Korunumlu Düşük Boyutlu Dinamik Sistemlerin ve Deterministik Örgü Gaz Modelinin İstatistik Mekaniksel İncelenmesi

Program Kodu: 1001

Proje No: 115F492

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI

Bursiyer(ler):
Kıvanç ÇETİN

NİSAN 2019
İZMİR

ÖNSÖZ

Bu çalışma kapsamında doğrusal olmayan dinamik sistemler teorisinin iki temel ailesi olan yitimli ve korunumlu dinamik sistemler ailelerinden seçilen kaotik davranış sergileyebilen çeşitli sistemler için istatistiksel karakterizasyon yöntemleri sayısal olarak analiz edilmiştir. Bu iki aileden seçilen model sistemlerin yanı sıra mikroskobik ölçekte parçacık etkileşimlerini modelleyen deterministik örgü gazı modeli üzerinde de istatistiksel incelemeler yapılmıştır.

Ele alınan sistemlerde yapılan istatistiksel karakterizasyonlarla Boltzmann-Gibbs istatistiği ve Boltzmann-Gibbs istatistiğini bir özel hal olacak şekilde kapsayan genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin geçerlilik alanlarının ortaya konması amaçlanmıştır. Boltzmann-Gibbs istatistiğinin açıklamakta yetersiz kaldığı zayıf kaotik rejim üzerinde odaklanılan bu çalışmada bu rejim için uygun istatistik mekaniksel yaklaşımın genelleştirilmiş istatistksel mekanik tarafından sağlanabildiğinin gösterilmesinin yanı sıra, ele alınan sistemlerin mensubu oldukları dinamik sistem aileleri için çeşitli evrensellik davranışlarının ortaya konması da bu çalışmanın amacını oluşturmaktadır. Doğrusal olmayan dinamik sistemler teorisinin iki temel ailesinden seçilen sistemlerde elde edilecek sonuçların bu ailelerin diğer üyeleri için belirli ölçülerde evrensel olmasının yanı sıra bu çalışma kapsamında seçilen sistemlerin fizik, kimya, biyoloji vb. disiplinlerde geniş kullanım alanları nedeniyle çalışmada elde edilecek sonuçların bahsi geçen disiplinlerde pek çok problemde yol gösterici nitelikte olması beklenmektedir.

Bu proje, TÜBİTAK Matematik, Fizik Araştırma Destek Grubu tarafından 115F492 proje numarası ile 1001 Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında desteklenmiştir. Verilen destek için TÜBİTAK'a ve MFAG Yürütme Kurulu'na teşekkür ederiz. Bu araştırmada gerçekleştirilen sayısal hesaplamalar, TÜBİTAK ULAKBİM, Yüksek Başarım ve Grid Hesaplama Merkezi'nde (TRUBA kaynaklarında) ve Ege Üniversitesi Fen Fakültesi FENCLUSTER hesaplama kümesi gerçekleştirilmiştir. Destekleri için TRUBA grubuna teşekkür ederiz.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖNSÖZ i

İÇİNDEKİLER ii

TABLO VE ŞEKİL LİSTELERİ iv

ÖZET x

ABSTRACT xi

1.GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ 1

1.1 Rössler Salınıcısı 4

1.2 Standard Map 5

1.3 Web Map 6

1.4 Harper Map 7

1.5 Deterministik Örgü Gazı Modeli 7

2. GEREÇ VE YÖNTEM 8

2.1 Başlangıç Koşullarına Duyarlık 8

2.2 Entropi Artış Hızı 11

2.3 Entropi Gevşeme Hızı 12

2.4 Olasılık Dağılımları 13

2.5 Ölçeklenme İlişkileri 15

2.5.1 Evrensel Huberman-Rudnick Ölçeklenmesi 16

2.5.2 Korelasyon Uzunluğu 17

3. BULGULAR 18

3.1 Rössler Salınıcısı Üzerinde İncelemeler 18

3.2 Standard Map Üzerinde İncelemeler 30

3.3 Web Map Üzerinde İncelemeler 47

3.4 Genelleştirilmiş Standard Map Üzerinde İncelemeler 63

3.4.1 Birinci Tip Genelleştirilmiş Standard Map 63

3.4.2 ikinci Tip Genelleştirilmiş Standard Map 76
3.5 Harper Map Üzerinde İncelemeler 81
3.6 Deterministik Örgü Gazı Üzerinde İncelemeler 83
4. SONUÇ VE TARTIŞMA 85
5. KAYNAKLAR 92

TÜBİTAK

TABLO VE ŞEKİL LİSTELERİ

SAYFA

Şekil 1. Rössler salınıcısının $a = b = 0.2$ sabit parametre değerleri ile (a) $c = 3$ ve (b) $c = 10$ kontrol parametre değerleri için durum uzayı çekicileri. İki şekil de $x = y = z = 1$ başlangıç noktasından başlatılmaktadır.....19

Şekil 2. Rössler salınıcısının $c = 10$ parametre değeri için (a) x, (b) y ve (c) z bağımsız değişkenleri için zamana bağlı sinyaller. Burada salınıcı $x = y = z = 1$ başlangıç noktasından başlatılmaktadır.....19

Şekil 3. Rössler salınıcısının $x = y = z = 1$ başlangıç koşulundan $a = b = 0.2$ sabit parametre değerleri ile başlatıldığı durum için; (a) y bağımsız değişkeninin toplanan Poincaré noktaları için elde edilen dallanma diyagramı, (b) Lyapunov üsteli diyagramı. Şekilde yer alan c_c kaos geçiş eşiği parametre değerini belirtmektedir.....21

Şekil 4. Rössler salınıcısının (a) x, (b) y ve (c) z değişkenleri için kaos geçiş eşiğinde çeşitli q değerleri için ortalama duyarlık fonksiyonunun zaman evrimi 25

Şekil 5. Rössler salınıcısının (a) x, (b) y ve (c) z bağımsız değişkenleri için kaos geçiş eşiğinde çeşitli q değerleri için entropi artış hızı analizleri. Zamana lineer bağlılığın görüldüğü ölçeklenme bölgeleri maksimum R-kare değeri $\simeq 0.999$ olacak şekilde tespit edilmiştir 26

Tablo 1. Kaotik bant yarılma prosedüründeki 2^n kaotik bantalarına karşılık gelen n değerleri ve bu n değerleri için Denklem 18 ile hesaplanmış c kontrol parametresi değerleri 27

Şekil 6. Rössler salınıcısı için (n,c) takımlarının hesaplanan Lyapunov üstelleri ile bu takımların kaos geçiş eşiğine olan mesafeleri arasındaki ölçeklenme ilişkisi.....28

Şekil 7. Rössler salınıcısının y bağımsız değişkeninin $n = 5.02$ kaotik bandındaki Poincaré noktaları için oto-korelasyon fonksiyonu davranışı.....29

Şekil 8. Rössler salıcısının (n,c) takımları için korelasyon uzunlukları ile bu takımların kaos geçiş eşiğine olan mesafeleri arasındaki ölçeklenme ilişkileri 30

Tablo 2. Rössler salınıcısı ve lojistik map için elde edilen istatistiksel karakterizasyon ve ölçeklenme davranışı ilişkileri 30

Şekil 9. Çeşitli K değerleri için standard mapin faz uzayı portreleri. Tüm grafiklerde siyah noktalar kaotik davranışı tarif etmektedir. Diğer renkler farklı kararlılık adalarını göstermektedir 32

Şekil 10. Şekil 9 ile aynı K değerleri takımı için standard mapin faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri göstermektedir.....32

Şekil 11. Standard mapin $K = 10$ parametre değerinde; (a) farklı q değerleri ve Δr başlangıç koşulu ayrımı değerleri için tüm faz uzayından rastgele seçilmiş $N_r = 10^6$ başlangıç koşulu çifti üzerinden $\ln_q \xi$ için alınan ortalamaların zamana bağlı davranışları, (b) $q_{sen}^{av} = 1$ ve $\Delta r = 10^{-12}$ başlangıç ayrımı için $N_r = 10^6$ deney üzerinden $\ln_{q=1} \xi$ niceliği için alınan ortalamaların zamana bağlı değişimi. Bu incelemede başlangıç koşulu çiftleri; $W = 1$ hücre ile tüm faz uzayından (kırmızı kareler), $W = 500 \times 500$ hücreye bölünmüş faz uzayının en hızlı yayılan hücrelerinden birinden (yeşil kareler) ve en yavaş yayılan hücrelerinden birinden (siyah kareler) rastgele seçilmektedir. Tüm senaryolar için eğrilerin orta bölgesindeki eğim değeri aynı değerde elde edilmektedir 34

Şekil 12. Standard map $K = 0.2$ parametre değeri için $W = 200 \times 200$ adet eşit boyuttaki hücreye bölünmüş faz uzayının (x'inci,p'inci) hücresinde yer alan rastgele seçilmiş başlangıç koşullarının $t = 1$'den (a) $t = 7$ ve (b) $t = 200$'e kadar iterasyonlarıyla işgal edilen hücrelerin renk haritaları. Farklı lokal geçici zamanlarına dikkat çekmek için üç özel hücre ve bunların dahil olduğu başlangıç koşulları sarı, siyah ve yeşil eğrilerle birleştirilerek belirtilmektedir....35

Şekil 13. Standard mapin $K = 0.2$ parametresi için standard mapin $W = 200 \times 200$ ile eşit şekilde bölünmüş faz uzayının (a) (64,64) ve (b) (17,17) hücrelerinden $N_r = 10^4$ adet ratgele seçilmiş başlangıç koşulları üzerinden $\ln_q \xi(t)$ için ortalamalar. Kısa süreler için q-eksponansiyel etrafında çok az salınım yapan bir gelişim görülmektedir. Grafiklerin içlerinde $<\ln_q \xi>$'nın, fitleme eğrisi için lineer olmayışlık ölçüsü $R \equiv C/B$ çizdirilmektedir 35

Şekil 14. Standard mapin $K = 10$ parametre değerinde farklı W eş boyutlu faz uzayı hücre sayıları için $N_c = 0.01 \times W$ başlangıç hücresi üzerinden ortalaması alınan S_1 entropisinin zamana bağlı değişimi. $t \to \infty$ limitinde $< S_{q=1} >= \ln W$ değerini almaktadır. Şeklin iç kısmında eğrinin orta bölgesinde eğimi bulmak üzere kullanılan polinom fitleme eğrisi için lineer olmayışlık ölçüsü analizi yer almaktadır. Bu ölçünün sıfıra eşit olduğu ve fitleme eğrisinin doğrusal olduğu durumun $q_{ent} = 1$ değerinde sağlandığı açık bir şekilde görülmektedir.....38

Şekil 15. K = 0.2 parametre değerine sahip standard map için p = 2, $x \in [0,2\pi]$ enine bandında farklı W hücre sayıları için $S_{q=0}$ entropisinin zamana bağlı değişimi. Grafiğin iç kısmında farklı q değerleri için elde edilen davranışlar verilmektedir.....38

Şekil 16. (a) Standard mapin K = 10 parametreli durumu için farklı W hücre sayılarında $\ln_{q_{rel}=1}(<\Delta S_1(t)>/<S_1(\infty)>)$ niceliğinin zamanla evrimi. Şeklin iç kısmında $t_{rel}^{-1}\left(W^{-1/2}\right)$ gevşeme süresinin tersi için sayısal hesaplamalar yer almaktadır. (b) K = 0.2 parametre değeri ile zayıf kaotik rejimdeki standard map için $\ln_{q_{rel}}(<\Delta S_{q_{ent}=0}(t)>/<S_{q_{ent}=0}(\infty)>)$ niceliğinin zamana bağlı değişimi. Üzerinden ortalama alınan W = 1000 hücre, p = 2, $x \in [0,2\pi]$ enine faz uzayı bandından seçilmişlerdir. Optimum q değeri lineer olmayışlık ölçüsü kullanılarak $q_{rel} \simeq 1.4$ bulunmuştur 40

Şekil 17. Standard mapin (a) K = 10 ve (b) K = 0.2 parametre değerleri için olasılık dağılımları. (b) şeklinin iç kısmında dağılımın merkez bölgesinin daha net görülmesi için bu kısma yakın gösterim yapılmaktadır. Her iki şeklin elde edilmesinde de $M = 4 \times 10^7$ adet başlangıç koşulu ve $T = 2^{22}$ iterasyon adımı kullanılmıştır.....43

Şekil 18. Standard mapin (a) K = 10 ve (b) K = 0.2 parametre değerleri için normalize edilmiş olasılık dağılımları. (b) şeklinin iç kısmında elde edilen dağılımın merkez bölgesine yapılan yakın gösterim yer almaktadır.....43

Şekil 19. Standard mapin K = 0.2 parametre değeri için normalize olasılık dağılımının (a) kuyruklar, (b) orta bölge ve (c) merkez bölgesi için q-logaritmik gösterimi. Noktaların lineer bir eğri etrafında salınım yaptıkları net bir şekilde görülmektedir. Görülen salınımların merkezden kuyruklara doğru büyümesinin nedeni sonlu T iterasyon ve sonlu M başlangıç koşulu sayısıdır 43

Şekil 20. Standard mapin çeşitli *K* map parametresi değerleri için olasılık dağılımları. Grafiklerin iç kısımlarında, dağılımların tepe bölgesine *q*-Gaussiyen dağılımı net bir şekilde göstermek için yapılan yakın gösterim yer almaktadır 46

Tablo 3. Çeşitli K değerleri için Şekil 17 ve Şekil 20'de verilen olasılık dağılımlarının ilgili parametreleri.....47

Şekil 21. Web mapin K = 3.5 parametre değeri için; (a) faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri, (b) sonlu-zamanlı maksimum Lyapunov üsteli eşik değerinin (λ_{thr}) fonksiyonu olarak başlangıç koşullarının göreli sayısının kümülatif dağılımı 51

Şekil 22. Web mapin K = 3.5 parametreli durumu için (a) siyah renk ile gösterilen kararlılık adalarını saran kırmızı renk ile gösterilen yapışkan davranışı içeren faz uzayı bölgesine yakın gösterim, (b) kararlılık adasından (siyah renk) ve yapışkan davranış bölgesindeki kuvvetli kaotik yörüngelerden (turuncu ve kırmızı) seçilen ikişer yörünge için sonlu-zamanlı maksimum Lyapunov üsteli (LLE) ve SALI değişimi 53

Şekil 23. Web mapin K = 5 parametreli durumu için elde edilen normalize edilmiş olasılık dağılımı 53

Şekil 24. Web mapin K = 0.1 parametreli durumu için (a) normalize olasılık dağılımı, (b) olasılık dağılımının merkez, orta ve kuyruk bölgesinin q-logaritma davranışları 53

Şekil 25. Web mapin (a) K = 3.5 parametre değeri için farklı iterasyon sayılarının (N) kullanıldığı olasılık dağılımları, (b) K = 4 parametre değeri için olasılık dağılımı. İncelemeler sadece kaotik deniz içerisinden rastgele seçilen başlangıç koşulları üzerinden yapılmaktadır 55

Şekil 26. Web mapin (a) K = 3, (b) K = 3.7, (c) K = 4 parametre değerleri için faz uzaylarına yapılan yakın gösterimler; (d) K = 3, (e) K = 3.7, (f) K = 4 parametre değerleri için $[2.7,3.8] \times [0,2\pi]$ faz uzayı bandından seçilen kaotik deniz içerisine gömüşü olan başlangıç koşullarının farklı (N,M) yolları için hesaplanan fraktal boyutların renk haritası 57

Şekil 27. Web mapin (a) K = 3 parametre değeri için $[2.7,3.8] \times [0,2\pi]$ faz uzayı bandından seçilen ve kaotik deniz içerisine gömülü olan başlangıç koşulları için farklı (N,M) yollarının kullanıldığı fraktal boyut analizi, (b) aynı faz uzayı bandından seçilen başlangıç koşulları kümesi için tek bir (N,M) yolu kullanılarak çeşitli map parametresi değerleri için fraktal boyut analizi 58

Şekil 28. Web mapin faz uzayındaki kaotik deniz içerisine gömülü yörüngelerin fraktal boyutu $d_f < 2$ olan parametre değerleri için basıklık ölçüsü analizi 59

Tablo 4. Web mapin çeşitli parametre değerleri için limit olasılık dağılımlarının basıklık ölçüsünün $N \to \infty$ limitindeki belirlenen değerleri ve $M \to \infty$ limitindeki başlangıç koşulu seti için $N \to \infty$ limitiyle sayısal olarak belirlenen fraktal boyut değerleri 59

Şekil 29. Web mapin (a) K = 0.1, (b) K = 3.5 faz uzayının sadece kaotik denizi, (c) K = 5 senaryoları için duyarlık fonksiyonunun q-logaritma davranışının N_r deney üzerinden alınan ortalamasının farklı q değerleri için zamana bağlı değişimi. (a) şeklinin iç kısmında lineer olmayışlık ölçüsü, (b) şeklinin iç kısmında hem lineer olmayışlık ölçüsü hem de maksimum R-

kare değerleri q değerlerine bağlı olarak yer almaktadır. (c) şekli için elde edilen lineer eğrinin eğim değeri 0.96'dır.....61

Şekil 30. Web mapin; (a) K = 0.1 parametresi için farklı faz uzayı hücre sayılarında aynı faz uzayı alanını kapsayacak şekilde oluşturulan bir özel hücre üzerinden ortalamaların alındığı $< S_{q=0} >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı değişimi, (b) K = 5 parametresi için tüm faz uzayı üzerinden farklı hücre sayıları kullanılarak hesaplanan $< S_{q=1} >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı değişimi. Her iki şeklin de iç kısımlarında entropi artış hızı için zamana lineer bağlılığın elde edildiği q değerini tespitine yönelik analizler yer almaktadır.....63

Şekil 31. Birinci tip genelleştirilmiş standard mapin K = 0.2 map parametre değerinde çeşitli W değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun) 67

Şekil 32. K = 0.2 parametreli W = 3 genelleştirilmiş standard mapin elde edilen olasılık dağılımında iki Gaussiyen dağılımın ortaya çıkmasına neden olan farklı kaotikliğe sahip faz uzayı bölgelerinin Lyapunov renk haritası ile ayrımı 68

Tablo 5. Şekil 31'de K = 0.2 parametreli analizler için elde edilen olasılık dağılımları ile ilgili parametreler.....68

Şekil 33. Birinci tip genelleştirilmiş standard mapin *K* = 0.6 map parametre değerinde çeşitli *W* değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütün), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütün) 69

Şekil 34. K = 0.6 parametreli W = 2 genelleştirilmiş standard mapin elde edilen olasılık dağılımında iki Gaussiyen dağılımın ortaya çıkmasına neden olan farklı kaotikliğe sahip faz uzayı bölgelerinin Lyapunov renk haritası ile ayrımı 70

Şekil 35. W = 3 ve K = 0.6 parametreli birinci tip genelleştirilmiş standard map için kaotik denizden seçilen bir başlangıç koşulunun yapışkan bölgelere giriş-çıkışını temsil eden zamana bağlı yörünge ayrımı gösterimi 74

Şekil 36. W = 3 ve K = 0.6 parametreli birinci tip genelleştirilmiş standard map için kaotik denizden seçilen bir başlangıç koşulu için yörünge ayrımının iterasyona bağlı değişimi.....75

Tablo 6. Şekil 33'te K = 0.6 parametreli analizler için elde edilen olasılık dağılımları ile ilgili parametreler.....75

Şekil 37. İkinci tip genelleştirilmiş standard mapin $K = 0.2$ map parametre değerinde çeşitli z değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun) 77

Şekil 38. İkinci tip genelleştirilmiş standard mapin $K = 0.6$ map parametre değerinde çeşitli z değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun) 78

Tablo 7. Şekil 37 ve Şekil 38'de elde edilen olasılık dağılımları ile ilgili parametreler 81

Şekil 39. Harper mapin çeşitli map parametre değerleri için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun) 82

Tablo 8. Harper mapin çeşitli γ değerleri için elde edilen olasılık dağılımlarının ilgili parametreleri.....83

Şekil 40. Deterministik örgü gazı sistemi için $L = 4096$ sistem büyüklüğünde farklı iterasyon değerleri için elde edilen olasılık dağılımları 84

Şekil 41. Deterministik örgü gazı sistemi için $L = 8192$ sistem büyüklüğünde farklı iterasyon değerleri için elde edilen olasılık dağılımları 85

ÖZET

Ergodik ve karışmış davranış sergileyen bir sistemin dinamikleri Boltzmann-Gibbs istatistiği ile açıklanabilmektedir. Ergodikliğin bozulduğu ve karışmışlık özelliğinin bulunmadığı durumda ise bu yaklaşım sistemi tam olarak açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu çalışma kapsamında sistem davranışının ergodik ve karışmış olmadığı zayıf kaotik rejim için uygun istatistik mekaniksel yaklaşımın genelleştirilmiş istatistiksel mekanik tarafından sağlanabildiği ortaya konmaktadır.

Kontrol parametresi değerine bağlı olarak ergodik (kuvvetli kaotik rejim) ve ergodik olmayan (zayıf kaotik rejim) davranış sergileyebilen sistemler üzerinde başlangıç koşullarına duyarlık, entropi artış hızı, entropi gevşeme hızı ve olasılık dağılımı istatistiksel karakterizasyon yöntemlerinin sayısal olarak ele alındığı bu çalışma ile ele alınan sistemlerin mensubu oldukları dinamik sistem aileleri için çeşitli evrensel davranışlar ortaya konmaktadır. Ele alınan sistemin doğasına uygun olarak yeniden düzenlemelerin yapıldığı istatistiksel karakterizasyonların yanı sıra yitimli bir sistem olan Rössler salınıcısı için özel olarak kaos geçiş eşiği civarında ölçeklenme ilişkilerinin varlığı araştırılmaktadır. Rössler salınıcısı için ilk defa bu çalışma ile ortaya konan ölçeklenme davranışları, literatürde daha önce yapılan çeşitli çalışmalarla karşılaştırılarak evrensellik özelliği gösterilmektedir. Korunumlu dinamik sistemlerin bir özel sınıfı olan alan-korunumlu sistemlerden seçilen ve bu çalışma kapsamında yeni tanımlanan model sistemler için elde edilen sonuçların birbirleriyle karşılaştırılmasıyla bu sistem ailesi için evrensel davranışlar ortaya konmuştur.

Bu çalışmada genel bir gözlem olarak davranışın ergodik ve karışmış olduğu durum için Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğu, ergodik ve karışmış olmayan sistem davranışı için ise genelleştirilmiş istatistiksel mekanik argümanlarının sistem dinamiklerini başarılı bir şekilde açıkladığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: İstatistik mekaniksel karakterizasyon, korunumlu ve yitimli sistemler, ergodik davranış, kaotik rejim, ölçeklenme ilişkileri, doğrusal olmayan dinamik.

ABSTRACT

Dynamics of a system that exhibits ergodic and mixing behaviour can be described by Boltzmann-Gibbs statistics. In the case of ergodicity breakdown and absence of mixing property, this statistical approach is incapable of fully describing the system. In this study, it is revealed that the appropriate statistical mechanical approach can be provided by the generalized statistical mechanics for the weak chaotic regime in which the system behavior is not ergodic and not mixing.

In this project, sensitivity to the initial conditions, entropy increase rate, entropy relaxation rate and probability distributions are numerically handled for the systems which can exhibit ergodic (strong chaotic regime) and nonergodic (weak chaotic regime) behavior according to the control parameter value. Several universal behaviors are revealed for the classes of dynamical systems analysed herein. In addition to statistical characterizations that modifications are made in accordance with the nature of the system dealt with, the existence of scaling relations in the vicinity of the chaos threshold of the Rössler oscillator is also investigated. Universality property is revealed by comparing the scaling relations obtained for the Rössler oscillator and previously studied map families for the first time via this study. Comparing the obtained results of model systems that are newly defined in the scope of this project and that are chosen from the area-preserving systems which are a special subclass of the conservative dynamical systems, universal behaviors are presented for this class of dynamical systems.

As a general observation, it has been seen that Boltzmann-Gibbs statistics is valid for the case where the behavior is ergodic and mixing whereas generalized statistical mechanics arguments successfully explain the system dynamics for nonergodic and nonmixing system behavior.

Keywords: Statistical characterization, conservative and dissipative systems, ergodic behavior, chaotic regime, scaling behavior, nonlinear dynamics.

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Ergodik ve karışmış sistemler için geçerli termoistatistiksel yaklaşımların Boltzmann-Gibbs (BG) istatistiksel mekaniği olduğu bilinmektedir. Maksimum Lyapunov üstelinin büyük pozitif değerler aldığı kuvvetli kaotik rejimde sistem ergodik ve karışmış olduğundan, bu rejimdeki istatistiksel mekanik incelemeler Boltzmann-Gibbs istatistiği çerçevesinde yapılabilmektedir (Beck ve Schlögl, 1997). Sistemin bir dinamik değişkeni için elde edilen üstel veya Gaussiyen limit dağılımlar, Boltzmann-Gibbs entropisini maksimum yapar ve denge durumunu sağlayan dağılımlar olarak ortaya çıkarlar. Bu durum da Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerliliğinin en önemli işaretçilerindendir. Buna örnek olarak, Maxwell dağılımının bir ideal gazdaki moleküllerin hızları için bir denge dağılımı olması verilebilir. Bu limit davranışın altında yatan matematiksel neden, standart merkezsel limit teoreminin (MLT) varlığıdır (van Kampen, 1981).

Öte yandan ergodikliğin bozuluşu ve kuvvetli korelasyonlar sistemi Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçersiz olduğu denge-dışı durumlara sürükler. Maksimum Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır olduğu, sistemin ergodik ve karışmış olmadığı zayıf kaotik rejim için açıklayıcı uygun istatistiğin, $q \to 1$ limitinde Boltzmann-Gibbs istatistiğini de özel bir hal olarak kapsayan genelleştirilmiş istatistiksel mekanik olduğu (Tsallis, 2009) ve kompleks sistemlerin çeşitli sınıflarının farklı özelliklerini tarif etmekte bu istatistiksel mekaniğin kullanılabileceği bilinmektedir (Baldovin ve Robledo, 2002; Rapisarda ve Latora, 2004; Esquivel ve Lazarian, 2010; CMS, 2010; Shao vd., 2010; Sotolongo-Grau vd., 2010; Mohanalin vd., 2010; ALICE, 2010, 2011; PHENIX, 2011a, 2011b; ATLAS, 2011; Wong ve Wilk, 2013; Marques vd., 2013; Bogachev vd., 2014; Combe vd., 2015). Ergodikliğin bozulması nedeniyle bazı sistemler süresiz olarak üstel veya Gaussiyen olmayan dağılımlarda kalır ve böylece denge-dışı yarı-kararlı durumlara ulaşır. q-eksponansiyel ve q-Gaussiyen dağılımlar bu yarı-kararlı durumların bazılarıyla ilişkili olan, toplanabilir olmayan S_q Tsallis entropisini maksimum yapan dağılımlardır (Tsallis, 2009). S_q entropi tanımı $q \to 1$ için Boltzmann-Gibbs entropisini bir özel durum olacak şekilde kapsar. Bu özellik özel denge-dışı durumların, denge termoistatistiği ile benzer bir çerçevede tarif edilmesini sağlar ve bu da genelleştirilmiş istatistiksel mekanik olarak bilinir (Tsallis, 2009). q parametresi özel bir limit değere eriştiğinde ($q \to 1$) bu genel resim denge haline indirgenir. Böyle yarı-kararlı durumlardaki sistemlerin belli bir sınıfı için gözlemlenecek limit dağılımların, $q \to 1$ limitinde standart Gaussiyen dağılımları bir özel hal olarak kapsayan q-Gaussiyenler olacağını söyleyen genelleştirilmiş MLT'nin varlığı (Umarov vd., 2008; Umarov vd., 2010), bu limit dağılımların elde edilmesini sağlar. Bu nedenle Gaussiyenlerin Boltzmann-Gibbs istatistiğindeki rolüne benzer şekilde q-Gaussiyenler genelleştirilmiş istatistiksel mekanik formalizminde rol üstlenir.

Başta *q*-Gaussiyenler olmak üzere Gaussiyen olmayan dağılımlar doğada çeşitli deneysel, gözlemsel ve model sistemlerde gözlemlenmiştir (Tsallis, 2009). Deneysel sistemlere örnek olarak; bir tamamen gelişmiş türbülans rejimi için Couette-Taylor deneyinde hız farklarının olasılık yoğunluklarının ölçüldüğü yüksek-boyutlu yitimli sistem (Beck vd., 2001; Tsallis vd., 2002), sönümlü optik örgülerdeki soğuk atomların taşınma özellikleri (Douglas vd., 2006; Lutz ve Renzoni, 2013), LHC deneylerindeki hadronların enine momentum spektrumları (Wong ve Wilk, 2013) ve hapsedilmiş tanecikli madde (Combe vd., 2015) verilebilir. Gözlemsel çalışmalara örnek olarak da; Güneş sistemindeki küçük cisimler için, özellikle asteroid dönüş periyotları ve çapları (Betzler ve Borges, 2012), meteor yağmurlarının dağılımları (Betzler ve Borges, 2015) gösterilebilir. Daha büyük ölçekte ise M33 Triangulum Galaksisi için dönüş eğrisi başarılı bir şekilde incelenmiştir (Cardone vd., 2011). Model sistemlerde düşük-boyutlu yitimli bir model olan lojistik map sayısal olarak incelenmiş ve Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasına uyan kaotik bant yarılma prosedürü kullanılarak kaos eşiğine yaklaşırken *q*-Gaussiyen dağılımlar elde edilmiştir (Tırnaklı vd., 2007, 2009; Afşar ve Tırnaklı, 2013; Çetin vd., 2015).

Düşük-boyutlu yitimli bir model olan lojistik mapin yanı sıra *α*-XY modeli gibi yüksek-boyutlu korunumlu model sistemlerde de *q*-Gaussiyenlerin varlığı gözlemlenmiştir (Cirto vd., 2014). Bu model iki-parçacık etkileşimli ve periyodik sınır koşullarına sahip *N* adet klasik lokalize düzlemsel dönücüden oluşur ve potansiyelin mesafeyle $1/r^{\alpha}$ şeklinde azaldığı kabul edilir. Burada $\alpha \geq 0$, etkileşimlerin menzilini kontrol eden bir parametredir ve *d* sistemin uzaysal boyutunu belirtmek üzere $\alpha/d > 1$ için kısa-menzil, $0 \leq \alpha/d \leq 1$ için uzun-menzil olacak şekilde tanımlanır.

Bir-boyutlu korunumlu Fermi-Pasta-Ulam modelinin, lineer ve lineer olmayan uzun-menzilli etkileşimlere açıklama getirmek üzere uygun şekilde yeniden düzenlenmiş bir genelleştirmesinde incelemeler yapılmış ve bu incelemelerde etkileşim menzili *α*-XY modeline benzer şekilde kontrol edilmiştir. Sıradan Gaussiyenler $\alpha > 1$ ile kısa-menzilli etkileşimler varlığında gözlemlenmiştir (Christodoulidi vd., 2014). Ayrıca *α*-XY modeli için Anteneodo ve Tsallis (1998) çalışmasındakine oldukça benzer bir şekilde maksimum Lyapunov üstelinin $N^{-\kappa(\alpha)}$ şeklinde asimptotik olarak azaldığı ve ortaya çıkan *q*-Gaussiyen dağılımların *α*'ya bağlı olan *q* parametresi ile karakterize edilebileceği bulunmuştur.

Yukarıda bahsi geçen tüm sistemler için ortak olarak, bir bölgedeki ergodikliğin maksimum Lyapunov üsteli ile karakterize edildiği ve sistemin içinde bulunduğu rejimin parçacık sayısının $N \to \infty$ termodinamik limitinde ayırt edileceği sonucuna varılır. Kuvvetli kaotik rejim büyük bir

pozitif Lyapunov üsteli değerine karşılık gelir ve sistem ergodiktir. Sistemin dinamikleri Boltzmann-Gibbs istatistiksel mekaniği ile tarif edilen ve ele alınan dinamik değişkene bağlı olarak üstel veya Gaussiyen dağılımlı bir denge durumuna evrilir. Zayıf kaotik rejim ise, sistemin uzun bir süre ergodik olmayan şekilde davrandığı, oldukça küçük bir pozitif sayı değeri alan Lyapunov üstelli ($\lambda \approx 0$) duruma karşılık gelir. Bu rejim için dinamik değişkenlerin limit dağılımları üstel ya da Gaussiyen olmaz ve Boltzmann-Gibbs istatistiği uygulama için uygun değildir. Uygun zaman ve topluluk ortalamalarıyla *q*-Gaussiyen dağılımlar bu durum için elde edilmiştir (Ruiz vd., 2012). Gaussiyen dağılımların Boltzmann-Gibbs entropisinin maksimizasyonundan elde edilmesine benzer olarak, *q*-Gaussiyen dağılımlar toplanabilir olmayan entropinin S_q maksimizasyonundan elde edilir (Tsallis, 1988; Prato ve Tsallis, 1999). Bu durum da bu sistemlerin genelleştirilmiş istatistiksel mekanik ile bağlantılı olduğunu işaret eder (Tsallis, 2009).

Zayıf ve kuvvetli kaotik rejimlerdeki sistemlerin dinamik değişkenlerinin limit dağılımlarının yanı sıra, bu sistemlerin istatistiksel karakterizasyonu; başlangıç koşullarına duyarlıkları, entropi artış oranı ve yitimli sistemler için çekiciye gevşeme (relaksasyon) hızı üzerinden yapılmaktadır (Tsallis, 2009). Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğu, davranışın ergodik ve karışmış olduğu kuvvetli kaotik rejimde bu karakterizasyon yöntemleri için üstel formda davranış gözlemlenir (Beck ve Schlögl, 1997). Maksimum Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır olduğu zayıf kaotik rejim için ise başlangıç koşullarına duyarlık ve çekiciye ulaşma hızı *q*-eksponansiyel formunda davranış sergilerken, entropi artış oranı Tsallis entropisi S_q kullanılarak açıklanır ve bu rejim için açıklayıcı yaklaşımın genelleştirilmiş istatistiksel mekanik olduğuna işaret eder. Bu noktadan hareketle duyarlık davranışı için q_{sen}, entropi artış oranı için q_{ent}, gevşeme (relaksasyon) hızı için q_{rel} ve durağan dağılımlar için q_{stat} indisleri tanımlanarak, ele alınan dinamik sistemin bu *q* indisleri üzerinden tam istatistiksel karakterizasyonu yapılabilmektedir. Düşük-boyutlu sistemlerde $q_{sen} = q_{ent}$ olacak şekilde Pesin özdeşliğinin bir *q*-genelleştirilmiş formunun varlığı gösterilmiştir (Tsallis, 2009). Böylece birbirleriyle ilişkili olan *q*-üçlüsü tanımlanarak (Tsallis, 2004) ve bu *q*-üçlüsü ozon tabakası (Ferri vd., 2010) ve Güneş rüzgarı için Voyager I verisi (Burlaga ve Ness, 2013) gibi pek çok kompleks sistemde deneysel olarak gözlemlenmiştir. Genelleştirilmiş istatistiksel mekanik $q \to 1$ limitinde Boltzmann-Gibbs istatistiğini özel bir hal şeklinde kapsadığından, maksimum Lyapunov üstelinin büyükçe pozitif olduğu ve Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğu durumda *q*-üçlüsü $q = 1$ sabit nokta davranışı sergileyecektir. Zayıf kaotik rejimde ise *q*-üçlüsü için böyle bir sabit nokta davranışı gözlemlenmez (Tsallis, 2004). Böylece Lyapunov üsteli, değerine bağlı olarak doğrusal

olmayan dinamik bir sistemde hangi istatistiksel mekaniğin kullanılacağının belirlenmesinde merkezi bir rol oynar.

Kontrol parametresi değerine bağlı olarak sistemin bağımsız değişkenlerinin tanımladığı faz uzayında kuvvetli kaotik (ergodik) ve zayıf kaotik (ergodik olmayan) rejimlerin ayrı ayrı ve ele alınan sisteme bağlı olarak birlikte gözlenebildiği doğrusal olmayan dinamik sistemler istatistiksel mekanik ve fiziksel açıdan çok zengin araştırma imkânları sunmaktadırlar. Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin iki temel ailesi olan yitimli ve korunumlu dinamik sistemlerden seçilen sistemler üzerinde yapılacak incelemelerde, mensubu oldukları sistem ailelerinin kendi içlerinde sergiledikleri evrensellik özellikleri nedeniyle elde edilen sonuçlar bu ailelerin tüm üyeleri için belirli ölçülerde geçerli olur (Hilborn, 1994). Bu çalışma kapsamında; yitimli dinamik sistemler ailesinden seçilen Rössler salınıcısı, korunumlu sistemler ailesinden ise bu ailenin bir özel alt sınıfı olan alan-korunumlu maplerden standard map ve web map üzerinde istatistiksel karakterizasyon yöntemleri incelemeleri yapılmaktadır. Boltzmann-Gibbs ve genelleştirilmiş istatistiksel mekanik için geçerlilik alanlarının belirlenmesi için yapılan istatistiksel karakterizasyon hesaplamalarının yanı sıra, bu çalışma kapsamında Rössler salınıcısı için doğrusal olmayan dinamik sistemler teorisinin çeşitli niceliklerinin ölçeklenme davranışlarının varlığına yönelik sayısal hesaplamalar gerçekleştirilmektedir. Bahsedilen sistem ailelerinden bu üç sistemin seçilmesinde sadece sergiledikleri dinamik davranışlar değil, aynı zamanda bu sistemlerin fizik, kimya ve biyoloji gibi disiplinlerde yaygın bir şekilde model sistem olarak kullanılmaları da göz önüne alınmıştır. Bu sistemlerin çeşitli disiplinlerde sahip oldukları önem ve kullanım alanlarına dair kısa bilgilendirmeler alt başlıklarda verilmektedir.

1.1 Rössler Salınıcısı

Birçok disiplinde ele alınan sistemin dinamiklerini modellemek ve böylece sistemleri daha farklı bakış açılarıyla incelemek için sürekli sistemler kullanılmaktadır. Bir diferansiyel denklem setiyle tarif edilen sürekli sistemler fizik (Lorenz, 1963; Ruelle ve Takens, 1971), biyoloji (Voltera, 1926; Yang vd, 2005) ve kimya (Kermack ve McKendrick, 1927) alanlarındaki kullanımlarının yanı sıra doğrusal olmayan dinamik çalışmalarında bir test sistemi olarak da yaygın şekilde kullanılmaktadır (He ve Vaidya, 1992; Al-Sawalha ve Noorani, 2009; Chen vd., 2004; Cuomo ve Oppenheim, 1993). Özellikle parametre değerine bağlı olarak kaotik davranış sergileyebilen üç-boyutlu yitimli sürekli sistemler özel bir ilgi çekmektedir (Sprott, 2014; Sun ve Ruan, 2009; Sun vd., 2013). Periyot-çiftlenimi rotasıyla periyodik davranıştan kaotik davranışa geçişin görüldüğü model sistemlerin (May, 1976) yanı sıra, periyot-çiftlenimi dallanmaları

yarıiletkenler (Ye vd., 1993) ve RLC devreleri (Linsay, 1981) gibi deneysel ve gözlemsel sistemlerde de gözlemlenebilmektedir. Bu sistemlere kaotik davranış ve karmaşık dinamikler sergileyebilen Rössler salınıcısı örnek olarak verilebilir. Akış olarak da adlandırılan sürekli sistemlerde kaotik davranışı incelemek üzere karmaşık Lorenz çekicisine (Lorenz, 1963) bir alternatif olarak türetilmiş olan bu model (Rössler, 1976), yeni türetilen sayısal teknikler için bir test sistemi olarak da kullanılmaktadır (Al-Sawalha ve Noorani, 2009; Chen vd., 2004). Rössler salınıcısının üyesi olduğu sürekli yitimli dinamik sistemler ailesi çok geniş bir evrensellik ailesi olup, Rössler salınıcısı için yapılan gözlemlerin bu ailenin tüm üyelerinde geçerli olması beklenir (Hilborn, 1994). Pek çok disiplinde kullanılan sürekli sistemlerin Rössler salınıcısı ile aynı evrensellik ailesine giren durumlarında, bu salınıcı için yapılan gözlemlerin geçerli olacağından hareketle bu çalışma kapsamında Rössler salınıcısı için çeşitli istatistiksel karakterizasyon yöntemleri uygulanmakta ve de ayrıca doğrusal olmayan dinamik sistemler teorisi açısından çeşitli ölçeklenme ilişkileri araştırılmaktadır. Böylece elde edilen sonuçların sadece istatistiksel mekanik ve doğrusal olmayan dinamik teorisi için değil aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji, astronomi gibi disiplinlerdeki yitimli sürekli sistemler için de aydınlatıcı ve açıklayıcı olması beklenmektedir. Rössler salınıcısının kuvvetli kaotik rejimi üzerinde nitel ve nicel çok sayıda çalışmalar yapılmasına karşın, salınıcının periyot-çiftlenimlerinin son bulduğu kaos geçiş eşiğinde bilgimiz dahilinde çalışma yapılmamış olunup, ilk defa bu çalışma ile bu kritik noktada istatistiksel karakterizasyonlar ele alınmakta ve ölçeklenme davranışları ortaya konmaktadır.

1.2 Standard Map

Map parametresi değerine bağlı olarak ergodik ve ergodik olmayan davranışı faz uzayında aynı anda sergileyebilen korunumlu (alan-korunumlu) standard map üzerinde istatistiksel mekanik karakterizasyonların yapıldığı bu çalışma ile, bilgimiz dâhilinde ilk defa, yukarıda bahsedilen Gaussiyen ve q-Gaussiyen dağılımların standard mapte belli bir parametre değeri için birlikte bulunabildiği ve hangi gerekli koşullar altında hangi dağılımın diğerine üstün geleceği ele alınmaktadır. Böylece Boltzmann-Gibbs ve genelleştirilmiş istatistiksel mekanik formalizmin geçerlilik alanları açıkça tasvir edilebilmekte ve mapin dinamiklerinin açık bir şekilde bir istatistikten diğerine geçişi gösterilmektedir. Çalışmada elde edilen sonuçlar sadece istatistiksel mekanik bakış açısından değil, aynı zamanda fiziğin çeşitli alanlarında uygulanabilir olma potansiyellerinden dolayı da oldukça önemlidir. Manyetik tuzaklardaki parçacık hapsedilmesi (Chirikov, 1987), parçacık hızlandırıcılardaki parçacık dinamiği (Izraelev, 1980), kuyruklu yıldız dinamikleri (Petrowsky, 1986), moleküler Rydberg durumlarının kendiliğinden iyonlaşması (Benvenuto, 1994) ve elektron manyeto-taşınımı

(Shepelyansky ve Stone, 1995) gibi pek çok fiziksel sistem ilk yaklaşım olarak standard mape indirgenebilmektedir. Bir çember etrafında harekete zorlanan parçacığın hareketinin Poincaré kesiti davranışının temsil edildiği standard map (Chirikov,1979), integrallenemez Hamiltoniyen sistemlerdeki evrensel davranışların teorik sonuçlarının birçoğunun elde edilmesinde kullanılmıştır (Hilborn, 1994). Bu açıdan standard map için elde edilecek sonuçların hem alan-korunumlu diğer maplerde hem de integrallenemez Hamiltoniyen sistemlerin Poincaré kesiti davranışlarını içeren sistemlerde belirli ölçülerde ilişkili olması beklenmektedir.

1.3 Web Map

Plazma fiziği üzerinde yoğun çalışmaların başladığı 1960'lı yıllarda yüksek sıcaklık plazma sistemlerindeki manyetik tuzakların farklı konfigürasyon araştırmalarında karşılaşılan manyetik yüzeylerin topolojisi üzerindeki analizler sonucu plazma fiziği ile doğrusal olmayan sistemler teorisi ve kaos teorisi arasında çığır açıcı ilişkiler tespit edilmiştir (Zaslavsky vd., 1991). Ele alınan çeşitli sistemler için gözlemlenen kararlı olmayan manyetik alan yüzeylerinin plazma fizikçileri tarafından ilk olarak bir önemsiz gözlem hatası oldukları yorumunun, doğrusal olmayan dinamik ve kaos teorisyenleri tarafından açıklanmasının ardından bu iki disiplin adeta iç içe geçmiştir. Özellikle plazma sistemlerindeki parçacıkların hareketlerini tarif eden Hamiltoniyen fonksiyonlarının kaos teorisindeki Hamiltoniyen kaos konusuna hem teorik hem de gözlemsel olan katkıları göz önüne alındığında disiplinler arası bağ oldukça önem kazanır. Alan-korunumlu mapler olan web map ve standard map plazma fiziğindeki ve akışkanlar hidrodinamiğindeki çok sayıda sistemin modellenmesinde ve kaos teorisinde çeşitli teorik çıkarımların yapılmasında kilit rol oynamaktadır (Zaslavsky vd., 1991). Bir dış manyetik alana yerleştirilmiş plazma içerisindeki parçacığın elektrostatik dalga ile rezonans etkileşimleri çok sayıda uygulamaya sahiptir. Dalganın manyetik alana dik yönde yayıldığı durum özellikle ilgi çekicidir (Karney, 1978; Malkov ve Zaslavsky, 1984). İçlerinden birinin parçacık dinamiklerinin kaotik davranış sergileyebildiği bu alandaki pek çok çalışma hakkında bilgiye Sagdeev ve Zaslavsky (1986) kaynağından ulaşılabilir. Hamiltoniyen sistemlerde kaos, sisteme özgü olan hareket denklemlerinden doğabilmektedir. Bir parçacığın düzlem dalgayla ters yöndeki manyetik alan içindeki etkileşimini tanımlayan Hamiltoniyenden elde edilen hareket denklemleri, kesikli formda olan web map veya zorlanmış salınıcı map olarak da adlandırılan kaotik davranış sergileyebilen sistemi tanımlar (Zaslavsky vd., 1991). Q-katlı simetriye sahip olan bu sistem için bu çalışma kapsamında herhangi bir map kontrol parametresi değerinde faz uzayını dört-katlı bir örgüyle kaplayan dört-katlı web map üzerinde istatistiksel karakterizasyonlar yapılmaktadır. Zorlanmış salınıcı modeli bazı limit durumlarda zorlanmış dönücü sistemine indirgenebilmektedir. Zorlanmış dönücüyü modelleyen standard map, web

map ile aynı alan-korunumlu sistemler ailesine girmektedir. Ancak standard mapte olmayan şekilde web mapin faz uzayında kuvvetli kaotik deniz içerisine gömülü olan kararlılık adaları etrafını saran yapışkan kaotik yörüngeler fraktal özellikler sergileyebilmektedir. Bu fraktal özellikli yapışkan davranış web mapin dinamik özelliklerini standard mapten ayıran en önemli etmendir. Bahsi geçen bu iki alan-korunumlu map, çoğunlukla iki modelin bir kombinasyonu olarak görülen çok sayıdaki fiziksel durumu kapsayan bütünleyici senaryoları temsil eder (Zaslavsky vd., 1991; Afanasiev vd., 1991). Bu nedenle pek çok Hamiltoniyen sistemin henüz açığa çıkarılmamış özelliklerinin analizleri için web map üzerinde yapılacak derinlemesine incelemeler bir anlamda zaruri hale gelmektedir. Bu durum göz önüne alındığında bu çalışmanın temel amacı web mapi istatistiksel olarak karakterize ederek, elde edilen sonuçları standard mapin istatistiksel karakterizasyonu için elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktır.

1.4 Harper Map

Bu çalışmada ele alacağımız bir diğer alan-korunumlu sistem olan Harper map fiziğin birçok branşında karşımıza çıkmaktadır. Bunlar arasında enine düzgün manyetik alan içindeki bir elektrostatik dalga paketi ile etkileşen yüklü parçacıklar (Karney, 1979; Dana, 1995), düzgün dik bir manyetik alan ve periyodik bir potansiyel içinde hareket eden elektronların iki-boyutlu hareketi (Leboeuf vd., 1992), iki ve üç-boyutlu ideal sıkıştırılamaz akışkanların kararlı-durum dinamikleri (Pasmanter, 1990) üzerine yapılmış çalışmalar sayılabilir. Bu sistemin de diğerleri gibi istatistiksel karakterizasyonu yapılarak sonuçların karşılaştırılması amaçlanmaktadır.

