ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI KESİRSEL MERTEBEDEN TÜREVLERİN VE İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Sinan Serkan BİLGİCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2021

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Sinan Serkan BİLGİCİ tarafından hazırlanan **"Bazı Kesirsel Mertebeden Türevlerin ve İntegrallerin Özelliklerinin İncelenmesi"** adlı tez çalışması 10.08.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Dr. Öğr. Üyesi Müfit ŞAN

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. Hüseyin IRMAK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM
Matematik Anabilim Dalı
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Müfit ŞAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Bazı Kesirsel Mertebeden Türevlerin ve İntegrallerin Özelliklerinin İncelenmesi**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (10/08/2021).

Sinan Serkan BİLGİCİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI KESİRSEL MERTEBEDEN TÜREVLERİN VE İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Sinan Serkan BİLGİCİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Müfit ŞAN

Bu çalışmanın ilk amacı kesirsel kalkülüs teorisinde en çok kullanılan iki kesirsel türev operatörü olan Caputo ve Riemann-Liouville kesirsel türev operatörleri ile Riemann-Liouville integralinin bazı özelliklerini ortaya koymak ve türev operatörlerinin özelliklerini karşılaştırmaktır. İkinci amacı ise, nonlineer $1<\sigma<2$ -mertebeden Riemann-Liouville kesirsel türevli denklem içeren bir başlangıç-değer probleminin çözümlerinin lokal varlığını ve tekliğini araştırmaktır. Bu problemdeki nonlineer denklemin sağ yanındaki nonlineer fonksiyon ilk değişkenine göre singülerliğe sahiptir. Bu fonksiyon üzerindeki süreklilik şartı altında bu problemim çözümlerinin iki katlı singülerliğe sahip Volterra-tip denklemi çözümlerine denk olduğu gösterilmiştir. Bu yöntem, problem yerine bu integral denklemin çözümlerin varlığı ve tekliğini araştırılmasına olanak sağlanmıştır. Diğer yandan, bazı tek katlı singülerliğe sahip integral denklemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini araştırmak diğerlerine nazaran daha çok uğraş gerektirip daha fazla matematiksel araçlara ihtiyaç duymaktadır. Bu çalışmada da, özellikle çözümlerin tekliğini gösterirken Lebesgue uzaylarının Hölder eşitsizliği gibi temel araçlarından faydalanılmış ve mevcut ispat teknikleri genelleştirilmiştir. Bu sayede, problem için hem klasik türevli denklemler hem kesirsel türevli denklemler teorisinde en çok karşılaşılan Nagumo-tip, Krasnoselski-Krein-tip ve Osgood-tip teklik teoremleri verilecektir.

2021, 46 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Kesirsel türevli denklemler, Riemann-Liouville kesirsel integral ve türevi, Caputo kesirsel türevi, Varlık, Teklik

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INVESTIGATION OF PROPERTIES OF SOME DERIVATIVES AND INTEGRALS OF FRACTIONAL ORDER

Sinan Serkan BİLGİCİ

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Müfit ŞAN

The first aim of this study is to reveal some properties of Caputo and Riemann-Liouville fractional derivative operators, which are the two most used fractional derivative operators in fractional calculus theory, and Riemann-Liouville integral and compare the properties of derivative operators. The second aim is to investigate the local existence and uniqueness of the solutions of an initial-value problem involving a nonlinear $1<\sigma<2$-order Riemann-Liouville fractional derivative equation. The nonlinear function on the right side of the equation in this problem has singularity with respect to its first variable. It has been shown that, under the condition of continuity on this function, the solutions of this problem are equivalent to the solutions of the Volterra-type equation with double singularity. This method provides the opportunity to investigate the existence and uniqueness of the solutions of this integral equation instead of the problem. On the other hand, the investigation of the existence and uniqueness of solutions of some integral equations with single singularity requires more effort and requires more mathematical tools than the investigation of the existence and uniqueness of solutions of their counterparts. In this study, especially while showing the uniqueness of the solutions, basic tools such as Hölder's inequality for Lebesgue spaces is used and the existing proof techniques are generalized. In this way, the Nagumo-type, Krasnoselski-Krein-type and Osgood-type uniqueness theorems, which are the most common in the theory of both classical differential equations and fractional differential equations will be given for the problem.

2021, 46 pages

Keywords: Fractional differential equations, Riemann-Liouville fractional integral and derivative, Caputo fractional derivative, Existence, Uniqueness

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, literatürde en çok yer alan Riemann-Liouville kesirsel türev ve integral operatörleri ile Caputo kesirsel türev operatörünün tanımları, özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri üzerinde durulmuştur.

Bu tez çalışmamda, değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, her ne zaman kendisine danışşam kıymetli zamanını ayırıp büyük bir özveri ile faydalı olabilmek için elinden geleni bir an olsun esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bilgi ve tecrübelerinden faydalanabileceğimi düşündüğüm değerli ve kıymetli danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Müfit ŞAN hocama teşekkürlerimi bir borç bilirim. Yine bu çalışmamda tez savunmama katılarak çarpıcı noktalarda yapıcı eleştiriler yaparak tezin son şeklini almasında önemli rolleri bulunan Prof. Dr. Hüseyin IRMAK ve Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmayı hazırlarken başından sonuna kadar geçirdiğim süreçte benden maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen her zaman yanımda hissettiğim sevgili aileme, bu çalışma için zaman zaman ihmal ettiğim manevi desteği ile her zaman yanımda olan eşim Merve BİLGİCİ'ye teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Sinan Serkan BİLGİCİ

Çankırı, Ağustos 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER DİZİNİ ..... **v**

1. GİRİŞ **1**

2. ÖN BİLGİLER **4**

3. BAZI KESİRSEL MERTEBEDEN TÜREVLERİN VE İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİ **9**

3.1 Riemann-Lioville Kesirsel İntegrali ve Bazı Özellikleri **9**

3.2 Riemann-Lioville Kesirsel Türevi ve Bazı Özellikleri **14**

3.3 Caputo Kesirsel Türevi ve Bazı Özellikleri **20**

4. LİNEER OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRSEL TÜREVLİ DENKLEM İÇEREN BİR BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMİNİN İNCELENMESİ **25**

5. TARTIŞMA VE SONUÇ **42**

KAYNAKLAR **44**

ÖZGEÇMİŞ **46**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$B(x)$	Beta fonksiyonu
$\mathscr{L}$	Laplace oparatörü
D	Klasik türev operatörü
I	Klasik integral operatörü
$C^0[0,T]$	[0,T] üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı
$C^n[0,T]$	[0,T] üzerinde tanımlı n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$AC[0,T]$	[0,T] üzerinde tanımlı mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$AC^n[0,T]$	[0,T] üzerinde tanımlı n. türevi $AC[0,T]$'de olan fonksiyonların uzayı
${}_{\mathrm{RL}}I^{\alpha}$	$\alpha-$mertebeden Riemann-Lioville kesirsel integral operatörü
${}_{\mathrm{RL}}D^{\alpha}$	$\alpha-$mertebeden Riemann-Lioville kesirsel türev operatörü
${}_{C}D^{\alpha}$	$\alpha-$mertebeden Caputo kesirsel türev Operatörü
$C^{\beta}([0,T])$	$\beta-$mertebeden R-L kesirsel türevi $C^0[0,T]$'de olan fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Kesirsel Analiz, matematiğin son zamanlardaki en hızlı gelişen ve en verimli konularından birisidir. Tarihi, her ne kadar Klasik Analiz kadar eskiye dayansa da ve Rieamann, Liouville, L'Hospital, Euler, Weyl gibi dönemin önemli matematikçilerinden katkılar alsa da 21. yüzyılın başlarına kadar Klasik Analiz kadar gelişme kaydedememiştir. Buna karşın son yirmi yıl içinde ise sadece matematikçilerin değil mühendislerin de gösterdiği çaba ile muazzam bir aşama katetmiştir. Klasik türevle veya klasik türev içeren diferansiyel denklemlerle modellenen birçok gerçek dünya probleminin kesirsel türev ile yeniden formüle edilebildiği ve kesirsel türevli modellerin bu problemleri daha iyi tasvir ettiği gösterilmiştir (Podlubny 1999, Tarasov 2010, Ortigueira 2011, Almeida *et al.* 2016). Bu birçok araştırmacıya yeni bir kesirsel türev ve integral tanımı ortaya çıkarmak için ayrı bir motivasyon kaynağı olmuş ve son zamanların en tartışmalı konularından biri olan kesirsel türev ve integral tanımı enflasyonuna neden olmuştur. Riemann-Liouville, Caputo, Grünwal-Letnikov, Hadamard, Weyl, Riesz kesirsel türev operatörlerine ek olarak Atangana-Baleanu, uyumlu, Srivastava-Machado, Katugampola ve Jumaire operatörleri son zamanlarda tanımlanan kesirsel türev operatörlerinin sadece birkaçıdır ve bununla ilgili yapılan bir derleme için De Oliveira ve Machado (2014) tarafından yapılan çalışmaya bakılabilir. Kesirsel türev operatörlerin ortaya çıkarılmasında iki ana motivasyon vardır. Birincisi, klasik türevin sağladığı tüm özellikleri sağlayacak şekilde operatörlerin geliştirilmeye çalışılmasıdır. İkincisi ise modellenen gerçek dünya problemlerini en iyi şekilde tasvir eden türev operatörünü bulma uğraşıdır. Bu çalışmada ise amacımız literatürde en çok çalışılan Riemann-Liouville kesirsel türev ve integrali ile Caputo kesirsel türev operatörlerini incelemektir.

Yukarıda da değindiğimiz gibi, birçok dünya fenomeninin modellenmesiyle adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler ve bunlara bağlı olarak başlangıç ve sınır koşulları ortaya çıkmıştır. Araştırmacılar bu denklemlerde yer alan klasik türevleri kesirsel türevli operatörle değiştirip problemin doğru ifade edilmesi için başlangıç ve sınır koşulları uygun hale getirerek bu fenomenleri yeniden modellemişlerdir. Elde edilen kesirli türev içeren başlangıç-değer ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı, tekliği ve davranışları

gibi bir çok özelliğini araştırılmıştır (Samko *et al.* 1993, Miller and Ross 1993, Podlubny 1999, Kilbas *et al.* 2006). Bu problemler için varlık ve teklik teoremlerinin önemi tartışılmazdır çünkü bunlar olmaksızın modellenen sistemleri doğru anlamak mümkün olmadığı gibi nasıl davranacaklarını kestirmek de mümkün değildir. Başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliğini ispatlamak için kullanılan yöntemlerden biri bu problemleri Volterra-tip integral denklemlere indirgemek ve indirgenmiş denklemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini araştırmaktır. Bunun için problemin içerdiği denklemin sağ-yan fonksiyonunun belli koşulları sağlaması önemli ve kritiktir, çünkü Webb (2019) ve Lan (2020) çalışmalarında bu indirgeme işlemlerinin eksik koşul altında yapılması durumunda ilgilenilen varlık ve teklik araştırması problemin çözümleri için değil sadece integral denklemi için olacağını göstermiştir. Volterra-tip denklemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini bulmak için bir çok yöntem, yaklaşım ve teori vardır. Bunlardan bazıları Tonelli yaklaşımı, ardışık yaklaşım yöntemi ve sabit nokta teorisidir (Laksmikantham and Vatsala 2008, Wu and Liu 2013, Delbosco and Rodino 1996). Volterra-tip denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğini araştırmak bu integral denkleme karşılık gelen integralle tanımlı operatörün sabit noktalarının varlığını ve tekliğini araştırmakla eşdeğerdir. Bu tip operatörlerin sabit noktalarının lokal varlığını ispatlamak için en çok kullanılan sabit nokta teoremi Schauder sabit nokta teoremidir. Sabit noktaların global varlığını göstermek için ise Schafer, Krasnoselski, Leray-Schauder alternatifi gibi bir çok teorem mevcuttur ve bir çok problem için uygulanmıştır (Delbosco and Rodino 1996, Kilsbas *et al.* 2004, Şan 2018, Şan and Sert 2020). Diğer yandan hem varlığı ve tekliği veren Banach sabit nokta teoreminin yanında Nagumo, Krasnoselskii-Krein, Kooi, Roger, Osgood tip gibi bir çok teklik teoremi literatürde mevcut olup (Lakshmikantham and Vatsala 2008, Lakshmikantham and Leela 2009 a,b, Diethelm 2012, Yörük *et al.* 2013, Şan and Sert 2020, Şan 2018, Delbosco and Rodino 1996) bu tip varlık teoremleri için Agarwal and Lakmikantham (1993) tarafından yazılan kitap önemli bir temel kaynaktır.

Bu çalışmanın ikinci amacı ise, $\sigma \in (1,2)$, $b \in \mathbb{R}$ ve D^{σ} operatörü $\sigma-$mertebeden kesirli türevli R-L türevini temsil etmek üzere

$$\begin{cases} D^{\sigma}\omega(x) = f\big(x, \omega(x), D^{\sigma-1}\omega(x)\big), \quad x > 0 \\ \omega(0) = 0, \quad D^{\sigma-1}\omega(x)\,|_{x=0} = b, \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde verilen başlangıç-değer probleminin çözümlerinin lokal varlığını f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında $\sigma - 1$ dereceden singülerliğe sahip olması durumunda göstermektir. Daha sonra bu problemin çözümünün tekliği için Nagumo-tip, Krasnoselskii-Krein-tip ve Osgoo-tip teklik teoremleri vermektir.

Bu problem daha önce f fonksiyonunun $[0,T] \times \mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli olması durumunda Yörük vd. (2013) tarafından ele alınmış problemin tekliği için Krasnoselskii-Krein-tip, Kooi-tip ve Roger-tip teklik teoremleri verilmiştir. f üzerindeki yine aynı süreklilik şartı altında ve f fonksiyonunun Lispchitz koşulu sağlaması durumunda Bai vd. (2014) bu problemin çözümünün varlığını ve tekliğini Banach sabit nokta teoremi yardımıyla göstermişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada alt ve üst çözüm metodu ile minimal ve maksimal çözümlerinin varlığını ispat edilmiştir. Bu çalışmalardan farklı olarak göz önüne aldığımız bu problem singüler denklem içeren bir problemdir ve son zamanlarda singüler denklemler üzerinde yapılan çalışmalar ile literatürde sıkça karşılaşılmaktadır (Li and Sarwar 2016, Şan 2018, Webb 2019, Şan and Sert 2020). Bu yönüyle bakıldığında, yapılan bu çalışmanın literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

2. ÖN BİLGİLER

Kesirsel Analizin gelişiminde yine en büyük katkı Klasik Analizin temel araçları ve teoremleridir. Kesirli türev ve integral operatörlerinin özelliklerini göstermek için aşağıda Klasik analizin önemli teoremlerine yer verilmiştir.

