-0,2605	-0,4919	-0,6124	-0,7533	-0,9182	-1,1110
KCH	-0,3372	-0,7316	-1,1929	-1,7323	-2,3631	-4,4614	-5,5547	-6,8333	-8,3286	-10,0772
MIG	0,0351	0,0761	0,1241	0,1803	0,2459	0,4643	0,5780	0,7111	0,8667	1,0486
SAH	0,1009	0,2189	0,3569	0,5182	0,7070	1,3347	1,6618	2,0443	2,4917	3,0148
SIS	-0,1350	-0,2929	-0,4775	-0,6935	-0,9460	-1,7860	-2,2237	-2,7355	-3,3341	-4,0341
TNS	-0,1666	-0,3615	-0,5893	-0,8558	-1,1675	-2,2042	-2,7444	-3,3761	-4,1148	-4,9788
TOA	-0,2465	-0,5348	-0,8719	-1,2661	-1,7272	-3,2608	-4,0599	-4,9945	-6,0873	-7,3654
ULK	0,2730	0,5922	0,9656	1,4022	1,9128	3,6113	4,4963	5,5312	6,7416	8,1570
VES	-0,0766	-0,1662	-0,2710	-0,3936	-0,5369	-1,0136	-1,2620	-1,5525	-1,8922	-2,2895
YKB	-0,1437	-0,3118	-0,5084	-0,7383	0,2632	-1,9016	-2,3676	-2,9126	-3,5499	-4,2952

Tablo 4.28 risksiz varlığın eklenmesi halinde ortaya çıkacak dönemsel optimal portföy stratejisini göstermektedir. Tümü riskli varlıklardan oluşan dönemsel optimal portföy stratejisinin belirtildiği Tablo 4.18 ile karşılaştırmalı olarak incelendiğinde ortaya çıkan ilk sonuç, risksiz varlığın da portföyde yer alması ile birlikte riskli varlıklara yapılan yatırımda meydana gelen düşüştür. Doğal olarak bu sonuç, portföy stratejisinin beklenen getirisini de etkileyecektir. Bunun yanında diğer örnekte olduğu gibi Tablo 4.28'de görülen pozitif değerler ilgili hisse senedine belirtilen dönem için yatırılan varlık miktarını belirtirken, negatif değerler ise ilgili hisse senedinin belirtilen dönemlerde açığa satılan miktarını göstermektedir.

Markowitz modeli ve tümü riskli varlıklardan oluşan portföy seçimi ile kıyaslandığında yine MIGRS, ULKER, ENKAI ve FINBN hisse senetlerinin

ağırlıkları pozitif olarak gerçekleşmektedir. Dolayısıyla bu hisse senetlerine yatırım yapılacaktır. Bunun yanında, yine KCHOL, ISCTR, AKGRT, TNSAS, VESTL ve DOHOL gibi hisse senetlerinin açığa satışı gerçekleşmektedir. Nihai döneme ulaşıldığında, eldeki varlığın büyük bir bölümünün ULKER, ENKAI ve FINBN hisse senetlerine yatırılması dikkat çekicidir. Benzer biçimde aylık kapanış fiyatlarının kullanılması halinde ortaya çıkan dönemsel optimal portföy stratejisi aşağıda verilen biçimde elde edilebilir.

Tablo 4.29 Aylık getiriler ile oluşturulan risksiz varlığın eklenmesi halinde dönemsel optimal portföy stratejisi

	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
AKBNK	-0,0562	-0,1066	-0,1518	-0,1923	-0,2286	-0,2612	-0,2903	-0,3165	-0,3399	-0,3609
AKGRT	-0,0493	-0,0934	-0,1330	-0,1685	-0,2003	-0,2288	-0,2543	-0,2772	-0,2977	-0,3161
ARCLK	0,2087	0,3958	0,5635	0,7138	0,8485	0,9693	1,0775	1,1745	1,2615	1,3394
DOHOL	-0,0883	-0,1675	-0,2384	-0,3020	-0,3590	-0,4101	-0,4559	-0,4969	-0,5337	-0,5666
ENKAI	0,6043	1,1460	1,6315	2,0666	2,4566	2,8062	3,1196	3,4004	3,6522	3,8778
EREGL	0,3589	0,6805	0,9688	1,2272	1,4588	1,6664	1,8525	2,0192	2,1687	2,3027
FINBN	0,4325	0,8201	1,1676	1,4790	1,7581	2,0083	2,2326	2,4336	2,6137	2,7752
FROTO	0,2919	0,5535	0,7880	0,9982	1,1866	1,3555	1,5068	1,6425	1,7641	1,8730
GARAN	0,1912	0,3625	0,5161	0,6537	0,7771	0,8877	0,9868	1,0756	1,1553	1,2266
HURGZ	0,2590	0,4911	0,6991	0,8856	1,0527	1,2025	1,3368	1,4571	1,5650	1,6617
ISCTR	-0,0849	-0,1609	-0,2291	-0,2903	-0,3450	-0,3941	-0,4381	-0,4776	-0,5129	-0,5446
KCHOL	-0,7374	-1,3984	-1,9908	-2,5218	-2,9977	-3,4243	-3,8067	-4,1494	-4,4566	-4,7319
MIGRS	-0,0444	-0,0841	-0,1197	-0,1517	-0,1803	-0,2060	-0,2290	-0,2496	-0,2681	-0,2846
SAHOL	0,5622	1,0660	1,5177	1,9225	2,2853	2,6105	2,9020	3,1632	3,3974	3,6073
SISE	-0,4922	-0,9335	-1,3289	-1,6834	-2,0011	-2,2858	-2,5411	-2,7698	-2,9749	-3,1587
TNSAS	-0,3528	-0,6690	-0,9525	-1,2065	-1,4342	-1,6383	-1,8212	-1,9852	-2,1321	-2,2639
TOASO	-0,4724	-0,8959	-1,2755	-1,6157	-1,9206	-2,1939	-2,4389	-2,6584	-2,8552	-3,0316
ULKER	0,2824	0,5355	0,7624	0,9657	1,1480	1,3114	1,4578	1,5890	1,7067	1,8121
VESTL	-0,1106	-0,2098	-0,2986	-0,3783	-0,4497	-0,5137	-0,5710	-0,6224	-0,6685	-0,7098
YKBNK	-0,2042	-0,3873	-0,5514	-0,6984	-0,8303	-0,9484	-1,0543	-1,1492	-1,2343	-1,3105

Tablo 4.28 ve Tablo 4.29 pozitif değerler için herbir hisse senedine ayrılması gereken varlık miktarını, negatif değerler için herbir hisse senedinin açığa satılacak miktarını göstermektedir. Ancak tablolarda risksiz faiz oranı üzerinden borçlanılacak miktar görülememektedir. Bu değer ise, başlangıç varlığına açığa satış neticesinde elde edilen varlık miktarı eklenip, diğer hisse senetlerine yapılan yatırım çıkartılarak hesaplanabilir.

Tablo 4.30 Dönemsel olarak risksiz faiz oranına yapılan yatırım(Haftalık)

Dönem	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Başlangıç yatırımı	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Açığa satış	1,303	2,826	4,608	6,691	8,384	17,233	21,457	26,395	32,171	38,926
Yatırım	1,469	3,187	5,196	7,546	10,294	19,435	24,198	29,768	36,282	43,899
Risksiz faiz oranına yapılan yatırım	0,834	0,639	0,411	0,145	-0,910	-1,202	-1,742	-2,373	-3,111	-3,974

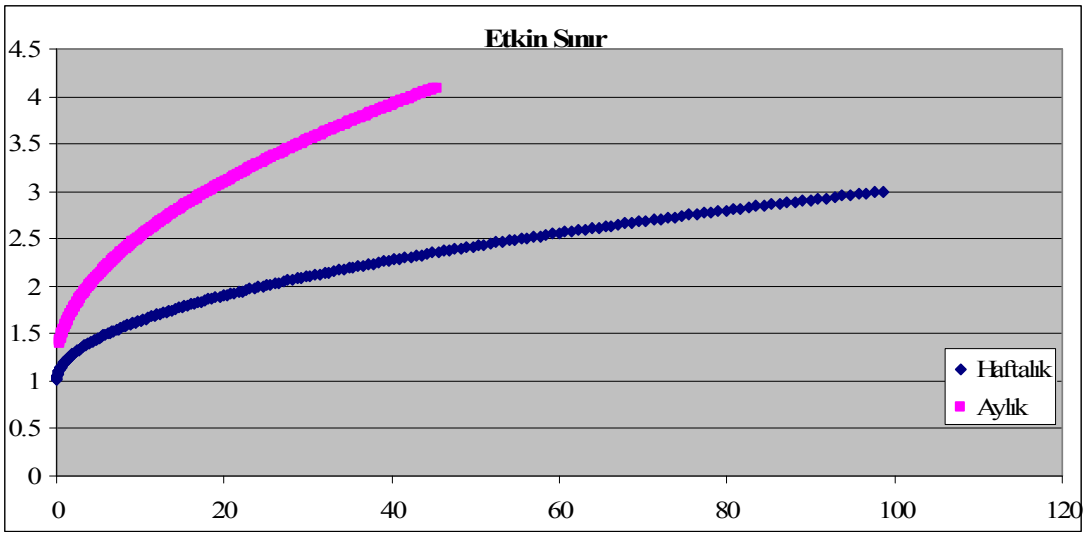
Tablo 4.30'den de görüldüğü üzere beşinci dönemden itibaren bankadan borçlanma yoluyla hisse senetlerine yatırım işlemi gerçekleşmektedir. Son döneme ulaşıldığında 3,974 para birimlik miktar borçlanılarak diğer riskli yatırım araçlarını finanse etmekte kullanılmaktadır. Benzer biçimde aylık hesaplamalar için de risksiz faiz oranına yatırılan miktar aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

Tablo 4.31 Dönemsel olarak risksiz faiz oranına yapılan yatırım(Aylık)

Dönem	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Başlangıç yatırımı	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Açığa satış	2,693	5,106	7,270	9,209	10,947	12,505	13,901	15,152	16,274	17,279
Yatırım	3,191	6,051	8,615	10,912	12,972	14,818	16,472	17,955	19,284	20,476
Risksiz faiz oranına yapılan yatırım	0,502	0,055	-0,345	-0,704	-1,025	-1,313	-1,571	-1,803	-2,010	-2,196

Her iki yatırım periyodu için de optimal portföy stratejileri ve bu stratejilerin gerçekleştirilebilmesi için bankadan borçlanılması gereken miktar böylelikle elde edilmiş olur. Bunun yanında her iki durum için etkin sınır (2.68) denklem takımı kullanılarak elde edilebilir.

Grafik 4.2 Risksiz varlığın eklenmesi halinde haftalık ve aylık getiriler ile Ortalama-Varyans Etkin Sınır (T=10)



Grafik 4.2 ile her iki durum için ortalama-varyans etkin sınır aynı grafikte gösterilmektedir. Grafikte daha yukarıda yer alan ve açık renk ile ifade edilen eğri aylık kapanış fiyatlarından yola çıkılarak hesaplanan portföyler için etkin sınırı temsil ederken, koyu renk ile ifade edilen eğri haftalık kapanış fiyatlarından yola çıkılarak hesaplanan portföyler için etkin sınırı belirtmektedir. Yine aylık beklenen getiriler ve risk değerleri daha yüksek olduğundan aylık hesaplamalarla elde edilen etkin sınır grafikte daha yukarıda yer almaktadır.

Son olarak yapılacak işlem, Markowitz modeli ile elde edilen optimal portföy ve tümü riskli varlıklardan oluşan dönemsel optimal portföy stratejisi ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla, risksiz varlığın eklenmesi durumunda oluşan dönemsel optimal portföy stratejisine ait beklenen getiri ve risk parametrelerinin hesaplanmasıdır. Haftalık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi 1,079304 olarak hesaplanırken, portföy riski 0,111893 olarak elde edilmektedir. Görüldüğü üzere, risksiz varlığın portföy içerisinde yer alması ile birlikte risk oranında büyük bir düşüş gözlenmekte ve buna bağlı olarak portföy stratejisinin beklenen getirisi de düşmektedir.

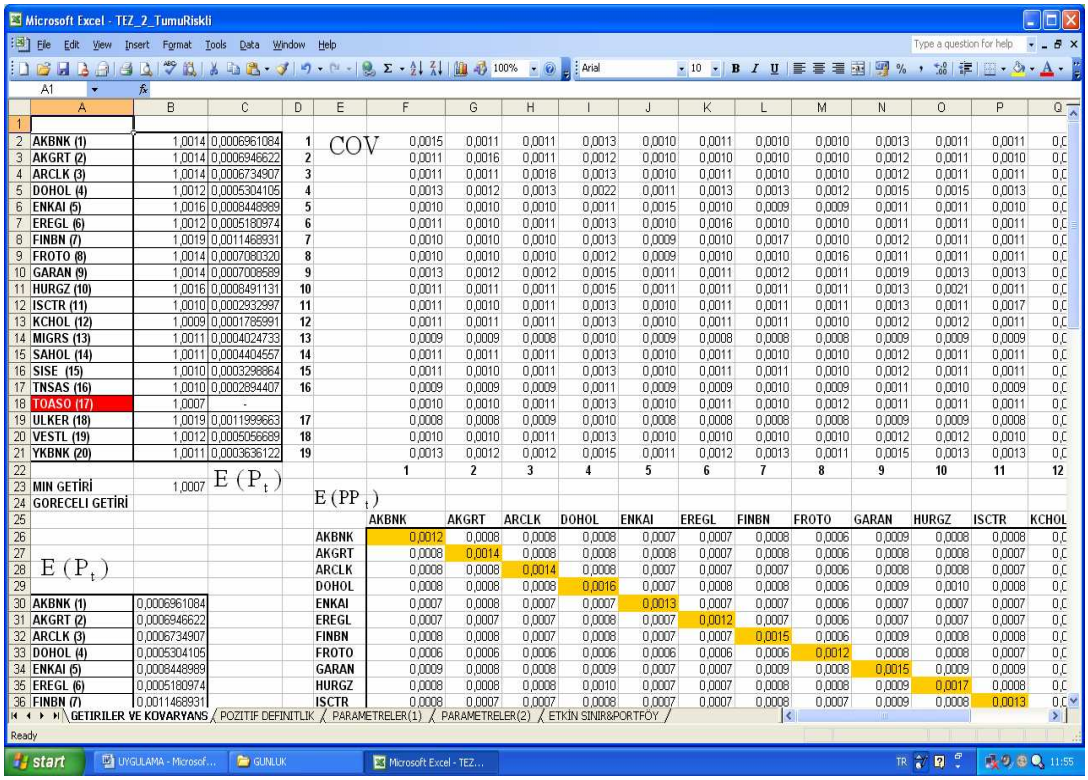
Benzer hesaplamalar ile aylık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi 1,393239 olarak

gerçekleşirken, portföy riski 0,255425 olarak hesaplanmaktadır. Doğal olarak aylık getiri ve aylık risk değerleri haftalık değerlere göre daha yüksek çıkmaktadır.

Kısacası portföye risksiz varlığın elde edilmesi ile birlikte her ne kadar tümü riskli yatırım araçlarından oluşan portföyün getirisi kadar yüksek bir getiri elde edilemese de on dönem sonunda, çok daha düşük bir risk yüzdesi ile 1 para birimlik başlangıç yatırımı 1.393239 para birimine çıkmaktadır. Bunun yanında, Markowitz modeli ile karşılaştırmalı olarak incelendiğinde portföyün haftalık getirisinin 0,007914 ve aylık getirisinin 0,0033607 olduğu görülür. Elde edilen bu sonuç da yine portföy seçiminin dinamik hale getirilmesinin beklenen getiri ve risk parametrelerinde olumlu değişiklikler doğurduğu savını kanıtlamaktadır.

Bu bölümde gerçekleştirilen hesaplamaların tümü Ms Excel elektronik tablolar aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Hesaplamalara ilişkin bir örnek elektronik tablo sayfası aşağıda verilmektedir.

Şekil 4.5 Hesaplamalara ilişkin örnek elektronik tablo sayfası



4.6 PORTFÖY SEÇİMİNİN SÜREKLİ ZAMANLI HALE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Önceki bölümde Markowitz tarafından ortaya konan tek dönemli durağan ortalama-varyans portföy seçimi modelinin dinamik yatırım problemlerine uyarlanabilmesi amacıyla çok dönemli hale dönüştürülmesinde izlenen metodoloji kullanılarak optimal portföylerin elde edilmesi gerçekleştirilmiştir. Bunun yanında durağan ve dinamik modeller sonucu elde edilen çıktılar karşılaştırılarak, dinamik modellerin üstünlüğü İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Ulusal 30 endeksine ait hisse senetlerinin haftalık ve aylık kapanış verileri kullanılarak gösterilmeye çalışılmıştır.

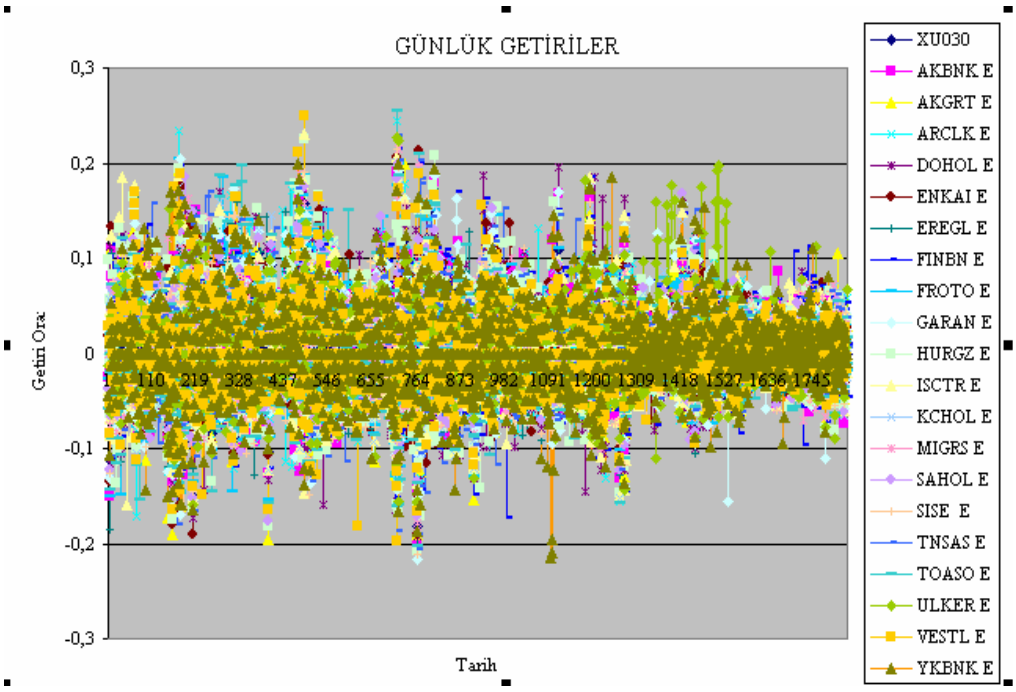
Dinamik portföy seçimi modelleri, tek dönemli olarak kabul edilen Markowitz modelindeki dönem sayısının artırılması ile sınırlı değildir. Herhangi bir yatırımcı için yatırım ufkunun bir yıl olduğunu varsayarsak, Markowitz modeli ile gerçekleştirilen seçim sonucu elde edilen optimal portföyün bir yıl boyunca elde tutulması gerekmektedir.

Çok dönemli ortalama-varyans optimal portföylerin bir önceki bölümde olduğu gibi aylık kapanış fiyatları üzerinden yapılan hesaplamalar ile elde edildiği durumda ise yatırımcının, her ayın sonunda oluşturduğu portföyü yeni stratejiye göre gözden geçirmesi beklenmektedir. Yatırım ufkunu sabit tutarak dönem sayısını sonsuz artırtığımızda ise, detaylı açıklamaları Bölüm 3 içerisinde verilen sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçimi problemi elde edilmektedir. Her ne kadar pratikte kullanımı işlem maliyetleri ve piyasa kısıtları sebebiyle zor olsa da, vadeli işlem piyasalarının etkin olarak kullanıldığı ülkelerde spot ve vadeli işlem piyasalarında alınan pozisyonlar, bu kısımda uygulanacak teknikler ile dengelenerek, risk tamamen ortadan kaldırılmaktadır.

Hatırlanacağı üzere, sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçiminde temel varsayım hisse senedi getirilerinin Martingale özelliği göstermesi idi. Martingale özelliği gösteren hisse senetlerinin gelecekteki değerlerinin en iyi tahminin bugünkü değeri olması, hisse senedi getirilerinin ancak ve ancak belirgin bir trendi olmayan bir stokastik süreç olmalarını gerektirmektedir. Grafik 4.3 ile verilen hisse senedi günlük getirileri incelenecek olursa, getirilerin sıfır ortalama etrafında rassal biçimde dağıldıkları rahatlıkla görülebilir. Bu nedenle sürekli

zamanlı ortalama-varyans portföy seçiminde günlük kapanış verilerinin kullanılması uygundur.

Grafik 4.3 Hisse senetleri günlük getiri oranları serpilme diyagramı



Bu bölümde çok dönemli ortalama-varyans portföy seçimi modelinde göz önüne alınan 20 riskli menkul kıymet ve risksiz yatırım aracı olarak da risksiz varlığın getiri oranı için 15.06.2005 ihraç tarihli, 14.09.2005 itfa tarihli, 91 günlük, TRB140905T18 hazine bonosu kullanılacaktır.

Bu durumda Tablo 4.32 ile risksiz faiz oranını aşan günlük beklenen getiriler verilmektedir. Risksiz varlığın getirisi için, TRB140905T18 hazine bonosunun ortalama basit ihraç faizi olan %14,13 kullanılacaktır. Günlük beklenen getiriler yine geometrik ortalama ile elde edilmiştir. Bunun yanısıra günlük getirilere ilişkin kovaryans matrisi Tablo 4.34'de verilmektedir.

Tablo 4.32 Risksiz faiz oranını aşan günlük beklenen getiri oranları

HİSSE	GÜNLÜK	HİSSE	GÜNLÜK

SENEDİ	GETİRİ	SENEDİ	GETİRİ
AKBNK	0,0010039	ISCTR	0,0006010
AKGRT	0,0010024	KCHOL	0,0004863
ARCLK	0,0009812	MIGRS	0,0007102
DOHOL	0,0008382	SAHOL	0,0007482
ENKAI	0,0011526	SISE	0,0006376
EREGL	0,0008258	TNSAS	0,0005972
FINBN	0,0014546	TOASO	0,0003077
FROTO	0,0010158	ULKER	0,0015077
GARAN	0,0010086	VESTL	0,0008134
HURGZ	0,0011569	YKBNK	0,0006714

Hesaplamalarda (3.65) bağıntısı kullanılarak, risksiz faiz oranını aşan getiriler vektörü ile kovaryans matrisinin çarpılması sonucu elde edilen risk primi süreci elde edilmektedir.

Tablo 4.33 Risk primi süreci

HİSSE SENEDİ	RİSK PRİMİ	HİSSE SENEDİ	RİSK PRİMİ
AKBNK	0,005807	ISCTR	-0,004616
AKGRT	0,002068	KCHOL	-0,008895
ARCLK	0,002718	MIGRS	0,000857
DOHOL	-0,001713	SAHOL	-0,000421
ENKAI	0,007672	SISE	-0,003907
EREGL	0,000987	TNSAS	-0,003149
FINBN	0,010476	TOASO	-0,008902
FROTO	0,004468	ULKER	0,009437
GARAN	0,001435	VESTL	-0,000991
HURGZ	0,002146	YKBNK	-0,003868

Tablo 4.34 Risksiz varlık ile günlük getirilere ilişkin kovaryans matrisi

	AKB	AKG	ARC	DOH	ENK	ERE	FIN	FRO	GAR	HUR	ISC	KCH	MIG	SAH	SIS	TNS	ULK	VES	YKB
AKB	0,0015	0,0011	0,0011	0,0013	0,0010	0,0011	0,0010	0,0010	0,0013	0,0011	0,0011	0,0011	0,0009	0,0011	0,0011	0,0009	0,0010	0,0008	0,0010
AKG	0,0011	0,0016	0,0011	0,0012	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0012	0,0011	0,0010	0,0011	0,0009	0,0011	0,0010	0,0009	0,0010	0,0008	0,0010
ARC	0,0011	0,0011	0,0018	0,0013	0,0010	0,0011	0,0010	0,0010	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0008	0,0011	0,0011	0,0009	0,0011	0,0009	0,0011
DOH	0,0013	0,0012	0,0013	0,0022	0,0011	0,0013	0,0013	0,0012	0,0015	0,0015	0,0013	0,0013	0,0010	0,0013	0,0013	0,0011	0,0013	0,0010	0,0013
ENK	0,0010	0,0010	0,0010	0,0011	0,0015	0,0010	0,0009	0,0009	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0009	0,0010	0,0010	0,0009	0,0010	0,0008	0,0010
ERE	0,0011	0,0010	0,0011	0,0013	0,0010	0,0016	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0008	0,0011	0,0011	0,0009	0,0011	0,0008	0,0010
FIN	0,0010	0,0010	0,0010	0,0013	0,0009	0,0010	0,0017	0,0010	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0008	0,0010	0,0011	0,0010	0,0010	0,0008	0,0010
FRO	0,0010	0,0010	0,0010	0,0012	0,0009	0,0010	0,0010	0,0016	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0008	0,0010	0,0010	0,0009	0,0012	0,0008	0,0010
GAR	0,0013	0,0012	0,0012	0,0015	0,0011	0,0011	0,0012	0,0011	0,0019	0,0013	0,0013	0,0012	0,0009	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0009	0,0012
HUR	0,0011	0,0011	0,0011	0,0015	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0013	0,0021	0,0011	0,0012	0,0009	0,0011	0,0011	0,0010	0,0011	0,0009	0,0012
ISC	0,0011	0,0010	0,0011	0,0013	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0013	0,0011	0,0017	0,0011	0,0009	0,0011	0,0011	0,0009	0,0011	0,0008	0,0010
KCH	0,0011	0,0011	0,0011	0,0013	0,0010	0,0011	0,0011	0,0010	0,0012	0,0012	0,0011	0,0016	0,0009	0,0012	0,0011	0,0009	0,0011	0,0008	0,0011
MIG	0,0009	0,0009	0,0008	0,0010	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0012	0,0009	0,0009	0,0008	0,0009	0,0007	0,0009
SAH	0,0011	0,0011	0,0011	0,0013	0,0010	0,0011	0,0010	0,0010	0,0012	0,0011	0,0011	0,0012	0,0009	0,0015	0,0011	0,0009	0,0011	0,0008	0,0011
SIS	0,0011	0,0010	0,0011	0,0013	0,0010	0,0011	0,0011	0,0010	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0009	0,0011	0,0017	0,0010	0,0011	0,0009	0,0011
TNS	0,0009	0,0009	0,0009	0,0011	0,0009	0,0009	0,0010	0,0009	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0009	0,0010	0,0018	0,0009	0,0008	0,0009
ULK	0,0010	0,0010	0,0011	0,0013	0,0010	0,0011	0,0010	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0009	0,0011	0,0011	0,0009	0,0018	0,0009	0,0010
VES	0.,0008	0,0008	0,0009	0,0010	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007	0,0008	0,0009	0,0008	0,0009	0,0016	0,0008
YKB	0,0010	0,0010	0,0011	0,0013	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0012	0,0012	0,0010	0,0011	0,0009	0,0011	0,0011	0,0009	0,0010	0,0008	0,0018

Risk primi süreci tablosunda görülen değerler, yatırımcının ilgili hisse senedinin bir birim riskine katlanması neticesinde elde edeceği getiri oranı olarak yorumlanabilir. Önceki bölümlerde yapılan yorumlar dikkate alındığında yine ENKAI, FINBN, MIGRS ve ULKER pozitif getirileri ile ön plana çıkmaktadır. Özellikle FINBN yatırımcısına katlanılan birim risk başına 0,010476 para birimlik getirisi ile en yüksek primi sunmaktadır. Sürekli zamanlı ortalama-varyans optimal portföyün seçiminde kullanılacak parametreler aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.35 Sürekli zamanlı optimal portföy stratejisinin hesaplanmasında kullanılacak parametreler

Parametreler	**Değerler**
Risksiz faiz oranı	0,000411
Zaman	0,002740
Hedeflenen getiri	0,000500
Rho	0,000560
Gamma	26,46380

Gerekli parametrelerin elde edilmesi ile birlikte optimal portföy stratejisi (3.71) bağıntısı kullanılarak aşağıda verilen biçimde belirlenebilir. Tabloda yer alan zaman parametresi bir günü temsil etmektedir. Bu değerde değişiklikler yapılarak anlık ortalama-varyans optimal portföylerin elde edilmesi mümkündür.