1.5 Deterministik Örgü Gazı Modeli

Bu çalışmada son olarak ele alacağımız model sistem, literatürde Deterministik Örgü Modeli olarak bilinen sistemdir (Jensen, 1990). Genel olarak bakıldığında, mikroskobik dünya ile makroskobik dünya arasındaki köprüyü oluşturmakta yoğunluk ve akım gibi bazı kollektif değişkenler kullanılır. İdeal durumda bu değişkenler için hareket denklemleri, bileşenlerin hareket denklemlerinden elde edilmelidir ancak bu çok basit sistemler için bile çok zordur. Bu aşamada Langevin denklemlerini kullanmak uygun bir yaklaşımdır. Ancak bu yaklaşımda stokastik sürdürmenin detaylarının çok zor elde edildiği bilinmektedir. Burada konu edilecek olan Deterministik Örgü Gazı modeli, mikroskobik bir model olup bu modelde parçacıklar itici bir en yakın komşu etkileşmesi ile etkileşirler ve her örgü noktasında tek bir parçacığa izin verilir. Her parçacık eşzamanlı olarak güncellenir ve güncelleme parçacıkların maruz kaldıkları kuvvetlerin vektörel toplamına göre parçacıkların komşu örgü noktalarına hareketi şeklindedir. Eğer iki parçacık aynı örgü noktasına hareket etmek durumunda ise, daha büyük kuvvetin

etkisinde hareket eder, eğer kuvvetler eşitse hiçbiri hareket etmez. Sistemin parçacık sayısının zamansal fluktuasyonlar gösterdiği bilinmektedir (Giometto ve Jensen, 2012). Parçacık yoğunluğunun değişimi ile $1/f^{\mu}$ şeklinde olan parçacık sayısının kuvvet spektrumunda sistem büyüklüğü artarken parametrenin 1'den 3/2'ye gittiği anlaşılmıştır ve kuvvet spektrumunun yapı değiştirdiği bir kritik yoğunluk bulunmuştur (Giometto ve Jensen, 2012). Bu çalışmada konu edilecek olan, bu deterministik sistem için, bu kritik yoğunluk değerinde, daha önce çeşitli map aileleri için göz önüne aldığımız olasılık dağılımlarının nasıl bir davranış göstereceğidir.

1. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu çalışmada fizik ve diğer pek çok disiplinde geniş bir uygulama alanına sahip olan, kontrol parametresi değerine bağlı olarak kaotik davranış sergileyebilen yitimli ve korunumlu dinamik sistemler ailesinden seçilen ve bir önceki bölümde kısa tanıtımları yapılan dinamik sistemlerin istatistiksel karakterizasyonlarına yönelik sayısal hesaplamalar gerçekleştirilmektedir. Rössler salınıcısı için doğrusal olmayan dinamiğin çeşitli niceliklerinin ölçeklenme davranışlarının da araştırıldığı bu çalışmada sayısal hesaplamalar FORTRAN, Matlab vb. programlama dilleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan analizlerin uzun süreli olmaları ve yüksek bir hesaplama gücü gerektirmesinden dolayı, sayısal hesaplamalar Ege Üniversitesi Fen Fakültesi FENCLUSTER hesaplama kümesi ve TÜBİTAK ULAKBİM, Yüksek Başarım ve Grid Hesaplama Merkezi'nde (TRUBA kaynaklarında) gerçekleştirilmiştir.

Ele alınan sistemler üzerinde yapılan istatistiksel karakterizasyonlarla bu sistemlerin dinamiklerinin tam bir resmini çizmek, bu sistemlerle çeşitli evrensellik ve uygulama ilişkisi olan fizik ve benzeri disiplinlerdeki diğer problemlere yol gösterici olmak adına yapılan bu çalışmada gerçekleştirilen analizlerde kullanılan yöntemler alt başlıklara ayrılarak verilmektedir. Ele alınan sistemlerin birbirinden farklı matematiksel yapıları nedeniyle aşağıdaki konu başlıklarında verilen karakterizasyon yöntemlerinin ve ölçeklenme ilişkilerinin tamamını bahsi geçen sistemlerde uygulamak mümkün olmamaktadır. Bu konuyla ilgili açıklamaların yanı sıra karakterizasyon yöntemi hesaplamalarında ele alınan sistemin sergilediği davranışlar sonucu sayısal hesaplamalarda yapılan yeniden düzenlemeler, ilgili sistem için bulgular kısmında verilmektedir.

2.1 Başlangıç Koşullarına Duyarlık

Başlangıçta komşu yörünge noktalarının sistem zamanla evrilirken birbirinden bir pozitif üstel değeriyle eksponansiyel formda ıraksaması kaotik davranışın en önemli işaretlerindendir

(Hilborn, 1994; Schuster, 2005) ve yörüngelerin birbirinden üstel formda ıraksama davranışı sistemin karışmış ve ergodik olmasını sağlar (Schuster, 2005). Farklı başlangıç koşullarından başlayan sistemlerin çok farklı şekillerde evrilebileceğine işaret eden bu özellik nedeniyle kuvvetli kaotik rejimde başlangıç koşullarına güçlü bir duyarlık söz konusudur. Bu duyarlık özelliği ξ ile gösterilen duyarlık fonksiyonu ile karakterize edilir. Bir-boyutta duyarlık fonksiyonu, yörünge noktaları arasındaki başlangıçtaki ve *t* anındaki mesafe sırasıyla $\Delta x(0)$ ve $\Delta x(t)$ olmak üzere;

$$\xi(t) = \lim_{\|\Delta x(0)\| \to 0} \frac{\|\Delta x(t)\|}{\|\Delta x(0)\|} \tag{1}$$

olarak tanımlanır (Hilborn, 1994). Sistem kuvvetli kaotik rejime işaret eden pozitif Lyapunov üsteline sahip olduğunda duyarlık fonksiyonu, λ standart Lyapunov üstelini göstermek üzere;

$$\xi(t) = \exp(\lambda t) \tag{2}$$

formunda ıraksar. Burada Lyapunov üsteli için standart isimlendirmesi ilerleyen kısımda açıklığa kavuşacaktır. Sistemin başlangıç koşullarına; $\lambda > 0$ için kuvvetlice duyarlı, $\lambda < 0$ için ise kuvvetlice duyarsız olduğu söylenir. Standart Lyapunov üstelinin sıfır olduğu ($\lambda = 0$) kaos geçiş eşiğinde ise çeşitli yitimli sistemlerde yapılan incelemeler sonucu (Tsallis vd., 1997; Tirnakli, 2002; Celikoglu ve Tirnakli, 2006; Tirnakli ve Tsallis; 2006) duyarlık fonksiyonunun, λ_q genelleştirilmiş Lyapunov üsteli olmak üzere, $\xi(t) = \exp_q(\lambda_q t)$ şeklinde bir kuvvet yasası formunda davranış sergilediği ortaya konmuştur. Zayıf kaotik rejim olarak adlandırılan kaos geçiş eşiği marjinal bir duruma karşılık gelir. Yitimli sistemlerin kaos geçiş eşiğinde karşılaşılan zayıf kaotik rejim korunumlu dinamik sistemlerde bir kaos geçiş eşiği tanımı yapılamamasına karşın sistemlerin faz uzayında gözlemlenen kararlılık adalarında kendini gösterir ve bu kararlılık adalarında Lyapunov üsteli kaos geçiş eşiğine benzer olarak yaklaşık sıfır değerini alır ($\lambda \approx 0$). Duyarlılık fonksiyonu için yitimli sistemlerin kaos geçiş eşiğindeki ve korunumlu sistemlerdeki kararlılık adalarındaki davranışın aynı olması beklenir. Yukarıda belirtilen duyarlık fonksiyonu davranışında yer alan *q*-eksponansiyel fonksiyonu;

$$\exp_q(x) = \left[1 + (1-q)x\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{3}$$

$q \to 1$ limitinde standart eksponansiyel fonksiyonuna indirgenir (Tsallis, 1988, 1994). Böylece kaos geçiş eşiği civarı ve kararlılık adalarındaki uygun duyarlık fonksiyonu davranışının;

$$\xi(t) = \left[1 + (1-q)\lambda_q t\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{4}$$

olacağı görülür. $\lambda_q > 0$ için sistem başlangıç koşullarına zayıfça duyarlılık sergilerken, sistem $\lambda_q < 0$ durumunda başlangıç koşullarına zayıfça duyarsızdır (Tsallis vd., 1997). Zayıf kaotik rejimde duyarlık fonksiyonu için kuvvet yasası formundaki davranış daima $q < 1$ için elde edilecektir (Tirnakli ve Tsallis, 2006).

Zayıf kaotik rejimde duyarlılık fonksiyonunun belirlenmesi amacıyla Denklem 1 ile verilen tanımında iki komşu yörünge noktasının başlangıçtaki ayrımı değerine bilgisayarın hesaplama çözünürlüğü dâhilinde küçük değerler verilerek sistemin bu komşu yörüngelerden evrilmesine izin verilir ve duyarlık fonksiyonu Denklem 1 kullanılarak hesaplanır. Hesaplanan duyarlık fonksiyonunun Denklem 4 ile verilen kuvvet yasasındaki davranışı sergileyip sergilemediği, sergiliyorsa hangi q değerinde bu davranışın elde edildiğinin belirlenmesi adına $\ln_q \xi$ niceliği hesaplatılır. İfadede yer alan q-logaritma fonksiyonu, Denklem 3 ile tanımlanan q-eksponansiyel fonksiyonunun matematiksel tersidir ve

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \tag{5}$$

olarak tanımlanır ve $q \to 1$ limitinde standart logaritma fonksiyonuna indirgenir (Tsallis, 1988, 1994). Böylece duyarlık fonksiyonu için q-logaritma fonksiyonu kullanılarak Denklem 4 ile verilen kuvvet yasası formundaki davranış için zamana doğrusal bağlılık gösteren q değeri sayısal olarak tespit edilebilir. Elde edilen lineer eğrinin eğimi genelleştirilmiş Lyapunov üsteli değerini verecektir. Bu işlem çok sayıda rastgele seçilmiş başlangıç koşulu üzerinden tekrarlanarak bir topluluk ortalaması oluşturulur ve duyarlık fonksiyonunun davranışının doğru bir tasviri yapılmış olunur (Tsallis vd., 1997; Tirnakli, 2002; Celikoglu ve Tirnakli, 2006; Tirnakli ve Tsallis; 2006). Kuvvetli kaotik rejimde duyarlık fonksiyonu incelemelerinde de aynı prosedür takip edilir ve duyarlık fonksiyonunun Denklem 2 ile verilen üstel formda bir davranış sergilemesi beklenir. Bu kuvvetli kaotik rejimdeki analizde yukarıda verilen bilgilere paralel olarak $q = 1$ optimum q değeri elde edilecektir (Tsallis vd., 1997; Tirnakli, 2002; Celikoglu ve Tirnakli, 2006; Tirnakli ve Tsallis; 2006). Bu rejim için gözlemlenen lineer eğrinin eğimi standart Lyapunov üsteline karşılık gelir. Çok sayıda başlangıç koşulunun seçildiği duyarlık fonksiyonu hesaplamalarından tespit edilen q indisi, ortalama ve duyarlık kelimelerinin İngilizce karşılıkları olan sırasıyla average ve sensitivity kelimelerinin kısaltmaları kullanılarak q_{sen}^{av} şeklinde belirtilmektedir.

2.2 Entropi Artış Hızı

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kaotik rejiminde gözlemlenen davranışları tarif etmenin diğer bir yolu da Kolmogorov-Sinai (KS) entropisi, K_1, yani entropi artış hızıdır (Hilborn, 1994). Sistemin ergodik olduğu bu rejimde KS entropisi, birim zaman başına

$$S_{BG} = S_1 \equiv -k \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i \tag{6}$$

şeklinde verilen Boltzmann-Gibbs entropisindeki artış olarak tanımlanır ve λ_1 standart Lyapunov üsteline Pesin özdeşliği ile bağlıdır (Pesin, 1977). İfadede yer alan W girilebilir durum sayısı, p_i sistemin *i.* durumda bulunma olasılığını belirtir. Pesin özdeşliği, $\lambda_1 > 0$ için $\lambda_1 = K_1$, diğer durumlarda $K_1 = 0$ olacağını söyler. $\lambda_1 = 0$ marjinal durumunda ise sistem ergodik ve karışmış olmadığından BG entropisi kullanılamaz. Hem kuvvetli kaotik $\lambda_1 > 0$ hem de zayıf kaotik $\lambda_1 \approx 0$ rejimi de kapsayan Tsallis entropisi S_q kullanılabilir (Tsallis vd., 1997; Tsallis, 1988). Bu entropi;

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1} = k \sum_{i=1}^{W} p_i \ln_q \left(\frac{1}{p_i} \right) \tag{7}$$

olarak tanımlanır ve $q \to 1$ limitinde BG entropisini de kapsar. Entropideki bu genelleştirmeden hareketle entropi artış hızı için de bir q-genelleştirmenin olacağı Tsallis vd. (1997) çalışmasında gösterilmiştir. Böylece birim zaman başına q-entropi artış hızı;

$$K_q \equiv \lim_{t \to \infty} \lim_{W \to \infty} \lim_{N \to \infty} \frac{S_q(t)}{t} \tag{8}$$

ele alınan dinamik sistemin doğru bir tanımını vermek için zamanın (t), parçacık sayısının (N) ve girilebilir durumların (W) sonsuz limiti alınarak tanımlanmaktadır. Entropi artış hızı hesabı ele alınan faz uzayının eşit boyuttaki W hücreye bölünerek, bu W hücreden birinin içerisine $N_{ic} \gg W$ kadar rastgele seçilmiş başlangıç koşulu yerleştirmeye ve sistemin bu başlangıç koşullarından evrilmesine izin vermeye dayanır. Sistem zamanla evrilirken yörünge noktaları faz uzayı hücrelerini işgal ederler ve hücrelere düşen yörüngeler saydırılarak göreli frekanslar $\{ p_i(t) \equiv N_i(t) / N \}$ ($\sum_{i=1}^{W} N_i(t) = N$) bulunur ve buradan entropi hesaplanır (Hilborn, 1994). Entropi hesabında ortaya çıkabilecek dalgalanmaları en aza indirmek için; başlangıç koşullarının seçildiği N_c başlangıç hücreleri $N_c \gg 1$ olarak rastgele seçilip, $S_q(t)$ için bu N_c hücre üzerinden ortalama alınır (Çelikoğlu ve Tırnaklı, 2006; Çetin vd., 2018). Böylece Denklem 8 ile verilen q-genelleştirilmiş entropi artış hızı ifadesinde ortalama q-entropisi

$< S_q(t) >$ kullanılır. q-entropi artış oranı K_q'nun sonlu değerinin sadece bir özel q_{ent}^{av} değerinde sağlandığı ve bu q değerinin q-genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığına işaret ederek duyarlık fonksiyonu için yapılan incelemelerde bulunan q_{sen}^{av} değerine eşit olması gerektiği pek çok sistem üzerinde yapılan çalışmalarda gösterilmiştir (Baldovin ve Robledo, 2004; Celikoglu ve Tirnakli, 2006; Tirnakli ve Tsallis, 2006; Cetin vd., 2018). Aynı çalışmalarda $q < q_{sen}^{av}$ durumunda K_q'nun ıraksayacağı ve $q > q_{sen}^{av}$ durumunda sıfır olacağı ortaya konmuştur. Entropi artış hızı hesaplamalarında sayısal olarak tespit edilen optimum q değerini belirten q_{ent}^{av} indisinde daha önce duyarlık hesabında da olduğu üzere ortalama alındığını ve karakterizasyon yöntemini belirten kısaltmalar kullanılarak isimlendirme yapılmıştır. Sonlu entropi artış oranı değeri, ortalama entropinin zamana doğrusal bağlılık gösterdiği q değerinde elde edilen doğrusal eğrinin eğiminden tespit edilir.

2.3 Entropi Gevşeme Hızı

Önceki bölümde bahsedilen entropi artış hızı incelemesinde başlangıç koşulları kümesinin faz uzayındaki eşit boyutlu W hücreden birinin içerisinden seçilmesi nedeniyle tüm q değerleri için $t = 0$ anında $S_q(0) = 0$ olur. Bir yitimli dinamik sistem için, bir başlangıç koşulları kümesi faz uzayının tamamına dağıtılabilir (de Moura vd., 2000) ve böylece entropi için en olası değer $S_{q_{ent}}(0) = \ln_{q_{ent}} W$ olur. Bu durumda zamanla evrilen sistem kendi faz uzayı çekicisine ulaşır ve kuvvetli kaotik bir sistem için entropi üstel olarak, zayıf kaotik bir sistem için ise q-eksponansiyel formunda gevşer (Borges vd., 2002). Bu çalışma kapsamında sadece alan-korunumlu standard mapin istatistiksel karakterizasyonunda entropi gevşeme hızı analizi yapılmaktadır.

de Moura vd., (2000) çalışmasında yitimli sistemler için geliştirilen yöntem, faz uzayında çekici kavramı olmayan korunumlu sistemlere birebir şekilde uygulanamaz. Ancak Borges vd., (2002) çalışmasında türetilen yöntem alan-korunumlu modellere uyarlanabilir. Bunu yaparken,

$$\Delta S_q(t) = S_q(\infty) - S_q(t) \tag{9}$$

değişkeni ele alınıp, bu değişkenin $t \to \infty$ limiti için bir başlangıç koşulları kümesi üzerinden ortalaması zamana bağlı olarak edilir. Standard mapte ortalama alma prosedürü birbirinden oldukça farklı dinamikler sergileyen kararlılık adaları ve kaotik deniz için farklı kriterler belirlenerek oluşturulmalıdır. Ancak genel olarak $S_{q_{ent}}(\infty) = \ln_{q_{ent}} W$ niceliği belirlenerek; $\ln_{q_{rel}}(< \Delta S_{q_{ent}}(t) > / < S_{q_{ent}}(\infty) >)$ niceliğinin zamana (iterasyona) bağlı değişimi sayısal olarak hesaplanır ve zamana lineer bağlılığın gözlemlendiği q değeri sistemin entropi gevşeme hızını

tasvir eden q_{rel}^{av} olarak sembolize edilir. Bu indiste yer alan *rel* alt indisi gevşeme kelimesinin İngilizce karşılığı olan relaxation kelimesinin kısaltmasıdır.

2.4 Olasılık Dağılımları

Dinamik sistemleri tam olarak anlamakta bu sistemlerin limit davranışları büyük öneme sahiptir. Özellikle kaotik davranış sergileyebilen sistemlerde bağımsız değişkenlerinin limit davranışları istatistiksel mekanik bakış açısından oldukça değerli gözlemler sunabilmektedir. Büyük pozitif sayısal değerli maksimum Lyapunov üsteli değerine sahip ergodik ve karışmış davranışlı kuvvetli kaotik rejimde, ele alınan mapin iterasyonları toplamının olasılık dağılımının MLT çerçevesinde bir Gaussiyen olarak elde edileceği bilinmektedir (Beck ve Schlögl, 1997; van Kampen, 1981). Davranışın ergodik ve karışmış olmadığı yaklaşık sıfır Lyapunov üstel değerine sahip zayıf kaotik rejimde ise elde edilecek olasılık dağılımlarının, özellikle *q*-Gaussiyen formda olan (Tsallis, 2009) Gaussiyen olmayan dağılımlar olacağı Giriş ve Literatür Özeti kısmında da detaylı bir biçimde verilen çeşitli sistemler üzerinde yapılan incelemelerle ortaya konmuştur. Gözlemlenen bu iki farklı dağılım aynı zamanda farklı iki istatistiksel mekanik yaklaşımının geçerlilik alanlarına işaret etmektedir. Denklem 7 ile verilen *q*-entropisini maksimum yapan *q*-Gaussiyen dağılımlar, Denklem 3 ile tanımlanan *q*-eksponansiyel fonksiyon kullanılarak ve β dağılımın genişliğini belirtmek üzere, en genel haliyle;

$$P(y) \propto \exp_q(-\beta y^2) \tag{10}$$

olarak tanımlanır. Tıpkı $q \to 1$ limitinde Denklem 7 ile verilen *q*-entropisinin Denklem 6 ile tanımlanan BG entropisini özel bir hal olacak şekilde kapsaması gibi, aynı limitte *q*-Gaussiyenler standart Gaussiyen dağılım fonksiyonuna,

$$P(y) \propto \exp_{q=1}(-\beta y^2), \tag{11}$$

indirgenir (Tsallis, 2009) ve Gaussiyen dağılımlar BG entropisini maksimum yapan dağılımlardır. Bu kapsayıcılık özelliği genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin, sistemlerin istatistiksel mekanik karakterizasyonunda uygun yapıya sahip olduğunun bir diğer işaretidir.

Bu çalışma kapsamında ele alınan sistemlerin bağımsız değişkenlerinin olasılık dağılımları araştırılırken bu değişkenlerin iterasyonları toplamı niceliğinin limit davranışları incelenmektedir. Mapin iterasyonları toplamı niceliği *T* iterasyon sayısını belirtmek üzere MLT çerçevesinde;

$$y := \sum_{i=1}^{T} \left(x_i - < x > \right) \tag{12}$$

olarak tanımlanır. İfadede yer alan ortalama hem *T* iterasyon üzerinden alınan zaman ortalamasını, hem de *M* adet rastgele seçilmiş başlangıç koşulu üzerinden alınan topluluk ortalamasını belirtir ve

$$< x >= \frac{1}{M} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{T} x_i^{(j)} \tag{13}$$

şeklinde ifade edilir. Çok sayıda rastgele seçilmiş başlangıç koşulunun her biri için yüksek iterasyonların uygulanmasıyla Denklem 12 ile verilen *y* niceliğinin olasılık dağılımının incelendiği bu çalışmada kullanılan *q*-Gaussiyen dağılım fonksiyonu

$$P_q(y; \mu_q, \sigma_q) = A_q \sqrt{B_q} \left[1 - (1-q) B_q (y - \mu_q)^2 \right]^{1/1-q} \tag{14}$$

şeklindedir. Bu fonksiyonda yer alan A_q normalizasyon çarpanı, σ_q *q*-varyans, μ_q *q*-ortalama değer ve B_q ise Denklem 10'da yer alan β'ya benzer olarak dağılımın genişliğini karakterize eden parametredir (Prato ve Tsallis, 1999). A_q ve B_q parametreleri

$$A_q = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left[\dfrac{5-3q}{2(1-q)}\right]}{\Gamma\left[\dfrac{2-q}{1-q}\right]} \sqrt{\dfrac{1-q}{\pi}} & q < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & q = 1 \\ \dfrac{\Gamma\left[\dfrac{1}{q-1}\right]}{\Gamma\left[\dfrac{3-q}{2(q-1)}\right]} \sqrt{\dfrac{q-1}{\pi}} & 1 < q < 3 \end{cases} \tag{15}$$

$$B_q = \left[(3-q)\, \sigma_q^2 \right]^{-1} \tag{16}$$

şeklinde tanımlıdır. Denklem 14'te verilen *q*-Gaussiyen fonksiyonunun $q \to 1$ limitinde,

$$P_1(y; \mu_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp_1 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right], \tag{17}$$

şeklindeki standart Gaussiyen dağılıma indirgendiği görülmektedir. Ayrıca elde edilen olasılık dağılımlarında başka türde dağılımların olası varlıklarını/yokluklarını ortaya koymak için

normalize edilmiş olasılık dağılımları da kullanılmaktadır. *y* niceliğinin elde edilen olasılık dağılımını normalize ederken;

$$P(y) = P(0)\exp_q(-\beta y^2) \tag{18}$$

alınır. Olasılık dağılımı $P(0)$ maksimum değerine normalize edilerek; $\widehat{P}(y) = P(y)/P(0)$, $\hat{y} = P(0)y$ ve $\widehat{\beta} = \beta/[P(0)]^2$ dönüşümleri yapılır.

Bu çalışma kapsamında standard map ve web map için olasılık dağılımları araştırması yapılmaktadır.

2.5 Ölçeklenme İlişkileri

Doğrusal olmayan dinamik teorinin iki temel ailesi olan yitimli ve korunumlu dinamik sistemler kendi içlerinde de çeşitli evrensellik sınıflarına ayrılırlar. Faz uzayında yer alan çekicilerin sistemin davranışlarını kontrol ettiği yitimli dinamik sistemlerde kaotik davranışın ortaya çıkışı farklı rotalarla gerçekleşebilmektedir (Hilborn, 1994). Bu rotalardan gözlemsel ve model sistemlerde en yaygın görüleni Giriş ve Literatür Özeti bölümünde de değinildiği üzere periyot-çiftlenimi rotasıdır. Kontrol parametresi değerine bağlı olarak sistemin periyodik dallanmalar sergileyerek kaotik rejime geçtiği bu sistemlerde elde edilen dallanma diyagramlarında çeşitli evrensel özellikler mevcuttur. Evrensel Feigenbaum sabitleriyle matematiksel olarak ortaya konan (Feigenbaum, 1979) bu özellikler sayesinde sistemler evrensellik sınıflarına ayrılabilmektedirler (Hilborn, 1994; Schuster, 2005).

Önceki bölümlerde bahsi geçen istatistiksel karakterizasyon yöntemlerinin yitimli sistemlerin kaos geçiş eşiğinde kuvvet yasası formunda davranışlar sergilemesinden hareketle bir-boyutlu yitimli lojistik mapin kaos geçiş eşiği civarında Afsar ve Tirnakli (2014) ile Cetin vd. (2015) çalışmalarında başka kuvvet yasası formundaki davranışların varlıkları araştırılmıştır. Alt başlıklarda tanıtımları yapılacak olan bu davranışların sayısal analizlerinde lojistik mapin kaos geçiş eşiğine kaotik bölgeden belirli hassasiyetlerle yaklaşmak için genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasından (Afsar ve Tirnakli, 2013) faydalanılmaktadır. Lojistik mapin dallanma diyagramının periyodik bölgesinde gözlenen periyot-çiftlenmi dallanmalarına benzer bir davranış, kaotik bölgeden kaos geçiş eşiğine yaklaşırken kaotik bantların yarılması prosedüründe ortaya çıkar (Hilborn, 1994). Bu bant yarılma prosedürünü kullanmak üzere tanımlanan genelleştirilmiş formdaki ölçeklenme yasası, *c* mapin kontrol parametresini göstermek üzere;

$$\left|c - c_c^{(s)}\right| = \delta^{-n-\frac{\ln s}{\ln 2}} \tag{19}$$

olarak tanımlanmaktadır. İfadede yer alan $\delta = 4.669201\ldots$ Feigenbaum delta sabiti, c_c kaos geçiş eşiği parametre değeri, s dallanma diyagramında ortaya çıkan periyodik pencereler için parametre, n kaotik bant yarılma prosedürüyle $n \to \infty$ limitinde Feigenbaum çekicisine yaklaşan $s2^n$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) kaotik bantlarını belirten indistir (Afsar ve Tirnakli, 2013). Artan n kaotik bant indisi değerleri ile kaos geçiş eşiğine yaklaşırken, bu bantlara karşılık gelen c parametre değerleri Denklem 19 ile hesaplanmaktadır. n değerlerini aynı hassasiyetle artırmak, hepsi pozitif Lyapunov üsteli değerine sahip olan Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla verilen sonsuz sayıdaki olası düz eğrilerden birisi üzerinde kalarak kaos geçiş eşiğine yaklaşılmasını sağlar. Tam sayı n değerleri için Lyapunov üsteli değerleri $-\infty$'a gitme eğiliminde olduklarından, tam sayı olmayan n değerleri seçilerek bu değerler belirli hassasiyetlerle arttırılmaktadır. Kaos geçiş eşiği civarındaki ölçeklenme davranışları genelleştirilmiş Huberman-Rudnick yasasından belirlenen (n,c) takımları kullanılarak araştırılmaktadır. Bilgimiz dahilinde bu çalışma kapsamında evrensel Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasının Rössler salınıcısı için elde edilen Poincaré noktaları kümesi davranışı için geçerliliğinin yanı sıra aynı sistemde kaotik bantlar üzerindeki korelasyon uzunluğunun ölçeklenme davranışı ilk defa araştırılmaktadır.

2.5.1 Evrensel Huberman-Rudnick Ölçeklenmesi

Huberman ve Rudnick, ardışık periyot-çiftlenimi dallanmalarının ardından kaotik hale gelen sistemler için Lypunov üstelinin kontrol parametresi değerine bağlılığı için evrensel bir tanım ortaya koymuşlardır. Lyapunov üstelinin pozitifliğinin artmasıyla kaotik davranışın kuvvetlenmesinden hareketle, kontrol parametresi değerine bağlı olarak sistemin ne kadar kaotik olacağının belirlenmesinde yardımcı olan evrensel Huberman-Rudnick ölçeklenme yasası;

$$\lambda \propto \left(c - c_c\right)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} \tag{20}$$

olarak tanımlanır (Huberman ve Rudnick, 1980). Bu ifade, fizikteki ikinci-dereceden faz geçişi civarındaki fiziksel özellikleri tarif eden ölçeklenme yasaları ile aynı formdadır (Hilborn, 1994; Beck ve Schlögl, 1995). Sistemin periyodik davranıştan kaotik davranışa geçiş yaptığı göz önüne alındığında, Lyapunov üstelinin bir düzen parametresi rolü üstlendiği görülür. Evrensel Huberman-Rudnick ölçeklenmesinin sadece model sistemlerde değil, yarıiletken diyot devreleri gibi periyot-çiftlenimi rotasıyla kaotik hale gelen deneysel sistemlerde de geçerliliği

gösterilmiştir (Johnston ve Hilborn, 1988). Denklem 19 ile verilen genelleştirilmiş ifadeden belirlenen (*n*,*c*) takımları için Lyapunov üsteli hesaplatılarak Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasının geçerliliğinin kontrol edilmesi adına $\lambda \propto (c - c_c)$ grafiği çizdirilmektedir. Yasanın geçerliliği için elde edilecek lineer eğrinin eğiminin Denklem 20'de yer alan üstelle uyumlu olması gerekir.

2.5.2 Korelasyon Uzunluğu

Kaotik bölgede gözlemlenen kaotik bant yarılma prosedüründeki bir kaotik bandı oluşturan bant parçaları üzerinde yer alan yörünge noktaları birbirleriyle kuvvetli korelasyonlar sergiler. Denklem 19 ile belirlenen (*n*,*c*) takımlarına karşılık gelen kaotik bantlarda, artan *n* değerleriyle kaos geçiş eşiğine yaklaşırken bu korelasyon özelliği giderek kuvvetlenir. Bu noktadan hareketle kaotik bantlardaki korelasyon uzunluğu ζ ile bu kaotik bantların kaos geçiş eşiğine olan mesafeleri arasında bir ilişki olması gerektiği düşünülebilir (Afsar ve Tirnakli, 2013; Cetin vd., 2015).

Bir zaman serisindeki verilerin korale olup olmadığının belirlenmesinde r_κ ile gösterilen oto-korelasyon fonksiyonundan yararlanılır. Bu fonksiyon;

$$r_\kappa = \sum_{i=1}^{N-\kappa} \frac{(y_i - < y >)(y_{i+\kappa} - < y >)}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - < y >)^2} \tag{21}$$

şeklinde tanımlanır. İfadede yer alan; $< y >= \sum_{i=1}^{N} y_i / N$, *N* zaman serisindeki toplam veri sayısı ve κ bir zaman gecikmesi adımıdır. Denklem 21 ile verilen oto-korelasyon fonksiyonunun sıfırdan farklı değerlerinde zaman serisindeki veriler korale iken, bu fonksiyonun sıfıra eşit olduğu durumda korale değillerdir. Oto-korelasyon fonksiyonu kullanılarak da zaman serisi için korelasyon uzunluğu ζ, *K* zaman gecikmesi κ için korale veriye karşılık gelen üst limit olmak üzere (Morales ve Nuevo, 1993);

$$\zeta = \sum_{k=1}^{K} \left(1 - \frac{k}{N}\right) r_\kappa \tag{22}$$

şeklinde tanımlanır. Burada *K* ve κ arasında; $\kappa < K$ için $r_\kappa \neq 0$ ve $\kappa > K$ için $r_\kappa = 0$ olacak şekilde bir ilişki vardır. Bu çalışma kapsamında Rössler salınıcısının bağımsız değişkenlerinin elde edilen Poincaré noktalarının belirlenen (*n*,*c*) takımları için Denklem 22 ile verilen korelasyon uzunlukları sayısal olarak hesaplanarak, bu takımların Rössler salınıcısı kaos geçiş eşiğine olan mesafeleri arasındaki ilişki $\zeta \propto (c - c_c)$ araştırılmaktadır.

2. BULGULAR

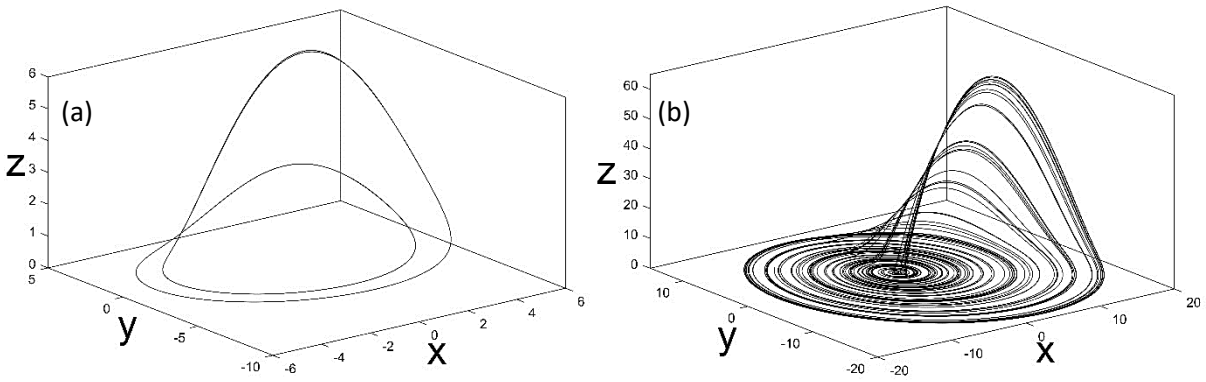
Önceki bölümde tanıtımı yapılan istatistiksel karakterizasyon yöntemleri ve ölçeklenme davranışları ele alınan sistemlerin doğalarının izin verdiği ölçülerde ve gerekli görülen yeniden düzenlemeler yapılarak sayısal olarak araştırılmaktadır. Her bir sistem için kullanılan sembollerin karışmaması adına ele alınan sistemlerin tanıtımı, yapılan hesaplamalar ve gözlemler ayrı alt başlıklar altında verilecek ve hangi sistemde hangi hesaplamaların yapılmasının mümkün olup olmadığı ilgili alt başlıkta açıklanacaktır.

3.1 Rössler Salınıcısı Üzerinde İncelemeler

Rössler salınıcısı *a*, *b* ve *c* boyutsuz pozitif kontrol parametreleri olmak üzere zamana göre türevlerin alındığı üç adet birinci derece adi diferansiyel denklemden oluşur ve

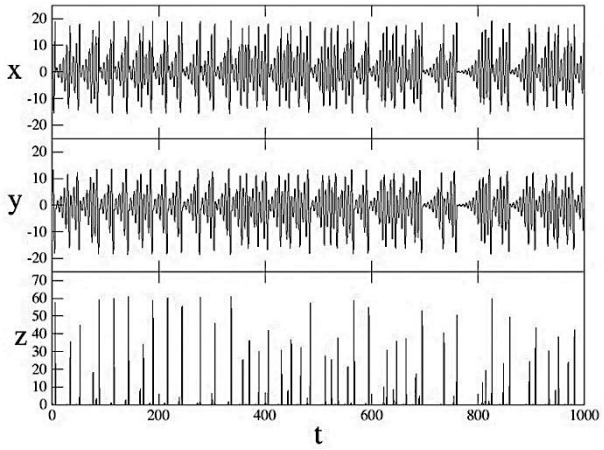
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{aligned} \tag{23}$$

şeklinde tanımlanır (Rössler, 1979). Rössler salınıcısı için yapılan incelemelerde bir gelenek olarak, üç kontrol parametresinden iki tanesi sabit bir değerde tutulurken üçüncü kontrol parametresindeki değişimin sistem üzerinde yarattığı etkiler incelenir. Rössler salınıcısı için analizlerin yapıldığı bu çalışma kapsamında sabit parametreler $a = b = 0.2$ olarak alınarak, *c* kontrol parametresinin sistem üzerindeki etkileri üzerinde durulmaktadır. *c* kontrol parametresi sıfırdan başlayarak artarken, Rössler salınıcısının periyodik davranışı kaos geçiş eşiği olarak adlandırılan bir kritik parametre değerinin ardından yörüngelerin kendilerini tekrar etmediği kaotik davranışa dönüşür. Kaos geçiş eşiğini için parametre değerinin üstündeki değerlerde periyodik pencereler olarak adlandırılan periyodik davranış aralıkları belirli parametrelerde ortaya çıkabilmektedir. Rössler salınıcısının $x = y = z = 1$ başlangıç noktasından başlatıldığı, $c = 3$ ve $c = 10$ parametre değerleri için geçici davranışın ardından durum uzayı çekicisine yerleşen yörünge davranışları Şekil 1'de verilmektedir. $c = 10$ parametre değerindeki Rössler salınıcısının kaotik davranışı için net bir görsel elde etmek adına yörüngenin kısa süre evrilmesine izin verilmiştir. Şekil 1.a'da Rössler salınıcısının durum uzayında sergilediği periyot-2 davranışı net bir şekilde görülmektedir. Rössler salınıcısı sürekli bir sistem olduğundan sistemin evrilme süresi için bir üst limit yoktur ve kaotik davranışın kendini tekrar etmeyen mekanizması göz önüne alındığında Şekil 1.b'de görülen kaotik çekici, yörüngeler tarafından her ölçekte sarılacaktır.



Şekil 1. Rössler salınıcısının $a = b = 0.2$ sabit parametre değerleri ile (a) $c = 3$ ve (b) $c = 10$ kontrol parametre değerleri için durum uzayı çekicileri. İki şekil de $x = y = z = 1$ başlangıç noktasından başlatılmaktadır.

Rössler salınıcısının üç-boyutlu durum uzayındaki incelemeler oldukça karmaşık olduğundan, durum uzayı boyutunu azaltırken sistem dinamiklerinin tam bir resminin çizilmesini de sağlayan Poincaré kesiti tekniği kullanılarak analizler gerçekleştirilebilir (Hilborn, 1994). Bu çalışmada Rössler salınıcısının bağımsız değişkenleri olan *x*, *y* ve *z* için ayrı ayrı elde edilen zamana bağlı sinyallerin maksimum noktalarını toplayacak şekilde Poincaré kesiti oluşturulmuş ve bu kesit üzerinde toplanan noktalar üzerinden incelemeler yapılmıştır. Rössler salınıcısının $c = 10$ kontrol parametresi değerinde salınıcının bağımsız değişkenleri için elde edilen zamana bağlı sinyaller Şekil 2'de verilmektedir.



Şekil 2. Rössler salınıcısının $c = 10$ parametre değeri için (a) *x*, (b) *y* ve (c) *z* bağımsız değişkenleri için zamana bağlı sinyaller. Burada salınıcı $x = y = z = 1$ başlangıç noktasından başlatılmaktadır.

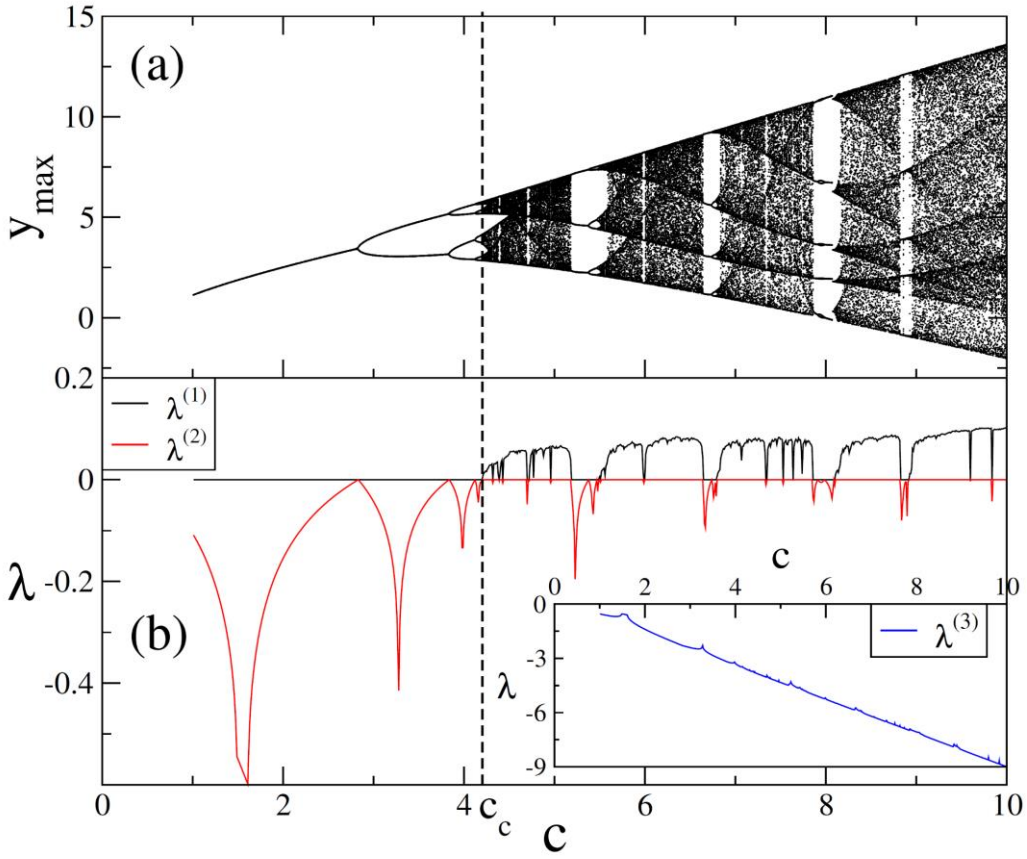
Sinyallerin maksimum noktalarını toplayacak şekilde oluşturulan Poincaré kesiti ile sistemin boyutu bir-boyuta indirgenmiş olur. Boyuttaki bu indirgeme sistemin orijinal dinamikleri için bir kayba neden olmaz, sadece analizleri kolaylaştırır (Hilborn, 1994). Şekil 3.a'da Rössler salınıcısının *y* bağımsız değişkeni için toplanan Poincaré noktalarının *c* parametresine bağlı

durum uzayı davranışı yer almaktadır. Dallanma diyagramı olarak da adlandırılan bu şekilde parametre değeri artarken sistemin davranışının, ardışık periyot-çiftlenimlerinin periyodun sonsuz olduğu kaos geçiş eşiğinde sona ermesinin ardından kaotik rejime geçtiği görülmektedir. Rössler salınıcısının üç bağımsız değişkeni için de aynı şekilde elde edilen bu dallanma davranışı, bir-boyutlu yitimli unimodal lojistik map ile aynı evrensellik sınıfındadır (Hilborn, 1994). İteratif yapılı bir sistem olan lojistik map ile sürekli sistem yapısında olan Rössler salınıcısının Poincaré kesiti tekniği ile aynı evrensel davranışı sergilediğinin ispatı, doğrusal olmayan dinamik teori argümanları için yapılan ölçeklenme ilişkileri analizlerinde ortaya konacaktır.

Dallanma diyagramında elde edilen durum uzayı davranışlarını nicel olarak tasvir etmekte Lyapunov üstelinden yararlanılır (Hilborn, 1994; Schuster, 2005). Üç-boyutlu durum uzayına sahip olan sistemin karakteristik Lyapunov üstelleri $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ ve $\lambda^{(3)}$; Rössler sistemi için

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x-c \end{pmatrix} \tag{24}$$

şeklinde kurulan Jacobian matrisin özdeğerleridir (Hilborn, 1994; Schuster, 2005) ve faz uzayındaki komşu yörüngelerin birbirinden ortalama ıraksaması veya yakınsamasının bir ölçüsüdür. Davranışın kaotik olduğu durumda pozitif değer alan bu üstel komşu yörüngelerin birbirinden üstel formda ıraksadığını belirtirken, negatif üstel değerlerinde davranış periyodiktir. Periyodik dallanmalar ve kaos geçiş eşiğinde bu üstel sıfır değerini almaktadır. Kaos geçiş eşiğinin iki rejim arasındaki geçiş noktası olduğu göz önüne alındığında, bu kritik nokta zayıf kaotik rejim olarak da adlandırılır (Tırnaklı, 2007, 2009). Şekil 3.b'de verilen Lyapunov üsteli diyagramında $\lambda^{(1)}$ ve $\lambda^{(2)}$ üstellerinin dallanma diyagramını çok başarılı bir şekilde açıkladığı görülmektedir. $\lambda^{(3)}$ üsteli ise sistemin bir durum uzayı çekicisine çöktüğünü belirten yitimli doğasını işaret edecek şekilde sürekli negatif değer almaktadır (Hilborn, 1994) ve bu nedenle de şeklin iç kısmına ayrı bir şekilde çizdirilmiştir. Lyapunov üsteli diyagramından yararlanarak $a = b = 0.2$ sabit parametreli Rössler salınıcısında kaos geçiş eşiği $c_c = 4.204232\ldots$ olarak tespit edilmiştir.



Şekil 3. Rössler salınıcısının $x = y = z = 1$ başlangıç koşulundan $a = b = 0.2$ sabit parametre değerleri ile başlatıldığı durum için; (a) y bağımsız değişkeninin toplanan Poincaré noktaları için elde edilen dallanma diyagramı, (b) Lyapunov üsteli diyagramı. Şekilde yer alan c_c kaos geçiş eşiği parametre değerini belirtmektedir.

Kontrol parametresi değerine bağlı olarak ergodik veya ergodik olmayan davranış sergileyebilen çeşitli sistemler için yapılan istatistiksel karakterizasyon analizlerinde Boltzmann-Gibbs ve genelleştirilmiş istatistiksel mekanik formalizmlerin geçerlilik alanları ortaya konmuştur (Tirnakli vd., 2007, 2009; Tirnakli ve Borges 2016; Ruiz vd, 2017). İnceleme yapılan tüm sistemlerde ortak olarak maksimum Lyapunov üstelinin büyük pozitif bir sayısal değer aldığı, davranışın ergodik ve karışmış olduğu kuvvetli kaotik rejimde Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğu, Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır olduğu ve ergodik olmayan davranışın gözlendiği zayıf kaotik rejimde ise uygun yaklaşımın genelleştirilmiş istatistiksel mekanik tarafından sağlandığı ortaya konmuştur. Bu çalışma kapsamında Lyapunov üstelinin sıfır olduğu ve davranışın zayıf kaotik olduğu Rössler salınıcısı kaos geçiş eşiğinde; başlangıç koşullarına duyarlık ve entropi artış hızı istatistiksel karakterizasyon yöntemleri genelleştirilmiş istatistiksel mekanik argümanları kullanılarak incelenmekte ve bu iki karakterizasyonun arasında ilişki kuran genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin geçerliliği araştırılmaktadır (Tsallis vd., 1997; Tirnakli, 2002; Tirnakli ve Tsallis, 2006).

Ayrıca Rössler salınıcısı için elde edilen Poincaré kesiti noktalarının dallanma diyagramı davranışının bir-boyutlu lojistik map (May, 1976) ile benzer olmasından hareketle, bu iki farklı sistem için ortak evrensellik sınıfı özelliklerinin ortaya konması için; Lyapunov üsteli ve korelasyon uzunluğu niceliklerinin kaos geçiş eşiğine olan mesafe ile ölçeklenme ilişkileri araştırılmaktadır. Lojistik map için aynı niceliklerin ölçeklenme davranışlarının araştırıldığı Afsar ve Tirnakli (2014) çalışmasına benzer şekilde sayısal hesaplamaların yapıldığı bu çalışmada, iki sistem için sayısal olarak elde edilen kritik üstel değerlerinin uyumu ile evrensellik özelliğinin geçerliliği tespit edilmektedir.

Rössler salınıcısının karmaşık dinamiklerinin analizlerini kolaylaştırmak için kullanılan Poincaré kesiti tekniği analizleri kolaylaştırmasına karşın kesit ile nokta toplama prosedürü karakterizasyon yöntemlerinin hesaplama sürelerini ciddi şekilde arttırmaktadır. Bu nedenle Tsallis (1994) çalışmasında ortaya konan q-üçlüsü setinin tamamının elde edilmesi yerine, genelleştirilmiş Pesin özdeşliği ortaya konarak bu setin geçerliliğine işaret edecek şekilde entropi artış hızı ve başlangıç koşullarına duyarlık için q indisleri elde edilerek tümevarım yapılabileceği kabul edilmiştir. Ayrıca lojistik map ile kurulan evrensellik ilişkisi neticesinde Rössler salınıcısında lojistik map için daha önce yapılan istatistiksel karakterizasyonların (Tirnakli ve Tsallis, 2006) geçerli olacağı ve böylece yukarıda bahsedilen tümevarım kabulünün doğru olacağı sonucuna varılır. Bu doğrultuda Rössler salınıcısı için elde edilen sayısal hesaplamaların sonuçları lojisitk map için daha önce Tirnakli ve Tsallis (2006), Celikoglu ve Tirnakli (2006) ve Afsar ve Tirnakli (2014) çalışmalarında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Rössler salınıcısının kuvvetli kaotik rejiminde maksimum Lyapunov üstelinin pozitif bir sayı değeri aldığı Şekil 3.b'de görülmektedir. Başlangıçta komşu yörünge noktalarının sistem zamanla evrilirken birbirinden bu pozitif üstel değeriyle eksponansiyel formda ıraksaması kaotik davranışın en önemli işaretlerindendir (Hilborn, 1994; Schuster, 2005) ve yörüngelerin birbirinden bu üstel formda ıraksama davranışı sistemin karışmış ve ergodik olmasını sağlar (Schuster, 2005). Farklı başlangıç koşullarından başlayan sistemlerin çok farklı şekillerde evrilebileceğine işaret eden bu özellik nedeniyle kuvvetli kaotik rejimde başlangıç koşullarına güçlü bir duyarlık söz konusudur. Bu duyarlık özelliği Denklem 1 ile verilen duyarlık fonksiyonu ile karakterize edilir.