Teorem 2.1 (İntegralin Ortalama değer teoremi) $\omega \in C[0,T]$ ve $v \in L[0,T]$ olsun ve v fonksiyonunun $[0,T]$ aralığında işaret değiştirmediğini kabul edelim. Bu durumda

$$\int_0^T \omega(t)v(t)dt = \omega(c)\int_0^T v(t)dt \tag{2.1}$$

olacak şekilde $c \in (0,T)$ vardır (Rudin 1964).

Teorem 2.2 (Fubini Teoremi) $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ve $-\infty \leq c < d \leq \infty$ olmak üzere $f(x,y)$, $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki integrallerden en azından biri mutlak yakınsak ise bu durumda hepsi kesişir (Samko *et al.* 1993):

$$\int_{\omega_1} dx \int_{\omega_2} f(x,y)dy, \int_{\omega_2} dy \int_{\omega_1} f(x,y)dx, \iint_{\omega_1 x \omega_2} f(x,y)dxdy$$

Fubini Teoreminin özel bir durumu aşağıda verilmiştir:

Sonuç 1.2 (Dirichlet Formülü)

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$$

şeklinde tanımlanan formüle, eğer bu integrallerden en az biri mutlak yakınsaksa, Dirichlet Formülü denir (Samko *et al.* 1993).

Teorem 2.3 (Leibniz İntegral Formülü) $f(x,t)$, bir $R = \{(x,t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgensel bölgesinde tanımlı ve x değişkenine göre kısmi türevi mevcut olsun. Ayrıca, $a(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonları da $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve türevlenebilir olsun. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)}\right) f(x,t)\,dt = f(x,b(x))\frac{d}{dx}b(x) - f(x,a(x))\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

sağlanır ve bu eşitliğe Leibniz integral formülü denir (Edwards 2012).

Literatürde mevcut hemen hemen tüm kesirli türev ve integral operatörleri Gamma fonkiyonu içermektedir. Bu operatörlerin özelliklerini incelerken Beta fonksiyonu ile karşılaşırız ve bu fonksiyonun Gamma fonkiyonu olan ilişkisi ve bu özel fonksiyonların tanımları aşağıda verilmiştir (Samko *et al.* 1993).

Teorem 2.4 (Gamma Fonksiyonu) $\sigma \in \mathbb{C}$ ve $Re(\sigma) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(\sigma) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt.$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

Gamma fonksiyonu ile ilgili bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-t} dt = \lim_{M\to\infty} \left[-e^{-M} + 1\right] = 1$
- Her $\sigma \in \mathbb{R}$ için $\Gamma(1+\sigma) = \sigma\Gamma(\sigma)$
- $\Gamma(\sigma) = (\sigma-1)!$

Teorem 2.5 (Beta fonksiyonu) Bir diğer Euler integrali de iki değişkenli bir fonksiyon ile tanımlanır. Beta fonksiyonu, $x > 0$ ve $y > 0$ değerleri için

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

integrali ile tanımlanır.

Teorem 2.6 Beta ve Gamma fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Kesirli türev ve integral operatörlerinin en önemli özellikleri lineer operatör olmalarıdır. Diğer yandan inceleyeceğimiz operatörlerin hangi uzaylar üzerinde tanımlı oldukları anlayabilmek için aşağıda ilgili uzayların tanımları verilmiştir.

Tanım 2.1 (Lineer Operatör) T, $D(T)$ tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi, aynı cisim üzerinde vektör uzayı olan bir operatör olsun. Her $v, \omega \in D(T)$ ve her σ, β skaleri için

$$T(\sigma v + \beta \omega) = \sigma T v + \beta T \omega$$

oluyorsa T operatörüne lineer operatörü denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.2 (Sürekli Fonksiyonlar Uzayı) $[0,T]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı $C[0,T]$ ile gösterilir. Bu uzay üzerinde tanımlanan normlardan biri maksimum normudur ve $\omega \in C[0,T]$ olmak üzere

$$\|\omega\|_\infty := \max_{t\in[0,T]} |\omega(t)|$$

ile verilir.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n. türevi ω^n, $[0,T]$ üzerinde sürekli olan ω fonksiyonların uzayı ise $C^n = C^n[0,T]$ şeklinde gösterilir (Webb 2019).

Tanım 2.3 (Mutlak Sürekli Fonksiyonlar Uzayı) $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı bir $u(t)$ fonksiyonu mutlak süreklidir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir $[a_k, b_k] \subset$[0,T], $k = 1,2,\ldots,n$ ayrık kümeleri için $\sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı mutlak sürekli fonksiyonların uzayı $AC([0,T])$ ile gösterilir.

$AC^n[0,T]$ ile n. türevi $AC[0,T]$ sınıfından olan fonksiyonlar sınıfı ifade edilir (Webb 2019).

Tanım 2.4 (L^p Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}$ olsun. $p \geq 1$ olmak üzere p. mertebeden integrallenebilir, yani

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\omega(t)|^p dt < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan Lebesgue ölçülebilir $\omega(x)$ fonksiyonlarının kümesi $L^p = L^p(\Omega)$ ile gösterilir (Samko *et al.* 1993).

Teorem 2.7 (Hölder Eşitsizliği) $p,q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliği sağlansın. Bu durumda $\omega \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |\omega(t)v(t)|dt \leq \left(\int_\Omega |\omega(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır (Samko *et al.* 1993).

Teorem 2.8 Kompakt bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı gerçek değerli bir ω fonksiyonu için aşağıdaki koşullar denktir:

1) ω, mutlak süreklidir;

2) ω fonksiyonunun hemen hemen her yerde ω' türevi mevcuttur ve bu türev $L^1[a,b]$ sınıfından olup her $x \in [a,b]$ için

$$\omega(x) = \omega(a) + \int_a^x \omega'(t)dt$$

sağlanır.

3) $[a,b]$ üzerinde öyle bir $v \in L^1[a,b]$ fonksiyonu vardır ki her $x \in [a,b]$ için

$$\omega(x) = \omega(a) + \int_a^x v(t)dt$$

olur.

(1) ve (3)'ün denkliği, Lebesgue integral analizinin temel teoremi olarak bilinmektedir (Athreya and Lahiri 2006).

Göz önüne alınacak olan R-L kesirsel integral ve türev ile Caputo türev operatörleri birer konvolüsyon tipi operatörlerdir. Bu operatörlerin Laplace dönüşümlerini tanımlamak ve bulmak için aşağıdaki tanım ve teoremler verilmiştir:

Teorem 2.9 (Laplace Dönüşümü) Bir $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun tek yönlü Laplace dönüşümü, s kompleks sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\Omega(s) = \mathscr{L}(\omega(x)) &= \int_0^\infty e^{-sx}\omega(x)\,dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-sx}\omega(x)\,dt\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Samko *et al.* 1993).

Tanım 2.5 (Konvolüsyon) ω ve v, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış gerçel (veya kompleks) değerli fonksiyonlar olsun. ω ve v fonksiyonlarının konvolüsyonu $\omega * v$ ile gösterilir ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\omega * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega(t)v(x-t)dt$$

ile tanımlanır.

Yukarıdaki integralin üst sınırı x ve alt sınırını 0 alınarak bu formül

$$(\omega * v)(x) = \int_0^x \omega(t)v(x-t)dt$$

şeklinde de tanımlanır (Samko *et al.* 1993).

Teorem 2.10 (Konvolüsyon Teoremi) ω ve v fonksiyonları $[0,\infty]$ üzerinde tanımlı ve Laplace dönüşümünleri mevcut iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\mathscr{L}[\omega(x) * v(x)] = \mathscr{L}(\omega(x))\mathscr{L}(v(x))$$

gerçekleşir (Podlubny 1999).

Son bölümde, göz önüne alınan problemin çözümlerinin lokal varlığını bulmamıza yarayacak olan sabit nokta teoremi ve bununla ilişkili tanım ve teoremler aşağıda ifade edilmiştir.

Tanım 2.6 (Eşsüreklilik) $\mathscr{C}$, X normlu uzayında bir I kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir ailesi olsun. $\mathscr{C}$ ailesine eğer her $\varepsilon > 0$ için herhangi bir $\omega \in C$ ve keyfi $x, y \in I$ için $\|x-y\|_X < \delta$ olduğunda $|\omega(x) - \omega(y)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa I üzerinde eşsüreklidir denir (Rudin 1964).

Teorem 2.11 X ve Y normlu uzaylar ve $P : X \to Y$ bir operatör olsun. $P : X \to Y$ operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart dizisel sürekli olmasıdır, yani X uzayında $\omega_n \to \omega \in X$ olacak şekildeki keyfi bir $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ dizisi için Y uzayında $P\omega_n \to P\omega$ olmasıdır (Zeidler 1985).

Tanım 2.7 (Düzgün sınırlılık) $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, bir I kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların dizisi olsun. Eğer her $x \in I$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|\omega_n(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine düzgün sınırlıdır denir.
Eğer dizinin değil de bir fonksiyonlar ailesinin düzgün sınırlılığından bahsediyorsak; örneğin $\mathscr{C}$, bir I kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir ailesi ise her $x \in I$ ve her $\omega \in \mathscr{C}$ için $|\omega(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı varsa $\mathscr{C}$ kümesi düzgün sınırlıdır denir (Rudin 1964).

Teorem 2.12 (Schauder Sabit Nokta Teoremi) $\mathscr{C}$ kümesi bir X Banach uzayınının kapalı, sınırlı ve konveks altkümesi olsun. $\mathscr{S} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ operatörü sürekli ve $\mathscr{S}(\mathscr{C})$, I üzerinde eşsürekli ve düzgün sınırlı ise bu durumda $\mathscr{S}$ operatörünün $\mathscr{C}$ uzayında en az bir sabit noktası vardır (Zeidler 1985).

3. BAZI KESİRSEL MERTEBEDEN TÜREVLERİN VE İNTEGRALLERİN ÖZELLİKLERİ

3.1 Riemann-Liouville Kesirsel İntegrali ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.1 (Riemann-Lioville Kesirsel İntegrali) $\omega : D_\omega \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ olmak üzere,

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) := \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^x \frac{\omega(t)}{(x-t)^{1-\sigma}} dt \tag{3.1} $$

ile verilen integral mevcut ise bu integrale ω fonksiyonunun $\sigma-$mertebeden Riemann-Liouville (R-L) integrali denir. (3.1)'deki integral, $\omega(x) * \frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}$ biçiminde yazılabildiğinden konvolüsyonun tanımı gereğince (3.1)'de $\omega \in L^1[0,T]$ olması durumunda hemen hemen her $x \in [0,T]$ için mevcuttur. Ayrıca, $\omega \in C^0[0,T]$ ise bu integral her $x \in [0,T]$ vardır (Webb 2019).

Bazı fonksiyonların R-L integrali aşağıda verilmiştir:

Sonuç 3.1 1) $\omega(x) = 1$ olsun.

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^x (x-t)^{\sigma-1} dt $$

integralinde $t = x\tau$ değişken değiştirme yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (x - x\tau)^{\sigma-1} x d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 x^{\sigma} (1-\tau)^{\sigma-1} d\tau \\ &= \frac{x^{\sigma} B(1,\sigma)}{\Gamma(\sigma)} = \frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} \end{aligned} \tag{3.2} $$

bulunur.

2) $\omega(x) = x$ olsun.

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^x t\,(x-t)^{\sigma-1} dt $$

integraline yukarıda kullanılan değişken değişiminin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 x\tau\,(x-x\tau)^{\sigma-1}\,x d\tau \\ &= \frac{x^{1+\sigma}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 \tau\,(1-\tau)^{\sigma-1}\,d\tau \\ &= \frac{x^{1+\sigma}B(2,\sigma)}{\Gamma(\sigma)} = \frac{x^{1+\sigma}}{\Gamma(2+\sigma)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir.

3) Daha genel olarak, $\omega(x) = x^n$ $(n \geq 0, n \in \mathbb{R})$ olsun.

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x t^n\,(x-t)^{\sigma-1}\,dt$$

integralinden, benzer değişken değişimi ile

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 (x\tau)^n\,(x-x\tau)^{\sigma-1}\,x d\tau \\ &= \frac{x^{n+\sigma}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 \tau^n\,(1-\tau)^{\sigma-1}\,d\tau \\ &= \frac{x^{n+\sigma}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\sigma+1)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Kolayca görüleceği üzere, (3.4)'deki formülde $n = 0$ ve $n = 1$ alınması durumunda sırasıyla (3.2) ve (3.3)'deki formülleri elde edilir.

Özellikle kesirsel türevli denklemlerin integral denklemlere indirgenmesinde kullanılan R-L kesirsel integralinin yarı grup özelliği aşağıda verilmiştir (Samko *et al.* 1993):

Teorem 3.1 $\sigma, \beta > 0$ ve $\omega \in L^1[0,T]$ olmak üzere hemen her $x \in [0,T]$ için

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\beta}\omega(x) =_{\mathrm{RL}} I^{\sigma+\beta}\omega(x)$$

sağlanır.

İspat. R-L kesirsel integralin tanımından

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\beta}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{{}_{\mathrm{RL}}I^{\beta}\omega(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\left[\int_0^x \frac{\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{\omega(s)}{(t-s)^{1-\beta}}ds}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\int_0^t \frac{\omega(s)}{(t-s)^{1-\beta}}ds\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son integralde Teorem 2.2 ile verilen Dirichlet formülü kullanılırsa

$$
{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\beta}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^x \omega(s)\,ds\int_s^x \frac{1}{(x-t)^{1-\sigma}(t-s)^{1-\beta}}dt\right] \tag{3.5}
$$

bulunur. Şimdi, (3.5)'te yer alan

$$
I(x,s) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\int_s^x (x-t)^{\sigma-1}(t-s)^{\beta-1}dt
$$

integralini hesaplamak için bu integralde $t = s+\tau(x-s)$ değişken değişimi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
I(x,s) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (x-(s+\tau(x-s)))^{\sigma-1}(\tau(x-s))^{\beta-1}(x-s)\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (x-s)^{\sigma-1}(1-\tau)^{\sigma-1}\tau^{\beta-1}(x-s)^{\beta-1}(x-s)\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (x-s)^{\sigma+\beta-1}\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\sigma-1}d\tau \\
&= \frac{(x-s)^{\sigma+\beta-1}}{\Gamma(\sigma+\beta)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (3.5)'te yerine konursa

$$
{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\beta}\omega(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\beta)}\int_0^t \omega(s)(t-s)^{\sigma+\beta-1}ds = {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma+\beta}\omega(t)
$$

şeklindeki istenen sonuç elde edilmiş olur.

