ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ HATA FONKSİYONLARI VE BUNLARIN BAZI SONUÇLARI

Meryem DURAN AKKOYUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI

2020

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Meryem DURAN AKKOYUN tarafından hazırlanan " Kompleks Değişkenli Hata Fonksiyonları ve Bunların Bazı Sonuçları " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ,
(Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik ABD)

Prof. Dr. Selahattin MADEN,
(Ordu Üniversitesi, Matematik ABD)

Prof. Dr. Hüseyin IRMAK,
(Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik ABD)

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Dr. Öğr. Üyesi İlkay ÇORAK ÖCAL

Enstitü Müdürü V.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ HATA FONKSİYONLARI

VE

BUNLARIN BAZI SONUÇLARI

Meryem DURAN AKKOYUN

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Bu araştırmanın amacı, kompleks değişkenli hata fonksiyonları ve bunların bazı temel sonuçlarını öncelikli olarak tanıtmak, ardından da ilgili fonksiyonlara ilişkin yeni bazı genel sonuçlar elde etmek ve bu sonuçların bazı özel sonuçlarını ve aynı zamanda bazı uygulamalarını vurgulamaktır.

Ağustos 2020, 76 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Kompleks düzlem, açık birim disk, kompleks fonksiyon, analitik fonksiyon, kompleks değişkenli özel fonksiyonlar, kompleks seri, kompleks değişkenli hata fonksiyonları, kompleks düzlemde bazı eşitsizlikler.

ABSTRACT

Master Thesis

ERROR FUNCTIONS WITH COMPLEX VARIABLE

AND

SOME OF THEIR IMPLICATIONS

Meryem DURAN AKKOYUN

Çankırı Karatekin University
Institue of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisors: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

The aim of this investigation, the error functions with the complex variable and some of their basic applications are firstly introduced, and certain novel results in relation with the mentioned functions are then determined, and various special results and implications of these results are also pointed out.

August 2020, 76 pages

KEYWORDS: Complex plane, open unit disc, complex function, analitik fonksiyon, special functions with complex variable, complex series, the error functions with complex variable, certain inequations in the complex plane.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

"Kompleks Değişkenli Hata Fonksiyonları ve Bunların Bazı Sonuçları" adlı bu çalışma 2020 yılında hazırlanarak Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Bu çalışmanın amacı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi'nde Özel Fonksiyonlar (Special Functions) ailesinde yer alan ve kompleks değişkenli fonksiyonlar kapsamında düşünülen, "Kompleks Değişkenli Hata Fonksiyonları" ile ilgili bazı yeni bilgileri ve bağıntıları önce sunmak, ardından da Kompleks Fonksiyonlar Teorisi kapsamında yer alan ve Kompleks Hata Fonksiyonları ile ilgili olan bazı temel sonuçları elde etmektir. Bu tez kapsamında, belirtilen fonksiyonlara ilişkin bazı temel teoriler öncelikli olarak elde edilmiş ve ardından da bunların bazı özel sonuçları ile birlikte olası tartışmalara yönelik çeşitli uygulama alanlarına yönelik kapsamlı vurgulamalarda bulunulmuştur.

Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü ilk lisans mezunlarından biri olarak, ilgili dört yıllık lisans eğitim öğretim sürecinde hemen hemen her dönem kendisinden ders aldığım, öğrencilerine her daim yorulmadan ve bıkmadan verdiği çabasının aynen lisansüstü çalışmalarım sürecinde de hiç eksilmediğini gördüğüm çok değerli danışmanım Prof. Dr. Hüseyin IRMAK'a ve şahsıma göstermiş oldukları özverilerden dolayı da aileme en içten ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Meryem DURAN AKKOYUN

Uluyazı Kampüsü, Çankırı

20 Ağustos 2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET ……... i
ABSTRACT ……..…... ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ……..…… iii
SİMGELER DİZİNİ …..…….…….……. v
ŞEKİLLER DİZİNİ …….…… vi
1. GİRİŞ ……..……..……..….. 1
2. MATERYAL VE YÖNTEM ….…….…….…… 3
2.1 Temel Bilgiler ve Kavramlar.…….....…..... 3
2.1.1 $f(x) = e^{-x^2}$ Fonksiyonu ve $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ Genelleştirilmiş İntegrali…...…… 3
2.1.2 Gamma Fonksiyonları …….…….…….…..... 8
2.1.3 Sayı Dizileri ve İlgili Bazı Kavramlar…….…….…….…..... 17
2.1.4 Fonksiyon Dizileri ve İlgili Bazı Kavramlar …….……..... 20
2.1.5 Seriler ve İlgili Bazı Kavramlar …….……...…… 24
2.2 Hata Fonksiyonu ve İlgili Bazı Kavramlar ve Teoremler……..…40
2.2.1 Hata (Error) Fonksiyonları…….……..... 40
2.2.2 Kompleks Değişkenli Hata Fonksiyonunun Türevleri……..…….. 49
2.2.3 Kompleks Değişkenli Hata Fonksiyonunun Seri Açılımı…..…….…..... 52
3. BULGULAR VE TARTIŞMA……..……..…….. 54
4. SONUÇ……..……..……...……..…73
5. KAYNAKLAR …….……..74
6. ÖZGEÇMİŞ …..…….…….……76

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^-$	Negatif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_m$	$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{n \in \mathbb{N} : \ n \geq m\}$ şeklindeki küme
$\mathbb{R}$	Reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	Kompleks düzlemde birim açık disk
$\mathbb{U}_r$	Kompleks düzlemde orjin merkezli r $(0 < r < 1)$ br yarıçaplı çember
Γ	Gamma fonksiyonu
$(x_n)_{n\geq m}$	$\mathbb{N}_m$ kümesinden Reel (Gerçel) Sayılar Kümesi'ne tanımlanan (Reel (Gerçel)) Sayı Dizileri
$(z_n)_{n\geq m}$	$\mathbb{N}_m$ kümesinden Kompleks Sayılar Kümesi'ne tanımlanan (Kompleks) Sayı Dizileri
$\left(f_n(x)\right)_{n\geq m}$	$\mathbb{N}_m$ kümesinden Reel Sayılar Kümesi'ne tanımlanan Fonksiyon Sayı Dizileri
$\left(f_n(z)\right)_{n\geq m}$	$\mathbb{N}_m$ kümesinden Kompleks Sayılar Kümesi'ne tanımlanan Fonksiyon Sayı Dizileri
$\sum x_n$	Reel (Gerçel) genel terimli seriler
$\sum z_n$	Kompleks genel terimli seriler
$\sum f_n(x)$	Genel terimi reel (gerçel) fonksiyon dizisi olan fonksiyon serileri
$\sum f_n(z)$	Genel terimi kompleks fonksiyon dizisi olan fonksiyon serileri
Erf $(\cdot)$	Hata (Error) Fonksiyonu
Erfc $(\cdot)$	Tamamlayıcı Hata (Error) Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.1 $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiği 4

Şekil 2.1.2 $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiği 5

Şekil 2.1.3 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ genelleştirilmiş integralinin belirlediği alan 5

Şekil 2.1.4 $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonunun grafiği..... 11

Şekil 2.1.5 $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonunun (3D) grafiği..... 15

Şekil 2.1.6 $|\Gamma(z)|$ Gamma fonksiyonunun (3D) grafiği..... 16

Şekil 2.1.7 $Re\{\Gamma(z)\}$ Gamma fonksiyonunun (3D) grafiği..... 16

Şekil 2.1.8 $İm\{\Gamma(z)\}$ Gamma fonksiyonunun (3D) grafiği..... 17

Şekil 2.1.9 $Arg\{\Gamma(z)\}$ Gamma fonksiyonunun (3D) grafiğ..... 17

Şekil 2.2.1 $Erf(x)$ fonksiyonunun grafiği..... 42

Şekil 2.2.2 $Erf(x)$ fonksiyonunun grafiği..... 43

Şekil 2.2.3 $Re\{Erf(z)\}$ fonksiyonunun (2D) grafiği 44

Şekil 2.2.4 $İm\{Erf(z)\}$ fonksiyonunun (2D) grafiği 45

Şekil 2.2.5 $|Erf(z)|$ fonksiyonunun (2D) grafiği 45

Şekil 2.2.6 $Arg\{Erf(z)\}$ fonksiyonunun (2D) grafiği 45

Şekil 2.2.7 $Re\{Erf(z)\}$ fonksiyonunun (3D) grafiği 46

Şekil 2.2.8 $İm\{Erf(z)\}$ fonksiyonunun (2D) grafiği..... 46

Şekil 2.2.9 $|Erf(z)|$ fonksiyonunun (3D) grafiği 47

Şekil 2.2.10 $|Arg\{Erf(z)\}|$ fonksiyonunun (3D) grafiği..... 47

1. GİRİŞ

Duran (2018) tarafından sunulan "Kompleks Düzlemde Hata (Error) Fonksiyonu" adlı seminer çalışmasında, Matematik biliminde oldukça önemli rol oynayan, hem teorik hem de uygulama açısından oldukça geniş kapsamı olan, özel fonksiyonlardan biri konumundaki Hata (Error) Fonksiyonları'na ilişkin temel bazda bazı kavramlar ve bilgiler verilmişti. İlgili seminer konusunda da belirtildiği üzere, Hata (Error) Fonksyonları'nın daha ileri düzeyde araştırılmasının önemli sonuçlar üretebileceği vurgulanmıştı. Özellikle, ilgili kompleks değişkenli (veya parametreli) fonksiyonlarına ilişkin bazı araştırmaların sürdürülebilmesi için, belirtilen tez konusunun literatür bakımından aşağıdaki gibi belirtilen temel başlıklar altında ele alınması kaçınılmaz olmuştur.

Bu tez çalışması ile ilgili olan bazı temel bilgilerin hem "Kompleks Değişkenli Hata (Error) Fonksiyonları" hem de "Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi" ile olan ilişkileri gereği, biribiri ile doğrudan bağlantılı temel konular öncelikli olarak ele alınmıştır. Bunun için de temel bazda eserler olarak; Jaeger (1946), Faddeyeva and Terentev (1961), Abramowitz and Stegun (1965), Chiarella and Reichel (1968), Burrill (1972), McKenna (1984), Adams and Guillemin (1996) gibi eserler temel makaleler olmakla birlikte Rainville (1960), Lebedev (1965), Zang and Jin (1966), Carlson (1977), Duren (1983) , Seaborn (1991), Wunsch (1994), Brown and Churchill (1996), Wang and Guo (2010), Erdely *et al.* (1953) ve Olver *et al.* (2010) gibi eserler de temel kaynaklar olarak yer almıştır.

Tez konusunda da belirtilen Özel Fonksiyonlar (Special Functions), teknolojinin ve bilimin birçok alanında kapsamlı olarak hem uygulamalı hem de teorik açıdan sıkça karşılaşılan fonksiyonlardır. Bu açıdan; bilimsel araştırmalarımızın olası sonuçları ve ileriye yönelik öneriler için de Carlitz (1963), Zang and Jin (1966), Bell (1968), Gautschi (1970), Fettis *et al.* (1973), Herden (1987), Seaborn (1991), Seaborn (1991), Spannier and Oldham (1994), Weideman (1994), Temme (1996), Coffey and Johnston (2009), Abrarov and Quine (1983), Olver *et al.* (2010) ve Wang and Guo (2010)

çalışmaları da önemli sonuçlar açısından göz önüne alınmıştır. Özellikle, uygulama boyutu açısından genellikle reel (gerçel) değişkenli (parametreli) hata fonksiyonları ile sıkça karşılaşılsa da, teorik boyutu ile ilgili fonksiyonların bulunduğu her alanda kompleks (değişkenli ve değerli) fonksiyonların temel bazda öenmli rol oynayan sanal ve reel kısımlarındaki, modüllerindeki ve argümentlerindeki değişimler önemli rollar oynamaktadır. Kaynaklar kısmında, hemen hemen her kullanım boyutuna göre (bazı 2 boyutlu ve 3 boyutlu analizlerine yönelik de) eserler verilmiştir.

Üstte vurgulanan bazı teorik boyutlarının belirlenmesinde iki temel konu önemlidir. Bunlardan birincisi Kompleks Hata (Error) Fonksiyonları için temel olan bazı kavramlarını öncelikli olarak hatırlatmak ve ikincisi de, ilgili kavramların temelini teşkil eden ve kompleks fonksiyonlar teorisinde yer alan ihtiyaca yönelik bazı temel bilgileri sunulması ve bunların hem verilerimizin ispatlanmasında ve olası sonuçlarının öneriler ile birlikte sunulması şeklinde olacaktır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Tez çalışması açısından; temel bilgiler, kavramlar ve ardından da araştırmamıza yönelik bazı esas sonuçlar verilecektir. Belirtilen temel bilgi ve kavramlar için; Rainville (1960), Artin (1964), Abramowitz and Stegun (1965), Lebedev (1965), Duren (1993), Wunsch (1994), Brown and Churchill (1996), Coffey and Johnstone (2009) ve Wang and Guo (2010) referanslarında verilen bazı temel bilgi ve kavramlardır. Bilindiği üzere, matematik biliminde, ilgili bilgi ve kavramlar; tanımlar, örnekler, teoremler, yardımcı teoremler ve bunların ispatları ve çeşitli örneklendirmeler şeklindeki bilgiler tez konusuyla ilgili olan temel olan bilgi ve kavramlarıdır.

2.1. Temel Bilgi ve Kavramlar

2.1.1. $\mathbf{f(x) = e^{-x^2}}$ Fonksiyonu ve $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e^{-x^2}}\,\mathbf{dx}$ Genelleştirilmiş İntegrali

Kompleks düzlemde Hata (Error) Fonksiyonu için, bilenen reel (gerçel) değişkenli ve reel değerli olan

$$f(x) = e^{-x^2} \tag{1}$$

şeklindeki fonksiyon yardımıyla oluşturulan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \tag{2}$$

şeklindeki genelleştirilmiş integral önemli rol oynamaktadır.

Analiz derslerinden çok iyi bilindiği gibi, (2)'deki gibi verilen genelleştirilmiş (has olmayan) integraller genellikle 1. tip(ten) (tür(den)) genelleştirilmiş integraller olarak bilinen integrallerdir. İlgili integralde kullanılan ve (1)'deki gibi verilen fonksiyon literatür açısından oldukça önemli bir fonksiyondur. Matematik biliminde özel fonksiyonlar (special functions) kapsamında oldukça önemli olsa da, özellikle, olasılık ve istatistik teorisinde, teorik fizikte ve birçok uygulama alanında sıkça karşılaşılan özel fonksiyonlardan biridir. Şimdi, bu fonksiyona ilişkin bazı temel bilgileri öncelikli olarak hatırlatalım. Duran (2019) tarafından detaylıca belirtildiği gibi, (1)'deki gibi verilen bu fonksiyon;

- Her $x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olup ve $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ şeklindeki bir fonksiyondur,
- $(-\infty, \infty)$ aralığında $y-$ eksenine göre simetrik bir fonksiyondur,
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ olup, ilgili fonksiyon için $y = 0$ doğrusu yatay asimptottur,
- $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ olup, ilgili fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında artan ve $(0, \infty)$ aralığında da azalan bir fonksiyon olup, doğal olarak $x = 0$ noktası yerel extremum noktası, yani yerel maksimum noktası durumundadır.