Kaos geçiş eşiğindeki Rössler salınıcısı için başlangıç koşullarına duyarlık incelemesinde Denklem 1 ile verilen duyarlık fonksiyonu ifadesinde, iki komşu yörüngenin başlangıç ayrımı $\Delta x(0) = 10^{-12}$ alınarak sayısal hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Rössler salınıcısının üç

bağımsız değişkeni için de ayrı ayrı yapılan analizlerde; bu noktalardan başlayarak sistemin evrilmesine izin verilerek ardından Poincaré noktaları toplanmaktadır. Bu işlem bir topluluk ortalaması oluşturmak adına 5×10^7 adet rastgele seçilmiş başlangıç koşulu üzerinden tekrarlanarak, her bir bağımsız değişken için $< \ln_q \xi(t) >$ ortalaması bu topluluklar üzerinden alınmaktadır. Şekil 4'te üç bağımsız değişken için de aynı $q_{sen}^{av} = 0.36$ değerinde zamana lineer bağlılığın elde edildiği açık şekilde görülmektedir. Elde edilen bu q değeri, bir-boyutlu lojistik map için Celikoglu ve Tirnakli (2006) çalışmasında tespit edilen q değeriyle birebir uyumludur. Tüm bağımsız değişkenler için Poincaré kesiti tekniği ile sistemin bir-boyuta indirgendiği Rössler salınıcısının, lojistik map ile aynı özel q değerine sahip olması aynı evrensellik sınıfı davranışının sergilendiğine dair olumlu bir işarettir. Şekil 4'te elde edilen lineer eğrilerin eğimi, Denklem 4'te yer alan genelleştirilmiş Lyapunov üsteli değerini, $\lambda_{q_{sen}}^{av}$, vermektedir. Üç bağımsız değişken için de pozitif bir sayısal değerin elde edildiği ve sistemin başlangıç koşullarına zayıfça duyarlı olduğu görülmektedir. Burada her bir genelleştirilmiş Lyapunov üsteli değerinin kendi bağımsız değişkenlerinin bir-boyutlu uzayının kaos geçiş eşiğini karakterize ettiğini belirtmekte yarar vardır. Grafiklerde elde edilen lineer eğriler, maksimum R-kare değeri $\simeq 0.999$ olacak şekilde belirlenmiştir.

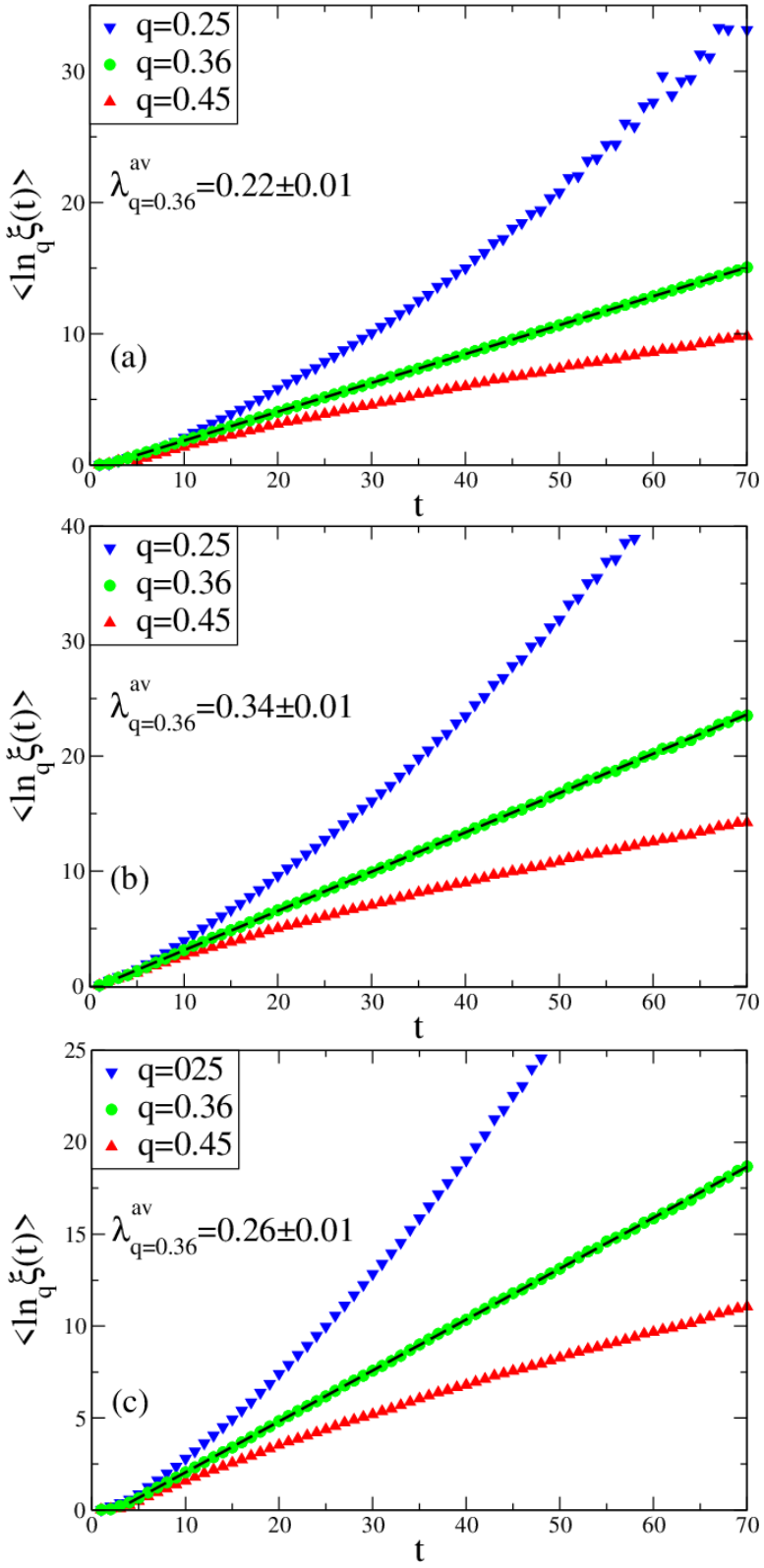
Rössler salınıcısının kaos geçiş eşiğinde entropi artış hızı için sayısal hesaplamalar Denklem 7 kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Entropi hesabı durum uzayının eşit boyuttaki W hücreye bölünüp, bu hücrelerden birinin içerisine N adet rastgele seçilmiş başlangıç koşulu yerleştirmeye ve sistemin bu başlangıç koşullarından evrilmesine izin verip ardından Poincaré noktalarını toplamaya ve hücrelere düşen noktaların saydırılmasına dayanır. Ancak Rössler salınıcısının sürekli bir sistem olması nedeniyle, durum uzayı hücrelerinin inşasında çeşitli zorluklarla karşılaşılır. Bu zorluğu aşmak için çalışma kapsamında geliştirilen yöntem üç adımda açıklanabilir.

İlk olarak Rössler salınıcısının incelenmek üzere bir bağımsız değişkeni seçilir ve geriye kalan diğer iki değişken Figür 3.a'daki dallanma diyagramının elde edilmesinde kullanılan başlangıç koşulu değerinde sabit tutulur. Seçilen değişkenin toplanan Poincaré noktalarıyla oluşturulan bir boyutlu uzay $W = 2 \times 10^4$ eşit boyuttaki hücrelere ayrılır. Rössler salınıcısı sürekli bir sistem olduğundan tüm durum uzayını hücrelere bölmek mümkün değildir. Durum uzayı sınırları analitik olarak tespit edilebilen lojistik mapin aksine Rössler salınıcısı için durum uzayında bir sınır kavramı yoktur. Bu nedenle incelemeler yapılırken sistemin yitimli doğasından faydalanılarak dallanma diyagramında görülen kaos geçiş eşiği durum uzayı çekicisinin maksimum noktasının biraz üstünde bir değer ile sıfır değeri arasında kalan durum uzayı

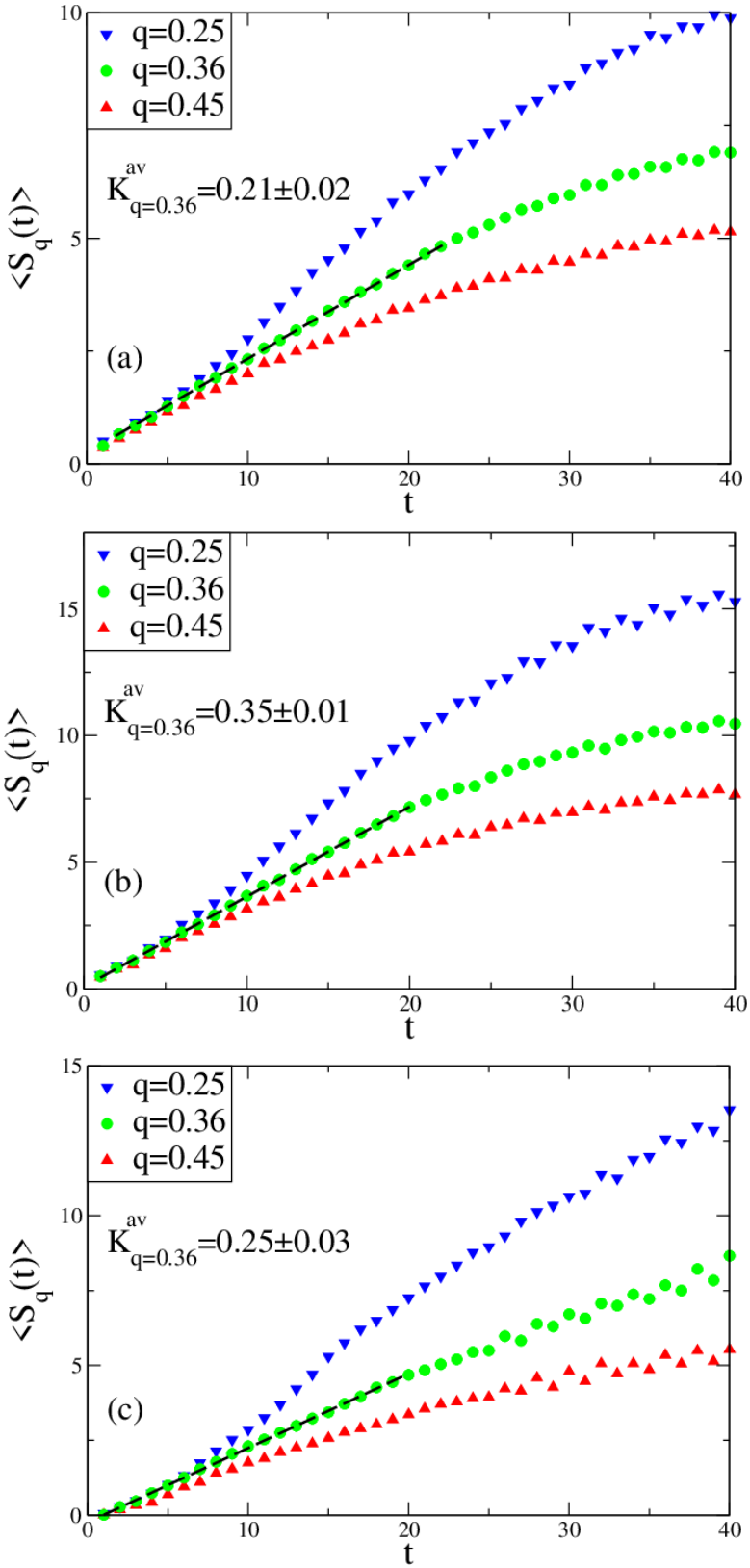
bölgesi hücrelere ayrılmıştır. Bu bölge seçimiyle sistemin çekicisine çökmesi esnasında geçici (transient) davranışının da gözlemlenmesi sağlanmaktadır. Durum uzayının hücrelere bölünmesinin ardından, bu hücrelerden birinin içerisine $N = 10 \times W$ adet rastgele seçilmiş başlangıç koşulu yerleştirilerek sistemin bu başlangıç koşullarından evrilmesine izin verilir ve ardından Poincaré noktaları toplanır. Sistem zamanla evrilirken toplanan Poincaré noktaları W hücrelerini işgal etmeye başlar ve böylece Denklem 7 entropi ifadesinde yer alan olasılık terimi göreli frekans olarak hesaplanabilir (Hilborn, 1994). Poincaré noktaları üzerinden çalışıldığı göz önüne alındığında, ifadede yer alan t teriminin üç-boyutlu durum uzayında evrilen yörüngeler tarafından Poincaré düzleminin kesilmesi adımı olduğunu belirtmekte yarar vardır. Son adımda göreli frekans kullanılarak Denklem 7 ile verilen q-entropi ve Denklem 8 ile verilen entropi artış hızı sayısal olarak hesaplanmaktadır. Bu işlem rastgele seçilmiş $W/2$ hücre üzerinden tekrarlanarak bir topluluk ortalaması oluşturulur. Böylece Rössler salınıcısının üç bağımsız değişkeni için ayrı ayrı tekrar edilen bu üç adımlı entropi artış hızı incelemeleriyle q_{ent}^{av} optimum q değeri sayısal olarak tespit edilmektedir.

Baldovin ve Robledo (2004), Tirnakli ve Tsallis (2006) çalışmalarında da ortaya konduğu üzere sonlu bir K_q değeri sadece $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av}$ için elde edilirken, $q < q_{sen}^{av}$ ve $q > q_{sen}^{av}$ için K_q sırasıyla ıraksar ve sıfır değer alır. Rössler salınıcısının üç bağımsız değişkeni için elde edilen sonuçların verildiği Şekil 5'e bakıldığında, q-entropisindeki zamana bağlı lineer artışın $q_{ent}^{av} = 0.36$ için sağlandığı görülmektedir. Bu q değeri lojistik map için aynı karakterizasyonun yapıldığı Celikoglu ve Tirnakli (2006) çalışmasında gözlemlenen q değeriyle mükemmel şekilde uyumludur. Elde edilen lineer eğriler maksimum R-kare değeri $\simeq 0.999$ olacak şekilde belirlenmiştir ve bu eğrilerin eğimi K_q değerini vermektedir. Şekil 4 ve Şekil 5'e bakıldığında aynı q değerinde zamana lineer bağlılıkların elde edilmiş olması ve lineer eğrilerin eğimleri için sayısal hata payıyla $\lambda_{q_{sen}}^{av} \simeq K_{q_{ent}}^{av}$ olduğunun gözlemlenmesi; Rössler salınıcısının kaos geçiş eşiğinde Pesin özdeşliğinin bir q-genelleştirmesinin varlığına işaret eder. Sürekli yitimli sistemler için bilgimiz dâhilinde ilk defa ortaya konan bu gözlem genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin hem kuvvetli kaotik hem de zayıf kaotik rejimlerde açıklayıcı yaklaşım olduğuna dair kuvvetli bir delildir. Şekil 5'teki lineer eğri bölgesi sonrasında ortaya çıkan bozulma, durum uzayını hücrelerle kaplarken kullanılan hücre sayısının azlığından kaynaklanmaktadır. Kutu sayısının arttırılması ve Rössler salınıcısında Poincaré noktalarının toplanması ciddi bir hesaplama yükü ve hesaplama süresi artışına neden olacağından, çalışmada kullanılan hücre sayısını arttırma yoluna gidilmemiştir. Lineer bölgenin tespitindeki maksimum R-kare değerinin çok uygun olması ve kutu artırımının bu bölgenin sadece genişliğini değiştirip eğim değerine etkisi olmayacağı düşünüldüğünde elde edilen sayısal sonuçların sağlam olduğu sonucuna

varılır. Duyarlık fonksiyonu hesabında bulunan eğim ile mükemmel bir uyumun elde edilmesi de bu sağlamlığa işaret etmektedir.



Şekil 4. Rössler salınıcısının (a) *x*, (b) *y* ve (c) *z* değişkenleri için kaos geçiş eşiğinde çeşitli *q* değerleri için ortalama duyarlık fonksiyonunun zaman evrimi.



Şekil 5. Rössler salınıcısının (a) *x*, (b) *y* ve (c) *z* bağımsız değişkenleri için kaos geçiş eşiğinde çeşitli *q* değerleri için entropi artış hızı analizleri. Zamana lineer bağlılığın görüldüğü ölçeklenme bölgeleri maksimum R-kare değeri ≃ 0.999 olacak şekilde tespit edilmiştir.

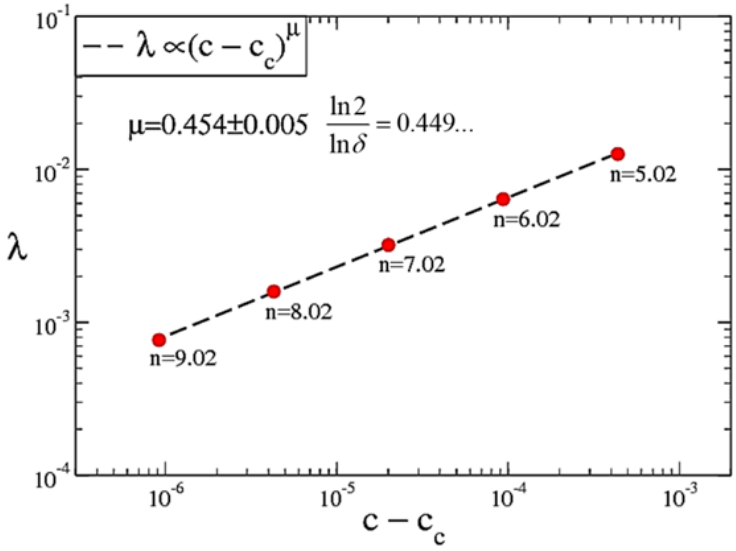
Rössler salınıcısının kaos geçiş eşiğinde istatistiksel karakterizasyon yöntemlerinde gözlemlenen kuvvet yasası formundaki davranışların ve bu davranışlar için belirlenen *q* değerlerinin lojistik mapin istatistiksel karakterizasyonundan belirlenen *q* değerleriyle uyumlu olmasından hareketle; kaos geçiş eşiği civarında daha önce lojistik map için Afsar ve Tirnakli (2014) ve Cetin vd. (2015) çalışmalarında gözlemlenen diğer kuvvet yasası formundaki ilişkiler Rössler salınıcısı için araştırılabilir. Rössler salınıcısında kaos geçiş eşiğine kaotik bölgeden belirli hassasiyetlerle yaklaşmak için Denklem 19 ile verilen genelleştirilmiş Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasından faydalanılmaktadır. Rössler salınıcısı için seçilen *n* değerleri ve bu *n* değerlerine karşılık gelen *c* kontrol parametresi değerleri Tablo 1'de verilmektedir. Rössler salınıcısı için kaos geçiş eşiği civarındaki ölçeklenme ilişkileri bu tabloda verilen (*n*,*c*) takımları kullanılarak sayısal olarak araştırılmaktadır. Evrensel Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasının Rössler salınıcısında geçerliliği ve kaotik bantlar üzerindeki korelasyon uzunluğunun kaos geçiş eşiğine olan mesafe ile olan ilişkisinin araştırıldığı bu ölçeklenme analizleriyle, Rössler salınıcısının Şekil 3.a'da elde edilen dallanma diyagramının evrensellik sınıfının belirlenmesi ve bahsi geçen iki ölçeklenme davranışı arasındaki evrensel ilişkilerin ortaya konması amaçlanmaktadır. Rössler salınıcısının bağımsız değişkenlerinin toplanan Poincaré noktaları için yapılan istatistiksel karakterizasyon incelemelerinden elde edilen sonuçların bir-boyutlu lojistik map için yapılan çalışmalarla uyumlu sonuçlar vermesinden hareketle, Rössler salınıcısının kaos geçiş eşiği civarındaki ölçeklenme davranışı için elde edilen sonuçlar lojistik map için Afsar ve Tirnakli (2014) çalışmasında elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Tablo 1. Kaotik bant yarılma prosedüründeki 2^n kaotik bantalarına karşılık gelen *n* değerleri ve bu *n* değerleri için Denklem 18 ile hesaplanmış *c* kontrol parametresi değerleri.

n	*c*
5.02	4.20466919339444...
6.02	4.20432584820760...
7.02	4.20425231418281...
8.02	4.20423656544653...
9.02	4.20423319254949...
∞	4.204232273304...

Rössler salınıcısının Tablo 1'de verilen (*n*,*c*) takımları için Lyapunov üstelleri hesaplatılarak Denklem 20 ile verilen evrensel Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasının geçerliliğinin kontrol edilmesi adına $\lambda \propto (c - c_c)$ grafiği çizdirilmektedir. Şekil 6'da artan *n* değerleriyle kaos geçiş eşiğine yaklaşılırken, kaotik bantlarda hesaplanan Lyapunov üsteli değerinin beklendiği üzere azaldığı ve Lyapunov üsteli değerlerinin kaos geçiş eşiğine mesafe $(c - c_c)$ ile evrensel

Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasıyla sayısal hata payı göz önüne alındığında mükemmel şekilde uyumlu bir kuvvet yasası formunda ölçeklenme davranışı sergilediği görülmektedir.



Şekil 6. Rössler salınıcısı için (*n*,*c*) takımlarının hesaplanan Lyapunov üstelleri ile bu takımların kaos geçiş eşiğine olan mesafeleri arasındaki ölçeklenme ilişkisi.

Rössler salıcısının kaos geçiş eşiği civarındaki Poincaré noktaları, üzerinde yer aldıkları kaotik bandı oluşturan bant parçalarındaki yörünge noktalarının kuvvetlice korale olmasından dolayı kuvvetli korelasyonlar sergiler. Rössler salınıcısının her bir bağımsız değişkeni için Tablo 1 ile verilen (*n*,*c*) takımlarına karşılık gelen kaotik bantlarda, elde edilen Poincaré noktalarının korelasyon özellikleri incelenmektedir. Kaos geçiş eşiğine artan *n* değerleriyle yaklaşırken kaotik bantlar üzerinde yer alan noktalarının arasındaki korelasyonların giderek artacağını göstermek için Denklem 22 ile verilen korelasyon uzunluğu ζ niceliği her bir (*n*,*c*) takımı için hesaplanabilir. Literatürde daha önce yapılan çalışmalarda da gösterildiği üzere Lyapunov üsteli ile korelasyon uzunluğu arasında $\lambda \propto 1/\zeta$ evrensel ilişkisi olması gerekir (Afsar ve Tirnakli, 2014).

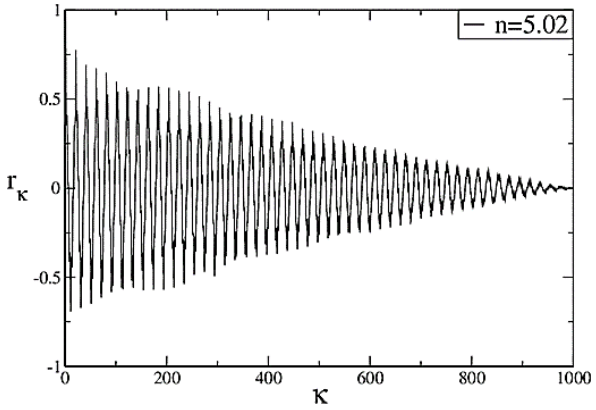
Kaos geçiş eşiği civarındaki Rössler salıcısının Poincaré noktalarının kuvvetli korelasyonlar sergilediğini göstermek amacıyla *y* bağımsız değişkeninin $n = 5.02$ kaotik bandında elde edilen Poincaré noktaları için Denklem 21 ile verilen oto-korelasyon fonksiyonu Şekil 7'de çizdirilmektedir. Şekilden de net bir şekilde görüldüğü üzere oto-korelasyon fonksiyonu sıfır civarında büyük salınımlar yaparak büyük bir zaman gecikmesi adımında sıfıra inmektedir. Bu davranış bize incelememizde kullandığımız (*n*,*c*) takımlarından kaos eşiğine en uzak olanında dahi Poincaré noktalarının kuvvetlice korale olduğunu gösterir. Denklem 21 ile verilen oto-korelasyon fonksiyonu ve Denklem 22 ile verilen korelasyon uzunluğu niceliklerinin sayısal

hesaplamalarında her bir (n,c) takımı için $N = 2^k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) Poincaré noktalarının toplamı alınmaktadır. Bu toplam;

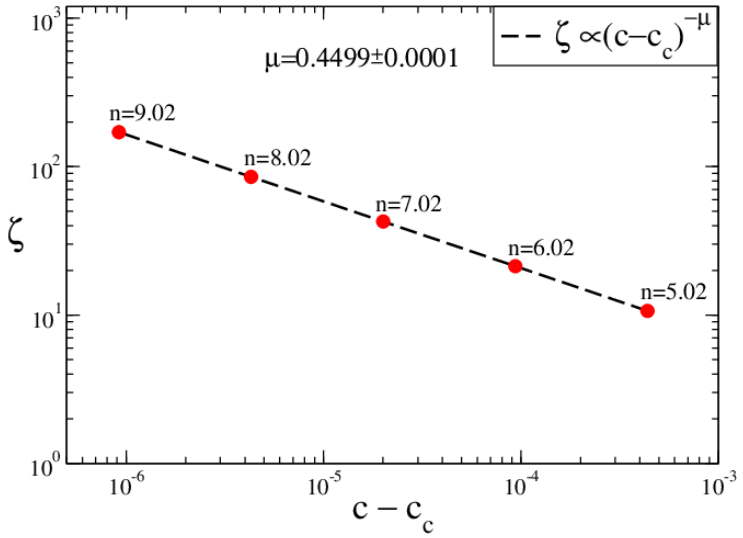
$$\eta := \sum_{i=1}^{N} x_i = W_k \tag{25}$$

olarak tarif edilir. Rössler salınıcısının x değişkeninin Poincaré noktaları için verilen Denklem 25 salınıcının diğer iki değişkeni için de aynı formdadır. Rössler salıcısının Poincaré noktalarının bir iteratif mapin iterasyon adımları ile aynı şekilde davranmasından dolayı, Denklem 24'te kullanılan nokta sayısıyla bulunduğumuz (n,c) takımı kaotik bandında başlangıç noktamızın oldukça yakınına döneriz. Bu işlemi 2^k kere tekrarladığımızda bulunduğumuz (n,c) takımı kaotik bandını tamamen sarmış ve birbirleriyle kuvvetlice korale 2^k adet W_k değişkenlerine sahip olmuş olunur (Afsar ve Tirnakli, 2014; Cetin vd., 2015).

Rössler salınıcısının Tablo 1'de belirlenen (n,c) takımları için ζ sayısal olarak hesaplanarak, bu takımların kaos eşiğine olan mesafelerinin fonksiyonu olarak Şekil 8'de çizdirilmektedir. Artan n değerleriyle kaos geçiş eşiğine yaklaşırken, kaotik bantların korelasyon uzunluklarının da beklendiği üzere arttığı ve $\mu = 0.4499 \pm 0.0001$ kritik üstel değerine sahip olan $\zeta \propto (c - c_c)^{-\mu}$ kuvvet yasası formunda bir ölçeklenme davranışının elde edildiği görülmektedir. Şekil 8 ile verilen davranış tüm Rössler salınıcısı değişkenleri için geçerlidir. Elde edilen bu ölçeklenme davranışı daha önce lojistik map için Afsar ve Tirnakli (2014) çalışmasında belirlenen ölçeklenme davranışıyla ve elde edilen kritik üstel değeriyle uyumludur. Ayrıca Huberman-Rudnick ölçeklenme yasasının geçerliliğinin araştırıldığı ölçeklenme ilişkisinde belirlenen kritik üstel değeriyle, korelasyon uzunluğu için elde edilen kritik üstel değerinin $\lambda \propto 1/\zeta$ evrensel ilişkisini sayısal hata payları göz önüne alındığında Rössler salıcısında doğrular nitelikte olduğu, Şekil 6 ve Şekil 8'e bakıldığında görülmektedir.



Şekil 7. Rössler salınıcısının y bağımsız değişkeninin $n = 5.02$ kaotik bandındaki Poincaré noktaları için oto-korelasyon fonksiyonu davranışı.



Şekil 8. Rössler salıcısının (n,c) takımları için korelasyon uzunlukları ile bu takımların kaos geçiş eşiğine olan mesafeleri arasındaki ölçeklenme ilişkileri.

Bu çalışma kapsamında Rössler salınıcısı üzerinde yapılan sayısal incelemeler sonucunda elde edilen tüm sonuçlar Tablo 2'de verilmektedir. Tablo 2'de ayrıca Rössler salınıcısının tanımladığımız Poincaré kesiti tekniğiyle toplanan noktalarının bir-boyutlu lojistik map ile benzerlikler göstermesinden hareketle Celikoglu ve Tirnakli (2006), Afsar ve Tirnakli (2014), Cetin vd. (2015) çalışmalarında lojisitk map için ortaya konan sonuçlar verilerek karşılaştırmalar yapılmaktadır.

Tablo 2. Rössler salınıcısı ve lojistik map için elde edilen istatistiksel karakterizasyon ve ölçeklenme davranışı ilişkileri.

İlişki	Lojistik Map	Rössler Salınıcısı
$\lambda_{q_{sen}^{av}} = K_{q_{ent}^{av}}$	$q_{sen}^{av} = q_{ent}^{av} = 0.36$	$q_{sen}^{av} = q_{ent}^{av} = 0.36$
$\lambda \propto (c - c_c)^{\mu}$	$\mu = 0.448 \pm 0.003$	$\mu = 0.454 \pm 0.005$
$\zeta \propto (c - c_c)^{-\mu}$	$\mu = 0.448 \pm 0.003$	$\mu = 0.4499 \pm 0.0001$

3.2 Standard Map Üzerinde İncelemeler

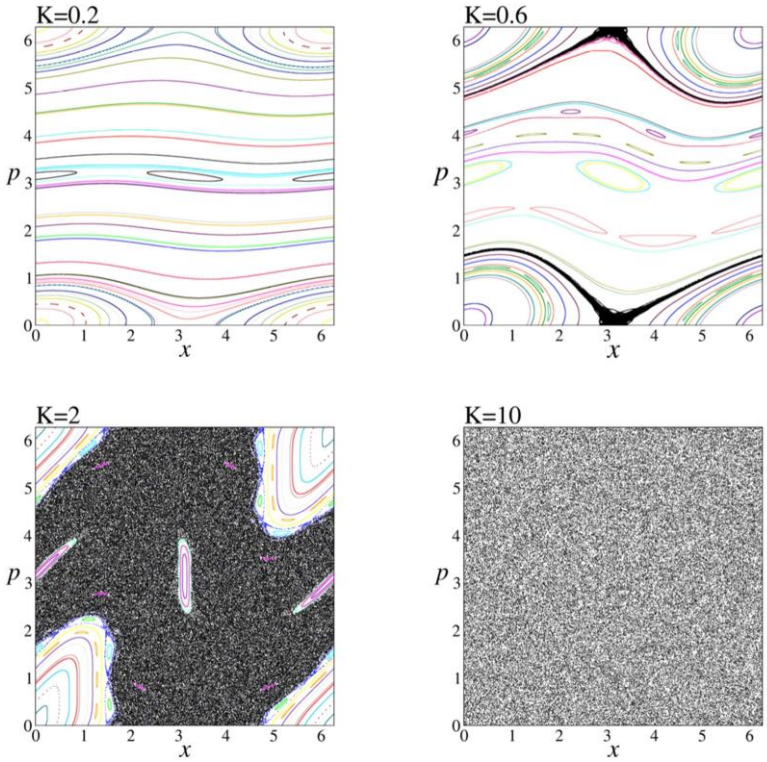
Alan-korunumlu standard map, $K \geq 0$ map parametresi olmak üzere,

$$p_{i+1} = p_i - K \sin x_i$$
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1} \qquad (26)$$

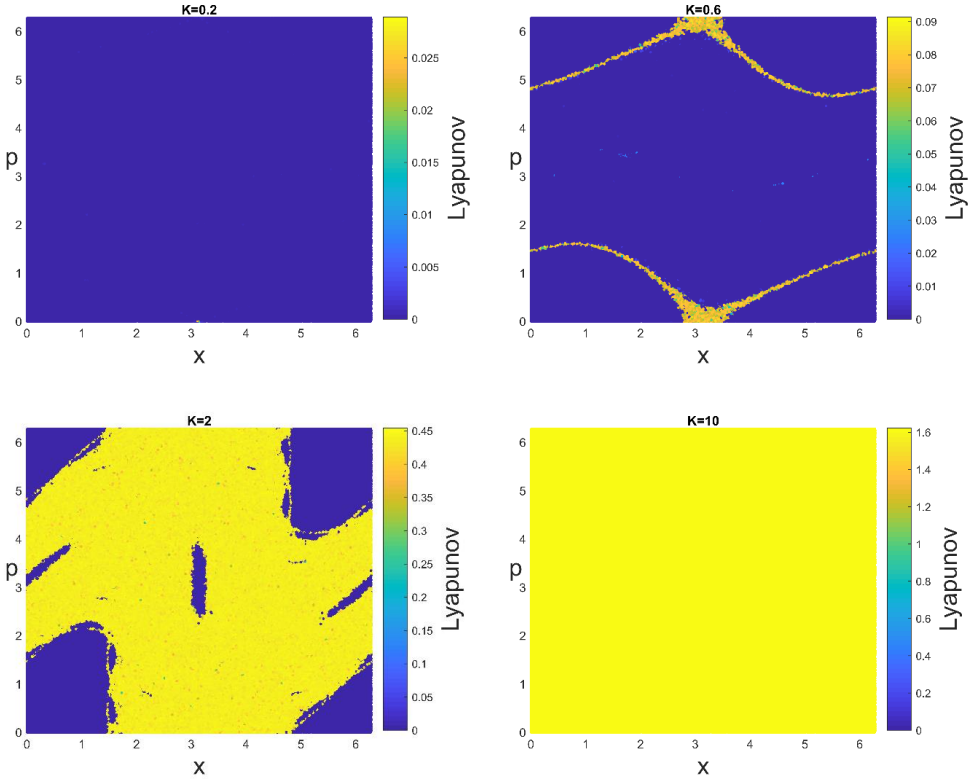
p ve x modülo 2π alınarak tanımlanmaktadır (Chirikov, 1969, 1979; Zaslavsky, 2005). K değerine bağlı olarak faz uzayında, periyodik veya yarı-periyodik yörüngelerin oluşturduğu kararlılık adaları davranışı ya da kaotik yörüngelerin oluşturduğu kaotik deniz

gözlemlenebilmektedir. Şekil 9'de sırasıyla $K = 0.2$, $K = 0.6$, $K = 2$ ve $K = 10$ olacak şekilde artan parametre değerleri için standard mapin faz uzayları verilmektedir. Bu şekilde $K = 0.2$ parametre değerinde faz uzayının tamamen kararlı yörüngeler tarafından işgal edildiği görülmektedir. Parametre değeri artarken, $K = 0.6$ ve $K = 2$, faz uzayında kaotik davranışın ortaya çıktığı ve kaotik denizin artan parametre değeri ile faz uzayının daha geniş bölgelerine KAM teoremi (Arnold, 1978) ve Poincaré-Birkhoff teoremine (Birkhoff, 1935) uygun olarak yayıldığı görülür. Artan parametre değeri ile sistemin integrallenemezliği artmakta ve kararlı yörüngeler kendi periyotlarına uygun olarak bir eliptik-hiperbolik noktalar dizisine ayrışmaktadır. Eliptik noktalar etrafında kararlı yörüngeler ortaya çıkarken, hiperbolik noktalarda yörüngelerin rezonansıyla homoklinik ve heteroklinik dolanıklar oluşur. Bu dolanıkların artan parametre değeriyle karmaşık organizasyonlar oluşturması kaotik davranışın oluşmasına neden olur (Hilborn, 1994). Bozulmadan kalan kararlı yörüngeler kaotik davranışa bir bariyer görevi görür ve Şekil 9'da $K = 0.6$ ve $K = 2$ parametre değerleri için elde edilen faz uzaylarından da görülebildiği üzere kararlılık adaları davranışıyla kaotik davranış aynı anda gözlemlenebilir. $K = 10$ durumunda ise artık son KAM torusunun da yok olarak kaotik davranışın faz uzayına engel olmadan yayıldığı ve faz uzayının tamamı tek bir kaotik deniz tarafından işgal edildiği görülmektedir. Bu aşamada iki önemli noktaya değinmek gerekir. (i) Kararlılık adaları takımından birindeki bir başlangıç koşulundan başlatılan sistem sonsuza kadar bu ada takımında kalacaktır. (ii) Kaotik denizde yer alan bir başlangıç koşulundan sistem başlatıldığında ise, sistem iterasyonları kaotik denizin tamamını saracaktır.

Faz uzayında gözlemlenen rejimlerin nicel bir tasvirini yapmak için maksimum Lyapunov üstelinden yararlanılabilir. Lyapunov üsteli hesabında, K değerine bağlı olarak faz uzayının iki rejim tarafından farklı oranlarda işgal edilebilmesi göz önüne alınarak, doğru bir tasvir elde edilmesi için, topluluk ortalaması almak yerine faz uzayındaki her bir başlangıç koşulu için ayrı ayrı Benettin algoritması (Benettin vd., 1980) kullanılarak hesaplamalar yapılmaktadır. Şekil 9'da faz uzayları gözlemlenen K değerleri takımı için; bu faz uzaylarından rastgele seçilen $M = 200000$ adet başlangıç koşulunun her biri için $T = 10^7$ iterasyon kullanılarak Lyapunov üstelleri hesaplanıp elde edilen üstel değerleri bir renk haritası şeklinde Şekil 10'da verilmektedir (Ruiz vd., 2017a).



Şekil 9. Çeşitli *K* değerleri için standard mapin faz uzayı portreleri. Tüm grafiklerde siyah noktalar kaotik davranışı tarif etmektedir. Diğer renkler farklı kararlılık adalarını göstermektedir.



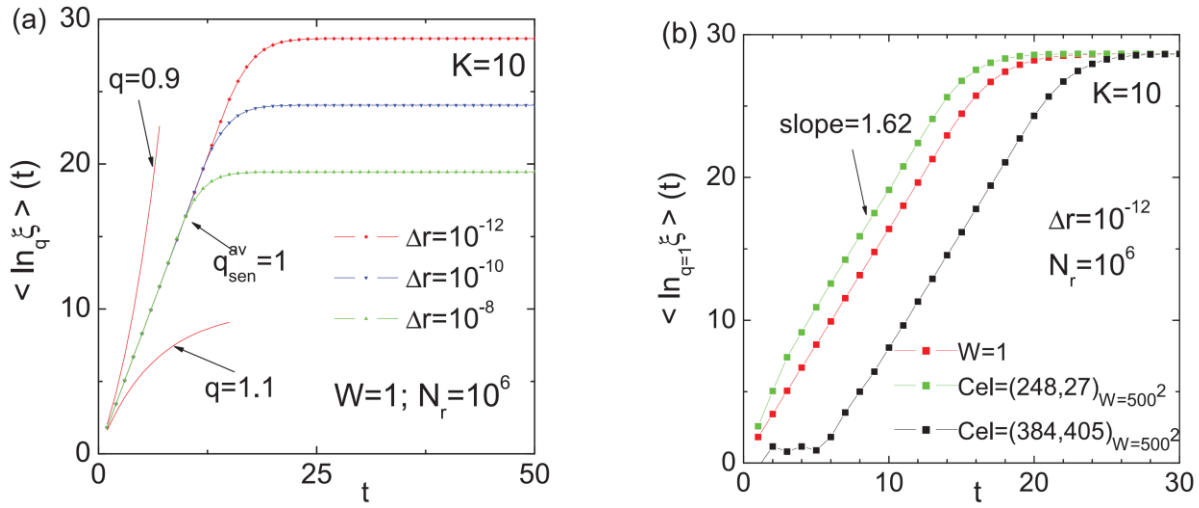
Şekil 10. Şekil 9 ile aynı *K* değerleri takımı için standard mapin faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri.

Bu çalışma kapsamında standard mapin $K = 0.2$ ile zayıf kaotik ve $K = 10$ ile kuvvetli kaotik rejimlerinde Denklem 1 ile verilen duyarlık fonksiyonu ξ için sayısal incelemeler yapılmaktadır. Bu incelemelerde farklı q değerleri için duyarlık fonksiyonunun zamana bağlı değişimini gözlemlemek adına $\ln_q \xi(t)$ niceliğinin N_r adet deney üzerinden ortalaması alınmaktadır. Her bir deney, standard mapin faz uzayını eşit boyuttaki parçalara bölen W adet hücreden birinde yer alan rastgele seçilmiş bir birbirine çok yakın başlangıç koşulu çiftinden başlatılır. Bu çalışmada ele alınan standard mapin faz uzayı iki-boyutlu olduğundan Denklem 1'de yer alan komşu yörüngelerin başlangıçtaki ayrım mesafesi Öklid mesafesi $\Delta r \equiv \left\| \Delta x(0) \right\|$ ile tarif edilir.

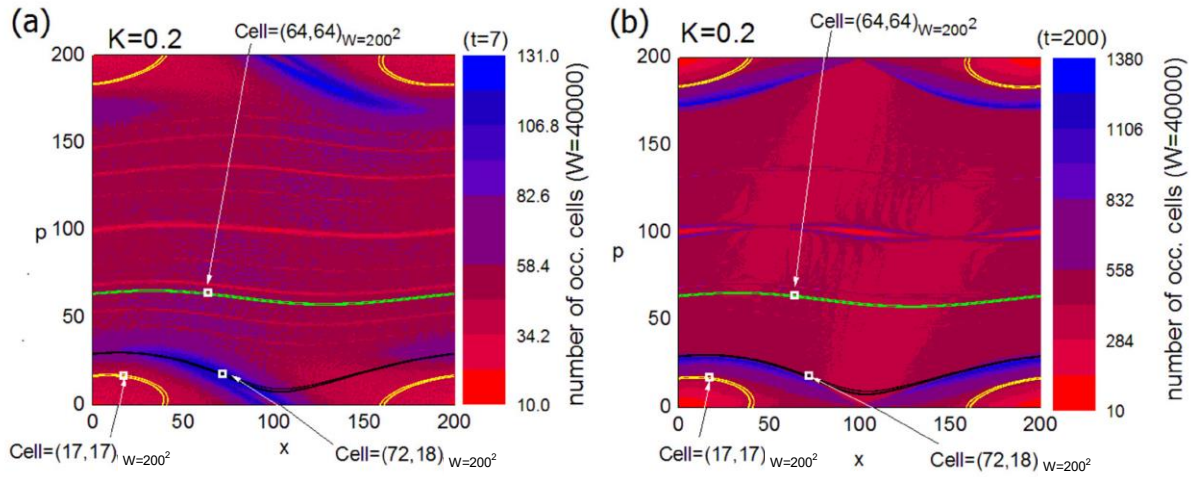
Şekil 11'de $K = 10$ parametre değerindeki standard map için $N_r = 10^6$ deney üzerinden $\ln_q \xi(t)$ için ortalama alınarak yapılan incelemeler verilmektedir. Şekil 11.a'da $W = 1$ ile tüm faz uzayının tek bir hücre içerisine yerleştirildiği ve böylece $N_r = 10^6$ adet başlangıç koşulu çiftinin tüm faz uzayından rastgele seçildiği durum için, farklı q değerleri ve farklı Δr başlangıç ayrımı değerleri için elde edilen sonuçlara yer verilmektedir. Denklem 1'de yer alan $\Delta r = \|\Delta x(0)\|$ başlangıç ayrımı değerleri azaltılarak $<\ln_q \xi>$ için zamana bağlı değişiminin, daha geniş zaman aralıklarında gözlemlenmesi sağlanmaktadır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında $\Delta r \to 0$ limitinde $q_{sen}^{av} = 1$ için $<\ln_q \xi>$ niceliğinin, elde edilen eğrinin doyum bölgesi ile başlangıçtaki geçici bölgesi arasında yer alan ölçeklenme bölgesinde (orta bölge) zamana lineer bağlılık sergilediği görülmektedir. Bu q değerinin daha önceki kısımlarda bahsedilen özel durumu hatırlanırsa, $K = 10$ kaotik rejiminde başlangıç koşullarına Denklem 2 ile verilen üstel formda bir duyarlılığın olduğu görülür. Şekil 11.b'de $q_{sen}^{av} = 1$ ve $\Delta r = 10^{-12}$ başlangıç ayrımı için, farklı W hücre sayısı ve $\ln_{q_{sen}^{av}=1} \xi$ için ortalamanın alındığı hücrenin etkileri incelenmektedir. Şekilden de net bir şekilde görüldüğü üzere hücre sayısı ya da hangi hücre üzerinden ortalama alındığından bağımsız olarak aynı eğim değerli olacak şekilde $< \ln_{q_{sen}^{av}=1} \xi>$ niceliği için zamana lineer bağlılık, eğrilerin orta bölgesinde elde edilmektedir. Elde edilen eğim değeri Denklem 2 ile uyumlu şekilde standart Lyapunov üsteline eşittir $\lambda = \lambda_{q_{sen}^{av}} = 1.62$ ve bu üstel değeri $K = 10$ faz uzayının tamamını karakterize eder. Elde edilen bu sonuç Latora ve Baranger (1999) ve Latora vd. (2000) çalışmalarıyla uyumludur.

Standard mapin $K = 0.2$ parametre değerinde sistem zayıf kaotik rejimdedir ($\lambda \approx 0$) ve faz uzayını kararlılık adaları domine eder. Kararlılık adalarını oluşturan kararlı yörüngeler periyodik veya yarı-periyodik olabilirler (Chirikov, 1969, 1979; Zaslavsky, 2005). Bu nedenle farklı kararlı yörüngelerin faz uzayının kendileriyle aynı enerjili bölgelerine yayılma hızları farklı olur. Buradan hareketle faz uzayını eşit bölmelere ayırmakta kullandığımız hücrelerin evriminin

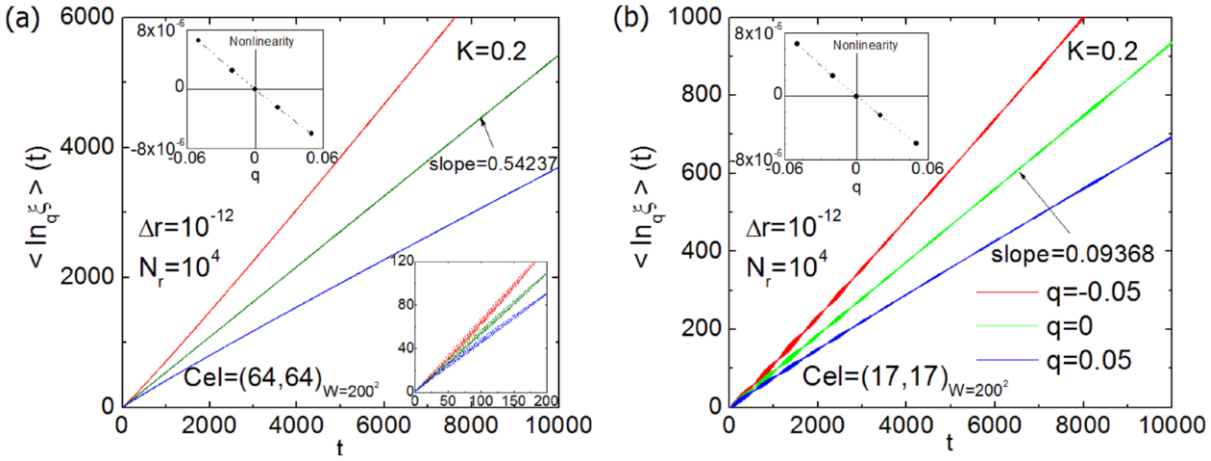
karakterizasyonu oldukça karmaşıktır ve tüm hücreler için ortak geçici (transient) süresi tanımlanamaz. Bu olgu da $<\ln_q \xi>$ niceliğinin zamana açık bir lineer bağlılık göstermesini engellemektedir. Karşılaşılan bu problemin önüne geçmek için zayıf kaotik rejimlerde N_r rastgele seçilen başlangıç koşulları çiftlerinin tüm faz uzayından seçilmesi yerine belirli hücreler içerisinden bu koşulların seçilmesiyle, başlangıç koşullarının evrileceği yörüngelerin aynı yayılma hızına sahip hücrelere gitmeleri sağlanır ve böylece geçici süresi daha rahat tanımlanır. Şekil 12'de bu durum gösterilmektedir. Uygun yöntemin belirlenmesinin ardından $W = 200 \times 200$ adet eşit hücreye bölünmüş $K = 0.2$ parametre değerli standard mapin faz uzayının iki farklı başlangıç hücresi için $N_r = 10^4$ rastgele başlangıç koşulu üzerinden $\ln_q \xi$ için ortalama alınarak yapılan incelemeler Şekil 13'te verilmektedir. Farklı q değerleri için $A + Bt + Ct^2$ polinomu şeklindeki fitlemeler doyum bölgesinin alt kısmında yer alan orta ölçeklenme bölgesinde kullanılmakta ve uygun olan q değeri $R \equiv C/B$ lineer olmayışlık (nonlinearity) ölçüsü kullanılarak tespit edilmektedir. q'nun optimum değeri, $R = 0$ ile düz bir eğriye karşılık gelen fitlemeyi sağlayan $q_{sen}^{av} = 0$ olarak bulunmuştur. Elde edilen eğri $<\ln_q \xi>$ niceliğinin zamana lineer bağlılığını göstermekte ve Denklem 4 ile tasvir edilen davranışı doğrulamaktadır. Bu eğrinin eğimi $\lambda_{q_{sen}}^{av}$ genelleştirilmiş Lyapunov üstelini verir ve başlangıç koşullarına lokal duyarlığı karakterize eder ($\lambda_{q_{sen}} > 0$).