Aşağıdaki iki teorem açıkça ispat edilmemekte birlikte birçok kaynakta ilgili sonuç kullanılmaktadır (Kilbas *et al.* 2006, Webb 2019).

Teorem 3.2 R-L kesirli integral operatörü sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde lineer sınırlı bir operatördür, yani $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ve $\omega, v \in C^0([0,T])$ $(T>0)$ için $\|.\|$, maksimum normunu işaret etmek üzere aşağıdakiler gerçekleşir:

(i) ${}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}(\lambda\omega+\mu v)=\lambda\,{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega+\mu\,{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}(v)$,

(ii) $C=\frac{T^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}$ olmak üzere

$$\|{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega\|\leq C\,\|\omega\|\,. \tag{3.6}$$

İspat. (i) R-L kesirli integral operatörü integralle tanımlı olup integralin linerliği kullanılarak; $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ve $\omega,v\in C^{0}([0,T])$ için

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}(\lambda u+\mu v) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{\lambda u(t)+\mu v(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\left[\int_0^x\frac{\lambda u(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt+\frac{\mu v(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{\lambda u(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt+\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{\mu v(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&= \lambda\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{u(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt+\mu\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{v(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&= \lambda\,{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}u(x)+\mu\,{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}v(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu, ${}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}$ operatörünün lineerliğini verir.

(ii)

$$\|\omega\|:=\max_{x\in[0,T]}|\omega(x)|$$

olmak üzere, $\omega\in C^{0}([0,T])$ ve $x\in[0,T]$ için

$$\begin{aligned}
|{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{\omega(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{|\omega(t)|}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{\max_{t\in[0,T]}|\omega(t)|}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&= \frac{x^{\sigma}\,\|\omega\|}{\sigma\Gamma(\sigma)}\leq\frac{T^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}\,\|\omega\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$|{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)|\leq\frac{T^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}\,\|\omega\| \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $[0,T]$ üzerinden maksimum alınarak istenilen elde edilir.

Sonuç 3.2 ω, $[0,T]$ $(T>0)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$I^{\sigma}\omega(0)=0$$

sağlanır.

İspat. (3.7) eşitsizliğinde $T\to 0$ alınırsa istenilen kolayca elde edilir.
Aşağıdaki teorem Riemann-Liouville kesirsel türevinin hangi uzaylarda tanımlabileceğini veren önemli bir teoremdir (Webb 2019).

Teorem 3.3 $\sigma>0$ olmak üzere ${}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}$ operatörü, $AC([0,T])$ uzayını $AC([0,T])$ uzayına resmeder.

İspat. $\omega\in AC([0,T])$ olsun. O halde, Teorem 2.8 gereğince $\omega'\in L^1([0,T])$ vardır ve her t için $\omega(x)-\omega(0)=I\omega'(x)=\int_0^x\omega'(t)dt$ sağlanır. Bu durumda

$$I^{\sigma}\omega(x)=I^{\sigma}(I\omega'(x)+\omega(0))=I^{\sigma}I\omega'(x)+I^{\sigma}\omega(0)=II^{\sigma}\omega'(x)+\omega(0)\frac{x^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)} \quad (3.8)$$

olur. Burada $\omega'\in L^1([0,T])$ olduğundan $I^{\sigma}\omega'\in L^1([0,T])$ olur. Bu ise Teorem 2.8 gereğince $I(I^{\sigma}\omega')\in AC([0,T])$ olmasını gerektirir. $\sigma>0$ ve $x^{\sigma}=\int_0^x\frac{t^{\sigma-1}}{\sigma}dt$ olduğundan $x^{\sigma}\in AC([0,T])$ demektir. O halde (3.8)'un sağ yanındaki iki terim de $AC([0,T])$ sınıfındandır ve böylece toplamları da $AC([0,T])$ uzayındadır. Bu ise (3.8)'un sol tarafının, yani $I^{\sigma}\omega$ fonksiyonun $AC([0,T])$ uzayının elemanı olduğu gösterir.

Bu altbölümün son sonucu olan R-L integralinin Laplace dönüşümünü bulmak için önce aşağıdaki sonucu verip ispatlayalım (Podlubny 1999).

Lemma 3.1 $\sigma>0$ olmak üzere

$$\mathscr{L}(x^{-\sigma})=\frac{\Gamma(1-\sigma)}{s^{1-\sigma}}$$

gerçekleşir.

İspat.

$$\mathscr{L}(x^{-\sigma})=\int_0^{\infty}x^{-\sigma}e^{-sx}dx$$

integralinde $u = sx$ dönüşümü yapılır ve Gamma fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x^{-\sigma}) = &\int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^{-\sigma} e^{-u}\frac{du}{s} = s^{\sigma-1}\int_0^\infty u^{-\sigma}e^{-u}du \\ =&s^{\sigma-1}\Gamma(1-\sigma) = \frac{\Gamma(1-\sigma)}{s^{1-\sigma}}\end{aligned}$$

şeklindeki istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.4 $\hat{u}$, ω fonksiyonun Laplace dönüşümü olmak üzere $\mathscr{L}\{{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)\} = \frac{\hat{\omega}}{s^{\sigma}}$ sağlanır (Podlubny 1999).

İspat. $\hat{u} = \mathscr{L}\{\omega(x)\}$ olduğunu kabul edelim. Lemma 3.1 gereğince $\mathscr{L}\{t^{\sigma-1}\} = \frac{\Gamma(1-\sigma)}{s^{1-\sigma}}$ olduğu ve R-L kesirsel integralinin $\omega(x)$ ile $x^{\sigma-1}$ fonksiyonun konvolüsyonu olduğu göz önüne alınırsa, Teorem 2.10 ile verilen konvolüsyon teoremi gereğince

$$\begin{aligned}\mathscr{L}({}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)) &= \mathscr{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \omega(x)(x-t)^{\sigma-1}dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\mathscr{L}\left(\omega(x) * x^{\sigma-1}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\mathscr{L}(\omega(x))\mathscr{L}(x^{\sigma-1}) = \frac{\hat{\omega}(s)}{s^{\sigma}}\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

3.2 Riemann-Liouville Kesirsel Türevi ve Bazı Özellikleri

Aşağıda verilen kesirsel türevin tanımı Delbosco and Rodino 1996, Li and Deng 2007 ve Webb 2019 çalışmalarından alınmıştır.

Tanım 3.2 (Riemann-Lioville Kesirsel Türevi) $\omega : D_\omega \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $0 < \sigma < 1$ olmak üzere,

$${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\omega(t)}{(x-t)^{\sigma}}dt$$

eşitliğinin sağ tarafı mevcut ise bu türeve, ω fonksiyonunun $\sigma-$mertebeden Riemann-Liouville (R-L) türevi denir.

Yukarıdaki tanımdan anlaşılacağı üzere R-L türevi operatörü ile R-L integral operatörü arasında aşağıdaki gibi yakın bir ilişki vardır:

$${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}(.) := \frac{d}{dx}\quad {}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}(.). \tag{3.9}$$

Biliyoruz ki $\omega \in L^1[0,T]$ olduğunda ${}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}(\omega)$ hemen hemen her $x \in [0,T]$ için mevcuttur. Teorem 2.8 ile verilen mutlak sürekliliğin denk tanımları göz önüne alındığında ${}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli olması durumunda (3.9) eşitliğinden ${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega$ fonksiyonun hemen hemen her $x \in [0,T]$ mevcut olduğu söylenebilir. Ayrıca, Teorem 3.3 gereğince ${}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli olması için ω fonksiyonunun mutlak sürekli olması yeterlidir. Diğer yandan, ${}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığı üzerinde veya $(0,T]$ üzerinde sürekli türevlenebilir ise, ${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega$ fonksiyonu sırasıyla $[0,T]$ veya $(0,T]$ üzerinde süreklidir.

Yüksek mertebeden R-L kesirsel türevi ise şu şekilde tanımlanmaktadır: $m-1 \leq \sigma < m \in Z^+$ olmak üzere

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\,{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma-m}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\sigma)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_0^t (t-\tau)^{m-\sigma-1}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{3.10} $$

Eğer $I^{\sigma-m}\omega(x), AC^m[0,T]$ sınıfından ise sağ taraftaki integral hemen hemen her $x \in [0,T]$ için mevcut olup aynı x noktaları için ${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)$ mevcuttur. Eğer $I^{\sigma-m}\omega(x), C^m[0,T]$ sınıfından ise ${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)$ her $x \in [0,T]$ için tanımlıdır.

Aşağıda bazı fonksiyonların R-L türevleri verilmiştir.

- $\omega(x) = c$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

  $$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{c}{(x-t)^{\sigma}}dt $$

  integralinde $t = x\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa

  $$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^1 x^{1-\sigma}(1-\tau)^{-\sigma}d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{1-\sigma}\Gamma(1)\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(2-\sigma)}\right] \\ &= \frac{c(1-\sigma)x^{-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)} = \frac{cx^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \end{aligned} $$

  elde edilir.

Not. Bu sonuç, klasik türevden farklı olarak sabit fonksiyonun R-L anlamında türevinin sıfır olmadığını göstermektedir. Aşağıdaki sonuç ise hangi tipte fonksiyonların R-L türevlerinin sıfır olacağını gösterir.

- $\omega(x) = cx^{\sigma-1}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{ct^{\sigma-1}}{(x-t)^{\sigma}}dt $$

integralinde $t = x\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) &= \frac{c}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{(x\tau)^{\sigma-1}}{x^{\sigma}(1-\tau)^{\sigma}}xd\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \tau^{\sigma-1}(1-\tau)^{-\sigma}d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1)}\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.11} $$

olur.

- $\omega(x) = x^n$ $(n > 0, n \in \mathbb{R})$ olsun.

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^n}{(x-t)^{\sigma}}dt $$

integralinde $t = x\tau$ değişken değiştirmesi yapılmasıyla

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{(x\tau)^n}{x^{\sigma}(1-\tau)^{\sigma}}xd\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^1 x^{n+1-\sigma}\tau^n(1-\tau)^{-\sigma}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1-\sigma}\Gamma(n+1)\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(n+2-\sigma)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\sigma)}t^{n-\sigma} \end{aligned} \tag{3.12} $$

bulunur.

Aşağıda R-L kesirsel türevinin alt ve üst terminal özelliğinin varlığı, yani R-L kesirsel türevinin $\sigma \to 0^+$ ve $\sigma \to 1^-$ durumlarında incelenecektir. Daha genel sonuçlar için Li ve Deng (2007) tarafından yapılan çalışmaya bakılabilir.

Teorem 3.5 ω, $[0,T]$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

a) $\lim_{\sigma\to 0^+} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) = \omega(x)$,

b) $\lim_{\sigma\to 1^-} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) = \omega'(x)$.

İspat. a)

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \omega(t)(x-t)^{-\sigma}dt\right] $$

integralinde kısmi integrasyon yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\frac{-\omega(0)x^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\int_0^x \frac{\omega'(t)(x-t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left[\omega(0)x^{-\sigma}+\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\omega'(t)(x-t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}dt\right] \end{aligned} \tag{3.13} $$

bulunur. Son eşitlikteki integralin çekirdeği sürekli olduğundan integral ile limit yer değiştirebilir. $\sigma\to 1^-$ için (3.13) ifadesinin limiti alınır ve $\Gamma(0)=\infty$ olduğu kullanılırsa

$$ \begin{aligned} \lim_{\sigma\to 1^-} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(t) &= \lim_{\sigma\to 1^-}\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left[\omega(0)x^{-\sigma}+\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\omega'(t)(x-t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}dt\right] \\ &= \lim_{\sigma\to 1^-}\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left[\omega(0)x^{-\sigma}\right]+\frac{d}{dx}\int_0^x \lim_{\sigma\to 1^-}\frac{\omega'(t)(x-t)^{1-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)}dt \\ &= \frac{d}{dx}\int_0^x \omega'(t)\,dt=\omega'(x) \end{aligned} $$

elde edilir.

b) Şimdi ise yine $\sigma\to 0^+$ için (3.13) ifadesinin limit alınır ve $\Gamma(1)=1$ olduğu kullanılırsa

$$ \begin{aligned} \lim_{\sigma\to 0^+} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) &= \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left[\omega(0)x^{-\sigma}+\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\omega'(t)(x-t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}dt\right] \\ &= \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\omega(0)x^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)}+\frac{d}{dx}\int_0^x \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\omega'(t)(x-t)^{1-\sigma}dt \\ &= \omega(0)+\frac{d}{dx}\int_0^x \omega'(t)(x-t)\,dt \end{aligned} $$

eşitliği elde edilir. Son integrale Leibniz integral formülü uygulanırsa

$$ \begin{aligned} \lim_{\sigma\to 0^+} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x) &= \omega(0)+\omega'(x)(x-x)\frac{d(x)}{dx}-\omega'(0)(x-0)\frac{d(0)}{dx} \\ &\quad +\int_0^x \frac{\partial\left(\omega'(t)(x-t)\right)}{\partial x}dt=\omega(t) \end{aligned} $$

elde edilir.

Buradan anlaşılacağı gibi, R-L kesirsel türevi $\sigma\to 1^-$ durumunda klasik anlamdaki türeve, $\sigma\to 0^+$ ise fonksiyonun kendisine eşittir.

Teorem 3.6 $0 < \sigma < 1$ olmak üzere her $\omega \in L^1$ fonksiyonu için

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}} I^{\sigma} \omega(x) = \omega(x) \tag{3.14} $$

hemen hemen her x için sağlanır (Delbosco and Rodino 1996).

İspat. (3.9)'dan ve R-L integralinin (3.1) ile verilen yarı grup özelliğinden

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}} I^{\sigma} \omega(x) = D I^{1-\sigma}_{\mathrm{RL}} I^{\sigma} \omega(x) = D I \omega(x) $$

bulunur. Burada, D klasik anlamda bilinen türev ve I klasik anlamda bilinen integral olup $\omega \in L^1$ fonksiyonu ve hemen hemen her x için $DI\omega = \omega$ olduğundan (3.14)'ün hemen hemen her x için sağlandığı açıktır.

Sonuç 3.3 $0 < \sigma < 1$ olmak üzere her R-L türevlenebilir ω fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik sağlanmaz.

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma} \omega(x) = \omega(x), \tag{3.15} $$

yani

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}} I^{\sigma} \omega(x) \neq_{\mathrm{RL}} I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma} \omega(x) $$

gerçekleşir.