Bu bölümde aynı yatırım ufku için ele alınan portföy stratejileri, dönemsel ortalama-varyans optimal portföylere göre farklılık gösterebilir. Bu farklılığın temel nedeni, dönemsel hesaplamalarda paranın dönem içerisinde piyasalarda sadece bir defa değerlendirildiği varsayımı var iken, sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçiminde paranın piyasalarda sürekli değerlendirildiğinin varsayılmasıdır. Dolayısıyla zaman parametresi için kullanılacak değerler, sürekli bileşik faiz anlamında, mutlaka yıllık bazda kullanılmalıdır.

Tablo 4.36 Sürekli zamanlı ortalama-varyans optimal portföy

	t=0,00274	t=0,01923	t=0,0833	t=1
AKBNK	4,1134	6,7247	16.7222	40,4109
AKGRT	0,2537	0,4147	1.0313	2,4922
ARCLK	1,2179	1,9910	4.9509	11,9644
DOHOL	-0,3478	-0,5686	-1.4139	-3,4168
ENKAI	3,8357	6,2706	15.5930	37,6821
EREGL	0,5969	0,9758	2.4265	5,8639
FINBN	4,3763	7,1545	17.7909	42,9934
FROTO	2,2042	3,6034	8.9606	21,6543
GARAN	0,3757	0,6142	1.5274	3,6910
HURGZ	0,1749	0,2859	0.7108	1,7178
ISCTR	-2,8319	-4,6296	-11.5122	-27,8205
KCHOL	-5,9204	-9,6787	-24.0679	-58,1624
MIGRS	0,3673	0,6005	1.4932	3,6084
SAHOL	0,4133	0,6757	1.6802	4,0603
SISE	-2,1483	-3,5120	-8.7333	-21,1048
TNSAS	-1,5645	-2,5577	-6.3603	-15,3702
TOASO	-3,8035	-6,2181	-15.4624	-37,3664
ULKER	2,6281	4,2965	10.6840	25,8188
VESTL	-0,6888	-1,1261	-2.8002	-6,7670
YKBNK	-1,7097	-2,7951	-6.9504	-16,7964

Tablo 4.36 ile portföy seçimi sürekli zamanlı hale dönüştürülmüş olur. Yatırım ufku bir sene olan bir yatırımcının, bu bir senelik periyot içerisinde herhangi bir anda gerçekleştirmesi gereken yatırım stratejisi zaman parametresi yerine gerekli değerin yazılması ile elde edilebilir.

Tablo 4.36 incelendiğinde, önceki hesaplamalar ile benzer sonuçlar karşımıza çıkmaktadır. t=0,00274 değeri ile birinci gün sonundaki optimal portföy, t=0,01923 ile birinci hafta sonundaki optimal portföy, t=0,0833 ile birinci ay sonundaki optimal portföy, ve t=1 değeri ile yatırımcının bir yıl sonra uygulaması gereken portföy stratejisi belirtilmektedir. Yine dört perspektifte de FINBN en yüksek yatırımın

yapıldığı hisse senedi olurken, FINBN hisse senedini sırasıyla AKBNK, ENKAI ve ULKER takip etmektedir. Bununla birlikte birinci yıl sonunda ortaya çıkan yatırım stratejisini gerçekleştirebilmek için bankadan 14,15283 para birimi miktarında varlığın borçlanılması gerekirken bu miktar, birinci haftanın sonunda 3,52156 ve birinci günün sonunda 0,54241 olarak gerçekleşmektedir.

Böylelikle durağan portföy seçimi probleminin sürekli zamanlı hale dönüşümü uygulamada tamamlanmaktadır. Her ne kadar teoride anlık portföyler oluşturulması, özellikle de portföy ağırlıklarının anlık olarak değiştirilmesi, çeşitli varsayımlar dahilinde mümkün olsa da, işlem maliyetleri gözönünde bulundurulduğunda pratikte mümkün değildir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, Markowitz durağan portföy seçim modelinin eksik yönlerinin giderilebilmesi amacıyla, yatırım dünyasının dinamik doğasını modelleyebilecek, yatırım kararlarını dinamik hale dönüştürecek çok dönemli ve sürekli zamanlı modeller göz önüne alınarak, bu modellerin uygulamada getirdiği faydalar araştırılmaktadır. Özellikle ülkemizde de Ocak 2005 itibariyle Vadeli İşlem ve Opsiyon Piyasası'nın faaliyete geçmesi ile birlikte, portföy ağırlıklarının zaman içerisinde değişerek, portföy seçiminin dinamik hale dönüştürülmesi büyük önem kazanmaktadır. Spot ve vadeli işlem piyasaları arasındaki ilişkiler kullanılarak, riskten korunma amacıyla oluşturulan portföylerin zaman içerisinde yeniden dengelenme koşulu, dinamik portföy seçimi için bir itici güç olmaktadır. Çalışmanın gerçekleştirilmesindeki esas amaç dinamik modellerin beklenen getiri ve risk parametrelerine etkisi olduğundan, ele alınan modeller ile hesaplanan beklenen getiri ve risk parametreleri, klasik Markowitz portföy seçimi modeli ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmaktadır.

Ayrıca çok dönemli ve sürekli zamanlı portföy seçim modelleri ile İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Ulusal 30 Endeksi verileri kullanılarak dönemsel ve anlık optimal portföyler elde edilmektedir. Dönemsel ve anlık portföylere ait beklenen getiri ve risk parametreleri, klasik Markowitz teorisi ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak incelenmekte ve dinamik yöntemlerin bu parametrelere etkisi sorgulanmaktadır. Aşağıda tezin bölümleri hakkında özet bilgiler sunulmaktadır.

Birinci bölümde Markowitz tarafından temelleri atılan Modern Portföy Teorisi incelenmektedir. Markowitz modelinin tek periyotlu bir yatırım sürecini göz önüne aldığı vurgulanarak, ilgili periyot için optimal yatırım stratejisi belirlendikten sonra, dönem sonuna kadar portföy ağırlıklarında hiçbir değişiklikte bulunulmadığı ve modelin en büyük eksikliğinin bu statik yapı olduğu belirtilmektedir.

İkinci bölümde, durağan portföy teorisinin eksikliklerinin giderilebilmesi amacıyla, yatırım kararlarını dinamik hale dönüştürmeye olanak sağlayan, çok dönemli ortalama-varyans portföy seçim modeli incelenmektedir. Konu üzerine yapılan çeşitli çalışmalar sıralanarak, bu çalışmalarda göz önüne alınan teknikler

incelenmiştir. Dönemsel optimal portföylerin ve etkinsınırın analitik olarak çözümüne olanak tanıyan Li ve Ng tarafından geliştirilen model üzerine odaklanılarak, dönemsel optimal yatırım stratejileri yine bu bölümde küçük bir örnek üzerinde elde edilmiştir. Yatırım alternatifleri arasına risksiz varlık eklenerek, açığa satışa bir alternatif olarak risksiz faiz oranı üzerinden borçlanma durumu yine bu bölümde açıklanmaktadır. Böylelikle yatırımcı, gözönüne aldığı dönem için optimal yatırım kararını elde ederken, aynı zamanda gelecek dönemler için de elindeki varlığı yatırım araçları arasında ne şekilde ayırması gerektiğine karar verebilmektedir. Optimal portföylerin elde edilmesinde dinamik programlama tekniğinden faydalanılmıştır.

Çok dönemli ortalama-varyans portföy seçiminin ele alındığı ikinci bölümde belirli bir zaman periyodunun sonlu sayıda eşit periyoda ayrılması durumu söz konusudur. Bu durumda portföy dengeleme işlemi, günlük, haftalık veya aylık olarak gerçekleştirilebilmektedir. Bir günden daha az bir zaman periyodunda Portföy ağırlıklarının değiştirilmesine olanak sağlayabilmek için belirli bir zaman periyodundaki dönem sayısının sınırsız arttırılması gerekmektedir. Sürekli zamanlı ortalama-varyans portföy seçim modeli olarak adlandırılılan bu model, bir stokastik optimal kontrol problemi olup, üçüncü bölümde incelenmiştir. Böylelikle, anlık optimal portföylerin elde edilerek, portföy ağırlıkları sürekli olarak gözden geçirilebilmekte, bunun yanında, risk ve beklenen getiri parametreleri anlık olarak gözlenebilmektedir.

Araştırmanın uygulamasının gerçekleştirildiği dördüncü bölümde ise İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Ulusal-30 endeksi verileri kullanılarak durağan ve dinamik portföy seçimi uygulamaları detaylı bir biçimde gerçekleştirilmiştir. Ulusal-30 endeksine dahil olan hisse senetleri zaman içerisinde değişiklik gösterdiğinden, çalışma kapsamında 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arasında Ulusal30 endeksinde yer alan 22 adet hisse senedi gözönüne alınmıştır. Varsayımlara uygunluğu kuvvetlendirebilmek amacıyla, çalışma kapsamında, homojenlik oranı %75 olarak kabul edilmiştir. Bu kısıtlamalar altında THYAO ve TUPRS hisse senetleri listeden çıkartılarak, menkul kıymet sayısı 20 olmaktadır.Öncelikle, 05.01.1998-01.06.2005 tarihleri arasında yer alan 379 adet haftalık ve 90 adet aylık kapanış verisi kullanılarak Markowitz modeli ile optimal portföyün seçimi gerçekleştirilmiştir. Her

iki durumda da portföyün büyük bir kısmı MIGRS, ULKER, ENKAI ve FINBN hisse senetlerinden oluştuğu görülmüştür. Hisse senetlerine ait risk-getiri haritası incelendiğinde, adı geçen hisse senetlerinden ULKER, FINBN ve ENKAI en yüksek getiriye sahip hisse senetleri oldukları görülmüştür. Markowitz modeli ile haftalık kapanış fiyatları gözönüne alınarak oluşturulan portföyün haftalık beklenen getirisi %0,7840 olarak hesaplanırken portföy riski %6,7092 olarak elde edilmiştir. Bunun yanında, aylık kapanış fiyatları göz önüne alınarak oluşturulan portföyün aylık beklenen getirisi %3,3472 olarak elde edilirken portföy riski %16,2352 olarak hesaplanmıştır.

Bir sonraki adımda, dinamik portföy modelleri ile karşılaştırma yapabilmek amacıyla, hisse senetlerinden oluşan portföye risksiz varlık da eklenerek optimal portföyler elde edilmiştir. Haftalık kapanış fiyatları gözönüne alınarak Markowitz modeli ile oluşturulan portföyün haftalık beklenen getirisi %0,7914 olarak hesaplanırken, portföy riski %6,7016 olarak elde edilmiştir. Bunun yanında, aylık kapanış fiyatları göz önüne alınarak oluşturulan portföyün aylık beklenen getirisi %3,3607 olarak elde edilirken, portföy riski %16,2216 olarak hesaplanmıştır. Haftalık getiriler ile oluşturulan portföy stratejisinde, portföy ağırlıklı olarak ULKER hisse senedinden oluşmakta iken, aylık getiriler ile oluşturulan portföyün %65,51'i ENKAI ve ULKER hisse senetlerinden oluştuğu görülmüştür. Bununla birlikte, haftalık getiriler ile hesaplanan optimal portföyün %11,78'inin ve aylık getiriler ile hesaplanan optimal portföyün %5,24'ünün risksiz varlıkta değerlendirildiği görülmüştür.

Durağan portföy seçim teknikleri ile optimal portföylerin elde edilmesi ile birlikte çok dönemli ve sürekli zamanlı optimal yatırım stratejileri belirlenerek her iki alternatif için beklenen getiri ve risk parametreleri karşılaştırılmıştır. Tümü riskli varlıklardan oluşan çok dönemli portföy seçiminde, Markowitz modelinde seçilen MIGRS, ULKER, ENKAI ve FINBN hisse senetlerine ek olarak ARCLK, SAHOL ve FROTO senetlerine de yine büyük miktarda yatırım yapılmıştır. KCHOL, ISCTR ve DOHOL gibi hisse senetlerinin ise açığa satışı gerçekleştirilerek yukarıda adı geçen hisse senetlerine yatırım gerçekleştirilmektedir.

Haftalık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi 15,0553 olarak hesaplanırken, portföy riski 6,5182

olarak elde edilmiştir. Elde edilen risk değeri, Markowitz modeli ile hesaplanan risk değerine oldukça yakın iken yatırımcının başlangıçta sahip olduğu 1 para birimi varlığın, on dönemin sonunda 15,0553 para birimine ulaştığı görülmüştür. İşlem maliyetlerinin çıkartılması ile birlikte bu miktarda azalma olacağı açıktır ancak yine de Markowitz modelinden daha yüksek bir getiri elde edilmiştir. Benzer kıyaslama aylık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinde de yapılmış ve beklenen getirinin 67,08272 olarak gerçekleşirken riskin 16,06953 seviyesinde gerçekleştiği görülmüştür.

Yatırım araçları arasına risksiz varlığın eklenmesi halinde de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Haftalık kapanış fiyatları üzerinden hesaplanan çok dönemli optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi 1,079304 olarak hesaplanırken, portföy riski 0,111893 olarak elde edilmiştir. Benzer hesaplamalar ile aylık kapanış fiyatları üzerinden elde edilen çok dönemli optimal portföy stratejisinin beklenen getirisi 1,393239 olarak gerçekleşirken, portföy riski 0,255425 olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu sonuç da yine portföy seçiminin dinamik hale getirilmesinin beklenen getiri ve risk parametrelerinde olumlu değişiklikler doğurduğu savını kanıtlamaktadır.

Sürekli zamanlı optimal portföylerin elde edilme aşamasında ise getiriler, günlük kapanış fiyatlarından yola çıkılarak elde edilmiştir. t=0,00274 değeri ile birinci gün sonundaki optimal portföy, t=0,01923 ile birinci hafta sonundaki optimal portföy, t=0,0833 ile birinci ay sonundaki optimal portföy, ve t=1 değeri ile yatırımcının bir yıl sonra uygulaması gereken portföy stratejisi elde edilmiştir. Yine dört perspektifte de yatırımın büyük bir bölümünün FINBN, AKBNK, ENKAI ve ULKER hisse senetlerine yapıldığı görülmüştür. Elde edilen sonuçların Markowitz modeli ile benzerliği dikkat çekicidir.

Bu sonuçlarla birlikte, portföy seçiminin dinamik hale getirilmesinin beklenen getiri ve risk parametrelerinde olumlu değişiklikler doğurduğu savı kanıtlanmıştır. Ancak daha gerçekçi bir uygulamanın yapılabilmesi için işlem maliyetlerini de göz önüne alan bir modelin inşaası zorunludur.

KAYNAKÇA

Akgüç Öztin, (2000), **Finansal Yönetim,** Avcıol Basım-Yayın, İstanbul

Altay Erdinç, (2004), **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri**, Derin Yayınları:40, İstanbul

Baxter M., Rennie A., (2003), **Financial Calculus:An Introduction to Derivative Pricing,** Cambridge University Pres, United Kingdom

Best M.J. ve Hlouskova J., (2003), "Portfolio Selection with Transaction Costs", **Computational Optimization and Applications,** Vol:24, ss.95-116

Best M.J. ve Hlouskova J., (2000), "The Efficient Frontier for Bounded Assets", **Mathematical Methods of Operations Research,** Vol:52, ss.195-212

Black F., Scholes M., (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", **Journal of Political Economy**, Vol: 81, ss.637-654

Campbell John ve Viceira Luis, (2002), **Strategic Asset Allocation,** Oxford University Press

Capinski Marek ve Zastawniak Tomasz, (2003), **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**, Springer-Verlag Ltd., USA

Cerny Ales, (2004), **Mathematical Techniques in Finance,** Princeton University Press, USA

Chiang Alpha C., (1992), **Elements of Dynamic Optimization,** McGraw Hill Inc., Singapore

Cox J., Ross S. & Rubinstein M., (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", **Journal of Financial Economics**, Vol: 7, ss.229-264

Crespo Luis G. ve Sun Jian-Qiao, (2003), "Stochastic Optimal Control via Bellman's Principle", **Automatica,** Vol:39-12, ss.2109-2114

Das Satyajit, (1997), **Risk Management and Financial Derivatives: A Guide to Mathematics,** Mac Millan Press Ltd., London

Dumas B. ve Luciano E., (1991), "An Exact Solution to Dynamic Portfolio Choice under Transaction Costs" , **Journal of Finance** , Vol:46 No.2 , ss. 577-595

Eichberger Jürgen ve Harper Ian R., (1997), **Financial Economics**, Oxford University Press, NewYork

Elton Edwin J. ve Gruber Martin J., (2003), **Modern Portfolio Theory and Investment Analysis,** John Wiley& Sons,Inc., USA

Elton E. J. ve Gruber M. J., (1974), "On the Optimality of Some Multiperiod Portfolio Selection Criteria" , **Journal of Business,** Vol:47 No. 2, ss.231-243

Fernholz E. Robert, (2002), **Stochastic Portfolio Theory,** Springer-Verlag New York Inc., USA

Fleming Wendell H. Ve Rishel Raymond W., (1975), **Deterministic and Stochastic Optimal Control,** Springer-Verlag New York Inc., USA

Gourieroux Christian, (1997), **ARCH Models and Financial Applications,** Springer-Verlag New York Inc., USA

Gujarati D.N., (1995), **Basic Econometrics,** Third Edition, McGraw-Hill Inc., New-York

Hakansson N.H., (1971), "Multiperiod Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice", **Journal of Finance,** Vol:26 No.4 , ss. 857-884

Halaç Osman, (1995), **Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması)**, Alfa Basım Yayım Dağıtım

Hull John C., (2003), **Options, Futures and Other Derivatives Fifth Edition,** Prentice Hall, USA

Jarrow Robert A., (1988), **Finance Theory,** Prentice-Hall International Inc., USA

Jen A., F. ve Zionts S., (1971), "The Optimal Portfolio Revision Policy" , **Journal of Business** , Vol:44 No.1, ss. 51-61

Karatzas Ioannis ve Shreve Steven E., (1998), **Methods of Mathematical Finance,** Springer-Verlag New York Inc., USA

Korn R. Korn E., (2001) **Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics**, Graduate Studies in Mathematics Vol 31, American Mathematical Society, USA

Korn Ralf, (1999), **Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time,** World Scientific Press, Singapore

Kroll Y., Levy H. Ve Markowitz H., (1984), "Mean-Variance versus Direct Utility Maximization", **Journal of Finance,** Vol:39 , ss.47-61

Lamberton D. ve Lapeyre B., (2000), **Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance ,** Chapman &Hall /CRC, USA

Li Duan, Chan T. F. ve Ng W.L., (1998), "Safety-first dynamic portfolio selection" , **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,** Vol: 4 , ss.585-600

Li Duan ve Ng Wan-Lung, (2000), "Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-Variance Formulation", **Mathematical Finance,** Vol:10 No.3, ss.387-406

Lim Andrew E. B. ve Zhou Xun Yu, (2002), "Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market", **Mathematics of Operations Research,** Vol:21 No:1,ss.101-120

Markowitz Harry, (1952), "Portfolio Selection", **Journal of Finance**, Vol.7, ss.77-91

Markowitz Harry, (1991), **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments,** John Wiley & Sons,Inc., USA

Merton Robert C., (1969), "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case", **Reviews of Economical Statististics ,** Vol:51 , ss.247-257

Merton R.C., (1973), "Theory of Rational Option Pricing", **Bell Journal of Economics and Management**, Vol: 4, ss. 141-183

Merton Robert C., (1998), **Continuous-Time Finance,** Blackwell Publishers Inc., USA

Mikosch Thomas, (2000), **Elementary Stochastic Calculus with Finance in View**, World Scientific Publishing Co.,USA

Mills Terence M., (1997), **The econometric modelling of financial time series,** 2nd edition, Cambridge University Press, Great Britain

Milne Frank, (2003), **Finance Theory and Asset Pricing,** Oxford University Press, New York

Mossin J., (1968), "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", **Journal of Business,** Vol: 41 No.2, ss. 215-229

Neftçi Salih N., (1996), **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives,** Academic Press, USA

Oberuc Richard, (2004), **Dynamic Portfolio Theory and Management,** Mc Graw Hill, USA

Orhunbilge Neyran, (1999), **Zaman Serileri Analizi Tahmin ve Fiyat Endeksleri,** İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, İstanbul

Orhunbilge Neyran, (2002), **Uygulamalı Regresyon ve Korelasyon Analizi,** 2.baskı, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, İstanbul

Önalan Ömer, (2004), **Finans Mühendisliğinde Matematiksel Modelleme,** Avcıol Basım Yayın, İstanbul

Özdemir Erhan, (1983), "Nonlineer Programlama Çözüm Yöntemleri ve Portföy Seçimi Problemlerine Uygulanması", İ.Ü. İşletme Fakültesi (Yayınlanmamış) Doktora Tezi, İstanbul

Pedron Nieves Hicks, (1998), **Model-Based Asset Liability Management: A Comparative Study,** Cambridge Üniversitesi, Doktora Tezi

Reid R.W. ve Citron S.J., (1971), "On Non-inferior Performance Index Vector" , **Journal of Optimization Theory and Applications**, Vol:7 , ss. 11-28

Ross Sheldon, (1996), **Stochastic Processes,** John Wiley& Sons,Inc. ,Canada

Sadjadi S. J., Aryanezhad M. B. ve Moghaddam B. F., (2004), "A dynamic programming approach to solve efficient frontier ", **Mathematical Methods of Operations Research,** Vol:60, ss.203-214

Samuelson P.A., (1969), "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", **The Review of Economics and Statistics,** Vol: 41 No.3, ss. 239-246

Sarıkamış Cevat, (2000), **Sermaye Pazarları**, Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul

Sengupta Jati K. ve Fanchon Phillip, (1997), **Control Theory Methods in Economics,** Kluver Academic Publishers, USA

Simonovits Andras, (2000), **Mathematical Methods in Dynamic Economics,** Macmillan Press Ltd., London

Taha Hamdy A., (1997), **Operations Research An Introduction,** Macmillan Publishin Co. Inc., USA

Teall John L. ve Hasan Iftekhar, (2002), **Quantitative Methods for Finance and Investments,** Blackwell Publishing Ltd, UK

Tulunay Yılmaz, (1991), **Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları,** 3.baskı, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayınları, İstanbul

Weston J. Fred ve Brigham Eugene F., (1975), **Managerial Finance,** Dryden Press, Great Britain

Wilmott Paul, (2000), **Paul Wilmott on Quantitative Finance Vol. I,** John Wiley & Sons Ltd., USA, 2000

Wismer David A. ve Chattergy R., (1978), **Introduction to Nonlinear Optimization:A Problem Solving Approach,** Elsevier North-Holand Inc., New York

Yao David D., Zhang Hangin ve Zhou X. Y., (2003), **Stochastic Modelling and Optimization with Applications in Queues, Finance and Chain,** Springer-Verlag Inc., USA

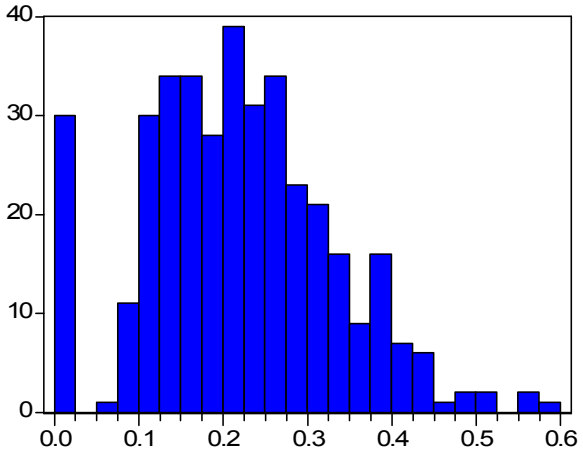
Zhou X.Y. ve Li Duan, (2000), "Continuous-Time Mean-Variance Portfolio Selection: A Stochastic LQ Framework", **Applied Mathematical Optimization,** Vol:42, ss.19-33

Zhou X.Y. ve Li Duan, (1999), "Explicit efficient frontier of a Continuous-Time Mean Variance Portfolio Selection Problem", **Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems**, Boston: Kluver, ss.323-330

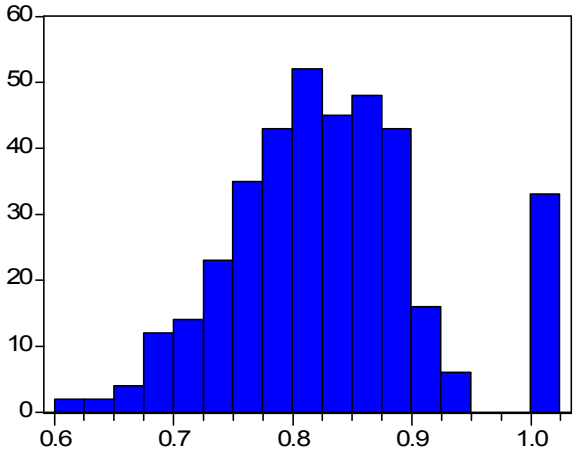
EKLER

Ek-1: Menkul kıymet getirilerine ilişkin histogram grafikleri

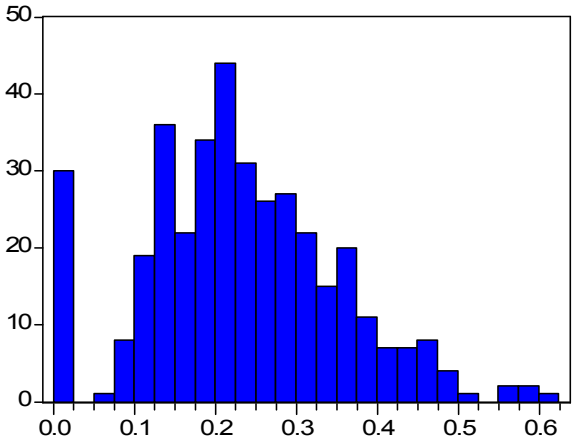
Haftalık Getiriler



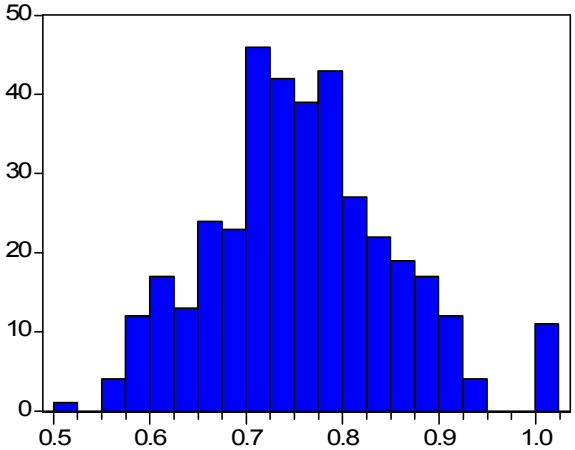
Series: D_AKBNK	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.217457
Median	0.213426
Maximum	0.580065
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.113780
Skewness	0.236890
Kurtosis	3.183688
Jarque-Bera	4.066776
Probability	0.130891