Bu üstteki bilgiler paralelinde, (1)'de verilen f(x) fonksiyonun grafiği Analiz I ders bilgileri kapsamında kolayca çizilebilir. Gerekli bilgilerin $xy-$ düzleminde göz önüne alınırak oluşturulmasının detayı ilgilenlerin dikkatine bırakarak, çok karmaşık fonksiyonların garfiklerinin (Matlab, Mathematica vb.) hazır programlar yardımıyla kolayca çizilebildiğini bilmekteyiz. İşte bu mantıkla, üsteki gerçel değişkenli fonksiyonuna ait bazı elde edilen garfik çıktıları ekte verilmiştir.

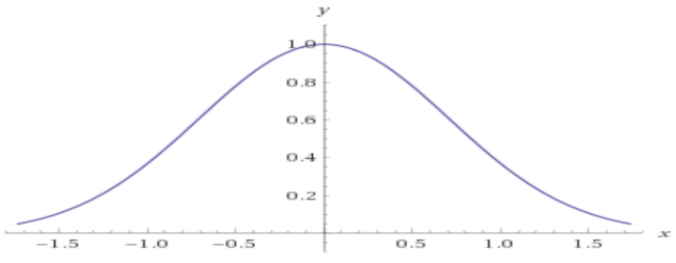
Şekil 2.1.1'deki garfik

$$-1.7 \leq x \leq 1.7$$

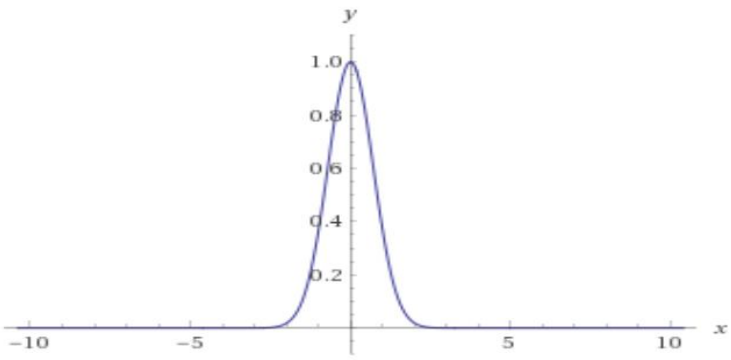
kıstlamaıyla ve Şekil 2.1.2'deki grafik ise

$$-10.4 \leq x \leq 10.4$$

kısıtlamasıyla oluştrulan grafiktir:



Şekil 2.1.1

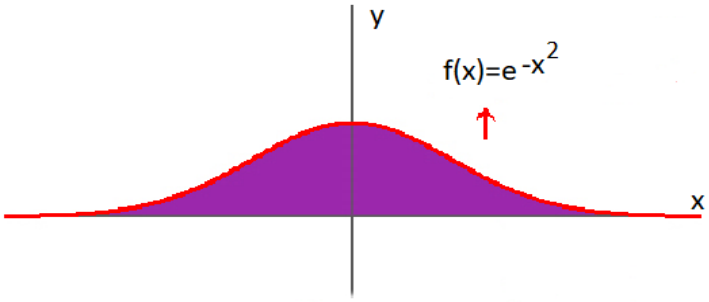


Şekil 2.1.2

Üstteki bilgiler ve grafikler ışığında,

$$f(x) = e^{-x^2} : (-\infty, \infty) \to (0\,, 1]$$

fonksiyonu ile $x-$ekseni arasındaki sınırlı bir bölgenin belirtmiş olduğu alan, yani aşağıdaki gibi renklendirilmiş bölge,



Şekil 2.1.3

şeklindeki alanın hesaplanması, seminer konumuz açısından önemli olan reel (gerçel) parametreli (değişkenli) Hata (Error) fonksiyonu için önem taşımaktadır. Bu yüzden, Şekil 2.1.2'de verilen alanın belirlenmesi, doğal olarak (2)'de verilen genelleştirilmiş integralin yakınsaklık durumunu da belirlemiş olacaktır. Bunun için, Analiz derslerinden de bildiğimiz iki katlı integral bilgilerimiz faydalı olacaktır. Öncelikli olarak, aşağıdaki gibi aynı integrali ifade eden iki integrali, yani

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{ve} \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

integrallerinden yola çıkarak, Fubini teoreminin önemli bir uygulaması olan,

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dydx \qquad (3)$$

ilişkileri gereğiyle, elde edilen iki katlı integralinin $\mathbb{R}^2$ üzerinde verilen tanımlanan iki katlı integrallerinin bir genelleştirilmiş şekli olup, bu integralin çözümü için yine Analiz derslerinden bilmiş olduğumuz dairesel, yani $\{r, \theta\}$ koordinatların oluşturduğu bilindik lineer olmayan;

$$\Omega : \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y = y(r,\theta) = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad (4)$$

şeklindeki dairesel koordinatlarla oluşturulmuş dönüşüm faydalı olacaktır. Bu dönüşüm,

$$\Omega \;:\; \Delta \coloneqq \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 :\; 0 \le \theta < 2\pi \text{ ve } 0 \le r < \infty\} \;\to\; \mathbb{R}^2 \qquad (5)$$

şeklindeki bir dönüşüm olduğu açıktır. (4)'deki Ω dönüşümü (5)'de verilen bölge değişimiyle birlikte (3)'de oluşturulan integrale uygulanırsa,

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dydx$$

$$\left(= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \right)$$

$$= \iint_{\Delta} |\mathcal{J}|\, f\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right)\,drd\theta$$

$$\left(= \iint_{\Delta} |\mathcal{J}|\, f\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right)\,d\theta dr \right)$$

ilişkisi elde edilir ve ilgili integralinin eşiti konumunda olan, yani

$$I^2 = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} r\, e^{-r^2} d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2} \left(\theta \,|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\, e^{-r^2} dr$$

$$\left(= 2\pi \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} r\, e^{-r^2} dr \right)$$

sonucu elde edilir. Bu genelleştirilmiş tek katlı integral için eğer,

$$t = -r^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -2rdr$$

şeklindeki değişken değişimi yapılır, ilgili limit devreye sokulur ve ardından da gerekli elementer işlemler yapılırsa,

$$\int_0^{\infty} r\, e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}$$

sonucu kolayca bulunur. Bu sonuç dikkate alındığı taktirde de

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dy\, dx = \pi$$

sonucuna varılır k, bu sonuç da bizi

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (6)$$

istenen sonuca götürür. Bu da, doğal olarak, Şekil 2.1.3'te belirtilen taralı bölgenin alanı olur. Dolayısıyla, ilgili genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı açıkça görülmüş olunur.

2.1.2. Gamma Fonksiyonları

Literatüre de hem reel (gerçel) hem de kompleks bağımsız değişkenli olarak tanımlanan Gamma fonksiyonu çalışmamız açısından yine önemli olan temel fonksiyonlardan biridir. Açık olarak belirtmek istersek, negatif tamsayılar ($\mathbb{Z}^-$) kümesindeki sayılar ve 0 (sıfır) sayısı için tanımsız, doğal sayılar (veya pozitif tam sayılar) ($\mathbb{N}$ veya $\mathbb{Z}^+$) ve reel sayıların $\mathbb{R} - \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ şeklindeki her bir alt kümesinde tanımlı olan bu fonksiyona ilişkin temel bilgi ve kavramları hatırlayalım.

2.1.2.1 Tanım. x – bağımsız değişken olmak üzere, reel (gerçel değişkenli ve değerli) Gamma fonksiyonu $\Gamma(\cdot)$ notasyonu ile gösterilir ve

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{7}$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikle, (7)'de tanımlanan bu özel fonksiyon, matematikte bilmiş olduğumuz faktöriyel fonksiyonunun (hem reel hem de kompleks sayıların) bir genellemesine denk gelecek şekildeki tanımlanan bir fonksiyondur. (7)'de verilen ilgili genelleştirilmiş integral için, kısmi integral metodunun ard arda uygulanması sonucu, bilindik faktöriyel fonksiyonu ile olan ilişkisi kolayca görülür. Bu açıdan, sıkça kullanılan

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

şeklindeki fonksiyonunu göz önüne alalım ve bu integrale kısmi integral metodunu uygulayalım. Bunun için,

$$[\, u = t^n \text{ ve } dv = e^{-t}dt \,] \quad \Rightarrow \quad [\, du = nt^{n-1}dt \text{ ve } v = -e^{-t} \,]$$

şeklindeki değişken ve doğal olarak diferansiyel değişimleri (8)'de verilen integral için uygulanırsa;

$$\Gamma(n+1) = -t^n e^{-t}\big]_{t=0}^{\infty} + n\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \ n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

$$= n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

$$= n\,\Gamma(n)$$

sonucu elde edilir. Bu son integrale, bir kez daha kısmi integral uygulanırsa, yani,

$$[\,u = t^{n-1} \ \text{ve} \ \ dv = e^{-t}dt]$$

$$\Rightarrow \quad [\,du = (n-1)t^{n-2}dt \ \ \text{ve} \ \ v = -e^{-t}\,]$$

şeklindeki değişken değiştirme uygulanırsa;

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

$$= n\Big(\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt\Big)$$

$$= n\Big(-t^{n-1}\,e^{-t}|_{t=0}^{\infty} + (n-1)\int_0^{\infty} t^{n-2}e^{-t}\,dt\Big)$$

$$= n(n-1)\int_0^{\infty} t^{n-2}e^{-t}\,dt \ = n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\vdots$$

sonucu kolayca elde edilir. Tabii ki uygun olan her *n* doğal sayıları için, eğer uygulanan kısmi integral yöntemi *n* kere art arda uygulanmaya devam edilirse, sonuçta

$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n! \qquad (9)$$

şeklindeki sonuca kolayca varılacaktır.

Sıfır ve negatif tamsayılar dışındaki her bir reel sayı içinde de faktöriyel mantığını içeren üstteki formalize yapı oldukça kullanışlıdır. Ayrıca, (9)'dan elde edilen ve

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

şeklindeki formalize yapı da zaman zaman kullanılmak zorunluluğunu kaçınılmaz hale getirir. Özellikle, dikkat edilirse; (7), (8) ve (9)'dan, kolayca,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1\,,$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} t\, e^{-t}\, dt = 1 \cdot \Gamma(1) = 1\,,$$

$$\Gamma(3) = \int_0^{\infty} t^2\, e^{-t}\, dt = 2\,\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 2\,,$$

$$\vdots$$

şeklindeki integrallerin her biri bizlere hiçte yabancı olmayan 1. tipten (türden) genelleştirilmiş integrallerdir.

Ayrıca,

$$f(x) = e^{-x^2}$$

fonksiyonunun çift bir fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa, (6)'dan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (10)$$

sonucu kolayca bulunur.

Eğer, bu son integral için

$$x = \sqrt{t} \qquad (\text{veya} \quad t = x^2)$$

şeklindeki değişken değişimi uygulanır, ardından da gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{1/2-1}e^{-t}\,dx$$

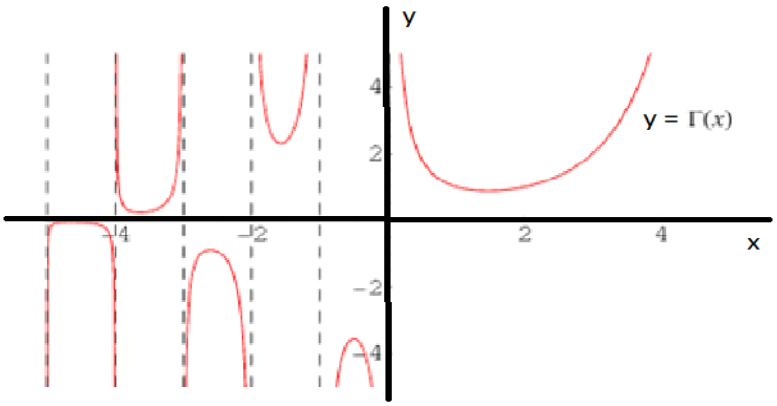
$$= \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ilişkisi elde edilir ve burada (10)'daki sonuç dikkate alınırsa,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{11}$$

önemli sonucuna kolayca varılır.

Tabii ki (7)'de verilen integralin sonsuz uzunluğa sahip aralıktaki her uygun değerinin hesaplanması, (8)'deki *n* doğal sayılarına göre hesaplanması kadar kolay bir iş değildir. Bağımsız değişkene göre, ilgili integrallerin belirlenmesinden ziyade bilmiş olduğumuz genelleştirilmiş integral türlerini uygun bir şekilde kullanarak istenilen yakınsaklık (ya da ıraksaklık) durumlarını belirlemek yeterli olacaktır. Yine, hazır paket programlarla belirlenen ve Şekil 2.1.4'teki gibi verilen gerçel (reel) değişkenli Gamma fonksiyonunun grafiği de aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1.4

Özellikle, üstte de vurgulamış olduğumuz gibi, her $x > 0$ için, (9)'da elde etmiş olduğumuz fonksiyonel durumda $\Gamma(x+1)$ yerine $\Gamma(x+n)$ kullanılır ve faktöriyel mantığı da $\Gamma(x)$'e ulaşıncaya kadar sürdürülürse,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+x) &= (x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\
&= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) \\
&= (x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)\Gamma(x+n-3) \\
&\vdots \qquad (12) \\
&= (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\Gamma(x+1) \\
&= (x+n-1)\,(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x}$$

gibi çok kullanışlı olan ilişki elde edilir. Dolayısıyla, $\Gamma(x)$ fonksiyonunu tanımsız yapan paydadaki kökler dikkate alındığında, her *n* doğal sayısı için

$$-n < x < -n+1$$

gibi aralıklarda $\Gamma(x)$ fonksiyonu ve doğal olarak da

$$-n < x < -n+1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x+n < 1$$

koşulunu sağlayan *x* değerleri için de $\Gamma(\mathrm{x}+\mathrm{n})$ fonksiyonu tanımlı olacaktır. (12)'deki mantık (11)'deki verinin kullanılmasıyla, gerek (9) gerekse (12) mantığı çerçevesinde, aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilebilir:

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 4!\,,$$

$$\Gamma(26) = 25 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 25!\,,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\,,$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\,\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2\mathrm{n}-1}{2}\right)\left(\frac{2\mathrm{n}-3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}$$

gibi özel ve genel sonuçlara da varılır. O halde,

$$\frac{\Gamma(26)}{\Gamma(19)} = \frac{25!}{18!}\,,$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2}\,,$$

$$\vdots$$

olup ve hatta negatif rasyonel tipteki sayıların Gamma altındaki değerleri de belirlenebilir. Bu tür sonuçlara da örnek vermek istersek;

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}\,,$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}}=-\frac{2}{5}\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{15}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

$$\vdots$$

gibi sonuçlar elde edilebilir.

Tanım 2.1.2.1'de verilen tanımlama kompleks düzleme, yani kompleks bağımsız değişkenine göre de tanımlanır. Bu tanım da aşağıda verilmiştir.

2.1.2.2 Tanım. z kompleks değişken olmak üzere, kompleks (değişkenli) Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ notasyonu ile gösterilir ve

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

şeklinde tanımlanır.