İspat. $\omega(x) = cx^{\sigma-1} + x$ olsun ve

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma} \omega(x) \neq \omega(x) $$

olduğunu gösterelim. R-L kesirsel türev ve integral operatörleri lineer olduğundan

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma} \left(cx^{\sigma-1} + x \right) = c\,{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma} \left(x^{\sigma-1} \right) +_{\mathrm{RL}} I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma}(x) $$

olarak yazılabilir.

Yukarıdaki son eşitliğin sağ tarafındaki ilk terime (3.11), ikinci terime ilk önce (3.12) ve sonra (3.4)'deki genel formüller uygulanırsa

$$ {}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}_{\mathrm{RL}} D^{\sigma} \left(cx^{\sigma-1} + x \right) = x $$

elde edilir. Sonuç olarak, R-L türevlenebilir keyfi bir ω fonksiyonu için

$$_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x) =_{\mathrm{RL}} I^{\sigma}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)$$

şeklindeki bir eşitlikten söz edilemez.

Şimdi, Riemann-Liouville kesirsel analizinin ortalama değer teoremini ifade edelim (Şan and Sert 2020):

Teorem 3.7 $\sigma \in (0,1)$ olmak üzere $\omega \in \{\omega \in C[0,T] : D^{\sigma}\omega \in C[0,T]\}$ olsun. Bu durumda,

$$\omega(x) = x^{\sigma}\frac{D^{\sigma}\omega(\mu(x))}{\Gamma(1+\sigma)}$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < \mu(x) < x$ olacak şekilde $\mu : [0,T] \to (0,T)$ fonksiyonu vardır.

İspat. $I^{\sigma}D^{\sigma}\omega(x) = \omega(x)$ olduğundan,

$$\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{D^{\sigma}\omega(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \tag{3.16}$$

olarak yazılabilir. (3.16) eşitliğine Teorem 2.1 ile verilen integralin ortalama değer teoremi uygulanırsa $0 < \mu(x) < x$ olacak şekilde $\mu : [0,T] \to (0,T)$ için

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{D^{\sigma}\omega(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \\
&= \frac{D^{\sigma}(\omega(\sigma(x)))}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \\
&= \frac{D^{\sigma}(\omega(\sigma(x)))}{\Gamma(\sigma)}\int_x^0 \frac{-du}{u^{1-\sigma}} \\
&= \frac{D^{\sigma}(\omega(\sigma(x)))}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma}
\end{aligned}$$

bulunur.

R-L kesirsel türevinin özellikleri ile ilgili son olarak Laplace dönüşümü verilecektir (Podlubny 1999):

Teorem 3.8 $\hat{\omega}$, ω fonksiyonun Laplace dönüşümü olmak üzere

$$\mathscr{L}(_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)) = s^{\sigma}\hat{\omega}(s) - I^{1-\sigma}\omega(0)$$

sağlanır.

İspat. (3.9)'daki ${}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}(.) := \frac{d}{dx}{}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}(.)$ ilişkisi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}({}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)) &= \mathscr{L}(\frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\int_0^x \omega(t)(x-t)^{-\sigma}dt)\\ &= \mathscr{L}\Big(\frac{d}{dx}\left[{}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(x)\right]\Big)\\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{d}{dx}\left[{}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(x)\right]dx\end{aligned}$$

olur. Sondaki integralde kısmi integrasyonu yöntemiyle Teorem 3.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathscr{L}({}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\omega(x)) &= \left[\lim_{R\to\infty} e^{-sx}{}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(x)\Big|_0^R + s\int_0^R e^{-sx}{}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(x)dx\right]\\ &= \lim_{R\to\infty} e^{-sR}I^{1-\sigma}\omega(R) - {}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(0) + s\mathscr{L}({}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(x))\\ &= s\frac{\hat{\omega}(s)}{s^{1-\sigma}} - {}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(0)\\ &= s^{\sigma}\hat{\omega}(s) - {}_{\mathrm{RL}}I^{1-\sigma}\omega(0)\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3 Caputo Kesirsel Türevi ve Bazı Özellikleri

Tanım 3.3 (Caputo Kesirsel Türevi) $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $0<\sigma<1$ mertebeden Caputo (C) türevi

$${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^x \frac{\omega'(t)}{(x-t)^{\sigma}}dt \quad (0<\sigma<1)$$

integrali ile tanımlanır (Caputo 1967).

Eğer $\omega\in AC[0,T]$ ise bu durumda ${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x)$ hemen hemen her $x\in[0,T]$ için mevcuttur. $\omega\in C^1[0,T]$ olması durumunda ise ${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x)$ her $x\in[0,T]$ için tanımlı üstelik süreklidir. Aşağıda bazı fonksiyonların Caputo türevleri verilmiştir.

- $\omega(x)=c$ olsun. Açıktır ki, ${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}u(c)=0$ olur.

- $\omega(x)=x$ olsun.

$${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\sigma}}dt$$

integralinde $t = \tau x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^1 \frac{1}{x^{\sigma}(1-\tau)^{\sigma}} x d\tau \\ &= \frac{x^{1-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^1 (1-\tau)^{-\sigma} d\tau \\ &= \frac{x^{1-\sigma}B(1,1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)} = \frac{x^{1-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)} \end{aligned}$$

bulunur.

- Daha genel olarak, $\omega(x) = x^n$ $(n \geq 1)$ olsun. Daha önce kullanılan yöntemle

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^x \frac{n(\tau x)^{n-1}}{t^{\sigma}(1-x)^{\sigma}} x d\tau \\ &= \frac{nx^{n-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^1 \tau^{n-1}(1-\tau)^{-\sigma} d\tau \\ &= \frac{nx^{n-\sigma}B(n,1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)} = \frac{\Gamma(n)nx^{n-\sigma}}{\Gamma(n+1-\sigma)} \end{aligned}$$

genel formülü elde edilir.

Teorem 3.9 $0 < \sigma < 1$ olmak üzere $[0,T]$ üzerinde her türevlenebilir ω fonksiyonu için

$$ {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) =_{\mathrm{RL}} D^{\sigma}(\omega(x) - \omega(0)) \tag{3.17}$$

sağlanır (Kilbas *et al.* 2006).

İspat. ω fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olduğundan İntegralin Temel Teoremi gereğince her $x \in [0,T]$ için

$$\omega(x) = \omega(0) + \int_0^x \omega'(t)\,dt$$

yazılabilir. Bu ifade ve R-L türevinin tanımı gereğince

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}(\omega(x) - \omega(0)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{\omega(t)-\omega(0)}{(x-t)^{\sigma}}dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{\omega(0)+\int_0^t \omega'(s)\,ds-\omega(0)}{(x-t)^{\sigma}}dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\sigma}}dt\int_0^t \omega'(s)\,ds\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son integralde Dirichlet formülü uygulanmasıyla

$$ {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}(\omega(x) - \omega(0)) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \omega'(s)\,ds\int_s^x \frac{1}{(x-t)^{\sigma}}dt\right] \tag{3.18}$$

bulunur. Şimdi, (3.18) de yer alan integralde ilk önce $x-t=m$ dönüşümü yapılır ve elde edilen integral hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\left(\omega(x)-\omega(0)\right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \omega'(s)\,ds\int_{x-s}^{0} -m^{-\sigma}dm\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{\omega'(s)}{(x-s)^{\sigma-1}(1-\sigma)}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{\omega'(s)}{(x-s)^{\sigma-1}}ds\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Son integrale Leibniz integral formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\left(\omega(x)-\omega(0)\right) &= \frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\left[\frac{d(x)}{dx}\frac{\omega'(s)}{(x-x)^{\sigma-1}} - \frac{d(0)}{dx}\frac{\omega'(s)}{x^{\sigma-1}}\right] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\left[\int_0^x \frac{d}{dx}\left[\frac{\omega'(s)}{(x-s)^{\sigma-1}}\right]ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\int_0^x \omega'(s)(1-\sigma)(x-s)^{-\sigma}\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\int_0^x \frac{\omega'(s)}{(x-s)^{\sigma}}ds = {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.10 $0<\sigma<1$ olmak üzere $[0,T]$ üzerinde her türevlenebilir ω fonksiyonu için

$${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)=\omega(x)$$

sağlanır (Kilbas *et al.* 2006).

İspat. $v(x)={}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)$ olsun. Teorem 3.9 ile elde edilen

$${}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}v(x)={}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\left(v(x)-v(0)\right)$$

ifadesinde $v(x)$ yerine yazıp sırasıyla RL kesirli türevinin lineerliğini ve ${}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(0)=0$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}v(t) &= {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\left(v(x)-v(0)\right) \\
&= {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}\left({}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)-{}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(0)\right) \\
&= {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)-{}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(0) \\
&= {}_{\mathrm{RL}}D^{\sigma}_{\mathrm{RL}}I^{\sigma}\omega(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Li ve Deng (2007) tarafından yapılan çalışmada, Caputo kesirsel türevinin alt ve üst terminal özelliğinin var olmadığı elde edilmiştir. Şimdi bu sonucu hatırlatalım:

Teorem 3.11 ω, $[0,T]$ üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $\lim_{\sigma\to 0^+} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) = \omega(x) - \omega(0)$,

ii) $\lim_{\sigma\to 1^-} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) = \omega'(x)$.

İspat. i)

$$ {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left[\int_0^x \omega'(t)(x-t)^{-\sigma}dt\right]$$

integralinde kısmi integrasyon yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)}\left[\frac{\omega'(0)x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \int_0^x \frac{\omega''(t)(x-t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\sigma)}\left[\omega'(0)x^{1-\sigma} + \int_0^x \omega''(t)(x-t)^{1-\sigma}dt\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) ifadesinin $\sigma \to 0^+$ için limit alınırsa, integralin çekirdeği sürekli olduğundan integral ile limit yer değiştirebilir, yani

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma\to 0^+} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) &= \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\omega'(0)x^{1-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)} + \int_0^x \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{\omega''(t)(x-t)^{1-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)}dt \\ &= \omega'(0)x + \int_0^x \omega''(t)(x-t)dt \\ &= \omega'(0)x + \int_0^x \omega''(t)xdt - \int_0^x \omega''(t)tdt \end{aligned}$$

bulunur. Yukaridaki son integralde kısmı integrasyon yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma\to 0^+} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) &= \omega'(0)x + \omega'(x)x - \omega'(0)x - (x\omega'(x) - 0.\omega'(0) - \omega(x) + \omega(0)) \\ &= \omega(x) - \omega(0) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\sigma \to 1^-$ için (3.19)'in her iki yanının limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 1^-} {}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x) &= \lim_{\sigma\to 1^-}\frac{\omega'(0)(x)^{1-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)} + \int_0^x \lim_{\sigma\to 1^-}\frac{\omega''(t)(x-t)^{1-\sigma}}{\Gamma(2-\sigma)}dt \\ &= \omega'(0) + \int_0^x \omega''(t)\,dt \\ &= \omega'(0) + \omega'(x) - \omega'(0) \\ &= \omega'(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak aşağıda C kesirsel türevinin Laplace dönüşümü verilecektir (Podlubny 1999).

Teorem 3.12 $\hat{\omega}$, ω fonksiyonun Laplace dönüşümü olmak üzere

$$\mathscr{L}({}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x)) = s^{\sigma}\hat{\omega}(s) - s^{\sigma-1}\omega(0)$$

sağlanır.

İspat. Konvolüsyonun tanımından

$$\mathscr{L}({}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x)) = \mathscr{L}(\omega'(t) * \frac{x^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)})$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte, $\omega'(x)$ ve $x^{-\sigma}$ Laplace dönüşümleri sırasıyla

$$\mathscr{L}(\omega'(x)) = s\hat{\omega}(s) - \omega(0)$$

fonksiyonlarının ve

$$\mathscr{L}(x^{-\sigma}) = \frac{\Gamma(1-\sigma)}{s^{1-\sigma}}$$

olduğunu kullanılırsa Teorem 2.10 ile verilen konvolüsyon teoremi gereğince

$$\begin{aligned}\mathscr{L}({}_{\mathrm{C}}D^{\sigma}\omega(x)) &= (s\hat{\omega}(s) - \omega(0))\frac{1}{s^{1-\sigma}} \\ &= s^{\sigma}\hat{\omega}(s) - s^{\sigma-1}\omega(0)\end{aligned}$$

elde edilir.

4. LİNEER OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRSEL TÜREVLİ DENKLEM İÇEREN BİR BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, $\sigma \in (1,2)$, $b \in \mathbb{R}$ ve D^{σ} operatörü $\sigma-$mertebeden kesirli türevli R-L türev operatörünü göstermek üzere

$$\begin{cases} D^{\sigma}\omega(x) = f\big(x, \omega(x), D^{\sigma-1}\omega(x)\big), \quad x > 0 \\ \omega(0) = 0, \quad D^{\sigma-1}\omega(x)\,|_{x=0} = b, \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde verilen başlangıç-değer problemin göz önüne alınmıştır. Problemin, $C^{\sigma-1}[0,T] = \big\{\omega \in C[0,T] : D^{\sigma-1}\omega \in C[0,T]\big\}$ uzayındaki çözümünün lokal varlığı ve tekliği denklemin sağ tarafındaki f fonksiyonunun

(C1) $\quad f(x,t_1,t_2) \in C\big((0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\big)$ ve $x^{\sigma-1}f(x,t_1,t_2) \in C\big([0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\big)$,

ile verilen koşulu sağlaması durumunda araştırılmıştır. Bu araştırma, (C1) koşulu altında singüler R-L kesirsel mertebeden denklemi içeren bu problemi tek katlı singülerliğe sahip Volterra-tip integral denkleme dönüştürme ve bu denklemin çözümlerinin varlığı ve tekliğini araştırma yoluyla yapılmıştır. (4.1) problemi ile Volterra-tip denklemin çözümlerinin denkliği Lemma 4.1 ile verilmiştir. Volterra-tip integral denklemin çözümünün lokal varlığı ise denkleme karşılık gelen operatörün sabit noktalarının varlığı gösterilerek elde edilmiş olup bu ise Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla Teorem 4.2'de ispat edilmiştir. (4.1) problemi için ilk teklik teoremi Teorem 4.3 ile verilen Nagumo-tip teklik teoremi olup bu teoremde, denklemin sağ yanındaki fonksiyonun Nagumo-tip bir koşulu sağladığı varsayılmıştır. Bu teoremde, L Nagumo sabiti üzerinde ağır bir koşul mevcuttur. Bu koşulu hafifletmek için ayrı bir koşul ortaya koyulup bu Krasnoselski-Krein-tip teklik teoremi ile Teorem 4.4 ile verilmiştir. Son olarak ise, bu problem için Osgood-tip teklik teoremi (Teorem 4.5) verilmiş ve bu teorem ilgili bir örnek oluşturulmuştur.