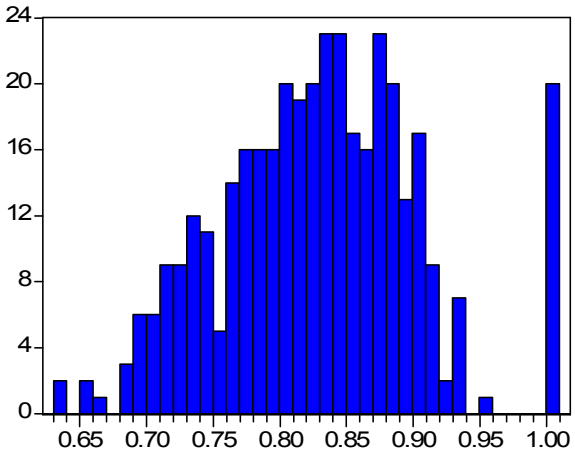
Series: D_AKGRT	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.829324
Median	0.825608
Maximum	1.000000
Minimum	0.603741
Std. Dev.	0.081145
Skewness	0.229670
Kurtosis	3.082954
Jarque-Bera	3.431519
Probability	0.179827



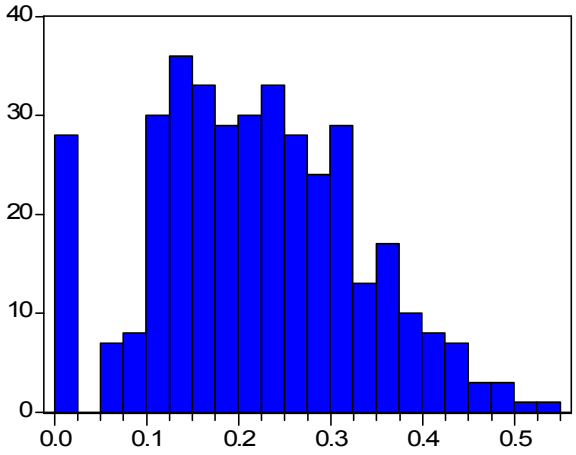
Series: D_ARCLK	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.231518
Median	0.220865
Maximum	0.613232
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.121168
Skewness	0.227408
Kurtosis	3.177320
Jarque-Bera	3.753221
Probability	0.153108



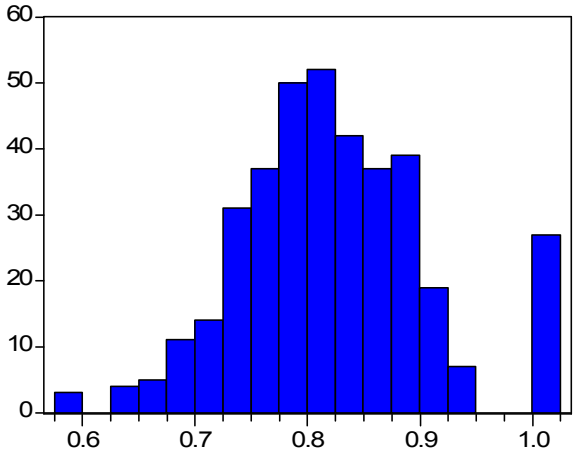
Series: D_DOHOL	
Sample 4 379	
Observations 376	
Mean	0.758160
Median	0.753429
Maximum	1.000000
Minimum	0.510926
Std. Dev.	0.094538
Skewness	0.248392
Kurtosis	2.965098
Jarque-Bera	3.885541
Probability	0.143306



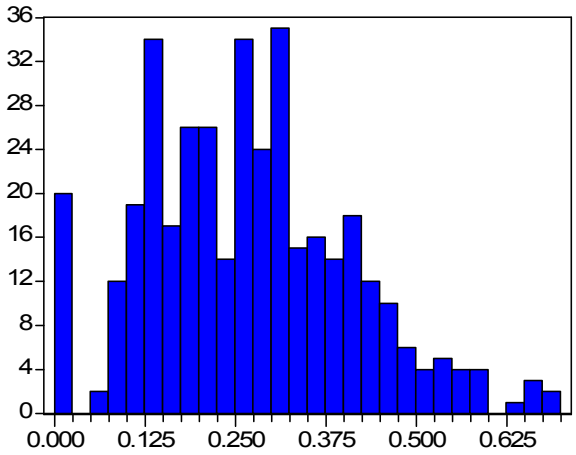
Series: D_ENKAI	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.828980
Median	0.830469
Maximum	1.000000
Minimum	0.632883
Std. Dev.	0.074438
Skewness	0.134157
Kurtosis	3.015763
Jarque-Bera	1.137791
Probability	0.566150



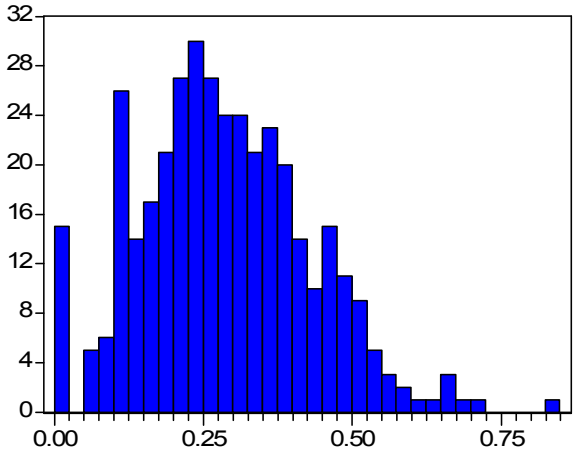
Series: D_EREGL	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.218251
Median	0.212989
Maximum	0.531256
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.112786
Skewness	0.109099
Kurtosis	2.736296
Jarque-Bera	1.845118
Probability	0.397501



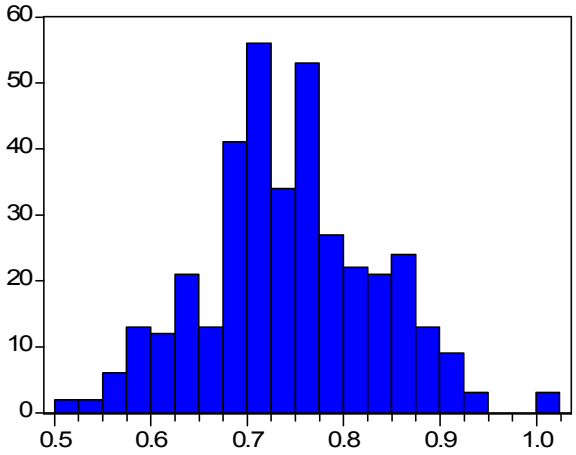
Series: D_FINBN	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.821624
Median	0.820463
Maximum	1.000000
Minimum	0.578561
Std. Dev.	0.081700
Skewness	0.176857
Kurtosis	3.245250
Jarque-Bera	2.917859
Probability	0.232485



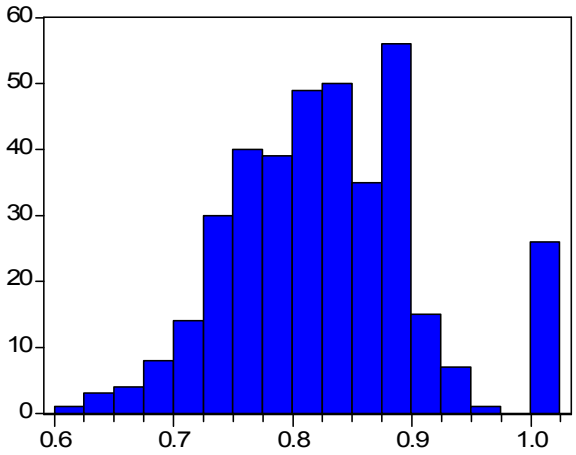
Series: D_FROTO	
Sample 3 379	
Observations 377	
Mean	0.268726
Median	0.266369
Maximum	0.696784
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.141886
Skewness	0.373807
Kurtosis	3.032162
Jarque-Bera	8.796060
Probability	0.012302



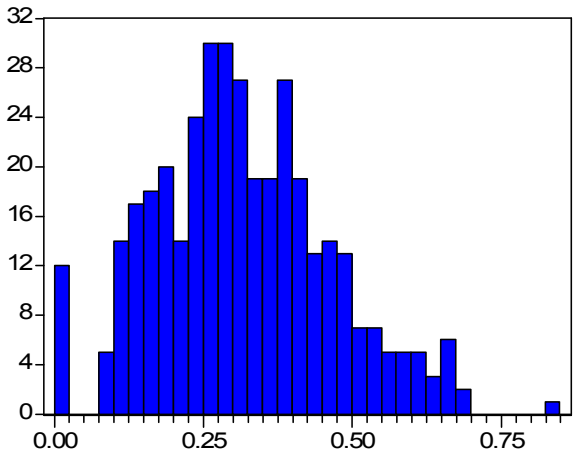
Series: D_GARAN	
Sample 3 379	
Observations 377	
Mean	0.286794
Median	0.276353
Maximum	0.832555
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.143310
Skewness	0.343945
Kurtosis	3.207417
Jarque-Bera	8.108877
Probability	0.017345



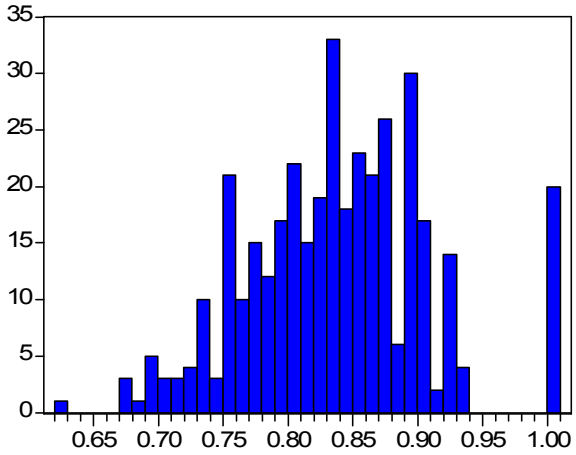
Series: D_HURGZ	
Sample 5 379	
Observations 375	
Mean	0.744051
Median	0.744493
Maximum	1.000000
Minimum	0.520066
Std. Dev.	0.087956
Skewness	0.092638
Kurtosis	2.908374
Jarque-Bera	0.667541
Probability	0.716218



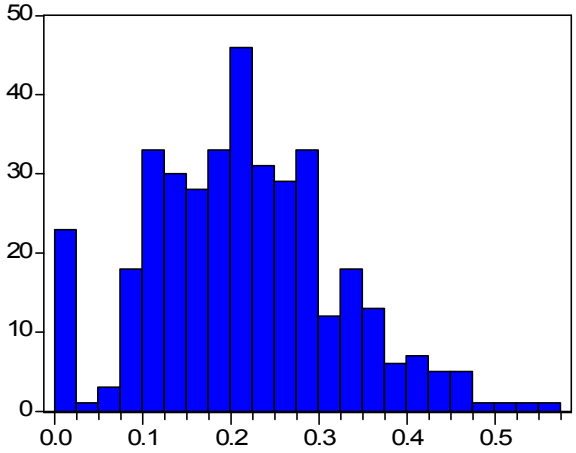
Series: D_ISCTR	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.827520
Median	0.825116
Maximum	1.000000
Minimum	0.604389
Std. Dev.	0.078119
Skewness	0.226458
Kurtosis	3.077567
Jarque-Bera	3.325620
Probability	0.189605



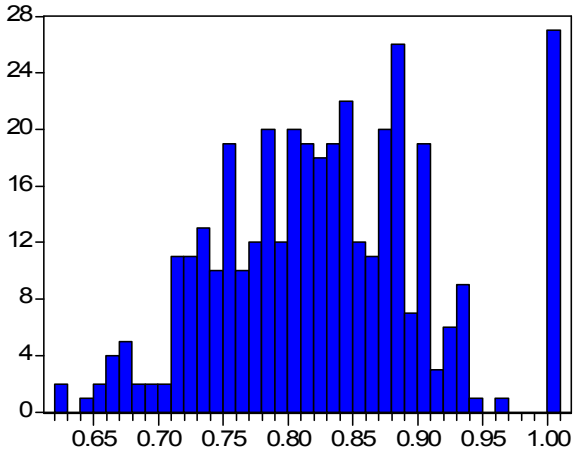
Series: D_KCHOL	
Sample 4 379	
Observations 376	
Mean	0.315856
Median	0.305554
Maximum	0.832555
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.148626
Skewness	0.300154
Kurtosis	3.033107
Jarque-Bera	5.662983
Probability	0.058925



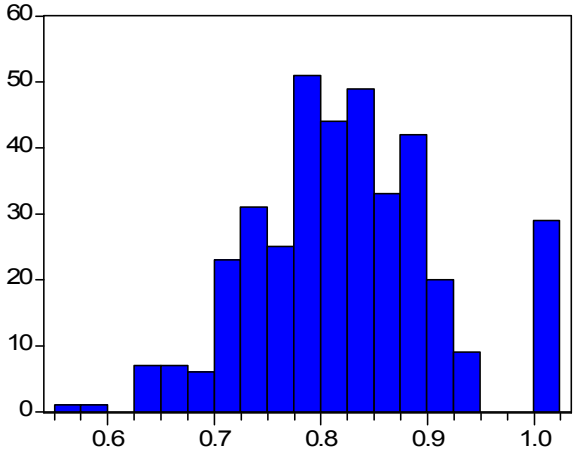
Series: D_MIGRS	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.837669
Median	0.838183
Maximum	1.000000
Minimum	0.627206
Std. Dev.	0.069228
Skewness	0.147770
Kurtosis	3.195880
Jarque-Bera	1.979987
Probability	0.371579



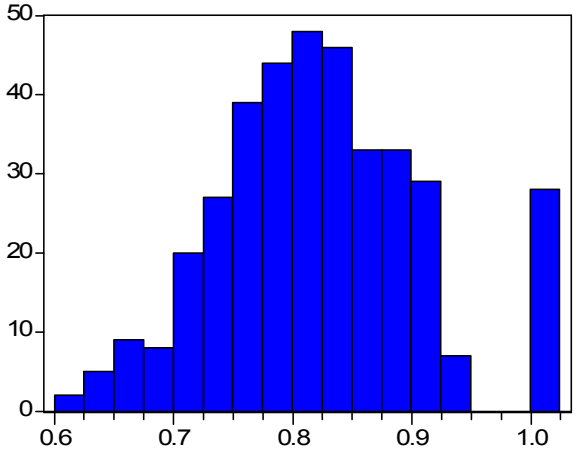
Series: D_SAHOL	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.214142
Median	0.211234
Maximum	0.573857
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.107219
Skewness	0.244746
Kurtosis	3.212562
Jarque-Bera	4.485361
Probability	0.106174



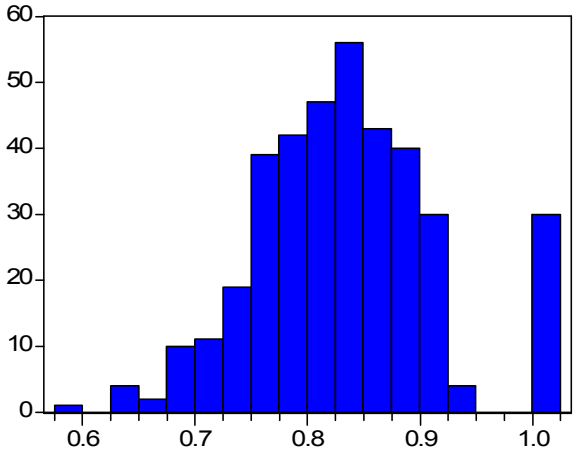
Series: D_SISE	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.828087
Median	0.824525
Maximum	1.000000
Minimum	0.622915
Std. Dev.	0.081550
Skewness	0.176868
Kurtosis	2.800306
Jarque-Bera	2.598855
Probability	0.272688



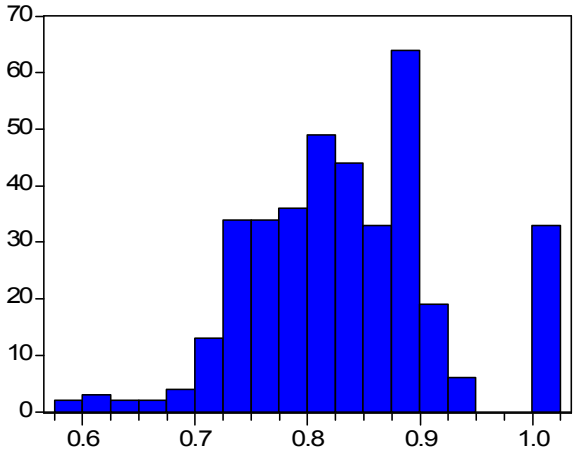
Series: D_TNSAS	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.822563
Median	0.822706
Maximum	1.000000
Minimum	0.563517
Std. Dev.	0.084890
Skewness	0.109226
Kurtosis	3.066753
Jarque-Bera	0.821790
Probability	0.663057



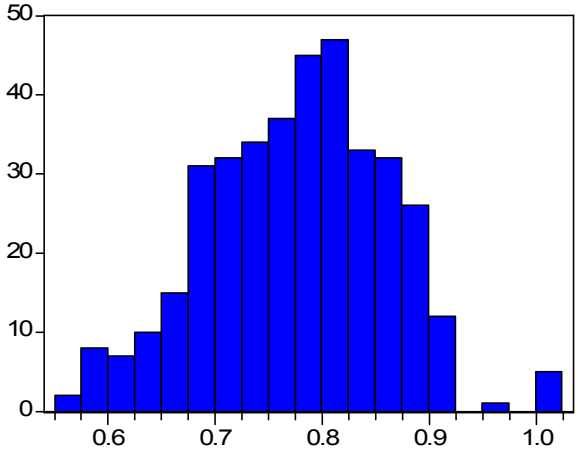
Series: D_TOASO	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.821591
Median	0.819073
Maximum	1.000000
Minimum	0.605404
Std. Dev.	0.083451
Skewness	0.220759
Kurtosis	2.929762
Jarque-Bera	3.147964
Probability	0.207218



Series: D_ULKER	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.832492
Median	0.829008
Maximum	1.000000
Minimum	0.584193
Std. Dev.	0.078418
Skewness	0.170355
Kurtosis	3.204054
Jarque-Bera	2.484116
Probability	0.288789

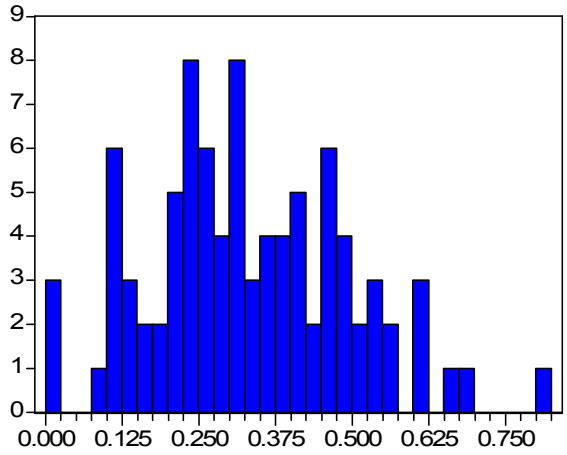


Series: D_VESTL	
Sample 2 379	
Observations 378	
Mean	0.832376
Median	0.830223
Maximum	1.000000
Minimum	0.592569
Std. Dev.	0.081990
Skewness	0.096816
Kurtosis	3.177410
Jarque-Bera	1.086233
Probability	0.580935

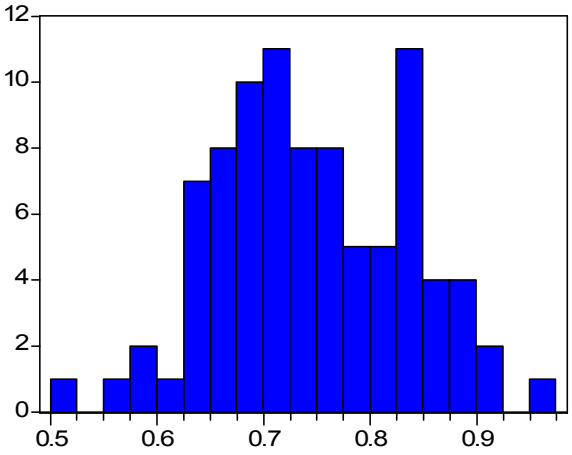


Series: D_YKBNK	
Sample 3 379	
Observations 377	
Mean	0.776215
Median	0.781729
Maximum	1.000000
Minimum	0.564597
Std. Dev.	0.083397
Skewness	-0.107741
Kurtosis	2.800236
Jarque-Bera	1.356235
Probability	0.507572

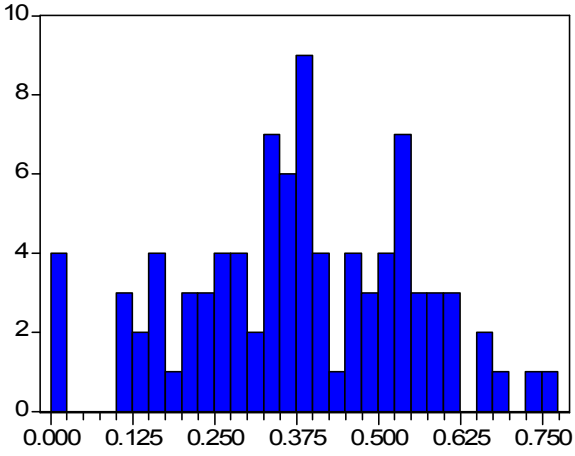
Aylık Getiriler



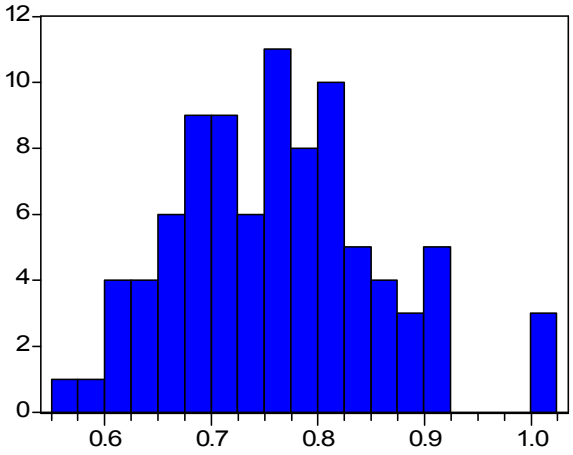
Series: D_AKBNK	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.330974
Median	0.319856
Maximum	0.817592
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.164132
Skewness	0.304163
Kurtosis	2.924963
Jarque-Bera	1.393187
Probability	0.498280



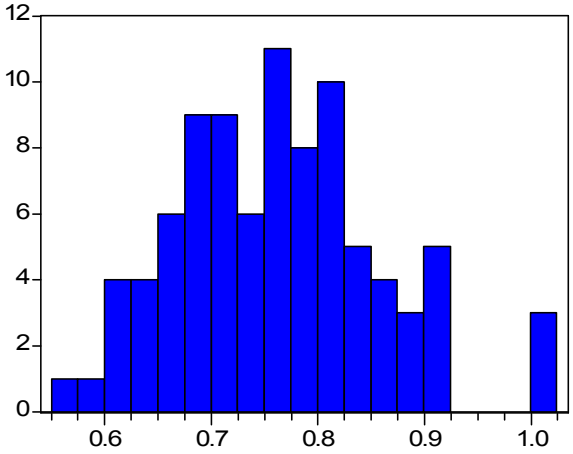
Series: D_AKGRT	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.746449
Median	0.739218
Maximum	0.966060
Minimum	0.510925
Std. Dev.	0.088839
Skewness	0.052924
Kurtosis	2.566493
Jarque-Bera	0.738449
Probability	0.691270



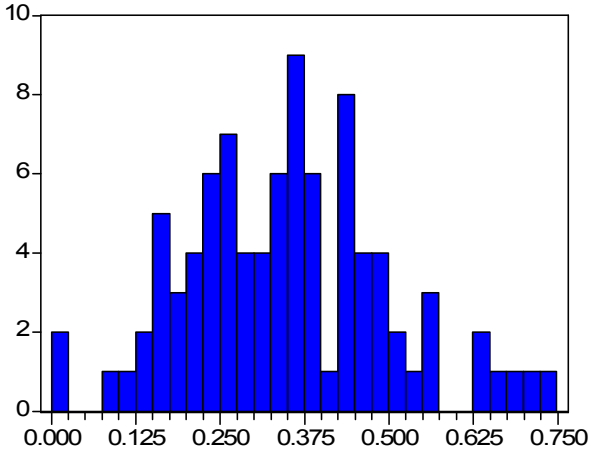
Series: D_ARCLK	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.378435
Median	0.378292
Maximum	0.755356
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.171728
Skewness	-0.166065
Kurtosis	2.649472
Jarque-Bera	0.864710
Probability	0.648979



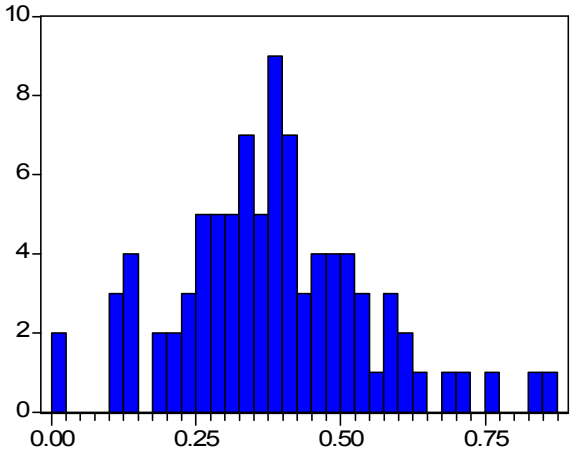
Series: D_DOHOL	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.762677
Median	0.757659
Maximum	1.000000
Minimum	0.550179
Std. Dev.	0.094295
Skewness	0.344188
Kurtosis	2.905155
Jarque-Bera	1.790592
Probability	0.408487



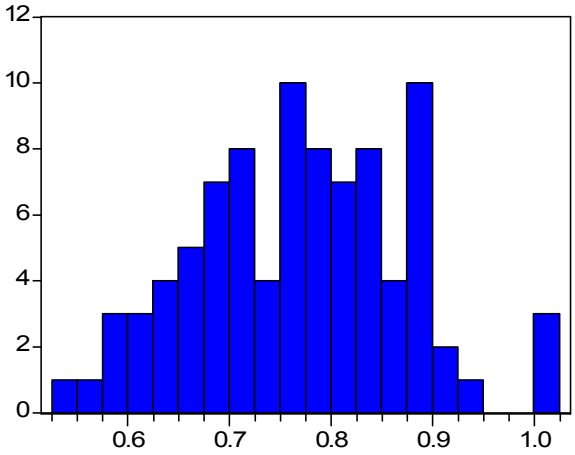
Series: D_ENKAI	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.762677
Median	0.757659
Maximum	1.000000
Minimum	0.550179
Std. Dev.	0.094295
Skewness	0.344188
Kurtosis	2.905155
Jarque-Bera	1.790592
Probability	0.408487