Üstteki tanımda verilen integral kompleks değişkenli genelleştirilmiş integral tipinde bir integral olup, ilgili integralin yakınsak olması $\Gamma(z)$ fonksiyonunun varlığı açısından elbette ki oldukça önemlidir. İntegral bilgilerimiz kapsamında, ilgili genelleştirilmiş integralin yakınsakılığı $\mathrm{Re}(z)>0$ olmasını gerektirir. Böylesi bir durum belirtilmese de ilgili şartın kabulü esastır. Hem gerçel hem de kompleks değişkenli Gamma fonksiyonun detayı ve kapsamlı uygulamaları için referanslarda yer alan Rainville (1960), Artin (1964), Abramowitz and Stegun (1965) , Lebedev (1965), Bell (1968), Carlson (1977), Olver et al. (2010) ve Wang (2010) temel kaynakları incelenebilir.

Bildiğimiz gibi, kompleks bir fonksiyonunun verilen uygun kümelerin görüntülerini (benzeri şekilde ters görüntülerini de) belirleme olayı, z-düzlemi ile w-düzlemi arasındaki bir dönüşüm ilişkisinin önemli birer sonucudur. Dolayısıyla, istenen kümeleri belirlemek de kolay bir iş değildir. Önceden de belirttiğimiz gibi, paket programlar bazında ve bazı kısıtlamalar altında bazı grafiksel şekiller (hem 3D hem de 2D

boyutlarında) belirlenebilmektedir. Burada da, şeklin geometrik yapısının daha hoş görülmesi açısından üç boyuttaki (3D) kompleks Gamma fonksiyonunun grafiksel çıktılar verilmiştir.

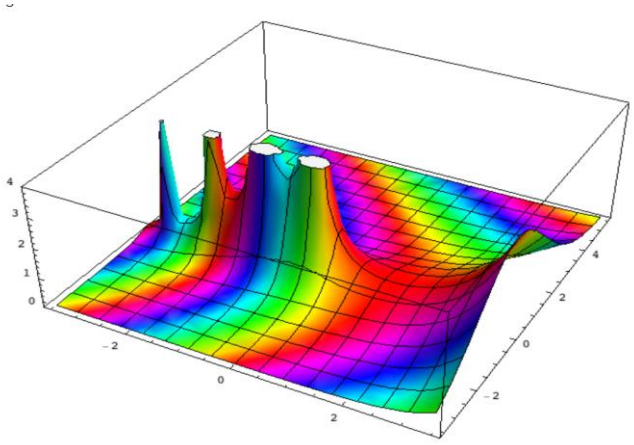
Aşağıda, $z = x + iy$ olmak üzere, z kompleks sayıları için

$$-3.5 \leq x = \mathrm{Re}(z) \leq 3.5$$

ve

$$-3.5 \leq y = \dot{\mathrm{I}}m(z) \leq 5.5$$

şeklindeki kısıtlamalar altında elde edilen 3D konumundaki grafik gerilmiştir.



Şekil 2.1.5

Bu tezin temel hedefi kapsamında olan ve özellikle kompleks değişkenli fonksiyonların bazı geometrik özelliklerinin olası uygulama boyutunun önemi açısından, kompleks değişkenli fonksiyonların modülleri, reel ve sanal kısımları ile argüment ilişkileri oldukça önemli rol alabilmektedir. Bu gibi grafiksel örneklendirmelerin çalışmalarımıza da ufuk açabilecek aşağıdaki grafiksel çıktıların örnek olarak verilmesi araştırmacılar açısından yararlı olacağı kanısındayız.

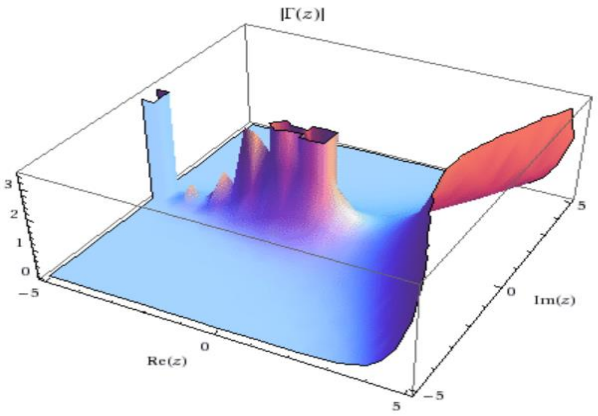
Kompleks Gamma fonksiyonun bazı geometrik özelliklerine ilişkin grfiksel çıktılar için, $z = x + iy$ kompleks sayılarına getirilen kısıtlamalar

$$-5 \leq x = \mathrm{Re}(z) \leq 5$$

ve

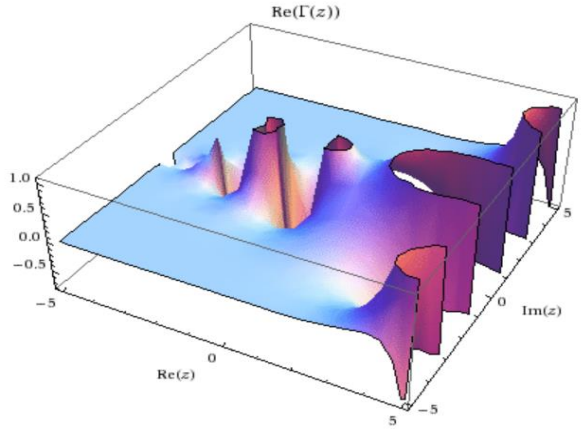
$$-5 \leq y = \mathrm{İm}(z) \leq 5$$

şeklinde olsun. Bu koşulları altında, ilgili (3D şeklinki) $|\Gamma(z)|$'nin grafiği



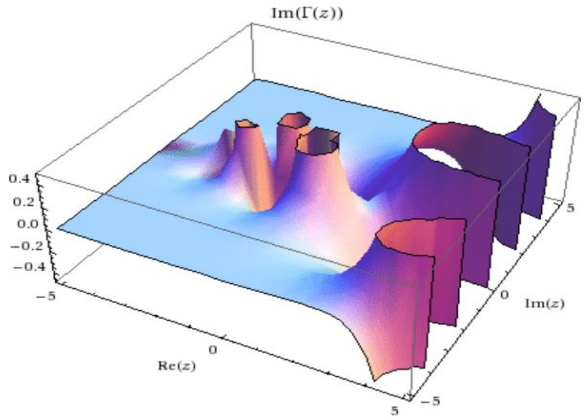
Şekil 2.1.6

şeklinde, $\mathrm{Re}(\Gamma(z))$ 'nin grafiği



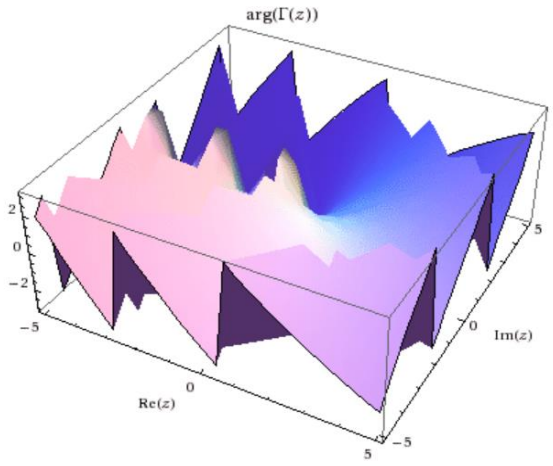
Şekil 2.1.7

şeklinde, $\mathrm{İm}(\Gamma(z))$ 'nin grafiği



Şekil 2.1.8

şeklinde ve son olarak da $\mathrm{Arg}(\Gamma(z))$'nın grafiği de



Şekil 2.1.9

şeklinde olur.

2.1.3. Sayı Dizileri ve İlgili Bazı Kavramlar

Seminer konumuzun kapsamına uygun olarak, hem kompleks hata fonksiyonu hem de bu fonksiyonlar için ihtiyaç duyulan dizi, fonksiyon dizisi ve bunların yakınsamasına yönelik bazı bilgiler kapsamında sıkça kullanılacak olan, doğal sayıların sonsuz elemanlı bir alt kümesi olan $\mathbb{N}_m$ notasyonu ile

$$\mathbb{N}_m := \{ n \in \mathbb{N} : \ n \geq m \} = \{ m,\ m+1,\ m+2, \cdots : m \in \mathbb{N} \}$$

şeklindeki bir kümenin olduğunu belirtelim. Doğal olarak;

$$\mathbb{N}_0 = \{ 0,1,2, \cdots \} = \mathbb{N} \ , \ \mathbb{N}_5 = \{ 5,6,7, \cdots \} \ , \ \mathbb{N}_{25} = \{ 25,26,27, \cdots \}$$

şeklindeki kümeler, bildiğimiz doğal sayılar kümelerinin bazı sonsuz elemanlı alt kümeleridir.

2.1.3.1 Tanım. Tanım kümesi $\mathbb{N}_m$ doğal sayılar kümesi ve değer kümesi de $\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olan fonksiyonlara dizi veya sayı dizisi adı verilir.

Bu tanıma göre, bilindiği üzere, $n \in \mathbb{N}_m$ elemanlarının $\mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) kümelerine taşınması bir fonksiyon olma kuralıyla yapılması gerekir. Bu taşımayı belirleyen kural, yani dizi adı verilen ilgili fonksiyon:

$$f(n) = \omega_n : \ \mathbb{N}_m \to \mathbb{C} \ \ (\text{veya } \mathbb{R}) \ ; \ n \mapsto \ \omega_n = f(n)$$

şeklinde bir fonksiyon olup; eğer ω_n dizisinin değer kümesi $\mathbb{R}$ ise, diziye reel (gerçel) sayı dizisi ve değer kümesi $\mathbb{C}$ ise, kompleks sayı dizisi ifadeleri sıkça kullanılsa da; dizilerin genel terimi olan ω_n genel kuralı dikkate alınarak,

$$\{ \omega_n \}_{n \geq m} \ , \quad \{ \omega_n \}_m \ , \quad (\omega_n)_{n \geq m} \quad \text{veya} \quad (\omega_n)_n$$

şeklindeki gösterimleriyle de ifade edilir.

2.1.3.2 Tanım. $\mathbb{C}$'de (veya $\mathbb{R}$'de) herhangi bir $(\omega_n)_{n \geq m}$ (sayı) dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}_m$ doğal sayısı var ve her $n \geq N$ için $|\omega_n - \omega_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir ω_0 sayısı ($\mathbb{C}$'de (veya $\mathbb{R}$'de)) var ise, (ω_n) (sayı) dizisinin limiti ω_0'dır denir ve bilindiği gibi genellikle,

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = \omega_0 \quad \text{veya} \quad n \to \infty \ \text{iken} \ \omega_n \to \omega_0$$

şeklinde gösterilir.

Bilindiği gibi, üstteki tanımdaki yakınsama için; ilgili (ω_n) (sayı) dizisi yakınsaktır, ω_0'a yakınsar veya ω_0'a yakınsıyor gibi ifadeler de kullanılır. Yakınsak olmayan dizilere de ıraksak dizi veya kısaca ıraksaktır denir. Detayına girmeksizin, her iki dizi türü için birer örnek aşağıdaki gibi verilmiştir.

2.1.3.1 Örnek. $x_n = f(n) = 1 - \frac{1}{n} : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ şeklinde verilen reel sayı dizisi 1 sayısına yakınsayan bir dizidir. Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $x_n = n + \frac{1}{n}$ şeklinde verilen reel sayı dizisi ise ıraksak olan bir dizidir.

2.1.3.2 Örnek. $z_n = f(n) = i - \frac{i}{n} : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ şeklinde verilen kompleks sayı dizisi ise i sayısına yakınsayan bir dizidir. Her $n \in \mathbb{N}_m$ için $z_n = n + \frac{i}{n}$ şeklinde verilen kompleks sayı dizisi ise ıraksak olan bir dizidir.

Burada, hem sonraki limit mantığına dayanan teorik çalışmalarda hem de benzeri araştırmaların yapılması için bir uygulamanın sunulması adına üstte belirtilen yakınsamanın, yani

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(i - \frac{i}{n}\right) = i$$

şeklindeki limitin doğruluğunu $N - \epsilon$ ilişkisiyle gösterelim. Bunun için de, verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}_m$ sayısını bulmalıyız ki her $n \geq N$ doğal sayısı için,

$$|z_n - i| = \left|\left(i - \frac{i}{n}\right) - i\right| < \epsilon$$

(doğru) olsun.

Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. O zaman,

$$|z_n - i| = \left|\left(i - \frac{i}{n}\right) - i\right|$$

$$= \left| -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}} \right|$$
$$= \frac{|-i|}{|n|}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{n}} < \epsilon$$

olur, eğer

$$N \coloneqq N(\epsilon) = 1 + \left[\!\left[\frac{1}{\epsilon} \right]\!\right]$$

seçilirse istenen doğal sayı belirlenmiş olur. Böylece, $\epsilon > 0$ sayısının keyfiliği istenen araştırmayı bitirir.

Üstteki diziler için verilen tanımları doğal olarak fonksiyon dizileri için de geçerli bir mantıkla yapılması gereken aşağıdaki tanımları verelim.

2.1.4. Fonksiyon Dizileri ve İlgili Bazı Kavramlar

Araştırmamız açısından hem reel hem de kompleks değişkenli ve değerli olan fonksiyon serileri ve bunların bazı uygulamaları da önemlidir. Şimdi, gerekli tanım ve önermeleri verelim.

2.1.4.1 Tanım. $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) ve $\mathbb{F}(\mathbb{I})$'da $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli fonksiyonların kümesi olmak üzere,

$$\mathrm{f_n}(\omega) = \mathrm{f}(\omega, \mathrm{n}) : \ \mathbb{N}_\mathrm{m} \to \mathbb{F}(\mathbb{I})$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara fonksiyon dizileri adı verilir. Genellikle, ilgili fonksiyon dizisinin *genel terimi* olan $\mathrm{f_n}(\omega)$ gösterimi sıkça kullanılsa da; diziler için Tanım 2.1.3.1'de belirtilen gösterimler, yani

$$\left(f_n(\omega)\right)_{\mathrm{n}\geq\mathrm{m}} \ , \quad \left(f_n(\omega)\right)_{\mathrm{m}} \ , \quad \{f_n(\omega)\}_{n\geq m} \ \text{ veya } \ \{f_n(\omega)\}_m$$

şeklindeki gösterimler de kullanılır.

2.1.4.2 Tanım. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $(f_n(\omega))_{n\geq m}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer, her bir $\omega \in \mathbb{I}$ için elde edilen $f_n(\omega)$ (reel veya kompleks sayı) dizisinin limiti $f(\omega)$ gibi (reel veya kompleks) fonksiyon oluyor ise $\left(f_n(\omega)\right)_{n\geq m}$ fonksiyon dizisi $f(\omega)$ fonksiyonuna ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde) noktasal yakınsıyor (veya kısaca yakınsaktır) denir.

İlgili yakınsama, aynen dizi kavramında olduğu gibi, her $\omega \in \mathbb{I}$ için

$$"n \to \infty \text{ iken } f_n(\omega) \to f(\omega) \text{ dır}" \quad \text{veya} \quad " \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) "$$

şeklinde yazılarak ifade edilir.

Özellikle, yakınsamanın noktasal olduğunu vurgulamak adına, üstteki gösterimler zaman zaman

$$" n \to \infty \text{ iken } f_n(x) \overset{(n)}{\to} f(x) \text{ dır} " \quad \text{veya} \quad " \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{(n)}{=} f(x) "$$

şeklinde de karşımıza çıkar.