Ana sonuçlara değinmeden önce (4.1) probleminin çözümlerinin hangi uzayda aranacağını ve bu uzayın özelliğini ifade eden aşağıdaki teoremi verelim (Delbosco 1994):

Teorem 4.1 $0 < \beta < 1$ olmak üzere $\beta-$mertebeden sürekli R-L kesirsel türevi mevcut olan $[0,T]$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C^{\beta}([0,T])$ ile gösterilecektir, yani

$C^{\beta}([0,T]) := \left\{ \omega \in C([0,T]) : D^{\beta}\omega(x) \in C([0,T]) \right\}$ şeklindedir. Bu uzay,

$$||\omega||_{\beta} = ||\omega||_{\infty} + ||D^{\beta}\omega||_{\infty}$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

Şimdi yukarıda bahsettiğimiz problem (4.1) ile buna karşılık gelen Volterra-tip denklemin çözümlerinin denkliğini ifade eden aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1 (C1) koşulu altında, eğer $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$, (4.1) probleminin bir çözümü ise, o zaman $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$ fonksiyonu

$$\omega(x) = \frac{b}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \tag{4.2}$$

integral denkleminin de bir çözümüdür ve karşıtı da geçerlidir.

İspat. $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$, (4.1) ile verilen başlangıç-değer probleminin bir çözümü olduğunu varsalım ve (4.2) ile verilen integral deneklemin bir çözümü olduğunu gösterelim. Öncelikle, $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$ oluşundan ve (C1) koşulundan, $f(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x))$ fonksiyonunun $(0,T]$ üzerinde ve $x^{\sigma-1}f(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x))$ fonksiyonunun ise $[0,T]$ üzerinde sürekli olduğu çıkarılabilir. Buradan, ayrıca

$$\int_0^T |f(x,\omega(x))|dx = \int_0^T \frac{1}{x^{\sigma-1}}\left|x^{\sigma-1}f(x,\omega(x))\right|dx \leq M\int_0^T \frac{1}{x^{\sigma-1}}dx \leq \frac{MT^{2-\sigma}}{2-\sigma} < \infty$$

elde edilir ki bu $f(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x))$ fonksiyonunun $[0,T]$ üzerinde integrallenebilir olduğu anlamına gelir. O halde, $f(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x)) \in C(0,T]\cap L^1[0,T]$ olur. Bu ise (4.2) sağlandığından $D^{\sigma}\omega(x) \in C(0,T]\cap L^1[0,T]$ olmasını gerektirir. Buradan, (4.1)'in her iki tarafının integralinin alınması ve ardından $ID^{\sigma} = IDD^{\sigma-1}$ eşitliğinin kullanılmasıyla

$$D^{\sigma-1}\omega(x) = D^{\sigma-1}\omega(0) + If\left(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x)\right) \in C[0,T] \tag{4.3}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte integral alınır ve $ID^{\sigma-1} = IDI^{2-\sigma}$ eşitliği kullanılırsa

$$I^{2-\sigma}\omega(x) - I^{2-\sigma}\omega(0) = D^{\sigma-1}\omega(0)x + I^2 f\left(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x)\right) \in C^1[0,T]$$

bulunur. (4.3)'te, $D^{\sigma-1}\omega(0) = b$ ve $\omega(0) = 0$ iken $I^{2-\sigma}\omega(0) = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$I^{2-\sigma}\omega(x) = bx + I^2 f\left(x,\omega(x),D^{\sigma-1}\omega(x)\right) \in C^1[0,T] \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4)'in her iki tarafına $I^{\sigma-1}$ uygulanırsa, bu durumda R-L integral operatörünün yarıgrup ve değişme özelliğinden, her $x \in [0,T]$ için

$$I\omega(x) = b\frac{x^{\sigma}}{\Gamma(1+\sigma)} + I[I^{\sigma} f\big(x, \omega(x), D^{\sigma-1}\omega(x)\big)] \tag{4.5}$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak, (4.5)'in her iki tarafının diferansiyellenmesi

$$\omega(x) = b\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + I^{\sigma} f\big(x, \omega(x), D^{\sigma-1}\omega(x)\big) \tag{4.6}$$

denklemini verir ki bu (4.2) ile verilen integral denklemidir.

Şimdi aksini ispatlayalım. $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$ fonksiyonu (4.2) ile verilen integral denkleminin bir çözümü olsun. (4.2)'deki eşitliğin her iki yanına D^{σ} uygulanır ve her $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$ için sağlanan

$$D^{\sigma} I^{\sigma}\omega(x) = D^2 I^{2-\sigma} I^{\sigma}\omega(x) = D^2 I^2 \omega(x) = \omega(x)$$

eşitliği kullanılır ise, $\omega \in C^{\sigma-1}[0,T]$ fonksiyonun (4.1) denklemini sağladığı kolaylıkla görülür.

Ayrıca, (4.2) ile verilen ω fonksiyonun başlangıç değer koşullarını sağladığını ispatlayalım. İlgili integralde $t = x\tau$ değişken değiştimi ve (C1) koşulunun kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\omega(0) = \lim_{x\to 0^+} \omega(x) &= \frac{b}{\Gamma(\sigma)} x^{\sigma-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))}{(x-t)^{1-\sigma}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{t^{\sigma-1} f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \lim_{x\to 0^+} x \int_0^1 \frac{(x\tau)^{\sigma-1} f(x\tau,\omega(x\tau),D^{\sigma-1}\omega(x\tau))}{\tau^{\sigma-1}(1-\tau)^{1-\sigma}} d\tau = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Bu ise ω fonksiyonunun (4.1)'deki ilk başlangıç koşulunu sağladığını gösterir.

Eğer (4.2) eşitliğinin her iki tarafına $D^{\sigma-1}$ uygulanır ve $D^{\sigma-1} I^{\sigma} h(x) = Ih(x)$ ilişkisi kullanılırsa, bu durumda

$$D^{\sigma-1}\omega(x) = D^{\sigma-1}\omega(0) + \int_0^x f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))dt. \tag{4.8}$$

elde edilir. Buradan, (4.7) için uygulanan aynı yol ile

$$\begin{aligned} D^{\sigma-1}\omega(0) &= b + \lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))dt \\ &= b + \lim_{x\to 0^+}\int_0^x \frac{1}{t^{\sigma-1}} t^{\sigma-1} f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))dt \\ &= b + \lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{x^{2-\sigma}}{\tau^{\sigma-1}} (x\tau)^{\sigma-1} f(x\tau,\omega(x\tau),D^{\sigma-1}\omega(x\tau))d\tau = b, \end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur, çünkü burada $2-\sigma > 0$ olup $t^{\sigma-1}f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))$ fonksiyonu $[0,T]$ aralığında süreklidir. Sonuç olarak (C1) koşulu altında, (4.2) ile verilen ω fonksiyonun (4.1) probleminin bir çözümü olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise (4.1) ile verilen başlangıç-değer probleminin lokal çözümlerinin varlığını veren aşağıdaki teoremi ifade edip ispatlayalım.

Teorem 4.2 (Varlık) (C1) koşulu sağlansın ve r_1, r_2 iki pozitif reel sayı olsun. Her $(x,\omega,v) \in I = [0,T]\times[-r_1,r_1]\times[b-r_2,b+r_2]$ için $\left|x^{\sigma-1}f(x,\omega,v)\right| \le \mathscr{M}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $\mathscr{M}$ pozitif reel sayısı var olsun. Bu durumda $r = r_1 + r_2$ olmak üzere (4.1) ile verilen problemin

$$T_0 = \begin{cases} T & \text{eğer} \quad T < \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} \\ \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} & \text{eğer} \quad T \ge \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} \ge 1, \\ \left[\frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})}\right]^{\sigma-1}, & \text{eğer} \quad T \ge \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})}, \quad 1 \ge \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} \quad \text{ve} \quad 1 < \sigma \le 1.5 \\ \left[\frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})}\right]^{2-\sigma} & \text{eğer} \quad T \ge \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})}, \quad 1 \ge \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} \quad \text{ve} \quad 1.5 \le \sigma < 2 \end{cases} \tag{4.10}$$

ve

$$C(b,\sigma,\mathscr{M}) = \left[\frac{|b|}{\Gamma(\sigma)} + \mathscr{M}\left(\frac{1+\Gamma(3-\sigma)}{2-\sigma}\right)\right] \tag{4.11}$$

olmak üzere, $C^{\sigma-1}[0,T_0]$ uzayında en az bir çözümü vardır.

İspat. Lemma 4.1 gereğince (4.1) probleminin çözümü aynı zamanda (4.2) ie verilen integral denkleminin de çözümüdür. Ayrıca $\mathscr{S} : C^{\sigma-1}[0,T_0] \to C^{\sigma-1}[0,T_0]$ operatörünün

$$\mathscr{S}\omega(x) = \frac{b}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma-1} + \int_0^x \frac{f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t))}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \tag{4.12}$$

şeklinde tanmlanması durumunda $\mathscr{S}$ operatörünün sabit noktaları integral denkleminin çözümleri ile çakışır. Bu nedenle, $\mathscr{S}$ operatörünün en az bir sabit noktası olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunun için bu operatörün Schauder sabit nokta teoreminin koşullarını

sağladığı gösterelim. İlk olarak, $C^{\sigma-1}[0,T_0]$ uzayının kapalı sınırlı ve konveks alt kümesi olan $B_r = \{\omega \in C^{\sigma-1}[0,T_0] : ||\omega||_\infty + ||D^{\sigma-1}\omega - b||_\infty \leq r\}$ için

$$\mathscr{S}(B_r) \subset B_r$$

içermesinin sağlandığını gösterelim. $C^{\sigma-1}[0,T_0]$ normuna uygun olarak, $\|\mathscr{S}\omega(x)\|_\infty$ ve $\left\|D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x) - b\right\|_\infty$ ifadeleri için üst sınırlar

$$\begin{aligned}
|\mathscr{S}\omega(x)| &\leq \frac{|b|}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma-1} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{\left|t^{\sigma-1}f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t)\right|}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt \\
&\leq \frac{|b|}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma-1} + \frac{\mathscr{M}}{\Gamma(\sigma)}\int_0^1 \frac{x}{\tau^{\sigma-1}(1-\tau)^{1-\sigma}}d\tau \\
&\leq \frac{|b|}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma-1} + \Gamma(2-\sigma)\mathscr{M}x
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left|D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x) - b\right| &\leq \int_0^x \frac{\left|t^{\sigma-1}f(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t)\right|}{t^{\sigma-1}}dt \\
&\leq \mathscr{M}x^{2-\sigma}\int_0^1 \tau^{1-\sigma}d\tau \\
&= \frac{\mathscr{M}x^{2-\sigma}}{2-\sigma}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde belirlenebilir. (4.13) ve (4.14) kullanılarak

$$|\mathscr{S}\omega(x)| + \left|D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x) - b\right| \leq \frac{|b|}{\Gamma(\sigma)}x^{\sigma-1} + \Gamma(2-\sigma)\mathscr{M}x \leq \mathscr{M}x + \frac{\mathscr{M}x^{2-\sigma}}{2-\sigma} \tag{4.15}$$

elde edilir. Denklemin sağ tarafı için $T_0 > 0$ olmak üzere $[0,T_0]$ üzerinden supremum alınırsa $\alpha \in \Omega = \{\sigma-1, 1, 2-\sigma\}$ olmak üzere

$$|\mathscr{S}\omega(x)| + \left|D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x) - b\right| \leq C(b,\sigma,\mathscr{M})T_0^\alpha \tag{4.16}$$

yazılabilir. Burada $\alpha, b, \mathscr{M}, \sigma, r$ değerlerine bağlıdır. T_0 ve α sayılarını hesaplamak için

$$C(b,\sigma,\mathscr{M})T_0^\alpha = r$$

olsun. Eğer $T_0^\alpha = \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} < 1$ ise her $\alpha \in \Omega$ için $T_0 < 1$ olduğu gözlemlenebilir. Eğer $T_0^\alpha = \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} \geq 1$ ise her $\alpha \in \Omega$ için $T_0 \geq 1$ olur. Yani

$$T_0 := \left[\frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})}\right]^{1/\alpha}$$

ve

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{eğer} \quad \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} \geq 1 \\ \sigma - 1 & \text{eğer} \quad \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} < 1 \quad \text{and} \quad 1 < \sigma \leq 1.5 \\ 2 - \sigma & \text{eğer} \quad \frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})} < 1 \quad \text{and} \quad 1.5 \leq \sigma < 2 \end{cases} \tag{4.17}$$

olmak üzere,

$$\sup_{x\in[0,T_0]} \left[|\mathscr{S}\omega(x)| + \left| D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x) - b \right| \right] \leq C(b,\sigma,\mathscr{M}) T_0^{\alpha} = r \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla, bütün durumlar için

$$||\mathscr{S}\omega||_{\infty} + ||D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega - b||_{\infty} \leq r$$

elde edilir ve bu ise istenen içermenin sağlandığını gösterir.

Şimdi $\mathscr{S}(B_r) \subset C^{\sigma-1}[0,T_0]$ eşsürekli olduğunu gösterelim. Düzgün sürekli fonksiyonların bileşkeleri de düzgün sürekli olduğundan, $x^{\sigma-1} f(x,\omega(x) D^{\sigma-1}\omega(x))$ fonksiyonu da $[0,T_0]$ üzerinde düzgün sürekli olur, çünkü herhangi bir $\omega \in B_r$ fonksiyonu için sırasıyla $\omega(x)$, $D^{\sigma-1}\omega(x)$ ve $x^{\sigma-1} f(x,\omega,v)$ fonksiyonları $[0,T_0]$ üzerinde düzgün süreklidir. O halde, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olacak şekildeki her $x_1, x_2 \in [0,T_0]$ için

$$K = \max\left(\frac{1}{T_0 \Gamma(2-\sigma)}, \frac{2-\sigma}{T_0^{2-\sigma}} \right)$$

olmak üzere

$$\left| x_1^{\sigma-1} f(x_1, \omega(x_1), D^{\sigma-1}\omega(x)) - x_2^{\sigma-1} f(x_2, \omega(x_2), D^{\sigma-1}\omega(x_2)) \right| < K\varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilir. Buradan, $h(x) = x^{\sigma-1} f\left(x, \omega(x), D^{\sigma-1}\omega(x)\right)$ şeklinde alınırsa,

$$\begin{aligned} &\left| \mathscr{S}\omega(x_1) - \mathscr{S}\omega(x_2) \right| + \left| D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x_1) - D^{\sigma-1}\mathscr{S}\omega(x_2) \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{|h(\eta x_1) - h(\eta x_2)|}{\Gamma(\sigma)\,\eta^{1-\sigma}(1-\eta)^{\sigma-1}} x d\eta + \int_0^1 \frac{|h(\eta x_1) - h(\eta x_2)|}{\eta^{1-\sigma}} x^{2-\sigma} d\eta \\ &< T_0 \Gamma(2-\sigma) K\varepsilon + \frac{T_0^{2-\sigma}}{2-\sigma} K\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\mathscr{S}(B_r)$ kümesinin, $C^{\sigma}[0,T_0]$ kümesinin eşsürekli bir altkümesi olduğu anlamına gelir.