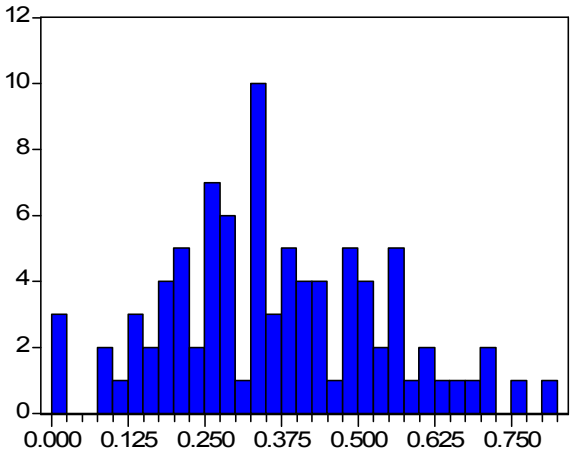
Series: D_EREGL	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.347857
Median	0.346130
Maximum	0.730568
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.151153
Skewness	0.292063
Kurtosis	3.038052
Jarque-Bera	1.270661
Probability	0.529760



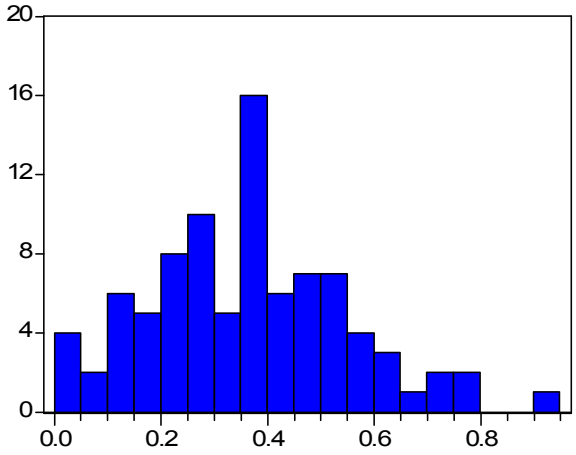
Series: D_FINBN	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.382999
Median	0.377699
Maximum	0.852676
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.166733
Skewness	0.296617
Kurtosis	3.443776
Jarque-Bera	2.035369
Probability	0.361431



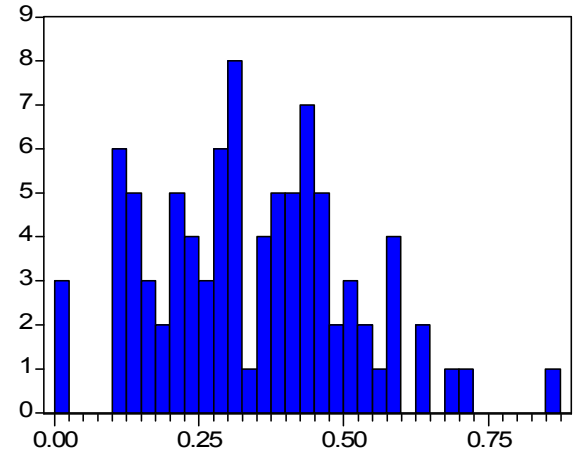
Series: D_FROTO	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.770081
Median	0.772216
Maximum	1.000000
Minimum	0.541974
Std. Dev.	0.101958
Skewness	-0.031847
Kurtosis	2.551287
Jarque-Bera	0.761692
Probability	0.683283



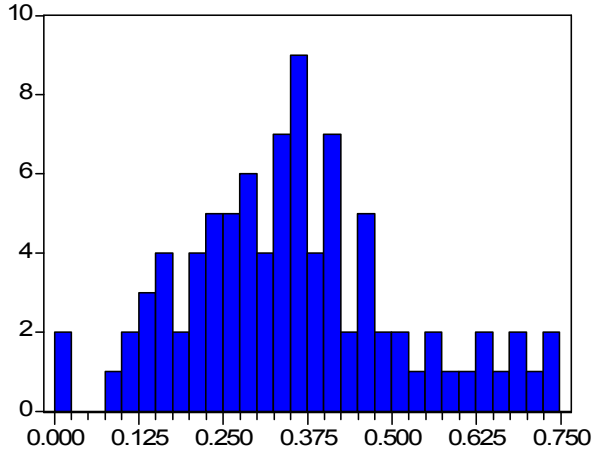
Series: D_GARAN	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.366052
Median	0.344119
Maximum	0.812289
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.177311
Skewness	0.227736
Kurtosis	2.706192
Jarque-Bera	1.089428
Probability	0.580008



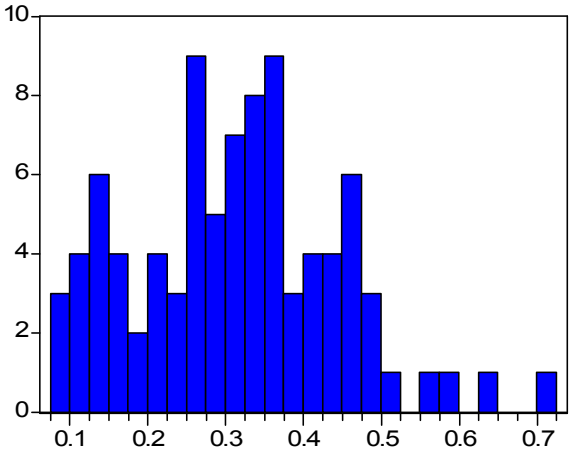
Series: D_HURGZ	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.361153
Median	0.365414
Maximum	0.941015
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.190920
Skewness	0.347550
Kurtosis	3.101487
Jarque-Bera	1.829926
Probability	0.400531



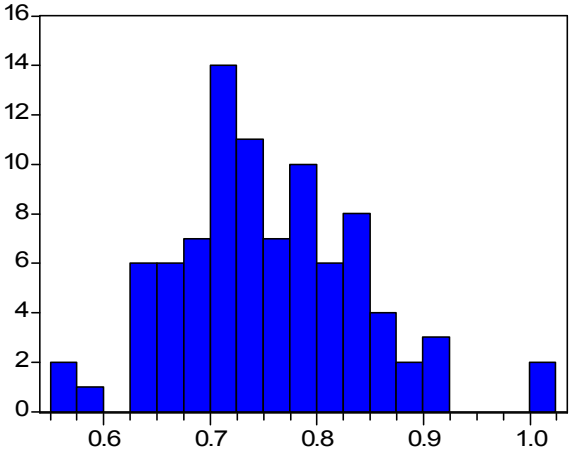
Series: D_ISCTR	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.344246
Median	0.322488
Maximum	0.867510
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.171336
Skewness	0.296333
Kurtosis	2.982937
Jarque-Bera	1.303641
Probability	0.521096



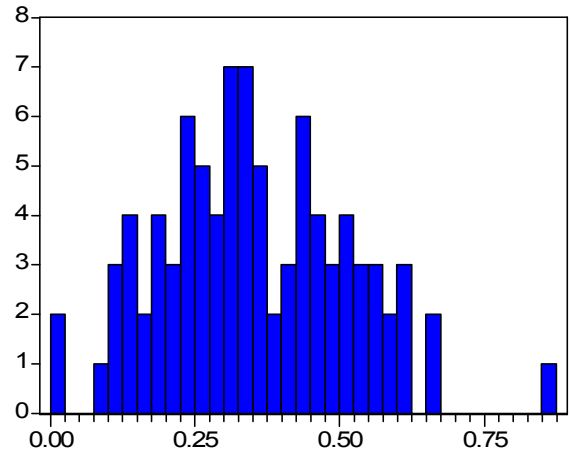
Series: D_KCHOL	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.355692
Median	0.345865
Maximum	0.736153
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.162253
Skewness	0.355530
Kurtosis	2.941465
Jarque-Bera	1.887662
Probability	0.389134



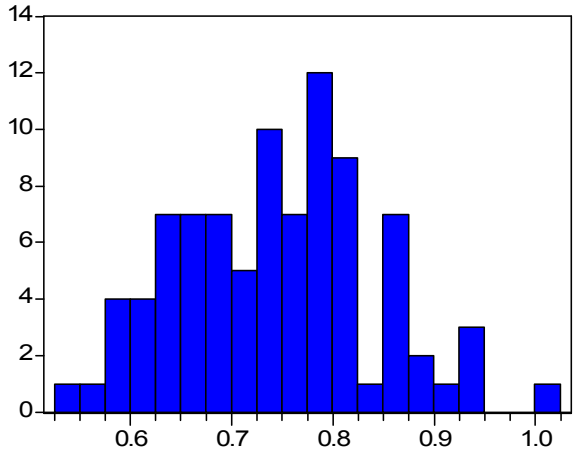
Series: D_MIGRS	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.313176
Median	0.311710
Maximum	0.706393
Minimum	0.084971
Std. Dev.	0.129960
Skewness	0.324432
Kurtosis	2.960165
Jarque-Bera	1.567185
Probability	0.456762



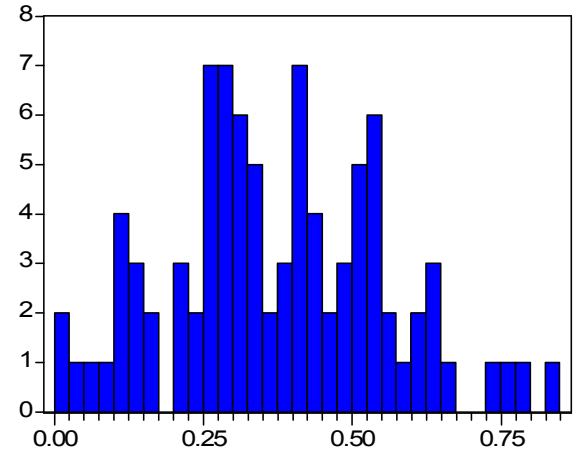
Series: D_SAHOL	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.754485
Median	0.743511
Maximum	1.000000
Minimum	0.557188
Std. Dev.	0.087261
Skewness	0.341469
Kurtosis	3.303660
Jarque-Bera	2.071528
Probability	0.354955



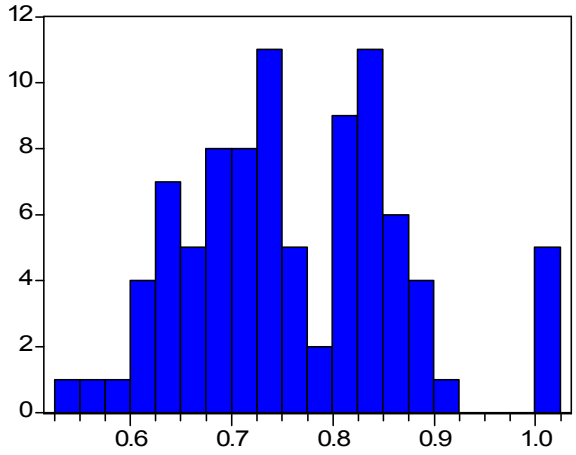
Series: D_SISE	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.352464
Median	0.335110
Maximum	0.870189
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.162550
Skewness	0.290713
Kurtosis	3.058873
Jarque-Bera	1.266480
Probability	0.530869



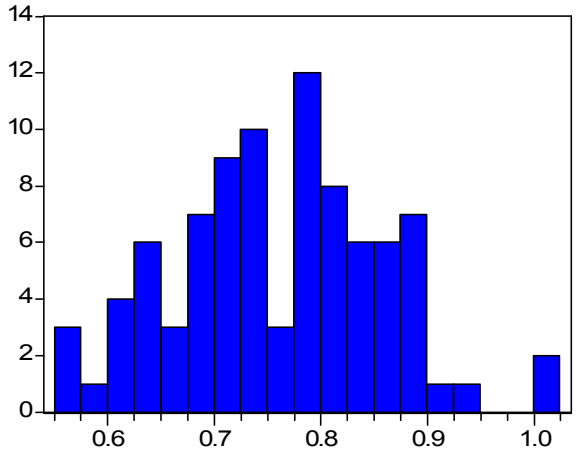
Series: D_TNSAS	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.743659
Median	0.744493
Maximum	1.000000
Minimum	0.546220
Std. Dev.	0.096006
Skewness	0.147186
Kurtosis	2.544725
Jarque-Bera	1.089992
Probability	0.579844



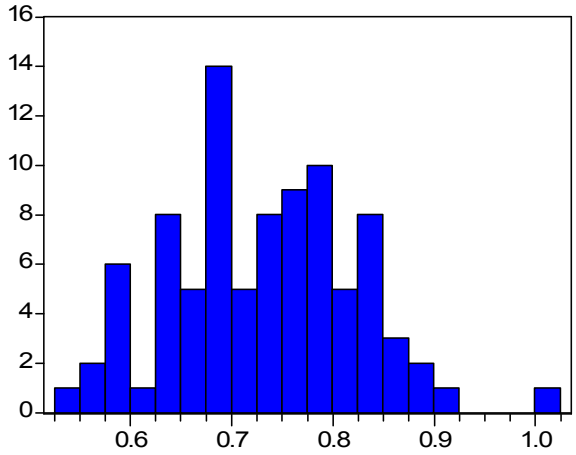
Series: D_TOASO	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.372824
Median	0.361407
Maximum	0.841668
Minimum	0.000000
Std. Dev.	0.180686
Skewness	0.191041
Kurtosis	2.746919
Jarque-Bera	0.778884
Probability	0.677435



Series: D_ULKER	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.761674
Median	0.749501
Maximum	1.000000
Minimum	0.525844
Std. Dev.	0.103794
Skewness	0.299932
Kurtosis	2.811768
Jarque-Bera	1.465789
Probability	0.480516



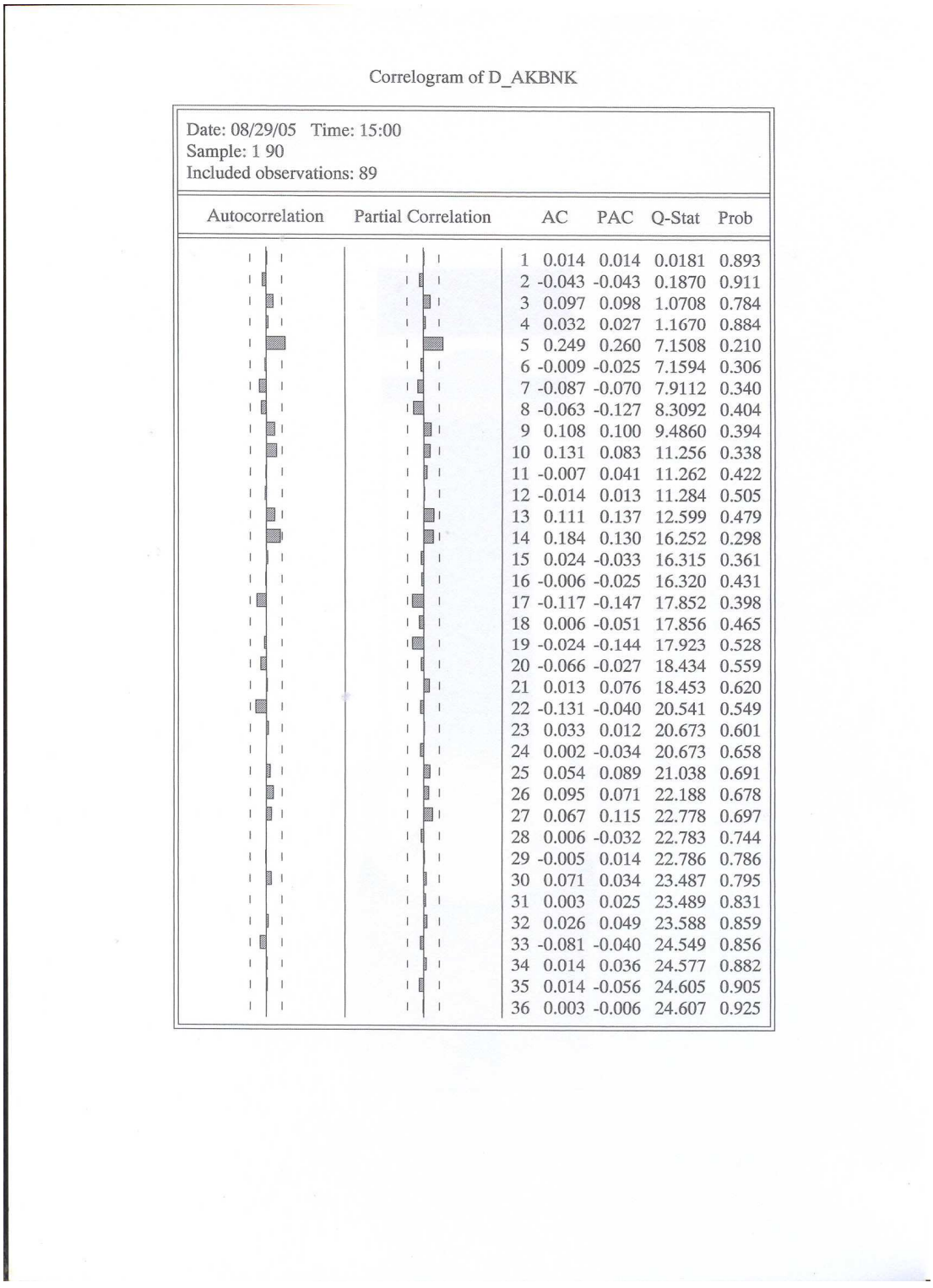
Series: D_VESTL	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.760035
Median	0.766921
Maximum	1.000000
Minimum	0.558196
Std. Dev.	0.096431
Skewness	0.015402
Kurtosis	2.658984
Jarque-Bera	0.434768
Probability	0.804621



Series: D_YKBNK	
Sample 2 90	
Observations 89	
Mean	0.730821
Median	0.729406
Maximum	1.000000
Minimum	0.525902
Std. Dev.	0.090311
Skewness	0.186127
Kurtosis	2.864665
Jarque-Bera	0.581798
Probability	0.747591

Ek-2: Menkul kıymet getirilerine ilişkin korelogramlar

Aylık Getiriler



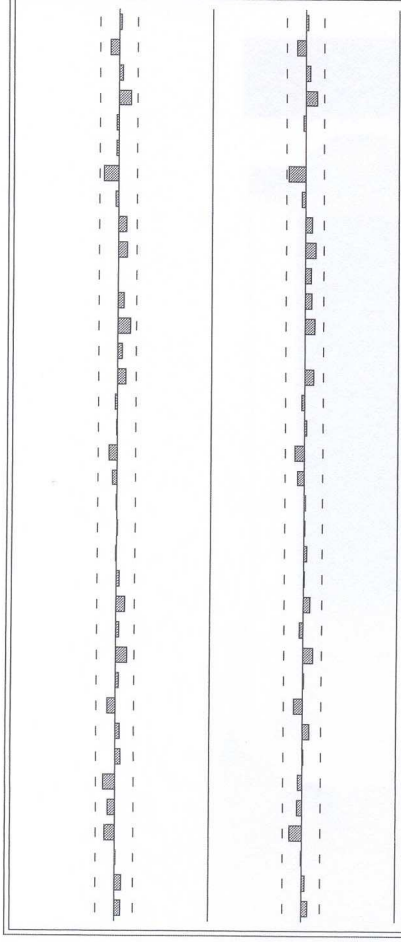
Correlogram of D_AKBNK

Date: 08/29/05 Time: 15:00
Sample: 1 90
Included observations: 89

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.014	0.014	0.0181	0.893
		2	-0.043	-0.043	0.1870	0.911
		3	0.097	0.098	1.0708	0.784
		4	0.032	0.027	1.1670	0.884
		5	0.249	0.260	7.1508	0.210
		6	-0.009	-0.025	7.1594	0.306
		7	-0.087	-0.070	7.9112	0.340
		8	-0.063	-0.127	8.3092	0.404
		9	0.108	0.100	9.4860	0.394
		10	0.131	0.083	11.256	0.338
		11	-0.007	0.041	11.262	0.422
		12	-0.014	0.013	11.284	0.505
		13	0.111	0.137	12.599	0.479
		14	0.184	0.130	16.252	0.298
		15	0.024	-0.033	16.315	0.361
		16	-0.006	-0.025	16.320	0.431
		17	-0.117	-0.147	17.852	0.398
		18	0.006	-0.051	17.856	0.465
		19	-0.024	-0.144	17.923	0.528
		20	-0.066	-0.027	18.434	0.559
		21	0.013	0.076	18.453	0.620
		22	-0.131	-0.040	20.541	0.549
		23	0.033	0.012	20.673	0.601
		24	0.002	-0.034	20.673	0.658
		25	0.054	0.089	21.038	0.691
		26	0.095	0.071	22.188	0.678
		27	0.067	0.115	22.778	0.697
		28	0.006	-0.032	22.783	0.744
		29	-0.005	0.014	22.786	0.786
		30	0.071	0.034	23.487	0.795
		31	0.003	0.025	23.489	0.831
		32	0.026	0.049	23.588	0.859
		33	-0.081	-0.040	24.549	0.856
		34	0.014	0.036	24.577	0.882
		35	0.014	-0.056	24.605	0.905
		36	0.003	-0.006	24.607	0.925

Correlogram of D_AKGRT

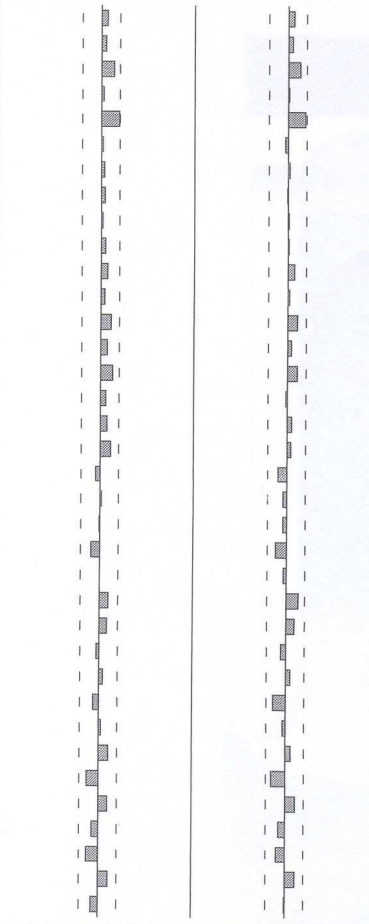
Date: 08/29/05 Time: 14:59
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.026	0.026	0.0610	0.805
2	-0.097	-0.098	0.9370	0.626
3	0.044	0.050	1.1216	0.772
4	0.138	0.127	2.9272	0.570
5	-0.020	-0.019	2.9662	0.705
6	-0.017	0.007	2.9929	0.810
7	-0.162	-0.182	5.5765	0.590
8	-0.026	-0.035	5.6454	0.687
9	0.098	0.081	6.6201	0.677
10	0.104	0.121	7.7211	0.656
11	0.003	0.069	7.7224	0.738
12	0.069	0.080	8.2207	0.768
13	0.145	0.114	10.452	0.657
14	0.051	0.000	10.734	0.707
15	0.094	0.102	11.702	0.701
16	-0.021	-0.025	11.752	0.761
17	-0.004	0.025	11.754	0.815
18	-0.089	-0.105	12.664	0.811
19	-0.046	-0.066	12.911	0.843
20	-0.003	0.021	12.912	0.881
21	0.013	0.010	12.931	0.911
22	-0.001	0.040	12.931	0.935
23	0.038	0.011	13.110	0.950
24	0.104	0.076	14.452	0.936
25	0.037	-0.039	14.621	0.950
26	0.129	0.111	16.758	0.916
27	0.034	0.011	16.906	0.933
28	-0.087	-0.091	17.911	0.928
29	0.056	0.079	18.338	0.937
30	0.059	0.010	18.817	0.944
31	-0.126	-0.048	21.022	0.911
32	-0.080	-0.052	21.928	0.909
33	-0.111	-0.137	23.720	0.882
34	0.013	-0.008	23.746	0.905
35	0.076	0.035	24.623	0.905
36	0.066	0.070	25.282	0.909

Correlogram of D_ARCLK

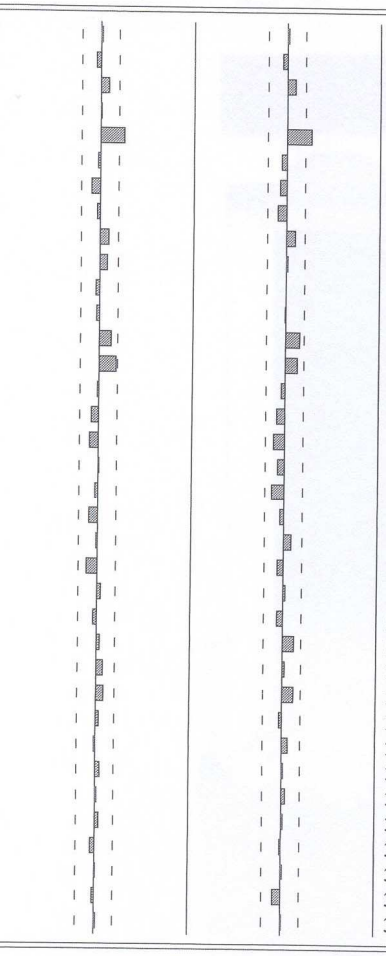
Date: 08/29/05 Time: 14:59
Sample: 1 90
Included observations: 89



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.066	0.066	0.4065	0.524
		2	0.056	0.052	0.7034	0.703
		3	0.142	0.136	2.5946	0.458
		4	0.031	0.012	2.6868	0.612
		5	0.201	0.189	6.5647	0.255
		6	0.018	-0.025	6.5976	0.360
		7	0.034	0.017	6.7141	0.459
		8	0.048	-0.007	6.9454	0.543
		9	0.019	0.011	6.9822	0.639
		10	0.055	0.009	7.2893	0.698
		11	0.078	0.074	7.9173	0.721
		12	0.041	0.020	8.0976	0.777
		13	0.121	0.107	9.6643	0.721
		14	0.078	0.044	10.322	0.738
		15	0.134	0.113	12.273	0.658
		16	0.060	-0.010	12.670	0.697
		17	0.076	0.050	13.315	0.715
		18	0.121	0.043	14.977	0.664
		19	-0.049	-0.093	15.253	0.706
		20	0.023	-0.039	15.315	0.758
		21	-0.003	-0.038	15.317	0.807
		22	-0.092	-0.118	16.336	0.799
		23	0.005	-0.025	16.339	0.840
		24	0.106	0.137	17.727	0.816
		25	0.084	0.097	18.627	0.815
		26	-0.030	-0.055	18.745	0.847
		27	0.048	0.051	19.040	0.869
		28	-0.062	-0.137	19.549	0.880
		29	0.031	-0.032	19.676	0.903
		30	0.109	0.058	21.314	0.878
		31	-0.131	-0.150	23.701	0.823
		32	0.106	0.108	25.307	0.793
		33	-0.072	-0.067	26.051	0.800
		34	-0.125	-0.093	28.336	0.741
		35	0.109	0.107	30.116	0.703
		36	-0.076	-0.008	30.993	0.705