Şekil 11. Standard mapin $K = 10$ parametre değerinde; (a) farklı q değerleri ve Δr başlangıç koşulu ayrımı değerleri için tüm faz uzayından rastgele seçilmiş $N_r = 10^6$ başlangıç koşulu çifti üzerinden $\ln_q \xi$ için alınan ortalamaların zamana bağlı davranışları, (b) $q_{sen}^{av} = 1$ ve $\Delta r = 10^{-12}$ başlangıç ayrımı için $N_r = 10^6$ deney üzerinden $\ln_{q=1} \xi$ niceliği için alınan ortalamaların zamana bağlı değişimi. Bu incelemede başlangıç koşulu çiftleri; $W = 1$ hücre ile tüm faz uzayından (kırmızı kareler), $W = 500 \times 500$ hücreye bölünmüş faz uzayının en hızlı yayılan hücrelerinden birinden (yeşil kareler) ve en yavaş yayılan hücrelerinden birinden (siyah kareler) rastgele seçilmektedir. Tüm senaryolar için eğrilerin orta bölgesindeki eğim değeri aynı değerde elde edilmektedir.



Şekil 12. Standard map $K = 0.2$ parametre değeri için $W = 200 \times 200$ adet eşit boyuttaki hücreye bölünmüş faz uzayının (x'inci,p'inci) hücresinde yer alan rastgele seçilmiş başlangıç koşullarının $t = 1$'den (a) $t = 7$ ve (b) $t = 200$'e kadar iterasyonlarıyla işgal edilen hücrelerin renk haritaları. Farklı lokal geçici zamanlarına dikkat çekmek için üç özel hücre ve bunların dahil olduğu başlangıç koşulları sarı, siyah ve yeşil eğrilerle birleştirilerek belirtilmektedir.



Şekil 13. Standard mapin $K = 0.2$ parametresi için standard mapin $W = 200 \times 200$ ile eşit şekilde bölünmüş faz uzayının (a) (64,64) ve (b) (17,17) hücrelerinden $N_r = 10^4$ adet ratgele seçilmiş başlangıç koşulları üzerinden $\ln_q \xi(t)$ için ortalamalar. Kısa süreler için q-eksponansiyel etrafında çok az salınım yapan bir gelişim görülmektedir. Grafiklerin içlerinde $<\ln_q \xi>$'nın, fitleme eğrisi için lineer olmayışlık ölçüsü $R \equiv C/B$ çizdirilmektedir.

Özetle standard mapin her iki rejimi için de $< \ln_{q_{sen}^{av}} x(t)> \approx \lambda_{q_{sen}}^{av} t$ davranışı gözlenmekte ve Denklem 2 ve Denklem 4'te verilen önermeler çalışmamız kapsamında standard map için doğrulanmaktadır. Zayıf kaotik rejim için sağlanan $q_{sen} < 1$ gözlemi, q-üçlüsü için Tsallis (2004) çalışmasında ortaya konan sonuçlarla uyumludur.

Standard mapin $K = 10$ kuvvetli kaotik rejiminde sistem ergodik şekilde davranmakta ve maksimum Lyapunov üsteli büyük pozitif bir değer almaktadır. Boltzmann-Gibbs istatistiğinin

geçerli olduğu bu rejim için sonlu bir q-entropi artış hızı (Denklem 8) değerinin $q_{ent} = 1$ değerinde elde edileceği öngörülebilir. Farklı q değerleri için faz uzayının $W = 160000$ adet hücreye ayrıldığı, $N_{ic} = 10 \times W$ rastgele başlangıç koşulunun $N_c = 40561$ rastgele seçilmiş başlangıç hücresine yerleştirildiği ve Denklem 7 ile verilen q-entropi niceliğinin bu hücreler üzerinden ortalama alınarak zamana bağlı değişiminin incelendiği sayısal analizlerde $q < q_{ent}^{av} = 1$ için pozitif konkavlık, $q > q_{ent}^{av} = 1$ için negatif konkavlık elde edilirken $q_{ent} = 1$ durumunda zamana lineer bağlılığın elde edildiği görülmektedir (Şekil 14). $< S_q >$ için zamana lineer bağlılığın gözlemlenmesi Denklem 8 ile tanımlanan K_q q-entropi artış hızı için sonlu değerin elde edildiğini göstermektedir. Burada zamana lineer bağlılık duyarlılık hesabında olduğu gibi fitlemede kullanılan $A + Bt + Ct^2$ polinomunun lineer olmayışlık ölçüsü $R \equiv C/B$ kullanılarak tespit edilmektedir. Kullanılan faz uzayı hücre sayısının hesaplamalarda olan muhtemel etkisini gözlemlemek adına $< S_{q=1} >$ niceliğinin farklı W hücre sayıları için $N_{ic} = 10 \times W$ ve $N_c = 0.01 \times W$ alınarak zamana bağlı davranışı incelendiğinde Şekil 14'te de görüldüğü üzere geçici ve doyum bölgeleri arasında yer alan orta ölçeklenme bölgesinde aynı eğim değeri elde edilmektedir. Yapılan bu gözlemler ile standard mapin $K = 10$ parametre değerinde $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av} = 1$ durumunun sağlandığı, Şekil 14'teki eğrilerin eğim değerinin faz uzayı hücre sayısından bağımsız olarak başlangıç koşullarına duyarlık karakterizasyon yönteminde sayısal olarak tespit edilen q-genelleştirilmiş Lyapunov üsteli ile eşit olacak şekilde elde edildiği, $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 1.62$, görülmektedir. Bu sonuç q-genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin kuvvetli kaotik korunumlu maplerde geçerli olduğuna işaret eder ve bu gözlem Añaños ve Tsallis (2004) çalışmasındaki sonuçları destekler niteliktedir.

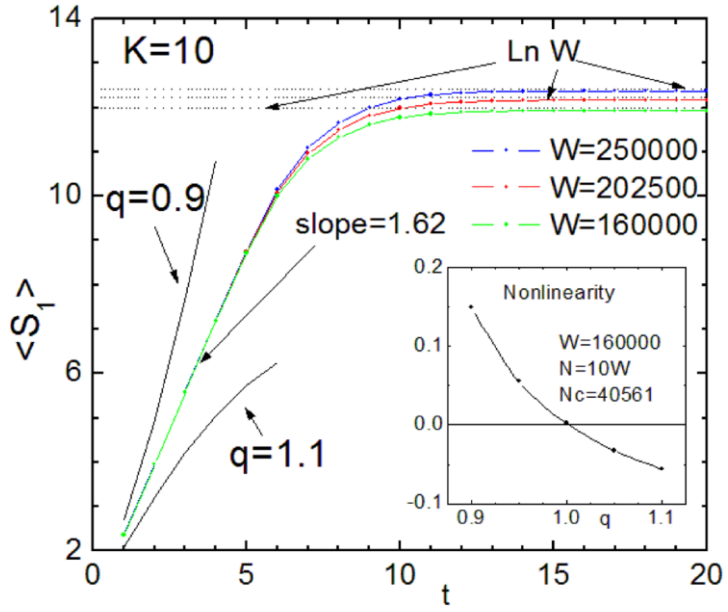
Standard mapin $K = 0.2$ map parametreli zayıf kaotik rejiminde faz uzayında yer alan kararlılık adaları ve çok çeşitli geçici sürelerine sahip bölgelerden dolayı, Denklem 8 ile verilen q-entropi artış hızını hesaplarken $S_q(t)$ entropisindeki dalgalanmaları azaltmak için kullandığımız N_c başlangıç hücreleri üzerinden ortalama alma işlemi için uygun N_c hücrelerinin ve uygun ortalama alma kriterinin belirlenmesinde zorluklar ortaya çıkar. Bu zorluklardan biri uygun N_c hücrelerinin ayrımını yaparken sonlu zamanlı maksimum Lyapunov üstelinin kendi $t \to \infty$ limitine yavaş yakınsamasıdır. Bu yakınsama için oldukça yüksek hesaplama süresi gerektiğinden, zayıf kaosu karakterize ederken maksimum Lyapunov üsteli yerine SALİ yönteminin (Skokos, 2001) yeterliliği test edilmiştir.

SALİ zamana bağlı evrimi ile yörüngelerin davranışına bakıldığında, kararlı ve kaotik yörüngelerin ikisi için de SALİ sıfıra gitmektedir. Ancak bu sıfıra gidiş iki yörünge tipi için tamamen farklı zaman hızlarında gerçekleşmektedir. Kuvvetli kaotik yörüngeler için aniden

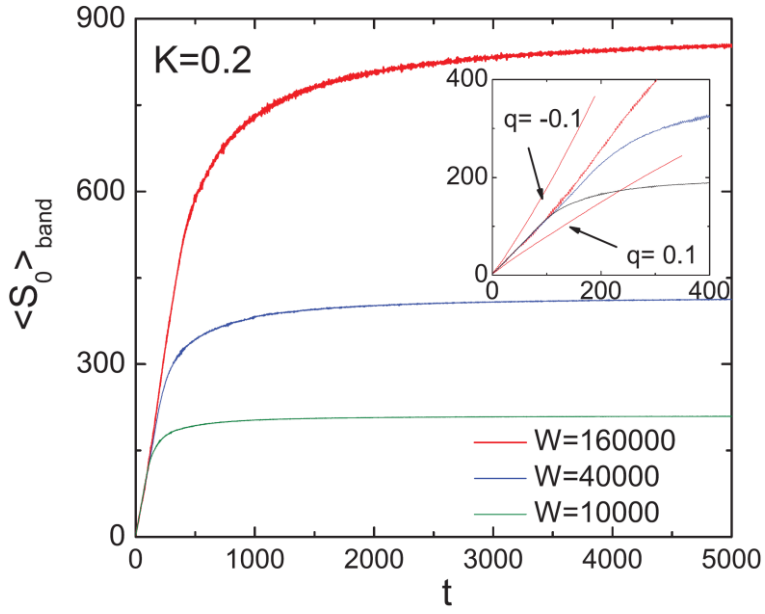
azalıp, yaklaşık 200 iterasyon sonunda bilgisayarın limit hassasiyetine ulaşılırken, kararlı yörüngeler için zamanla bir kuvvet yasası formunda azalmaktadır. Bildiğimiz kadarıyla ilk defa bu çalışma kapsamında, zayıf kaotik yörüngeler için SALİ'nin zamanla bir kuvvet yasası formunda davranış sergileyerek azalacağı doğrulanmaktadır. Bunun yanı sıra lokal SALİ'nin güç indeksi ile, benzer geçici entropi davranışı sergileyen başlangıç hücreleri ayrımı yapılmaya çalışılmıştır. Benzer SALİ zamana bağlı evrimini sergileyen N_c hücreleri belirlenip, bu N_c hücreleri üzerinden $S_q(t)$ entropisi için ortalama alındığında; $< S_q(t) >_{N_c}$ niceliğinin, korunumlu maplerde tipik olarak görülen salınımlı entropi artışını (Ruiz ve Tsallis, 2007) sergilemediği görülmüştür. Şekil 15'te benzer SALİ evrimi kriterinin sağlandığı faz uzayının bir bandı üzerinden ortalama alınarak $< S_q(t) >$ niceliğinin elde edildiği durum gösterilerek yukarıda anlatılanlar örneklendirilmektedir. Şekilden de net bir şekilde görüldüğü üzere faz uzayının $p = 2$, $x \in [0,2\pi]$ enine bandı üzerinde farklı W hücre sayıları için aynı $q_{ent} = 0$ değerinde zamana lineer bağlılık elde edilmektedir. $q < q_{ent}^{av} = 0$ için pozitif konkavlık, $q > q_{ent}^{av} = 0$ için negatif konkavlık gözlemlenmektedir.

Sonuç olarak sonlu K_q q-entropi artış hızının zayıf kaotik rejimde $q_{ent} < 1$ durumunda elde edilmesi, q-üçlüsü için Tsallis (2004) çalışmasında ortaya konan sonuçlarla uyumludur. Ayrıca standard map gibi korunumlu bir sistem için elde edilen bu sonucun yitimli dinamik sistemler olan lojistik map (Çelikoğlu ve Tırnaklı, 2006) ve Rössler salınıcısı için elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu ve bu iki sistem ailesinin zayıf kaotik rejimde aynı istatistiksel davranışı sergilediği sonucuna ulaşılır. Bu noktadan hareketle Denklem 7 ile tanımlanan S_q Tsallis entropisinin, sistemlerin istatistiksel mekaniksel karakterizasyonunda uygun entropi tanımı olduğu sonucuna varılabilir.

Bu çalışma kapsamında yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlarda; standard mapin $K = 10$ parametre değeri ile kuvvetli kaotik rejimi için $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av} = 1$ ve $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 1.62$ elde edilmesi, $K = 0.2$ ile zayıf kaotik rejimi için $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av} = 0$ ($\lambda_{q_{sen}} > 0$) elde edilmesi q-genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin (Tsallis vd., 1997; Cetin vd., 2018) varlığına işaret eder. Ayrıca kaotik deniz ve kararlılık adalarının faz uzayında aynı anda gözlenebildiği, $K = 10$ ve $K = 0.2$ parametre değerleri arasındaki K değerleri için; maksimum Lyapunov üstelinin sıfırdan büyük olduğu durumlarda $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av} = 1$ ve $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1}$ olduğu, bu üstelin yaklaşık sıfır olduğu durumlarda $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av} = 0$ olduğu ancak oldukça sık bir şekilde $K_{q_{ent}^{av}} \neq \lambda_{q_{sen}^{av}}$ elde edildiği gözlemlenmiştir. Özel olarak $K = 2$ ve $K = 4$ parametreleri için kaotik denizden, sırasıyla $\lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 0.47$ ve $\lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 0.88$ değerleri elde edilmiştir (Ruiz vd., 2017a).



Şekil 14. Standard mapin $K = 10$ parametre değerinde farklı W eş boyutlu faz uzayı hücre sayıları için $N_c = 0.01 \times W$ başlangıç hücresi üzerinden ortalaması alınan S_1 entropisinin zamana bağlı değişimi. $t \to \infty$ limitinde $< S_{q=1} >= \ln W$ değerini almaktadır. Şeklin iç kısmında eğrinin orta bölgesinde eğimi bulmak üzere kullanılan polinom fitleme eğrisi için lineer olmayışlık ölçüsü analizi yer almaktadır. Bu ölçünün sıfıra eşit olduğu ve fitleme eğrisinin doğrusal olduğu durumun $q_{ent} = 1$ değerinde sağlandığı açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 15. $K = 0.2$ parametre değerine sahip standard map için $p = 2, x \in [0,2\pi]$ enine bandında farklı W hücre sayıları için $S_{q=0}$ entropisinin zamana bağlı değişimi. Grafiğin iç kısmında farklı q değerleri için elde edilen davranışlar verilmektedir.

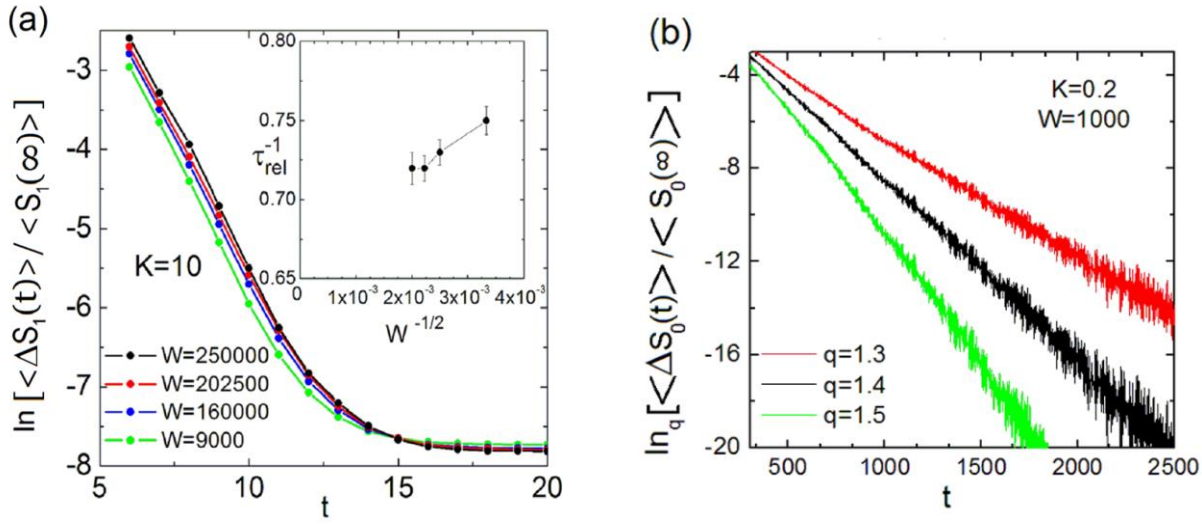
Standard map için entropi gevşeme hızı istatistiksel karakterizasyonu incelemesinde Denklem 9 ile verilen $\Delta S_q(t)$ niceliğinin $t \to \infty$ limiti için bir başlangıç koşulları kümesi üzerinden ortalaması zamana bağlı olarak edilirken, ortalama alma prosedürü önceki bölümlerde

değinilen istatistiksel karakterizasyon yöntemlerinde olduğu gibi faz uzaylarında oldukça farklı dinamik davranışlar sergileyen iki rejim için farklı kriterler belirlenerek oluşturulmalıdır.

Standard mapin $K = 10$ kuvvetli kaotik rejiminde, W eş boyuttaki hücreye bölünmüş faz uzayının tamamı tek bir kaotik deniz tarafından işgal edildiğinden $S_{q=1}(\infty) = \ln W$ analitik olarak hesaplanabilir (bknz. Şekil 14). Bu senaryo için $< \Delta S_q(t) >_{N_{ic}}$ ortalaması, hesaplama süresini optimize etmek adına en hızlı yayılan N_{ic} hücreleri üzerinden ortalama alınarak hesaplanmaktadır. Buna karşın faz uzayının kararlılık adaları tarafından domine edildiği $K = 0.2$ map parametreli zayıf kaotik rejim için, W_{adalar} sistemin durağan duruma ulaştığındaki işgal edilen hücre sayısı olmak üzere, $S_{q_{ent}}(\infty) = \ln_{q_{ent}} W_{adalar}$ değişkeni başlangıç koşullarının rastgele seçildiği hücrelere sayısal olarak bağlı olduğundan, analitik olarak hesaplanamaz. Bu nedenle de zayıf kaotik rejimlerde $S_{q_{ent}}(\infty)$ sayısal olarak belirlenmelidir.

Entropi gevşeme hızı için her iki rejimde de yapılan analizlerde beklendiği gibi, τ_q bir gevşeme zamanı olmak üzere, $\lim_{W\to\infty} \Delta S_{q_{ent}^{av}}(t) \sim \exp_{q_{ent}^{av}}\left(-t/\tau_q\right)$ olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 16'da $K = 10$ ile kuvvetli kaotik rejim ve $K = 0.2$ ile zayıf kaotik rejim için $\ln_{q_{rel}}(< \Delta S_{q_{ent}}(t) > / < S_{q_{ent}}(\infty) >)$ niceliğinin zamana bağlı değişimi verilmektedir. Şekil 16.a'da $K = 10$ kuvvetli kaotik rejiminde Boltzmann-Gibbs istatistiği çerçevesi ile uyumlu olarak farklı W eş boyutlu faz uzayı hücre sayıları için $q_{rel} \simeq 1$ ile üstel gevşemenin elde edildiği görülmektedir. Ayrıca aynı şeklin iç kısmında yer alan grafiğe bakıldığında; $S_{q_{ent}=1}(\infty)$ entropi limitine gevşeme zamanının tersi için sayısal tahminlerin, $\tau_{q=1} \equiv \tau_{rel}(W \to \infty)$ ile bir sonlu gevşeme süresiyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Şekil 16.b'de $K = 0.2$ parametreli zayıf kaotik rejim için, daha önce Şekil 15'teki q-entropi artış hızı için yapılan analizde kullanılan aynı enine faz uzayı bandından seçilmiş $W = 1000$ hücre üzerinden ortalamaların alındığı $\ln_{q_{rel}}(< \Delta S_{q_{ent}=0}(t) > / < S_{q_{ent}=0}(\infty) >)$ niceliğinin zamana bağlı değişimi farklı q değerleri için verilmektedir. Duyarlık fonksiyonu için Şekil 13'te izlenen yola benzer olarak, lineer eğri için kullanılan polinom fitlemede lineer olmayışlık ölçüsüne bakılıp, optimum q değerinin $q_{rel} \simeq 1.4$ olduğu görülmüştür. Gözlemlenen bu q-eksponansiyel gevşeme için elde edilen $q_{rel} > 1$ değeri Tsallis (2004) çalışmasında q-üçlüsü için elde edilen sonuçlarla uyumludur. Kaotik deniz ve kararlılık adalarının faz uzayında aynı anda gözlemlenebildiği $K = 10$ ve $K = 0.2$ parametre değerleri arasındaki K değerlerinde $\ln_{q_{ent}} W_{adalar}$ niceliğinin sayısal olarak belirlenmesindeki belirsizlikten dolayı, bu parametre değerleri için q_{rel} değerinin analizi oldukça karmaşık ve zorludur.



Şekil 16. (a) Standard mapin $K = 10$ parametreli durumu için farklı W hücre sayılarında $\ln_{q_{rel}=1}(< \Delta S_1(t) > / < S_1(\infty) >)$ niceliğinin zamanla evrimi. Şeklin iç kısmında $t_{rel}^{-1}\left(W^{-1/2}\right)$ gevşeme süresinin tersi için sayısal hesaplamalar yer almaktadır. (b) $K = 0.2$ parametre değeri ile zayıf kaotik rejimdeki standard map için $\ln_{q_{rel}}(< \Delta S_{q_{ent}=0}(t) > / < S_{q_{ent}=0}(\infty) >)$ niceliğinin zamana bağlı değişimi. Üzerinden ortalama alınan $W = 1000$ hücre, $p = 2$, $x \in [0,2\pi]$ enine faz uzayı bandından seçilmişlerdir. Optimum q değeri lineer olmayışlık ölçüsü kullanılarak $q_{rel} \simeq 1.4$ bulunmuştur.

Alan-korunumlu standard mapin parametre değerine bağlı olarak gözlenen iki rejimi için önceki bölümlerde ele alınan istatistiksel karakterizasyon yöntemleri ile genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin kapsayıcılığı ortaya konmuştur. Denklem 7 ile verilen q-entropisinin sistemlerin termodinamiksel karakterizasyonunda uygun entropi tanımı olduğunu ortaya koyan bu incelemeleri tamamlayıcı olması ve böylece dinamik sistemlerin tam bir istatistiksel karakterizasyonunun yapılmasını sağlaması açısından, sistemin dinamik değişkenlerinin limit dağılımları büyük öneme sahiptir.

Standard mapte sistemin davranışının ergodik ve karışmış olduğu, büyük pozitif değerli maksimum Lyapunov üsteline sahip kuvvetli kaotik rejimde Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğu ve Boltzmann-Gibbs entropisinin uygun entropi tanımı olduğu önceki karakterizasyon yöntemi incelemelerinde ortaya konmaktadır. Bu rejimde ele alınan sistemin dinamik değişkenlerinin limit dağılımlarının Boltzmann-Gibbs entropisini maksimum yapan eksponansiyel veya Gaussiyen dağılımlar olduğu Tırnaklı vd. (2007, 2009) çalışmalarında yitimli dinamik sistemler için gösterilmiştir. Bununla beraber maksimum Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır olduğu zayıf kaotik rejim için sistemin dinamik değişkenlerinin limit dağılımlarının, uygun zaman ve topluluk ortalamaları alınarak, toplanabilir olmayan q-entropisini maksimum yapan q-eksponansiyel veya q-Gaussiyenler olacağı Tsallis (1988), Tırnaklı vd. (2007, 2009) ve Ruiz vd. (2012) çalışmalarında doğrulanmıştır. Bahsi geçen bu çalışmalarda ele alınan

sistem için ergodik ve ergodik olmayan davranış aynı anda gözlemlenememektedir. Bu çalışma kapsamında istatistiksel karakterizasyonu yapılan standard map, parametre değerine bağlı olarak ergodik ve ergodik olmayan davranışı faz uzayında ayrı ayrı ve birlikte sergileyebildiğinden limit dağılım incelemeleri oldukça önemli ve zengindir.

Standard map için Denklem 12 ile verilen mapin iterasyonları toplamı niceliğinin limit dağılımlarını araştırırken faz uzayının ergodik ve ergodik olmayan davranış tarafından ayrı ayrı ve beraber işgal edildiği çeşitli parametre değerlerinde sayısal analizler gerçekleştirilmektedir. Sayısal hesaplamalarda çok sayıda rastgele başlangıç koşulu, ele alınan K map parametresi değerine bağlı olarak faz uzayının tamamından veya farklı davranış bölgelerinden seçilmektedir.

Standard mapin faz uzayının tek bir davranış tarafından domine edildiği iki ekstrem durum ($K = 10$ ve $K = 0.2$) için elde edilen limit dağılımlar Şekil 17'de verilmektedir. Davranışın ergodik olduğu kuvvetli kaotik rejimdeki $K = 10$ parametreli standard map olasılık dağılımının Denklem 17 formunda bir Gaussiyen olarak elde edildiği Şekil 17.a'da net bir şekilde görülmektedir ($q \equiv q_{stat} = 1$). Sayısal hesaplamaları yaparken $M = 4 \times 10^7$ gibi çok sayıda başlangıç koşulu, tamamı kaotik deniz tarafından işgal edilen faz uzayından rastgele seçilmiş ve her bir başlangıç koşulu için $T = 2^{22}$ iterasyon uygulanmıştır. Ayrıca şunu belirtmekte yarar vardır ki, $T = 2^{18}$ iterasyon dahi kararlı limit dağılımın elde edilmesinde yeterli olmuştur (Şekil 18.a). Ancak ele alınan diğer map parametreleri için yapılan incelemelerle paralellik teşkil etmesi amacıyla ve sayısal hesaplama süresine fazla bir etkisi olmaması açısından $T = 2^{22}$ iterasyon değerine çıkılmıştır. Bu senaryo için, Şekil 17.a'da da verildiği üzere Denklem 14 ile tanımlanan q-Gaussiyen fonksiyonu kullanılarak yapılan fitlemede $q \equiv q_{stat} = 1$ olduğunun tespiti ve önceki karakterizasyon yöntemlerinin sonuçlarının da ışığında genelleştirilmiş istatistiksel mekanik argümanlarının, Boltzmann-Gibbs istatistiğini de açıklamakta başarılı olduğu görülür.

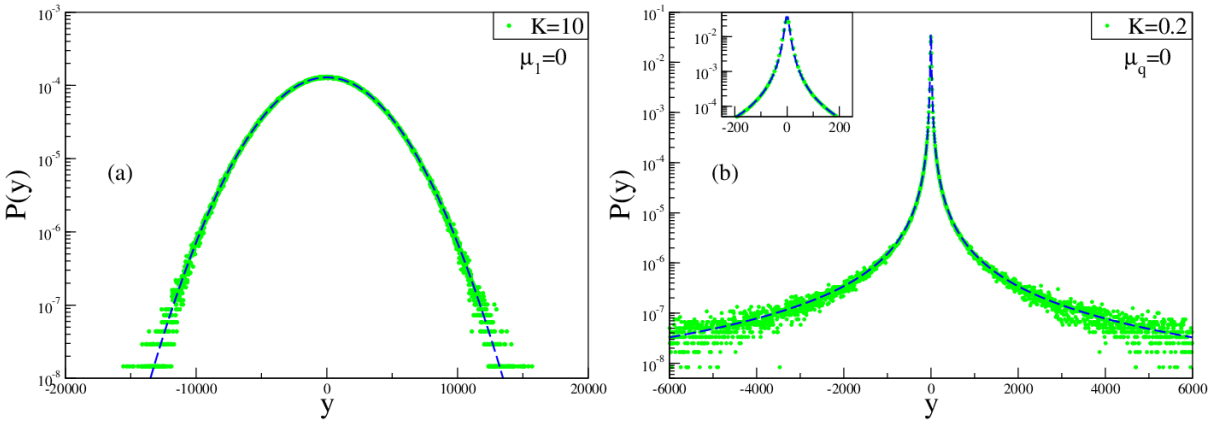
$M = 4 \times 10^7$ adet başlangıç koşullunun faz uzayının tamamından rastgele seçildiği $K = 0.2$ parametre değeri için $T = 2^{22}$ iterasyonun kullanıldığı sayısal hesaplamalar Şekil 17.b'de verilmektedir. Şekildeki dağılımın Denklem 14 ile verilen q-Gaussiyen formunda $q_{stat} \simeq 1.935$ olacak şekilde elde edildiği ve bu q değerinin Tsallis (2004) çalışmasında q-üçlüsü için elde edilen $q_{stat} > 1$ sonucuyla uyumlu olduğu görülmektedir. Yapılan sayısal hesaplamalarda yarı-durağan limit dağılıma yavaş bir şekilde ulaşılmasına rağmen (kuvvetli kaotik rejimde kararlı dağılıma oldukça hızlı şekilde ulaşılıyordu) $T = 2^{22}$ iterasyonun yeterli olduğu görülmüştür. $T =$

2^{23} iterasyon için yapılan incelemelerde de Şekil 17.b'de verilen dağılımın görünen kısmının değişmediği gözlemlenmiş ve hesaplama süresi de göz önüne alınarak optimum iterasyon değeri için $T = 2^{22}$ üzerinde karar alınmıştır. $K = 0.2$ parametreli zayıf kaotik rejimde Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır olmasına karşın yine de pozitif bir değer almasından hareketle teorik olarak $t \to \infty$ limitinde mapin iterasyonları toplamı niceliğinin olasılık dağılımının bir Gaussiyen olması beklenir. Ancak bu durumu destekleyen sayısal bir kanıt olmamakla beraber, herhangi bir pratik uygulamada iterasyonun sonlu sayıda kalacağı düşünüldüğünde gözlenecek tek dağılımın bu yarı-durağan dağılımlar olacağı sonucuna varılır. y niceliğinin iki ekstrem parametre değerinde Denklem 14 ile tanımlanan q-Gaussiyen fonksiyonu formundaki davranışının yanı sıra Denklem 18 ile verilen formu için olasılık dağılımları normalize edilerek de limit davranışlar incelenmiştir. Buradaki amaç elde edilen dağılımların gerçekten gözlemlenen dağılımlar olup olmadıklarının gösterilmesidir. Denklem 18'de verilen dağılım fonksiyonu için davranışın ergodik ve karışmış olduğu rejimde normalize olasılık dağılımlarının bir Gaussiyen olacağı ve bu dağılımın genişliği için analitik olarak;

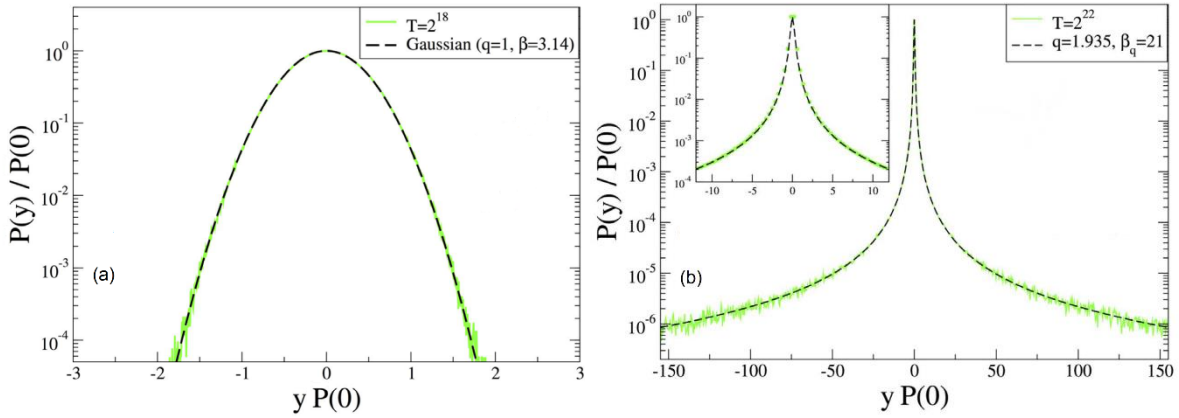
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} P(y)/P(0)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\beta y^2\right)dy = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \qquad (27)$$

ifadesinden yararlanarak $\beta = \pi$ olacağı çıkarımlarında bulunulabilir. Gaussiyen dağılımların limit davranışlarına daha hızlı ulaştığını göstermek adına $K = 10$ senaryosu için $M = 10^7$ rastgele seçilmiş başlangıç koşulu ve $T = 2^{18}$ iterasyonun kullanıldığı normalize olasılık dağılımı incelemesi Şekil 18.a'da verilmektedir. Hızlı bir şekilde limit davranışa ulaşan sistemin elde edilen olasılık dağılımının analitik olarak tespit edilen genişlik değerini sağladığı görülmektedir. Şekil 18.b'de $K = 0.2$ parametreli durum için $M = 4 \times 10^7$ rastgele seçilmiş başlangıç koşulu ve $T = 2^{22}$ iterasyonun kullanıldığı normalize olasılık dağılımı sonuçları yer almaktadır. Şekil 17 ve Şekil 18'de elde edilen olasılık dağılımları karşılaştırıldığında elde edilen davranışların dağılım formlarının sağlam olduğu görülmektedir.

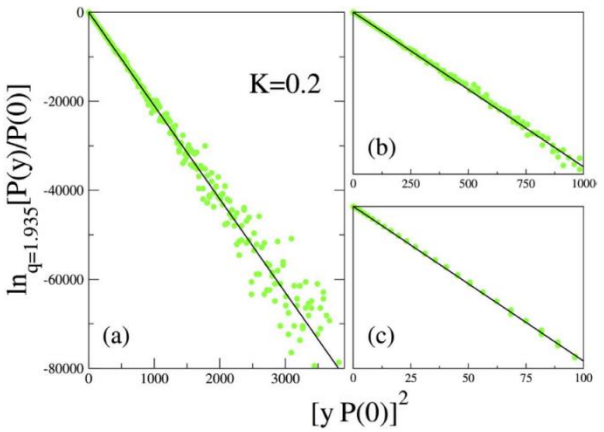
$K = 0.2$ parametreli durum için gözlemlenen bu yarı-durağan dağılımda Lévy dağılımı gibi asimptotik kuvvet yasası olan diğer dağılımların ortaya çıkmadığını göstermek amacıyla; Şekil 18.b'de yer alan q-Gaussiyen dağılımın merkez, kuyruklar ve bu iki bölge arasında kalan orta bölgesi için, elde edilen olasılık dağılımının q-logaritma (Denklem 5) davranışları incelenmiştir. Dağılım sadece q-Gaussiyen içeriyorsa $\ln_q \hat{P}(y)$ niceliğinin $[\hat{y}]^2$ niceliğine bağlı olarak lineer bir değişim göstermesi gerekir. Şekil 19'dan da görüldüğü üzere Şekil 18.b'de elde edilen dağılımın yukarıda belirtilen üç bölgesi için de lineer eğriler gözlemlenip, elde edilen dağılımın sadece q-Gaussiyen olduğu doğrulanmaktadır.



Şekil 17. Standard mapin (a) $K = 10$ ve (b) $K = 0.2$ parametre değerleri için olasılık dağılımları. (b) şeklinin iç kısmında dağılımın merkez bölgesinin daha net görülmesi için bu kısma yakın gösterim yapılmaktadır. Her iki şeklin elde edilmesinde de $M = 4 \times 10^7$ adet başlangıç koşulu ve $T = 2^{22}$ iterasyon adımı kullanılmıştır.



Şekil 18. Standard mapin (a) $K = 10$ ve (b) $K = 0.2$ parametre değerleri için normalize edilmiş olasılık dağılımları. (b) şeklinin iç kısmında elde edilen dağılımın merkez bölgesine yapılan yakın gösterim yer almaktadır.



Şekil 19. Standard mapin $K = 0.2$ parametre değeri için normalize olasılık dağılımının (a) kuyruklar, (b) orta bölge ve (c) merkez bölgesi için q-logaritmik gösterimi. Noktaların lineer bir eğri etrafında salınım yaptıkları net bir şekilde görülmektedir. Görülen salınımların merkezden kuyruklara doğru büyümesinin nedeni sonlu T iterasyon ve sonlu M başlangıç koşulu sayısıdır.

Standard map faz uzayının iki rejimden biri tarafından tamamen işgal edildiği bu iki senaryonun ardından elde edilen olasılık dağılımlarında, ergodik ve ergodik olmayan davranışın birlikte bulunabildiği parametre değerleri için bir değişim olup olmayacağına bakılabilir. Bu amaçla $K = 0.6$, $K = 1$, $K = 2$ ve $K = 3$ parametreleri için; faz uzayının kararlılık adaları tarafından işgal edilen kısımlarından ve kaotik deniz içerisinden rastgele seçilen başlangıç koşulları için ayrı ayrı olasılık dağılımı incelemeleri yapılmıştır. Tüm parametre değerleri için, kaotik denizden rastgele seçilen başlangıç koşulları için olasılık dağılımları $q_{stat} = 1$ ile Gaussiyenler olarak elde edilirken, zayıf kaotik rejime karşılık gelen kararlılık adalarından temin edilen başlangıç koşulları kümelerinin olasılık dağılımlarının $q_{stat} \simeq 1.935$ olan q-Gaussiyenler oldukları görülmüştür. Map parametresi değerinden bağımsız olarak tüm durumlarda görülen bu $q_{stat} \simeq 1.935$ değeri; hem q-Gaussiyen dağılımın varlığını desteklemekte hem de ele alınan modelimizin davranışın ergodik olmadığı her durumu için olasılık dağılımlarını karakterize eden optimum q değeri olduğuna işaret etmektedir.

Davranışın ergodik ve ergodik olmadığı faz uzayı bölgelerinden ayrı ayrı başlangıç koşullarının seçilerek olasılık dağılımlarının araştırıldığı bu incelemenin ardından, başlangıç koşullarının tüm faz uzayından bölge ayırt etmeksizin rastgele seçildiği durum için olasılık dağılımı araştırılabilir. Farklı davranış sergileyerek farklı dağılımların elde edilmesini sağlayan başlangıç koşullarının bu karma incelemesi oldukça ilgi çekicidir. Bu durumda faz uzayının ergodik ve ergodik olmayan bölgelerinden gelen başlangıç koşulları ve bunların sırasıyla Gaussiyen ve q-Gaussiyen dağılımları arasında bir rekabetin doğacağı düşünülebilir. Bu rekabeti; ergodik olmayan davranışın ortadan kalktığı durumda ($K = 10$) Gaussiyenlerin kazanırken, ergodik davranışın bulunmadığı durumda ($K = 0.2$) q-Gaussiyenlerin kazanacağı önceki incelemede görülmüştür. Bu iki farklı davranış bölgelerinin birlikte bulunduğu faz uzayından rastgele seçilmiş başlangıç koşulları için Denklem 12 ile tanımlanan y niceliğinin olasılık dağılımı; $P_1(y)$ ve $P_q(y)$ sırasıyla ergodik (kuvvetli kaotik) ve ergodik olmayan (zayıf kaotik) faz uzayı bölgelerinde yer alan başlangıç koşulları için olasılık dağılımlarını göstermek üzere, yukarıda bahsedilen rekabeti yansıtacak şekilde bir Gaussiyen ve bir q-Gaussiyenin lineer kombinasyonu olarak aşağıdaki formda modellenebilir.

$$P(y) = \alpha_q P_q(y; \mu_q, \sigma_q) + \alpha_1 P_1(y; \mu_1, \sigma_1) \tag{28}$$

Bu olasılık dağılımı ifadesinde yer alan $\alpha_1 = (1 - \alpha_q)$ ve α_q sırasıyla kaotik yörüngelerin ve kararlılık adalarının faz uzayını işgal oranlarıdır. Bu oranları belirlerken ilk olarak faz uzayından rastgele $N_{ic} = 4 \times 10^7$ adet başlangıç koşulu seçilmekte ve bunlardan kaçının maksimum Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır, kaçının sıfırdan farklı pozitif sayı olduğu saydırılmaktadır. Bu

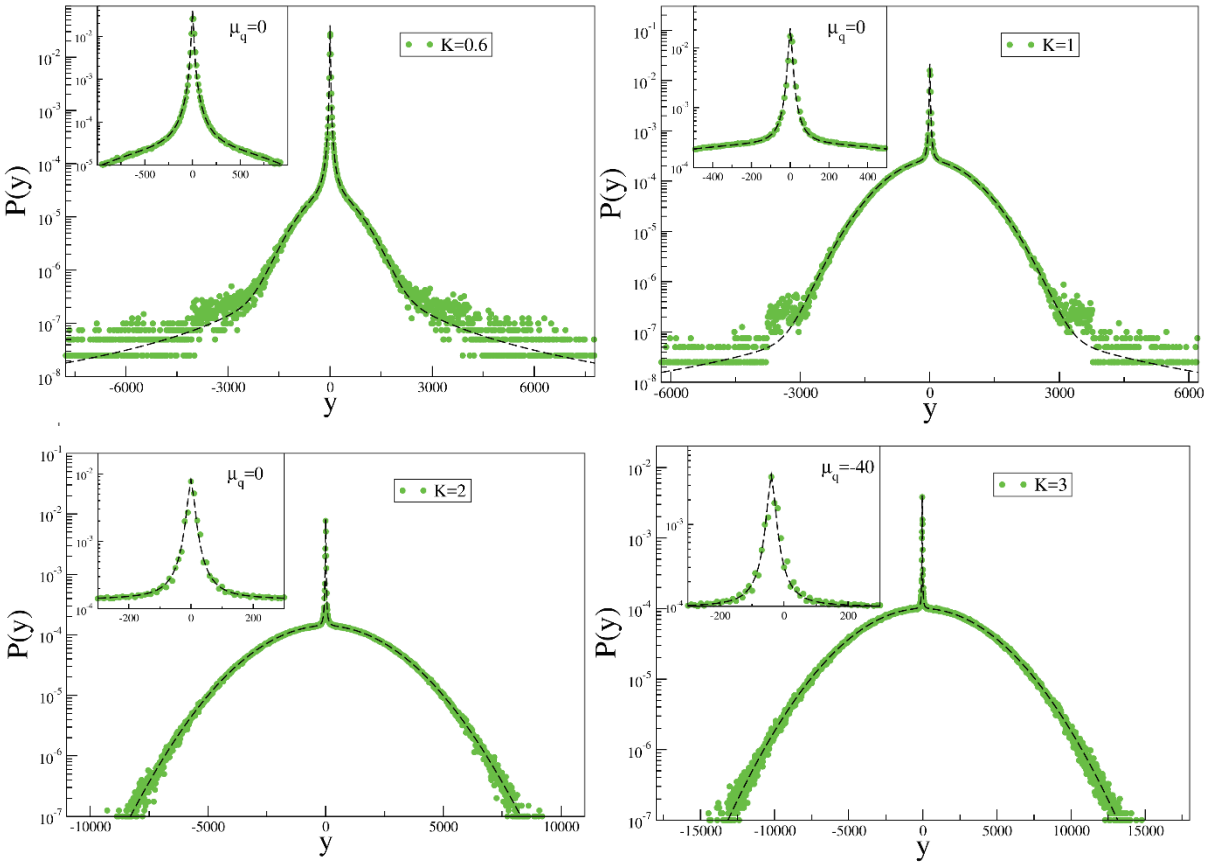
ayrımın yapılabilmesi için Lyapunov üsteli değeri için bir eşik belirlenmelidir. Verilen bir K parametresi için bu eşiğin altında üstel değerine sahip başlangıç koşulları sayısı ile bu eşiğin üstünde bir üstel değerine sahip başlangıç koşulları oranının yaklaşık sabit kaldığı değer aralığı aranmış ve bu koşulu sağlayan aralık $\lambda_- = 5 \times 10^{-5} < \lambda_{eşik} < \lambda_+ = 10^{-2}$ olarak tespit edilmiştir. λ_- değeriden küçük maksimum Lyapunov üsteline sahip başlangıç koşullarının zayıf kaotik rejimde, λ_+ değerinden büyük üstele sahip başlangıç koşullarının kuvvetli kaotik rejimde yer alacağı sonucuna varılmıştır. Böylece Denklem 28 ifadesindeki işgal oranları;

$$\alpha_q = \frac{N_{ic}(\lambda < \lambda_-)}{N_{ic}}$$
$$\alpha_1 = \frac{N_{ic}(\lambda > \lambda_+)}{N_{ic}} \qquad (29)$$

ifadelerinden tespit edilir. $\lambda_- < \lambda < \lambda_+$ aralığında kalan üstel değerine sahip az sayıdaki başlangıç koşulu makroskobik limitte göz ardı edilebilir oldukları kabul edilerek, Denklem 28 ifadesinde hesaba katılmamışlardır. Bu nedenle de Denklem 28 yaklaşıklık ifade edecek şekilde olasılık dağılımları yorumlanmıştır.

Ergodik ve ergodik olmayan davranışı sergileyen bölgelerin faz uzayında birlikte bulunabildiği çeşitli K map parametresi değerlerinde, tüm faz uzayından rastgele seçilen başlangıç koşulları için elde edilen olasılık dağılımları Şekil 20'de verilmektedir. $M = 4 \times 10^7$ rastgele seçilmiş başlangıç koşulu ve $T = 2^{22}$ iterasyonun kullanıldığı sayısal hesaplamalarla elde edilen limit davranışların Denklem 28 ile tanımladığımız olasılık dağılımı ile başarılı bir şekilde açıklanabildiği görülmektedir. Korunumlu dinamik sistemlerde Boltzmann-Gibbs istatistiği ile genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin bir karışımı olan bu davranış ilk defa bu çalışma ile ortaya konmaktadır. Artan K parametresi ile kaotik deniz daha geniş faz uzayı bölgesine yayıldığından Denklem 28 ile verilen olasılık dağılımı ifadesinde α_1 değeri artmakta ve Gaussiyen dağılım giderek daha dominant hale gelmektedir. Böylece genelleştirilmiş istatistiksel mekanik ile Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerlilik sınırları net bir şekilde ortaya konmuş olunur. $K = 0.2$ ile tamamen kararlılık adaları tarafından işgal edilen faz uzayı senaryosundan $K = 10$ ile tamamen kaotik deniz olan faz uzayına K parametresini arttırarak geldiğimiz bu incelemede, ergodik olmayan davranıştan ergodik davranışa geçişe paralel olarak bir istatistikten diğerine sürekli formda bir geçişi görmek oldukça zengin ve standard mapin fizik disiplinindeki pek çok sistemde model sistem olması göz önüne alındığında da oldukça önemli bir gözlemdir. Gaussiyen ve q-Gaussiyen dağılımın bir lineer kombinasyonu olan olasılık dağılımının görülmesi, faz uzayının bir kısmı ergodik davranıyorken bile çok büyük T iterasyon değerlerinde dahi q-Gaussiyenlerin varlığını sürdürmesi açısından oldukça ilginç

bir sonuçtur. Faz uzayı bölgeleri birbirinden farklı davranıyorken bile her iki dağılımın en az diğeri kadar sağlam kalabildiğini göstermektedir. Ayrıca bir diğer önemli gözlem de K parametresi artarken ve Gaussiyen dağılım giderek baskın hale gelirken bile q-Gaussiyenler için $q_{stat} \simeq 1.935$ değerinin sayısal olarak elde edilmesidir. Farklı davranış bölgelerinin ayrı ayrı analizinden elde edilen q değeriyle aynı değerin, başlangıç koşularının tüm faz uzayından rastgele seçildiği incelemede de elde edilmesi bu $q_{stat} \simeq 1.935$ değerinin sistemi istatistiksel olarak tarif ederken en az q-Gaussiyenlerin gözlemlenmesi kadar sağlam bir sonuç olduğuna işaret eder. Şekil 17 ve Şekil 20'de elde edilen olasılık dağılımlarının Denklem 14 ve Denklem 28 ile belirlenen ilgili parametreleri Tablo 3'te verilmektedir (Ruiz vd., 2017a).