Son olarak $\mathscr{S}$ operatörünün, B_r üzerinde sürekliliğini gösterelim. Kabul edelim ki $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_r$ dizisi, $\omega_k \overset{C^{\sigma}[0,T_0]}{\to} \omega$ olacak şekilde bir dizi olsun. Buradan, $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ ve $\left\{D^{\sigma-1}\omega_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ dizilerinin sırasıyla ω ve $D^{\sigma-1}\omega$ fonksiyonlarına düzgün yakınsak olduğu sonucuna varılır. Bu ve $x^{\sigma-1}f(x,\omega,v)$ fonksiyonun $I=[0,T]\times[-r_1,r_1]\times[b-r_2,b+r_2]$, üzerinde düzgün sürekliliği,
$k\to\infty$ iken $h_k(x)=x^{\sigma-1}f\left(x,\omega_k(x),D^{\sigma-1}\omega_k(x)\right)$ olarak alınmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathscr{S}\omega_k-\mathscr{S}\omega\right\|_{\sigma-1}\\
&=\sup_{x\in[0,T_0]}\left|\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{\left[f\left(t,\omega_k(t),D^{\sigma-1}\omega_k(t)\right)-f\left(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t)\right)\right]}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\right|\\
&+\sup_{x\in[0,T_0]}\left|\int_0^x\left[f\left(t,\omega_k(t),D^{\sigma-1}\omega_k(t)\right)-f\left(t,\omega(t),D^{\sigma-1}\omega(t)\right)\right]dt\right|\\
&\leq\sup_{\eta x\in[0,T_0]}\int_0^1\frac{x\left|h_k(\eta x)-h(\eta x)\right|}{\Gamma(\sigma)\,\eta^{\sigma-1}(1-\eta)^{1-\sigma}}d\eta+\sup_{\eta x\in[0,T_0]}\int_0^1\frac{x^{2-\sigma}\left|h_k(\eta x)-h(\eta x)\right|}{\eta^{\sigma-1}}d\eta\\
&\to 0
\end{aligned}
$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $C^{\sigma-1}([0,T])$ uzayında $\mathscr{S}\omega_k\to\mathscr{S}$ gerçekleşir. O halde, $\mathscr{S}$ operatörü dizisel sürekli, dolayısıyla süreklidir.

Sonuç olarak, Teorem 2.12'ün hipotezleri sağlandığından, $\mathscr{S}$ operatörü $C^{\sigma}[0,T_0]$ uzayında en az bir sabit noktaya sahiptir. Bu ise, (4.1) probleminin en az bir çözümü olduğunu gösterir.

Teorem 3.7'deki $\sigma\in(0,1)$ mertebeden R-L türevlenebilir fonksiyonlar için verilen ortalama değer teoreminin ispatında kullanılan yol ile $\sigma\in(1,2)$ mertebeden R-L türevlenebilir fonksiyonlar için benzer bir teorem ve ispatı aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.2 $\sigma\in(1,2)$ ve $\omega\in C^{\sigma-1}([0,T])$ öyle ki $D^{\sigma}\omega\in C(0,T]$ ve $x^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega\in C[0,T]$ olsun. Bu durumda $0<\mu(x)<x$ olacak şekilde öyle bir $\mu:[0,T]\to[0,T]$ fonksiyonu vardır ki

$$\omega(x)=D^{\sigma-1}\omega(0)\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}+\Gamma(2-\sigma)x(\mu(x))^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega(\mu(x))$$

sağlanır.

İspat. (4.6)'ın elde edidiği yola benzer yol izleyerek $D^{\sigma}\omega \in C(0,T]$ ve $x^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega \in C[0,T]$ olacak şekildeki $\omega \in C^{\sigma-1}([0,T])$ için

$$\begin{aligned}\omega(x) &= D^{\sigma-1}\omega(0)\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{D^{\sigma}\omega(t)}{(x-t)^{1-\sigma}}dt \\ &= D^{\sigma-1}\omega(0)\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{t^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega(t)}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunabilir. İntegranttaki $x^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega \in C[0,T]$ ve $\frac{1}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}} \in L^1[0,x]$ olduğundan Teorem 2.1 ile verilen İntegralin Ortalama Değer Teoremi gereğince, $0 < \mu(x) < x$ olacak şekilde öyle bir $\mu : [0,T] \to [0,T]$ fonksiyonu vardır ki

$$\begin{aligned}\omega(x) &= D^{\sigma-1}\omega(0)\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{t^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega(t)}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt \\ &= D^{\sigma-1}\omega(0)\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma)}(\mu(x))^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega(\mu(x))\int_0^x \frac{1}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt \\ &= D^{\sigma-1}\omega(0)\frac{x^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} + \Gamma(2-\sigma)x(\mu(x))^{\sigma-1}D^{\sigma}\omega(\mu(x)) \end{aligned} \tag{4.20}$$

sağlanır.

Bu Lemma aşağıda verilen Nagumo-tip teklik teoreminin ispatı için önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 4.3 (Nagumo-tip teklik teoremi) $1 < \sigma < 2$, $0 < T < \infty$ olsun ve (C1) koşulu sağlansın. Ayrıca,

$$L \leq \frac{2-\sigma}{\max(T, T^{2-\sigma})(1+\Gamma(3-\sigma))}$$

olacak şekilde bir pozitif L reel sayısı var olsun öyle ki $i = 1,2$ olmak üzere her $\omega i, vi \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [0,T]$ için

$$x^{\sigma-1}|f(x,\omega_1,v_1) - f(x,\omega_2,v_2)| \leq L(|\omega_1-\omega_2| + |v_1-v_2|) \tag{4.21}$$

eşitsizliği sağlandığını vasayalım. O zaman (4.1) ile verilen problemin, $C^{\sigma-1}([0,T_0])$ uzayında en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Önceki teoremde (4.1) ile verilen problemin çözümünün varlığı gösterilmişti. Şimdi teklik için ilk olarak bu problemin $C^{\sigma-1}([0,T_0])$ uzayında ω_1 ve ω_2 gibi iki farklı çözümü

olduğunu kabul edelim. $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) := \begin{cases} |\omega_1(x) - \omega_2(x)| + \left|D^{\sigma-1}\omega_1(x) - D^{\sigma-1}\omega_2(x)\right|, & x > 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

formuna sahip bir fonksiyon olsun. $\omega_1, \omega_2 \in C^{\sigma-1}([0,T])$ olmak üzere $x \in (0,T_0]$ üzerinde $\Phi(x)$ fonksiyonun sürekliliği açıkca görülür. $x = 0$ noktasındaki sürekliliği için bu çözümlerin (4.2) ile verilen gösterimlerinde, $H(x,\omega(x)) = x^{\sigma-1} f\left(x, \omega(x), D^{\sigma-1}\omega(x)\right)$ alınıp sırasıyla $t = x\eta$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve (C1) koşulunu kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{x\to 0^+} \Phi(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left| \int_0^x \frac{f\left(t, \omega_1(t), D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right) - f\left(t, \omega_2(t), D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)}{\Gamma(\sigma)(x-t)^{1-\sigma}} dt \right| \\ &+ \lim_{x\to 0^+} \left| \int_0^x f\left(t, \omega_1(t), D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right) - f\left(t, \omega_2(t), D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right) dt \right| \\ &\leq \lim_{x\to 0^+} x \int_0^1 \frac{|H(x\eta, \omega_1(x\eta)) - H(x\eta, \omega_2(x\eta))|}{\Gamma(\sigma)\eta^{\sigma-1}(1-\eta)^{1-\sigma}} d\eta \\ &+ \lim_{x\to 0^+} x^{2-\sigma} \int_0^1 \frac{|H(x\eta, \omega_1(x\eta)) - H(x\eta, \omega_2(x\eta))|}{\eta^{\sigma-1}} d\eta = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{x\to 0^+} \Phi(x) = 0 = \Phi(0)$ çıkar. $\Phi(x)$ fonksiyonun $x = 0$ noktasında sürekli ve $\Phi(0) = 0$ olduğundan $[0,T]$ üzerinde $\Phi(x) \geq 0$ olacak şekilde $(0,T]$ üzerinde bir x_0 noktası seçilebilir. Böylece

$$0 < \Phi(x_0) = |\omega_1(x_0) - \omega_2(x_0)| + \left|D^{\sigma-1}\omega_1(x_0) - D^{\sigma-1}\omega_2(x_0)\right|$$

olur. Lemma 4.2'de verilen ortalama değer teoremini kullanılırsa, $x_1 \in (0, x_0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &|\omega_1(x_0) - \omega_2(x_0)| = \Gamma(2-\sigma)x_0 \left|x_1^{\sigma-1} D^{\sigma}(\omega_1 - \omega_2)(x_1)\right| \\ &= \Gamma(2-\sigma)x_0 x_1^{\sigma-1} \left|f\left(x_1, \omega_1(x_1), D^{\sigma-1}\omega_1(x_1)\right) - f\left(x_1, \omega_2(x_1), D^{\sigma-1}\omega_2(x_1)\right)\right| \\ &= \Gamma(2-\sigma)x_0 |H(x_1, \omega_1(x_1)) - H(x_1, \omega_2(x_1))| \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir.

İkinci olarak $\left|D^{\sigma-1}\omega_1(x_0) - D^{\sigma-1}\omega_2(x_0)\right|$ için aşağıdaki değerlendirme klasik analizin

integralin ortalama değer teoreminden $x_2 \in (0,x_0)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\sigma-1}\omega_1(x_0) - D^{\sigma-1}\omega_2(x_0)\right| \\
&= \left|\int_0^x f(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)) - f(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t))dt\right| \\
&= \left|\int_0^{x_0} \frac{H(t,\omega_1(t)) - H(t,\omega_2(t))}{t^{\sigma-1}}dt\right| = \frac{x_0^{2-\sigma}}{2-\sigma}\left|H(x_2,\omega_1(x_2)) - H(x_2,\omega_2(x_2))\right| \quad (4.23)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$|H(x_3,\omega_1(x_3)) - H(x_3,\omega_2(x_3))| := \max_{i=1,2}\left(|H(x_i,\omega_1(x_i)) - H(x_i,\omega_2(x_i))|\right)$ olacak şekilde x_1 ve x_2 noktalarından birini x_3 olarak belirtelim. Bu durumda, (4.22) ve (4.23)'den $L \leq \frac{2-\sigma}{T(1+\Gamma(3-\sigma))}$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}
0 < \Phi(x_0) &\leq \left(\Gamma(2-\sigma)x_0 + \frac{x_0^{2-\sigma}}{2-\sigma}\right)\left|H(x_3,\omega_1(x_3)) - H(x_3,\omega_2(x_3))\right| \\
&\leq \max\left(T,T^{2-\sigma}\right)\left(\frac{1+\Gamma(3-\sigma)}{2-\sigma}\right)x_3^{\sigma-1}\left|f\left(x_3,\omega_1\left(x_3\right)\right) - f\left(x_3,\omega_2\left(x_3\right)\right)\right| \\
&\leq x_3^{\sigma-1}\left(\left|\omega_1(x_3) - \omega_2(x_3)\right| + \left|D^{\sigma-1}\omega_1(x_3) - D^{\sigma-1}\omega_2(x_3)\right|\right) = \Phi(x_3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemler x_3 noktası için tekrarlanırsa $0 < \Phi(x_0) \leq \Phi(x_3) \leq \Phi(x_6)$ olacak şekilde $x_6 \in (0,x_3)$ noktası bulunur. Aynı şekilde devam edilirse, $\{x_{3n}\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,x_0)$ dizisi oluşturulabilir öyle ki $x_{3n} \to 0$ ve

$$0 < \Phi(x_0) \leq \Phi(x_1) \leq \Phi(x_3) \leq ... \leq \Phi(x_{3n}) \leq ... \quad (4.24)$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak $\Phi(x)$, $x = 0$ noktasında sürekli ve dolayısıyla $x_{3n} \to 0$ iken $\Phi(x_{3n}) \to \Phi(0) = 0$ oluşu (4.24) ile çelişir. Sonuç olarak, (4.1) problemi tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 4.4 (Krasnoselskii-Krein-tip teklik teoremi) $1 < \sigma < 2$ ve T_0, (4.10) ile verilmiş olmak üzere $T_0^* = \min\{T_0,1\}$ olsun. Buna ek olarak, (C1) koşulu sağlansın. Ayrıca, $i = 1,2$ olmak üzere her $\omega_i, v_i \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [0,T]$ için

$$x^{1-\alpha(\sigma-1)}\left|f(x,\omega_1,v_1) - f(x,\omega_2,v_2)\right| \leq \Gamma(\sigma)\frac{\alpha(\sigma-1)+L}{2}\left(\left|\omega_1-\omega_2\right| + \left|v_1-v_2\right|\right) \quad (4.25)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $L > 0$ var olduğunu ve her $\omega_i, v_i \in \mathbb{R}$ ve her $x \in [0,T]$ için

$$x^{\sigma-1}\left|f(x,\omega_1,v_1) - f(x,\omega_2,v_2)\right| \leq C\left(\left|\omega_1-\omega_2\right|^{\alpha} + x^{\alpha(\sigma-1)}\left|v_1-v_2\right|^{\alpha}\right) \quad (4.26)$$

sağlanacak şekilde $C>0$ sayısı ve $(1-\sigma)(1-\alpha)-L(1-\alpha)+1>0$ eşitsizliği sağlayan bir $\alpha\in(0,1)$ var olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, (4.1) problemi $C^{\sigma-1}(\left[0,T_0^*\right])$ uzayında tek bir çözüme sahiptir.