Correlogram of D_DOHOL

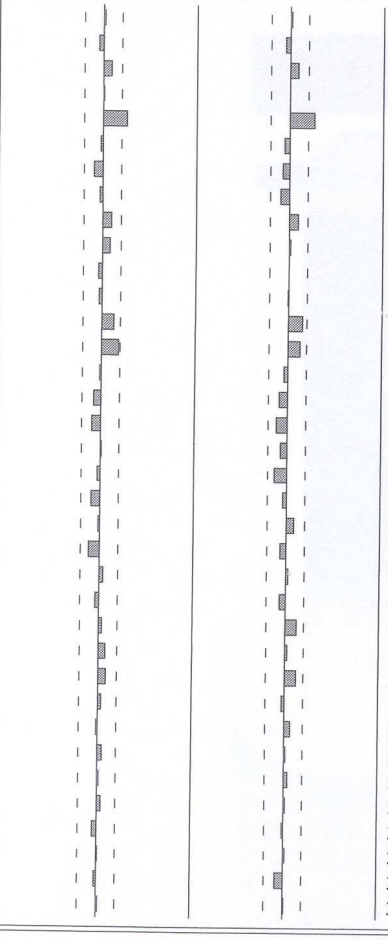
Date: 09/05/05 Time: 10:09
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.022	0.022	0.0460	0.830
2	-0.047	-0.048	0.2561	0.880
3	0.094	0.096	1.0819	0.781
4	0.015	0.008	1.1035	0.894
5	0.267	0.279	7.9570	0.159
6	-0.023	-0.049	8.0082	0.238
7	-0.097	-0.069	8.9433	0.257
8	-0.027	-0.091	9.0179	0.341
9	0.099	0.106	10.006	0.350
10	0.089	0.024	10.825	0.371
11	-0.037	0.006	10.964	0.446
12	-0.030	-0.005	11.058	0.524
13	0.134	0.162	12.985	0.449
14	0.189	0.137	16.857	0.264
15	-0.011	-0.041	16.871	0.327
16	-0.076	-0.084	17.511	0.353
17	-0.091	-0.119	18.436	0.362
18	0.013	-0.067	18.456	0.426
19	-0.029	-0.133	18.551	0.486
20	-0.095	-0.037	19.601	0.483
21	-0.011	0.089	19.616	0.546
22	-0.120	-0.060	21.347	0.499
23	0.048	0.032	21.629	0.543
24	-0.038	-0.061	21.811	0.591
25	0.033	0.126	21.952	0.638
26	0.078	0.032	22.726	0.648
27	0.087	0.130	23.722	0.646
28	0.036	-0.032	23.898	0.687
29	-0.009	0.070	23.908	0.733
30	0.049	0.022	24.242	0.761
31	0.017	0.043	24.280	0.799
32	0.044	0.020	24.557	0.824
33	-0.045	-0.009	24.845	0.845
34	0.013	0.022	24.869	0.873
35	-0.019	-0.083	24.922	0.897
36	0.019	0.012	24.980	0.916

Correlogram of D_ENKAI

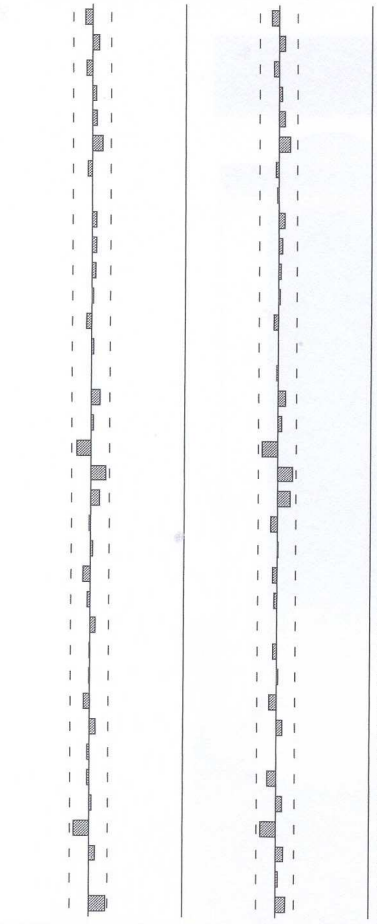
Date: 08/29/05 Time: 14:59
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.022	0.022	0.0460	0.830
2	-0.047	-0.048	0.2561	0.880
3	0.094	0.096	1.0819	0.781
4	0.015	0.008	1.1035	0.894
5	0.267	0.279	7.9570	0.159
6	-0.023	-0.049	8.0082	0.238
7	-0.097	-0.069	8.9433	0.257
8	-0.027	-0.091	9.0179	0.341
9	0.099	0.106	10.006	0.350
10	0.089	0.024	10.825	0.371
11	-0.037	0.006	10.964	0.446
12	-0.030	-0.005	11.058	0.524
13	0.134	0.162	12.985	0.449
14	0.189	0.137	16.857	0.264
15	-0.011	-0.041	16.871	0.327
16	-0.076	-0.084	17.511	0.353
17	-0.091	-0.119	18.436	0.362
18	0.013	-0.067	18.456	0.426
19	-0.029	-0.133	18.551	0.486
20	-0.095	-0.037	19.601	0.483
21	-0.011	0.089	19.616	0.546
22	-0.120	-0.060	21.347	0.499
23	0.048	0.032	21.629	0.543
24	-0.038	-0.061	21.811	0.591
25	0.033	0.126	21.952	0.638
26	0.078	0.032	22.726	0.648
27	0.087	0.130	23.722	0.646
28	0.036	-0.032	23.898	0.687
29	-0.009	0.070	23.908	0.733
30	0.049	0.022	24.242	0.761
31	0.017	0.043	24.280	0.799
32	0.044	0.020	24.557	0.824
33	-0.045	-0.009	24.845	0.845
34	0.013	0.022	24.869	0.873
35	-0.019	-0.083	24.922	0.897
36	0.019	0.012	24.980	0.916

Correlogram of D_EREGL

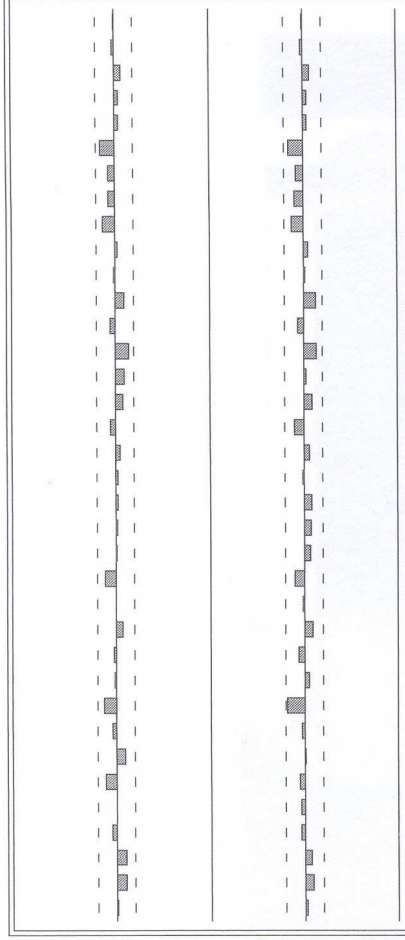
Date: 08/29/05 Time: 14:59
Sample: 1 90
Included observations: 89



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.080	-0.080	0.5951	0.440
		2	0.077	0.071	1.1414	0.565
		3	-0.063	-0.052	1.5171	0.678
		4	0.046	0.033	1.7208	0.787
		5	0.056	0.070	2.0195	0.846
		6	0.122	0.124	3.4612	0.749
		7	-0.045	-0.032	3.6655	0.817
		8	0.003	-0.015	3.6662	0.886
		9	0.057	0.072	3.9930	0.912
		10	0.054	0.049	4.2938	0.933
		11	0.042	0.028	4.4801	0.954
		12	0.024	0.021	4.5389	0.972
		13	-0.055	-0.046	4.8577	0.978
		14	0.026	0.007	4.9295	0.987
		15	0.003	-0.011	4.9303	0.993
		16	0.100	0.083	6.0497	0.988
		17	0.030	0.045	6.1531	0.992
		18	-0.149	-0.165	8.6729	0.967
		19	0.165	0.164	11.837	0.892
		20	0.104	0.147	13.096	0.873
		21	-0.011	-0.067	13.111	0.905
		22	0.031	0.013	13.225	0.927
		23	-0.081	-0.049	14.021	0.926
		24	-0.026	-0.032	14.106	0.944
		25	0.063	0.001	14.603	0.950
		26	-0.005	-0.038	14.606	0.964
		27	-0.003	0.024	14.607	0.975
		28	-0.061	-0.080	15.096	0.977
		29	0.068	0.071	15.724	0.979
		30	-0.021	0.002	15.785	0.984
		31	-0.017	-0.098	15.824	0.989
		32	0.029	0.071	15.946	0.992
		33	-0.166	-0.168	19.919	0.965
		34	0.070	0.090	20.631	0.965
		35	0.005	0.025	20.634	0.974
		36	0.188	0.110	26.060	0.889

Correlogram of D_FINBN

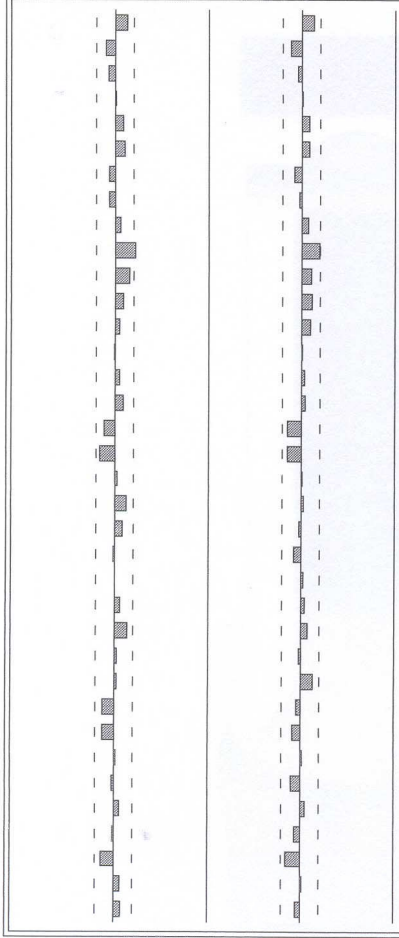
Date: 08/29/05 Time: 14:59
Sample: 1 90
Included observations: 89



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.006	-0.006	0.0034	0.953
		2	-0.017	-0.017	0.0313	0.984
		3	0.081	0.081	0.6451	0.886
		4	0.047	0.048	0.8563	0.931
		5	0.043	0.047	1.0360	0.960
		6	-0.157	-0.163	3.4348	0.753
		7	-0.070	-0.082	3.9246	0.788
		8	-0.073	-0.093	4.4517	0.814
		9	-0.137	-0.125	6.3513	0.704
		10	0.032	0.053	6.4554	0.776
		11	-0.012	0.024	6.4708	0.840
		12	0.105	0.131	7.6252	0.814
		13	-0.055	-0.061	7.9453	0.847
		14	0.151	0.142	10.395	0.733
		15	0.102	0.027	11.542	0.713
		16	0.088	0.091	12.401	0.716
		17	-0.049	-0.101	12.675	0.758
		18	0.051	0.063	12.972	0.793
		19	0.028	-0.012	13.065	0.835
		20	0.026	0.088	13.143	0.871
		21	0.024	0.081	13.212	0.901
		22	0.014	0.066	13.235	0.926
		23	-0.123	-0.103	15.089	0.891
		24	0.003	-0.008	15.089	0.918
		25	0.081	0.093	15.928	0.917
		26	-0.024	-0.058	16.000	0.936
		27	-0.013	0.057	16.024	0.952
		28	-0.139	-0.195	18.594	0.910
		29	-0.034	-0.029	18.753	0.927
		30	0.105	0.016	20.256	0.910
		31	-0.121	-0.056	22.294	0.874
		32	0.002	-0.034	22.295	0.899
		33	-0.047	-0.036	22.620	0.913
		34	0.111	0.082	24.447	0.886
		35	0.111	0.093	26.298	0.855
		36	0.015	0.027	26.334	0.881

Correlogram of D_FROTO

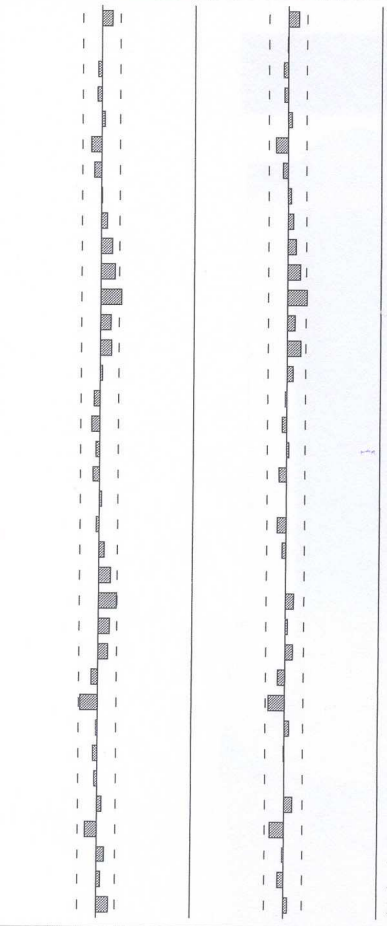
Date: 08/29/05 Time: 14:58
Sample: 1 90
Included observations: 89



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.134	0.134	1.6635	0.197
		2	-0.100	-0.120	2.5947	0.273
		3	-0.069	-0.039	3.0394	0.386
		4	0.011	0.015	3.0500	0.550
		5	0.095	0.083	3.9260	0.560
		6	0.111	0.089	5.1349	0.527
		7	-0.064	-0.077	5.5423	0.594
		8	-0.064	-0.017	5.9543	0.652
		9	0.065	0.074	6.3791	0.701
		10	0.229	0.198	11.752	0.302
		11	0.162	0.110	14.487	0.207
		12	0.094	0.117	15.411	0.220
		13	0.049	0.101	15.671	0.267
		14	-0.004	0.012	15.673	0.334
		15	0.053	0.039	15.975	0.384
		16	0.091	0.048	16.893	0.393
		17	-0.121	-0.148	18.535	0.356
		18	-0.171	-0.153	21.864	0.238
		19	0.032	0.015	21.984	0.285
		20	0.128	0.029	23.900	0.247
		21	0.086	-0.021	24.791	0.256
		22	-0.014	-0.078	24.813	0.306
		23	0.008	0.026	24.821	0.360
		24	0.059	0.042	25.253	0.392
		25	0.140	0.074	27.728	0.321
		26	0.033	-0.021	27.865	0.365
		27	0.032	0.135	28.003	0.411
		28	-0.128	-0.049	30.172	0.355
		29	-0.129	-0.089	32.429	0.301
		30	0.018	0.019	32.475	0.346
		31	-0.019	-0.100	32.527	0.392
		32	0.062	0.050	33.076	0.414
		33	-0.015	-0.058	33.110	0.462
		34	-0.141	-0.160	36.018	0.374
		35	0.072	0.020	36.791	0.386
		36	0.076	-0.056	37.681	0.392

Correlogram of D_GARAN

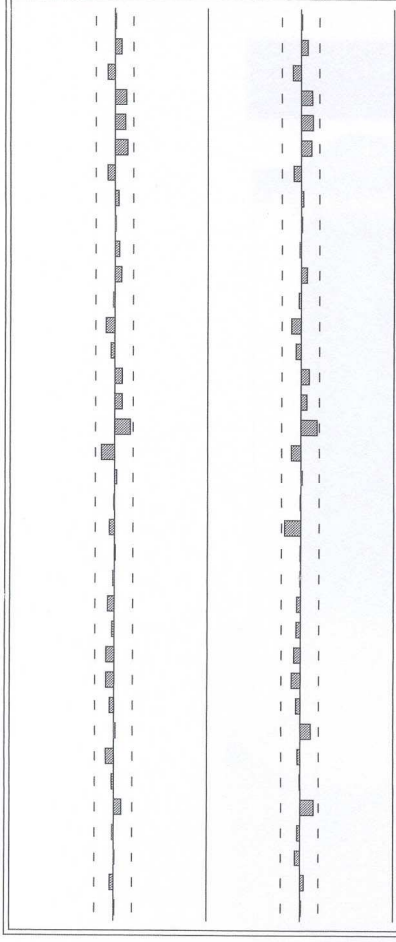
Date: 08/29/05 Time: 14:58
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.117	0.117	1.2580	0.262
2	0.007	-0.006	1.2632	0.532
3	-0.040	-0.041	1.4175	0.701
4	-0.044	-0.035	1.6017	0.808
5	0.035	0.045	1.7196	0.886
6	-0.110	-0.123	2.9073	0.820
7	-0.079	-0.057	3.5248	0.833
8	0.014	0.033	3.5433	0.896
9	0.071	0.063	4.0526	0.908
10	0.126	0.096	5.6746	0.842
11	0.159	0.147	8.3005	0.686
12	0.233	0.216	13.995	0.301
13	0.118	0.088	15.487	0.278
14	0.128	0.151	17.262	0.242
15	0.032	0.070	17.371	0.297
16	-0.062	-0.014	17.796	0.336
17	-0.088	-0.047	18.670	0.348
18	-0.039	0.027	18.843	0.402
19	-0.071	-0.077	19.419	0.430
20	0.025	0.006	19.494	0.490
21	-0.032	-0.098	19.619	0.546
22	0.060	-0.034	20.051	0.580
23	0.137	0.000	22.345	0.499
24	0.200	0.094	27.325	0.290
25	0.129	0.032	29.423	0.247
26	0.110	0.090	30.968	0.229
27	-0.072	-0.077	31.652	0.245
28	-0.194	-0.177	36.634	0.127
29	-0.011	0.052	36.650	0.155
30	-0.046	-0.007	36.942	0.179
31	-0.027	0.007	37.047	0.210
32	0.054	0.093	37.460	0.233
33	-0.129	-0.151	39.879	0.191
34	0.085	-0.014	40.933	0.192
35	0.048	-0.061	41.279	0.215
36	0.134	0.047	44.037	0.168

Correlogram of D_HURGZ

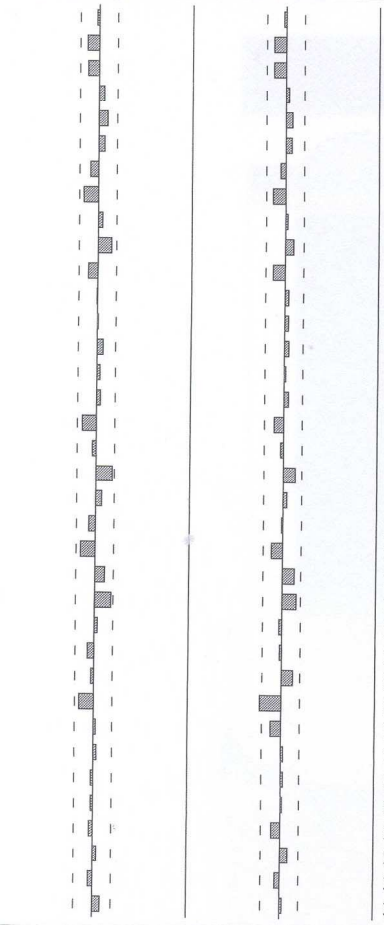
Date: 08/29/05 Time: 14:58
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.009	0.009	0.0073	0.932
2	0.080	0.080	0.5969	0.742
3	-0.081	-0.083	1.2092	0.751
4	0.129	0.126	2.7918	0.593
5	0.122	0.134	4.2318	0.517
6	0.146	0.121	6.3028	0.390
7	-0.077	-0.081	6.8881	0.441
8	0.044	0.032	7.0778	0.528
9	0.013	0.016	7.0945	0.627
10	0.052	-0.014	7.3753	0.690
11	0.077	0.069	7.9869	0.714
12	-0.015	-0.023	8.0092	0.784
13	-0.098	-0.105	9.0319	0.771
14	-0.040	-0.053	9.2043	0.818
15	0.089	0.091	10.069	0.815
16	0.087	0.066	10.904	0.815
17	0.177	0.183	14.410	0.638
18	-0.142	-0.101	16.708	0.543
19	0.028	0.020	16.802	0.603
20	-0.002	-0.004	16.803	0.666
21	-0.055	-0.175	17.163	0.701
22	0.011	0.000	17.178	0.753
23	-0.014	-0.004	17.200	0.799
24	-0.066	-0.034	17.749	0.815
25	-0.024	-0.046	17.822	0.850
26	-0.082	-0.073	18.690	0.849
27	-0.089	-0.098	19.715	0.843
28	-0.043	-0.043	19.958	0.866
29	0.017	0.118	19.996	0.893
30	-0.089	-0.030	21.088	0.885
31	-0.019	-0.005	21.135	0.908
32	0.087	0.152	22.217	0.902
33	-0.009	-0.031	22.228	0.922
34	0.009	-0.054	22.240	0.940
35	-0.038	0.043	22.453	0.950
36	0.010	0.009	22.469	0.962

Correlogram of D_ISCTR

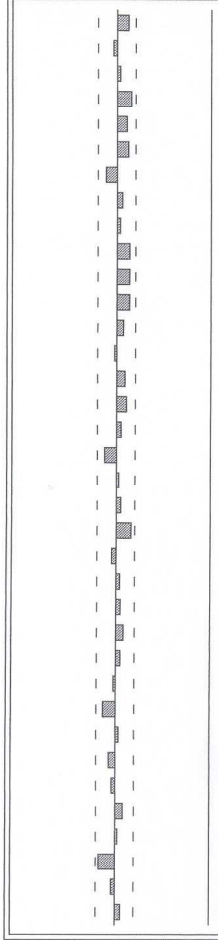
Date: 08/29/05 Time: 14:58
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.020	-0.020	0.0379	0.846
2	-0.128	-0.128	1.5591	0.459
3	-0.121	-0.129	2.9481	0.400
4	0.058	0.035	3.2728	0.513
5	0.105	0.079	4.3358	0.502
6	0.068	0.074	4.7825	0.572
7	-0.090	-0.053	5.5819	0.589
8	-0.162	-0.139	8.2171	0.413
9	0.052	0.031	8.4904	0.486
10	0.148	0.094	10.725	0.379
11	-0.101	-0.127	11.791	0.380
12	-0.004	0.046	11.793	0.462
13	0.011	0.048	11.806	0.544
14	0.073	0.057	12.385	0.575
15	0.036	0.019	12.526	0.639
16	0.049	0.057	12.789	0.688
17	-0.150	-0.105	15.313	0.573
18	-0.036	-0.026	15.461	0.630
19	0.185	0.132	19.400	0.431
20	0.073	0.047	20.019	0.457
21	-0.070	-0.008	20.602	0.483
22	-0.160	-0.121	23.695	0.363
23	0.110	0.139	25.188	0.341
24	0.185	0.157	29.471	0.203
25	0.033	-0.030	29.612	0.239
26	-0.070	-0.022	30.241	0.258
27	-0.025	0.125	30.322	0.300
28	-0.159	-0.235	33.671	0.212
29	0.025	-0.113	33.755	0.248
30	0.041	0.031	33.982	0.282
31	-0.019	0.026	34.032	0.324
32	-0.020	0.024	34.091	0.367
33	-0.039	-0.092	34.315	0.405
34	0.046	0.082	34.630	0.438
35	-0.043	-0.054	34.913	0.472
36	0.087	0.028	36.067	0.466

Correlogram of D_KCHOL

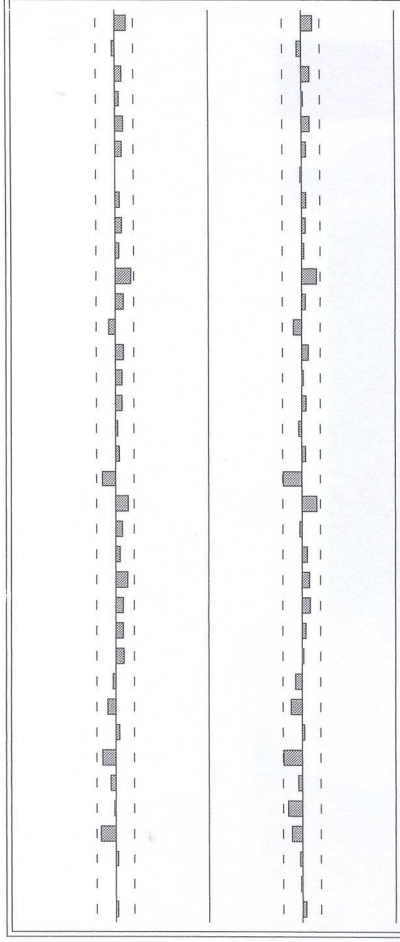
Date: 08/29/05 Time: 14:58
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.129	0.129	1.5380	0.215
2	-0.035	-0.052	1.6495	0.438
3	0.035	0.048	1.7672	0.622
4	0.160	0.150	4.2158	0.378
5	0.108	0.074	5.3471	0.375
6	0.127	0.123	6.9255	0.328
7	-0.115	-0.155	8.2358	0.312
8	0.062	0.086	8.6216	0.375
9	0.038	-0.032	8.7648	0.459
10	0.146	0.130	10.950	0.361
11	0.146	0.139	13.176	0.282
12	0.140	0.117	15.245	0.228
13	0.079	0.094	15.916	0.254
14	-0.019	-0.125	15.953	0.316
15	0.090	0.082	16.845	0.328
16	0.110	-0.023	18.198	0.312
17	0.052	0.035	18.502	0.358
18	-0.124	-0.150	20.251	0.319
19	0.026	0.060	20.329	0.375
20	0.054	0.010	20.670	0.417
21	0.171	0.101	24.150	0.286
22	-0.044	-0.080	24.382	0.328
23	0.047	0.037	24.654	0.368
24	0.054	0.036	25.011	0.405
25	0.085	-0.042	25.922	0.412
26	0.056	0.080	26.326	0.445
27	-0.022	-0.138	26.388	0.497
28	-0.138	-0.071	28.913	0.417
29	0.039	-0.008	29.117	0.459
30	-0.070	-0.082	29.782	0.477
31	-0.034	-0.016	29.943	0.520
32	0.088	0.076	31.034	0.515
33	0.031	0.055	31.171	0.558
34	-0.175	-0.220	35.658	0.390
35	-0.034	0.011	35.829	0.429
36	0.059	-0.051	36.365	0.452

Correlogram of D_MIGRS

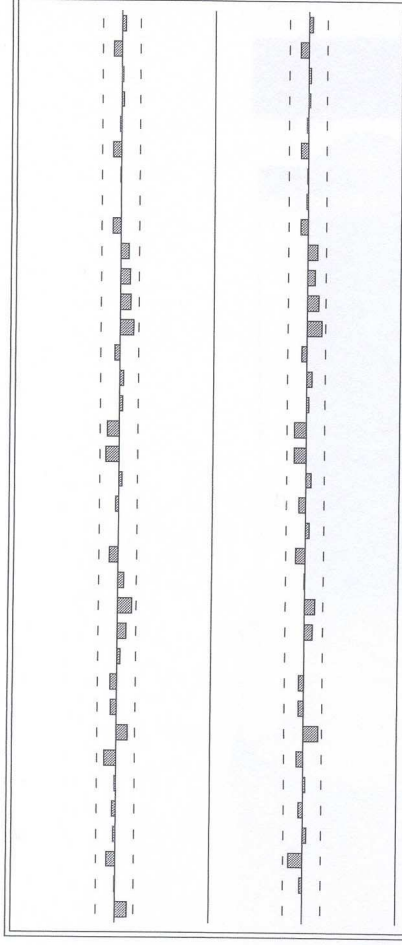
Date: 08/29/05 Time: 14:58
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.123	0.123	1.3949	0.238
2	-0.031	-0.047	1.4866	0.476
3	0.081	0.092	2.1013	0.552
4	0.045	0.022	2.2977	0.681
5	0.095	0.096	3.1591	0.675
6	0.081	0.054	3.7940	0.705
7	0.001	-0.012	3.7941	0.803
8	0.057	0.051	4.1176	0.846
9	0.077	0.048	4.7179	0.858
10	0.046	0.027	4.9353	0.895
11	0.179	0.164	8.2500	0.691
12	0.092	0.044	9.1460	0.690
13	-0.068	-0.083	9.6358	0.723
14	0.090	0.079	10.519	0.723
15	0.076	0.020	11.151	0.742
16	0.077	0.057	11.806	0.757
17	0.027	-0.027	11.885	0.807
18	0.042	0.046	12.089	0.843
19	-0.141	-0.198	14.384	0.761
20	0.147	0.167	16.923	0.658
21	0.076	-0.017	17.617	0.673
22	0.052	0.063	17.942	0.709
23	0.134	0.082	20.145	0.633
24	0.084	0.095	21.016	0.638
25	0.086	0.043	21.955	0.638
26	0.091	0.019	23.020	0.632
27	-0.032	-0.067	23.155	0.677
28	-0.088	-0.123	24.195	0.671
29	0.049	0.030	24.513	0.703
30	-0.147	-0.202	27.498	0.597
31	-0.057	-0.039	27.953	0.624
32	-0.016	-0.152	27.989	0.670
33	-0.157	-0.114	31.543	0.540
34	0.026	-0.022	31.644	0.584
35	0.006	-0.009	31.650	0.631
36	0.032	0.043	31.807	0.668