Fonksiyon dizilerinin farklı ve oldukça önemli bir yakınsama türü olan, uygulama ve özellikle teorik amaçlı kullanılması zorunlu olarak kaçınılmaz olan aşağıdaki tanımı da verelim.

2.1.4.3 Tanım. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $(f_n(\omega))_{n\geq m}$ fonksiyon dizisi verilsin ve bu dizi $f(\omega)$ gibi bir fonksiyonuna (noktasal) yakınsasın. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > N$ ve her $\omega \in \mathbb{I}$ için,

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$$

olacak şekilde ω'den bağımsız (en az) bir $N \in \mathbb{N}_m$ sayısı bulunabiliyor ise $(f_n(\omega))_{n\geq m}$ fonksiyon dizisi $f(\omega)$ fonksiyonuna ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde) düzgün yakınsıyor denir ve

$$\text{" } n \to \infty \text{ iken } f_n(\omega) \xrightarrow{(d)} f(\omega) \text{ dır " } \quad \text{veya} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \overset{(d)}{=} f(\omega)$$

şeklinde gösterilir.

Limit kavramlarında sıkça karşılaşıldığı gibi, üstteki tanımda aranan ω (reel veya kompleks) sayısından bağımsız $N \in \mathbb{N}_m$ doğal sayısı verilen keyfi $\varepsilon > 0$ sayısına göre belirlenebileceği için, aranan ilgili doğal sayı zaman zaman $N(\varepsilon)$ şeklindeki sayı olacaktır.

2.1.4.1 Örnek. $\mathbb{I} = [-2\,,\,2]$ kümesi üzerinde tanımlanan ve

$$f_n(x) = f(x,n) : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}\,,\, f_n(x) = \frac{x}{n}$$

şeklinde tanımlanan reel (gerçel) (değişkenli ve değerli bir) fonksiyon dizisi, her bir $x \in \mathbb{I}$ için $f(x) = 0$ fonksiyonuna (noktasal) yakınsadığı açıktır. Acaba bu yakınsama düzgün bir yakınsama mıdır? Sorusuna cevap aramak zorundayız. Bunun için de, her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_1$ bulmalıyız ki her $n > N$ ve her $x \in \mathbb{I}$ için,

$$| f_n(x) - f(x) | = \left| \frac{x}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

olsun.

Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda,

$$| f_n(x) - f(x) | = \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \left| \frac{x}{n} \right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$$

olur, eğer

$$N := N(\varepsilon) := 1 + \left[\!\left[\frac{\varepsilon}{2} \right]\!\right]$$

şeklinde seçilirse istenen bir $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı da bulunmuş olur. Bu da verilen önermenin doğruluğunu gösterir.

2.1.4.2 Örnek. $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde verilen ve

$$f_n(z) = f(z\,,n) \ : \ \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C} \ , \ f_n(z) = \frac{z+i}{n}$$

şeklinde tanımlanan kompleks (değerli) bir fonksiyon dizisi, her bir $z \in \mathbb{I}$ için $f(z) = 0$ fonksiyonuna (noktasal) yakınsar ve bu yakınsama da düzgün bir yakınsamadır. Fakat, bu kompleks (değerli) fonksiyon, yani

$$f_n(z) \ : \ \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C} \ , \ f_n(z) = \frac{z+i}{n}$$

şeklindeki fonksiyon dizisi $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 4\}$ kümesindeki her bir $z \in \mathbb{I}$ için tanımlıdır ve $f(z) = 0$ fonksiyonuna (noktasal) yakınsamasına rağmen bu yakınsama düzgün değildir. Çünkü, $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde,

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{z+i}{n} - 0 \right| = \left| \frac{z+i}{n} \right| = \frac{|z+i|}{n} \leq \frac{|z|+|i|}{n} = \frac{|z|+1}{n} > \frac{2}{n}$$

şeklindeki elde edilen eşitsizlik üstten sınırlandırılamaz. Bu durum ise, Örnek 2.1.4.1'deki gibi aranan $N := N(\varepsilon)$ şeklindeki bir doğal sayısının belirlenmesini mümkün kılamayacaktır.

Dizi kavramında yakınsamanın, yani limit kavramının önemi elbette ki fonksiyon dizileri için de dikkate alınması gereken konular olacaktır. Tanımlamalardaki gösterimleri daha yalın bir halde göstermek ve olası indis karmaşasını ortadan kaldırmak için, diziler kavramında belirtmiş olduğumuz $\mathbb{N}_m$ kümesindeki m doğal sayısını $m = 1$ şeklinde seçelim.

Yani, bundan sonraki tanımlarımızda

$$\mathbb{N}_1 = \{1\,,2\,,3\,, \ \ldots\}$$

şeklindeki küme dikkate alınacaktır. Şimdi, aşağıdaki gerekli olabilecek tanımlara geçelim.

2.1.5. Seriler ve İlgili Bazı Kavramlar

Bilindiği üzere, matematik biliminde seri kavramı karşımıza ya genel terimi sayı dizileri ya da fonksiyon dizileri olan seriler şeklinde çıkmaktadır. Bu kavramlar da aşağıda hatırlatılmıştır.

2.1.5.1 Tanım. Herhangi bir $\omega_n = f(n) : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ (veya $\omega_n = f(n) : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$) (sayı) dizisi verilsin. Bu dizinin terimlerinden elde edilen:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n + \cdots$$

şeklindeki sonsuz tane terimin toplamına *seri* adı verilir. Böylesi bir seri de kolaylık ve kullanışlılık açısından,

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$$

şeklinde gösterilmektedir. Bilindiği üzere, ilgili dizinin *n. terimi* konumunda olan ω_n terimi de vurgulanarak "ω_n genel terimli seri" veya "n. genel terimli seri" adlarıyla da ifade edilir.

Elbette ki, ilgili ω_n terimlerinin her biri birer sayıdan (*reel* veya *kompleks*) oluştuğu için, ilgili seriler genelde "sayı serileri" şeklinde de ifade edilmektedir.

Zaman zaman "Bir kompleks seri" için "z_n genel terimli seri" ve "Bir reel (gerçel) seri" için de "x_n genel terimli seri" söylemleri de kullanılır.

2.1.5.1 Örnek. $x_n = f(n) = (-2)^n : \mathbb{N} \equiv \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için tanımlı olan bir reel (gerçel) sayı dizisidir ve doğal olarak $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$ serisi de bir reel (gerçel) sayı serisidir.

2.1.5.2 Örnek. $z_n = f(n) = \frac{(1-i)^n}{n(n-3)} : \mathbb{N}_4 \to \mathbb{C}$ fonksiyonu da her $n \in \mathbb{N}_4$ için tanımlı olan bir kompleks fonksiyon dizisidir ve $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n(n-3)}$ serisi de bir kompleks sayı serisi olur.

2.1.5.2 Tanım. Herhangi bir

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$$

şeklinde bir seri verilsin. Bu serinin, ilk n teriminin toplamı, yani

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n$$

şeklindeki toplama verilen serinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir ve bir diziyi ifade etmesinde dolayı, genellikle,

$$S_n = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

şeklinde gösterilse de önceden belirtmiş olduğumuz dizi gösterimlerinden, yani

$$(S_n)_{n=1} \quad \text{veya} \quad \{S_n\}_1$$

gösterimleriyle de ifade edilebilir.

2.1.5.3 Tanım. Herhangi bir ω_n genel terimli seri verilsin. Eğer, ilgili serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise ilgili seriye yakınsak seri veya kısaca yakınsaktır denir. Aksi taktirde, yani ilgili kısmi toplamlar dizisi yakınsak değil ise ıraksak seri veya kısaca ıraksaktır denir.
Bu tanıma göre,

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \omega_n$$

serisi yakınsaktır ancak ve ancak

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[\,\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n\,] = s$$

s sayısı $\mathbb{R}$'de (veya $\mathbb{C}$'de) var olacaktır. Böylesi bir durumda, n. kısmı toplamlar dizisinin $S_n \to s$ şeklindeki yakınsaması sonucu

$$"\lim_{n\to\infty} S_n = s \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i = \sum_{i=1}^{\infty}\omega_n = s \;\Leftrightarrow\; \sum_{1}^{\infty}\omega_n \text{ yakınsaktır}"$$

yazımları söz konusu olacaktır.

Üstte belirtilen s sayının belirlenmesinin kolay bir iş olmadığını çok iyi bilmekteyiz. Bu açıdan, hem *kompleks* hem de *reel (gerçel)* serilerin yakınsaklıklarının araştırılmasında önemli rol oynayan bazı testler (kriterler) söz konusu olmaktadır. Bu yüzden, sadece tez çalışmamız için gerekli olabilecek aşağıdaki bilgileri hatırlatmak durumundayız.

2.1.5.4 Tanım. $(\omega_n)_{n\geq 1}$ sayı dizisi verilsin. O zaman, eğer $\sum_{n\geq 1}^{\infty}|\omega_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\omega_n$ serisi mutlak (modülce, salt) yakınsaktır denir.

Kompleks sayılar kümesinde, sıralama bağıntısının söz konusu olmadığı için, verilen bir serinin (koşullu) yakınsaklık durumu için üstteki seri zorunlu dikkate alınması gereken bir tanımdır. Literatürde D'Alembert (Limit) ve Cauchy (Limit) kriterleri (testleri) olarak bilinen ve seminer konumuzda da kullanılacak olan aşağıdaki teoremleri hatırlatmak durumundayız.

2.1.5.1 Teorem. Her bir terimi sıfırdan farklı olan herhangi bir $(\omega_n)_{n=1}$ sayı dizisi verilsin ve

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = L \quad \text{veya} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\omega_n|} = L \qquad (0 < L < \infty) \tag{13}$$

olsun. Bu durumda, $\sum_{n=m}^{\infty}\omega_n$ serisi;

(i) $L < 1$ ise ilgili seri mutlak (salt, modülce) yakınsaktır.

(ii) $L > 1$ veya $L = \infty$ ise ilgili seri ıraksaktır.

(iii) $L = 1$ ise ilgili serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı için bir şey söylenemez.

Seri kavramında ilgili genel terimin bir sayı dizisinden ibaret olduğunu biliyoruz. İlgili genel terimin bir fonksiyon dizisi şeklinde olması durumunda da, bilinen kavramlar benzeri mantıkla aynen fonksiyon serileri için de düşünülür. Şimdi de, fonksiyon serilerine ihtiyaç duyduğumuz bazı gerekli bilgileri verelim.

2.1.5.3 Örnek. $z_n = \left(\frac{2-i}{3+2i}\right)^n$ kompleks sayı dizisini genel terim olarak kabül eden $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi (mutlak veya modülce) yakınsak bir seridir. Çünkü, yakınsaklığı Teorem 2.1.5.1'de belirtilen her iki kriterle de kolayca belirlenen aşağıdaki araştırma ile;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left|\left(\frac{2-i}{3+2i}\right)^n\right|}$$

$$\left(= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left|\left(\frac{2-i}{3+2i}\right)\right|^n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2-i}{3+2i}\right|$$

$$= \left|\frac{2-i}{3+2i}\right|$$

$$= \frac{|2-i|}{|3+2i|}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{13}} = L < 1$$

sonucu elde edilir ki, bu da ilgili kompleks serinin (mutlak veya modülce) yakınsaklığını gerektirir.

2.1.5.4 Örnek. $x_n = q^n$ reel (veya kompleks) sayı dizisini genel terim olarak kabül eden ve geometrik seri olarak bilinen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi $|q| < 1$ için yakınsaktır ve $|q| \geq 1$ için de ıraksaktır. Bu sonucu her ne kadar Teorem 2.1.5.1 yardımıyla elde etsek de, geometrik serilerin yakınsama teorisindeki önemi açısından,

ilgili araştırmayı Tanım 2.1.5.3'teki bilgiler kapsamında ele almak daha uygun olacaktır. Bu açıdan, ilgili serininin (*n.*) kısmi toplamlar dizisi, yani

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$= q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

$$= q\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

dizisi ele alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{q}\,\frac{1-\mathrm{q}^{n-1}}{1-\mathrm{q}}\right)$$

$$= \frac{q}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-\mathrm{q}^{n-1})$$

$$= \begin{cases} q/(1-q) & \text{eğer } |q|<1 \\ \mp\infty & \text{eğer } |q|\geq 1 \end{cases}$$

sonucu kolayca elde edilir.

O halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \;:\; \begin{cases} (Mutlak)\text{ Yakınsak olur}, & \text{eğer } |q|<1 \\ \text{Iraksak olur}, & \text{eğer } |q|\geq 1 \end{cases} \qquad (14)$$

ve dolayısıyla, $|q|<1$ olması durumunda,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$$

olur.

Şimdi, genel terimi fonksiyon dizileri şeklinde olan ve fonksiyon serilerini adını alan serileri tanıtalım.

2.1.5.5 Tanım. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $(f_n(\omega))_{n=1}$ fonksiyon dizisi verilsin. Bu durumda,

$$f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) + \cdots + f_4(\omega) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

ifadesine ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde tanımlanan) fonksiyon serisi ve bu serinin genel teriminin ilk n tane teriminin toplamını ifade eden $\left(S_n(\omega)\right)_{n=1}$ olan dizisine, yani

$$S_n(\omega) = f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) + \cdots + f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} f_n(\omega)$$

şeklindeki sonlu toplama da $f_n(\omega)$ genel terimli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serinin kısmı toplamlar dizisi veya n. kısmi toplamlar dizisi adları verilir.

Üstte verilen Tanım 2.1.5.5'ten anlaşılacağı gibi, aynen sayı serilerindeki mantık doğrultusunda genel terimi bu sefer de "fonksiyon dizileri" şeklinde olan temel kavramlar olup, ilgili kümeler netleştirilerek aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

2.1.5.5 Örnek. $f_n(x) = f(x, n) = x^n : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_1$ ve her $x \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ için tanımlı olan bir reel fonksiyon dizisidir ve $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ serisi de $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde verilen bir reel (gerçel) değerli fonksiyon serisi olur.

2.1.5.6 Örnek. $f_n(z) = f(z, n) = \frac{z^n}{n-2} : \mathbb{N}_3 \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_3$ ve her $z \in \mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r \ (r > 0)\}$ için tanımlı olan bir kompleks fonksiyon dizisidir ve $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n-2}$ serisi de $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde verilen bir kompleks (değerli) fonksiyon serisi olur.

Şimdi, yabancı olmadığımız ve sayı serilerinde de belirtmiş olduğumuz yakınsama ile ilgili olan kavramların, fonksiyon serileri kapsamındaki durumlarının hem tanıtılması hem de teorik bilgilerin verilmesini ele alalım.

2.1.5.6 Tanım. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $(f_n(\omega))_{n=1}$ (reel veya kompleks) fonksiyon dizisi verilsin. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisinin kısmı toplamlar dizisi, yani $\left(S_n(\omega)\right)_{n=1}$ dizisi $s(\omega)$ gibi bir fonksiyonuna ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde) yakınsıyor ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi $s(\omega)$ fonksiyonuna ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde) yakınsıyor denir ve bilindik

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = s(\omega)$$

gösterimi kullanılır ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = s(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$$

yine şeklinde gösterilir.