İspat. Önceki teoremde iddia edildiği gibi, (4.1) ile verilen problemin $C^{\sigma-1}(\left[0,T_0^*\right])$ uzayında ω_1 ve ω_2 gibi iki farklı çözümü var olsun. Şimdi $\Phi_1(x)=|\omega_1(x)-\omega_2(x)|$ ve $\Phi_2(x)=\left|D^{\sigma-1}\omega_1(x)-D^{\sigma-1}\omega_2(x)\right|$ şeklindeki fonksiyonları tanımlayalım. (C1) koşulunu ve (4.26)'daki eşitsizliği kullanarak yukarıdaki her bir fonksiyon için değerlendirmeler bulmaya çalışalım. İlk olarak, $\Phi_1(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Her $x\in[0,T]$ için

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{\left|f\left(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right)-f\left(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{t^{\sigma-1}\left|f\left(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right)-f\left(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{\left[\Phi_1^{\alpha}(x)+t^{\alpha(\sigma-1)}\Phi_2^{\alpha}(x)\right]}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\sigma)}\left(\int_0^x\left(\frac{1}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}\right)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x\left[\Phi_1^{\alpha}(t)+t^{\alpha(\sigma-1)}\Phi_2^{\alpha}(t)\right]^p dt\right)^{1/p}\\
&\leq \frac{C\Gamma(1+(1-\sigma)q)\Gamma(1+(\sigma-1)q))}{\Gamma(\sigma)}x^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve burada $(1-\sigma)q+1>0$ ve $p=q/(q-1)$ eşitsizliklerini sağlayan $p,q>1$ sayıları ile Hölder eşitsizliği kullanılmış olup $\Omega(x)$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Omega(x)=\int_0^x\left[\Phi_1^{\alpha}(t)+t^{\alpha(\sigma-1)}\Phi_2^{\alpha}(t)\right]^p dt.$$

Buradan, her $x\in[0,T]$ için

$$\Phi_1^p(x)\leq Cx^{p/q}\Omega(x) \tag{4.27}$$

olur ve $C>0$ sabiti hem burada ve hem de tüm ispat boyunca açıkça belirtilmeyecektir.

Şimdi ise $\Phi_2(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Yukarıdaki tanımlamalar ve benzer iş-

lemler yardımıyla, her $x \in [0,T]$ için

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x) &\leq \int_0^x \left| f\left(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right) - f\left(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right| dt \\
&\leq \int_0^x \frac{t^{\sigma-1}\left| f\left(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right) - f\left(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{t^{\sigma-1}} dt \\
&\leq \frac{C}{\Gamma(\sigma)} \int_0^x \frac{\left[\Phi_1^\alpha(x) + t^{\alpha(\sigma-1)}\Phi_2^\alpha(x)\right]}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}} dt \\
&\leq C\left(\int_0^x \left(\frac{1}{t^{\sigma-1}}\right)^q dt\right)^{1/q} \left(\int_0^x \left[\Phi_1^\alpha(t) + t^{\alpha(\sigma-1)}\Phi_2^\alpha(t)\right]^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{C\Gamma(1+(1-\sigma)q)}{\Gamma(2+(\sigma-1)q))} x^{(1+q(1-\sigma))/q}\Omega^{1/p}(x)
\end{aligned}$$

şeklindeki üst sınır bulunur. Buradan her $x \in [0,T]$ için

$$\Phi_2^p(x) \leq Cx^{(1+q(1-\sigma))p/q}\Omega(x) \tag{4.28}$$

elde edilir.

$\Omega(x)$ fonksiyonun türevinde (4.27) ve (4.28) ile verilen değerlendirmeler ile birlikte, $a,b \geq 0$ ve $p > 1$ olmak üzere

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Omega'(x) &= \left[\Phi_1^\alpha(x) + t^{\alpha(\sigma-1)}\Phi_2^\alpha(x)\right]^p \leq 2^{p-1}\left[(\Phi_1^\alpha(x))^p + t^{p\alpha(\sigma-1)}(\Phi_2^\alpha(x))^p\right] \\
&= 2^{p-1}\left[\left(\Phi_1^p(x)\right)^\alpha + x^{p\alpha(\sigma-1)}\left(\Phi_2^p(x)\right)^\alpha\right] \\
&\leq 2^{p-1}\left[C^\alpha x^{\alpha p/q}\Omega^\alpha(x) + C^\alpha x^{p\alpha(\sigma-1)} x^{(1+q(1-\sigma))\alpha p/q}\Omega^\alpha(x)\right] \qquad (4.29) \\
&\leq Cx^{\alpha p/q}\Omega^\alpha(x) \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki ifadenin her iki yanı $(1-\alpha)\Omega^{-\alpha}(x)$ ile çarpılırsa

$$(1-\alpha)\Omega^{-\alpha}(x)\Omega'(x) = \frac{d}{dx}\left[\Omega^{1-\alpha}(x)\right] \leq Cx^{\alpha p/q}$$

bulunur. $[0,x]$ üzerinden eşitsizliğin her iki tarafının integrallenirse ve $\Omega(0) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa ilk önce

$$\Omega^{1-\alpha}(x) \leq Cx^{(\alpha p+q)/q}$$

ve buradan küçük bir hesap ile de

$$\Omega(x) \leq Cx^{(\alpha p+q)/(1-\alpha)q}, \;\; x \in [0,T] \tag{4.31}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Eğer (4.31), (4.27) ve (4.28) ile birlikte dikkate alınırsa şu eşitsizliklere elde edilebilir:

$$\Phi_1^p(x) \leq Cx^{p/q}\Omega(x) \leq Cx^{p/q}x^{(\alpha p+q)/(1-\alpha)pq} = Cx^{p+q/(1-\alpha)q}$$

veya

$$\Phi_1(x) \leq Cx^{(p+q)/(1-\alpha)pq} = x^{1/(1-\alpha)} \tag{4.32}$$

ve

$$\Phi_2^p(x) \leq Cx^{p(1+q(1-\sigma))/q}\Omega(x) \leq Cx^{p(1+q(1-\sigma))/q}x^{(\alpha p+q)/(1-\alpha)pq} = Cx^{\frac{(1-\alpha)(1-\sigma)pq+p+q}{(1-\alpha)q}}$$

veya

$$\Phi_2(x) \leq Cx^{(1-\sigma)+\frac{p+q}{(1-\alpha)pq}} = x^{(1-\sigma)+\frac{1}{(1-\alpha)}} \tag{4.33}$$

Şimdi $L(1-\alpha) < 1+(1-\sigma)(1-\alpha)$ olacak şekilde

$$\Psi(x) = x^{-L}\max\{\Phi_1(x),\Phi_2(x)\}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer $\Phi_1(x) = \max\{\Phi_1(x),\Phi_2(x)\}$ ise, bu durumda (4.32)'den

$$0 \leq \Psi(x) \leq x^{\frac{1}{1-\alpha}-L},$$

ve $\Phi_2(x) = \max\{\Phi_1(x),\Phi_2(x)\}$ olması durumunda ise (4.33)'den

$$0 \leq \Psi(x) \leq x^{(1-\sigma)+\frac{1}{1-\alpha}-L} = x^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)-L(1-\alpha)+1}{1-\alpha}}$$

elde edilir. Her iki durumda da $\Psi(x)$ fonksiyonu $[0,T_0^*]$ üzerinde sürekli ve $\Psi(0)=0$ olur. Şimdi $[0,T_0^*]$ üzerinde $\Psi(x) \equiv 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için aksini varsayalım yani $\Psi(x) \not\equiv 0$ olsun. Bu $\Psi(x) > 0$ olduğu anlamına gelir. Bununla birlikte, $\Psi(x)$ fonksiyonunun sürekliliği, en az bir $x_1 \in [0,T_0^*]$ noktasında $\Psi(x)$ fonksiyonun maksimum değerini aldığını garanti eder. Dolayısıyla

$$M = \Psi(x_1) = \max_{x\in[0,T_0^*]} \Psi(x)$$

mevcuttur.

$\Psi(x) = x^{-L}\Phi_1(x)$ olması durumunda, her $x \in [0, T_0^*]$ için

$$\begin{aligned} M = \Psi(x_1) &= x_1^{-L}\Phi_1(x_1) \\ &\leq \frac{x_1^{-L}}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{x_1} \frac{t^{\sigma-1} \left| f\left(t, \omega_1(t), D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right) - f\left(t, \omega_2(t), D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}} dt \\ &\leq \frac{Lx_1^{-L}}{2\Gamma(\sigma)} \int_0^{x_1} (x-t)^{\sigma-1} t^{1-\sigma+k} \left[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right] dt \qquad (4.34) \\ &\leq \frac{Lx_1^{-L}}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{x_1} (x-t)^{\sigma-1} t^{1-\sigma+k} \Psi(t) dt \\ &\leq M \frac{L\Gamma(2-\sigma+L)}{\Gamma(2+L)} x_1 < M \end{aligned}$$

elde edilir çünkü $1 < \sigma < 2$ için $\frac{L\Gamma(2-\sigma+L)}{\Gamma(2+L)} < 1$ olduğu kabul edilmişti. Ancak bu bir çelişki belirtir.

Diğer taraftan, $\Psi(x) = x^{-L}\Phi_2(x)$ olması durumunda

$$\begin{aligned} M = \Psi(x_1) &= x_1^{-L}\Phi_2(x_1) \\ &\leq x_1^{-L} \int_0^{x_1} \frac{t^{\sigma-1} \left| f\left(t, \omega_1(t), D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right) - f\left(t, \omega_2(t), D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{t^{\sigma-1}} dt \\ &\leq \frac{Lx_1^{-L}}{2} \int_0^{x_1} t^{1-\sigma+L} \left[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)\right] dt \leq Lx_1^{-L} \int_0^{x} t^{1-\sigma+L} \Psi(t) dt \\ &\leq M \frac{L}{L+2-\sigma} x_1^{L+2-\sigma} < M \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Açıktır ki bu da bir çelişkidir. Sonuç olarak, $[0, T_0^*]$ üzerinde $\Psi(x) \equiv 0$ olmalıdır. Bu ise problemin tek bir çözümü olduğunu gösterir.

Teorem 4.5 (Osgood tip teklik teoremi) $1 < \sigma < 2$ olsun ve T_0, (4.10) ile tanımlansın ve (C1) koşulu sağlansın. Ayrıca, $p > 1$, $1 + (1-\sigma)q > 0$ eşitsizliğini sağlayan $q > 1$ reel sayısının eşleniği ve C ise

$$C^q \geq 2\max\left(b\Gamma^q(\sigma)[T_0\Gamma(1+(1-\sigma)q)\Gamma(1+(\sigma-1)q)]^{-1}, (1+(1-\sigma)q)T_0^{-1-q(1-\sigma)}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir pozitif reel sayı olmak üzere her $\omega_i, v_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ ve her $x \in [0, T]$ için

$$x^{\sigma-1} |f(x, \omega_1, v_1) - f(x, \omega_2, v_2)| \leq C\left(g\left(|\omega_1 - \omega_2|^p + |v_1 - v_2|^p\right)\right)^{1/p} \qquad (4.35)$$

sağlanacak şekilde $[0,T_0]$ üzerinde sürekli,negatif olmayan ve artan bir g fonksiyonu var olsun. Ayrıca, g fonksiyonu, $g(0)=0$ ve her $\gamma\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\gamma}\frac{du}{g(u)}=\infty \tag{4.36}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, (4.1) problemi $C^{\sigma-1}(\left[0,T_0^*\right])$ uzayında tek bir çözüme sahiptir.

İspat. Daha önce verilen teklik teoremlerinde olduğu gibi $C^{\sigma-1}(\left[0,T_0^*\right])$ uzayında (4.1) probleminin $\omega_1(x)$ ve $\omega_2(x)$ gibi iki farklı çözümün olduğunu varsayalım. Ayrıca $\Phi_1(x)=|\omega_1(x)-\omega_2(x)|$ ve $\Phi_2(x)=\left|D^{\sigma-1}\omega_1(x)-D^{\sigma-1}\omega_2(x)\right|$ olsun.
$\Phi_1(x)$ için sırasıyla (4.35) eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve C üzerindeki kabuller kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &\le \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{t^{\sigma-1}\left|f\left(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right)-f\left(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&\le \frac{C}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x \frac{\left[g\left(|\omega_1(t)-\omega_2(t)|^p+\left|D^{\sigma-1}\omega_1(t)-D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right|^p\right)\right]^{1/p}}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}dt\\
&\le \frac{C}{\Gamma(\sigma)}\left(\int_0^x\left(\frac{1}{t^{\sigma-1}(x-t)^{1-\sigma}}\right)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt\right)^{1/p}\\
&\le C\left[\frac{\Gamma(1+(1-\sigma)q)\Gamma(1+(\sigma-1)q)}{\Gamma^q(\sigma)}\right]^{1/q}x^{1/q}\left(\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt\right)^{1/p}\\
&\le \frac{1}{2^{1/p}}\left(\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt\right)^{1/p}
\end{aligned}\tag{4.37}$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi_1^p(x)\le\frac{1}{2}\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt \tag{4.38}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x) &\le \int_0^x \frac{t^{\sigma-1}\left|f\left(t,\omega_1(t),D^{\sigma-1}\omega_1(t)\right)-f\left(t,\omega_2(t),D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right)\right|}{t^{\sigma-1}}dt\\
&\le C\int_0^x \frac{\left[g\left(|\omega_1(t)-\omega_2(t)|^p+\left|D^{\sigma-1}\omega_1(t)-D^{\sigma-1}\omega_2(t)\right|^p\right)\right]^{1/p}}{t^{\sigma-1}}dt\\
&\le C\left(\int_0^x\left(\frac{1}{t^{\sigma-1}}\right)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt\right)^{1/p}\\
&\le C\left[\frac{1}{(1+(1-\sigma)q)}\right]^{1/q}x^{(1+q(1-\sigma))/q}\left(\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt\right)^{1/p}\\
&\le \frac{1}{2^{1/p}}\left(\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt\right)^{1/p}
\end{aligned}\tag{4.39}$$

ve

$$\Phi_2^p(x) \leq \frac{1}{2}\int_0^x g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right)dt \tag{4.40}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\Psi(x) := \max_{0\leq t\leq x}\left[\Phi_1^p(x)+\Phi_2^p(x)\right]$$

olsun ve $x \in (0,T_0]$ için $\Psi(x) > 0$ olduğunu varsayalım. $\Psi(x)$ fonksiyonun tanımından her bir $x \in [0,T_0]$ için $\Phi_1^p(x)+\Phi_2^p(x) \leq \Psi(x)$ sağlanır ve en az bir $x_1 \leq x$ vardır öyle ki $\Psi(x) = \Phi_1^p(x_1)+\Phi_2^p(x_1)$ elde edilir. Bu durumda (4.38)-(4.40)'taki eşitsizliklerden ve g fonksiyonun azalmayan oluşundan

$$\Psi(x) = \Phi_1^p(x_1)+\Phi_2^p(x_1) \leq \int_0^{x_1} g\left(\Phi_1^p(t)+\Phi_2^p(t)\right) \leq \int_0^x g\left(\Psi(t)\right)dt := \Psi_*(x) \tag{4.41}$$

elde edilir ve $\Psi(x) \leq \Psi_*(x)$ olduğu ortaya çıkar. Ayrıca her $x \in [0,T_0]$ için

$$\frac{d}{dx}\Psi_*(x) = g\left(\Psi(x)\right) \leq g\left(\Psi_*(x)\right)$$

elde edilir. Buradan yeterince küçük $\delta > 0$ için

$$\int_\delta^{T_0} \frac{\Psi_*'(x)}{g\left(\Psi_*(x)\right)}dx \leq T_0-\delta$$

elde edilir. Ayrıca üstteki integralde $u = \Psi_*(x)$ değişken değiştirmesi yapılıp $\Psi_*(0) = 0$ ve $\Psi_*(x)$ fonksiyonunun sürekliliği kullanılırsa $\gamma = \Psi_*(T_0)$ için $\varepsilon = \Psi_*(\delta)$ olacak şekilde yeterince küçük $\delta > 0$ için

$$\int_\varepsilon^\gamma \frac{du}{g(u)} \leq T_0-\delta$$

elde edilir. Ancak bu g için (4.36)'da verilen varsayım ile çelişir. Sonuç olarak $x \in [0,T_0]$ için $\Psi(x) = 0$ olur ve bu $\omega_1(x) = \omega_2(x)$ olmasını gerektirir.