Correlogram of D_SAHOL

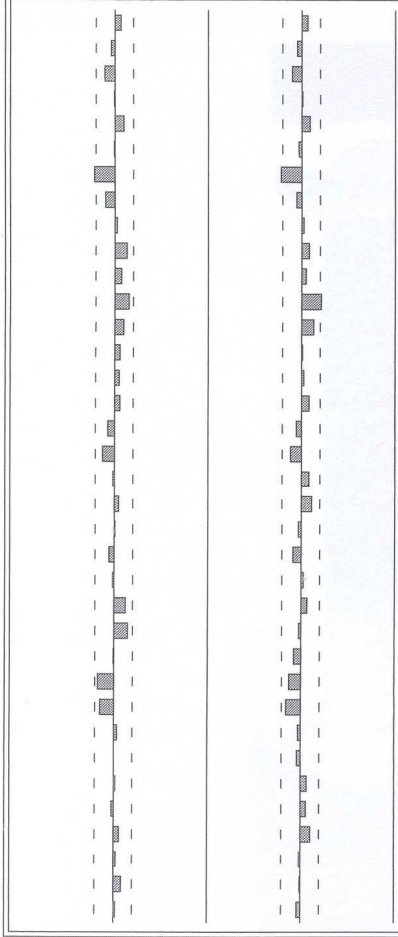
Date: 08/29/05 Time: 14:57
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.049	0.049	0.2178	0.641
2	-0.084	-0.086	0.8722	0.647
3	0.020	0.029	0.9114	0.823
4	0.033	0.023	1.0121	0.908
5	-0.011	-0.010	1.0231	0.961
6	-0.083	-0.079	1.6938	0.946
7	-0.008	-0.002	1.6996	0.975
8	0.001	-0.012	1.6998	0.989
9	-0.083	-0.081	2.4043	0.983
10	0.094	0.109	3.3162	0.973
11	0.107	0.084	4.5004	0.953
12	0.117	0.126	5.9480	0.919
13	0.153	0.165	8.4528	0.813
14	-0.051	-0.056	8.7330	0.848
15	0.047	0.061	8.9760	0.879
16	0.037	0.027	9.1288	0.908
17	-0.129	-0.126	11.015	0.856
18	-0.145	-0.128	13.419	0.766
19	0.034	0.062	13.556	0.809
20	-0.030	-0.066	13.665	0.847
21	0.007	0.044	13.671	0.883
22	-0.093	-0.102	14.714	0.874
23	0.068	-0.002	15.286	0.884
24	0.159	0.119	18.426	0.782
25	0.104	0.091	19.806	0.757
26	0.038	0.004	19.990	0.792
27	-0.071	-0.056	20.641	0.803
28	-0.063	-0.056	21.164	0.818
29	0.124	0.166	23.252	0.765
30	-0.124	-0.070	25.348	0.708
31	-0.016	0.030	25.383	0.750
32	-0.033	-0.047	25.538	0.784
33	-0.023	0.042	25.616	0.817
34	-0.094	-0.148	26.906	0.801
35	-0.008	-0.027	26.916	0.834
36	0.134	0.008	29.674	0.763

Correlogram of D_SISE

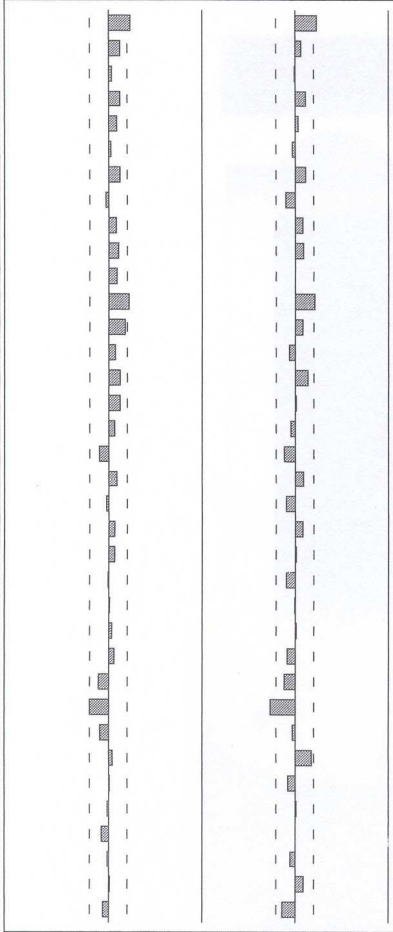
Date: 08/29/05 Time: 14:57
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.074	0.074	0.4982	0.480
2	-0.038	-0.043	0.6310	0.729
3	-0.108	-0.103	1.7387	0.628
4	-0.001	0.013	1.7389	0.784
5	0.104	0.097	2.7745	0.735
6	-0.004	-0.031	2.7763	0.836
7	-0.226	-0.223	7.8137	0.349
8	-0.101	-0.053	8.8432	0.356
9	0.025	0.028	8.9058	0.446
10	0.137	0.083	10.832	0.371
11	0.080	0.054	11.492	0.403
12	0.158	0.215	14.120	0.293
13	0.102	0.134	15.218	0.294
14	0.058	0.016	15.584	0.339
15	0.049	0.032	15.849	0.392
16	0.058	0.087	16.228	0.437
17	-0.067	-0.055	16.740	0.472
18	-0.126	-0.117	18.552	0.420
19	-0.015	0.087	18.579	0.484
20	0.056	0.119	18.953	0.525
21	0.011	-0.028	18.968	0.587
22	-0.056	-0.088	19.353	0.623
23	-0.016	0.027	19.385	0.679
24	0.127	0.068	21.403	0.615
25	0.150	-0.017	24.255	0.505
26	-0.005	-0.076	24.258	0.561
27	-0.178	-0.127	28.409	0.390
28	-0.154	-0.159	31.576	0.292
29	0.040	-0.033	31.795	0.329
30	0.002	-0.039	31.795	0.377
31	0.020	0.067	31.854	0.424
32	-0.018	0.062	31.900	0.472
33	0.058	0.113	32.385	0.498
34	0.032	-0.014	32.539	0.539
35	0.085	-0.007	33.619	0.535
36	0.022	-0.036	33.696	0.579

Correlogram of D_TNSAS

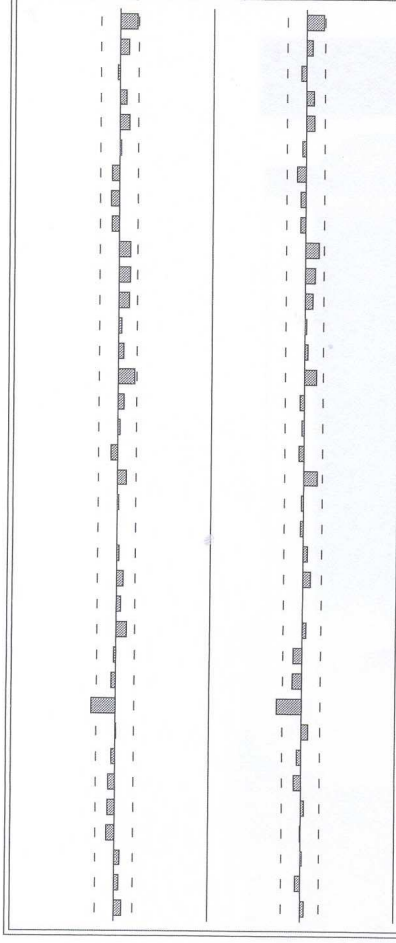
Date: 08/29/05 Time: 14:57
Sample: 1 90
Included observations: 89



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.245	0.245	5.5320	0.019
		2	0.126	0.070	7.0127	0.030
		3	0.040	-0.006	7.1650	0.067
		4	0.127	0.117	8.6908	0.069
		5	0.091	0.038	9.4870	0.091
		6	0.025	-0.027	9.5499	0.145
		7	0.124	0.123	11.059	0.136
		8	-0.029	-0.103	11.142	0.194
		9	0.085	0.089	11.881	0.220
		10	0.109	0.093	13.105	0.218
		11	0.091	0.003	13.972	0.235
		12	0.222	0.215	19.156	0.085
		13	0.181	0.089	22.649	0.046
		14	0.081	-0.064	23.357	0.055
		15	0.124	0.145	25.029	0.050
		16	0.126	0.010	26.787	0.044
		17	0.069	-0.045	27.316	0.054
		18	-0.104	-0.119	28.557	0.054
		19	0.097	0.094	29.651	0.056
		20	-0.023	-0.098	29.711	0.075
		21	0.071	0.083	30.303	0.086
		22	0.068	0.015	30.857	0.099
		23	-0.002	-0.096	30.858	0.126
		24	0.016	-0.003	30.888	0.157
		25	0.038	0.011	31.076	0.187
		26	0.058	-0.084	31.506	0.210
		27	-0.113	-0.116	33.178	0.191
		28	-0.208	-0.278	38.915	0.082
		29	-0.096	-0.033	40.165	0.081
		30	0.042	0.187	40.409	0.097
		31	0.011	-0.081	40.426	0.120
		32	-0.009	0.016	40.438	0.146
		33	-0.077	0.002	41.297	0.152
		34	-0.009	-0.053	41.310	0.182
		35	0.014	0.093	41.342	0.213
		36	-0.065	-0.145	41.990	0.227

Correlogram of D_TOASO

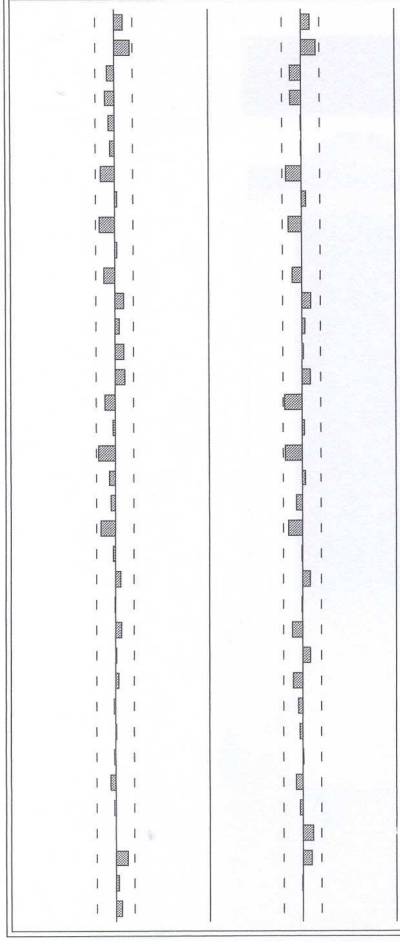
Date: 09/05/05 Time: 10:02
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.189	0.189	3.2954	0.069
2	0.102	0.068	4.2601	0.119
3	-0.017	-0.050	4.2882	0.232
4	0.079	0.087	4.8794	0.300
5	0.113	0.094	6.1044	0.296
6	0.021	-0.033	6.1468	0.407
7	-0.077	-0.092	6.7378	0.457
8	-0.083	-0.051	7.4225	0.492
9	-0.074	-0.054	7.9780	0.536
10	0.124	0.150	9.5530	0.481
11	0.131	0.113	11.323	0.417
12	0.119	0.083	12.809	0.383
13	0.036	0.017	12.947	0.452
14	0.064	0.036	13.386	0.496
15	0.188	0.132	17.248	0.304
16	0.067	-0.049	17.743	0.339
17	0.029	-0.017	17.835	0.399
18	-0.070	-0.051	18.394	0.430
19	0.099	0.155	19.537	0.423
20	0.021	-0.019	19.589	0.484
21	0.005	-0.029	19.592	0.547
22	0.028	0.052	19.684	0.603
23	0.081	0.087	20.492	0.612
24	0.056	0.008	20.889	0.645
25	0.117	0.044	22.628	0.599
26	-0.018	-0.092	22.672	0.651
27	-0.041	-0.100	22.894	0.691
28	-0.267	-0.271	32.373	0.260
29	0.016	0.076	32.406	0.302
30	-0.035	-0.047	32.574	0.341
31	-0.071	-0.081	33.275	0.357
32	-0.076	0.036	34.092	0.367
33	-0.085	-0.008	35.129	0.368
34	0.065	0.021	35.752	0.386
35	0.051	-0.057	36.145	0.415
36	0.085	0.043	37.250	0.411

Correlogram of D_ULKER

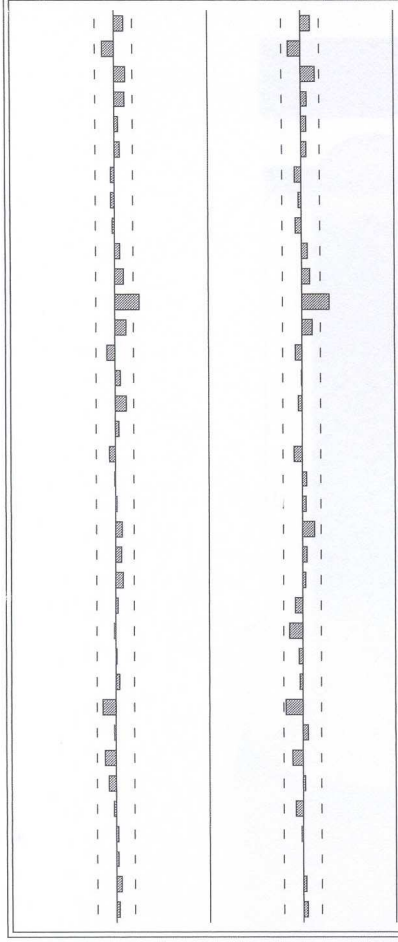
Date: 09/05/05 Time: 10:09
Sample: 1 90
Included observations: 89



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.106	0.106	1.0294	0.310
2	0.178	0.168	3.9709	0.137
3	-0.082	-0.120	4.5966	0.204
4	-0.103	-0.120	5.6077	0.230
5	-0.059	-0.002	5.9472	0.311
6	-0.045	-0.007	6.1465	0.407
7	-0.150	-0.165	8.3655	0.301
8	0.030	0.055	8.4566	0.390
9	-0.169	-0.141	11.348	0.253
10	0.025	0.004	11.410	0.326
11	-0.120	-0.104	12.916	0.299
12	0.100	0.103	13.976	0.302
13	0.053	0.035	14.274	0.355
14	0.105	0.024	15.461	0.347
15	0.112	0.092	16.840	0.328
16	-0.107	-0.192	18.116	0.317
17	-0.018	0.027	18.155	0.379
18	-0.184	-0.187	22.004	0.232
19	-0.065	0.033	22.500	0.260
20	-0.046	-0.065	22.747	0.301
21	-0.158	-0.150	25.727	0.217
22	-0.024	-0.006	25.800	0.260
23	0.063	0.086	26.285	0.288
24	-0.003	-0.007	26.287	0.339
25	0.067	-0.109	26.861	0.363
26	0.013	0.084	26.885	0.415
27	0.039	-0.106	27.078	0.460
28	-0.010	-0.041	27.093	0.513
29	0.016	-0.025	27.127	0.565
30	-0.016	0.013	27.161	0.615
31	-0.054	-0.069	27.562	0.644
32	-0.015	-0.026	27.595	0.689
33	0.006	0.117	27.600	0.733
34	0.136	0.105	30.327	0.648
35	0.036	-0.005	30.526	0.684
36	0.066	0.004	31.186	0.697

Correlogram of D_VESTL

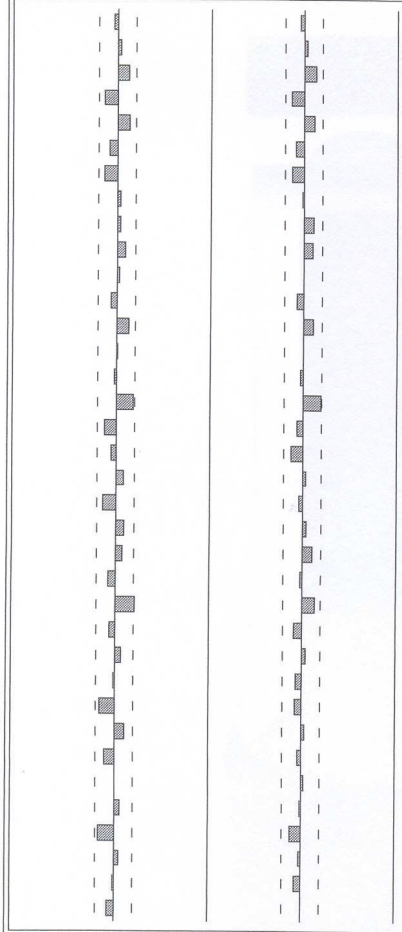
Date: 08/29/05 Time: 14:56
Sample: 1 90
Included observations: 89



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.109	0.109	1.0960	0.295
		2	-0.123	-0.137	2.5130	0.285
		3	0.128	0.163	4.0464	0.257
		4	0.121	0.069	5.4302	0.246
		5	0.043	0.060	5.6088	0.346
		6	0.064	0.061	6.0098	0.422
		7	-0.037	-0.071	6.1480	0.523
		8	-0.036	-0.028	6.2747	0.616
		9	-0.021	-0.059	6.3184	0.708
		10	0.062	0.067	6.7096	0.753
		11	0.100	0.095	7.7478	0.736
		12	0.271	0.309	15.458	0.217
		13	0.129	0.118	17.240	0.189
		14	-0.085	-0.069	18.013	0.206
		15	0.061	-0.004	18.423	0.241
		16	0.127	-0.037	20.226	0.210
		17	0.045	0.006	20.450	0.252
		18	-0.063	-0.087	20.896	0.285
		19	-0.007	0.050	20.902	0.342
		20	0.020	0.047	20.951	0.400
		21	0.077	0.132	21.655	0.420
		22	0.072	0.052	22.274	0.444
		23	0.088	0.041	23.217	0.448
		24	0.032	-0.082	23.345	0.500
		25	-0.015	-0.140	23.372	0.556
		26	0.012	-0.038	23.391	0.611
		27	0.046	-0.025	23.667	0.649
		28	-0.144	-0.188	26.438	0.549
		29	-0.009	0.063	26.449	0.601
		30	-0.116	-0.111	28.297	0.555
		31	-0.077	0.032	29.129	0.563
		32	-0.016	-0.079	29.167	0.611
		33	0.025	-0.009	29.255	0.654
		34	0.028	0.003	29.368	0.694
		35	0.062	0.040	29.937	0.711
		36	0.039	0.054	30.175	0.741

Correlogram of D_YKBNK

Date: 08/29/05 Time: 14:56
Sample: 1 90
Included observations: 89

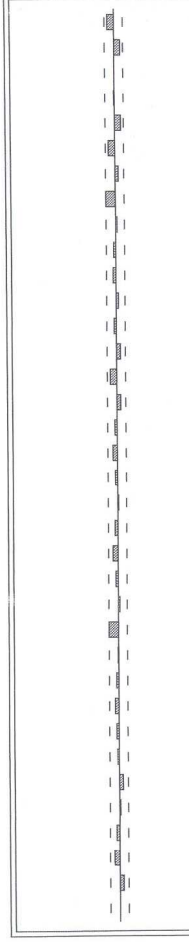


	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.039	-0.039	0.1404	0.708
2	0.037	0.035	0.2656	0.876
3	0.130	0.133	1.8528	0.604
4	-0.145	-0.138	3.8492	0.427
5	0.136	0.121	5.6296	0.344
6	-0.082	-0.087	6.2858	0.392
7	-0.147	-0.128	8.4083	0.298
8	0.037	-0.012	8.5488	0.382
9	0.040	0.113	8.7117	0.464
10	0.096	0.100	9.6638	0.470
11	0.027	0.008	9.7420	0.554
12	-0.064	-0.066	10.176	0.601
13	0.133	0.107	12.060	0.523
14	0.011	0.004	12.074	0.600
15	-0.024	-0.027	12.139	0.669
16	0.193	0.202	16.265	0.435
17	-0.128	-0.059	18.117	0.382
18	-0.049	-0.124	18.396	0.430
19	0.089	0.038	19.316	0.437
20	-0.143	-0.041	21.721	0.356
21	0.093	0.046	22.762	0.357
22	0.075	0.112	23.449	0.377
23	-0.082	-0.023	24.267	0.389
24	0.221	0.141	30.357	0.173
25	-0.058	-0.088	30.787	0.196
26	0.072	0.044	31.447	0.212
27	-0.012	-0.061	31.466	0.252
28	-0.166	-0.074	35.124	0.166
29	0.113	0.041	36.850	0.150
30	-0.110	-0.036	38.507	0.137
31	0.003	0.027	38.509	0.166
32	0.064	-0.016	39.095	0.181
33	-0.175	-0.116	43.547	0.104
34	0.051	-0.017	43.923	0.119
35	-0.015	-0.072	43.958	0.142
36	-0.077	0.008	44.872	0.147

Haftalık Getiriler

Correlogram of G_AKBNK

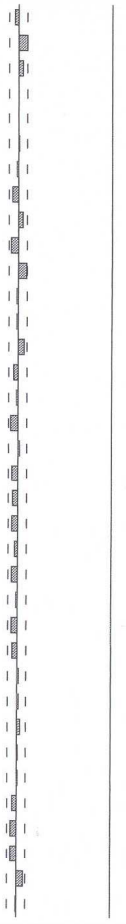
Date: 08/29/05 Time: 15:22
Sample: 1 379
Included observations: 378



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.069	-0.069	1.8167	0.178
2	0.073	0.069	3.8494	0.146
3	0.000	0.010	3.8494	0.278
4	-0.003	-0.007	3.8529	0.426
5	0.066	0.066	5.5518	0.352
6	-0.072	-0.063	7.5271	0.275
7	0.033	0.016	7.9505	0.337
8	-0.105	-0.095	12.250	0.140
9	0.020	0.006	12.412	0.191
10	-0.024	-0.014	12.641	0.244
11	-0.030	-0.025	12.995	0.294
12	0.029	0.021	13.318	0.346
13	-0.021	0.001	13.489	0.411
14	0.041	0.024	14.161	0.438
15	-0.070	-0.059	16.117	0.374
16	0.041	0.022	16.788	0.399
17	-0.017	-0.010	16.905	0.461
18	-0.044	-0.049	17.683	0.477
19	-0.021	-0.037	17.865	0.531
20	0.010	0.030	17.903	0.594
21	-0.030	-0.041	18.277	0.631
22	-0.054	-0.048	19.438	0.618
23	-0.018	-0.029	19.573	0.667
24	0.024	0.035	19.799	0.708
25	-0.102	-0.108	24.035	0.517
26	-0.006	-0.027	24.049	0.573
27	-0.022	-0.010	24.241	0.617
28	-0.038	-0.043	24.847	0.636
29	-0.024	-0.042	25.075	0.674
30	-0.016	-0.013	25.184	0.716
31	0.043	0.039	25.950	0.724
32	0.014	0.022	26.034	0.762
33	-0.030	-0.060	26.409	0.785
34	-0.056	-0.069	27.711	0.768
35	0.042	0.043	28.464	0.775
36	0.007	-0.011	28.487	0.809

Correlogram of G_AKGRT

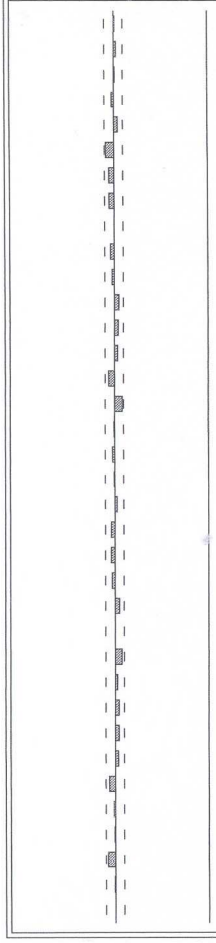
Date: 08/29/05 Time: 15:22
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.033	-0.033	0.4238	0.515
		2	0.106	0.105	4.7313	0.094
		3	0.057	0.065	5.9899	0.112
		4	0.006	-0.001	6.0055	0.199
		5	0.000	-0.013	6.0055	0.306
		6	0.011	0.007	6.0554	0.417
		7	-0.014	-0.013	6.1310	0.525
		8	-0.060	-0.063	7.5261	0.481
		9	0.057	0.055	8.7764	0.458
		10	-0.078	-0.061	11.176	0.344
		11	0.097	0.090	14.842	0.190
		12	-0.010	0.004	14.878	0.248
		13	-0.008	-0.020	14.905	0.313
		14	0.070	0.063	16.865	0.263
		15	-0.049	-0.049	17.813	0.273
		16	-0.011	-0.026	17.865	0.332
		17	-0.074	-0.074	20.049	0.272
		18	0.022	0.020	20.236	0.320
		19	-0.058	-0.021	21.559	0.307
		20	-0.054	-0.071	22.708	0.303
		21	-0.060	-0.043	24.169	0.285
		22	-0.028	-0.017	24.490	0.322
		23	-0.058	-0.054	25.841	0.308
		24	-0.012	0.006	25.897	0.358
		25	-0.060	-0.074	27.351	0.339
		26	-0.054	-0.037	28.530	0.333
		27	0.019	0.018	28.675	0.377
		28	0.021	0.044	28.848	0.420
		29	0.038	0.042	29.442	0.442
		30	0.013	0.004	29.508	0.491
		31	0.013	0.014	29.582	0.539
		32	-0.043	-0.053	30.351	0.550
		33	-0.057	-0.079	31.725	0.531
		34	-0.059	-0.049	33.194	0.507
		35	0.074	0.095	35.494	0.445
		36	-0.007	0.018	35.515	0.491

Correlogram of G_ARCLK

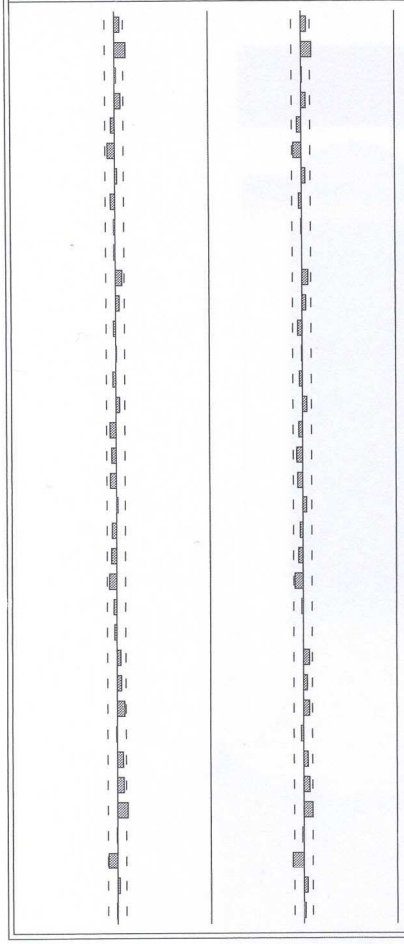
Date: 08/29/05 Time: 15:22
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.013	0.013	0.0693	0.792
		2	0.033	0.032	0.4755	0.788
		3	0.016	0.015	0.5699	0.903
		4	-0.021	-0.023	0.7429	0.946
		5	0.049	0.049	1.6728	0.892
		6	-0.088	-0.089	4.6849	0.585
		7	-0.051	-0.051	5.6953	0.576
		8	-0.056	-0.051	6.8951	0.548
		9	0.001	0.010	6.8953	0.648
		10	-0.035	-0.037	7.3674	0.690
		11	-0.023	-0.015	7.5802	0.750
		12	0.052	0.051	8.6469	0.733
		13	0.048	0.047	9.5688	0.729
		14	0.038	0.021	10.131	0.753
		15	-0.064	-0.072	11.750	0.698
		16	0.083	0.080	14.502	0.561
		17	-0.004	-0.013	14.509	0.631
		18	-0.021	-0.026	14.689	0.683
		19	-0.008	-0.005	14.715	0.741
		20	0.031	0.060	15.099	0.771
		21	-0.033	-0.050	15.542	0.795
		22	-0.035	-0.026	16.044	0.814
		23	-0.025	-0.016	16.302	0.842
		24	0.051	0.067	17.362	0.833
		25	0.002	-0.020	17.364	0.868
		26	0.078	0.082	19.823	0.800
		27	0.028	0.033	20.135	0.825
		28	0.043	0.037	20.896	0.830
		29	0.043	0.013	21.658	0.834
		30	0.035	0.040	22.167	0.848
		31	-0.064	-0.062	23.880	0.815
		32	-0.010	-0.009	23.920	0.847
		33	-0.003	0.002	23.925	0.876
		34	-0.078	-0.052	26.480	0.818
		35	-0.001	0.022	26.480	0.849
		36	0.006	0.019	26.497	0.876