Şekil 20. Standard mapin çeşitli K map parametresi değerleri için olasılık dağılımları. Grafiklerin iç kısımlarında, dağılımların tepe bölgesine q-Gaussiyen dağılımı net bir şekilde göstermek için yapılan yakın gösterim yer almaktadır.

Tablo 3. Çeşitli K değerleri için Şekil 17 ve Şekil 20'de verilen olasılık dağılımlarının ilgili parametreleri.

$A_{1.935} = 0.5642\ldots,\ A_1 = 0.3364\ldots$				
K	B_1	B_q	α_1	α_q
0.2	—	0.015	0	1
0.6	10.7×10^{-7}	0.015	0.0380	0.9416
1	8.00×10^{-7}	0.015	0.4826	0.5078
2	1.06×10^{-7}	0.010	0.7622	0.2367
3	0.40×10^{-7}	0.010	0.8825	0.1170
10	0.52×10^{-7}	—	1	0

3.3 Web Map Üzerinde İncelemeler

Web map, sabit bir manyetik alan ve manyetik alana dik olarak yayılan bir elektrostatik dalga paketinin oluşturduğu ortam içerisindeki parçacığın hareketi düşünülerek oluşturulmuş iki-boyutlu alan-korunumlu bir maptir (Zaslavsky vd., 1986). Bu sistemi tanımlayan Hamiltoniyen;

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega_0^2 x^2\right) - \frac{\omega_0 K}{T}\cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \tag{30}$$

olarak verilir. İfadede yer alan x dalganın yayılım yönünü, p genelleştirilmiş momentumu, ω_0 dönme frekansını ve K niceliği de T-periyotlu δ-fonksiyonu tipinde periyodik vurular ile temsil edilen pertürbasyonun genliği ile orantılı boyutsuz bir parametreyi belirtir. Bu Hamiltoniyenden elde edilen hareket denklemi,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T}\sin x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \tag{31}$$

şeklindedir ve periyodik bir zorlama setiyle pertürbe edilen bir doğrusal osilatörü tarif etmektedir. $x_n \equiv x_n(t_n - 0)$ ve $\dot{x}_n \equiv \dot{x}_n(t_n - 0)$ tanımlamalarının yapılmasının ardından (n indisi $t = nT$ anındaki δ fonksiyonunun aksiyonundan hemen önceki zamana karşılık gelir) x için süreklilik koşulu uygulayıp $u = \dot{x}/\omega$, $v = -x$ ve $\alpha = \omega_0 T$ boyutsuz değişkenlerini tanımlayarak Denklem 31 kesikli forma aşağıdaki gibi dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + K\sin v_n)\cos\alpha + v_n \sin\alpha \\ v_{n+1} &= -(u_n + K\sin v_n)\sin\alpha + v_n \cos\alpha \end{aligned} \tag{32}$$

Rezonant koşulu $\alpha = \omega_0 T = 2\pi/Q$ ve vuru silsilesi ile osilatör frekansı ω_0 arasındaki rezonansla tam sayı olan Q değeriyle, Q-katlı simetrili web map Denklem 32 kullanılarak türetilir. Bu çalışma kapsamında Denklem 32'de $\alpha = \pi/2$ ile $Q = 4$ rezonant koşullu web map

üzerinde sayısal incelemeler yapılmaktadır. Bu rezonant koşulu için; web mapin tanımladığı örgü herhangi bir *K* parametre değeri için sonsuz uzayı dört-katlı simetri ile kaplar ve bu örgü bir neredeyse uniform olan difüzyon hızı sağlar. Başlangıç konumu örgünün içerisine düşen bir parçacık, başlangıç noktasından çok uzaklara örgünün ağı boyunca bir rastgele yürüyüş sergileyerek gidebilir (Zaslavsky, 2005).

Alan-korunumlu maplerin iki-boyutlu faz uzayında değişmez kapalı eğrilerle çevrilen rezonans adalarındaki bir yörünge noktası sonsuza kadar burada kalır. Bu çevrili bölgenin dışındaki faz uzayında küçük kararlılık takımadaları ve kaotik yörüngelerin çok uzun süre yapıştığı değişmez Cantor setleri yer alır. Böylece çevrili adaların sınırlarında, yörüngelerin sıklıkla uzun süreli ömre sahip olan yarı-durağan durumlara neden olduğu sıfır veya sıfıra çok yakın değerli Lyapunov üsteline sahip bir kaos eşiği ortaya çıkar. Benzer fenomenler, alan-korunumlu ve düşük-boyutlu Hamiltoniyen sistemlerdeki kaotik taşınımdan sorumlu dinamik mekanizmalar adı altında detaylı bir şekilde incelenmiştir (Mackay vd., 1984; Wiggins, 1992).

Böyle bir zayıf kaotik rejimde; kaotik yörüngeler enerji yüzeyinin bir altkümesinde, kümeyi tamamen kaplamadan ergodik bir şekilde gezinirken, değişmez kararlı eğrilerin kararlı periyodik yörüngelere bir bariyer kurmasıyla bariyeri çevreleyen kaotik yörüngeler dışlanır ve kararlı periyodik yörüngelerle ilişkili olan kararlılık adaları ortaya çıkar. Ayrıca farklı periyotlu yörüngelere karşılık gelen çok sayıda ada zincirinin bulunduğu faz uzayında ada zincirlerinin sonsuz biçimde ada zincirlerini çevrelediği bir dizge Poincaré-Birkhoff teoremince (Birkhoff, 1935) tanımlanan bir kararlı noktalar hiyerarşisiyle oluşur. Gözlenen bu sonsuz ada zinciri dizgesi organizasyonu tüm ölçeklerde oluşur ve buna bağlı olarak da kararlılık adalarını saran kaotik yörüngeler de tüm ölçeklerde bir yapı oluşturur. Bu faz uzayı davranışı her ölçekte kendine-benzer (self-similar) bir yapının doğduğuna işaret eder (Schuster, 2005).

Mapin bir enerji yüzeyi eşit büyüklükteki kutulara bölündüğünde, her ölçekteki yörünge yapısı sebebiyle yörüngeler tarafından işgal edilen kutuların kapladığı alan, kutulama işleminde kullanılan kutu büyüklüğüne bağlı olur. Başka bir deyişle her ölçekteki yörünge yapısı, enerji yüzeyindeki yörüngelerin görünür boyutunun bizim kutulamada kullandığımız çözünürlüğe bağlı olmasına neden olur. Bu özellik ve yukarıda bahsedilen kendine-benzer yapı fraktalların ayırt edici özellikleridir ve Lebesgue ölçümü sıfır olmamasına rağmen mapin kaotik yörüngeleri tarafından zaman zaman sağlanabilmektedir. Tüm ölçeklerde yapıya sahip olan ancak pozitif Lebesgue ölçüm değerine sahip olan setlere fat fraktal, boş olmayan fakat sıfır Lebesgue ölçümüne sahip olan setlere thin fraktal olarak sınıflandırmaların yapıldığı çalışmalarıyla Umberger ve Farmer, bir korunumlu sistemin kaotik yörüngesini fat fraktal olarak karakterize

etmişlerdir (Umberger ve Farmer, 1985; Farmer, 1985). Ayrıca doğrusal olmayan Hamiltoniyen sistemlerin bir sabit enerji yüzeyindeki ayrışık değişmez bölgelerinin korelasyon boyutunun (Grassberger ve Procaccia, 1983) araştırıldığı Pettini ve Vulpiani (1984) çalışmasında elde edilen sonuçlar da yörüngelerin yayıldığı altuzayların fraktal boyutlara sahip olduğuna işaret etmektedir. İki-boyutlu pertürbe edilmiş integrallenebilir alan-korunumlu maplerin bir ailesinin kararsız manifoldu yakınındaki sonlu-zamanlı tek bir yörüngenin boyutluluğunun incelendiği Benettin vd. (1986) çalışmasında bu yörüngenin bir fraktal boyut sergileyeceği ve bu boyutun tüm uygulama amaçları için etkili olacağı belirtilmiştir. Bahsi geçen çalışmalarda varılan sonuçlarla, web mapin kaotik denizi içerisine gömülmüş sonlu ve sonlu olmayan-zamanlı yörüngelerin kompleks yapısı için niceliksel karakterizasyonlarımız teorik uyum göstermektedir. Bu çalışmada web map bir fat fraktal olarak ele alınarak karakterizasyonu yapılmakta ve bu fraktal özelliği de web mapi fraktal olmayan kuvvetli kaotik denize sahip olan standard mapten (Gorodetski, 2012) belirgin şekilde ayırmaktadır. Web mapin bahsedilen karmaşıklığı bu mapin genelleştirilmiş istatistiksel mekanik çerçevesinde yapılacak incelemeler için elverişli kılar (Tsallis, 1988; Tsallis, 2009). Bu istatistik tanımının temelini oluşturan toplanabilir olmayan S_q q-entropi fonksiyonu (Denklem 7), multifraktalların geometrisinden esinlenerek türetilmiştir ve bu q-entropi tanımını uygun koşullar altında maksimum yapan olasılık dağılımları olan q-Gaussiyenler sistem dinamiğinin yarı-kararlı durumları veya yarı-durağan durumları temsil etmektedir.

Web mapin kaotik denizi içerisinde gömülmüş bir sonlu-zamanlı yörüngeler seti tarafından kaplanan alt uzayın fraktal boyutuyla, bu yörüngelerin olasılık dağılımları arasındaki ilişkiyi açığa çıkarmak adına web mapin çeşitli parametre değerleri için bahsi geçen yörüngelerin kapasite boyutu ya da diğer bir adıyla kutu-sayma boyutu (Hilborn, 1994) analizi de bu çalışmanın kapsamına girmektedir.

Özetlemek gerekirse ilk olarak web mapin iterasyonları toplamı niceliğinin olasılık dağılımlarına yönelik incelemeler yapılacaktır. Görünürde kaotik denizin içerisine gömülmüş yörüngelerin fraktal boyutlarının sayısal olarak hesaplanarak elde edilen olasılık dağılımları ile ilişkilerinin kurulmasının ardından da genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin geçerliliğine işaret eden başlangıç koşullarına duyarlık ve entropi artış hızı karakterizasyon yöntemleri için q indislerinin belirlenmesine yönelik sayısal hesaplamalar gerçekleştirilmektedir.

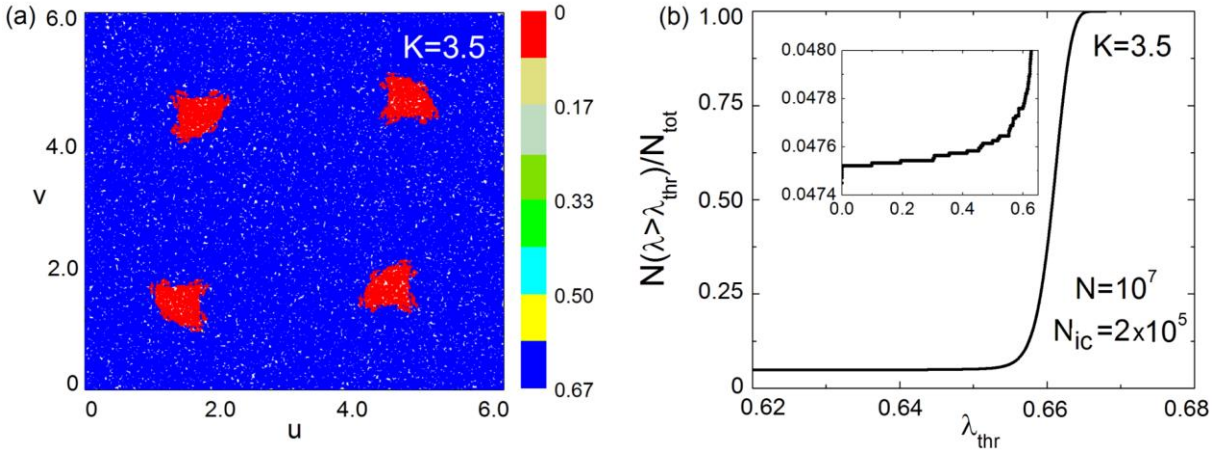
Denklem 32 ile verilen Q-katlı web mapte $Q = 4$ ile dört-katlı duruma karşılık gelen sistem;

$$u_{i+1} = v_i$$
$$v_{i+1} = -u_i - K \sin v_i \quad (33)$$

u_n ve v_n için modülo 2π alınarak tanımlanır. İki değişken için modülo alma işlemiyle web map faz uzayı $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ aralığında sınırlandırılmış olunur. İfadede yer alan K parametresi sistemin integrallenemezliği ve ergodikliğini kontrol eden bir parametre olmakla beraber Denklem 33 ile verilen map herhangi bir K değeri için faz uzayında dört-katlı bir simetriye sahiptir. $K = 0$ iken sistem integrallenebilirdir ve tüm yörüngeler periyot-4 davranışı sergiler. Parametre değeri artarken faz uzayındaki periyodik ve yarı-periyodik yörüngeler KAM teoremine (Arnold, 1978) uygun olarak bozulurlar ve bu bozulma işlemi Poincaré-Birkhoff teoremince (Birkhoff, 1935) açıklanan bir eliptik-hiperbolik noktalar dizesine bozulma şeklinde gerçekleşir. Bu bozulma prosedürü her ölçekte kendini gösterirken, hiperbolik noktaların civarında kaotik davranış doğmaya başlar. $K = 0.1$ gibi oldukça küçük bir parametre değerinde tamamı kararlı yörüngelerce işgal edilen faz uzayında artan parametre değeriyle kaotik davranış ortaya çıkar ve kararlılık adalarıyla kaotik denizin beraber bulunduğu faz uzayı davranışı $K = 5$ gibi büyük bir parametre değerinde faz uzayının tamamen kaotik davranış ile işgaliyle son bulur.

Web map faz uzayındaki yörüngeleri karakterize etmek ve olası yarı-durağan durumların varlığını gözlemlemek adına faz uzayından rastgele seçilen çok sayıdaki başlangıç koşulunun her biri için Benettin algoritması (Benettin vd., 1980) kullanılarak maksimum Lyapunov üstelinin hesaplanmasının yanı sıra SALİ indeksi (Skokos, 2001) çeşitli K kontrol parametresi değerleri için hesaplanmıştır. Yapılan hesaplamalara bir örnek oluşturması ve faz uzayında hem kaotik hem de kararlılık adalarının birlikte gözlemlenebilmesinden dolayı $K = 3.5$ parametre değeri için 2×10^5 rastgele başlangıç koşulunun her biri için 10^7 iterasyonun uygulanarak Lyapunov üstelinin hesaplandığı inceleme için elde edilen faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasvirini gösteren renk haritası Şekil 21.a'da verilmektedir. Bu şekilden de görüldüğü üzere kararlılık adalarında Lyapunov üsteli değeri yaklaşık sıfır olurken kaotik denizden seçilen başlangıç koşulları için üstel değeri büyük pozitif bir sayı olmaktadır. Şekil 21.b'de sonlu-zamanlı Lyapunov üsteli eşik değerinin fonksiyonu olarak hesaplanan başlangıç koşullarının göreli sayısının kümülatif dağılımı yer almaktadır. Grafikten de görüldüğü üzere bu dağılım ani bir artış göstermekte ve bu artış da istatistiksel hesaplamalarda, sadece büyük pozitif Lyapunov üstel değerine sahip kuvvetli kaotik yörüngeler ile üstel değeri yaklaşık sıfır olan zayıf kaotik yörüngelerin hesaba katılması gerektiğine işaret etmektedir. Gözlemlenen bu davranışlar standard map için yaptığımız incelemelerle oldukça benzerdir. Bu benzerlikten yola çıkarak standard mapin iki rejim tarafından ortak olarak işgal edildiği senaryoda olasılık dağılımı

karakterizasyon yönteminden gördüğümüz kaotik denizden gelen Gaussiyen dağılım ile kararlılık adalarından elde edilen *q*-Gaussiyen dağılımın bir lineer kombinasyonu şeklinde olan olasılık dağılımlarının web map için de elde edilmesini umarız. Ancak web mapin faz uzayında, standard mapin kuvvetli kaotik denizinde gözlemlenmeyen yapışkan davranış ve bu davranışın oluşturduğu fraktal yapı nedeniyle olasılık dağılımları için farklı sonuçlar elde edilmektedir.

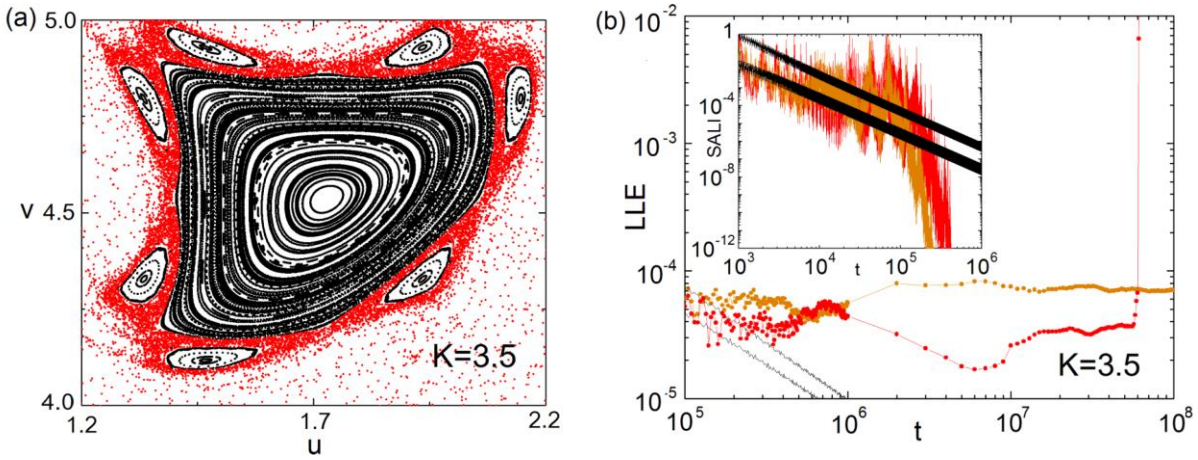


Şekil 21. Web mapin $K = 3.5$ parametre değeri için; (a) faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri, (b) sonlu-zamanlı maksimum Lyapunov üsteli eşik değerinin (λ_{thr}) fonksiyonu olarak başlangıç koşullarının göreli sayısının kümülatif dağılımı.

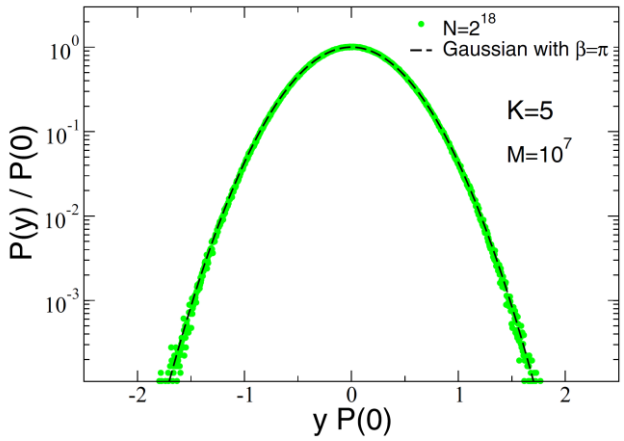
Şekil 22'de $K = 3.5$ parametre değeri için web mapin faz uzayında gözlemlenen kaotik yörüngelerin yapışkan davranışı ve bu yörüngelerin davranışını açıklamak için hesaplanan maksimum Lyapunov üsteli (LLE) ve SALİ indeksinin iterasyon adımına bağlı değişimi yer almaktadır. Şekil 22.a'da kırmızı renk ile gösterilen yapışkan kuvvetli kaotik yörüngelerin kararlılık adaları etrafını yoğun şekilde sardığı görülmekte ve standard mapte bu denli yoğun görülmeyen bu davranışın istatistiksel olarak önemli etkileri olduğu düşünülmektedir. Şekil 22.a'da verilen faz uzayı parçasındaki siyah ile verilen kararlı yörüngelerden ve kırmızı renk ile temsilen edilen yapışkan kuvvetli kaotik yörüngelerden seçilen ikişer yörünge için hesaplanan LLE ve SALİ evrimi iterasyonun fonksiyonu olarak Şekil 22.b'de verilmektedir. Şekilden de görüldüğü üzere kuvvetli kaotik yapışkan yörüngeler ilk olarak küçük bir Lyapunov üsteli değerine sahip olacak şekilde yapışkan bölgede dolanırken büyük bir iterasyon değerinin ardından aniden daha büyük Lyapunov üstelli kaotik denize geçiş yapabilmektedir. Yapışkan bölgedeki farklı başlangıç koşullarının farklı kaçış sürelerine sahip oldukları anlaşılmaktadır. Şekil 22.b'de kırmızı renk ile tasvir edilen yörüngenin 6×10^7 iterasyon sonunda yapışkan bölgeden çıkarken, turuncu renkli yörüngenin 10^8 iterasyondan önce bu bölgeden çıkmadığı görülmektedir. Yapışkan bölgeden kaotik davranışa geçişin görüldüğü bu davranışa benzer olarak kuvvetli kaotik bölgedeki yörüngeler de yapışkan bölgeye büyük iterasyon adımları

ardından geçebilmektedir. Bu durum yapışkan bölgedeki kuvvetli kaotik yörüngelerin, kaotik denizdeki yörüngeler kadar hızlı bir şekilde kendi başlangıç koşullarıyla aynı enerji değerine sahip faz uzayı bölgelerine yayılamadığına işaret etmektedir. Şekil 21.a'da verilen faz uzayındaki kaotik denizin tek bir yörünge tarafından uzun iterasyon adımı ardından sarılabileceği teorik gerçeği göz önüne alındığında aslında kaotik denizin tümünün bir eş enerji bölgesi olduğu söylenebilir. Kaotik denizde başlayan yörüngelerinde çeşitli zaman adımlarında bu yapışkan bölgelere girip çıkabildiği gözlemi standard mapte görülmeyen bir davranıştır. Bu davranış nedeniyle web mapin istatistiksel karakterizasyonu standard mapten farklılıklar sergileyebilmektedir.

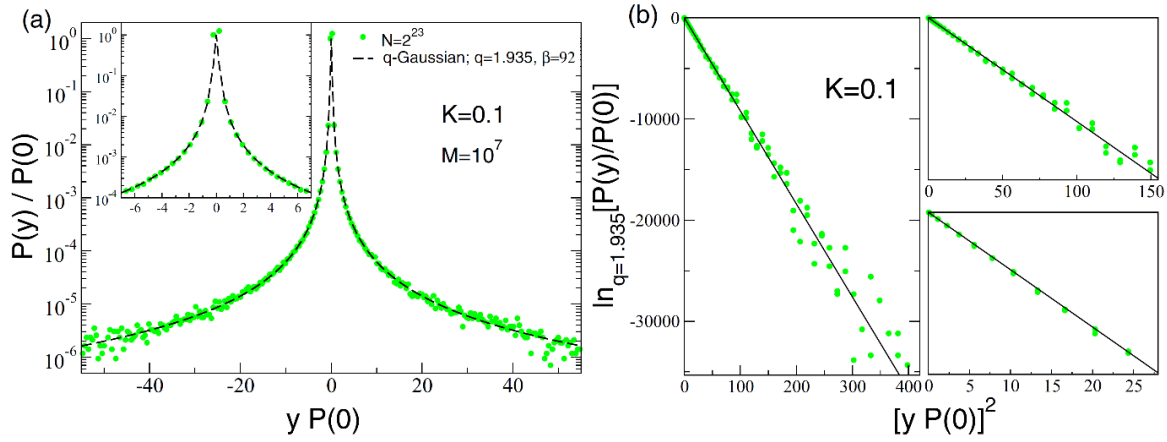
Denklem 12 ile verilen mapin iterasyonları toplamı niceliğini (y) Denklem 33 ile tanımlanan web mapin u değişkeni için oluşturarak y niceliğinin olasılık dağılımlarını farklı map parametresi değerleri için araştırdığımız bu çalışmada ilk olarak daha önce standard map incelemesinde olduğu gibi faz uzayının tamamen kaotik deniz ($K = 5$) ve tamamen kararlı yörüngeler ($K = 0.1$) tarafından işgal edildiği senaryolar için incelemeler yapılmaktadır. İki senaryoda da faz uzayının tamamından $M = 10^7$ adet rastgele seçilmiş başlangıç koşulu için; $K = 5$ durumu için $N = 2^{18}$, $K = 0.1$ ise limit dağılımın elde edilmesi adına $N = 2^{23}$ iterasyon uygulanarak y niceliğinin olasılık dağılımları araştırılmaktadır. Elde edilen sonuçların Denklem 18 ile verilen olasılık fonksiyonu kullanılarak fitlemelerin yapıldığı analizler Şekil 23 ve Şekil 24'te verilmektedir. Diğer parametre değerleri için yapılacak analizlerle uyumlu olmaları açısında her iki şekilde de olasılık dağılımları normalize edilmişlerdir. Şekil 23'te $K = 5$ durumu için elde edilen dağılımın Denklem 27 ile uyumlu olarak $\beta = \pi$ genişliğine sahip bir Gaussiyen olduğu ($q_{stat} = 1$) görülmektedir. Bununla beraber Şekil 24.a'da verilen $K = 0.1$ parametreli durum için limit dağılım $q_{stat} \simeq 1.935$ ile bir q-Gaussiyen olarak elde edilmektedir. Dağılımın sadece q-Gaussiyenden oluştuğunu göstermek adına olasılık dağılımının merkez, orta ve kuyruk bölgelerinin ayrı ayrı q-logaritma (Denklem 5) davranışının verildiği Şekil 24.b'ye bakıldığında lineer eğrilerin elde edildiği ve bu lineer eğrilerin de elde edilen dağılımın sadece q-Gaussiyenden oluştuğuna işaret ettiği görülmektedir. Standard map için Şekil 19'da elde edilen davranışla örtüşen bu gözlemde sonlu iterasyon ve sonlu başlangıç koşulu sayısı nedeniyle kuyruk bölgesi için lineer eğri etrafında salınım davranışı doğmaktadır. Yapılan bu gözlem daha önce standard map için yapılan sayısal hesaplamalarla tespit edilen q_{stat} değeriyle uyumludur. İki alan-korunumlu mapin faz uzaylarının tamamının kararlı yörüngelerce işgal edildiği senaryolarda yapılan bu gözlem, $q_{stat} \simeq 1.935$ değerinin bu map sınıfı için evrensel olabileceğine işaret etmektedir (Ruiz vd., 2017b).



Şekil 22. Web mapin $K = 3.5$ parametreli durumu için (a) siyah renk ile gösterilen kararlılık adalarını saran kırmızı renk ile gösterilen yapışkan davranışı içeren faz uzayı bölgesine yakın gösterim, (b) kararlılık adasından (siyah renk) ve yapışkan davranış bölgesindeki kuvvetli kaotik yörüngelerden (turuncu ve kırmızı) seçilen ikişer yörünge için sonlu-zamanlı maksimum Lyapunov üsteli (LLE) ve SALI değişimi.



Şekil 23. Web mapin $K = 5$ parametreli durumu için elde edilen normalize edilmiş olasılık dağılımı.

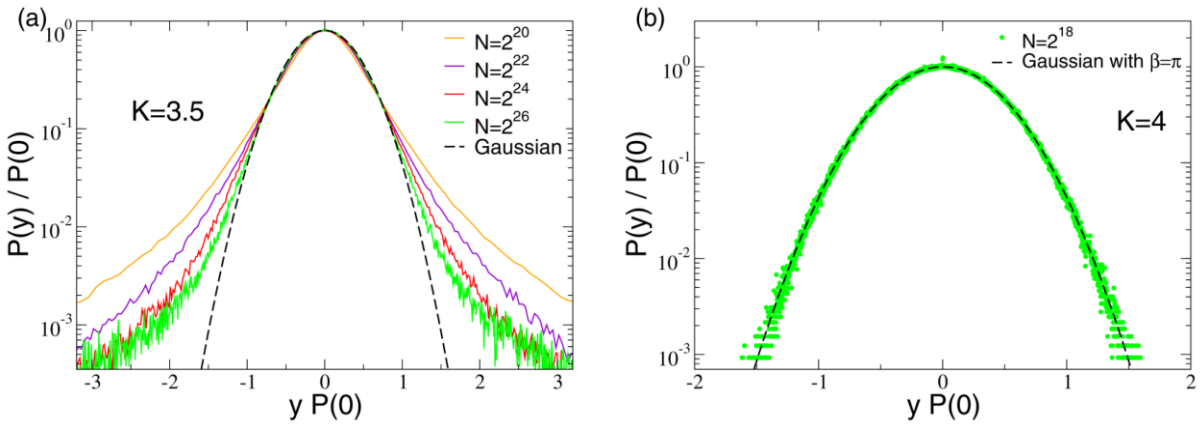


Şekil 24. Web mapin $K = 0.1$ parametreli durumu için (a) normalize olasılık dağılımı, (b) olasılık dağılımının merkez, orta ve kuyruk bölgesinin q-logaritma davranışları.

Web map ile standard mapin faz uzaylarının ergodik ve ergodik olmayan davranış tarafından tamamen işgal edildiği parametre değerleri için yapılan sayısal hesaplamaların gözlemlenen uyumu sonucunda, bu parametre değerleri arasında kalan parametre değerleri için standard map analizinde gözlemlenen Denklem 28 ile tanımlanan olasılık dağılımının web map için de geçerli olması beklenir. Ancak yapılan incelemelerde web map faz uzayının kaotik deniz ve kararlılık adaları tarafından beraber işgal edildiği parametre değerlerinde y niceliğinin $q_{stat} \simeq 1.935$ değerli bir q-Gaussiyen ile Gaussiyen dağılımın bir lineer kombinasyonu şeklinde limit davranış sergileme eğiliminde olmasına rağmen bazı özel parametre değerlerinde Denklem 28 ile tanımlanan bu iki dağılımın lineer kombinasyonu şeklindeki olasılık dağılımlarının elde edilemediği görülmüştür. Standard mapte gözlemlenmeyen bu davranış oldukça ilgi çekicidir ve bu nedenle de web map için olasılık dağılımı karakterizasyonu bu davranış üzerine odaklanmıştır. Kaotik denizde yer alan yapışkan bölgelerin etkilerinin istatistiksel olarak çok etkin olduğu bu parametre değerlerine bir örnek oluşturması için Şekil 21'de Lyapunov üsteli ile faz uzayı tasviri yapılan, Şekil 22'de ise faz uzayındaki yapışkan kaotik yörünge bölgesi tanıtılan $K = 3.5$ parametre değeri için sayısal hesaplamalar yapılmaktadır.

$K = 3.5$ parametre değerli web map için olasılık dağılımı incelemelerinde kaotik deniz içerinde gömülü olan sonlu-zamanlı yörüngelerin olasılık dağılımının çok sayıda iterasyon işlemi uygulanmasına rağmen Gaussiyen dağılım fonksiyonu formuna tam olarak yakınsamadığı gözlemlenmiştir. Yüksek sayıda iterasyonda q-Gaussiyenin varlığını korumasına karşın Gaussiyen dağılımın hala bir Gaussiyene tam olarak yakınsayamaması Şekil 23 ve Şekil 24'ün elde edilmesinde kullanılan iterasyon sayıları karşılaştırıldığında oldukça enteresan bir sonuçtur. Şekil 25.a'da $K = 3.5$ faz uzayının sadece kaotik denizinden rastgele seçilen $M = 10^7$ adet başlangıç koşulu için farklı N iterasyon sayılarının kullanıldığı analizler yer almaktadır. Uygulanan iterasyon sayısının etkisini göstermek adına normalize olasılık dağılımlarının kullanıldığı bu şekilde dağılımın merkez bölgesinin yavaş bir şekilde bir Gaussiyene yakınsadığı görülmektedir. Artan iterasyon değeriyle elde edilen dağılımın merkezinin bir Gaussiyene yakınsadığının görülmesine rağmen Gaussiyen olmayan kuyruk bölgesi varlığını sürdürmektedir.

Buna karşın Şekil 25.b'de $K = 4$ parametresi için faz uzayının sadece kaotik denizinden seçilen başlangıç koşulları için Şekil 25.a'da belirtilen iterasyon sayılarına göre daha düşük iterasyonun uygulandığı inceleme sonucu elde edilen olasılık dağılımının tam bir Gaussiyen formuna sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 25. Web mapin (a) $K = 3.5$ parametre değeri için farklı iterasyon sayılarının (N) kullanıldığı olasılık dağılımları, (b) $K = 4$ parametre değeri için olasılık dağılımı. İncelemeler sadece kaotik deniz içerisinden rastgele seçilen başlangıç koşulları üzerinden yapılmaktadır.

Şekil 25'te web mapin istatistiksel karakterizasyonunda kullandığımız iki uç parametre değeri arasında yer alan iki parametre için kaotik denizden seçilen yörüngelerin birbirinden farklı limit davranışlar sergilediği görülmektedir. Bu davranış farkının faz uzayında yer alan kararlılık adaları zincirlerinin etrafını saran yapışkan kaotik yörüngelerin tüm ölçeklerde bir yapı oluşturması ile ilişkili olduğu gözlemi yapılmıştır. Bazı özel parametre değerlerinde istatistiksel olarak etkisi artan bu kuvvetli kaotik yapışkan yörüngelerin olasılık dağılımlarındaki etkilerini ortaya koymak için, yapışkan bölgedeki kaotik yörüngelerin fraktal boyutları üzerinde incelemeler yapılmıştır. Önceki bölümlerde de bahsedildiği üzere yapışkan bölgelerdeki kaotik yörünge organizasyonu bir fat fraktal olarak görülebilir. Böylece bu kaotik yörüngeler için fraktal boyutun $d_f < 2$ olması beklenir. Çeşitli parametre değerleri için faz uzayının $[2.7,3.8] \times [0,2\pi]$ bandından seçilen kaotik deniz içerisine gömülü sonlu sayıda başlangıç koşulu seti ($M < \infty$) ile elde edilen sonlu-zamanlı yörüngelerin ($N < \infty$) Hou algoritmasının (Hou vd., 1990; de Souza ve Rostirolla, 2011) Matlab programı üzerinden hesaplanan kutu-sayma fraktal boyutları ve bu parametrelere karşılık gelen dört-katlı simetrik faz uzaylarının örnek bölgelerine yapılan yakın gösterim Şekil 26'da verilmektedir. $N \to \infty$ limitinde Denklem 12 ile verilen y niceliğinin olasılık dağılımlarının bir Gaussiyene yakınsayacağı gerçeğinden hareketle, bu yakınsamayı karakterize etmek adına hesaplamalarda fraktal boyutun limit değeri farklı (N,M) yolları üzerinden $N \to \infty$ ve $M \to \infty$ limitleri alınarak analiz edilmiştir. Bu farklı yollar üzerinden yapılan hesaplamalarla tespit edilen fraktal boyut değerleri Şekil 26'da renk haritası şeklinde tasvir edilerek verilmektedir.

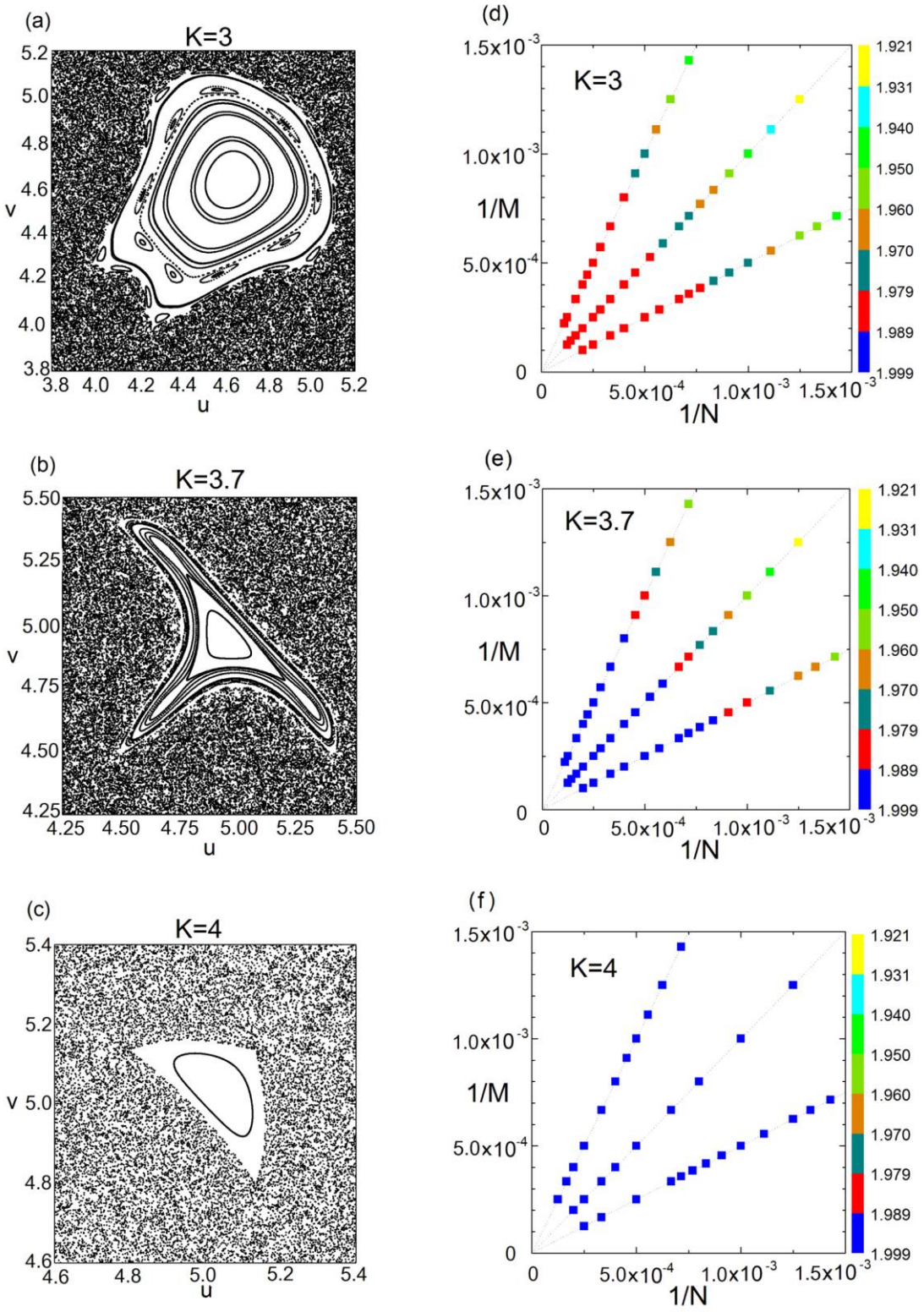
Yukarıda bahsi geçen faz uzayı bandından seçilen başlangıç koşulları için farklı (N,M) yolları kullanılarak $K = 3$ parametre değeri için yapılan fraktal boyut sayısal hesaplamalarının verildiği Şekil 27.a'ya bakıldığında, gidilen yoldan bağımsız olarak fraktal boyutun limit değerinin

$d_f = 1.985 \pm 0.004 < 2$ olarak elde edildiği görülmektedir. Hesaplamalarda kullanılan (N,M) yollarından iterasyon için limite nispeten daha hızlı ulaşan yol kullanılarak $K = 3.5$, $K = 3.7$ ve $K = 5$ parametre değerleri için de yapılan hesaplamaların $K = 3$ sonucuyla beraber verildiği inceleme Şekil 27.b'de verilmektedir. Elde edilen limit davranışlara bakıldığında $K = 3$, $K = 3.5$ ve $K = 3.7$ parametrelerinde fat fraktal yapılı yapışkan bölgeye işaret eden fraktal boyut değerinin elde edildiği görülmektedir. Bu davranışın da Şekil 25.a'da verilen limit dağılımda Gaussiyen dağılıma yavaş yakınsama ile ilişkili olduğu sonucuna varılabilir. Faz uzayının tek bir kuvvetli kaotik deniz tarafından işgal edildiği $K = 5$ ve Şekil 27.b'de görsel karmaşa yaratmamak adına eklenmemiş olan, olasılık dağılımlarında Gaussiyen dağılıma hızlı bir yakınsama sergileyen $K = 3.8$ ve $K = 4$ parametre değerlerinde elde edilen limit fraktal boyut değerleri $d_f = 2$ olarak elde edilmiştir. Özetlemek gerekirse faz uzayındaki kaotik deniz içerisinde fraktal özellikli yapışkan bölgeye sahip parametre değerleri için elde edilen fraktal boyut değeriyle, bu parametrelerde kaotik denizden seçilen başlangıç koşulları kümesinin olasılık dağılımlarının Gaussiyen dağılıma oldukça yavaş yakınsaması arasında birebir bir ilişki vardır. Bu durum da yapışkan bölgenin olasılık dağılımı karakterizasyon yöntemindeki etkin rolüne işaret etmektedir.

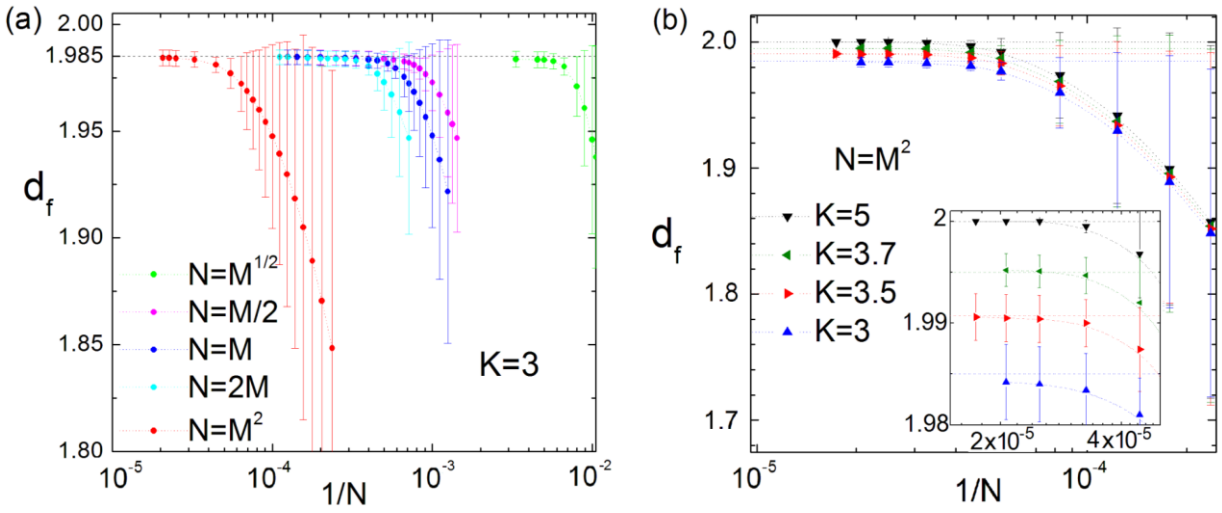
Kaotik deniz içerisine gömülü olan yapışkan bölgelerdeki yörünge noktalarının fat fraktal özellikleriyle, bu yörüngeler için elde edilen limit davranışların bir Gaussyen formuna yavaş şekilde yakınsamasının arasındaki ilişkinin ortaya konmasının ardından bu olasılık dağılımları için κ basıklık (kurtosis) niceliğine bakılabilir. Bir Gaussiyen olasılık dağılımı için sonsuz iterasyon limitinde $\kappa = 3$ değerini alması beklenen basıklık ölçüsü;

$$\kappa = \frac{1}{\sigma^4}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(y_i - \mu\right)^4\right] \tag{34}$$

ifadesinden yararlanılarak hesaplanmaktadır (Celikoglu ve Tirnakli, 2018). İfadede yer alan y_i ($i = 1, \ldots, M$) Denklem 12 ile verilen mapin iterasyonları toplamı niceliğini, μ toplamların aritmetik ortalamasını, σ ise varyansı belirtmektedir. Şekil 25'te $K = 3.5$ parametre değeri için gözlemlenen olasılık dağılımının Gaussiyen formuna yavaş şekilde yakınsaması davranışının, fraktal boyut analiziyle $K = 3$ ve $K = 3.7$ parametre değerleri içinde geçerli olacağı çıkarımını doğrulamak adına bu parametre değerlerinde Denklem 34 ile verilen basıklık ölçüsü sonlu N iterasyon değerli olasılık dağılımları için hesaplanarak basıklık ölçüsünün $N \to \infty$ limitinde alacağı değerler üzerine tahminlerde bulunulmuştur.



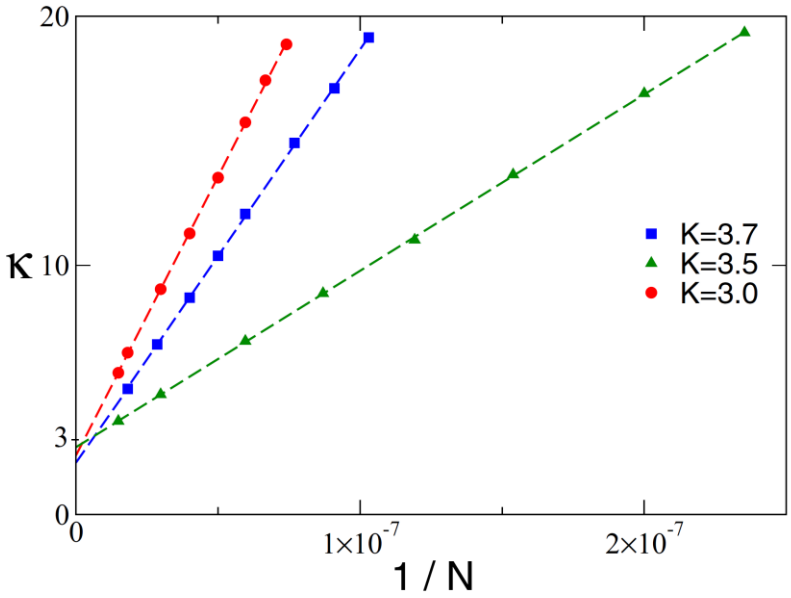
Şekil 26. Web mapin (a) $K = 3$, (b) $K = 3.7$, (c) $K = 4$ parametre değerleri için faz uzaylarına yapılan yakın gösterimler; (d) $K = 3$, (e) $K = 3.7$, (f) $K = 4$ parametre değerleri için $[2.7,3.8] \times [0,2\pi]$ faz uzayı bandından seçilen kaotik deniz içerisine gömüşü olan başlangıç koşullarının farklı (N,M) yolları için hesaplanan fraktal boyutların renk haritası.



Şekil 27. Web mapin (a) $K = 3$ parametre değeri için $[2.7,3.8] \times [0,2\pi]$ faz uzayı bandından seçilen ve kaotik deniz içerisine gömülü olan başlangıç koşulları için farklı (N,M) yollarının kullanıldığı fraktal boyut analizi, (b) aynı faz uzayı bandından seçilen başlangıç koşulları kümesi için tek bir (N,M) yolu kullanılarak çeşitli map parametresi değerleri için fraktal boyut analizi.

Şekil 28'de bahsi geçen parametre değerleri için kaotik deniz içerisine gömülü sonlu-zamanlı yörüngelerin iterasyonları toplamı niceliğinin olasılık dağılımlarının basıklık ölçüsüne yönelik hesaplamalar yer almaktadır. Lineer eğrilerin maksimum R-kare değeri $\simeq 0.9999$ olacak şekilde tespit edildiği sayısal analizlerde basıklık ölçüsü asimptotik olarak; $K = 3$ için $\kappa = 2.37 \pm 0.06$, $K = 3.5$ için $\kappa = 2.7 \pm 0.04$ ve $K = 3.7$ için $\kappa = 2.08 \pm 0.05$ elde edilmiştir. Bu sonuç kaotik denizi için fraktal boyutu $d_f < 2$ olan parametre değerlerinde $\lim_{N\to\infty}\kappa \neq 3$ basıklık ölçüsü ile olasılık dağılımlarının $N \to \infty$ limitinde bir Gaussiyene yakınsamayacağına işaret eder.