Fonksiyon serileri için oldukça önemli olan, genellikle kalan terimler toplamı (veya n. kalan terimler toplamı) olarak adlandırılan ve $K_n(\omega)$ ile gösterilen;

$$K_n(\omega) = f_{n+1}(\omega) + f_{n+1}(\omega) + f_{n+2}(\omega) + \cdots = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_n(\omega)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon serisidir. Burada, dikkat edilirse,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} f_n(\omega) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f_n(\omega) \qquad (15)$$

olup ve doğal olarak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(\omega) = S_n(\omega) + K_n(\omega) = s(\omega) \qquad (16)$$

ilişkisi açıkça görülür.

Verilen herhangi bir fonksiyon serisinin yakınsak olması durumda, bilmiş olduğumuz limit kavramı ile (15) veya (16) eşitliklerinde göz önüne alınırsa,

$$s(\omega) - \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}[s(\omega) - S_n(\omega)] = \lim_{n\to\infty} K_n(\omega)$$

sonucu, her $\omega \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\omega \in \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) için $K_n(\omega)$ dizisinin *sıfıra* yakınsayan bir dizi, yani $\lim_{n\to\infty} K_n(\omega) = 0$ olması gerekir. O halde, aşağıdaki tanım kolayca verilebilir.

2.1.5.7 Tanım. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $(f_n(\omega))_{n=1}$ (reel veya kompleks) fonksiyon dizisi verilsin. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisinin kısmı toplamlar dizisi ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde) düzgün yakınsak, yani $S_n(\omega) \to s(\omega)$ yakınsaması düzgün ise, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi $s(\omega)$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Aşağıdaki verilen teoremler fonksiyon serilerinin yakınsaklık veya düzgün yakınsaklık durumlarının belirlenmesinde teorik açısından oldukça kullanışlıdır. Gerek teorik gerekse uygulamaları açısından Nehari (1952), Duren (1983), Goodman (1983), Wusch (1994) and Brown and Churchill (1996) eserleri temel kaynaklardır.

2.1.5.2 Teorem. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) bölgesi üzerinde tanımlı olan bir $(f_n(\omega))_{n=1}$ fonksiyon dizisi verilsin. Bu durumda, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisinin $s(\omega)$ gibi bir fonksiyona yakınsaması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her bir $x \in \mathbb{I}$ için öyle bir $N := N(x;\varepsilon) \in \mathbb{N}_1$ sayısı için

$$|S_n(\omega) - s(\omega)| = |K_n(\omega)| < \varepsilon$$

olmasıdır.

2.1.5.3 Teorem. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) bölgesi üzerinde tanımlı olan bir $(f_n(\omega))_{n=1}$ fonksiyon dizisi verilsin ve ($\mathbb{I}$ üzerinde tanımlı bir) $s(\omega)$ fonksiyonuna yakınsasın. Bu durumda, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisinin $s(\omega)$ gibi bir fonksiyona

düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_1$ sayısı vardır öyle ki her $x \in \mathbb{I}$ ve her $n \geq N$ için

$$|S_n(\omega) - s(\omega)| = |K_n(\omega)| < \varepsilon$$

olmasıdır.

Genel terimi sayı dizileri olan serileri için ilgili "Kısmı Toplamlar Dizileri" için limit araştırması kolay bir iş olmadığı söz konusu iken, böylesi bir araştırmanın daha da karmaşık bir yapısı konumunda olan fonksiyon serileri için ise hiç kolay olmayacağı aşikardır. İşte bu açıdan, ilgili fonksiyon serisinin eşitinin belirlenmesinden ziyade yakınsaklık ve özellikle düzgün yakınsaklık durumlarının araştırması aşağıda verilen teoremle yeterli olacaktır. Bu yüzden, literatürde Weierstrass M Kriteri (Testi) olarak bilinen teoremi ve ardından da bu teoremin sadece önemli bir uygulamasını verelim.

2.1.5.4 Teorem. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $f_n(\omega)$ genel terimli ve bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi verilsin. Eğer, her $\omega \in \mathbb{I}$ için $|f_n(\omega)| \leq \omega_n$ (pozitif terimli) reel (gerçel) sayı dizisi var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ serisi yakınsak ise, $\sum_{n=m}^{\infty} f_n(\omega)$ serisi ($\mathbb{I}$ kümesi üzerinde) düzgün yakınsaktır.

2.1.5.7 Örnek. Kompleks düzlemin $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$ şeklinde verilen bir alt kümesi üzerinde, yani halka bölge üzerinde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3z-2i}{7z+i}\right)^n \qquad (17)$$

şeklinde verilen kompleks fonksiyon serisi ($\mathbb{I}$ üzerinde) düzgün yakınsak olan bir seridir.

Gösterelim: Bunu göstermek için, öncelikle her $z \in \mathbb{I}$ için

$$f_n(z) = \left(\frac{3z-2i}{7z+i}\right)^n$$

şeklindeki fonksiyon dizisinin sınırlı olup olmadığını araştıralım. Bunun için de $\mathbb{I}$ üzerinde

$$\left|\frac{3z-2i}{7z+i}\right|$$

ifadesinin üstten sınırlı olup olmadığını araştırmak yerinde olur. Buna göre, bilindik üçgen ve ters üçgen özelliklerinden;

$$\left|\frac{3z-2i}{7z+i}\right| = \frac{|3z-2i|}{|7z+i|} \leq \frac{|3z|+|-2i|}{||7z|-|i||} = \frac{3|z|+2}{||7z|-1|} \tag{18}$$

şeklindeki sonuçlara kolayca varılır. Fakat, istenenin belirlenmesi için, üste elde edilen

$$3|z|+2 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{||7z|-1|}$$

ifadeleri için birer üst sınır bulmak durumundayız. Şimdi de bunların varlığını araştıralım:

$$3 < |z| < 4 \Longrightarrow 9 < 3|z| < 12 \Longrightarrow 11 < 3|z|+2 < 14$$

ve

$$3 < |z| < 4 \Longrightarrow 21 < 7|z| < 28 \Longrightarrow 20 < 7|z|-1 < 27$$

$$\Longrightarrow 20 < \big||7z|-1\big| < 27$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{27} < \frac{1}{||7z|-1|} < \frac{1}{20}$$

elde edilir. Bu üst sınırlar (18)'deki eşitsizlik için göz önüne alınırsa,

$$\left|\frac{3z-2i}{7z+i}\right| = \cdots \leq \frac{3|z|+2}{||7z|-1|} < \frac{7}{10}$$

şeklindeki gibi bir sınırlama elde edilir.

O halde, her $z \in \mathbb{I}$ ve her $n \in \mathbb{N}_1$ için,

$$\left|\frac{3z-2i}{7z+i}\right|^n < \left(\frac{7}{10}\right)^n = q^n$$

şeklindeki bir bilindik geometrik dizi elde edilir. Örnek 2.1.5.5'teki bilgiler ışığında ve

$$q = \frac{7}{10} < 1$$

olması nedeniyle

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

serisi bir yakınsak dizi olur. Dolayısıyla, (17)'de verilen seri (mutlak veya modülce) yakınsak ve doğal olarak düzgün yakınsak bir seri olur.

2.1.5.5 Teorem. Verilen bir $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$) kümesi üzerinde bir $\left(f_n(\omega)\right)_{n=1}$ fonksiyon dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi verilsin. Bu durumda, $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde ve her bir $n \in \mathbb{N}_1$ için $f_n(\omega)$ fonksiyonları integrallenebilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi de düzgün yakınsak ise,

$$\int_{\mathbb{I}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)\right] d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{I}} f_n(\omega)\, d\omega\right) \qquad (19)$$

dır.

Tez konumuz açısından, yine faydalı olabilecek diğer bir seri tipi de, fonksiyon serilerin farklı bazı tipleri olan bazı kuvvet serileri ve bunların özel halleri olarak karşımıza çıkan bazı özel açılımlı serilerdir. Şimdi, bu seriler için de bazı bilgilendirmelerde bulunalım.

2.1.5.8 Örnek. Örnek 2.1.5.7'deki fonksiyon serisinin ilgili $\mathbb{I}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsak bir seri olduğunu görmüştük. Eğer ilgili örnekteki halka bölgesinin sınırını

ifade eden veya bölgedeki oluşturulabilecek her bir γ_i sürekli (veya parçalı sürekli) olan basit kapalı eğriler göz önüne alınırsa, Tanım 2.1.5.5 gereğince, yani (19)'da verilen genel sonuç gereği, terim terime integral söz konusu olup, kolayca

$$\int_{\gamma_i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3z-2i}{7z+i}\right)^n\right]dz=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\gamma_i}\left(\frac{3z-2i}{7z+i}\right)^n dz\right)=0$$

sonucuna varılır.

Yine fonksiyon serilerinin özel tipleri olan bazı bilindik fonksiyon serileri vardır. Kuvvet serileri olarak bilinen bu seriler yine seminer konumuz için önem taşımaktadır. Şimdi bunları hatırlatalım.

2.1.5.8 Tanım. Herhangi bir $(\omega_n)_{n=1}$ sayı dizisi ve $\omega_0 \in \mathbb{C}$ (veya $\omega_0 \in \mathbb{R}$) sabit sayısı verilsin. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\omega-\omega_0)^n\omega_n$$

şeklindeki fonksiyon serilerine kuvvet serisi veya $\omega=\omega_0$ noktası civarındaki seri açılımı adları verilir.

Bu tür serilerin yakınsaklığında, doğal olarak koşullu yakınsaklıklar durumu söz konusu olabilmektedir. Bu yakınsama da $(\omega_n)_{n=1}$ sayı dizisinin yakınsaklığı olduğu oldukça önemlidir. Çünkü,

$$w_n(\omega)=(\omega-\omega_0)^n\omega_n \qquad (n\in\mathbb{N}_1)$$

fonksiyon dizisi için, Teorem 2.1.5.1 göz önüne alındığında,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right|=L \quad \text{veya} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\omega_n|}=L \quad (L\geq 0)$$

limitlerinin sonlu olması, bizleri (mutlak, salt veya modülce) yakınsaklık bölgelerinin varlığı hakkında bilgilendirmektedir.

Kısacası, gerek kuvvet serileri gerekse genel anlamdaki fonksiyon serilerinin Teorem 2.1.5.1'deki (i)-(iii)'de verilen koşular çerçevesinde (mutlak veya modülce) yakınsaklık (ya da ıraksaklık) şartları belirlenebilir. Özellikle yakınsaklık için belirlenen kümelere, ilgili fonksiyon serilerinin yakınsaklık kümesi dendiğini biliriz.

Son olarak, kuvvet seri açılımlarının iki özel adları sıkça anılan ve literatürde Taylor ve MacLaurin seri açılımları olarak bilinen fonksiyon serilerini hatırlatalım.

2.1.5.9 Tanım. $\mathbb{I}$, $\mathbb{C}$ 'de (veya $\mathbb{R}$'de) bir bölge, $\omega_0 \in \mathbb{I}$ ve $f(\omega)$ (reel veya kompleks) fonksiyonu da $\mathbb{I}$ bölgesinde her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= f(\omega_0) + f'(\omega_0)(\omega-\omega_0) + \frac{f''(\omega_0)}{2!}(\omega-\omega_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(\omega_0)}{n!}(\omega-\omega_0)^2 + \cdots \qquad (20) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\omega_0)}{n!}(\omega-\omega_0)^n \end{aligned}$$

kuvvet serisine ($\omega = \omega_0$ noktası civarındaki) Taylor seri açılımı adı verilir. Bu gibi seri açılımlarında $\omega_0 = 0$ alınmasıyla elde edilen seri açılımına, yani

$$\begin{aligned} f(\omega) &= f(0) + f'(0)\omega + \frac{f'(0)}{2!}\omega^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\omega_0)}{n!}\omega^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\omega^n \qquad (21) \end{aligned}$$

şeklindeki fonksiyon serilerine de $\omega = 0$ noktası civarındaki Taylor seri açılımı veya MacLaurin seri açılımı adı verilir.

Bu tür fonksiyon seri açılımları tez araştırmamız açısından önemli rolü olacaktır. Bundan dolayı, hem kompleks fonksiyonlara hem de reel değerli fonksiyonlara uygun olabilecek bazı örneklendirmeleri vermekte fayda görüyoruz.

2.1.5.9 Örnek. Bağımsız değişkeni ω olan $f(\omega) = e^{\omega}$ gibi bir fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun bağımsız değişkeninin reel (gerçel) veya kompleks değişken olarak düşünülmesi durumunda, verilen fonksiyon hem $\mathbb{R}$'de hem de $\mathbb{C}$'de tanımlıdır ve hatta her $\omega = \omega_0$ ($\mathbb{R}$'de veya $\mathbb{C}$'de) noktasında her mertebeden türevinin var olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, hem (20) hem de (21)'deki seri açılımlar, her iki fonksiyon için de söz konusu olacaktır. İlgili türevlerin ve istenenin belirlenmesini sadece $\omega_0 = 0$ için ele alalım:

$$\frac{d^0 f}{d\omega^0} = f^{(0)}(\omega) = f(\omega) = e^{\omega} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1\,,$$

$$\frac{d^1 f}{d\omega^1} = f^{(1)}(\omega) = f'(\omega) = e^{\omega} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1\,,$$

$$\frac{d^2 f}{d\omega^2} = f^{(2)}(\omega) = f''(\omega) = e^{\omega} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1\,,$$
$$\frac{d^3 f}{d\omega^3} = f^{(3)}(\omega) = f'''(\omega) = e^{\omega} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 1\,,$$

$$\frac{d^4 f}{d\omega^4} = f^{(4)}(\omega) = f''''(\omega) = e^{\omega} \quad \Rightarrow \quad f''''(0) = 1\,,$$
$$\vdots$$

şeklindeki türevler elde edilir ve basit bir odaklanma sonucunda, verilen fonksiyonun $\omega_0 = 0$ noktasındaki *n*. mertebeden türevi de

$$\frac{d^n f}{d\omega^n} = f^{(n)}(\omega) = e^{\omega} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçlar, Tanım 2.1.5.9'daki seri açılımında yerlerine konursa, istenen fonksiyon serisi, yani kuvvet serisi

$$\begin{aligned} f(\omega) &= e^{\omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\omega^n}\Big|_{\omega=0} \right) (\omega - 0)^n \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklindeki (MacLaurin) seri açılımı elde edilir.

Örnek 2.1.5.9'de eğer ω yerine, sırasıyla, $-z$ ve $-x^2$ alınırsa aşağıdaki gibi $f(z) = e^{-z}$ reel (bağımsız) değişkenli ve $f(x) = e^{-x^2}$ kompleks (bağımsız) değişkenli fonksiyonlarının MacLaurin seri açılımları, aşağıdaki gibi kolayca elde edilir.

2.1.5.10 Örnek. $f(z) = e^{-z}$ kompleks (bağımsız değişkenli) fonksiyonunun MacLaurin seri açılımı,

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$$

şeklindeki kompleks fonksiyon serisi olur.

2.1.5.11 Örnek. $f(x) = e^{-x^2}$ reel (bağımsız değişkenli) fonksiyonunun MacLaurin seri açılımı,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{22}$$

şeklindeki reel fonksiyon serisi olur.