Correlogram of G_DOHOL

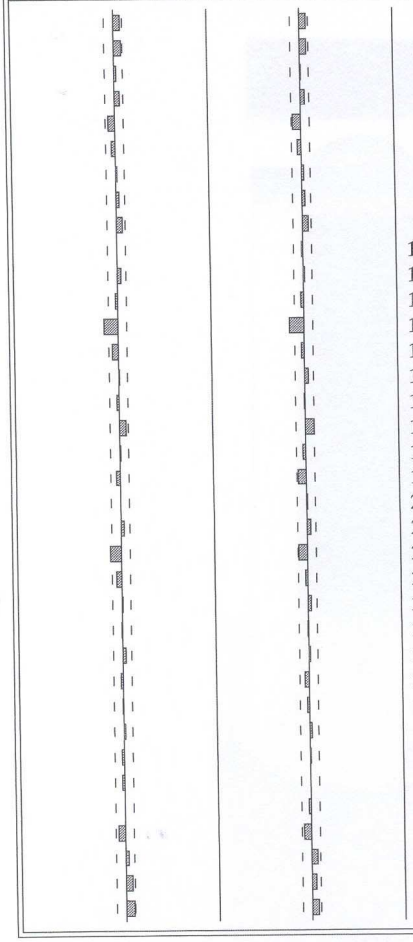
Date: 08/29/05 Time: 15:22
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.059	0.059	1.3171	0.251
		2	0.125	0.122	7.3050	0.026
		3	0.023	0.010	7.5147	0.057
		4	0.066	0.050	9.1967	0.056
		5	-0.037	-0.048	9.7323	0.083
		6	-0.077	-0.088	12.001	0.062
		7	0.030	0.048	12.358	0.089
		8	-0.042	-0.029	13.031	0.111
		9	-0.010	-0.008	13.072	0.159
		10	-0.014	0.004	13.143	0.216
		11	0.078	0.072	15.525	0.160
		12	0.045	0.041	16.318	0.177
		13	-0.025	-0.044	16.555	0.220
		14	0.011	-0.006	16.602	0.278
		15	-0.027	-0.031	16.891	0.325
		16	0.045	0.049	17.688	0.343
		17	-0.060	-0.040	19.141	0.321
		18	-0.048	-0.059	20.067	0.329
		19	-0.065	-0.050	21.742	0.297
		20	0.020	0.043	21.909	0.345
		21	-0.047	-0.030	22.804	0.355
		22	-0.050	-0.048	23.798	0.358
		23	-0.076	-0.085	26.106	0.296
		24	-0.025	-0.012	26.368	0.335
		25	-0.022	0.005	26.566	0.378
		26	0.043	0.066	27.323	0.393
		27	0.057	0.043	28.634	0.379
		28	0.088	0.067	31.792	0.283
		29	0.000	-0.017	31.792	0.329
		30	0.067	0.052	33.619	0.296
		31	0.078	0.066	36.162	0.240
		32	0.119	0.100	42.037	0.110
		33	-0.007	-0.014	42.057	0.134
		34	-0.098	-0.120	46.032	0.082
		35	0.030	0.041	46.411	0.094
		36	-0.005	0.017	46.421	0.114

Correlogram of G_ENKAI

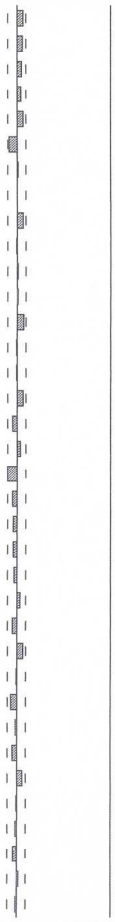
Date: 08/29/05 Time: 15:21
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.078	0.078	2.3456	0.126
		2	0.087	0.081	5.2286	0.073
		3	0.027	0.014	5.5028	0.138
		4	0.061	0.052	6.9451	0.139
		5	-0.070	-0.083	8.8383	0.116
		6	-0.037	-0.036	9.3596	0.154
		7	0.017	0.033	9.4676	0.221
		8	0.037	0.040	10.007	0.265
		9	0.069	0.072	11.851	0.222
		10	0.006	-0.013	11.864	0.294
		11	0.044	0.023	12.615	0.319
		12	-0.019	-0.030	12.751	0.387
		13	-0.151	-0.160	21.756	0.059
		14	-0.065	-0.030	23.446	0.053
		15	0.013	0.048	23.509	0.074
		16	-0.019	-0.002	23.652	0.097
		17	0.081	0.102	26.263	0.070
		18	0.009	-0.028	26.297	0.093
		19	-0.040	-0.086	26.931	0.106
		20	0.007	0.013	26.948	0.137
		21	0.033	0.046	27.388	0.158
		22	-0.123	-0.095	33.451	0.056
		23	-0.050	-0.020	34.463	0.059
		24	0.011	0.033	34.515	0.076
		25	-0.001	-0.008	34.516	0.097
		26	0.034	0.018	34.994	0.112
		27	-0.023	-0.047	35.203	0.134
		28	-0.002	-0.018	35.204	0.164
		29	0.017	0.030	35.327	0.194
		30	-0.024	0.009	35.560	0.223
		31	-0.022	0.006	35.761	0.255
		32	0.005	-0.021	35.772	0.296
		33	-0.073	-0.080	37.994	0.252
		34	0.041	0.073	38.687	0.266
		35	0.078	0.057	41.215	0.217
		36	0.097	0.078	45.159	0.141

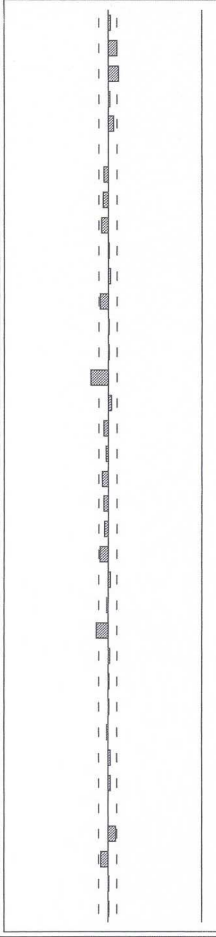
Correlogram of G_EREGL

Date: 08/29/05 Time: 15:21
Sample: 1 379
Included observations: 378

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.067	0.067	1.7268	0.189
		2	0.065	0.061	3.3292	0.189
		3	0.053	0.045	4.4044	0.221
		4	0.046	0.037	5.2251	0.265
		5	0.074	0.063	7.3119	0.198
		6	-0.086	-0.102	10.153	0.118
		7	0.013	0.013	10.217	0.177
		8	0.002	0.004	10.220	0.250
		9	0.068	0.072	12.041	0.211
		10	-0.004	-0.012	12.046	0.282
		11	0.013	0.019	12.110	0.355
		12	0.015	-0.004	12.194	0.430
		13	0.077	0.074	14.507	0.339
		14	-0.006	-0.028	14.523	0.412
		15	-0.002	0.006	14.524	0.486
		16	0.072	0.062	16.573	0.414
		17	-0.043	-0.055	17.325	0.433
		18	0.036	0.022	17.829	0.467
		19	-0.102	-0.093	21.981	0.285
		20	-0.044	-0.042	22.763	0.301
		21	-0.035	-0.029	23.254	0.331
		22	-0.036	-0.010	23.780	0.359
		23	-0.028	-0.024	24.106	0.398
		24	0.034	0.069	24.567	0.430
		25	-0.048	-0.075	25.508	0.434
		26	0.069	0.085	27.469	0.385
		27	-0.004	-0.021	27.477	0.438
		28	-0.059	-0.052	28.926	0.416
		29	-0.014	-0.027	29.008	0.465
		30	-0.042	-0.005	29.722	0.480
		31	0.060	0.049	31.196	0.456
		32	-0.004	0.032	31.203	0.507
		33	-0.008	-0.007	31.231	0.555
		34	-0.033	-0.042	31.685	0.582
		35	0.020	0.035	31.860	0.620
		36	-0.008	-0.027	31.890	0.664

Correlogram of G_FINBN

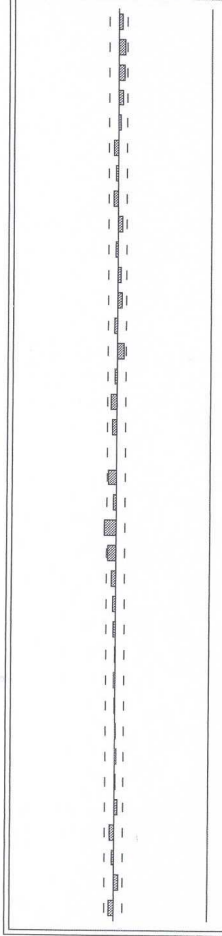
Date: 08/29/05 Time: 15:20
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.033	0.033	0.4069	0.524
		2	0.103	0.102	4.4811	0.106
		3	0.117	0.112	9.7511	0.021
		4	0.020	0.004	9.9041	0.042
		5	0.059	0.036	11.235	0.047
		6	0.004	-0.013	11.243	0.081
		7	-0.042	-0.056	11.941	0.103
		8	-0.054	-0.065	13.093	0.109
		9	-0.069	-0.060	14.932	0.093
		10	0.016	0.039	15.026	0.131
		11	0.028	0.057	15.328	0.168
		12	-0.084	-0.071	18.073	0.113
		13	0.015	0.012	18.166	0.151
		14	0.016	0.026	18.266	0.195
		15	-0.195	-0.200	33.239	0.004
		16	0.037	0.027	33.795	0.006
		17	-0.046	-0.011	34.643	0.007
		18	-0.023	0.015	34.853	0.010
		19	-0.061	-0.058	36.332	0.010
		20	-0.045	-0.019	37.134	0.011
		21	-0.038	-0.037	37.722	0.014
		22	-0.088	-0.083	40.829	0.009
		23	0.026	0.033	41.107	0.012
		24	-0.012	-0.014	41.167	0.016
		25	-0.131	-0.111	48.121	0.004
		26	0.024	0.043	48.346	0.005
		27	0.012	0.004	48.400	0.007
		28	0.010	0.024	48.440	0.010
		29	-0.011	-0.026	48.493	0.013
		30	0.025	-0.012	48.759	0.017
		31	0.025	0.027	49.021	0.021
		32	0.003	-0.018	49.024	0.028
		33	0.088	0.082	52.236	0.018
		34	-0.079	-0.142	54.840	0.013
		35	0.010	0.020	54.886	0.017
		36	0.011	0.012	54.935	0.023

Correlogram of G_FROTO

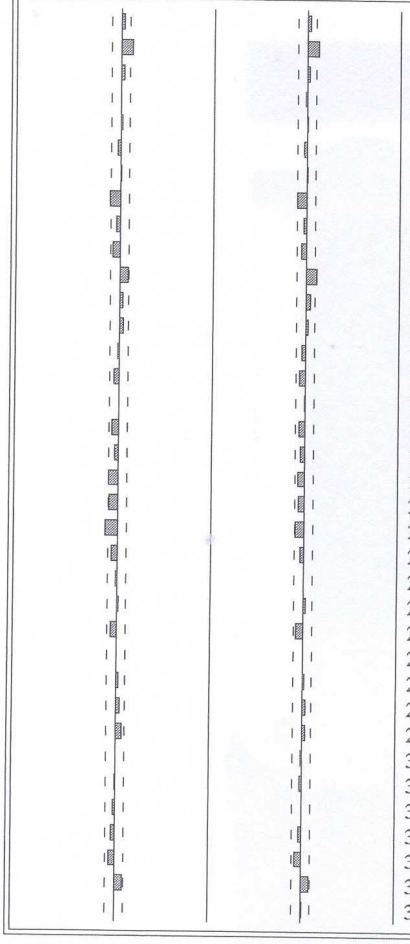
Date: 08/29/05 Time: 15:20
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.049	0.049	0.9011	0.342
		2	0.079	0.077	3.2744	0.195
		3	0.069	0.062	5.1081	0.164
		4	0.055	0.044	6.2893	0.179
		5	0.030	0.016	6.6291	0.250
		6	-0.042	-0.056	7.3022	0.294
		7	-0.018	-0.024	7.4235	0.386
		8	-0.041	-0.039	8.0834	0.425
		9	0.057	0.068	9.3276	0.408
		10	-0.022	-0.014	9.5175	0.484
		11	0.038	0.041	10.074	0.524
		12	0.055	0.051	11.277	0.505
		13	-0.027	-0.042	11.571	0.563
		14	0.080	0.066	14.077	0.444
		15	-0.023	-0.032	14.285	0.504
		16	-0.059	-0.073	15.648	0.478
		17	-0.042	-0.035	16.357	0.499
		18	0.005	0.017	16.368	0.567
		19	-0.088	-0.074	19.493	0.426
		20	-0.027	-0.003	19.785	0.471
		21	-0.130	-0.123	26.569	0.186
		22	-0.085	-0.062	29.480	0.132
		23	-0.049	-0.042	30.445	0.137
		24	-0.026	0.007	30.726	0.162
		25	-0.022	0.002	30.921	0.192
		26	-0.003	0.010	30.924	0.231
		27	-0.012	-0.012	30.982	0.272
		28	-0.005	-0.002	30.995	0.317
		29	0.015	0.001	31.084	0.361
		30	0.023	0.043	31.309	0.400
		31	0.014	0.025	31.391	0.447
		32	0.040	0.036	32.039	0.465
		33	-0.047	-0.034	32.953	0.470
		34	-0.024	-0.032	33.191	0.507
		35	0.057	0.069	34.532	0.491
		36	-0.052	-0.055	35.653	0.485

Correlogram of G_GARAN

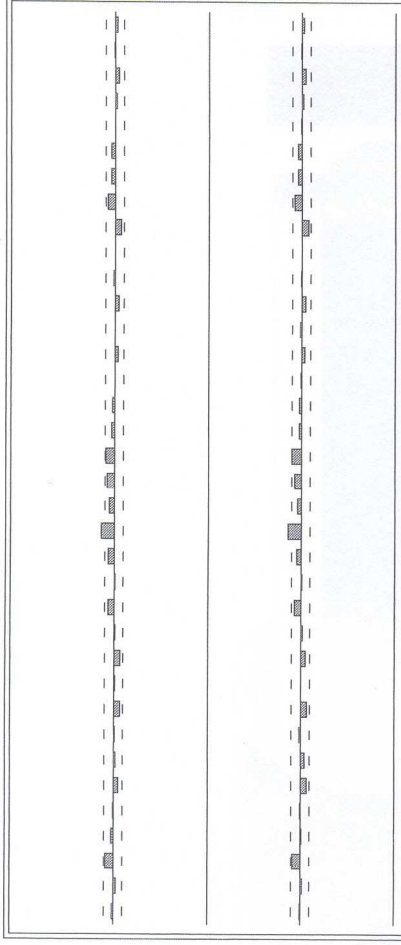
Date: 08/29/05 Time: 15:19
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.037	0.037	0.5122	0.474
		2	0.127	0.126	6.6569	0.036
		3	0.035	0.027	7.1344	0.068
		4	0.006	-0.012	7.1470	0.128
		5	0.020	0.013	7.3077	0.199
		6	-0.026	-0.027	7.5638	0.272
		7	0.011	0.009	7.6142	0.368
		8	-0.108	-0.105	12.138	0.145
		9	-0.035	-0.031	12.621	0.181
		10	-0.075	-0.049	14.822	0.139
		11	0.093	0.115	18.193	0.077
		12	0.041	0.053	18.850	0.092
		13	0.049	0.031	19.790	0.101
		14	-0.010	-0.037	19.833	0.135
		15	-0.053	-0.064	20.932	0.139
		16	0.008	-0.004	20.957	0.180
		17	-0.067	-0.058	22.757	0.157
		18	-0.033	-0.045	23.189	0.183
		19	-0.102	-0.072	27.336	0.097
		20	-0.093	-0.065	30.829	0.057
		21	-0.139	-0.093	38.565	0.011
		22	-0.063	-0.037	40.180	0.010
		23	-0.011	0.005	40.230	0.014
		24	0.020	0.030	40.400	0.019
		25	-0.058	-0.078	41.772	0.019
		26	0.003	0.002	41.776	0.026
		27	0.032	0.024	42.187	0.032
		28	0.043	0.040	42.951	0.035
		29	0.069	0.034	44.914	0.030
		30	0.004	-0.015	44.921	0.039
		31	-0.002	-0.018	44.923	0.051
		32	-0.018	0.007	45.058	0.063
		33	-0.036	-0.027	45.610	0.071
		34	-0.060	-0.067	47.132	0.066
		35	0.090	0.085	50.504	0.044
		36	0.003	0.014	50.509	0.055

Correlogram of G_HURGZ

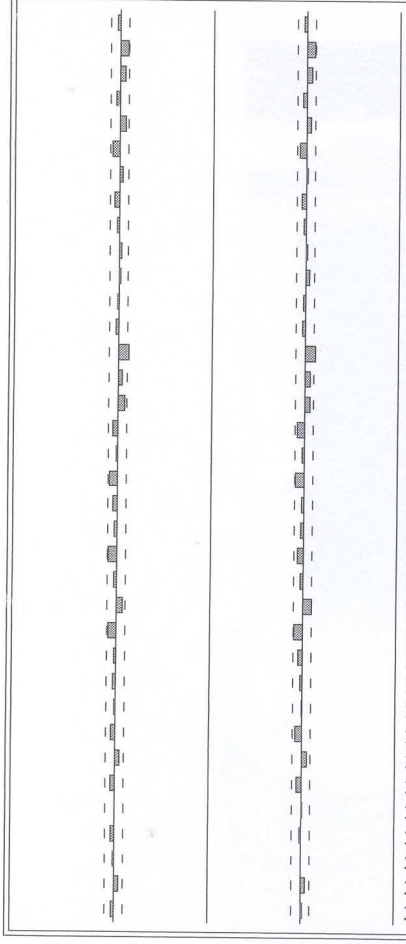
Date: 08/29/05 Time: 15:19
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.026	0.026	0.2495	0.617
		2	-0.004	-0.004	0.2550	0.880
		3	0.044	0.044	0.9999	0.801
		4	0.024	0.022	1.2269	0.874
		5	0.000	0.000	1.2269	0.942
		6	-0.034	-0.036	1.6719	0.947
		7	-0.036	-0.036	2.1681	0.950
		8	-0.077	-0.076	4.4549	0.814
		9	0.070	0.077	6.3855	0.701
		10	0.000	0.001	6.3856	0.782
		11	-0.015	-0.006	6.4761	0.840
		12	0.049	0.046	7.4250	0.828
		13	0.000	-0.009	7.4250	0.879
		14	0.041	0.036	8.0755	0.885
		15	0.002	-0.005	8.0765	0.921
		16	-0.018	-0.021	8.2001	0.943
		17	-0.030	-0.022	8.5568	0.953
		18	-0.096	-0.101	12.203	0.837
		19	-0.075	-0.069	14.427	0.758
		20	-0.051	-0.035	15.458	0.750
		21	-0.142	-0.141	23.529	0.316
		22	-0.062	-0.044	25.086	0.293
		23	0.015	0.013	25.175	0.341
		24	-0.065	-0.071	26.886	0.310
		25	0.013	0.017	26.951	0.358
		26	0.071	0.052	29.018	0.310
		27	0.011	0.006	29.069	0.358
		28	0.071	0.074	31.130	0.311
		29	0.008	-0.015	31.158	0.358
		30	0.021	0.042	31.345	0.399
		31	0.054	0.069	32.546	0.391
		32	-0.001	-0.008	32.546	0.440
		33	-0.023	0.013	32.760	0.479
		34	-0.087	-0.083	35.896	0.380
		35	0.032	0.022	36.323	0.407
		36	-0.009	-0.005	36.357	0.452

Correlogram of G_ISCTR

Date: 08/29/05 Time: 15:18
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.025	-0.025	0.2468	0.619
		2	0.095	0.095	3.7050	0.157
		3	0.060	0.065	5.0860	0.166
		4	-0.033	-0.040	5.5133	0.239
		5	0.069	0.056	7.3321	0.197
		6	-0.075	-0.070	9.5118	0.147
		7	0.034	0.023	9.9541	0.191
		8	-0.050	-0.045	10.919	0.206
		9	-0.023	-0.018	11.128	0.267
		10	0.027	0.023	11.408	0.327
		11	0.020	0.042	11.570	0.397
		12	-0.012	-0.025	11.623	0.476
		13	-0.029	-0.031	11.952	0.532
		14	0.123	0.121	17.912	0.211
		15	0.046	0.059	18.761	0.225
		16	0.078	0.061	21.170	0.172
		17	-0.051	-0.075	22.195	0.177
		18	-0.010	-0.025	22.237	0.222
		19	-0.083	-0.096	25.008	0.160
		20	-0.044	-0.024	25.799	0.173
		21	-0.025	-0.028	26.047	0.205
		22	-0.096	-0.061	29.797	0.123
		23	-0.030	-0.028	30.168	0.145
		24	0.068	0.104	32.025	0.126
		25	-0.089	-0.096	35.244	0.084
		26	-0.019	-0.045	35.386	0.104
		27	-0.028	-0.016	35.699	0.122
		28	-0.009	-0.002	35.735	0.149
		29	-0.043	-0.066	36.487	0.160
		30	0.055	0.058	37.738	0.157
		31	-0.047	-0.057	38.652	0.162
		32	0.001	0.010	38.652	0.194
		33	-0.037	-0.008	39.215	0.211
		34	-0.016	0.001	39.319	0.244
		35	0.052	0.051	40.437	0.243
		36	-0.031	0.020	40.840	0.266

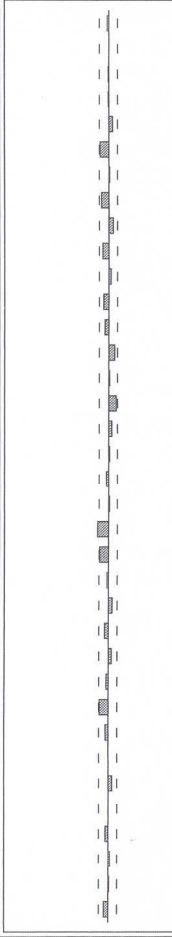
Correlogram of G_KCHOL

Date: 08/29/05 Time: 15:32
Sample: 1 379
Included observations: 378

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.089	0.089	3.0094	0.083
		2	0.058	0.050	4.2934	0.117
		3	0.025	0.016	4.5304	0.210
		4	-0.029	-0.035	4.8473	0.303
		5	0.001	0.005	4.8480	0.435
		6	-0.091	-0.090	8.0562	0.234
		7	-0.044	-0.028	8.7926	0.268
		8	-0.037	-0.023	9.3107	0.317
		9	0.055	0.070	10.507	0.311
		10	-0.014	-0.026	10.584	0.391
		11	0.032	0.031	10.989	0.444
		12	0.016	0.001	11.092	0.521
		13	0.010	0.005	11.132	0.600
		14	0.071	0.060	13.135	0.516
		15	-0.002	-0.003	13.137	0.592
		16	0.041	0.036	13.811	0.613
		17	-0.093	-0.098	17.240	0.438
		18	-0.018	-0.003	17.363	0.498
		19	-0.065	-0.054	19.034	0.455
		20	0.019	0.048	19.180	0.510
		21	-0.022	-0.025	19.370	0.561
		22	-0.099	-0.086	23.299	0.385
		23	-0.041	-0.053	23.974	0.405
		24	0.051	0.073	25.046	0.403
		25	-0.043	-0.074	25.802	0.418
		26	0.001	0.019	25.803	0.474
		27	0.025	0.016	26.064	0.515
		28	0.031	0.029	26.467	0.547
		29	0.002	-0.033	26.469	0.600
		30	0.007	0.014	26.489	0.650
		31	-0.001	0.013	26.490	0.698
		32	0.063	0.071	28.163	0.661
		33	-0.038	-0.045	28.777	0.677
		34	-0.052	-0.047	29.909	0.669
		35	-0.042	-0.035	30.656	0.678
		36	-0.006	0.014	30.670	0.720

Correlogram of G_MIGRS

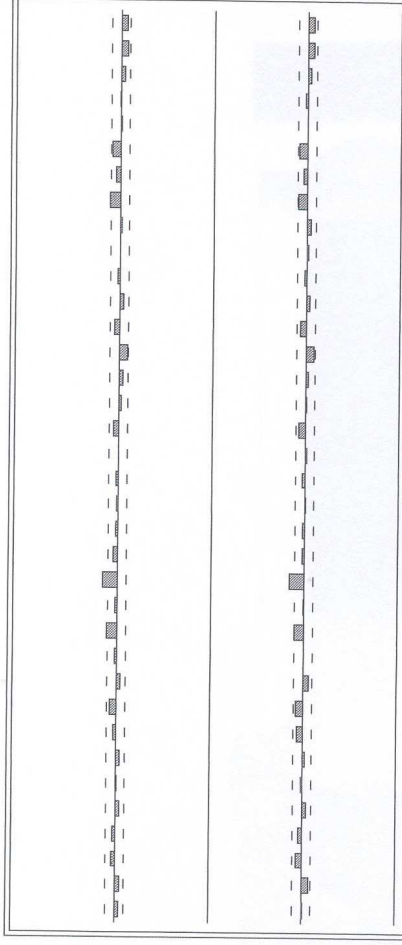
Date: 08/29/05 Time: 15:17
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.015	-0.015	0.0806	0.776
		2	0.001	0.001	0.0813	0.960
		3	-0.001	-0.001	0.0815	0.994
		4	0.000	0.000	0.0815	0.999
		5	0.043	0.043	0.8073	0.977
		6	-0.094	-0.093	4.2374	0.645
		7	0.016	0.014	4.3395	0.740
		8	-0.080	-0.080	6.8287	0.555
		9	0.052	0.051	7.8732	0.547
		10	-0.060	-0.063	9.2656	0.507
		11	0.029	0.039	9.6046	0.566
		12	-0.050	-0.063	10.586	0.565
		13	-0.040	-0.028	11.201	0.594
		14	0.069	0.048	13.094	0.519
		15	0.011	0.030	13.141	0.591
		16	0.084	0.064	15.910	0.459
		17	0.034	0.057	16.383	0.497
		18	0.016	-0.002	16.489	0.558
		19	-0.019	-0.019	16.639	0.614
		20	0.015	0.010	16.731	0.670
		21	-0.120	-0.125	22.503	0.371
		22	-0.094	-0.084	26.031	0.250
		23	-0.012	-0.017	26.091	0.297
		24	0.047	0.068	26.993	0.305
		25	-0.033	-0.044	27.430	0.335
		26	0.036	0.067	27.946	0.361
		27	-0.024	-0.039	28.183	0.402
		28	-0.094	-0.101	31.839	0.281
		29	-0.027	-0.056	32.145	0.314
		30	0.005	0.016	32.157	0.360
		31	0.044	0.014	32.953	0.372
		32	0.002	0.021	32.955	0.420
		33	-0.032	-0.054	33.378	0.449
		34	0.017	-0.003	33.494	0.492
		35	0.015	-0.002	33.588	0.536
		36	-0.047	-0.034	34.534	0.538