Buna karşın yapılan sayısal hesaplamalarla $d_f = 2$ fraktal boyutunun kaotik deniz yörüngeleri için sağlandığı parametre değerlerinde basıklık ölçüsünün $\lim_{N\to\infty}\kappa = 3$ olarak elde edildiği ve bu basıklık ölçüsünün de elde edilen olasılık dağılımlarının doğru bir Gaussiyen olduğuna işaret ettiği görülmüştür. Web mapin olasılık dağılımı karakterizasyon yöntemi analizi sonucunda ele alınan parametreler için sayısal olarak hesaplanan fraktal boyut ve basıklık ölçüsü değerleri Tablo 4'te tam bir liste olarak verilmektedir. Yukarıda yapılan gözlemlerin verildiği bu tabloya bakıldığında basıklık ölçüsü κ ve fraktal boyut d_f arasındaki ilişki net bir şekilde görülmektedir.



Şekil 28. Web mapin faz uzayındaki kaotik deniz içerisine gömülü yörüngelerin fraktal boyutu $d_f < 2$ olan parametre değerleri için basıklık ölçüsü analizi.

Tablo 4. Web mapin çeşitli parametre değerleri için limit olasılık dağılımlarının basıklık ölçüsünün $N \to \infty$ limitindeki belirlenen değerleri ve $M \to \infty$ limitindeki başlangıç koşulu seti için $N \to \infty$ limitiyle sayısal olarak belirlenen fraktal boyut değerleri.

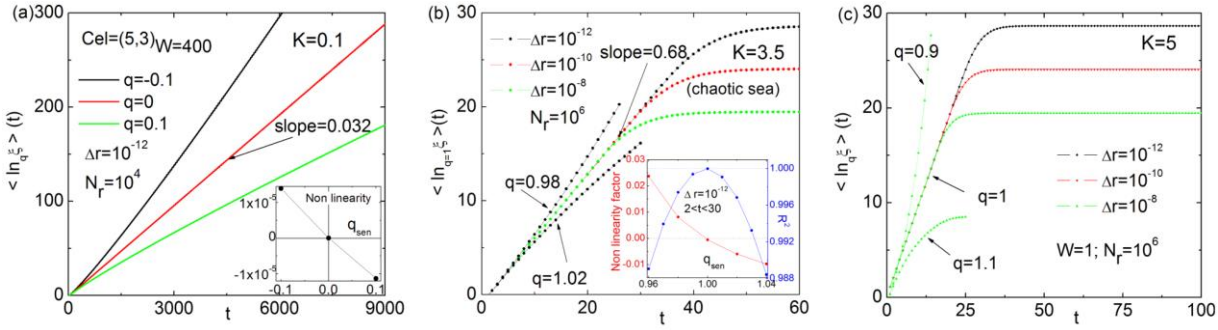
K	κ	d_f
3	2.37±0.06	1.9846±0.0034
3.5	2.70±0.04	1.9909±0.0020
3.7	2.08±0.05	1.9963±0.0014
3.8	3	2
4	3	1.9989±0.0004
5	3	2

Web mapin faz uzayının tamamen kaotik deniz ve tamamen karlılık adaları tarafından işgal edildiği ekstrem parametre değerleri için sırasıyla elde edilen Gaussiyen ve q-Gaussiyen dağılımların standard mapin istatistiksel karakterizasyonunda sayısal olarak belirlenen dağılımlarla oldukça uyumlu oldukları görülmektedir. Web map faz uzayında yer alan kararlılık adaları tarafından domine edilen faz uzayından seçilen başlangıç koşullarının limit davranışları için elde edilen $q_{stat} \simeq 1.935$ değerinin standard map için sayısal hesaplamalarla bulunan q_{stat} değeriyle birebir uyumundan hareketle, diğer karakterizasyon yöntemlerinin q indisleri web map için araştırılabilir.

Bu çalışma kapsamında web mapin $K = 0.1$, $K = 3.5$ ve $K = 5$ parametre değerleri için Denklem 1 ile verilen ξ duyarlık fonksiyonunun davranışı üzerinde sayısal incelemeler

yapılmaktadır. İncelemelerde Denklem 1'de yer alan başlangıçtaki yörünge ayrımı niceliği için iki-boyutlu faz uzayına uygun olarak $\Delta r \equiv \|\Delta x(0)\|$ Öklid mesafesi kullanılmaktadır. Duyarlık fonksiyonunun zamana (iterasyon adımı) bağlı değişiminin tam bir doğru tasvirinin yapılması adına Denklem 5 ile tanımlanan q-logaritma fonksiyonu kullanılarak $\ln_q \xi$ niceliğinin N_r adet faz uzayından rastgele seçilmiş başlangıç koşulu çifti üzerinden ortalaması alınmaktadır. Tamamı kararlılık adaları tarafından işgal edilen $K = 0.1$ parametreli web map faz uzayının $W = 20 \times 20$ eşit boyuttaki hücreye ayrıldığı incelemede farklı q değerleri için $N_r = 10^4$ adet başlangıç koşulu çifti daha önce standard map için yapılan hesaplamalarda kullanılan $\Delta r = 10^{-12}$ Öklid başlangıç ayrımı değeriyle (5,3) faz uzayı hücresi içerisinden rastgele seçilerek analizler yapılmıştır. Elde edilen sonuçların verildiği Şekil 29.a'ya bakıldığında $< \ln_q \xi >$ için zamana lineer bağlılığın $q_{sen}^{av} = 0$ değeri için sağlandığı görülmektedir. Gözlenen lineer eğrinin eğimi Denklem 4 uyarınca q-genelleştirilmiş Lyapunov üstelini vermekte ve bu üstel değerinin $\lambda_{q_{sen}^{av}} = 0.032 \pm 0.001 > 0$ ile başlangıç koşullarına lokal zayıf duyarlığı temsil ettiği görülmektedir. $K = 3.5$ parametre değeri için web map faz uzayının $W = 3 \times 3$ hücreye bölünerek merkez hücre içerisinden $N_r = 10^6$ adet başlangıç koşulu çiftinin rastgele seçilerek ortalamaların alındığı hesaplamalarda Denklem 1'de yer alan yörünge çiftleri başlangıç ayrımı için azalan değerler kullanılarak duyarlık fonksiyonu davranışının daha geniş zaman aralığı bölgesinde gözlemlenmesi sağlanmıştır. Bu hücre seçimiyle sadece faz uzayı kaotik denizi içerisine gömülmüş kaotik yörüngeler için duyarlık fonksiyonu davranışı incelemesi yapılmış olunur. Şekil 29.b'de $K = 3.5$ parametreli durumda yapılan sayısal hesaplamalar sonucu $< \ln_q \xi >$ niceliği için zamana lineer bağlılığın $q_{sen}^{av} = 1$ değeri için elde edildiği ve bu lineer eğrinin eğiminin Denklem 2 uyarınca standart Lyapunov üstelini verdiği görülmektedir. Elde edilen üstel değeri $\lambda = \lambda_{q_{sen}^{av}} = 0.68 \pm 0.01$ olmakla beraber başlangıç koşullarına lokal duyarlığın kuvvetli olduğuna işaret eder. $K = 5$ parametre değerinde web map faz uzayının tamamının tek bir kaotik deniz tarafından işgal edildiği göz önüne alınarak ve standard map için Şekil 11'de elde edilen gözlem hatırlanarak faz uzayının tamamı $W = 1$ hücresi içerisine yerleştirilmiştir. Bu hücre seçimiyle $N_r = 10^6$ adet başlangıç koşulu çiftinin faz uzayının tamamından rastgele seçilmesi sağlanmaktadır. Farklı başlangıç koşulları ayrımı değerleri için yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçların verildiği Şekil 29.c'ye bakıldığında duyarlık fonksiyonu için zamana lineer bağlılığın $q_{sen}^{av} = 1$ değerinde sağlandığı ve bu lineer bağlılığı belirten eğrinin eğiminin standart Lyapunov üsteli değerini $\lambda = \lambda_{q_{sen}^{av}} = 0.96 \pm 0.01$ olarak verdiği görülmektedir. Şekil 29'da verilen tüm analizlerde lineer eğriler $A + Bt + Ct^2$ formundaki polinom kullanılarak oluşturulmakta ve belirlenen lineer eğri için $R \equiv C/B$ lineer olmayışlık ölçüsünün sıfır değer aldığı q değeri optimum değer olarak belirlenmektedir. Elde edilen tüm

eğriler için maksimum R-kare değeri ≃ 0.9999 olarak belirlenmiştir. Tamamı kararlılık adaları tarafından işgal edilen faz uzayının ergodik olmayan davranışı için başlangıç koşullarına duyarlık istatistiksel karakterizasyonu için elde edilen yukarıda bahsedilen sonuç bu rejimde genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin geçerli olduğuna işaret ederken, kaotik deniz içeren iki parametre değerinde bu kaotik denizden seçilen yörüngeler için bulunan $q_{sen}^{av} = 1$ indisi bu kuvvetli kaotik rejim için uygun açıklayıcı istatistiğin Boltzmann-Gibbs istatistiği olduğuna işaret eder. Elde edilen q değerleri ve duyarlık fonksiyonu davranışları alan-korunumlu standard map ile birebir uyumludur.



Şekil 29. Web mapin (a) $K = 0.1$, (b) $K = 3.5$ faz uzayının sadece kaotik denizi, (c) $K = 5$ senaryoları için duyarlık fonksiyonunun q-logaritma davranışının N_r deney üzerinden alınan ortalamasının farklı q değerleri için zamana bağlı değişimi. (a) şeklinin iç kısmında lineer olmayışlık ölçüsü, (b) şeklinin iç kısmında hem lineer olmayışlık ölçüsü hem de maksimum R-kare değerleri q değerlerine bağlı olarak yer almaktadır. (c) şekli için elde edilen lineer eğrinin eğim değeri 0.96'dır.

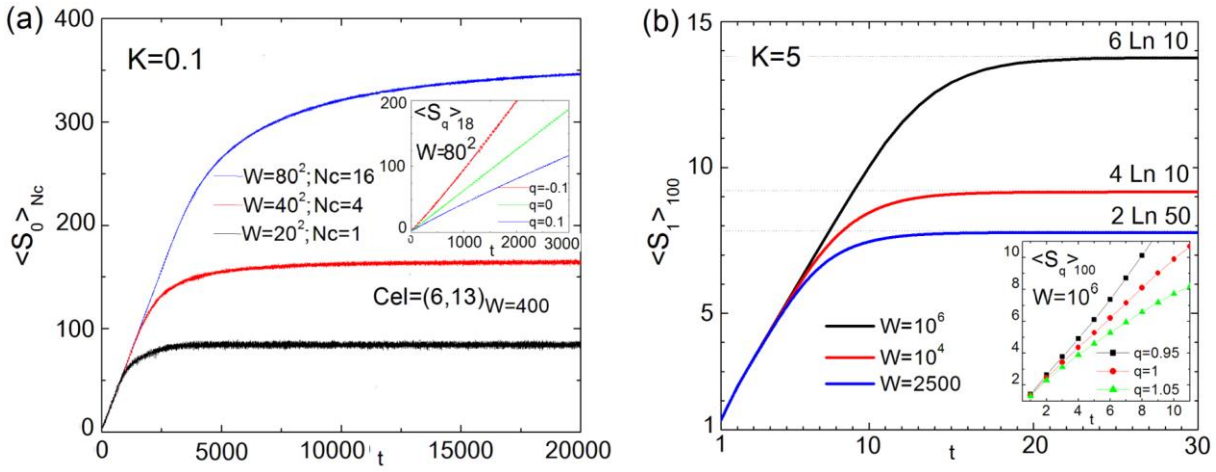
Başlangıç koşullarına duyarlık ile entropi artış hızı arasındaki Pesin özdeşliği ile kurulan ilişki hatırlanacak olunursa, web mapin yukarıda duyarlık analizi yapılan parametre değerleri için entropi artış hızı karakterizasyonu incelemesi yapılabilir. Entropi artış hızı hesaplamalarının faz uzayını eşit boyuttaki W hücreye bölerek, bu hücrelerden birinin içerisine rastgele seçilmiş çok sayıda, genellikle $N_{ic} = 10W$, başlangıç koşulunun yerleştirilmesi ve bu başlangıç koşullarından sistemin evrilmesine izin vermeye dayanır. Evrilen yörüngelerden hücrelere düşenler saydırılarak Denklem 7 ile verilen q-entropi hesaplattırılır. Denklem 8 ile tanımlanan entropi artış hızının tespiti için q-entropisinin zamana bağlı değişiminin incelendiği hesaplamalarda dalgalanmaları azaltmak adına başlangıç koşullarının faz uzayı hücrelerinden birine yerleştirilerek evrilmelerine izin verme işlemi rastgele seçilmiş N_c hücre üzerinden tekrarlanarak bu hücreler üzerinden entropi için ortalama alınır.

$K = 0.1$ parametreli tamamı kararlılık adaları tarafından işgal edilen web map faz uzayının $W = 20 \times 20$, $W = 40 \times 40$ ve $W = 80 \times 80$ adet hücreye ayrıldığı entropi artış hızı sayısal hesaplamaları Şekil 30.a'da verilmektedir. Şeklin iç kısmında farklı q değerleri için faz uzayının

$W = 80 \times 80$ hücreye ayrıldığı durumda entropi artış hızı analizi yer almaktadır. Beklendiği üzere $K = 0.1$ parametresi için $q_{ent}^{av} = 0$ değerinde sonlu değerli K_q entropi artış hızı elde edilmektedir. Optimum q değerinin tespitinin ardından entropi artış hızı analizlerinde faz uzayını hücrelere ayrıma ve bu hücrelerden bazıları üzerinden ortalama alma işleminin etkilerini göstermek adına $< S_{q=0}(t) >_{N_c}$ farklı hücre sayısı ve N_c değerleri için hesaplanmıştır. $W = 20 \times 20$ hücreye ayrılan faz uzayından seçilen ve üzerinden ortalama alınan, $N_c = 1$, (6,13) hücresinin seçildiği hesaplama ile uyumlu olması açısından daha yüksek çözünürlüklü hücrelemenin kullanıldığı analizlerde bahsi geçen hücreyi tamamen kapsayacak şekilde alt hücreler oluşturulmuş ve böylece $W = 40 \times 40$ için $N_c = 4$, $W = 80 \times 80$ için ise $N_c = 16$ hücre üzerinden ortalama alınarak $< S_{q=0}(t) >_{N_c}$ hesaplanmıştır. Kullanılan bu yöntem ile entropi hesabındaki dalgalanmaların azaldığı, $< S_{q=0}(t) >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı değişiminde doyum bölgesi ile geçici davranış bölgesi arasında yer alan orta ölçeklenme bölgesinin artan faz uzayı hücre sayısı ile daha geniş zaman aralığına yayıldığı görülmektedir. $K = 0.1$ parametresi için başlangıç koşullarına duyarlık ve entropi artış hızı istatistiksel karakterizasyon yöntemlerinden tespit edilen q indisleri için $q_{sen}^{av} = q_{ent}^{av} = 0$ olduğu ve bu durumun da web map için q-genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığına işaret ettiği sonucuna varılır. Daha önce standard map için yapılan hesaplamalarda da olduğu üzere web map için de genelleştirilmiş Lyapunov üsteli değeri ile entropi artış hızı değerinin eşit olmadığı, $K_{q_{ent}^{av}} \neq \lambda_{q_{sen}^{av}}$, gözlemlenmiştir.

Web map faz uzayının sadece kuvvetli kotik deniz tarafından işgal edildiği ekstrem $K = 5$ parametresi için entropi artış hızı incelemeleri Şekil 30.b'de verilmektedir. Farklı q değerleri için $< S_q(t) >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı davranışının $W = 10^6$ hücre sayısı için verildiği şeklin iç kısmında zamana lineer bağlılığın BG istatistiğinin bu kuvvetli kaotik rejim için geçerli istatistik tanımı olduğunu belirterek $q_{ent}^{av} = 1$ değerinde gözlemlendiği görülmektedir. Farklı faz uzayı hücre sayıları için $< S_{q=1}(t) >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı davranışının incelendiği şekilde doyum bölgesi ile geçici bölge arasında yer alan orta ölçeklenme bölgesinin eğimi yani entropi artış hızı değeri $K_{q_{ent}^{av}=1} = 0.96 \pm 0.01$ olarak belirlenmiştir. Bulunan bu değer ile duyarlık fonksiyonu hesabından elde edilen standart Lyapunov üsteli değeri arasında $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 0.96 \pm 0.01$ ilişkisi olduğu ve $q_{ent}^{av} = q_{sen}^{av} = 1$ için genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin geçerli olacağı sonucuna varılır. Şekil 30.b'de doyum bölgesi için entropi değerleri analitik sonuç olan $S_{q=1}(\infty) = \ln W$ ile uyumludur. Ayrıca $K = 3.5$ parametre değeri için faz uzayında yer alan kaotik deniz içerisine gömülü yörüngeler üzerinden yapılan entropi artış hızı hesaplamalarında daha yüksek hassasiyetli faz uzayı hücrelere ayırma prosedürü ve daha

uzun zaman aralığı kullanılarak orta ölçeklenme bölgesinin eğim değerinin $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 0.68 \pm 0.01$ eşitliğini sağladığı tespit edilmiştir (Ruiz vd., 2017b).



Şekil 30. Web mapin; (a) $K = 0.1$ parametresi için farklı faz uzayı hücre sayılarında aynı faz uzayı alanını kapsayacak şekilde oluşturulan bir özel hücre üzerinden ortalamaların alındığı $< S_{q=0} >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı değişimi, (b) $K = 5$ parametresi için tüm faz uzayı üzerinden farklı hücre sayıları kullanılarak hesaplanan $< S_{q=1} >_{N_c}$ niceliğinin zamana bağlı değişimi. Her iki şeklin de iç kısımlarında entropi artış hızı için zamana lineer bağlılığın elde edildiği q değerini tespitine yönelik analizler yer almaktadır.

3.4 Genelleştirilmiş Standard Map Üzerinde İncelemeler

Giriş ve Literatür Özeti bölümünde fizik disiplinindeki çeşitli kullanım alanlarından bahsedilen standard mapin bu çalışma kapsamında ilk defa tanımladığımız iki adet genelleştirilmiş formu için olasılık dağılımı davranışları araştırılmaktadır. Geniş bir uygulama alanına sahip standard map için tanımlanan bu iki genelleştirmeyle karmaşık fiziksel sistemlere daha gerçekçi model sağlanacağı düşünülmektedir. Her iki genelleştirme de zorlanmış dönücü sistemi olan standard mapte dönücünün zorlanmasındaki genliği farklı şekillerde değiştirmektedir. Alan-korunumlu özelliğin korunduğu iki sistem için yapılan sayısal incelemeler iki alt başlıkta ayrı ayrı verilecektir.

3.4.1 Birinci Tip Genelleştirilmiş Standard Map

Denklem 26 ile verilen standard mapin doğrusal olmayan davranış sergilemesine neden olan trigonometrik fonksiyon terimi yerine bir trigonometrik fonksiyon serisi teriminin kullanıldığı birinci tip genelleştirilmiş standard map x ve p için modülo 2π alınacak şekilde;

$$p_{i+1} = p_i - K\sum_{j=1}^{W}\sin(jx_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + p_{i+1} \tag{35}$$

olarak tanımlanmıştır. $W = 1$ ile standard mapi de kapsayan bu genelleştirilmiş form için $K = 0.2$ ve $K = 0.6$ parametre değerlerinde, $W = 2$, $W = 3$ ve $W = 50$ sistemlerinde faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri ve olasılık dağılımları araştırılmaktadır (Cetin ve Tirnakli, 2019).

Yukarıda bahsi geçen W değerleri için faz uzaylarının tamamından rastgele seçilen $M = 10^6$ adet başlangıç koşulu için $T = 5 \times 10^6$ iterasyon uygulanarak faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri Benettin algoritması (Benettin vd., 1980) kullanılarak yapılmaktadır. Bu algoritma kullanılarak yapılan sayısal hesaplamalarda kullanılan Lyapunov üsteli için denklem, olasılık dağılımlarında yapılan çeşitli gözlemleri açıklamakta yardımcı olacak terimler içerdiğinden bu kısımda verilmektedir. Başlangıçta birbirine komşu olan iki yörünge noktası (x_a,p_a) ve (x_b,p_b) arasındaki mesafeler;

$$x_b = x_a + \Delta_x^{(0)}$$
$$p_b = p_a + \Delta_p^{(0)} \tag{36}$$

$\Delta_x^{(0)} = \Delta_p^{(0)} = 10^{-8}$ olacak şekilde sistemin rastgele seçilen başlangıç koşullarının her birinden evrilmesine izin verilmiş ve Lypunov üsteli;

$$\lambda = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\ln\left(\frac{\sqrt{\left(\Delta_x^{(i)}\right)^2 + \left(\Delta_p^{(i)}\right)^2}}{\sqrt{2}\Delta_x^{(0)}}\right) \tag{37}$$

ifadesinden yararlanarak hesaplanmıştır. Denklem 37 ile verilen ifadede kesrin payında yer alan köklü ifade, *i*. iterasyon adımında başlangıçta komşu olan yörüngeler arasındaki Öklid mesafesini (d) belirtmektedir.

$W = 1$ senaryosunun standard mape karşılık geldiği hatırlanırsa, daha önce bu sistemin çeşitli parametre değerleri için olasılık dağılımlarının araştırıldığı incelemelere paralel olarak Denklem 12 ile verilen mapin iterasyonları toplamı niceliğinin olasılık dağılımı $W = 2$, $W = 3$ ve $W = 50$ senaryoları için $K = 0.2$ ve $K = 0.6$ parametre değerlerinde faz uzaylarının tamamından rastgele seçilen $M = 2 \times 10^7$ adet başlangıç koşulu için $T = 2^{22}$ iterasyon adımı kullanılarak araştırılmaktadır. W değerine bağlı olarak elde edilen olasılık dağılımlarının değişiminin net bir şekilde ortaya konması amacıyla $W = 1$ senaryosu da aynı sayısal analiz parametreleriyle incelenmektedir. Olasılık dağılımları Denklem 14 ile verilen dağılım

fonksiyonu ve ilgili limit dağılımın normalizasyon sabiti Denklem 15'ten elde edilerek sayısal olarak araştırılmaktadır. Genelleştirilmiş standard map için faz uzayları, faz uzaylarının Lyapunov üsteli ile tasviri ve elde edilen olasılık dağılımları W genelleştirme terimindeki artış ile sistemde meydana gelen değişimleri ortaya koymak adına $K = 0.2$ parametreli inceleme Şekil 31'de, $K = 0.6$ parametreli inceleme ise Şekil 33'te bir bütün halinde verilmektedir. Lyapunov renk haritalarında $M = 10^6$ adet başlangıç koşulu kullanımı ve grafiğin elde edildiği Matlab programında kullanılan nokta büyüklüğü nedeniyle bazı küçük kararlılık adaları az sayıda nokta ile tasvir edilmiştir. Bu durum bir hesap ya da gözlem hatası olmamakla beraber grafik ile ilgili bir durumdur.

Şekil 31'e bakıldığında artan W genelleştirme terimiyle kaotik davranışın faz uzayında daha geniş alanlara yayıldığı gözlemlenmektedir. Buradan genelleştirme terimindeki artışın, kararlılık adalarının rezonans ile bozularak kaotik davranışın oluşması davranışının orijinal standard mape göre daha küçük parametre değerlerinde ortaya çıkmasını sağladığı sonucuna varılır. K map parametresi sabit kalırken genelleştirme ifadesindeki toplama eklenen terim sayısındaki artışla sistemin integrallenemezliğinin artışı kararlı yörüngelerin rezonansla bozulmalarını sağlamaktadır. KAM teoremi uyarınca periyodik veya yarı-periyodik olan kararlı yörüngeler, dolanım sayılarına (winding number) bağlı olarak integrallenemezlik artarken farklı zamanlarda bozulmaktadırlar (Schuster, 2005). Standard map ve web mapte görülmeyen şekilde tanımladığımız genelleştirme ile faz uzayının birbirinden KAM torusları ile ayrılmış olan farklı bölgelerinde kaotik davranışın birbirinden bağımsız olarak ortaya çıkabildiği gözlemlenmiştir. Şekil 31'de $W = 2$ senaryosu için elde edilen Lyapunov üsteli renk haritasına bakıldığında faz uzayında farklı kaotikliğe sahip iki bölgenin kararlılık adalarıyla birlikte faz uzayında bulunabildiği görülmektedir. Maksimum Lyapunov üsteli değerlerinin birbirinden farklı olmasıyla farklı kaotikliğe sahip oldukları çıkarımında bulunulan bu iki kaotik denizin ortaya çıkışları yukarıda bahsi geçen rezonans durumunun orijinal sistemden farklı olarak genelleştirme terimindeki toplama eklenen terimlerin etkisiyle farklı dolanım sayılarına sahip kararlılık adaları takımlarını pertürbe etmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bilgimiz dâhilinde bu tipte bir davranış ilk defa bu genelleştirme ile gözlemlenmektedir. $W = 2$'den daha büyük genelleştirme terimleri için daha çok kararlı yörüngenin bozulmasıyla kaotik davranış faz uzayının daha geniş alanına yayılmış ve en sonunda orijinal standard map açısından oldukça küçük olan parametre değerinde faz uzayının tamamının tek bir kaotik deniz tarafından domine edildiği görülmüştür.

$K = 0.2$ parametreli incelemede elde edilen olasılık dağılımlarına bakıldığında beklendiği üzere $W = 1$ senaryosu için $q_{stat} \simeq 1.935$ olan tek bir q-Gaussiyenin elde edildiği

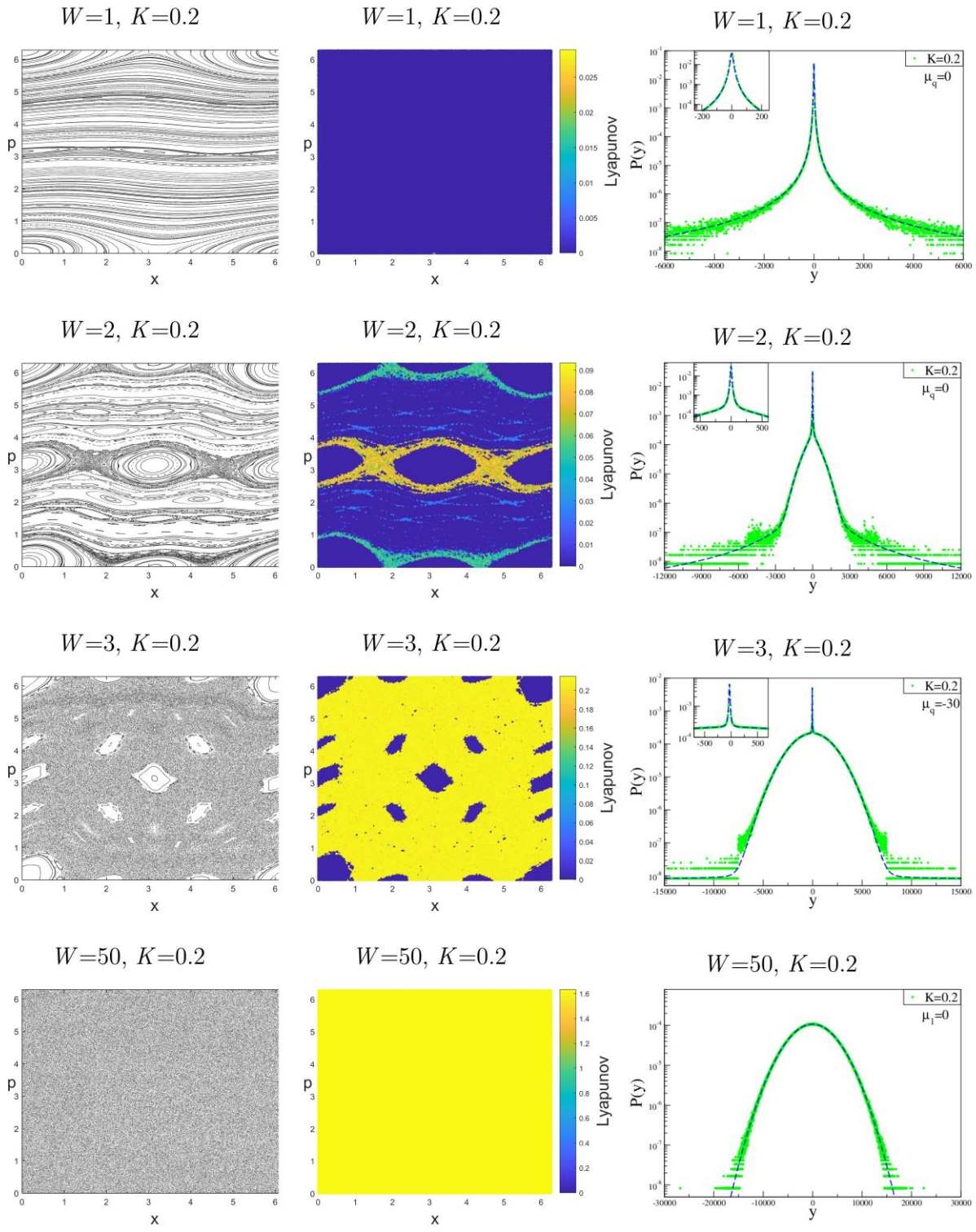
görülmektedir. $W = 2$ genelleştirmesi için elde edilen olasılık dağılımı ise faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasvirinde ortaya konan farklı kaotikliğe sahip iki kaotik denizin ve kararlılık adalarının etkilerini yansıtacak şekilde iki adet Gaussiyen ve bir adet *q*-Gaussiyenin bir lineer kombinasyonu olarak elde edildiği görülmektedir. Yapılan sayısal hesaplamalarla bu üç bileşenli olasılık dağılımının genel olarak

$$P(y) = \alpha_{q_1} P_{q_1}(y; \mu_{q_1}, \sigma_{q_1}) + \alpha_{q_2} P_{q_2}(y; \mu_{q_2}, \sigma_{q_2}) + \alpha_{q_3} P_{q_3}(y; \mu_{q_3}, \sigma_{q_3}) \qquad (38)$$

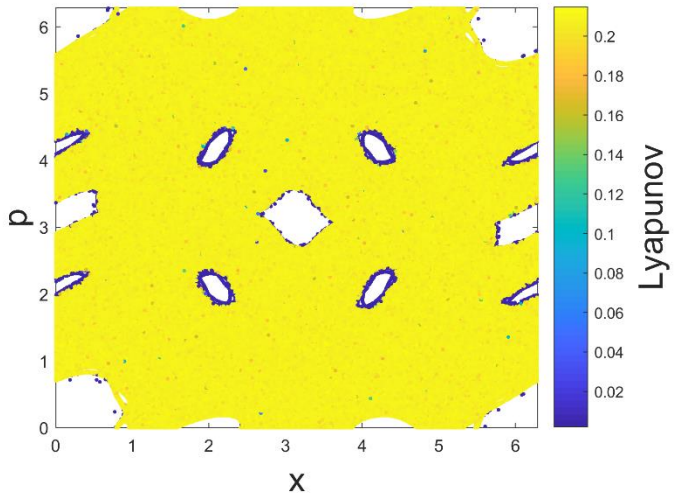
formunda olduğu ve $\alpha_{q_1} + \alpha_{q_2} + \alpha_{q_3} = 1$ sağlandığı görülmüştür. Ele alınan senaryo için böylece Denklem 38'de yer alan alt indisler $q_1 = 1.935$, $q_2 = 1$ ve $q_3 = 1$ olarak elde edilmiş olunur. İfadede yer alan α_{q_2} ve P_{q_2} ile α_{q_3} ve P_{q_3} iki farklı kaotik denizin her birinden seçilen başlangıç koşulları için elde edilen limit davranışların sırasıyla faz uzayı işgal oranlarını ve elde edilen olasılık dağılımlarını belirtmektedir. İki kaotik denizin ve kararlılık adalarının faz uzayları işgal oranları Lyapunov üsteli renk haritasında yer alan noktalar üzerinden oran belirlenerek tespit edilmiştir. İki Gaussiyen ve bir *q*-Gaussiyen dağılımın birlikte gözlemlendiği sonuçların bir diğer ilgi çekici yönü de kararlılık adaları takımından seçilen başlangıç koşulları için *q*-Gaussiyen dağılımda $q_{stat} \simeq 1.935$ değerinin sayısal olarak tespit edilmesidir.

$W = 3$ genelleştirilmiş sisteminin elde edilen Lyapunov üsteli renk haritasında tek bir kaotik denizin kararlılık adaları ile birlikte bulunduğu Şekil 31'de görülmektedir. Bu gözlemden hareketle elde edilecek olasılık dağılımlarının orijinal standard map için daha önceki incelemelerde de olduğu üzere bir adet Gaussiyen ve bir adet *q*-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu olarak elde edileceği düşünülebilir. Ancak bu senaryo için elde edilen olasılık dağılımı üzerinde yapılan sayısal analizlerde tıpkı $W = 2$ senaryosunda olduğu gibi ikinci bir Gaussiyen dağılımın düşük bir katkı ile olasılık dağılımında yer aldığı görülmüştür. Bu ikinci Gaussiyen dağılıma neden olan başlangıç koşulları takımı, Lyapunov renk haritasının renk ölçeğindeki hassasiyetten dolayı Şekil 31'de ayırt edilememektedir. Bu nedenle de bahsi geçen bu başlangıç koşullarının hem görsel olarak ayrılması hem de faz uzayı işgal oranlarının tespitinde kullanılan incelemeye dair renk haritası Şekil 32'de verilmiştir. Şekil 32'den de görüldüğü üzere kararlılık adaları içerisinde yer alan ve kararlı yörüngelerin bariyer görevi görerek kaotik denize karışması engellenen "kaotik kolyeler" istatistiksel olarak küçük bir oranda da olsa olasılık dağılımına Gaussiyen fonksiyonu formunda bir katkıda bulunmuşlardır. Faz uzayının tamamının tek bir kuvvetli kaotik deniz tarafından işgal edildiği $W = 50$ senaryosu için ise beklendiği üzere elde edilen olasılık dağılımının bir Gaussiyen formunu sergilediği görülmektedir. Şekil 31'de yer alan olasılık dağılımlarının Denklem 14 ve Denklem 38 ile

belirlenen ilgili parametreleri Tablo 5'te verilmektedir. Başka *W* değerleri için de bu üç bileşenli dağılımın varlığını sürdürdüğü yapılan sayısal analizlerle görülmüştür (Cetin ve Tirnakli, 2019).



Şekil 31. Birinci tip genelleştirilmiş standard mapin $K = 0.2$ map parametre değerinde çeşitli *W* değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun).



Şekil 32. $K = 0.2$ parametreli $W = 3$ genelleştirilmiş standard mapin elde edilen olasılık dağılımında iki Gaussiyen dağılımın ortaya çıkmasına neden olan farklı kaotikliğe sahip faz uzayı bölgelerinin Lyapunov renk haritası ile ayrımı.

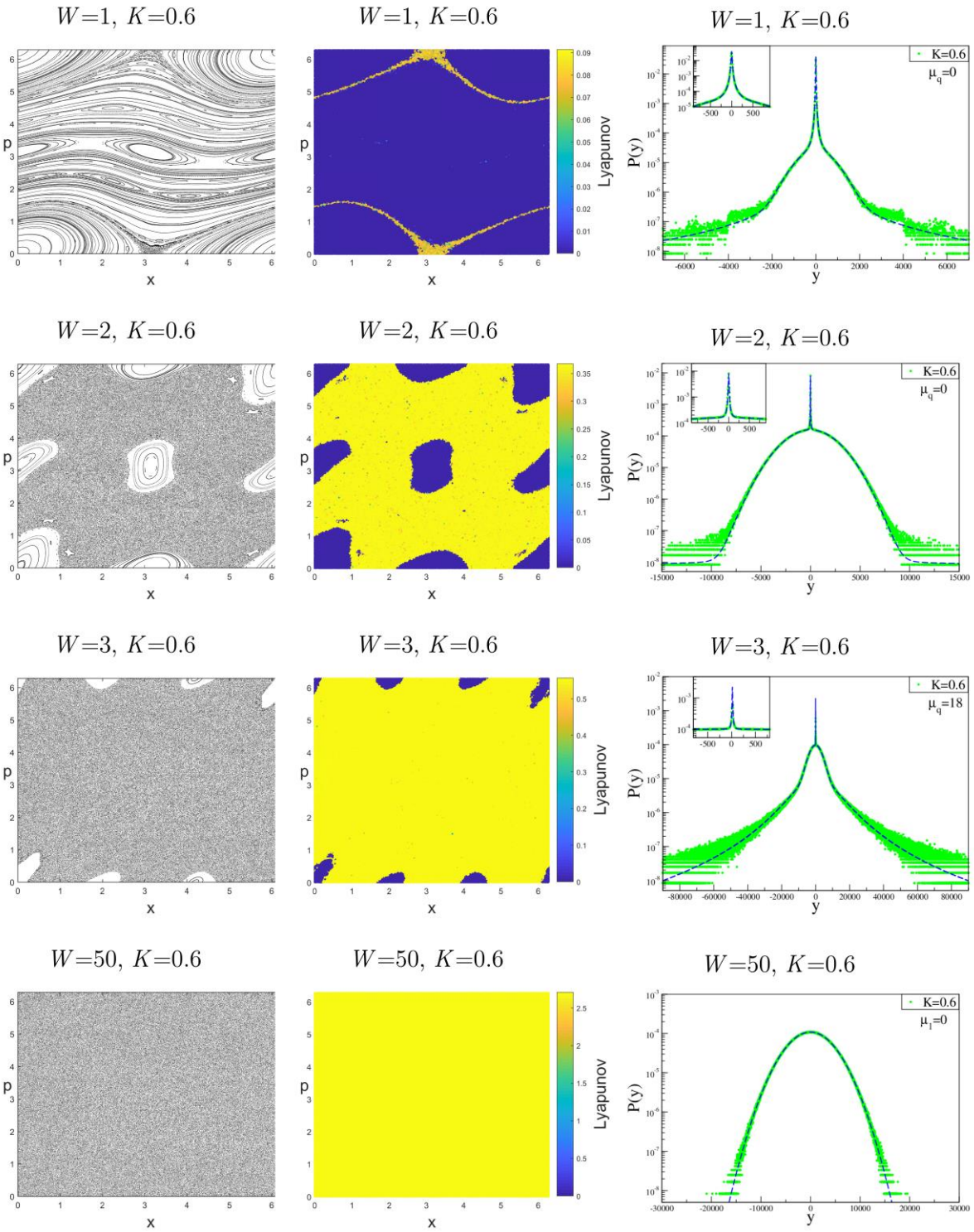
Tablo 5. Şekil 31'de $K = 0.2$ parametreli analizler için elde edilen olasılık dağılımları ile ilgili parametreler.

$A_{q=1.935} = 0.3364\ldots$, $A_{q=1} = 0.5642\ldots$

	$W = 1$	$W = 2$	$W = 3$	$W = 50$
q_1	1.935	1.935	1.935	1
q_2	–	1	1	–
q_3	–	1	1	–
α_{q_1}	1	0.8	0.119	1
α_{q_2}	–	0.14	0.878	–
α_{q_3}	–	0.06	0.003	–
B_{q_1}	0.015	0.015	0.0158	3.63×10^{-8}
B_{q_2}	–	1.2×10^{-6}	1.81×10^{-7}	–
B_{q_3}	–	4.9×10^{-6}	2×10^{-11}	–

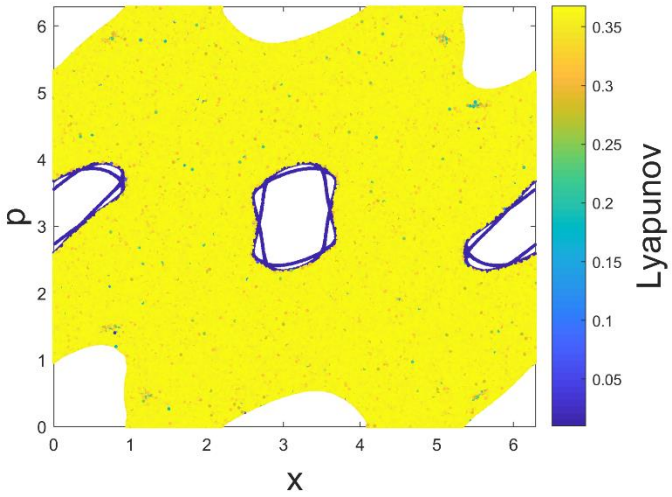
Denklem 35 ile tanımladığımız birinci tip genelleştirilmiş standard mapin limit davranışlarına dair yapılan çalışmanın ikinci aşamasında $K = 0.6$ map parametresi için elde edilen sonuçlar Şekil 33'te verilmektedir. Bu şekle bakıldığında Şekil 31'de $K = 0.2$ parametreli incelemeyle uyumlu şekilde artan W değeriyle kaotik davranışın faz uzayında daha geniş alanlara yayıldığı gözlemlenmektedir. Faz uzayındaki bu gözlemi elde edilen Lyapunov üsteli renk haritaları da desteklemektedir. W genelleştirme terimleri için faz uzaylarının tamamından rastgele seçilen başlangıç koşulları için elde edilen olasılık dağılımları zengin istatistiksel gözlemler sunmaktadır. İncelenen tüm W genelleştirme terimleri için kararlılık adalarından seçilen

başlangıç koşulları için limit dağılımın bir $q_{stat} \simeq 1.935$ ile q-Gaussiyen olarak elde edildiği görülmektedir. Bu oldukça önemli gözlemin yanı sıra $W = 2$ ve $W = 3$ sistemleri için Denklem 38 ile verilen üç bileşenli olasılık dağılımı yapısının varlığı gözlemlenmektedir.



Şekil 33. Birinci tip genelleştirilmiş standard mapin $K = 0.6$ map parametre değerinde çeşitli W değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütün), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütün).

$K = 0.6$ parametre değerli $W = 2$ senaryosu için elde edilen olasılık dağılımının Denklem 38 ile verilen üç bileşenli formda iki Gaussiyen ve bir $q_{stat} \simeq 1.935$ değerli q-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu olarak elde edildiği görülmektedir. Aynı genelleştirme terimi için $K = 0.2$ parametre değerinde sayısal olarak tespit edilen olasılık dağılımıyla benzer olarak elde edilen bu davranışta, dağılımda ikinci Gaussiyen dağılımın yer alması konusunda katkıda bulunan başlangıç koşullarını ortaya koymak için Lyapunov renk haritasında yapılan yeniden düzenleme Şekil 34'te yer almaktadır. Şekilden de görüldüğü üzere kararlılık adaları içerisinde kaotik kolyeler yer almaktadır. Bu kaotik kolyelerin olasılık dağılımına yaptıkları katkı küçük bir oranda olsa da istatistiksel olarak etkin bir katkıdır ve böylece mapin iterasyonları toplamının sergilediği limit davranışa üçüncü bir dağılımın eklenmesine neden olmaktadır.



Şekil 34. $K = 0.6$ parametreli $W = 2$ genelleştirilmiş standard mapin elde edilen olasılık dağılımında iki Gaussiyen dağılımın ortaya çıkmasına neden olan farklı kaotikliğe sahip faz uzayı bölgelerinin Lyapunov renk haritası ile ayrımı.

Şekil 33'te $W = 3$ sistemi için elde edilen olasılık dağılımı oldukça ilginçtir. Bu senaryo için elde edilen faz uzayına ve Lyapunov üsteli renk haritasına bakıldığında bir adet kuvvetli kaotik deniz ile çeşitli kararlılık adalarının bulunduğu görülmektedir. Yapılan sayısal analizlerle sistemin faz uzayının tamamından rastgele seçilmiş başlangıç koşulları için elde edilen olasılık dağılımının biri $q_1 \simeq 1.935$ diğeri $q_2 \simeq 1.5$ olan iki adet q-Gaussiyen ve bir adet Gaussiyen dağılımın ($q_3 = 1$) lineer kombinasyonu olarak elde edildiği görülmüştür.

Önceki incelemelerde iki adet Gaussiyen ve bir adet q-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu olarak elde edilen olasılık dağılımlarında ikinci Gaussiyen dağılımı açıklamak için izlenen yol bu senaryo için kullanılamamaktadır. Keza ikinci Gaussiyen dağılım Şekil 32 ve Şekil 34'te de verildiği üzere kaotik kolyelerden ortaya çıkmaktadır. Oysa ki $W = 3$

sisteminin $K = 0.6$ parametreli durumunda ortaya çıkan üçüncü dağılım bir q-Gaussiyen formundadır. Maksimum Lyapunov üsteli değerinin yaklaşık sıfır olduğu kararlılık adalarının Lyapunov renk haritası ile belirlenen faz uzayı işgal oranının, olasılık dağılımının sayısal analizliyle tespit edilen Denklem 38 formunda yer alan α_{q_1} işgal oranıyla aynı olduğu tespit edilmiş ve böylece kararlılık adalarından seçilen başlangıç koşullarının bu çalışma kapsamında ele alınan tüm alan-korunumlu sistemlerde de olduğu gibi $q \simeq 1.935$ değerli q-Gaussiyen limit davranışını sergilediği sonucuna varılmıştır. Elde edilen olasılık dağılımında yer alan Gaussiyen dağılımın ise kuvvetli kaotik rejimde olan ve ergodik şekilde davranan yörünge noktalarından kaynaklandığı önceki kısımlarda ele alınan sistemlerle ortak bir çıkarımdır. Beklenmeyen $q \simeq 1.5$ değerli q-Gaussiyen dağılımı açıklamak için ise yörünge noktalarının faz uzayı dinamiklerine odaklanmak gerekir.

İlk defa bu çalışma ile yaptığımız iki adet q-Gaussiyenin bir Gaussiyen dağılım ile birlikte bulunabildiği üç bileşenli limit davranışı açıklamak için web mapin istatistiksel karakterizasyonunda yapılan gözlemlerden yola çıkılabilir. Önceki bölümlerde hatırlanacak olunursa web mapin kaotik denizi içerisine gömülü olan yapışkan davranış, kaotik denizden seçilen başlangıç koşulları için elde edilen Gaussiyen dağılımı kuyruk bölgelerinde bozmaktadır. Kuyruk bölgesi üzerindeki yapılan incelemeler bu bölgenin bir Gaussiyen olmayan formda seyrettiğini ve Gaussiyen dağılıma oldukça yavaş bir yakınsama sergileyeceğini ortaya koymuştur. Orijinal standard mapte görülmeyen bu yapışkan davranışın tanımladığımız genelleştirme ile ortaya çıkabildiği görülmüştür. $W = 2$ için $K = 0.2$ ve $K = 0.6$, $W = 3$ için $K = 0.2$ senaryolarında ortaya çıkmayan yapışkan davranış $W = 3$ için $K = 0.6$ senaryosunda ortaya çıkmıştır. Burada yukarıda bahsi geçen kararlı yörüngelerin rezonans ile bozulması prosedürünün yapışkan davranışın ortaya çıkmasında etkili olduğu düşünülmektedir. Şekil 33'e tekrar bakılırsa sabit $K = 0.6$ parametresi için artan W değeriyle sistemdeki integrallenemezliğin arttığı ve integrallenemezlikteki artışın KAM toruslarının bozulmasına neden olduğu görülür. Eliptik-hiperbolik noktalar dizgesine bozulmanın gerçekleştiği bu süreçte genelleştirilmiş ifadede yer alan toplam ifadesine sinüs fonksiyonu eklendikçe bahsi geçen noktaların faz uzayı konumları değişmekte (Zaslavsky, 2005) bu da her bir genelleştirilmiş sistemi diğerinden farklı kılmaktadır. Orijinal standard mape tanımladığımız genelleştirme ile terim eklerken aslında faz uzayındaki eliptik ve hiperbolik noktaların dinamiklerini değiştirmiş oluruz. Hiperbolik noktalar etrafında oluşan dolanıkların oluşturduğu karmaşık formlarla doğan kaotik davranışın bu nedenle $W = 3$, $K = 0.6$ senaryosu için yapışkan kaotik yörünge davranışını sergilediği düşünülmektedir. Bu düşünceyi doğrulamak ve Şekil 33'te elde edilen olasılık dağılımının neden Denklem 38 formunda elde

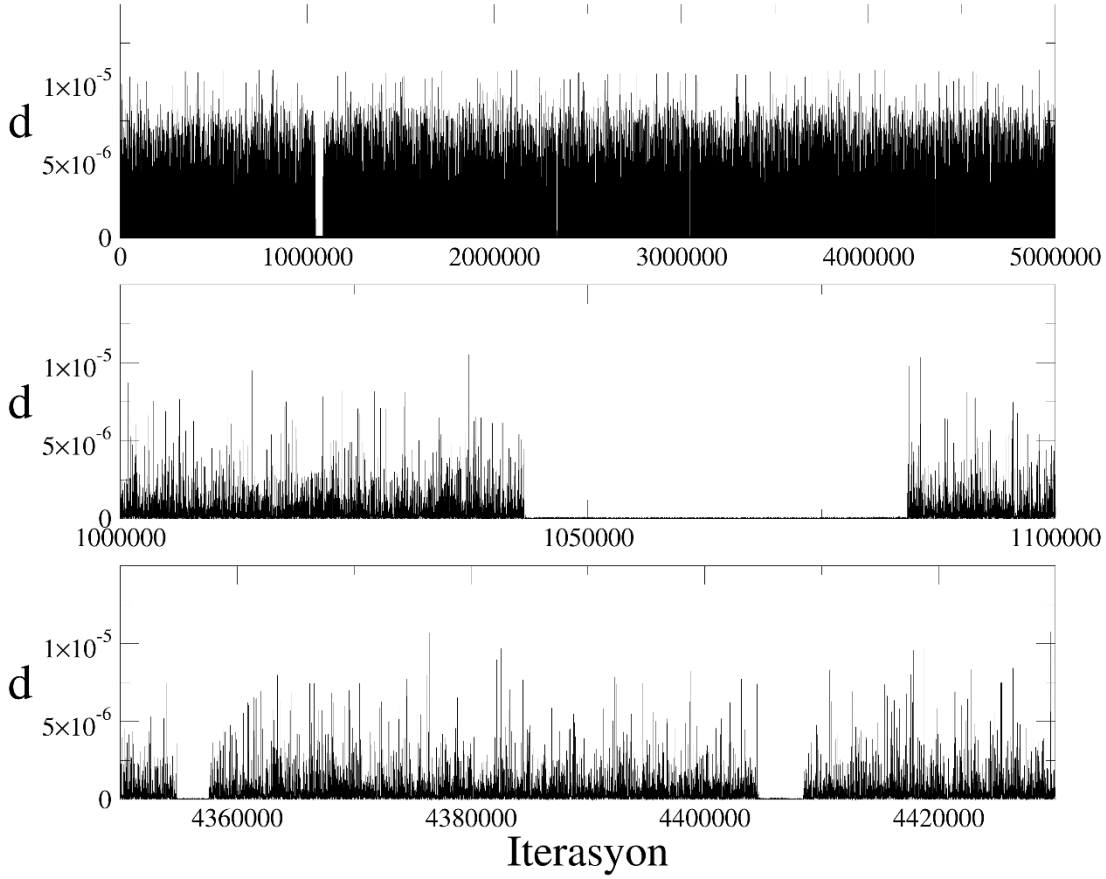
edildiğini açıklamak için kaos teorisi ve ergodik davranış arasındaki bağın teorik temeline inmekte yarar vardır.