Uyarı 4.1 Agarwal and Laksmikantham (1993), Teorem 1.4.3'te belirtildiği üzere $g(u)$ fonksiyonunun azalmayan olma koşulu kaldırılabilirdir.

Örnek 4.1

$$D^{\frac{4}{3}}\omega(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{3}}\left[-\omega\ln\omega-(D^{\frac{1}{3}}\omega)\ln(D^{\frac{1}{3}}\omega)\right], & \text{eğer} \quad 0<\omega, D^{\frac{1}{3}}\omega \leq 1/e \\ 0, & \text{eğer} \quad \omega = 0 \quad or \quad D^{\frac{1}{3}}\omega = 0, \end{cases} \tag{4.42}$$

denklemini $\omega(0)=0$ ve $D^{\sigma-1}\omega(x)|_{x=0}=1$ başlangıç koşulları ile ele alalım. Teorem 4.2'de $T=1$ olmak üzere

$$\mathscr{M}=\max_{(x,u,v)\in[0,1]\times[0,1/e]\times[0,1/e]}\left|x^{\frac{1}{3}}f(x,\omega,v)\right|\cong\frac{2}{e},$$

$C(b,\sigma,\mathscr{M})=C(1,\frac{4}{3},\frac{2}{e})\cong 3.2$ ve $T_0=\frac{r}{C(b,\sigma,\mathscr{M})}\cong 0.22$ olsun. Dolayısıyla problemin $C^{\frac{1}{3}}([0,0.22])$ uzayında bir çözümü vardır. Şimdi $C^{\frac{1}{3}}([0,0.22])$ probleminin çözümün tekliğini araştıralım.

g fonksiyonu

$$g(u)=\begin{cases}0 & \text{eğer} \quad u=0\\ -\sqrt{u}\ln\sqrt{u} & \text{eğer} \quad 0<u\leq 1/e^2,\\ 1/e & \text{eğer} \quad u\geq 1/e^2,\end{cases} \tag{4.43}$$

şeklinde tanımlansın ve Teorem 4.5'de verilen g için verilen koşulların sağlandığı gösterelim. g fonksiyonu $u>0$ için pozitif olduğu açıktır. $0<u\leq 1/e^2$ olacak şekilde $g'(u)=-\frac{1}{2\sqrt{u}}(1+\ln(\sqrt{u}))>0$ olduğundan g azalmayandır. Ayrıca $\gamma\in\mathbb{R}$ olacak şekilde $u=0$ civarında $-\frac{1}{g(u)}=\frac{1}{\sqrt{u}\ln\sqrt{u}}\geq\frac{1}{u}$ eşitsizliği göz önüne alınırsa $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\gamma\frac{du}{u}$ integralinin ıraksaklığından ve karşılaştırma testinden

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\gamma\frac{du}{g(u)}=\infty \tag{4.44}$$

bulunur. Ayrıca, f fonksiyonunun ikinci ve üçüncü değişkenlere göre içbükeyliği kullanılırsa, $i=1,2$ için $v_i=D^{\frac{1}{3}}\omega_i$, $p=q=2$ ve

$$C\geq 1.725\cong\sqrt{2}\max\left(\frac{\Gamma(4/3)}{0.22\times\Gamma(1/3)\Gamma(5/3)},\frac{1}{3\times 0.22^{1/3}}\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}x^{1/3}|f(x,\omega_1,v_1)-f(x,\omega_2,v_2)| &\leq |-\omega_1\ln\omega_1-v_1\ln v_1-(-\omega_2\ln\omega_2-v_2\ln v_2)|\\ &\leq -|\omega_1\ln\omega_1-\omega_2\ln\omega_2|-|v_1\ln v_1-v_2\ln v_2|\\ &\leq -|\omega_1-\omega_2||\ln(\omega_1-\omega_2)|-|v_1-v_2||\ln(v_1-v_2)|\\ &\leq -2\sqrt{|\omega_1-\omega_2|^2+|v_1-v_2|^2}\ln\sqrt{|\omega_1-\omega_2|^2+|v_1-v_2|^2}\\ &\leq C\left(g\left(|\omega_1-\omega_2|^2+|v_1-v_2|^2\right)\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. Böylece, Teorem 4.5 varsayımları sağlanmış olup bu teorem gereğince (4.1) probleminin $C^{\frac{1}{3}}([0,0.22])$ uzayında tek bir çözümü vardır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde klasik türev, Riemann-Liouville kesirsel türevi ve Caputo türevi arasındaki benzerlikler ve farklılıklari aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. Riemann-Liouville kesirsel türevinin ve Caputo türevinin tanımlarını göz önüne alalım. Riemann-Liouville kesirsel türevi sürekli olmayan fonksiyonlar için de tanımlıdır. Bu, $x = 0$ noktasında sürekli olmayan $\omega(x) = cx^{\alpha-1}$ fonksiyonun R-L türevinin 0'a eşitliğinden görülebilir. Diğer yandan Caputo türevi türevlenebilir ya da mutlak fonksiyonlar için tanımlıdır. Bu durum modellenmiş gerçek dünya problemlerinin sürekli çözümlerinin olmasını bekleyen araştırmacılar tarfından eleştirilen bir husustur.

2. $\omega(x) = c$ sabit fonksiyonun R-L kesirsel türevi $\omega(x) = c\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}$ iken sabit fonksiyonun Caputo türevinin sıfırdır. Bu yönüyle Caputo türevi klasik türev ile benzerlik gösterir.

3. Eğer ω fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde türevlenebilir ise R-L türevi ile Caputo türevi arasında

$$ {}_{\mathrm{C}}D^{\alpha}\omega(x) = {}_{\mathrm{RL}}D^{\alpha}(\omega(x) - \omega(0)) $$

şeklinde bir ilişki vardır.

4. ω, $[0,T]$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere R-L türevi alt terminal özelliğini sağlar, yani $\lim_{\alpha\to 0^+} {}_{\mathrm{RL}}D^{\alpha}\omega(x) = \omega(x)$, fakat Caputo türevi bu özelliği sağlamaz ve $\alpha \to 0^+$ iken ${}_{\mathrm{C}}D^{\alpha}\omega(x) \to \omega(x) - \omega(0)$ şeklindedir.

Diğer yandan üst terminal özelliğini her iki kesirsel türev de sağlar, yani

$$ \lim_{\alpha\to 1^-} {}_{\mathrm{RL}}D^{\alpha}\omega(x) = \lim_{\alpha\to 1^-} {}_{\mathrm{C}}D^{\alpha}\omega(x) = \omega'(t) $$

gerçekleşir.

5. Bir ω fonksiyonunun R-L kesirsel türevinin Laplace dönüşümü

$$ \mathscr{L}({}_{\mathrm{RL}}D^{\alpha}\omega(t)) = s^{\alpha}\hat{\omega}(s) - I^{1-\alpha}\omega(0) $$

şeklindedir. Podlubny (1999) yardımıyla belirtildiği üzere R-L türevi içeren diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü yöntemi ile çözülmeye çalışıldığında karşılarına çıkan $I^{1-\alpha}\omega(0)$ başlangıç koşulunun fiziksel bir anlamı olmadığını söylemişlerdir. Bu daha sonra Caputo türevinin de ortaya çıkması için bir motivasyon kaynağı olmuştur. Bir ω fonksiyonunun Caputo türevinin Laplace dönüşümü ise

$$\mathscr{L}({}_{\mathrm{C}}D^{\alpha}\omega(x)) = s^{\alpha}\hat{\omega}(s) - s^{\alpha-1}\omega(0)$$

şeklindedir. Bunun, $\alpha \to 1^{+}$ için klasik türevin Laplace dönüşümü olan

$$\mathscr{L}(\omega'(x)) = s\hat{\omega}(s) - \omega(0)$$

formüle eşit olduğu kolayca görülebilir.

Şunu da belirtmekte yarar var ki Heymans and Podlubny (2006), $I^{1-\alpha}\omega(0)$ başlangıç koşulunun fiziksel anlamının olabileceği bir problem ortaya koymuşlardır.

Bu tezin orjinal kısmını oluşturan son bölümde ise R-L kesirsel mertebeden türevli lineer olmayan bir denklem içeren başlangıç-değer problemi göz önüne alınmıştır. Bu problem denklemin sağ yanında bulunan lineer olmayan fonksiyonun singüler olduğu durumda ilk defa incelenmiştir. Bu koşul altında bu problemin iyi koyulmuş bir problem olduğu Lemma 4.1'ten anlaşılmaktadır. Ayrıca bu lemma yardımıyla bu problemin çözümleri ile aynı çözümlere sahip olan iki katlı singülerliğe sahip Volterra-tip integral denklem ortaya çıkarılmıştır. Bu integral denklemin çözümlerinin varlığı Teorem 4.2'de verilmiştir. Diğer yandan, daha önce mevcut olan teklik teoremlerinin ispatlarındaki yöntemler gerçekleştirip Lebesgue uzayının araçları ile zenginleştirilirek bu problem için Krasnoselski-Krein-tip, Nagumo-tip ve Osgood-tip teklik sonuçları verilmiştir. Bulunan bu sonuçlar problemin farklı yönlerinin incelenmesi açısından öncü bir çalışma olmuştur ve bu problem için farklı çalışmalar yapılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Lakshmikantham, V. 1993. Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations, (Vol. 6), World Scientific.

Almeida, R., Bastos, N. R., Monteiro, M.T.T. 2016. Modeling some real phenomena by fractional differential equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39(16), 4846-4855.

Athreya, K.B., Lahiri, S. N. 2006. Measure theory and probability theory (Vol. 19). New York: Springer.

Bai, Z., Sun, S., Chen, Y. 2014. The existence and uniqueness of a class of fractional differential equations. Abstract and Applied Analysis, 2014.

Caputo, M. 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. Geophysical Journal International, 13(5), 529-539.

De Oliveira, E.C., Machado, J.A.T. 2014. A review of definitions for fractional derivatives and integral. Mathematical Problems in Engineering, 2014.

Delbosco, D. 1994. Fractional calculus and function spaces. J. Fract. Calc , 6, 45-53.

Delbosco, D., Rodino, L. 1996. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 204(2), 609-625.

Diethelm, K. 2012. The mean value theorems and a Nagumo-type uniqueness theorem for Caputo's fractional calculus. Fractional Calculus and Applied Analysis, 15, No 2, 304-313.

Edwards, C. H. 2012. Advanced calculus of several variables. Courier Corporation.

Heymans, N., Podlubny, I. 2006. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. Rheologica Acta, 45(5), 765-771.

Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). Elsevier Science Limited.

Kreyszig, E. 1978. Introductory functional analysis with applications (Vol. 1). New York: wiley.

Lakshmikantham, V., Vatsala, A. S. 2008. Basic theory of fractional differential equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, 69(8), 2677-2682.

Lakshmikantham, V., Leela, S. 2009a. Nagumo-type uniqueness result for fractional differential equations. Nonlinear Analysis, 71, No 7-8, 2886-2889.

Lakshmikantham, V., Leela, S. 2009b. Krasnoselskii–Krein-type uniqueness result for fractional differential equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71, No 7-8 , 3421-3424.

Lan, K. 2020. Equivalence of higher order linear Riemann-Liouville fractional differential and integral equations. Proceedings of the American Mathematical Society, 148(12), 5225-5234.

Li, C., Deng, W. 2007. Remarks on fractional derivatives. Applied Mathematics and Computation, 187(2), 777-784.

Li, C., Sarwar, S. 2016. Existence and continuation of solutions for Caputo type fractional differential equations. Electron. J. Differ. Equ, 2016, 1-14.

Miller, K.S., Ross, B. 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons Inc., New York.

Ortigueira, M. D. 2011. Fractional calculus for scientists and engineers (Vol. 84). Springer Science Business Media.

Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego.

Rudin, W. 1964. Principles of mathematical analysis (Vol. 3). New York: McGraw-hill.

Samko, S.G.,Kilbas A.A.A, Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland.

Şan, M. 2018. Complex variable approach to the analysis of a fractional differential equation in the real line. CR Math. Acad. Sci. Paris., 356, No 3, 293-300.

Şan, M., Sert, U. 2020. Some analysis on a fractional differential equation with a right-hand side which has a discontinuity at zero. Hacet. J. Math. Stat., 49(5), 1718-1725.

Tarasov, V.E. 2010. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Nonlinear Physical Science. Springer.

Webb, J. R. 2019. Initial value problems for Caputo fractional equations with singular nonlinearities. Electron. J. Differential Equations, 117(2019), 1-32.

Wu, J., Liu, Y.C. 2013. Uniqueness results and convergence of successive approximations for fractional differential equations. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42, No 2, 149-158.

Yoruk, F., Bhaskar, T. G., Agarwal, R. P. 2013. New uniqueness results for fractional differential equations. Applicable Analysis, 92, No 2, 259-269.

Zeidler, E. 1985. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I: Fixed-point Theorems. Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Sinan Serkan BİLGİCİ

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2018-Halen
Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2013-2018

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2018-2019	Akıl Küpü Kurs Merkezi	Matematik Öğretmeni

Akademik Aktiviteler

1. Internatinal Conference on Mathematics-ICMASE 2020 "Existence and Uniqueness Results for a nonlinear fractional differantial equations of order $\alpha \in (1,2)$"