Correlogram of G_SAHOL

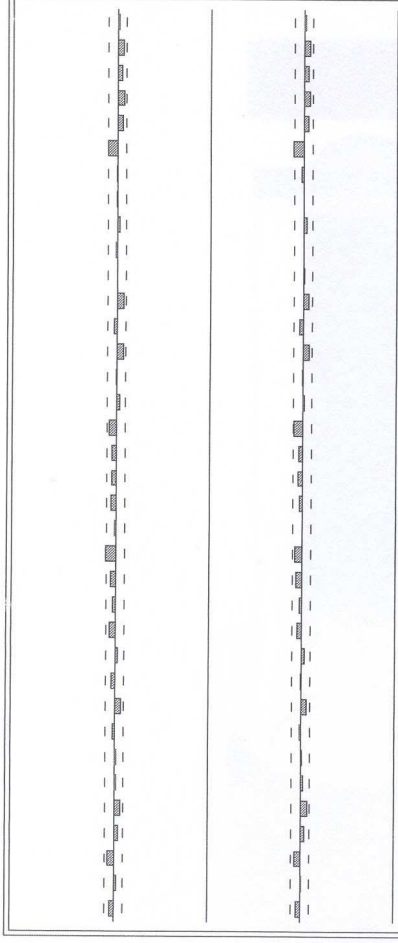
Date: 08/29/05 Time: 15:16
Sample: 1 379
Included observations: 378



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.072	0.072	1.9636	0.161
2	0.078	0.073	4.2599	0.119
3	0.046	0.036	5.0560	0.168
4	-0.007	-0.019	5.0774	0.279
5	0.012	0.008	5.1361	0.399
6	-0.087	-0.089	8.0751	0.233
7	-0.048	-0.037	8.9503	0.256
8	-0.109	-0.094	13.578	0.093
9	0.017	0.044	13.688	0.134
10	0.006	0.018	13.701	0.187
11	-0.024	-0.019	13.925	0.237
12	0.042	0.034	14.621	0.263
13	-0.053	-0.061	15.710	0.265
14	0.097	0.084	19.401	0.150
15	0.043	0.033	20.141	0.167
16	0.029	0.014	20.486	0.199
17	-0.051	-0.068	21.537	0.203
18	0.008	0.019	21.563	0.252
19	-0.020	-0.031	21.721	0.298
20	-0.011	0.015	21.767	0.353
21	-0.018	-0.019	21.897	0.405
22	-0.049	-0.017	22.860	0.410
23	-0.158	-0.163	32.913	0.083
24	-0.025	-0.004	33.158	0.101
25	-0.108	-0.099	37.864	0.048
26	-0.020	0.008	38.033	0.060
27	0.044	0.063	38.833	0.066
28	-0.070	-0.080	40.870	0.055
29	-0.030	-0.062	41.245	0.066
30	0.045	0.027	42.095	0.070
31	0.012	-0.011	42.158	0.087
32	0.046	0.045	43.018	0.092
33	-0.030	-0.039	43.395	0.106
34	-0.040	-0.060	44.065	0.116
35	0.057	0.081	45.412	0.112
36	0.049	0.016	46.419	0.114

Correlogram of G_SISE

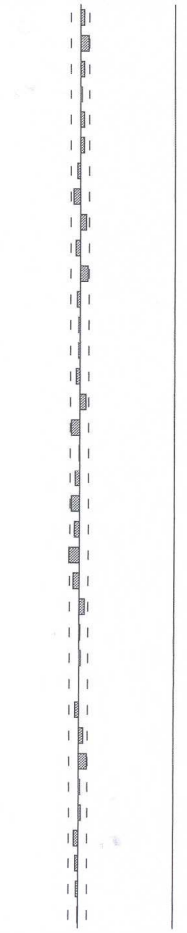
Date: 08/29/05 Time: 15:16
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.019	0.019	0.1372	0.711
		2	0.070	0.070	2.0240	0.363
		3	0.053	0.051	3.1203	0.373
		4	0.076	0.070	5.3335	0.255
		5	0.063	0.055	6.8788	0.230
		6	-0.099	-0.114	10.652	0.100
		7	-0.005	-0.019	10.663	0.154
		8	-0.002	0.001	10.665	0.221
		9	0.030	0.035	11.010	0.275
		10	-0.009	0.005	11.039	0.355
		11	0.005	0.016	11.050	0.439
		12	0.075	0.064	13.277	0.349
		13	-0.026	-0.038	13.553	0.406
		14	0.079	0.068	16.039	0.311
		15	-0.006	-0.006	16.052	0.379
		16	0.034	0.017	16.513	0.418
		17	-0.079	-0.092	19.004	0.328
		18	-0.042	-0.037	19.696	0.350
		19	-0.043	-0.047	20.421	0.370
		20	-0.057	-0.032	21.719	0.356
		21	-0.015	0.004	21.815	0.410
		22	-0.112	-0.082	26.917	0.214
		23	-0.057	-0.063	28.242	0.207
		24	-0.029	-0.019	28.578	0.236
		25	-0.061	-0.048	30.099	0.221
		26	0.026	0.038	30.383	0.252
		27	-0.039	-0.008	30.998	0.271
		28	0.070	0.061	32.997	0.236
		29	-0.019	-0.011	33.153	0.272
		30	0.022	0.011	33.350	0.308
		31	0.018	0.026	33.485	0.348
		32	0.068	0.082	35.395	0.311
		33	0.044	0.047	36.205	0.321
		34	-0.073	-0.060	38.439	0.275
		35	0.028	0.010	38.774	0.303
		36	-0.044	-0.047	39.588	0.313

Correlogram of G_TNSAS

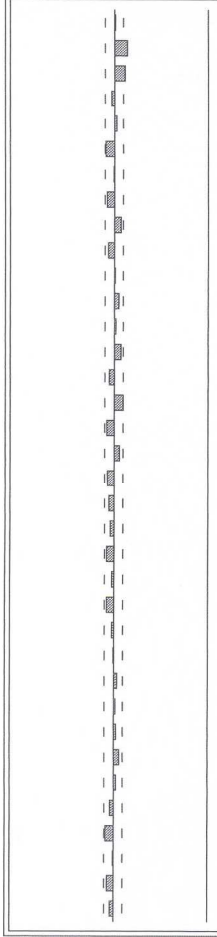
Date: 08/29/05 Time: 15:15
Sample: 1 379
Included observations: 378



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.041	0.041	0.6559	0.418
2	0.098	0.096	4.2919	0.117
3	0.041	0.034	4.9512	0.175
4	0.022	0.010	5.1336	0.274
5	0.047	0.039	5.9798	0.308
6	0.043	0.037	6.7055	0.349
7	-0.028	-0.040	7.0029	0.429
8	-0.066	-0.076	8.6922	0.369
9	0.073	0.081	10.752	0.293
10	-0.044	-0.037	11.504	0.320
11	0.086	0.078	14.388	0.212
12	-0.032	-0.034	14.799	0.253
13	-0.015	-0.018	14.891	0.314
14	-0.011	-0.011	14.941	0.382
15	-0.033	-0.038	15.380	0.424
16	0.066	0.072	17.087	0.380
17	-0.085	-0.084	19.962	0.276
18	-0.003	-0.005	19.965	0.335
19	-0.045	-0.017	20.765	0.350
20	-0.082	-0.095	23.490	0.265
21	-0.050	-0.028	24.512	0.269
22	-0.113	-0.110	29.638	0.128
23	-0.060	-0.023	31.085	0.121
24	0.065	0.110	32.773	0.109
25	0.011	0.003	32.818	0.136
26	0.018	0.046	32.950	0.164
27	0.003	-0.030	32.954	0.199
28	-0.034	-0.024	33.427	0.220
29	0.052	0.050	34.527	0.220
30	0.095	0.072	38.237	0.144
31	0.018	0.040	38.375	0.170
32	0.032	0.011	38.804	0.190
33	-0.044	-0.048	39.606	0.199
34	-0.033	-0.044	40.054	0.219
35	-0.019	-0.061	40.200	0.251
36	-0.003	0.010	40.204	0.289

Correlogram of G_TOASO

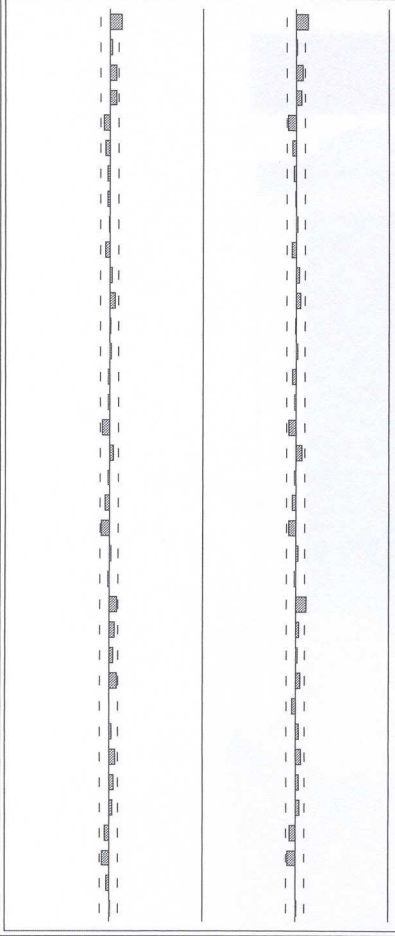
Date: 08/29/05 Time: 15:15
Sample: 1 379
Included observations: 378



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.012	0.012	0.0537	0.817
2	0.142	0.142	7.7268	0.021
3	0.123	0.122	13.501	0.004
4	-0.031	-0.054	13.875	0.008
5	0.030	-0.005	14.221	0.014
6	-0.091	-0.097	17.411	0.008
7	-0.006	0.000	17.427	0.015
8	-0.078	-0.059	19.810	0.011
9	0.080	0.112	22.329	0.008
10	-0.058	-0.048	23.650	0.009
11	0.013	0.009	23.718	0.014
12	0.055	0.031	24.900	0.015
13	0.021	0.042	25.075	0.023
14	0.074	0.041	27.252	0.018
15	-0.053	-0.058	28.374	0.019
16	0.102	0.074	32.469	0.009
17	-0.081	-0.075	35.054	0.006
18	0.064	0.059	36.665	0.006
19	-0.066	-0.067	38.417	0.005
20	-0.049	-0.020	39.395	0.006
21	-0.033	-0.060	39.839	0.008
22	-0.075	-0.018	42.090	0.006
23	-0.023	-0.037	42.304	0.008
24	-0.078	-0.023	44.757	0.006
25	-0.021	-0.048	44.945	0.008
26	-0.005	0.033	44.954	0.012
27	0.035	0.028	45.469	0.015
28	0.017	0.018	45.592	0.019
29	0.028	0.015	45.921	0.024
30	0.064	0.031	47.598	0.022
31	0.029	0.039	47.957	0.027
32	-0.034	-0.081	48.439	0.031
33	-0.088	-0.071	51.681	0.020
34	-0.001	-0.003	51.682	0.027
35	-0.067	-0.004	53.583	0.023
36	-0.041	-0.023	54.278	0.026

Correlogram of G_ULKER

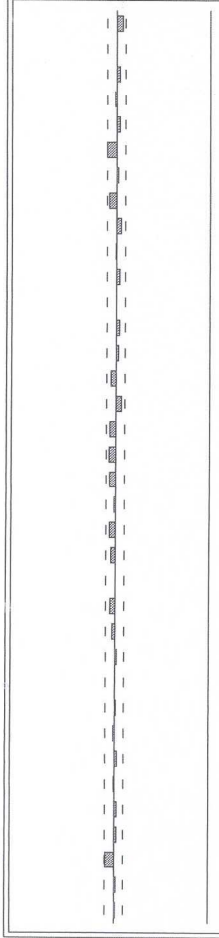
Date: 08/29/05 Time: 15:30
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.133	0.133	6.7743	0.009
		2	0.031	0.014	7.1454	0.028
		3	0.082	0.077	9.6973	0.021
		4	0.081	0.061	12.216	0.016
		5	-0.060	-0.083	13.599	0.018
		6	-0.043	-0.034	14.313	0.026
		7	-0.022	-0.021	14.498	0.043
		8	-0.019	-0.007	14.634	0.067
		9	-0.001	0.020	14.634	0.101
		10	-0.042	-0.041	15.332	0.120
		11	0.025	0.037	15.584	0.157
		12	0.060	0.052	17.001	0.150
		13	0.009	-0.005	17.034	0.198
		14	0.021	0.021	17.202	0.246
		15	-0.010	-0.035	17.239	0.305
		16	-0.009	-0.013	17.271	0.368
		17	-0.080	-0.074	19.805	0.284
		18	0.043	0.069	20.533	0.304
		19	-0.011	-0.010	20.577	0.361
		20	-0.044	-0.034	21.358	0.376
		21	-0.087	-0.077	24.403	0.274
		22	0.020	0.029	24.562	0.318
		23	-0.014	-0.013	24.647	0.369
		24	0.089	0.115	27.857	0.266
		25	0.058	0.034	29.215	0.255
		26	0.045	0.017	30.031	0.266
		27	0.084	0.055	32.905	0.200
		28	0.001	-0.038	32.906	0.239
		29	0.029	0.040	33.250	0.268
		30	0.070	0.058	35.297	0.232
		31	0.051	0.035	36.364	0.233
		32	0.038	0.048	36.977	0.250
		33	-0.041	-0.063	37.677	0.264
		34	-0.080	-0.084	40.349	0.210
		35	-0.026	0.005	40.634	0.236
		36	0.015	0.010	40.731	0.270

Correlogram of G_VESTL

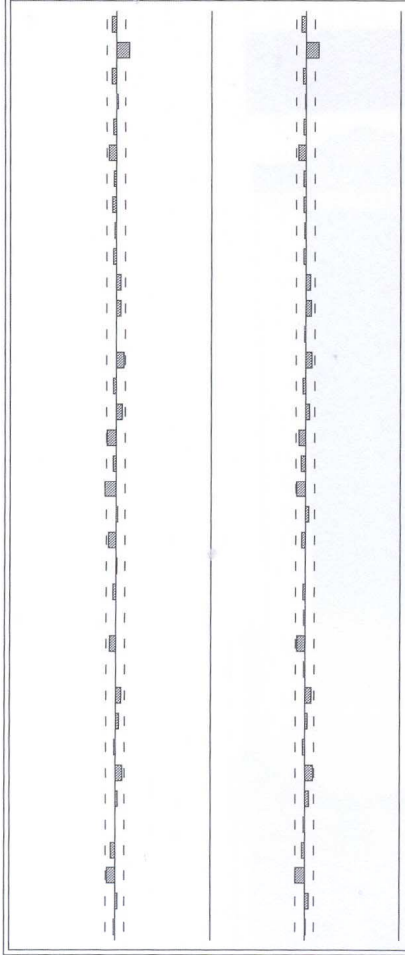
Date: 08/29/05 Time: 15:15
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.073	0.073	2.0458	0.153
		2	0.001	-0.005	2.0460	0.360
		3	0.036	0.036	2.5348	0.469
		4	-0.012	-0.017	2.5873	0.629
		5	0.035	0.037	3.0543	0.692
		6	-0.104	-0.112	7.2199	0.301
		7	0.017	0.035	7.3260	0.396
		8	-0.082	-0.092	9.9204	0.271
		9	0.051	0.078	10.951	0.279
		10	-0.003	-0.025	10.954	0.361
		11	0.036	0.061	11.467	0.405
		12	0.006	-0.029	11.480	0.488
		13	0.033	0.059	11.914	0.535
		14	0.030	-0.012	12.276	0.584
		15	-0.053	-0.029	13.405	0.571
		16	0.065	0.049	15.060	0.520
		17	-0.060	-0.050	16.510	0.488
		18	-0.067	-0.067	18.306	0.436
		19	-0.062	-0.044	19.831	0.405
		20	-0.014	-0.001	19.908	0.464
		21	-0.060	-0.069	21.365	0.437
		22	-0.043	-0.012	22.109	0.453
		23	0.002	-0.018	22.110	0.514
		24	-0.052	-0.039	23.197	0.508
		25	-0.028	-0.051	23.523	0.547
		26	0.019	0.035	23.669	0.595
		27	0.008	-0.019	23.692	0.647
		28	0.016	0.035	23.794	0.692
		29	-0.009	-0.027	23.829	0.737
		30	0.031	0.042	24.229	0.762
		31	-0.005	-0.014	24.241	0.801
		32	0.028	0.042	24.562	0.823
		33	0.031	0.017	24.951	0.842
		34	-0.090	-0.075	28.349	0.741
		35	0.019	0.029	28.497	0.773
		36	0.016	0.008	28.610	0.805

Correlogram of G_YKBNK

Date: 08/29/05 Time: 15:15
Sample: 1 379
Included observations: 378



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.048	-0.048	0.8668	0.352
		2	0.147	0.145	9.1082	0.011
		3	-0.042	-0.029	9.7698	0.021
		4	0.022	-0.002	9.9499	0.041
		5	-0.031	-0.021	10.325	0.067
		6	-0.074	-0.082	12.433	0.053
		7	-0.023	-0.021	12.633	0.082
		8	-0.039	-0.021	13.224	0.104
		9	-0.015	-0.016	13.311	0.149
		10	-0.026	-0.019	13.576	0.193
		11	0.052	0.050	14.617	0.201
		12	0.053	0.058	15.712	0.205
		13	0.003	-0.013	15.715	0.265
		14	0.083	0.068	18.431	0.188
		15	-0.032	-0.028	18.830	0.222
		16	0.069	0.043	20.732	0.189
		17	-0.096	-0.073	24.424	0.108
		18	-0.028	-0.049	24.743	0.132
		19	-0.119	-0.092	30.383	0.047
		20	0.024	0.034	30.610	0.061
		21	-0.074	-0.041	32.837	0.048
		22	0.011	0.001	32.882	0.064
		23	-0.026	-0.021	33.147	0.079
		24	0.008	-0.009	33.173	0.100
		25	-0.065	-0.087	34.896	0.090
		26	0.007	-0.009	34.914	0.114
		27	0.063	0.067	36.557	0.104
		28	0.036	0.031	37.094	0.117
		29	-0.014	-0.021	37.173	0.142
		30	0.081	0.083	39.884	0.107
		31	0.027	0.047	40.176	0.125
		32	0.007	-0.014	40.196	0.152
		33	-0.048	-0.025	41.159	0.156
		34	-0.087	-0.104	44.347	0.110
		35	0.030	0.047	44.712	0.126
		36	-0.012	0.014	44.769	0.150

Ek-3: Durağan portföy seçimi matematik programlama modeli

MAX =(0.250593*X1 + 0.266394*X2 +0.267239* X3 +0.314931*X4 +
0.247624*X5 + 0.304226*X6 +0.281524* X7 +0.354988* X8 + 0.23203*X9
+0.300182* X10 + 0.219572*X11 + 0.265163*X12 +0.135252* X13
+0.224777*X14 +0.313859* X15 +0.235773* X16 +0.333934* X17 +
0.177072*X18 + 0.245933*X19 + 0.207519*X20)-(1/2) *
0.046550584 *

(25.00776*X1*X2 +23.39948*X1*X3 +26.79167* X1*X4 +31.03742* X1*X5
+29.78352* X1*X6 +25.17984* X1*X7 +24.38943* X1*X8 + 29.84631*X1*X9
+27.81583*X1*X10 + 27.62773*X1*X11 +26.52433* X1*X12 +20.82237*
X1*X13 + 25.89248*X1*X14 + 22.20839*X1*X15 +26.56374* X1*X16
+26.41145* X1*X17 +22.5649* X1*X18 + 25.22523*X1*X19 +
31.68829*X1*X20 +

23.11973*X2*X3 + 25.48404*X2*X4 + 29.4581*X2*X5 +28.5841* X2*X6
+24.47843* X2*X7 +23.74318* X2*X8 + 27.03531*X2*X9 + 27.59514* X2*X10
+ 24.57235*X2*X11 + 25.34983*X2*X12 +19.93569* X2*X13
+25.09171*X2*X14 +20.4537* X2*X15 + 24.68717*X2*X16 + 25.11304*
X2*X17 + 21.52752*X2*X18 + 25.25142*X2*X19 + 28.1999*X2*X20 +

23.74636*X3*X4 + 27.8154*X3*X5 + 27.40138* X3*X6 + 23.6613* X3*X7 +
22.89313*X3*X8 + 24.74614*X3*X9 + 24.79661* X3*X10 + 23.19017*X3*X11 +
24.5105*X3*X12 + 20.21424*X3*X13 + 24.93413* X3*X14 + 21.81508*X3*X15
+23.53728* X3*X16 + 24.91057* X3*X17 + 21.60273*X3*X18 +
23.61006*X3*X19 +25.06947* X3*X20 +

31.79905*X4*X5 +31.01191* X4*X6 + 26.43781* X4*X7 + 23.94147*X4*X8 +
28.79374* X4*X9 + 27.62499*X4*X10 + 25.70366* X4*X11 + 27.48865* X4*X12
+ 20.44368* X4*X13 + 26.12128*X4*X14 + 20.27625*X4*X15 + 25.308*
X4*X16 + 27.69434* X4*X17 + 23.7767* X4*X18 + 26.53225* X4*X19 +
31.11614* X4*X20 +

47.13452*X5*X6 + 31.27721*X5*X7 +29.6225*X5*X8 + 35.24965*X5*X9 +
37.52618* X5*X10 + 31.21238*X5*X11 + 32.05529*X5*X12 + 23.91444*X5*X13
+ 31.87116* X5*X14 + 23.85119*X5*X15 + 30.93536*X5*X16 +
31.03513*X5*X17 + 27.62707* X5*X18 + 30.63097*X5*X19 + 36.99253*X5*X20
+

30.07827*X6*X7 + 30.52078*X6*X8 + 33.47897*X6*X9 + 39.45753*X6*X10 +
28.8514*X6*X11 + 30.37027*X6*X12 + 22.21339*X6*X13 + 30.17204*X6*X14
+ 22.01327*X6*X15 + 28.20092*X6*X16 + 31.81028* X6*X17 +25.71268*
X6*X18 + 29.85915*X6*X19 +35.35269* X6*X20 +

24.19568*X7*X8 + 26.24592*X7*X9 + 25.68406* X7*X10 + 25.30141* X7*X11
+25.81809* X7*X12 + 19.46074*X7*X13 + 27.59348* X7*X14 +

21.97235*X7*X15 + 26.10275*X7*X16 +26.73289* X7*X17 + 24.84972* X7*X18 + 24.55992*X7*X19 + 27.60041*X7*X20 +

26.45088*X8*X9 + 27.53913*X8*X10 + 25.88648* X8*X11 +24.95583* X8*X12 + 19.37996*X8*X13 +26.16382* X8*X14 + 23.85438*X8*X15 +24.30176* X8*X16 +30.10752* X8*X17 + 22.59813*X8*X18 + 23.62568*X8*X19 + 26.08488*X8*X20 +

29.92505*X9*X10 + 29.86954* X9*X11 + 28.83313*X9*X12 +21.0612*X9*X13 + 27.37868*X9*X14 + 21.64436*X9*X15 +26.8549* X9*X16 + 27.72943* X9*X17 + 24.05496*X9*X18 + 26.945* X9*X19 +35.96775*X9*X20 +

26.86075*X10*X11 + 28.17695*X10*X12 + 21.14762*X10*X13 + 26.26407*X10*X14 + 23.64589*X10*X15 +25.66049*X10*X16 +28.54745* X10*X17 + 24.26753*X10*X18 + 29.87804*X10*X19 + 31.92471*X10*X20 +

25.95199*X11*X12 + 21.22136* X11*X13 + 26.48992*X11*X14 + 22.44084*X11*X15 + 26.23588*X11*X16 + 27.85055* X11*X17 + 23.98282*X11*X18 + 25.56498* X11*X19 + 31.16696*X11*X20 +

20.91466*X12*X13 + 26.09595* X12*X14 + 22.456*X12*X15 + 27.20279* X12*X16 + 27.6913*X12*X17 + 23.55617* X12*X18 + 26.13176* X12*X19 + 28.87742*X12*X20 +

20.90371*X13*X14 + 18.3502*X13*X15 + 20.25418*X13*X16 + 21.4504*X13*X17 + 19.95883*X13*X18 + 20.44288* X13*X19 +22.79121* X13*X20 +

24.60656*X14*X15 + 26.85076* X14*X16 +27.4713* X14*X17 + 26.53009*X14*X18 + 24.9003*X14*X19 + 29.23065* X14*X20 +

22.04305*X15*X16 + 22.72301*X15*X17 + 23.17454*X15*X18 +20.59158* X15*X19 + 23.87131*X15*X20 +

26.0011*X16*X17 + 23.48258*X16*X18 +25.34082* X16*X19 +28.33781* X16*X20 +

24.13805*X17*X18 + 26.29669*X17*X19 + 29.60875*X17*X20 + 23.17059*X18*X19 +24.57534* X18*X20 + 27.74687*X19*X20 +

17.59123*X1^2 + 18.21504*X2^2+ 16.10315*X3^2 + 22.00401*X4^2 + 28.05368*X5^2 + 30.1691*X6^2 + 18.85836*X7^2+ 20.78179*X8^2 + 22.76511*X9^2 + 26.80207*X10^2 + 19.78354*X11^2 + 18.82965*X12^2+ 13.63349*X13^2 + 22.53692*X14^2 + 24.78456*X15^2 + 16.21854*X16^2 + 23.4432*X17^2 + 16.89117*X18^2 + 20.528*X19^2 + 26.99783*X20^2) ;

X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 + X9 + X10 + X11 + X12 + X13 + X14 + X15 + X16 + X17 + X18 + X19 + X20 = 1 ;

X1 > 0;
X2 > 0;
X3 > 0;
X4 > 0;
X5 > 0;
X6 > 0;
X7 > 0;
X8 > 0;
X9 > 0;
X10 > 0;
X11 > 0;
X12 > 0;
X13 > 0;
X14 > 0;
X15 > 0;
X16 > 0;
X17 > 0;
X18 > 0;
X19 > 0;
X20 > 0;

END

ÖZGEÇMİŞ

1999 yılında Marmara Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun olmuştur. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamıştır. 2002 yılında yüksek lisansını tamamlayarak, aynı anabilim dalında doktora programına kayıt olmuştur. 2005 yılında London School of Economics tarafından düzenlenen "Futures, Options & Other Financial Derivatives" isimli programa burslu olarak katılmıştır. Çeşitli yurtiçi dergilerde doğrusal olmayan optimizasyon, zaman serileri, finansal türevler ve portföy seçimi üzerine yayınları mevcuttur.

Halen İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi kadrosunda, Diferansiyel ve Fark Denklemleri, Matematik Programlama, Doğrusal Olmayan Optimizasyon, Finansal Türevlerin Matematiği ve Yatırım Kararları için Matematik ve İstatistik derslerini asiste etmektedir. Evli olan HORASANLI, iyi derecede İngilizce ve orta seviyede İtalyanca bilmektedir.