Kaotik davranış sergileyen bir yörüngenin en önemli özelliği komşu yörüngelerin birbirinden üstel formda ıraksamasının yanı sıra, bulunduğu faz uzayında kendini tekrar etmeden görünürde rastgele bir yayılım sergilemesidir (Hilborn, 1994). Kaotik yörüngenin davranışı için belirtilen bu özellikler yeterince evrilmesine izin verilen yörüngenin davranışının ergodik olmasını sağlamaktadır. Kararlılık adaları etrafında rezonans ile bozulan eski kararlı yörüngelerin oluşturduğu hiperbolik noktaların kurduğu dolanıklarda kaotik yörüngelerin uzun süreler geçirmesine neden olan yapışkan davranış, yörüngelerin kaotik denizde görünürde rastgele yayılımını belirli ölçülerde etkilemektedir. Şöyle ki, standard mapin önceki bölümlerde de bahsedildiği üzere zorlanmış dönücü sistemini tanımlayan Hamiltoniyen fonksiyonun iteratif hale indirgenmiş formu olduğu hatırlanırsa her bir kararlı yörünge aslında farklı enerjili bir duruma karşılık gelmektedir. Belli bir enerjili başlangıç koşulundan başlayan bir yörünge faz uzayında sadece kendi başlangıç enerjisiyle aynı enerji değerine sahip olan faz uzayı noktalarını ziyaret edebilir. Sistemin Hamiltoniyen fonksiyonu tarafından tanımlanan sabit enerjili torus yüzeylerinde dolanan yörüngelerin Poincaré kesiti tasviri olan standard map için böylece biz iki-boyutlu faz uzayında önceki bölümlerde verilen faz uzayı davranışlarını elde etmiş oluruz. Bu anlatımlarla değinilmek istenen faz uzayında gözlemlenen kaotik denizin aslında tek bir torusun sabit enerji yüzeyinde dolanan yörünge noktaları olduğu ve kaotik denizde yer alan yörüngelerin hepsinin fiziksel olarak aynı enerjiye sahip olduklarıdır. Yapışkan davranış ise sonlu-zamanlı yörüngeler için bu torus yüzeyi üzerinde yerel toplanma bölgelerini işaret eder. Şüphesizdir ki zamanın sonsuz limitinde kaotik davranan yörünge noktaları eninde sonunda torusun yüzeyini tamamen eş olasılıkla kaplayacak ve davranış tam haliyle ergodik olacaktır. Şekil 33'te $W = 3$ için elde edilen faz uzayının kaotik denizinde evrilen sonlu-zamanlı yörüngeler eş enerjili faz uzayı bölgeleri olan yapışkan bölgelere girip belli bir süreyi bu bölgede geçirdikten sonra kaotik denize geri çıkacaklardır ve belirlenemez aralıklarla yapışkan bölgelere girip çıkma davranışı sürecektir.

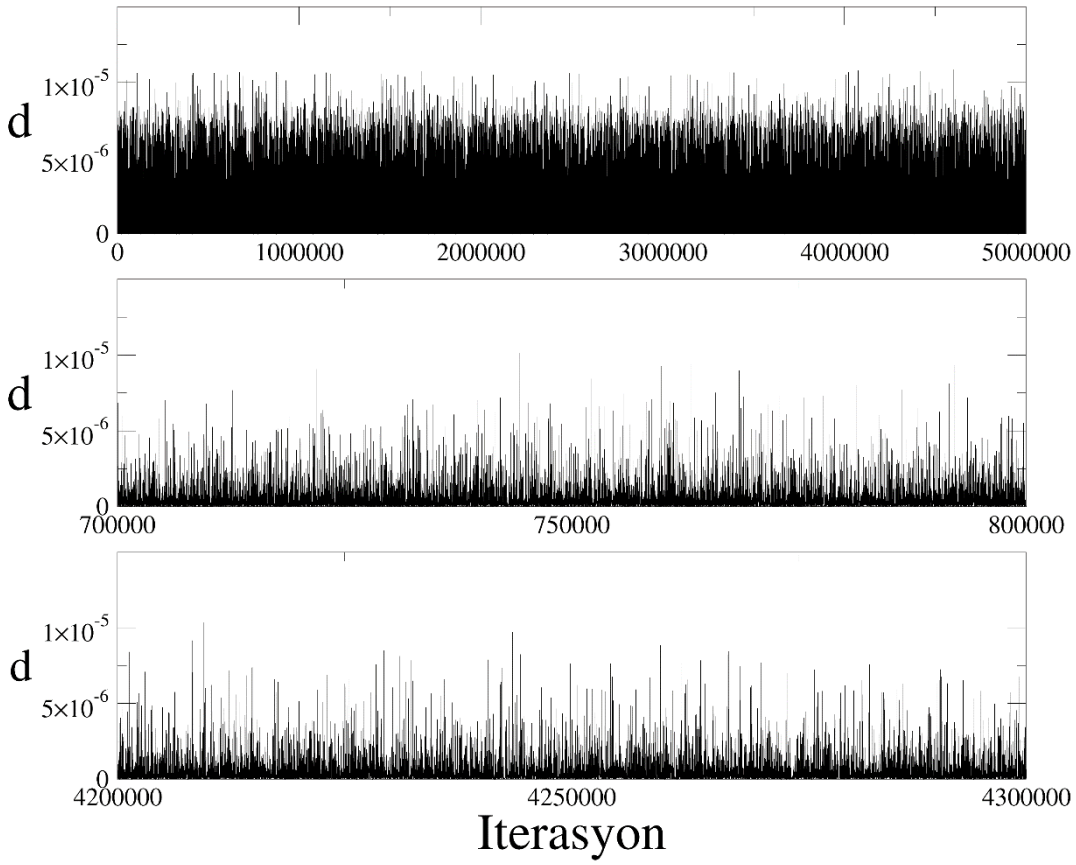
Örneğin Şekil 33'te $W = 3$ için elde edilen faz uzayının $(0,0)$, $(0,2\pi)$, $(2\pi,0)$ ve $(2\pi,2\pi)$ noktaları aslında Denklem 35'te x ve p için alınan modülo 2π nedeniyle tek bir periyot-1 davranışlı eliptik noktaya karşılık gelmektedir. Bu eliptik nokta etrafını saran kararlılık adalarının dışına yapışan kaotik yörüngelerin adanın periyodunu takip eder bir davranış sergiledikleri görülmüştür. Burada kaotik yörüngenin periyodik davranmadığının, sadece yapışkan bölgenin kararlılık adasının etrafını sararken kaotik denizdeki gibi görünürde rastgele davranmayıp kararlılık adasının davranışını takip ettiğinin altını çizmek gerekir. Kaotik denize göre daha sıkışık bir

alanda evrilmesi gereken kaotik yörüngeler birbirlerinden üstel formda ıraksama davranışını sürdürürler, ancak başlangıçta komşu olan yörüngelerin zamanla ayrımı kaotik denize oranla daha küçük olmaktadır. Şekil 33'te $W = 3$ için elde edilen olasılık dağılımında ortaya çıkan $q \simeq 1.5$ değerli q-Gaussiyen dağılımı açıklamak için Denklem 37 ile verilen Lyapunov üsteli tanımı üzerinde odaklanılmıştır. İfadede logaritması alınan kesrin payında yer alan d Öklid mesafesi kaotik deniz içerisinden seçilen çeşitli yörüngeler için zamana (iterasyon adımına) bağlı olarak elde edilerek bu mesafenin değişimi incelenmektedir. Şekil 35'te $\Delta_x^{(0)} = \Delta_p^{(0)} = 10^{-8}$ başlangıç ayrımı ile evrilmesine izin verilen ($x = 3.86735$, $p = 6.22683$) başlangıç koşulunun kaotik deniz içerisinde evrilirken d ayrımının oldukça büyük değerler aldığı, buna karşın yörünge noktaları yapışkan bölgeye önceden tespit edilemeyen bir iterasyon adımı ardından girişiyle d mesafesinin radikal bir şekilde düştüğü görülmektedir. Farklı zamanlarda faz uzayı yapışkan bölgelerine girip çıkan yörünge için Benettin algoritması (Benettin vd., 1980) kullanılarak hesaplanan Denklem 37 ile tanımlanan Lyapunov üsteli için, ifadede yer alan logaritma fonksiyonları toplamı nedeniyle yörüngenin kaotik denizde geçirdiği zamanlarda hesaplanan logaritma değerleri yapışkan bölgede hesaplanan değerleri baskılamakta ve bu nedenle de Lyapunov üsteli renk haritalarında kuvvetli kaotik denizle aynı üstel değeri hesap sonucu olarak elde edilmektedir. Bu gözlem yapılan hesaplamanın yanlış olduğuna ya da bazı dinamiklerin göz ardı edildiğine işaret etmez. Doğrusal olmayan dinamik sistemler teorisinde Lyapunov üsteli hesabı yapılırken bir yörüngenin kısa süreli gözlemlerinin yerine uzun süreli gözlemi yapılması ve yörüngenin uzun-dönem davranışını karakterize eden üstel değerinin elde edilmesi doğru bir hesaplamadır (Hilborn, 1994). Ayrıca yapışkan bölgedeki davranışa tek başına bakıldığında Lyapunov üstelinin pozitif değer alacağı sadece pozitifliğinin kaotik denize nazaran küçük olacağı unutulmamalıdır. Sonlu-zamanlı yörüngeler kullanarak yapılan incelemelerde bazı kaotik yörüngelerin diğerlerine göre yapışkan bölgelere daha sık şekilde girip çıktığı ve daha uzun süreler boyunca bu bölgelerde kaldıkları görülmüştür. Bahsi geçen yörüngeler için gözlemlenen bu davranışın yörünge noktasının izinli enerji bölgesinde olasılık dağılımlarını elde etmekte kullanılan iterasyon adımı boyunca ergodik olarak davranmasını engellediği düşünülmektedir. Ayrıca izinli enerji bölgesine hızlı bir şekilde yayılım göstererek karışmışlık özelliğini yansıtması beklenen bu kaotik yörüngelerin, yapışkan bölgelerde uzun süreler kalarak bu özelliği de tam olarak sağlayamadığı sonucuna varılır. Sistemin davranışının ergodik ve karışmış olmadığı durumlarda uygun açıklayıcı istatistik tanımının genelleştirilmiş istatistiksel mekanik tarafından sağlandığı bu çalışma kapsamında yapılan hesaplamalarla ortaya konmuş olduğu göz önünde bulundurularak, yapışkan bölgelerin sistemin ergodikliğini bozarak $q \simeq 1.5$ değerli q-Gaussiyen dağılımın elde edilmesini sağladığı çıkarımında bulunulabilir. Olasılık dağılımı incelemesinde MLT'nin önerdiği üzere zamanın sonsuz limiti alındığında bu davranışın ortadan kalkacağı ve Gaussiyen dağılımın elde edileceği açıktır.

Ancak gerek hesaplama süresi gerekse de standard mapin gerçek fizik problemlerine uygulamalarında bu limitin alınmasının imkansız oluşu göz önüne alındığında yaptığımız Denklem 38 formundaki olasılık dağılımı gözleminin sağlam bir sonuç olacağı sonucuna varılabilir. Şekil 35'te yapışkan bölgelere sık bir şekilde girip uzun süre burada kalan bir yörünge noktası için verilen Öklid mesafesi davranışı Şekil 36'da yapışkan bölgelere izlenen iterasyon adımı boyunca uzun süreli şekilde girmeyen yörüngelere bir örnek oluşturması amacıyla ($x = 3$, $p = 3$) başlangıç koşulu için verilmektedir. Şekilde zaman serisi iki ayrı kısma ayrılarak gösterim de yapılmaktadır. Elde edilen şekle bakıldığında Öklid mesafesinin uzun iterasyon adımı boyunca yapışkan bölgeye çökme sergilemediği görülmektedir. Yukarıda da bahsedildiği üzere bir eş-enerji yüzeyi olan kaotik denizde tüm yörünge noktaları eninde sonunda yapışkan bölgelere uğrayacaktır, ancak Şekil 33'te verilen olasılık dağılımını elde etmekte kullanılan iterasyon adımı boyunca kaotik denizden rastgele seçilen başlangıç koşullarının bu bölgelere uzun süre girmeme veya kısa süreli giriş-çıkış davranışı sergileme ihtimali olduğu Şekil 36'dan net bir şekilde anlaşılmaktadır.



Şekil 35. $W = 3$ ve $K = 0.6$ parametreli birinci tip genelleştirilmiş standard map için kaotik denizden seçilen bir başlangıç koşulunun yapışkan bölgelere giriş-çıkışını temsil eden zamana bağlı yörünge ayrımı gösterimi.



Şekil 36. $W = 3$ ve $K = 0.6$ parametreli birinci tip genelleştirilmiş standard map için kaotik denizden seçilen bir başlangıç koşulu için yörünge ayrımının iterasyona bağlı değişimi.

Şekil 33'te yer alan olasılık dağılımlarının Denklem 14 ve Denklem 38 ile belirlenen ilgili parametreleri Tablo 6'da verilmektedir (Çetin veTirnakli, 2019).

Tablo 6. Şekil 33'te $K = 0.6$ parametreli analizler için elde edilen olasılık dağılımları ile ilgili parametreler.

$A_{q=1.935} = 0.3364\ldots$, $A_{q=1.5} = 0.4501\ldots$, $A_{q=1} = 0.5642\ldots$

	$W = 1$	$W = 2$	$W = 3$	$W = 50$
q_1	1.935	1.935	1.935	1
q_2	1	1	1.5	–
q_3	–	1	1	–
α_{q_1}	0.963	0.19	0.033	1
α_{q_2}	0.037	0.807	0.261	–
α_{q_3}	–	0.003	0.706	–
B_{q_1}	0.015	0.015	0.04	3.7×10^{-8}
B_{q_2}	10.5×10^{-7}	1.16×10^{-7}	7.8×10^{-9}	–
B_{q_3}	–	2×10^{-11}	4.6×10^{-8}	–

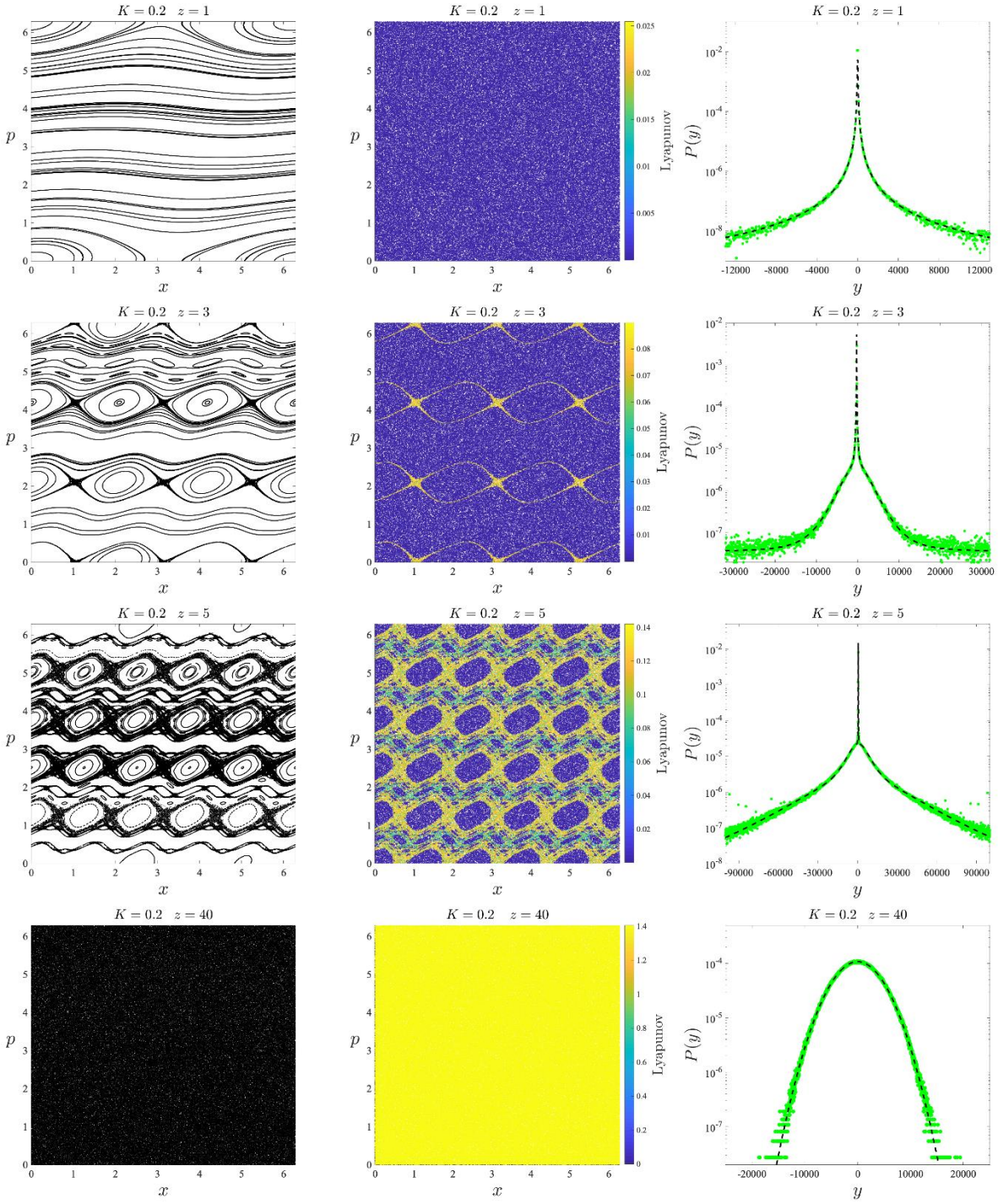
3.4.2 İkinci Tip Genelleştirilmiş Standard Map

Bu çalışma kapsamında standard mapin Denklem 35'le tanımladığımız genelleştirilmesinin yanı sıra ikinci bir genelleştirilmiş sistem için olasılık dağılımı incelemeleri yapılmaktadır. Denklem 26 ile verilen orijinal standard map tanımında trigonometrik fonksiyon üzerinde yeniden düzenlemenin yapıldığı bu geneleştirilmiş sistem alan-korunumlu özelliğini korumaktadır. İkinci tip genelleştirilmiş standard map x ve p için modülo 2π alınacak şekilde;

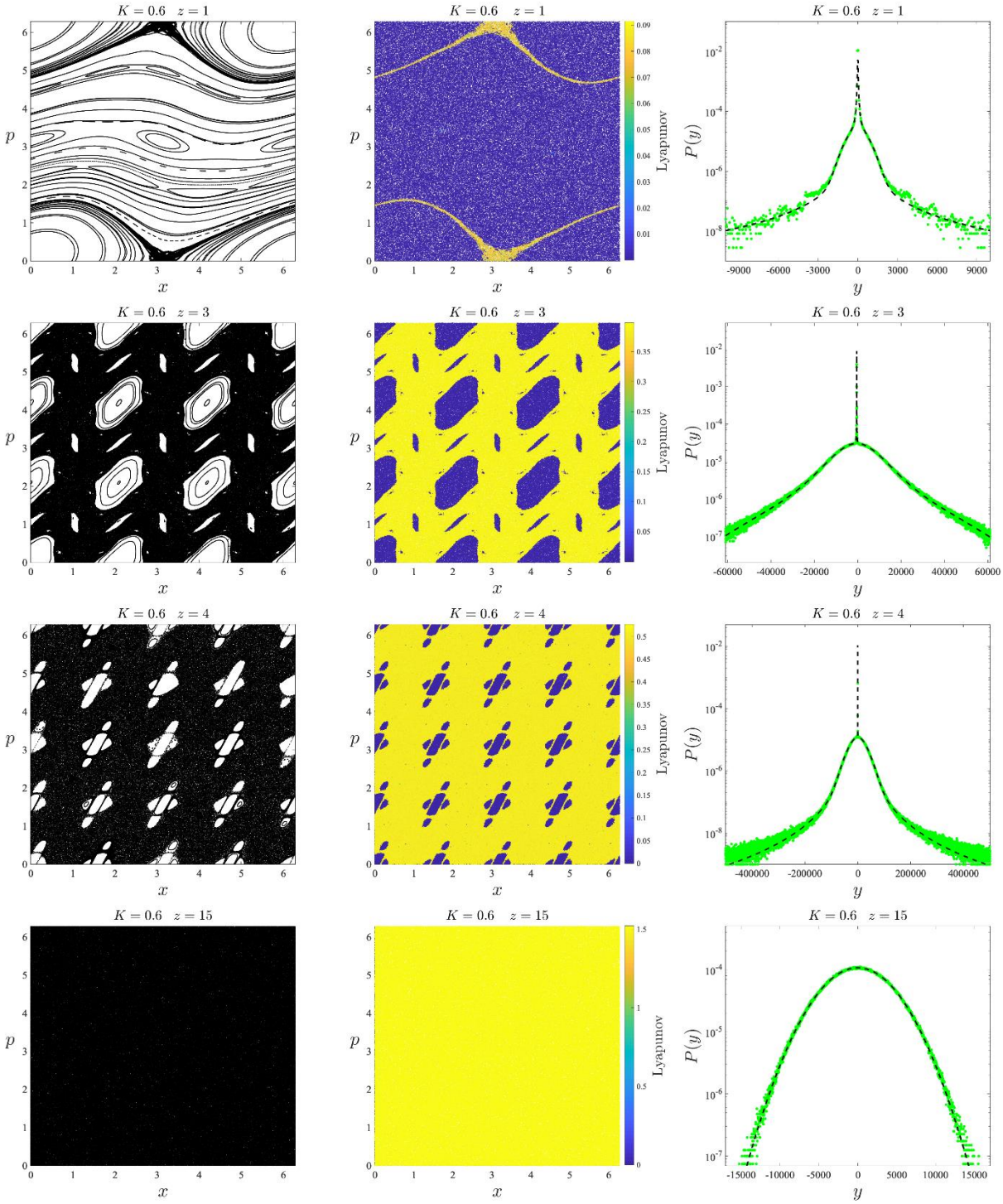
$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - K\sin(zx_i) \\ x_{i+1} &= x_i + p_{i+1} \end{aligned} \tag{39}$$

z bir tamsayı olmak üzere tanımlanmıştır. Bir önceki genelleştirmeye paralel olarak çeşitli z değerleri için $K = 0.2$ ve $K = 0.6$ map parametresi değerlerinde Denklem 12 ile verilen mapin iterasyonları toplamı niceliğinin olasılık dağılımı ve faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri incelenmektedir. $K = 0.2$ için $z = 3$, $z = 5$ ve $z = 40$, $K = 0.6$ için $z = 3$, $z = 4$ ve $z = 15$ sistemlerinde yapılan sayısal hesaplamaların yanı sıra aynı hesaplamalar aynı başlangıç koşulu sayısı ve iterasyon adımı için $z = 1$ ile orijinal standart map üzerinde gerçekleştirilerek z terimindeki artışa bağlı değişimin ortaya konması amaçlanmaktadır (Tirnakli ve Tsallis, 2019).

Yukarıda belirtilen senaryolar için faz uzaylarının tamamından rastgele seçilen $M = 5 \times 10^5$ adet başlangıç koşulu için $T = 5 \times 10^5$ iterasyon uygulanarak faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasviri Benettin algoritması (Benettin vd., 1980) kullanılarak yapılmaktadır. Sayısal hesaplamalarda Denklem 36 ile verilen başlangıçta komşu iki yörünge noktası arasındaki mesafe $\Delta_x^{(0)} = \Delta_p^{(0)} = 10^{-8}$ olarak alınmıştır. Denklem 12 ile verilen y niceliğinin olasılık dağılımlarının araştırıldığı sayısal analizlerde ise faz uzaylarının tamamından rastgele seçilen $M = 3 \times 10^7$ adet başlangıç koşulu için $T = 2^{22}$ iterasyon adımı kullanılmaktadır. Olasılık dağılımları Denklem 14 ile verilen dağılım fonksiyonu ve ilgili limit dağılımın normalizasyon sabiti Denklem 15'ten elde edilerek sayısal olarak araştırılmaktadır. $K = 0.2$ parametreli inceleme için elde edilen sonuçlar Şekil 37, $K = 0.6$ parametreli inceleme için elde edilen sonuçlar ise Şekil 38'de bir bütün olarak verilmektedir. Faz uzaylarının, Lyapunov renk haritalarının ve olasılık dağılımlarının verildiği bahsi geçen şekillerde artan z değeri ile sabit parametre değerinde kaotik davranışın faz uzayının daha geniş bölgelerine yayıldığı görülmektedir. Burada kaotik denizin faz uzayda işgal ettiği bölgenin artışının nedeninin bir önceki bölümde de tarif edildiği üzere genelleştirme terimindeki artışın kararlılık adalarının rezonans ile bozulması prosedüründeki etkisi olduğu düşünülmektedir.



Şekil 37. İkinci tip genelleştirilmiş standard mapin $K = 0.2$ map parametre değerinde çeşitli z değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun).



Şekil 38. İkinci tip genelleştirilmiş standard mapin $K = 0.6$ map parametre değerinde çeşitli z değerli genelleştirilmiş sistemler için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun).

Şekil 37 ve Şekil 38'de verilen olasılık dağılımlarında orijinal standard map ($z = 1$) için elde edilen sonuçlar önceki bölümlerde elde edilen sonuçlarla beklendiği üzere uyumludur. Bahsi geçen şekillerde faz uzayının tamamının tek bir kaotik deniz tarafından işgal edildiği $z = 40$ ve $z = 15$ sistemlerinde beklendiği üzere tek bir Gaussiyen dağılımının elde edildiği

görülmektedir. Geriye kalan olasılık dağılımlarında birinci tip genelleştirilmiş standard map için elde edilen olasılık dağılımlarına benzer olarak Denklem 38 formunda üç bileşenli olasılık dağılımlarının elde edildiği görülmektedir. Bildiğimiz kadarıyla korunumlu sistemlerde ilk defa bu çalışma kapsamında gözlemi yapılan üç bileşenli olasılık dağılımı davranışının bir önceki bölümde detaylı bir şekilde açıklanmasından dolayı bu bölümde Şekil 37 ve Şekil 38'de elde edilen olasılık dağılımları tek tek ele alınarak açıklanmayacaktır. Faz uzaylarının tamamen kararlılık adaları ve tamamen kaotik deniz tarafından işgal edildiği ekstrem durumlar arasındaki senaryolar için elde edilen üç bileşenli dağılımların Denklem 14, Denklem 15 ve Denklem 38 ile belirtilen ilgili parametreleri Tablo 6'da verilmektedir. İkinci tip genelleştirilmiş standard map için sonuçların verildiği bu tabloya bakılacak olunursa $q \simeq 1.935$ değerli q-Gaussiyen dağılımın tüm sistemlerde elde edildiği görülmektedir. Korunumlu sistemler üzerinde bu çalışma kapsamında yapılan sayısal hesaplamalarla da ortaya konduğu üzere maksimum Lyapunov üsteli değerinin yaklaşık sıfır olduğu kararlılık adalarının Lyapunov renk haritası ile belirlenen faz uzayı işgal oranının, olasılık dağılımının sayısal analizliyle tespit edilen Denklem 38 formunda yer alan α_{q_1} işgal oranıyla aynı olduğu tespit edilmiştir. Bu tespit davranışın ergodik olmadığı kararlılık adalarından seçilen başlangıç koşulları için Denklem 12 ile verilen mapin iterasyonları toplamı niceliğinin olasılık dağılımının $q \simeq 1.935$ değerli q-Gaussiyen olarak elde edilmesinin alan-korunumlu maplerde evrensel bir sonuç olduğuna işaret eder (Tirnakli ve Tsallis, 2019).

Tablo 7'de $K = 0.2$ parametre değeri için $z = 3$, $K = 0.6$ parametre değeri için $z = 3$ ve $z = 4$ sistemlerinde Denklem 38 ile verilen olasılık dağılımı ifadesinde bir adet Gaussiyen ve iki adet q-Gaussiyen dağılımın elde edildiği görülmektedir. Birinci tip genelleştirilmiş standard map incelemesinde elde edilen sonuçlarla benzer olan bu gözlemler için, önceki bölümde detaylı bir şekilde yapılan açıklamalar geçerli olmaktadır. Farklı z değerlerine karşılık gelen farklı sistemlerin kararlılık adalarının eliptik-hiperbolik noktalar dizgesine bozulmasını sağlayan rezonansların da farklı olması nedeniyle, her bir sistem kendine has yapışkan bölge özelliklerine sahiptir. Kaotik denizde yer alan yörüngelerden hiperbolik noktalar civarında doğan homoklinik-heteroklinik dolanıkların karmaşık organizasyonuyla oluşan yapışkan bölgelere daha uzun sürelerle ve daha sık şekilde girenlerin Denklem 38 olasılık dağılımı ifadesinde ikinci q-Gaussiyen dağılıma neden olduğu çıkarımı hatırlanacak olunursa; Tablo 7'de yer alan bir adet Gaussiyen ve iki adet q-Gaussiyen dağılımın elde edildiği senaryolarda ikinci q-Gaussiyenin her bir sistem için q değerinin farklı oluşu, bu sistemlerin kendine has olan yapışkan bölge davranışları ile açıklanabilir.

Tablo 7'de $K = 0.2$ parametre değerli $z = 5$ sistemi için sayısal olarak tespit edilen olasılık dağılımı parametrelerine bakıldığında üç adet q-Gaussiyen dağılımın bir lineer kombinasyonu olan limit davranışın elde edildiği görülmektedir. Bu sistem için Şekil 37'de verilen Lyapunov renk haritasına bakıldığında kaotik denizin kararlılık adaları ile sınırlanmadan faz uzayı izinli enerji bölgesine yayılma imkânı olduğu görülür. Bu grafikte yer alan büyük boyutlu kararlılık adaları arasındaki kaotik denizin maksimum Lyapunov üsteli değeri, büyük boyutlu kararlılık adaları dizgeleri arasında yer alan küçük boyutlu kararlılık adaları dizgelerinin etrafını saran kaotik denizde hesaplanan maksimum Lyapunov üsteli değerinden daha büyüktür. Kararlı yörüngeler tarafından bağlantısı kesilmeyen bu bölgeler arasındaki üstel farkı yapışkan bölgelerin varlığından kaynaklanmaktadır. Bu üstel farkı bahsi geçen bölgelerin farklı kaotikliğe sahip olduğuna işaret etmektedir. Bu nedenle daha önce birinci tip genelleştirilmiş standard mapte elde edildiği üzere iki adet Gaussiyen ve bir adet q-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu olan bir olasılık dağılımının sistemin limit davranışını açıklaması beklenebilir. Ancak yapışkan bölgeler Gaussiyen dağılımın elde edilmesini önlemektedir. Şöyle ki; Şekil 37'de ele aldığımız sistemin faz uzayına bakılacak olunursa kaotik denizin izinli enerji bölgesine bir yayılım göstermediği görülmektedir. Kaotik denizdeki bir başlangıç koşulu izinli enerji bölgesine görünürde rastgele bir yayılım göstererek karışmışlık özelliğini sergilemesi beklenirken, bu yörüngenin başka faz uzayı kaotik bölgelerine geçmeden ilk olarak kendi doğduğu yapışkan bölgeyi sardığı görülmektedir. Karışmışlık özelliği sergilenmiş olsaydı faz uzayı için verilen grafikte kaotik yörüngelerin hiç görülmediği kaotik bölgeler gözlemlenmemesi gerekirdi. Bu sistem için özel olarak yapılan incelemelerde oldukça yüksek iterasyon adımları için dahi kaotik denizin tek bir kaotik yörünge tarafından sarılamadığı görülmüştür. Tüm bu anlatımlar ışığında $K = 0.2$ parametre değerli $z = 5$ sisteminde kaotik denizde kaotik yörüngelerin karışmış ve ergodik olmadığı sonucuna varılır. Genelleştirilmiş istatistiksel mekanik davranışın ergodik ve karışmış olmadığı durumlarda uygun açıklayıcı yaklaşım olduğu hatırlanırsa bu sistem için elde edilen olasılık dağılımlarında Gaussiyen dağılım yerine q-Gaussiyen dağılımın elde edilmesi kabul edilebilir bir sonuçtur. Şüphesizdir ki MLT ışığında sonsuz iterasyon adımı uygulanması mümkün olsaydı bu iki q-Gaussiyen dağılım yerine tek bir Gaussiyen dağılımın elde edilmesi beklenirdi. Ancak yine de $q \simeq 1.935$ değerli q-Gaussiyen dağılımın kararlılık adalarından seçilen başlangıç koşulları için bu limitte varlığını sürdürmesinin beklendiğinin altını çizmek gerekir. Gerek bilgisayar hesaplamalarında gerekse de gerçek doğa sistemlerinde bu limite ulaşmak mümkün olmadığından bu sistem için elde edilen sonuçlar sağlamdır. Ergodik ve karışmış olmayan şekilde davranan kaotik yörüngelerin limit davranışının genelleştirilmiş istatistiksel mekanik ile açıklanmış olması da bu istatistiğin önemli bir başarısıdır.

Tablo 7. Şekil 37 ve Şekil 38'de elde edilen olasılık dağılımları ile ilgili parametreler.

$A_{q=1.935} = 0.3364\ldots$, $A_{q=1.61} = 0.4227\ldots$, $A_{q=1.45} = 0.4623\ldots$
$A_{q=1.4} = 0.4743\ldots$, $A_{q=1.35} = 0.4861\ldots$, $A_{q=1} = 0.5642\ldots$

	$K = 0.2$		$K = 0.6$	
	$z = 3$	$z = 5$	$z = 3$	$z = 4$
q_1	1.935	1.935	1.935	1.935
q_2	1.4	1.45	1.35	1.61
q_3	1	1.45	1	1
α_{q_1}	0.963	0.515	0.265	0.114
α_{q_2}	0.025	0.335	0.670	0.314
α_{q_3}	0.012	0.150	0.065	0.571
B_{q_1}	0.015	0.0025	0.01	0.08
B_{q_2}	8.5×10^{-8}	1.65×10^{-8}	8.0×10^{-12}	1.2×10^{-9}
B_{q_3}	3.0×10^{-11}	8.5×10^{-10}	7.0×10^{-10}	5.4×10^{-10}

3.5 Harper Map Üzerinde İncelemeler

Harper map genel olarak deterministik iki-boyutlu alan-korunumlu bir sistemdir ve

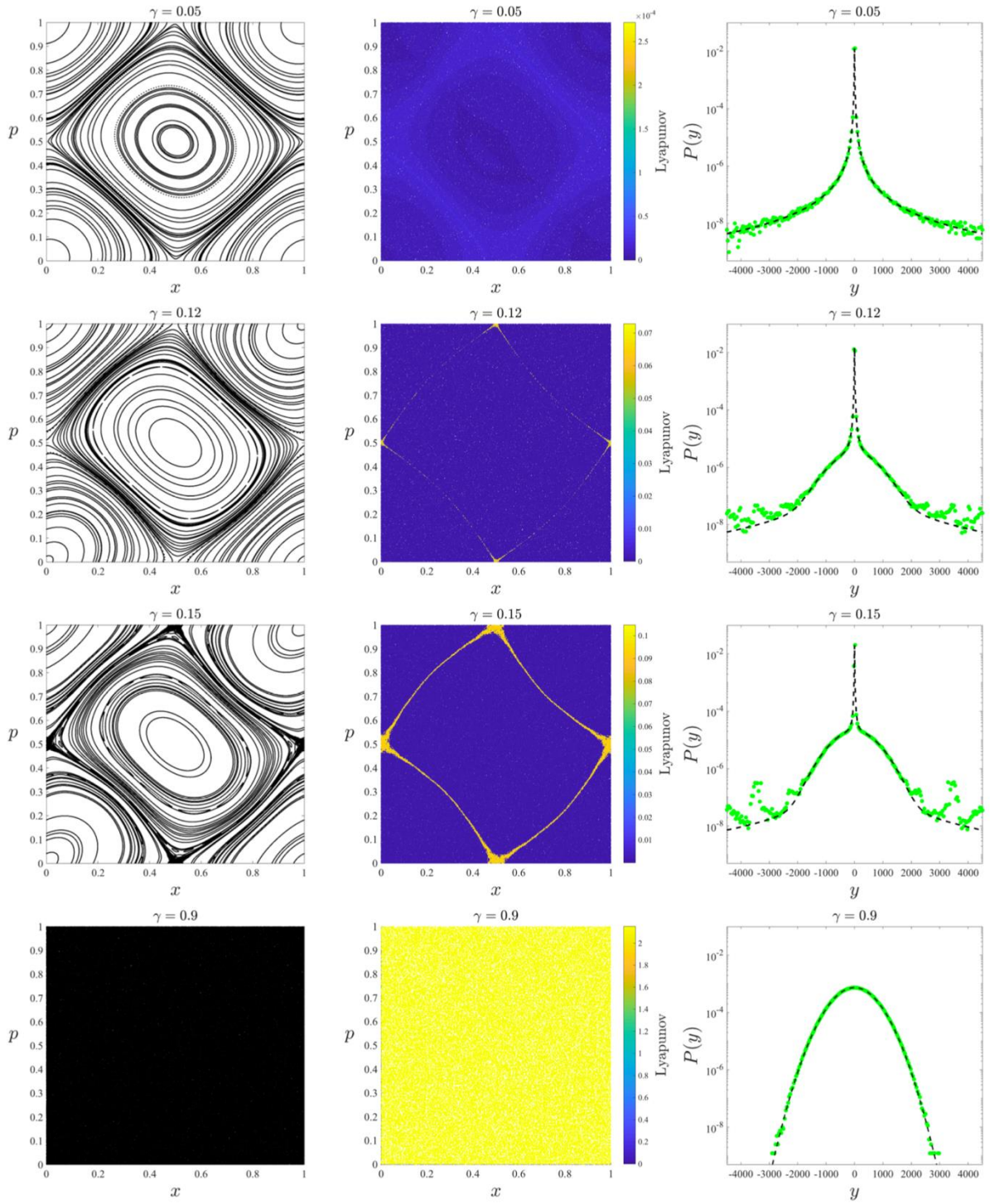
$$H(x,p,t) = -V_2 \cos(2\pi p) - V_1 \cos(2\pi x) K(t)$$
$$K(t) = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \tag{40}$$

şeklinde zamana bağlı bir Hamiltoniyen ile verilir (Leboeuf, 1998). Bu tip Hamiltoniyenlerin karakteristik özelliği, kinetik enerjisinin özel fonksiyonel formudur ve bir tam periyod üzerinden integre edildiğinde hareket denklemleri

$$p_{n+1} = p_n - \gamma_1 \sin(2\pi x_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + \gamma_2 \sin(2\pi p_{n+1}) \tag{41}$$

halini alır, burada $\gamma_i = 2\pi V_i \tau$ ile verilir. Bu map sayesinde elde edilen dinamik, ya tüm faz uzayı bölgesinde ya da temel bölge olan $(x,p) \in [0,1)$ aralığında ele alınabilir. Buradaki incelememizde kolaylık olması açısından $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ özel durumu ele alınacaktır. Bu çalışma kapsamında ele alınan diğer alan-korunumlu sistemlerde olduğu gibi Harper map için de çeşitli γ parametre değerlerinde faz uzayları, bu faz uzaylarının Lyapunov spektrumları ve faz

uzayından rastgele seçilen çok sayıda başlangıç koşulu için Denklem 12 ile verilen *y* niceliğinin olasılık dağılımları araştırılmaktadır.



Şekil 39. Harper mapin çeşitli map parametre değerleri için elde edilen faz uzayları (sol sütun), Lyapunov renk haritaları (orta sütun) ve olasılık dağılımları (sağ sütun).

Bu sistemle ilgili sonuçlar bir bütün olarak Şekil 39'da verilmiştir (Tirnakli ve Tsallis, 2019). İlk sütunda dört farklı γ parametre değeri için faz uzayının yapısı görülmektedir. Küçük parametre değerleri için kaotik bölgenin ortaya çıkmadığı, artan değerlerde bu bölgenin kendini gösterdiği ve yeterince büyük parametre değerlerinde ise tüm faz uzayına hakim olduğu anlaşılmaktadır (Tirnakli ve Tsallis, 2019). Bu durum ikinci sütunda verilen, sayısal hesaplamalarında ilgili faz uzayından rastgele seçilmiş $M = 5 \times 10^5$ adet başlangıç koşulu için $T = 5 \times 10^5$ iterasyon uygulanarak elde edilen Lyapunov spektrumundan da kolayca gözlemlenmektedir. Son sütunda ise ilgili olasılık dağılımları verilmektedir. Olasılık dağılımı analizlerinde $M = 3 \times 10^7$ adet başlangıç koşulu için $T = 2^{22}$ iterasyon adımı kullanılarak hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Davranışın standard map için elde edilen sonuçlar ile aynı olması oldukça ilginçtir. Standard map için kullanılan Denklem 28 burada da aynen kullanılmış ve dağılım genel olarak, bir Gaussiyen ve $q = 1.935$ ile bir q-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu şeklinde elde edilmiştir. Şekil 39'da verilen olasılık dağılımlarının Denklem 28, Denklem 14 ve 15 ifadeleriyle ilgili parametreleri Tablo 8'de verilmektedir.

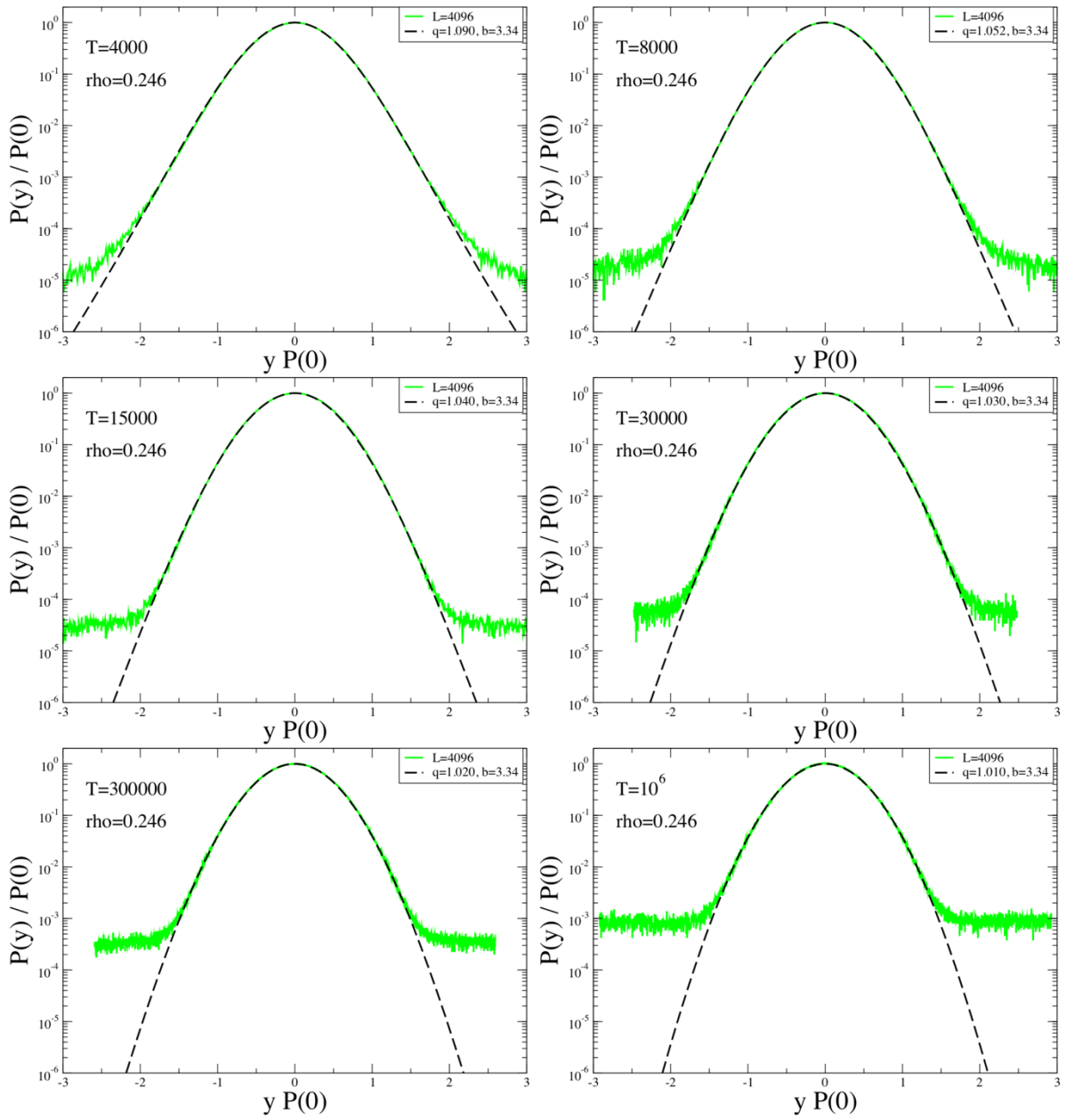
Tablo 8. Harper mapin çeşitli γ değerleri için elde edilen olasılık dağılımlarının ilgili parametreleri.