Örnek 2.1.5.10'da verilen seri tez konumuz açısından oldukça önemli bir seridir. Bundan dolayı, ilgili serinin yakınsaklığı ve özellikle düzgün yakınsaklığı hakkında bazı bilgileri vurgulamakta fayda görmekteyiz. (22)'de verilen fonksiyon serisini düzgün yakınsaklık açısından inceleyelim. İlgili seri için, Teorem 2.1.5.1'de verilen test uygulanırsa, her $x \in (-\infty, \infty)$ reel sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\, x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}} \right| = \left| \frac{x^{2(n+1)}}{x^{2n}} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!(-1)^{n+1}}{(n+1)!(-1)^n} \right|$$

$$= |x^2| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1}{n+1} \right|$$

$$= x^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 0$$

olacağı kolayca görülür. Dolayısıyla, ilgili serinin her $x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ için (mutlak) yakınsak olduğu açıktır. Ayrıca, her $r > 0$ olmak üzere, $I = (-r, r) \subseteq \mathbb{R}$ gibi her bir aralıklarda, ilgili seri (mutlak) yakınsak bir seridir.

Özellikle, $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun, Şekil 1.1'de de kolayca görülebileceği gibi, her $x \in I = (-r, r) \subseteq \mathbb{R}$ için

$$\left|e^{-x^2}\right| = e^{-x^2} \leq 1$$

şartını sağladığı ve doğal olarak sınırlı bir fonksiyon olduğu açıktır.

Ayrıca, her mertebeden türevi olan ilgili f(x) fonksiyonun (mutlak) yakınsak serisi olan seri;

$$-r < x < r \;\Rightarrow\; |x| < r \;\Rightarrow\; |x|^n < r^n$$

$$\Rightarrow\; |x|^{2n} = x^{2n} < r^{2n}$$

ve doğal olarak,

$$\left|\frac{x^{2n}}{n!}\right| = \left|\frac{x^{2n}}{n!}\right| = \frac{|x|^{2n}}{n!} = \frac{r^{2n}}{n!} \leq \frac{r^{2n}}{n!} = \omega_n$$

şeklindeki ilişki gereği, ilgili ω_n pozitif genel terimli olan bir seri için karşılaştırma testi dikkate alındığında;

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\omega_n+1}{\omega_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{r^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{r^{2n}}{n!}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r^{2(n+1)}}{r^{2n}} \frac{n!}{(n+1)!}\right)$$
$$= r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= r^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 0$$

şeklindeki sonuca, r değişkeninin hiçbir etkisi olmadan varılır ki, bu da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!}$$

pozitif genel terimli serinin yakınsaklığına ve dolayısıyla Teorem 2.1.5.4, yani Weierstrass M Testi gereğince de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

fonksiyon (kuvvet) serisi (mutlak) yakınsaklığı ve sonuç olarak da ilgili serinin düzgün yakınsaklığı görülmüş olunur.

Literatürde klasik hata (error) fonksiyonu olarak bilinen x-reel (gerçel) bağımsız değişkenli (parametreli) hata (error) fonksiyonunu önce tanıtalım ve ardından da bu tanımı kompleks düzleme taşıyarak kompleks değişkenli hata (error) fonksiyonu olarak da bilinen fonksiyonu tanımlayalım.

2.2. Hata Fonksiyonu ve İlgili Bazı Kavramlar ve Teoremler

2.2.1. Hata (Error) Fonksiyonları

2.2.1.1 Tanım. *x* bir bilinmeyen (parametre veya değişken) olmak üzere, x (gerçel) değişkenli Hata (Error) Fonksiyon'u Erf(x) veya erf(x) ile gösterilir ve

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{23}$$

şeklinde tanımlanır.

Reel bağımsız değişkenli ve reel değerli olarak tanımlanan (23)'teki fonksiyona dikkat edilirse;

- Erf(x) fonksiyonu her x ∈ ℝ için tanımlı olan bir fonksiyondur,
- Erf(x) fonksiyonu her x ∈ ℝ için sürekli olan bir fonksiyondur,
- $f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{R}$ için tanımlı bir fonksiyon olup, bu fonksiyon $[0, x]$ $(x > 0)$ (ve benzeri olarak $[x, 0]$ $(x < 0)$) aralığında sınırlı bir fonksiyondur. Bu ise, doğal olarak, Erf(x) fonksiyonunun sınırlılığını gerektirecektir,
- Erf(x) fonksiyonu her x ∈ ℝ için türevlenebilir bir fonksiyondur,
- Erf(x) fonksiyonu $\mathrm{Erf}(0) = 1$ ve $\lim_{x\to\infty}\mathrm{Erf}(\mathrm{x}) = 1$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olup ve $\lim_{\mathrm{x}\to-\infty}\mathrm{Erf}(\mathrm{x}) = -1$ durumu da söz konusudur. Dolayısıyla, $y = \mp 1$ doğruları $f(x) = \mathrm{Erf}(\mathrm{x})$ gibi bir fonksiyonu için yatay asimptot konumundadır.

Olasılık (ve istatistik) teorisinde, rastlantısal bir olguya ilişkin bir önermenin kesine ya da olanaksıza ne kadar yakın olduğunu gösteren sayı oldukça önemlidir. Bundan dolayı, olasılık içeren her olay kendi evrensel uzayında, ‘‘0’’ (sıfır) sayısı ilgili olayın olanaksız oluşunu belirleyen en alt sınır ve ‘‘1’’ sayısı da ilgili olayın kesin oluşunu simgeleyen en üst sınır olarak kabul edilir. Dolayısıyla, ilgili olayların gerçekleşme durumları [0,1] aralığındaki sayılara karşılık getirilecek olan bir fonksiyonel olgu olarak kabul edilir.

Vurgulanan [0,1] aralığının önemi esas olduğundan dolayı, hem olası hata analizlerinin dikkate alınmasında hem de aynı amaca hizmet eden tüm benzeri dağılımlardaki belirtilen mantık oldukça önemlidir. İşte bu açıdan, Tanım 2.2.1.1'in (23)'teki gibi tanımlanan Erf(·) fonksiyonu (ve daha sonraki çalışmalarımızda da karşımıza çıkacak olan kompleks düzleme genişlemesi şeklindeki Tanım 2.2.1.2'nin (24) ve (25)'teki belirtilen tanımlamaları) için, ilgili integrallerin sonucunun ilgili formda tanımlanması kaçınılmaz olmuştur.

Üstteki açıklamalar kapsamında, hatanın sıfır olması ihtimali dikkate alındığında ilgili fonksiyon için esas olan tanımlama;

$$\mathrm{Erf(x)}: [0,\infty) \to [0,1)$$

şeklindeki bir tanımlama olsa da, tanımlanışında yer alan argümanların uygunluğu ve matematik biliminde geçen çok sayıda özel fonksiyonlarla geniş kapsamlı olası önemli ilişkileri açısından,

$$\mathrm{Erf(x)}: (-\infty,\infty) \to (-1,1)$$

şeklindeki tanımıyla da dikkati çeker. Gerçel değişkenli hata (error) fonksiyonuna ilişkin bilgiler kapsamında, (23)'te tanımlanan Erf(x) fonksiyonuna ilişkin (çok güç de olsa) grafiği çizilebilir. Önceden yapmış olduğumuz gibi, hazır programlar kapsamında oluşturulan grafik çıktıları aşağıdaki gibi verilmiştir.

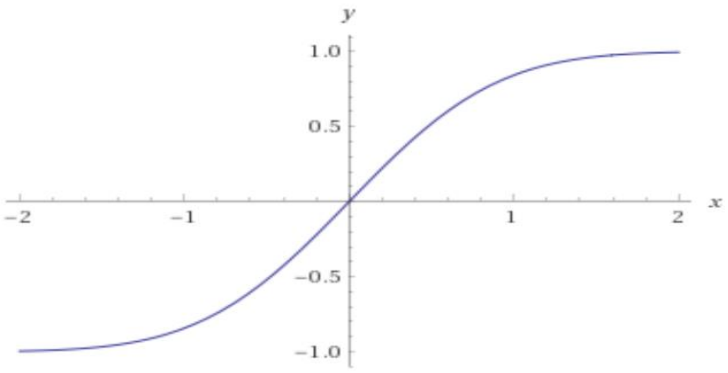
Aşağıda verilen iki grafik yine paket programlar yoluyla gerçel değişkenli Hata Fonksiyonu için oluşturulmuştur. Şekil 2.2.1'deki grafik çıktısı

$$-2 \le x \le 2$$

şeklindeki kıstlaması sonucu ve Şekil 2.2.2'deki grafik de

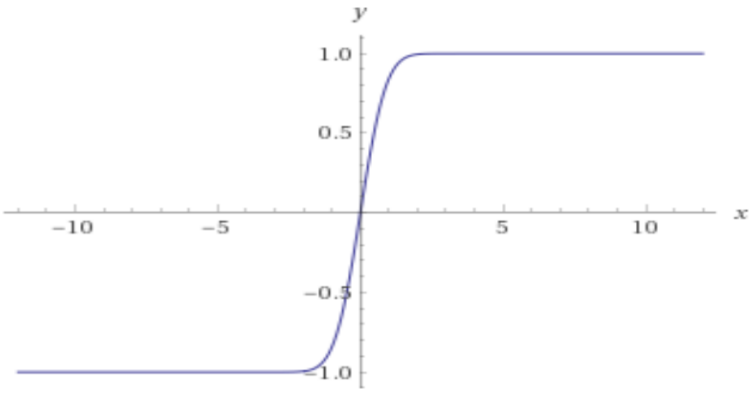
$$-12 \le x \le 12$$

şeklindeki kısıtlaması sonucu oluşturulan grafiklerdir. Bunlar sırasıyla,



Şekil 2.2.1

ve



Şekil 2.2.2

şeklindedir.

Şimdi, ilgili fonksiyonu kompleks parametre (değişken) kapsamındaki tanımlanışını da vererek, durumu tez konusu gereği kompleks düzleme taşıyalım**.**

2.2.1.2 Tanım. z kompleks bilinmeyen olmak üzere, Kompleks (değişkenli) Hata (Error) Fonksiyon'u,

$$\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt \tag{24}$$

şeklinde tanımlanır.

Üstte tanımlanan kompleks fonksiyon literatürde kompleks düzlemde hata fonksiyonu, kompleks değişkenli hata fonksiyonu veya kompleks parametreli hata fonksiyonu adlarıyla sıkça anılan bir (kompleks) fonksiyondur. Ayrıca, (24)'te verilen tanımdaki ilgili integral sınırı kompleks bilinmeyen (parametre, değişken veya sayı) ile olan ilişkisi gereği, bazı durumlarda, γ eğrisi kompleks düzlemin herhangi bir bölgesindeki $w = 0$ noktasını $w = z$ gibi genel bir noktaya bağlayan bir (türevlenebilir) eğri olmak üzere,

$$\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma e^{-t^2} dt \tag{25}$$

şeklinde de tanımlanır.

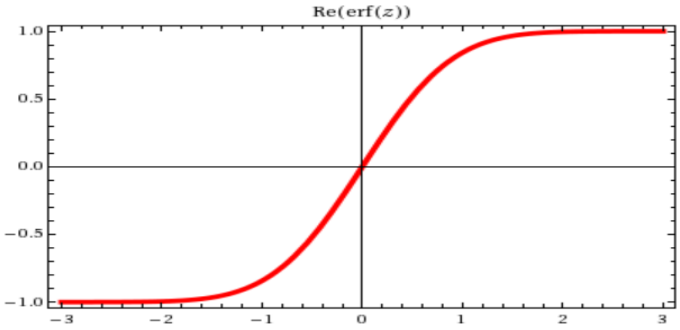
Tanım 2.2.1.1'de (ve dolayısıyla genişletilmiş konumunda olan Tanım 2.2.1.2'de) belirtilen (23)'teki gerçel değişkenli Erf(x) fonksiyonuna ilişkin vurgulanan bazı temel sonuçlar elbette ki (24) veya (25)'teki verilen kompleks değişkenli Erf(z) fonksiyonu için de vurgulanabilir. Böylesi bir durumda, kompleks sayılar kümesinde sıralama bağıntısı söz konusu olmadığı için, tüm karşılaştırmalı araştırmalarda modül kavramı dikkate alındığı bilinmektedir.

Önceden de vurguladığımız gibi, uygulama boyutunda da sıkça dikkate alınan bazı geometrik sonuçlar önemli olabilmektedir. Bu açıdan, ilgili Kompleks Hata (Error) Fonksiyonun bazı geometrik formlarına ilişkin 2D kapsamında olan grafikler elementer yollarla oluşturulması kolay bir iş olmadığından dolayı, yine önceden yapmış olduğumuz gibi hazır programlar dikkate alınarak oluşturbilir.

Kompleks değişken $z = x + iy$ için,

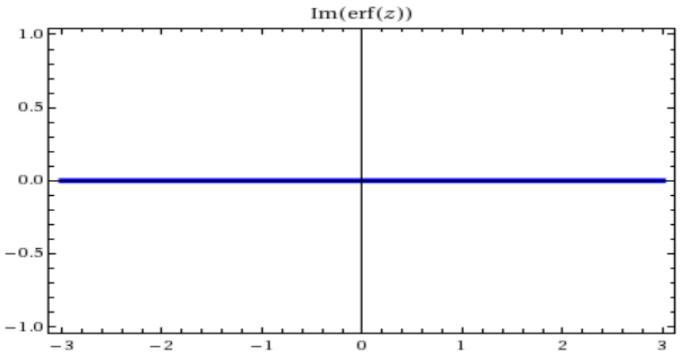
$$-3 \leq \mathrm{x} = \mathrm{Re}(z) \leq 3$$

şeklindeki bir kısıtlaması sonucu, sırasıyla;



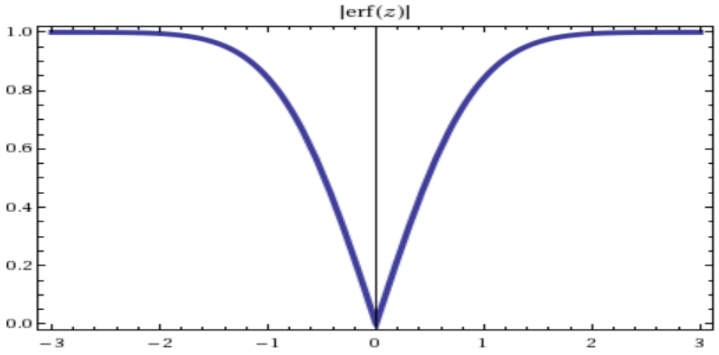
Şekil 2.2.3

grafiği ile Re{Erf(z)} fonksiyonunun,



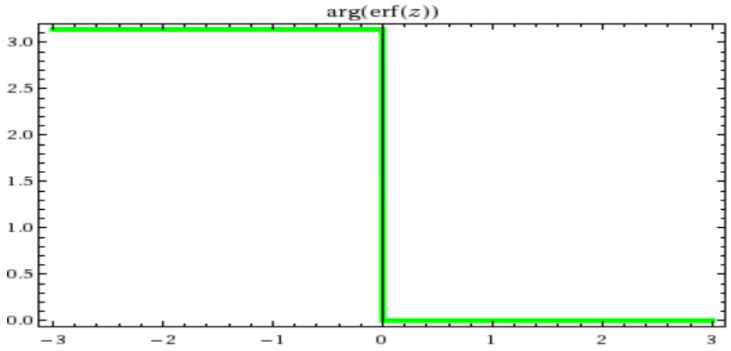
Şekil 2.2.4

grafiği ile İm{Erf(z)} fonksiyonunun ve



Şekil 2.2.5

grafiği ile |Erf(z)| fonksiyonunun ve son olarak da



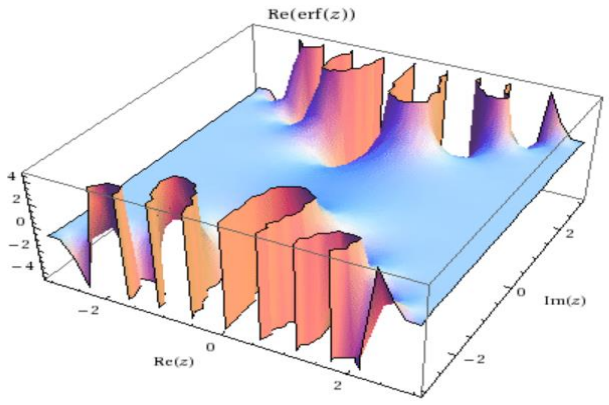
Şekil 2.2.6

grafiği ile de Arg{Erf(z)} fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