	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.12$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.9$
q_1	1.935	1.935	1.935	–
q_2	–	1	1	1
α_{q_1}	1	0.996	0.9713	–
α_{q_2}	–	0.004	0.0287	1
B_{q_1}	1.5	1.0	0.6	–
B_{q_2}	–	1.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	6.7×10^{-6}

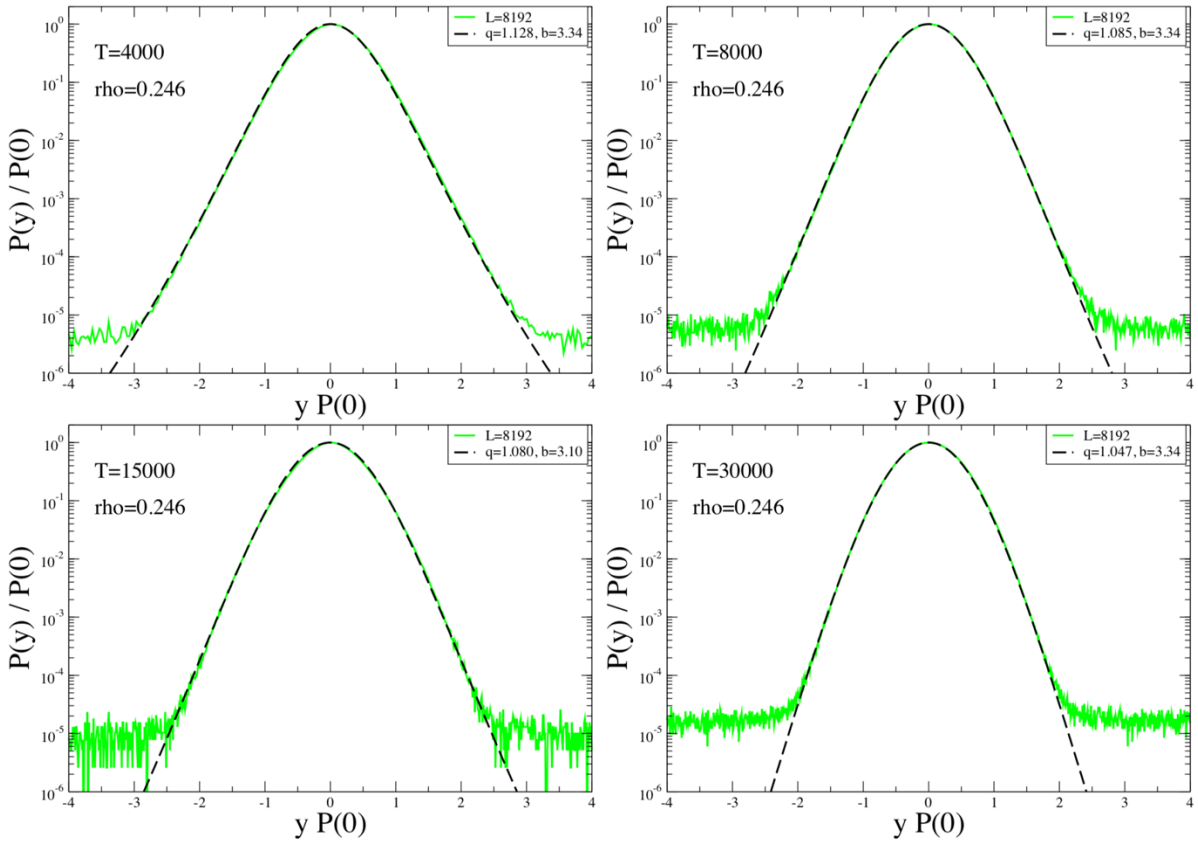
3.6 Deterministik Örgü Gazı Üzerinde İncelemeler

Bu sistem için kritik yoğunluğun $\rho_c \cong 0.245$ olduğu (Giometto ve Jensen, 2012) makalesinde gösterilmiştir. Bu durumda iki farklı sistem büyüklüğü (L) için farklı iterasyon adımlarının (T) kullanıldığı sayısal hesaplamalarla elde edilen olasılık dağılımları Şekil 40 ve 41'de verilmiştir (Tirnakli ve Jensen, 2019). Şekillerin iç kısımlarında analizle ilgili parametre değerleri

verilmektedir. Elde edilen bu sonuçlar, $\rho \to \rho_c$, $L \to \infty$ ve $T \to \infty$ limit durumlarında dağılımın bir q-Gaussiyene gideceği yönündeki savı destekler niteliktedir.



Şekil 40. Deterministik örgü gazı sistemi için $L = 4096$ sistem büyüklüğünde farklı iterasyon değerleri için elde edilen olasılık dağılımları.



Şekil 41. Deterministik örgü gazı sistemi için $L = 8192$ sistem büyüklüğünde farklı iterasyon değerleri için elde edilen olasılık dağılımları.

3. SONUÇ VE TARTIŞMA

Rössler salınıcısının Poincaré kesiti tekniği kullanılarak yapılan analizlerinde, Pesin özdeşliğinin bir q-genelleştirmesinin kaos geçiş eşiğinde geçerli olduğu ve bu kritik noktanın civarında kuvvet yasası formundaki ölçeklenme ilişkilerinin bulunduğu görülmektedir. Rössler salınıcısının her bir değişkeni için yapılan sayısal hesaplamalarda, duyarlık fonksiyonu ve entropi artış hızı için zamana doğrusal bağlılığın aynı özel $q \simeq 0.36$ değerinde gözlendiği ve Pesin özdeşliğinin q-genelleştirmesinin bu q değerinde sağlandığı anlaşılmaktadır. Bilindiği kadarıyla ilk defa bu çalışma ile bir paradigmatik model akış sistemi (Rössler), Poincaré tekniği kullanılarak genelleştirilmiş istatistiksel mekanik çerçevesinde incelenmektedir. Elde edilen q-genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığı, bu istatistik tanımının Boltzman-Gibbs istatistiğinin açıklamakta yetersiz kaldığı zayıf kaotik rejim dinamiklerini başarılı bir şekilde açıklama yetisine sahip olduğuna işaret etmektedir.

Ele alınan Rössler salıcısını bir-boyuta indirgeyerek, sistemin dinamik özelliklerinde kayıplara neden olmayacak şekilde analizleri gerçekleştirmek üzere tasarlanan ve bağımsız

değişkenlerin sinyallerinin maksimum noktalarını toplamak için kullanılan Poincaré tekniği ile elde edilen Poincaré noktalarının bir-boyutlu yitimli unimodal lojistik map ile benzerlik göstermesinden hareketle, bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar lojisitk map için daha önce ortaya konan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 2'de verilen bu karşılaştırmaya bakılacak olunursa sonuçların bu iki sistem için çok iyi bir uyum sergilediği görülmektedir. İki farklı sistem için ölçeklenme ilişkilerindeki bu uyum aynı evrensellik sınıfı davranışının sergilendiğine işaret etmektedir. Ayrıca Tablo 2'ye bakıldığında $\lambda \propto 1/\zeta$ evrensel ilişkisinin de gözlemlendiği görülmektedir. Lyapunov üstelinin bu eğilimi ferromanyetiklerin sergilediği ikinci-dereceden faz geçişlerindeki manyetizasyon gibi bir düzen parametresi rolüne işaret eder.

Rössler salınıcısının diferansiyel denklem setiyle tarif edilen sürekli yapısının bu çalışma kapsamında oluşturulan Poincaré kesiti tekniği ile bir-boyutlu unimodal mapler evrensellik ailesiyle uyum göstermesi oldukça önemli bir sonuçtur. Çok geniş iki sistem ailesinin böyle bir ortak evrensel davranış sergilemesi hem istatistiksel mekanik, hem fizik hem de diğer disiplinlerde bu sistem ailelerine mensup sistemlerin kullanıldığı araştırmalara açıklayıcı ve destekçi olacaktır. Rössler salınıcısının yanı sıra bir astronomi modeli olan Lorenz sistemi gibi daha karmaşık sürekli yitimli dinamik sistemlerde benzer Poincaré kesiti tekniği geliştirildiği durumlar için yapılacak incelemelerde bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçların geçerli ve yol gösterici olması beklenmektedir. Karmaşık akış modellerinde ilk defa ele alınan istatistiksel karakterizasyonlar için geliştirilen ve doğruluğu genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığıyla gösterilen sayısal hesaplama adımlarının, gelecekte akışlar üzerinde araştırmaların yapılacağı çalışmalar için de uygun olduğu düşünülmektedir.

Alan-korunumlu doğrusal olmayan dinamik bir sistem olan standard mapin tam bir istatistiksel karakterizasyonunun yapılmasının hedeflendiği bu çalışmada, standard mapin sergilediği rejime bağlı olarak Boltzmann-Gibbs ve genelleştirilmiş istatistiksel mekanik formalizmlerin geçerlilik alanları net bir şekilde ortaya konmaktadır. Maksimal Lyapunov üstelinin sıfır olması sonucu ergodik ve karışmış olmayan davranış sergileyebilen dinamik sistemlerin istatistiksel karakterizasyonunda önemli rol oynayan *q*-üçlüsünün topluluk ortalamalarının kullanıldığı sayısal analizleriyle standard mapin zayıf ve kuvvetli kaotik rejimlerinin istatistiksel karakterizasyonları yapılmıştır.

İlk olarak faz uzayının tamamen kuvvetli kaotik rejim ve tamamen zayıf kaotik rejim tarafından domine edildiği senaryolar ele alındıktan sonra, bu iki rejimin faz uzayında birlikte gözlenebildiği *K* map parametre değerleri için incelemeler yapılmıştır. Entropi artış hızı, gevşeme hızı ve yaklaşık kararlı durumların dağılımları karakterizasyon yöntemleri için

sırasıyla q_{ent}, q_{rel} ve q_{stat} indisleri, topluluk ortalamalarının kullanıldığı sayısal hesaplamalarla tespit edilmiştir. Büyük bir pozitif sayı Lyapunov üsteli değerinin davranışın ergodik ve karışmış olmasını sağladığı kuvvetli kaotik rejimin standard map faz uzayını tamamen işgal ettiği durum için q-üçlüsü sayısal hesaplamalarla $q_{ent} = q_{rel} = q_{stat} = 1$ olarak elde edilmiştir. Gözlenen bu q-üçlüsü davranışı, bahsi geçen durum için Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğuna işaret eder. Buna karşın ergodikliğin bozulduğu ve mapin iterasyonları arası kuvvetli korelasyonların bulunduğu yaklaşık sıfır Lyapunov üsteli değerine sahip zayıf kaotik rejimde, daha önce düşük-boyutlu yitimli dinamik sistemlerde de ortaya konulduğu üzere, Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olmadığı ve uygun açıklayıcı yaklaşımın genelleştirilmiş istatistiksel mekanik olduğu gösterilmiştir. İstatistiksel karakterizasyon yöntemleri incelemelerinde, bu istatistiksel mekaniğin yapı taşları olan q-entropi, q-eksponansiyel ve q-Gaussiyen tanımlarının sistemin doğru karakterizasyonunu sağladığı görülmektedir. Faz uzayının tamamının zayıf kaotik rejim tarafından işgal edildiği senaryoda $q_{ent} = 0 < 1$, $q_{rel} \simeq 1.4 > 1$ ve $q_{stat} \simeq 1.935 > 1$ değerleri ile q-üçlüsünün tespit edilmiş olması Tsallis (2004) çalışmasında ortaya konan q-üçlüsü koşullarının sağlandığını ortaya koymaktadır. Ayrıca her iki rejim için de sayısal hesaplamalarda başlangıç koşullarına duyarlık indisi $q_{ent} = q_{sen}$ olarak elde edilmiş; kuvvetli kaotik rejimde $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} \simeq 1.62 > 0$ ve zayıf kaotik rejimde $\lambda_{q_{sen}^{av}=0} > 0$ gözlemleri yapılmıştır. Bu durum topluluk ortalamaları için q-genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığına işaret etmektedir. Zayıf kaotik rejimde q-entropi artış hızı incelemesi için karşılaşılan faz uzayında çok çeşitli geçici sürelerine sahip bölgelerin bulunması, faz uzayı hücrelerinin farklı yayılma dinamikleri göstermesi ve hesaplama sürelerinin çok yüksek olması gibi problemler nedeniyle SALİ yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem sayesinde çeşitli geçici süreleri ve dinamik davranışlar ayırt edilebilmiş ve farklı kaotik rejimler tanımlanabilmiştir. Ayrıca bu çalışma kapsamında, bildiğimiz kadarıyla ilk defa, $\lambda_{q_{sen}^{av}}$ niceliğinin SALİ ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Standard map faz uzayının iki rejimden biri tarafından tamamen domine edildiği senaryoların ardından, faz uzayının maksimum Lyapunov üstelinin yaklaşık sıfır ve büyük bir pozitif değer aldığı bölgeleri aynı anda içerdiği farklı K map parametresi değerleri için q-üçlüsü sayısal olarak incelenmiştir. Başlangıç koşullarının sadece faz uzayındaki kaotik denizin içerisinden rastgele seçilerek topluluk ortalamalarının alındığı incelemelerde K parametre değerinden bağımsız olarak aynı $q_{ent} = q_{rel} = q_{stat} = 1$ üçlüsü ve $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1}$ özelliği elde edilmiştir. Aynı K değerlerindeki faz uzaylarının sadece kararlılık adalarından rastgele seçilen başlangıç koşulları için yapılan sayısal hesaplamalarda, tamamen kararlılık adaları tarafından işgal edilen faz uzayı için yapılan incelemelerde elde edilen q-üçlüsü ile aynı değerlere sahip q-

üçlüsü takımı elde edilmiştir. Bu gözlemler elde edilen sonuçların sağlamlığına işaret etmektedir.

q-entropi merkezli bu üç karakterizasyon yöntemini tamamlayıcı olan ve sistemin tam bir istatistiksel karakterizasyonunun yapılabilmesi için kilit rol oynayan kararlı limit dağılımlar analizinde oldukça önemli sonuçların elde edildiği görülmektedir. Faz uzayında maksimum Lyapunov üsteli değerinin yaklaşık sıfır ve büyük bir pozitif sayı olduğu bölgeler arasındaki rekabetin, elde edilen olasılık dağılımları üzerindeki etkileri ilgi çekicidir. Faz uzayının tamamının yaklaşık sıfır Lyapunov üsteline sahip kararlılık adaları tarafından işgal edildiği düşük K parametre değerlerinde zaman ve topluluk ortalamaları kullanılarak elde edilen olasılık dağılımlarının q-genelleştirilmiş MLT çerçevesinde q-Gaussiyenler olarak elde edildiği görülmüştür. Map parametresi artarken faz uzayında ortaya çıkan pozitif üstel değeriyle ergodik ve karışmış olan kaotik denizin daha geniş alanlara yayılmasıyla q-Gaussiyen dağılımlardan Gaussiyen dağılımlara sürekli formda bir geçiş görülmektedir. Olasılık dağılımındaki bu sürekli formdaki geçiş aynı zamanda genelleştirilmiş istatistiksel mekanikten Boltzmann-Gibbs istatistiğine geçişi de temsil etmektedir. Kararlılık adaları (zayıf kaotik rejim) bölgesinden seçilen başlangıç koşulları için K parametre değerinden bağımsız olarak $q_{stat} \simeq 1.935$ ile q-Gaussiyenlerin elde edilmiş olması, bu dağılımın sistem dinamiklerini açıklayıcılığı açısından sağlamlığına işaret eder.

Alan-korunumlu standard mapin Giriş bölümünde de değinildiği üzere pek çok fiziksel sistem için bir temel model oluşturması nedeniyle bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçların, bu fiziksel sistemler için aydınlatıcı ve açıklayıcı olması beklenmektedir. q-üçlüsü yapısının pek çok doğrusal olmayan sistemin istatistiksel tanımlamasında kilit rol oynaması nedeniyle, bu çalışmada elde edilen gözlemlerin diğer korunumlu ve yitimli sistemler için gelecekte yapılacak çalışmalara yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin geçerlilik sınırlarının ve kapsayıcılık özelliğinin ortaya konulmuş olmasının deneysel ve gözlemsel olarak elde edilen çalışmaların istatistiksel mekanik analizlerinde kullanışlı olacağı düşünülmektedir.

Bir diğer geniş uygulama alanına sahip alan-korunumlu sistem olan web map üzerinde yapılan başlangıç koşullarına duyarlık, entropi artış hızı ve olasılık dağılımı karakterizasyon yöntemleri incelemelerinde elde edilen sonuçlar standard map için elde edilen sonuçlarla uyumludur. Web map faz uzayının tamamen kuvvetli kaotik deniz tarafından işgal edildiği ve böylece tüm faz uzayı davranışının ergodik olduğu map parametresi değerinde yapılan sayısal hesaplamalarla $q_{ent} = q_{sen} = 1$ olduğu ve $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 0.96 \pm 0.01$ ilişkisi ortaya konarak web map için

genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığı gösterilmiştir. Faz uzayının kaotik deniz ve kararlılık adaları tarafından birlikte işgal edildiği senaryoda kaotik denizden seçilen başlangıç koşulları için yapılan analizlerle $K_{q_{ent}^{av}=1} = \lambda_{q_{sen}^{av}=1} = 0.68 \pm 0.01$ eşitliğini sağladığı tespit edilmiş ve yukarıda yapılan çıkarım doğrulanmıştır. Ayrıca faz uzayının tamamının davranışın ergodik yada karışmış olmadığı kararlılık adaları tarafından domine edildiği senaryoda yapılan $q_{ent} = q_{sen} = 0$ gözlemi bu rejim için hem genelleştirilmiş Pesin özdeşliğinin varlığına işaret etmekte hem de standard mapin istatistiksel karakterizasyonunda belirlenen ilgili q indisleriyle uyumu neticesinde alan-korunumlu sistemlerde evrensel bir nicelik olduğuna işaret etmektedir.

Web mapin iterasyonları toplamı niceliğinin MLT çerçevesinde yapılan limit davranışı incelemelerinde oldukça önemli gözlemler yapılmıştır. Faz uzayının tamamının kaotik deniz ve kararlılık adaları tarafından işgal edildiği iki uç senaryoda sırasıyla elde edilen $q_{stat} = 1$ ile Gaussiyen dağılım ve $q_{stat} \simeq 1.935$ ile q-Gaussiyen dağılımlar standard map için yapılan analizlerle elde edilen sonuçlarla uyumludur. Web map faz uzayının kararlılık adaları ve kaotik deniz tarafından işgal edildiği parametre değerlerinde web mapin faz uzayında bazı özel parametre değerlerinde kaotik deniz içerisine gömülü olan yapışkan bölgelerin ortaya çıkması nedeniyle farklı limit davranışlar elde edilmiştir. Bahsi geçen yapışkan davranış standard mapte görülmeyen bir davranıştır. Yapışkan davranışın ortaya çıkmadığı parametre değerlerinde elde edilen olasılık dağılımların standard mapte olduğu gibi bir Gaussiyen dağılım ile $q_{stat} \simeq 1.935$ olan q-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu olarak elde edildiği görülmüştür. Yapışkan davranışın ortaya çıktığı parametre değerlerinde faz uzayının tamamından rastgele seçilen başlangıç koşulları için elde edilen olasılık dağılımlarında ise $q_{stat} \simeq 1.935$ olan q-Gaussiyen dağılımın varlığını korumasına karşın Gaussiyen dağılımın eteklerinin Gaussiyen olmayan formda elde edildiği görülmüştür. Bahsi geçen parametre değerlerinde sadece kaotik denizden seçilen başlangıç koşulları için farklı iterasyon adımı değerleri kullanılarak yapılan analizlerde elde edilen olasılık dağılımlarının Gaussiyen forma oldukça yavaş bir şekilde yakınsadığı görülmüştür.

Kararlılık adaları ve kaotik deniz tarafından işgal edilen faz uzayları için yapılan gözlemlerden hareketle kaotik deniz içerisinden seçilen başlangıç koşulları için fraktal boyut ve bu başlangıç koşulları için elde edilen olasılık dağılımları için basıklık ölçüsü analizleri yapılmıştır. Yapışkan davranışın baskın olduğu çeşitli parametre değerlerinde kaotik denizden seçilen başlangıç koşulları için fraktal boyut $d_f < 2$ olarak elde edilerek kaotik yörüngelerin fat fraktal yapısı ortaya konmuş ve bu sistemler için basıklık ölçüsünün gerek sonlu gerekse de sonsuz-zamanlı yörüngeler için $\kappa < 3$ olarak elde edildiği görülmüştür. Yapılan bu gözlem de elde edilen

dağılımların bir Gaussiyene yakınsamayacağına işaret eder. Buna karşın yapışkan davranışın görülmediği parametre değerlerinde fraktal boyut $d_f = 2$ olarak tespit edilmiş ve basıklık ölçüsünün $\kappa = 3$ gözlemiyle olasılık dağılımlarında bu parametreler için elde edilen Gaussiyen dağılımlar bir kez daha doğrulanmıştır.

Web map için elde edilen q-indislerinin standard map incelemesinde elde edilen q-indisleri ile gösterdiği uyum neticesinde bu q-indislerinin alan-korunumlu sistemlerde evrensel nicelikler olduğuna işaret ettiği sonucuna varılabilir. Bu çıkarımı doğrulamak adına bu çalışma kapsamında standard map için iki tipte genelleştirme tanımlanmış ve bu genelleştirilmiş sistemler üzerinde olasılık dağılımı karakterizasyonları yapılmıştır.

Birinci tip genelleştirilmiş standard mapte sabit bir parametre değerinde genelleştirme terimindeki artışın sistemin integrallenemezliğini arttırdığı görülmüştür. Artan genelleştirme terimi ile kaotik davranışın daha küçük map parametre değerlerinde ortaya çıkacağı sonucuna varmamızı sağlayan bu gözlem, genelleştirilmiş standard mapte kararlı yörüngelerin kaotik davranışı doğuracak şekilde bozulmasını sağlayan rezonansların orijinal standard mapten farklı olacağına işaret etmektedir. Bu söylemi doğrular nitelikte olacak şekilde faz uzayında farklı kaotikliğe sahip birbirinden bağımsız kaotik bölgelerin doğabildiği gözlemlenmiştir. Böylece faz uzayının tamamından rastgele seçilen çok sayıda başlangıç koşulu için elde edilen olasılık dağılımları iki adet Gaussiyen ve bir adet $q_{stat} \simeq 1.935$ olan q-Gaussiyen dağılımın lineer kombinasyonu olarak elde edilmiştir. Bazı özel senaryolarda ise kararlı yörüngelerin eliptik ve hiperbolik noktalar dizgesine bozulma prosedürü sonucunda hiperbolik noktalardan doğan homoklinik-heteroklinik dolanıkların orijinal standard mapten farklı olan rezonanslar nedeniyle yapışkan davranışı doğurabildiği görülmüştür. Kaotik denizden başlayan bir yörünge noktasının bu yapışkan bölgelere giriş-çıkışı ve bu bölgelerde uzun süreler geçirebildiği yapılan analizlerle ortaya konmuştur. Olasılık dağılımlarını elde etmekte kullanılan iterasyon adımı boyunca bu yapışkan bölgelere daha az süreli ve daha az sayıda giriş çıkış yapan başlangıç noktaları için elde edilen olasılık dağılımlarının bir Gaussiyen olduğu, yapışkan bölgelere daha sık giriş-çıkışlar sergileyen ve daha uzun iterasyon adımı süresince bu bölgelerde kalan yörüngelerin ise ergodik ya da karışmış olmayan şekilde davranarak olasılık dağılımlarına q-Gaussiyen katkısı verdiği çıkarımında bulunulmuştur. Tüm sistemler için kararlılık adalarının faz uzayının Lyapunov üsteli ile tasvirinden belirlenen oranlarının, üç bileşenli olasılık dağılımlarındaki $q_{stat} \simeq 1.935$ olan q-Gaussiyen dağılımın oranıyla aynı olduğu bulunmuş ve böylece bu dağılım ile zayıf kaotik rejimde olan kararlılık adaları arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

İkinci tip genelleştirilmiş standard map için birinci tip genelleştirilmiş standard mape benzer analiz adımları takip edilmiş ve benzer gözlemler yapılmıştır. Faz uzayındaki kaotik denizin içerisine gömülü olan ve kararlılık adalarının etrafına yapışan yapışkan bölgeler nedeniyle üç bileşenli olasılık dağılımı davranışında iki adet q-Gaussiyen ve bir adet Gaussiyen dağılımın varlıkları gözlemlenmiştir. Kararlılık adalarından gelen $q_{stat} \simeq 1.935$ olan q-Gaussiyen dağılımın yanı sıra ele alınan sistemlerin farklı dinamikleri nedeniyle ikinci q-Gaussiyen dağılımların q değerleri farklı elde edilmiştir. İkinci tip genelleştirilmiş standard map için belirlenen sistemlerden biri için elde edilen üç bileşenli olasılık dağılımda üç adet q-Gaussiyenin elde edilmesi oldukça ilginç bir sonuçtur. Faz uzayının kaotik deniz içerisinde yer alan kararlılık adaları takımlarıyla işgal edildiği bu senaryoda kaotik deniz içerisinden seçilen başlangıç koşullarının limit davranışının bir Gaussiyen yerine q-Gaussiyen olması beklenmedik bir sonuçtur. Ancak sistem üzerinde yapılan detaylı incelemeler sonucunda kaotik deniz içerisinde çeşitli bölgesel yapıların olduğu ve tek bir başlangıç koşulundan başlatılan kaotik yörüngenin ilk olarak kendi bölgesine yayılarak daha sonra diğer bir bölgeye geçtiği, ancak faz uzayında izinli enerji bölgesi olan ve herhangi bir kararlı yörünge tarafından sınır konulmayan kaotik denize karışmış şekilde yayılamadığı görülmüştür. Oldukça yüksek iterasyon adımı süresince faz uzayı yayılımı takip edilen yörüngenin kaotik denizin tamamını kaplayamadığı görülmüştür. Bu gözlemler ışığında kaotik denizden seçilen kaotik yörüngelerin ergodik olmayan şekilde davrandıkları, ergodik olmayan davranış sergileyen sistemlerde Boltzmann-Gibbs istatistiğinin yetersiz kalarak uygun istatistiksel yaklaşımın genelleştirilmiş istatistiksel mekanik tarafından sağlandığı hatırlanacak olunursa bu yörüngeler elde edilen q-Gaussiyen dağılımların sağlam birer sonuç olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca bahsi geçen sistemde farklı kaotikliğe sahip olduğu Lyapunov renk haritasından gözlemlenen bölgeler nedeniyle farklı genişliğe sahip aynı q değerli q-Gaussiyenlerin elde edildiği görülmüştür.

Alan-korunumlu bir diğer sistem olan Harper mapin çeşitli parametre değerleri için olasılık dağılımı karakterizasyonu yapılmıştır. Elde edilen olasılık dağılımlarına bakıldığında orijinal standard map ile benzer sonuçların elde edildiği görülmektedir. Boltzmann-Gibbs istatistiği ve genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin geçerlilik sınırlarının bir kez daha ortaya konduğu bu analiz sonuçları önceki bölümlerde ortaya konan gözlemleri destekler niteliktedir.

Deterministik örgü gazının iki büyüklük değeri için çeşitli iterasyon değerlerinde yapılan analizlerde elde edilecek olasılık dağılımların limit durumlarda bir q-Gaussiyen formu üzerinde gelişeceği gözlemi yine genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin pek çok model ve gerçek sistemde uygun açıklayıcı istatistiksel yaklaşımın olma potansiyeline işaret eder niteliktedir.

Orijinal standard map, web map, birinci ve ikinci tip genelleştrilmiş standard map, Harper map sistemleri üzerinde ortak bir gözlem olarak kararlılık adalarından seçilen başlangıç koşullarının limit dağılımın $q_{stat} \simeq 1.935$ ile bir q-Gaussiyen olması, bu indisin alan-korunumlu sistemlerde evrensel bir indis olduğuna işaret etmektedir. Ayrıca ilk defa yapılan ergodik davranmayan sonlu-zamanlı kaotik yörüngelerin limit davranışının bir q-Gaussiyen olarak elde edilmesi gözlemi de genelleştirilmiş istatistiksel mekaniğin geçerliliğine işaret etmektedir. Bu çalışma kapsamında yapılan tüm gözlemler hem bu yaklaşımın sağlamlığına işaret ederek, hem de çeşitli evrensellik sınıflarında ortak sonuçları ortaya koyarak diğer sistem aileleri için yapılacak istatistiksel karakterizasyonlara yol gösterici niteliktedir.

4. KAYNAKLAR

Afanasiev, V. V., Sagdeev, R. Z., Zaslavsky, G. M. 1991. “Chaotic jets with multifractal space-time random walk”, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 1, 143.

Afsar, O., Tirnakli, U. 2013. “Generalized Huberman-Rudnick scaling law and robustness of q-Gaussian probability distributions”, Europhysics Letters, 101 (2), 20003.

Afsar, O., Tirnakli, U. 2014. “Relationships and scaling laws among correlation, fractality, Lyapunov divergence and q-Gaussian distributions”, Physica D: Nonlinear Phenomena, 272, 18.

ALICE Collaboration. 2010. “Transverse momentum spectra of charged particles in proton–proton collisions at √s = 900 GeV with ALICE at the LHC”, Physics Letters B, 693, 53.

ALICE Collaboration. 2011. “Production of pions, kaons and protons in pp collisions at √s = 900 GeV with ALICE at the LHC”, The European Physical Journal C, 71, 1655.

Al-Sawalha, M. M., Noorani, M. S. M. 2009. “Application of the differential transformation method for the solution of the hyperchaotic Rössler system”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 1509.

Añaños, G. F. J., Tsallis, C. 2004. “Ensemble averages and nonextensivity at the edge of chaos of one-dimensional maps”, Physical Review Letters, 93, 020601.

Anteneodo, C., Tsallis, C. 1998. “Breakdown of the exponential sensitivity to the initial conditions: Role of the range of the interaction”, Physical Review Letters, 80, 5313.

Arnold, V. I. 1978. Mathematical Methods in Classical Mechanics. New York: Springer.

ATLAS Collaboration. 2011. “Charged-particle multiplicities in ppinteractions measured with the ATLAS detector at the LHC”, New Journal of Physics, 13, 053033.

Baldovin, F., Robledo, A. 2002. “Universal renormalization-group dynamics at the onset of chaos in logistic maps and nonextensive statistical mechanics”, Physical Review E, 66, 045104(R).

Baldovin, F., Robledo, A. 2004. “Nonextensive Pesin identity: Exact renormalization group analytical results for the dynamics at the edge of chaos of the logistic map”, Physical Review E, 69, 045202(R).

Beck, C., Lewis, G. S., Swinney, H. L. 2001. “Measuring non-extensivity parameters inturbulent Couette-Taylor flow”, Physical Review E, 63, 035303(R).

Beck, C., Schlögl, F. 1997. Thermodynamics of Chaotic Systems – an Introduction. Cambridge: Cambridge University Press.

Benettin, G., Casati, D., Galgani, L., Giorgilli, A., Sironi, L. 1986. “Apparent fractal dimensions in conservative dynamical systems”, Physics Letters A, 118, 325.

Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J. -M. 1980. “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them”, Meccanica, 15 (1), 9.

Benvenuto, F., Casati, G., Shepelyansky, D. L. 1994. “Chaotic autoionization of molecular Rydberg states”, Physical Review Letters, 72, 1818.

Betzler, A. S., Borges, E. P. 2012. “Nonextensive distributions of asteroid rotation periods and diameters”, Astronomy & Astrophysics, 539, A158.

Betzler, A. S., Borges, E. P. 2015. “Nonextensive Statistical Analysis of Meteor Showers and Lunar Flashes”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 447, 765.

Birkhoff, G. D. 1935. “Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques”, Memoriae Pontificiae Academiae Scientiarum Novi Lyncaei, 1, 85.

Bogachev, M. I., Kayumov, A. R., Bunde, A. 2014. “Universal Internucleotide Statistics in Full Genomes: A Footprint of the DNA Structure and Packaging?”, PLoS ONE, 9 (12), e112534.

Borges, E. P., Tsallis, C., Añaños, G. F. J., de Oliveira, P. M. C. 2002. “Nonequilibrium probabilistic dynamics of the logistic map at the edge of chaos”, Physical Review Letters, 89, 254103.

Burlaga, L. F., Ness, N. F. 2013. “Magnetic field strength fluctuations and the q-triplet in the heliosheath: voyager 2 observations from 91.0 to 94.2 AU at latitude 30°s”, The Astrophysical Journal, 765, 35.

Cardone, V. F., Leubner, M. P., Del Popolo, A. 2011. “Spherical galaxy models as equilibrium configurations in nonextensive statistics”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 414, 2265.

Celikoglu, A., Tirnakli, U. 2006. “Sensitivity function and entropy increase rates for z-logistic map family at the edge of chaos”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 372, 238–242.

Cetin, K., Afsar, O., Tirnakli, U. 2015. “Limit behaviour and scaling relations of two kinds of noisy logistic map in the vicinity of chaos threshold and their robustness”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 424, 269.

Cetin, K., Afsar, O., Tirnakli, U. 2018. “Generalized Pesin-Like Identity and Scaling Relations at the Chaos Threshold of the Rössler System”, Entropy, 20 (4), 216.

Cetin, K., Tirnakli, U. 2019. “Generalization of the standard map: Statistical characterization”, yazım aşamasında.

Chen, S., Hu, J., Wang, C., Lü, J. 2004. “Adaptive synchronization of uncertain Rössler hyperchaotic system based on parameter identification”, Physics Letters A, 321, 50.

Chirikov, B. V. 1969. Research Concerning the Theory of Nonlinear Resonance and Stochasticity, Report 267. Novosibirsk: Nuclear Physics Institute Of The Siberian Section Of The Ussr Academy Of Sciences (English Translation, CERN Trans. 71–40. 1971).

Chirikov, B. V. 1979. “A universal instability of many-dimensional oscillator systems”, Physics Reports, 52, 263.

Chirikov, B. V. 1987. “Particle confinement and adiabatic invariance”, Proceedings of the Royal Society of London A, 413, 145.

Christodoulidi, H., Tsallis, C., Bountis, T. 2014. “Fermi-Pasta-Ulam model with long-range interactions: Dynamics and thermostatistics”, Europhysics Letters, 108, 40006.

Cirto, L. J. L., Assis, V. R. V., Tsallis, C. 2014. “Influence of the interaction range on the thermostatistics of a classical many-body system”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 393, 286.

CMS Collaboration. 2010. “Transverse-Momentum and Pseudorapidity Distributions of Charged Hadrons in Collisions at √s=7 TeV”, Physical Review Letters, 105, 022002.

Combe, G., Richefeu, V., Stasiak, M., Atman, A. P. F. 2015. “Experimental Validation of a Nonextensive Scaling Law in Confined Granular Media”, Physical Review Letters, 115, 238301.

Cuomo, K. M., Oppenheim, A. V. 1993. “Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications”, Physical Review Letters, 71, 65.

Dana, I. 1995. “Kicked Harper models and kicked charge in a magnetic field”, Physics Letters A, 197, 413.

de Moura, F. A. B. F., Tirnakli, U., Lyra, M. L. 2000. “Convergence to the critical attractor of dissipative maps: log-periodic oscillations, fractality, and nonextensivity”, Physical Review E, 62, 6361.

de Souza, J., Rostirolla, S. P. 2011. “A fast MATLAB program to estimate the multifractal spectrum of multidimensional data: Application to fractures”, Computers & Geosciences, 37, 241.

Douglas, P., Bergamini, S., Renzoni, F. 2006. “Tunable Tsallis distributions in dissipative optical lattices”, Physical Review Letters, 96, 110601.

Esquivel, A., Lazarian, A. 2010. “Tsallis statistics as a tool for studying interstellar turbulence”, The Astrophysical Journal, 710, 125.

Farmer, J. D. 1985. “Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics”, Physical Review Letters, 55, 351.

Ferri, G.L., Savio, M. F. R., Plastino, A. 2010. “Tsallis' q-triplet and the ozone layer”, Physica A ,389, 1829.

Giometto, A., Jensen, H. J. 2012. “Connecting the microdynamics to the emergent macrovariables: Self-organized criticality and absorbing phase transitions in the deterministic lattice gas”, Physical Review E, 85, 011128.

Gorodetski, A. 2012. “On Stochastic Sea of the Standard Map”, Communications in Mathematical Physics, 309, 155.

Grassberger, P., Procaccia, I. 1983. “Characterization of Strange Attractors”, Physical Review Letters, 50, 346.

He, R., Vaidya, P. G. 1992. “Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems”, Physical Review A, 46, 7387.

Hilborn, R. C. 1994. Chaos and Nonlinear Dynamics. New York: Oxford University Press.

Hou, X.-J., Gilmore, R., Mindlin, G. B., Solari, H. G. 1990. “An efficient algorithm for fast O(N*ln(N)) box counting”, Physics Letters A, 151, 43.

Huberman, B. A., Rudnick, J. 1980. “Scaling Behavior of Chaotic Flows”, Physical Review Letters, 45, 154.

Izraelev, F. M. 1980. “Nearly linear mappings and their applications”, Physica D: Nonlinear Phenomena, 1 (3), 243.

Jensen, H.J. 1990. “Lattice gas as a model of 1/*f* noise”, Physical Review Letters, 64, 3103.

Karney, C. F. F. 1978. “Stochastic ion heating by a lower hybrid wave”, The Physics of Fluids, 21, 1584.

Karney, C. F. F. 1979. “Stochastic ion heating by a lower hybrid wave: II”, The Physics of Fluids, 22, 2188.

Kermack, W. O., McKendrick, A. G. 1927. “A contribution to the mathematical theory of epidemics”, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 115, 700.

Latora, V., Baranger, M. 1999. “Kolmogorov–Sinai entropy rate versus physical entropy”, Physıcal Revıew Letters, 82, 520.

Latora, V., Baranger, M., Rapisarda, A., Tsallis, C. 2000. “The rate of entropy increase at the edge of chaos”, Physics Letters A, 273, 97.

Leboeuf, P. 1998. “Normal and anomalous diffusion in a deterministic area-preserving map”, Physica D 116, 8.

Leboeuf, P., Kurchan, J., Feingold, M., Arovas, D.P. 1992. “Topological aspects of quantum chaos”, Chaos, 2, 125.

Linsay, P. S. 1981. “Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator”, Physical Review Letters, 47, 1349.

Lorenz, E. N. 1963. “Deterministic Nonperiodic Flow”, Journal of the Atmospheric Sciences, 20, 130.

Lutz, E., Renzoni, F. 2013. “Beyond Boltzmann-Gibbs statistical mechanics in optical lattices”, Nature Physics, 9, 615.

Mackay, R. S., Meiss, J. D., Percival, I. C. 1984. “Transport in Hamiltonian systems”, Physica D: Nonlinear Phenomena, 13, 55.

Malkov, M. A., Zaslavsky, G. M. 1984. “Wave-Particle resonant interaction in a weak magnetic field”, Physics Letters A, 106, 257.

Marques, L., Andrade-II, E., Deppman, A. 2013. “Nonextensivity of hadronic systems”, Physical Review D, 87, 114022.

May, R. M. 1976. “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, Nature: International Journal of Science, 261, 459.

Mohanalin, J., Beenamol, M., Kalra, P. K., Kumar, N. 2010. “A novel automatic microcalcification detection technique using Tsallis entropy & a type II fuzzy index”, Computers and Mathematics with Applications, 60, 2426.

Morales, J. J., Nuevo, M. J. 1993. “Physical meaning of the time-correlation length obtained in a computer simulation”, Physical Review E, 48, 1550.

Pasmanter, R. A. 1990. “From chaotic advection to chaotic Schrödinger-type equations”, Physical Review A, 42, 3622.

Pesin, Y. 1977. “Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory”, Russian Mathematical Surveys, 32, 55.

Petrowsky, T. Y. 1986. “Chaos and cometary clouds in the solar system”, Physics Letters A, 117 (7), 328.

Pettini, M., Vulpiani, A. 1984. “Possible failure of Arnold diffusion in nonlinear hamiltonian systems with more than two degrees of freedom”, Physics Letters A, 106, 207.

PHENIX Collaboration. 2011. “Measurement of neutral mesons in p+p collisions at $\sqrt{s}$ = 200 GeV and scaling properties of hadron production”, Physical Review D, 83, 052004.

PHENIX Collaboration. 2011. “Nuclear modification factors of φ mesons in d + Au, Cu + Cu, and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV”, Physical Review C, 83, 024909.

Prato, D., Tsallis, C. 1999. “Nonextensive foundation of Lévy distributions”, Physical Review E, 60, 2398.

Rapisarda, A., Latora, V. 2004. Nonextensive Entropy – Interdisciplinary Applications. New York: Oxford University Press.

Rössler, O. E. 1976. “An equation for continuous chaos”, Physics Letters A, 57, 397.

Rössler, O. E. 1979. “Continuous Chaos-Four Prototype Equations”, Annals of the New York Academy of Sciences, 316, 376.

Ruelle, D., Takens, F. 1971. “On the nature of turbulence”, Communications in Mathematical Physics, 20, 167.

Ruiz, G., Bountis, T., Tsallis, C. 2012. “Time-evolving statistics of chaotic orbits of conservative maps in the context of the central limit theorem”, International Journal of Bifurcation and Chaos, 22 (09), 1250208.

Ruiz, G., Tirnakli, U., Borges, E. P., Tsallis C. 2017a. "Statistical characterization of the standard map", Journal Of Statistical Mechanics: Theory And Experiment, 063403.

Ruiz, G., Tirnakli, U., Borges, E. P., Tsallis C. 2017b. " Statistical characterization of discrete conservative systems: The web map", Physical Review E 96, 042158.

Ruiz, G., Tsallis, C. 2007. “Roundoff-induced attractors and reversibility in conservative two-dimensional maps”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 386, 720.

Sagdeev, R. Z., Zaslavsky, G. M. 1986. Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics. Editör: Sagdeev, R. Z. Moscow: Mir.

Schuster, H. G., Just, W. 2005. Deterministic Chaos: An Introduction. Weinheim: Wiley-VCH.

Shao, M., Yi, L.,Tang, Z., Chen, H., Li, C., Xu, Z. 2010. “Examination of the species and beam energy dependence of particle spectra using Tsallis statistics”, Journal of Physics G: Nuclear and Particles Physics, 37**,** 085104.

Shepelyansky, D. L., Stone, A. D. 1995. “Chaotic Landau level mixing in classical and quantum wells”, Physical Review Letters, 74, 2098.

Skokos, C. 2001. “Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 34 (47), 10029.

Sotolongo-Grau, O., Rodríguez-Pérez, D., Antoranz, J. C., Sotolongo-Costa, O. 2010. “Tissue Radiation Response with Maximum Tsallis Entropy”, Physical Review Letters, 105, 158105.

Sprott, J. C. 2014. “A dynamical system with a strange attractor and invariant tori”, Physics Letters A, 378, 1361–1363.

Sun, Y., Li, W., Ruan, J. 2013. “Generalized outer synchronization between complex dynamical networks with time delay and noise perturbation”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18, 989.

Sun, Y., Ruan, J. 2009. “Synchronization in coupled time-delayed systems with parameter mismatch and noise perturbation”, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 19, 043113.

Tirnakli, U. 2002. “Two-dimensional maps at the edge of chaos: Numerical results for the Henon map”, Physical Review E, 66, 066212.

Tirnakli, U., Ananos, G. F. J., Tsallis, C. 2001. “Generalization of the Kolmogorov–Sinai entropy: Logistic-like and generalized cosine maps at the chaos threshold”, Physics Letters A, 289, 51.

Tirnakli, U., Beck, C., Tsallis, C. 2007. “Central limit behavior of deterministic dynamical systems”, Physical Review E, 75, 040106.

Tirnakli, U., Borges E.P. 2016. "The standard map: From Boltzmann-Gibbs statistics to Tsallis statistics", Scientific Reports, 6, 23644.

Tirnakli, U., Jensen, H. J. 2019. “Statistical characterization of the deterministic lattice gas”, hazırlanma aşamasında.

Tirnakli, U., Tsallis, C. 2006. “Chaos edges of z-logistic maps: Connection between the relaxation and sensitivity entropic indices”, Physical Review E, 73, 037201.

Tirnakli, U., Tsallis, C. 2019. “Robustness in the Dynamics of discrete conservative systems: Harper map and generalized standard map”, yazım aşamasında.

Tirnakli, U., Tsallis, C., Beck, C. 2009. “Closer look at time averages of the logistic map at the edge of chaos”, Physical Review E, 79, 056209.

Tsallis, C. 1988. “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”, The Journal of Statistical Physics, 52, 479.

Tsallis, C. 1994. “What are the numbers that experiments provide?”, Química Nova, 17, 468-471.

Tsallis, C. 2004. “Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 340, 1.

Tsallis, C. 2009. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics – Aproaching a Complex World. New York: Springer.

Tsallis, C., Borges, E. P., Baldovin, F. 2002. “Mixing and equilibration: Protagonists in the scene of nonextensive statistical mechanics”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 305, 1.

Tsallis, C., Plastino, A. R., Zheng, W. –M. 1997. “Power-law sensitivity to initial conditions – New entropic representation”, Chaos, Solitons & Fractals, 8, 885.

Umarov, S., Tsallis, C., Gell-Mann M., Steinberg, S. 2010. “Generalization of symmetric α-stable Lévy distributions for q > 1”, Journal of Mathematical Physics, 51, 033502.

Umarov, S., Tsallis, C., Steinberg, S. 2008. “On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics”, Milan Journal of Mathematics, 76, 307.

van Kampen, N. G. 1981. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Volterra, V. 1926. “Fluctuations in the Abundance of a Species Considered Mathematically”, Nature: International Journal of Science, 118, 558.

Wiggins, S. 1992. Chaotic Transport in Dynamical Systems. Editörler: John, F., Kadanoff, L., Marsden, J. E., Sirovich, L., Wiggins, S. New York: Springer-Verlag.

Wong, C. -Y., Wilk, G. 2013. “Tsallis fits to pT spectra and multiple hard scattering in pp collisions at the LHC”, Physical Review D, 87, 114007.

Yang, C. R., Shapiro, B. E., Mjolsness, E. D., Hatfield, G. W. 2005. “An enzyme mechanism language for the mathematical modeling of metabolic pathways”, Bioinformatics, 21, 774.

Ye, J., Li, H., McInerney, J. G. 1993. “Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback”, Physical Review A, 47, 2249.

Zaslavsky, G. M. 2005. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. New York: Oxford University Press.

Zaslavsky, G. M., Sagdeev, R. Z., Usikov, D. A., Chernikov, A. A. 1991. Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns. Cambridge: Cambridge University Press.

Zaslavsky, G. M., Zakharov, M. Yu., Sagdeev, R. Z., Usikov, D. A., Chernikov, A. A. 1986. “Stochastic web and particle diffusion in a magnetic field”, Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (Rusça), 91, 500. [Soviet Physics, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 64, 294 (İngilizce)]

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. UĞUR TIRNAKLI
Proje No:	115F492
Proje Başlığı:	Korunumlu Düşük Boyutlu Dinamik Sistemlerin ve Deterministik Örgü Gaz Modelinin İstatistik Mekaniksel İncelenmesi
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	24
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	EGE Ü. FEN F. FİZİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/04/2016 - 01/04/2019
Onaylanan Bütçe:	145500.0
Harcanan Bütçe:	106712.3
Öz:	Ergodik ve karışmış davranış sergileyen bir sistemin dinamikleri Boltzmann-Gibbs istatistiği ile açıklanabilmektedir. Ergodikliğin bozulduğu ve karışmışlık özelliğinin bulunmadığı durumda ise bu yaklaşım sistemi tam olarak açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu çalışma kapsamında sistem davranışının ergodik ve karışmış olmadığı zayıf kaotik rejim için uygun istatistik mekaniksel yaklaşımın genelleştirilmiş istatistiksel mekanik tarafından sağlanabildiği ortaya konmaktadır. Kontrol parametresi değerine bağlı olarak ergodik (kuvvetli kaotik rejim) ve ergodik olmayan (zayıf kaotik rejim) davranış sergileyebilen sistemler üzerinde başlangıç koşullarına duyarlık, entropi artış hızı, entropi gevşeme hızı ve olasılık dağılımı istatistiksel karakterizasyon yöntemlerinin sayısal olarak ele alındığı bu çalışma ile ele alınan sistemlerin mensubu oldukları dinamik sistem aileleri için çeşitli evrensel davranışlar ortaya konmaktadır. Ele alınan sistemin doğasına uygun olarak yeniden düzenlemelerin yapıldığı istatistiksel karakterizasyonların yanı sıra yitimli bir sistem olan Rössler salınıcısı için özel olarak kaos geçiş eşiği civarında ölçeklenme ilişkilerinin varlığı araştırılmaktadır. Rössler salınıcısı için ilk defa bu çalışma ile ortaya konan ölçeklenme davranışları, literatürde daha önce yapılan çeşitli çalışmalarla karşılaştırılarak evrensellik özelliği gösterilmektedir. Korunumlu dinamik sistemlerin bir özel sınıfı olan alan-korunumlu sistemlerden seçilen ve bu çalışma kapsamında yeni tanımlanan model sistemler için elde edilen sonuçların birbirleriyle karşılaştırılmasıyla bu sistem ailesi için evrensel davranışlar ortaya konmuştur. Bu çalışmada genel bir gözlem olarak davranışın ergodik ve karışmış olduğu durum için Boltzmann-Gibbs istatistiğinin geçerli olduğu, ergodik ve karışmış olmayan sistem davranışı için ise genelleştirilmiş istatistiksel mekanik argümanlarının sistem dinamiklerini başarılı bir şekilde açıkladığı görülmüştür.
Anahtar Kelimeler:	İstatistiksel mekanik, korunumlu ve yitimli sistemler, kaos, doğrusal olmayan dinamik.
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Statistical characterization of discrete conservative systems: The web map (Makale - İndeksli Makale), 2- Statistical characterization of the standard map (Makale - İndeksli Makale), 3- Generalized Pesin-Like Identity and Scaling Relations at the Chaos Threshold of the Rossler System (Makale - İndeksli Makale),

TÜBİTAK