3D kapsamında olan grafikler de yine hazır programlar yardımıyla, $z = x + iy$ kompleks değişkeni için eğer

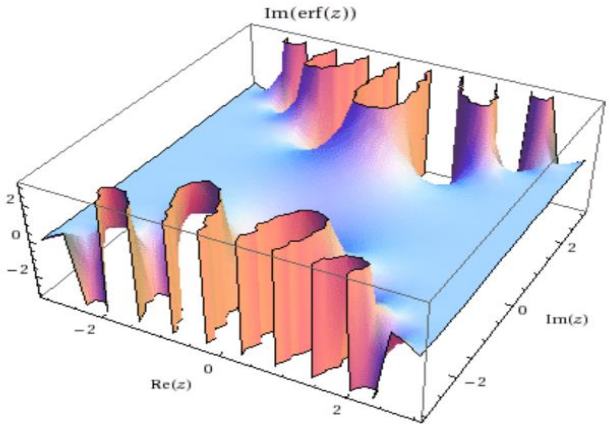
$$-3 \leq x \leq 3 \qquad \text{ve} \qquad -3 \leq x \leq 3$$

şeklindeki kısıtlamalar dikkate alınırsa, yine paket programlar yardımıyla, aşağıdaki gibi verilen grafikler



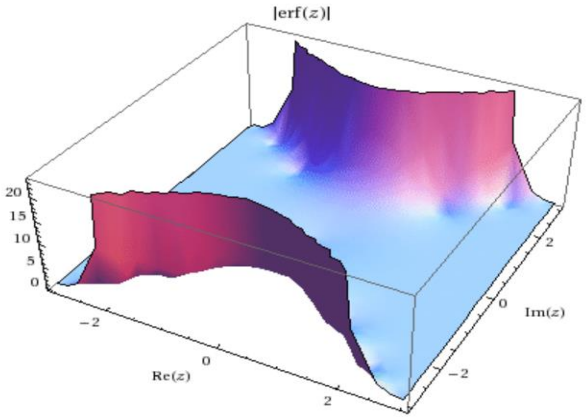
Şekil 2.2.7

Re{Erf(z)} fonksiyonunun,



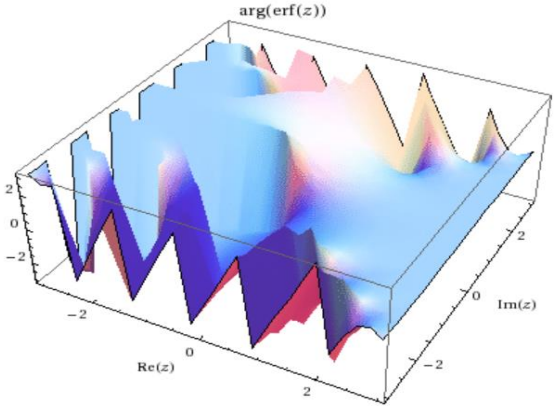
Şekil 2.2.8

İm{Erf(z)} fonksiyonunun,



Şekil 2.2.9

|Erf(z)| fonksiyonunun ve



Şekil 2.2.10

|Arg{Erf(z)}| fonksiyonunun grafiği kolayca elde edilebilmektedir.

Örneğin, tüm limitle ilgili (gerek teorik gerekse uygulama bazında) araştırmalarda;

$$\lim_{z\to\infty}(\cdot) \quad \equiv \quad \lim_{|z|\to\infty}(\cdot)$$

şeklindeki denk ilişkiler söz konusudur. Yani, bir kompleks sayının veya benzeri ifadelerin negatifliği asla söz konusu olamaz. Doğal olarak, yaklaşım, kıyaslama gibi tüm (bilimsel) araştırmalarda ilgili sayı veya benzeri ifadelerin modülce büyüklüğü, yani orjine göre kıyaslamalarda sadece orjine göre yakınlığı ya da uzaklığıyla dikkate alınır.

Gerek (23)'te gerekse (24)'te belirtilen fonksiyonlardaki bağımsız değişkenleri, farklı tip olarak değişken kabul eden çeşitli fonksiyonların seçimi ile oluşturulacak olan yeni fonksiyonlar dikkate alınarak, literatür açısından ilgili fonksiyonların kapsamı çok daha genişletilerek ve matematik biliminde bilmiş olduğumuz özel fonksiyonlarla ilgili çok sayıda fonksiyon oluşturulabilir. Böylesi fonksiyonların kompleks değişkenli olması durumunda, özellikle ilgili fonksiyonların mümkün olan reel ve sanal kısımlarından elde edilecek özel sonuçlar, araştırmacıları çok ilginç konulara götürecektir.

Üstte vurgulanan bilgiler açısından, türeve ilişkin (hem reel hem de kompleks bağımsız değişkenli fonksiyonlar için) ω gibi bir bağımsız değişkene bağlı ve türevlenebilir $\Phi(\omega)$ ve $\Psi(\omega)$ gibi genel fonksiyonlar için,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\int_{\mathrm{t}=\Phi(\omega)}^{\mathrm{t}=\Psi(\omega)} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{dt}\right) = \Psi'(\omega)\,\mathrm{f}\left(\Psi(\omega)\right) - \Phi'(\omega)\,\mathrm{f}\left(\Phi(\omega)\right) \qquad (26)$$

şeklindeki önerme oldukça kolaylık sağlar.

Elbette ki (26)'da belirtilen önerme, x (reel) bağımsız değişkenli;

$$\varphi(x) \coloneqq \mathrm{Erf}\,(\mathrm{x}^2) \;\;,\;\; \phi(x) \coloneqq \mathrm{Erf}\,(\mathrm{sinx}) \;\;,\;\; \psi(x) \coloneqq \mathrm{Erf}\,(\mathrm{lnx}) \;\;,\;\; \cdots$$

şeklindeki fonksiyonlar için ve benzeri durum yine z (kompleks) bağımsız değişkenli;

$$\Phi(z) \coloneqq \mathrm{Erf}\left(\sqrt{z}\right) \;\;,\;\; \Xi(z) \coloneqq \mathrm{Erf}\,(\cos \mathrm{z}) \;\;,\;\; \xi(z) \coloneqq \mathrm{Erf}\,(\mathrm{logz}) \;\;,\;\; \cdots$$

şeklindeki fonksiyonlar için elde edilebilecek sonsuz tane fonksiyonlar söz konusu olup, bunlara ilişkin elde edilebilecek çok sayıda çalışmaların hem kapsamına hem de uygulanışına katkısı da kaçınılmaz olacaktır. Özellikle, (26)'da verilen bu genel sonuç (24)'teki hata fonksiyonu için göz önüne alınırsa;

$$\Phi(\omega) \coloneqq 0 \qquad \text{ve} \qquad \Psi(\omega) \coloneqq \mathrm{z}$$

şeklindeki türevlenebilir kompleks fonksiyonlar yardımıyla Erf(z) fonksiyonunun z-bağımsız değişkenine göre değişimi, yani türevi kolayca belirlenebilir.

Şimdi de araştırmamız açısından (24)'teki gibi tanımlanan Erf(z) kompleks değişkenli fonksiyonlarla ilgili olan genel yapıdaki iki temel teoremi verelim ve ardından da ispatlayalım.

2.2.2. Hata Fonksiyonunun Türevleri

2.2.2.1 Teorem. Erf(z) kompleks fonksiyonu için aşağıda verilenler daima doğrudur:

$$\frac{d}{dz}\left(\mathrm{Erf}(z)\right) = \mathrm{Erf}'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \tag{27}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\mathrm{Erf}(z)\right) = \mathrm{Erf}''(z) = -\frac{4z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \tag{28}$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\left(\mathrm{Erf}(z)\right) = \mathrm{Erf}'''(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(2z^2 - 1)\, e^{-z^2} \tag{29}$$

olup, her $n \in \mathbb{N}_0$ için $n+1$. türevi de

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\mathrm{Erf}(z)\right) = \mathrm{Erf}^{(n+1)}(z) = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_n(z)\, e^{-z^2} \tag{30}$$

şeklindedir.

Yukarıda $H_n(z)$ ile gösterilen ifade literatürde Hermite Polinomları olarak bilinen ve uygulama alanı oldukça çok geniş olan;

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{31}$$

şeklinde bilinen polinomlardır. Özellikle, her $n \in \mathbb{N}_0$ için, $H_n(z)$ polinomları

$$H_{n+1}(z) = 2z\, H_n(z) - 2n H_{n-1}(z) \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{32}$$

şeklindeki rekürsif bağıntılar yardımıyla belirlenmektedir.

İspat. Verilen her $n \in \mathbb{N}_0$ için ispatlamak durumundayız. Bunun için de tümevarım metodunu kullanmak yerinde olur. Buna göre;

I. Adım: (21)'de $n:=0$ alınırsa,

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{z}) = (-1)^0 \mathrm{e}^{\mathrm{z}^2} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{dz}^0} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2} \right) = \mathrm{e}^{\mathrm{z}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2} = 1$$

elde edilir ve bu sonuç (20)'de verilen eşitlikte kullanılırsa

$$\frac{\mathrm{d}^{0+1}}{\mathrm{dz}^{0+1}} \left(\mathrm{Erf}(\mathrm{z})\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} \left(\mathrm{Erf}(\mathrm{z})\right)$$

$$= \mathrm{Erf}^{(1)}(\mathrm{z})$$

$$= \mathrm{Erf}'(\mathrm{z})$$

$$= (-1)^0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{H}_0(\mathrm{z})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{H}_0(\mathrm{z})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} 1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2}$$

elde edilir ki bu da (27)'de verilen kompleks hata fonksiyonunun birinci türevidir. (Kompleks hata fonksiyonunun ikinci ve üçüncü türevlerine ilişkin (28) ve (29)'daki sonuçların tekrar görülmesini de araştırmacılara bırakıp, tümevarımın sonraki adımlarına geçelim.)

II. Adım (Varsayım): (30) ve (31)'deki önermeler ışığında, $\mathrm{n} = \mathrm{m}$ için,

$$\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{dz}^{\mathrm{m}+1}} \left(\mathrm{Erf}(\mathrm{z})\right) = (-1)^{\mathrm{m}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{H}_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{z}^2} \quad (\mathrm{m} \in \mathbb{N}_0)$$

önermesinin doğruluğunu kabul edelim.

III. Adım: Üstteki (hipotez) varsayım doğrultusunda, $n = m + 1$ için,

$$\frac{d^{(m+1)+1}}{dz^{(m+1)+1}}\left(\mathrm{Erf}(z)\right) = (-1)^{m+1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}H_{m+1}(z)\,e^{-z^2} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

önermesinin doğruluğunu göstermek durumundayız. Bunun için de, II. Adım'da belirtilen varsayımdan yola çıkarak, yani

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left(\mathrm{Erf}(z)\right)\right\} = (-1)^{m+1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}H_{m+1}(z)\,e^{-z^2} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

eşitliğini göstermemiz yeterli olacaktır. Bunun için, II. Adım'da verilen ifadenin her iki tarafının z kompleks değişkenine göre türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left(\mathrm{Erf}(z)\right)\right\} = \frac{d}{dz}\left((-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}H_m(z)\,e^{-z^2}\right)$$

$$= (-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dz}\left(H_m(z)\,e^{-z^2}\right)$$

$$= (-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-z^2}\frac{d}{dz}\left(H_m(z)\right) + H_m(z)\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\right)\right\}$$

elde edilir ve üstteki türevler belirlenip, yerlerine yazılırsa ve bazı düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left(\mathrm{Erf}(z)\right)\right\} = \frac{d}{dz}\left((-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}H_m(z)\,e^{-z^2}\right)$$

$$= (-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-z^2}2mH_{m-1}(z) + H_m(z)(-2z)\,e^{-z^2}\right\}$$

$$= (-1)^m\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-z^2}\{2mH_{m-1}(z) - 2zH_m(z)\}$$

sonucu elde edilir ve basit bir odaklanma sonucu,

$$2zH_m(z) - 2mH_{m-1}(z)$$

ifadesinin (32)'de verilen $\mathrm{H_{m+1}(z)}$ ile eşitliği kolayca görülür. Bu ise, $n = m + 1$ için de

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\mathrm{d^{m+1}}}{\mathrm{dz^{m+1}}}(\mathrm{Erf(z)})\right\} = (-1)^{\mathrm{m+1}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{H_{m+1}(z)\ e^{-z^2}}$$

eşitliğinin doğrulanması demektir.

O halde, her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\mathrm{d^{m+1}}}{\mathrm{dz^{m+1}}}(\mathrm{Erf(z)})\right\} = \frac{\mathrm{d^{(m+1)+1}}}{\mathrm{dz^{(m+1)+1}}}(\mathrm{Erf(z)}) = \frac{\mathrm{d^{m+2}}}{\mathrm{dz^{m+2}}}(\mathrm{Erf(z)})$$

doğru olur.

2.2.3. Hata Fonksiyonunun Seri Açılımı

2.2.3.1 Teorem. $\mathrm{Erf(z)}$ fonksiyonunun $\mathrm{z_0 = 0}$ civarındaki Taylor seri açılımı, yani MacLaurin seri açılımı,

$$\mathrm{Erf(z)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{z^{2n+1}}}{\mathrm{n!(2n+1)}} \qquad (\mathrm{z} \in \mathbb{C}) \tag{33}$$

şeklindedir.

İlgili teoremin ispatı iki şekilde yapılabilir. Şimdi bu iki önemli yolu ilgi duyan araştırmacılar için vurgulayalım.

Bunlardan birincisi, Tanım 2.2.1.2'de verilen (24)'teki hata fonksiyonunu doğrudan kullanarak, aynen Örnek 2.1.5.9'da izlemiş olduğumuz adımların benzeri yapılarak karmaşa bir yapı da olsa istenen belirlenebilir. Bunun için, Teorem 2.2.2.1'de verilen türevleri dikkate almak, (31) ve (32)'deki ilişkileri kullanmak ve elde edilen verileri de Tanım 2.1.5.9'da belirtilen (21)'deki kuvvet serisinde, yani MacLaurin seri açılımında dikkate alarak (33)'te verilen kuvvet seri açılımındaki seriyi oluşturmaktır.

İkincisi de, kompleks $\mathrm{Erf(z)}$ fonksiyonunun tanımında, yani Tanım 2.2.1.2'de kullanılan $\mathrm{f(t) = e^{-t^2}}$ fonksiyonunun $t_0 = 0$ noktası civarındaki kuvvet seri açılımını

kullanmak ve bu serinin düzgün yakınsaklığını da dikkate alarak, (33)'te verilen seriyi elde etme yolu olacaktır. İstenen ispat için bu ikinci yol tercih edilecektir.

İspat. Örnek 2.1.5.11'deki $\mathrm{f}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}$ (reel değişkenli ve değerli) fonksiyonunun $t_0 = 0$ noktasındaki kuvvet seri açılımı (22)'de belirlenmişti. Ayrıca, ilgili örneğin devamında da özellikle vurgulan açıklamalar paralelinde, (22)'deki gibi verilen kuvvet serisinin her $r > 0$ için $I = (-r, r) \subset \mathbb{R}$ gibi aralıklarda düzgün yakınsak olduğunu da görmüştük. Bu düzgün yakınsama, doğal olarak, ilgili seriye Teorem 2.1.5.5'te belirtilen (19)'daki genel durum uygulanırsa, yani, ilgili (22)'deki fonksiyon serisi $t = 0$ noktasından $t = z$ noktasına kadar integrali alınırsa,

$$\int_{t=0}^{t=z} \mathrm{f(t)}dt = \int_{t=0}^{t=z} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2} dt$$

$$= \int_{t=0}^{t=z} \left(\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{t}^2)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n!}} \right) dt$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n!}} \left(\int_{t=0}^{t=z} t^{2n} dt \right) \right\}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n!}} \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_{t=0}^{t=z} \right) \right\}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{(2\mathrm{n}+1)\mathrm{n!}} z^{2n+1}$$

elde edilir ki, bu da bizi kolayca (33)'te verilen fonksiyon (kuvvet) serisine götürür. Böylece istenen elementer bazdaki ispat tamamlanmış olur.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Teorem 2.2.3.1'de verilen kompleks hata fonksiyonunun, yani Erf(z) kompleks fonksiyonunun MacLaurin Seri açılımını belirlemiştik. Eğer, (33)'teki ilgili seri açılımının açık formu dikkate alınırsa;

$$\mathrm{Erf(z)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - \frac{1}{42}z^7 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots \right) \quad (z \in \mathbb{C}) \qquad (34)$$

şeklindeki açık formu kolayca görülür.

Araştımamızda önemli ve genel yapıda olan bir fonksiyonlar ailesine ihtiyacımız olacaktır. Bu açıdan, kompleks düzlemdeki

$$\mathbb{U} = \left\{ z : z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < 1 \right\}$$

bilindik açık birim diskinde analitik olan fonksiyonların ve Taylor seri açılımı formuna sahip olan ve aşağıdaki gibi verilen fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar ailesini $\mathbb{A}(n)$ notasyonu ile gösterelim. Bu durumda, $\mathbb{A}(n)$ fonksiyonlar ailesi

$$\mathbb{A}(n) = \Big\{ f(z) : f(z) \text{ fonksiyonu } \mathbb{U}\text{'da analitik}$$

$$\text{ve } f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_{n+m} z^{n+m} + \cdots \Big\}$$

şeklindeki küme olur. Tabi ki üstteki küme açısından

$$z \in \mathbb{U} \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_1 \quad \text{ve} \quad a_n \in \mathbb{C}$$

şeklinde olmak durumundadır.

Aşağıda verilen iki evrensel önem taşıyan yardımcı teorem, yani lemmalar için (Nehari 1952), (Goodman 1983) ve (Duren 1983) temel kaynakları esas kaynaklar açısından yeterlidir. Özellikle birinci lemma, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi açısından çok kapsamlı bir teroemdir. Diğer iki lemma için de yine temel bir referanstır.

3.1 Lemma (Schwarz Eşitsizliği). $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin ve her $z \in \mathbb{U}$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \text{ve} \qquad |f'(0)| \leq 1$$

olur. Özellikle, $z_0 \in \mathbb{U} - \{0\}$ için $|f(z_0)| = |z_0|$ ise, $|c| = 1$ koşulunu sağlayan $c \in \mathbb{C}$ gibi sabit bir kompleks sayısı için de $f(z) = cz$ biçiminde olan bir kompleks fonksiyondur.

Aşağıdaki lemma da Kompleks değişkenli fonksiyonların sınırlı bir bölgedeki (modülce) sınırlığı açısından önemli bir teoremdir. Yine, tezimizle ilgili araştırmalarda önemli bir teoremdir.

3.2 Lemma (Maksimum Modül Teoremi). $f(z)$ kompleks fonksiyonu verilen kapalı bir γ eğrisince belirlenmiş olan sınırlı ve kapalı herhangi bir B bölgesi üzerinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $|f(z)|$ ifadesi γ eğrisinin üzerinde maksimum değerini alır. (Yani, $f(z)$ kompleks fonksiyonunun modülü maksimum değerini $\partial(B)$'de alır.)

Aşağıda verilen yardımcı teorem ise, daha önceleri Jack (1971) tarafından literatüre kazandırılmış olan ve genellikle literatürde Jack's Lemması olarak bilinen teoremin, $f(z) \in \mathbb{A}(1)$ fonksiyonlarının $f(z) \in \mathbb{A}(n)$ fonksiyonlarına genelleştirilmiş formunda olan ve Miller and Mocanu (1978) tarafından literatüre kazandırılmış bir teoremdir. Bu iki teorem de hala çok sayıdaki teorik içerikli bilimsel çalışmalarla ilgili alanında

kullanılan önemli ve kapsamlı birer genel sonuçlardır. Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 yardımcı teoremleri aşağıda verilen Lemma 3.3'ün ispatında önemli rol oynamaktadır ve ilgili lemma (Lemma 3.3) dikkate alınarak, tez konumuz kapasamında olan araştırma sonuçlarının ispatları için kullanılacaktır.

3.3 Lemma. $w(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonu $\mathbb{A}(n)$ fonksiyon sınıfında olsun. Eğer, $|w(z)|$ ifadesi maximum değerini

$$\mathbb{U}_r \equiv \mathbb{U}_r(z) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \ (0 < r < 1)\} \tag{35}$$

kümesi üzerindeki $z_0 \in \mathbb{C}$ gibi bir noktada alıyor ise,

$$z\, w'(z)\,|_{z=z_0} = c\, w(z)\,|_{z=z_0} \tag{36}$$

olacak şekilde (en az) bir $c \geq n$ $(n \in \mathbb{N}_1)$ pozitif reel sayısı vardır.

$\mathbb{A}(n)$ fonksiyonlar ailesini tanımlarken, kullanılan $\mathbb{U}$ kümesi Lemma 3.3'ün (35)'teki $\mathbb{U}_r$ kümesi ile karşılaştırıldığından, aralarındaki

$$\mathbb{U} := \mathbb{U}_1$$

şeklindeki ilişkinin varlığı kolayca görülür.

Aşağıda verilen ve kapsamları da oldukça geniş olan temel sonuçlar (teoremler), yani Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 teoremleri kompleks hata fonksiyonu ile ilgili olan kapsamlı teoremlerdir. Belirtilen bu teoremler, Irmak ve Duran (2019) tarafından literatüre kazandırılmış kompleks hata fonksiyonunun modül sınırlamasını içeren geometrik sonuçlardan sadece bazılarıdır.

3.1 Teorem. Erf(z) kompleks hata fonksiyonu için

$$\left|z\mathrm{Erf}'(z) + \mathrm{Erf}(z)\right| < \frac{4\rho}{\sqrt{\pi}} \qquad (\rho > 0\,;\, z \in \mathbb{U}_r) \tag{37}$$

eşitsizliği sağlasın. O zaman,

$$\left|\mathrm{Erf}(z)\right| < \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \qquad (\rho > 0\,;\, z \in \mathbb{U}_r) \tag{38}$$

eşitsizliği de sağlanır.

İspat. Verilen Teroem 3.1'in ispat için, (24)'teki gibi tanımlanan Erf(z) kompleks hata fonksiyonunun (33)'teki gibi olan kompleks formdaki seri açılımı dikkate alarak, önce $w(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Erf}(z) \qquad (z \in \mathbb{U}_r). \tag{39}$$

Eğer, burada Erf(z) kompleks fonksiyonunun (33)'deki seri açılımının (34)'teki gibi açık formu da göz önüne alındığında,

$$w(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - \frac{1}{42}z^7 + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots \qquad (z \in \mathbb{U}_r)$$

şeklindeki seri açılımlı bir fonksiyon karşımıza çıkar. Bu son kompleks seri, önceden tanımlamış olduğumuz $\mathbb{A}(n)$ fonksiyonlar sınıfı ile ilişkilendirilirse;

$$n := 1 \qquad \text{ve} \qquad a_n := a_1 = 1$$

oldukları kolayca görülür. Dolayısıyla, $w(z) \in \mathbb{A}(1)$ şeklindeki bir analitik fonksiyon söz konusu olacağından dolayı, oluşturulan w(z) kompleks fonksiyonu için Lemma 3.3 göz önüne alınabilir. Bu durumda, verilen teoremdeki verilere ulaşmak adına, (39)'da tanımlanan w(z) fonksiyonunun türevinden kolayca

$$w'(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Erf}'(z) \qquad (z \in \mathbb{U}_r) \tag{40}$$

sonucu elde edilir. Böylece, (39) ve (40)'daki sonuçlar birlikte kullanılırsa,

$$w(z) + zw'(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\mathrm{Erf}(z) + z\mathrm{Erf}'(z)\right) \qquad (z \in \mathbb{U}_r) \tag{41}$$

şeklindeki sonuç da kolayca elde edilir.

Şimdi, ilgili teoremin ispatı Lemma 3.2'yi dayanak olarak alan ve Lemma 3.3'ün önemli hipotezi konumunda olan, yani

$$\max\left\{|w(z)| : |z| \leq |z_0| \quad (z, z_0 \in \mathbb{U}_r)\right\} = |w(z_0)| = \rho \quad (\rho > 0)$$

koşulunu sağlayacak şekildeki ve (35)'te belirtilen kümede olan z_0 gibi elemanın var olduğunu kabul edelim.

O zaman, (36)'daki ifade üstteki hipotez dahilinde (41)'de elde edilen sonuç için uygulanırsa:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\mathrm{Erf}(z) + z\mathrm{Erf}'(z)\right| = |w(z_0) + zw'(z_0)|$$

$$= |w(z_0)|(1 + c)$$

$$= \rho(1 + c) \quad (c \geq 1)$$

$$\geq 2\rho \quad (\rho > 0)$$

şeklindeki eşitsizliği kolayca elde edilir. Bu sonuç ise, ilgili teoremin hipotezi konumunda olan (37)'deki eşitsizlik ile çelişki oluşturur. Bu çelişkinin nedeni ise, Lemma 3.3'ü hipotezini kullanmak için kabul etmiş olduğumuz ilgili $z_0 \in \mathbb{U}_r$ gibi noktanın varolamayışından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla,

$$|w(z_0)| = \rho \quad (\rho > 0)$$

şeklindeki bir durum söz konusu olmayıp, doğal olarak her $z \in \mathbb{U}_r$ için (39)'daki gibi tanımlanan $w(z)$ analitik fonksiyonunu

$$|w(z)| < \rho \quad (\rho > 0)$$

şartını sağlamak zorunda bırakır.

O halde, (39)'daki gibi tanımlanan w(z) kompleks fonksiyonunundan haraketle, ilgili teoremin (38)'deki hüküm konumunda olan aşağıdaki eşitsizlik:

$$|\, w(z)\,| = \left| \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \mathrm{Erf}(z) \right|$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left| \mathrm{Erf}(z) \right|$$

$$< \rho \qquad (z \in \mathbb{U}_r\,;\ \rho > 0)$$

kolayca elde edilir. Bu da Teorem 3.1'in ispatını bitirir.

3.2 Teorem. Erf(z) kompleks değişkenli hata fonksiyonu için,

$$\left| \sqrt{\pi}\, \mathrm{Erf}'(z) - 2 \right| < 6\rho \quad (\rho > 0\,; z \in \mathbb{U}_r) \tag{42}$$

eşitsizliği sağlasın. O zaman,

$$\left| \sqrt{\pi}\, \mathrm{Erf}(z) - 2z \right| < 2\rho |\, z\,| \quad (\rho > 0\,; z \in \mathbb{U}_r) \tag{43}$$

eşitsizliği de sağlanır.

İspat. Yine Lemme 3.3'ü kullanmak için gerekli gerekli şartları oluşturalım. Bunun için, (33)'te elde edilen Erf(z) kompleks hata fonksiyonu yardımıyla,

$$w(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \frac{\mathrm{Erf}(z)}{z} - 1 \qquad (z \in \mathbb{U}_r) \tag{44}$$

şeklindeki gibi bir kompleks fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda, Erf(z) kompleks fonksiyonunun (34)'teki seri açılımı da dikkate alınırsa,

$$w(z) = -\frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{10}z^4 - \frac{1}{42}z^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}z^{2n} + \cdots \qquad (z \in \mathbb{U}_r)$$

şeklindeki gibi bir kompleks seri açılımlımına sahip olan ve $\mathbb{U}_r$'da analitik olan $w(z)$ gibi bir analitik fonksiyonu karşımıza çıkar. Bu fonksiyonun da, yine basit bir inceleme

sonucu $w(z) \in \mathbb{A}(2)$ olduğu açıkça görülür. Doğal olarak, ilgili $\mathrm{w(z)}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_r$'deki analitikliği ve Lemma 3.3'teki $\mathrm{w(0)} = 0$ şartını sağladığı da açıktır.

O halde, ilgili Lemma'yı kullanmak ve verilen teoremdeki ilişkiyi yakalamk adına, (44)'deki gibi tanımlanan fonksiyonun türevi alınırsa:

$$\mathrm{w'(z)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\mathrm{zErf'(z)-Erf(z)}}{\mathrm{z^2}}\right) \tag{45}$$

sonucu kolayca elde edilir. Ayrıca, (36)'daki ifadenin kullanılabilmesi için (45)'teki sonucun z ile çarpılması sonucu da

$$\mathrm{zw'(z)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{z}\left(\frac{\mathrm{zErf'(z)-Erf(z)}}{\mathrm{z^2}}\right) \tag{46}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\mathrm{zErf'(z)-Erf(z)}}{\mathrm{z}}\right)$$

şeklindeki sonuç elde edilir. Şimdi, yine, Lemma 3.2'nin dayanağı olan ve Lemma 3.3'ün şartlarını sağlayan (44)'deki fonksiyon için,

$$\max\left\{|\mathrm{w(z)}| : |\mathrm{z}| \le |\mathrm{z_0}| \;\; (\mathrm{z}, \mathrm{z_0} \in \mathbb{U}_\mathrm{r})\right\} = |\mathrm{w(z_0)}| = \rho \quad (\rho > 0)$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\mathrm{z_0} \in \mathbb{U}_r$ ögesinin var olduğunu yine kabul edelim. Bu durumda,

$$\mathrm{zw'(z)}|_{\mathrm{z:=z_0}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\mathrm{zErf'(z)-Erf(z)}}{\mathrm{z}}\right)\Bigg|_{\mathrm{z:=z_0}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\mathrm{Erf'(z)} - \frac{\mathrm{Erf(z)}}{\mathrm{z}}\right)\Bigg|_{\mathrm{z:=z_0}} \tag{47}$$

sonuçları elde edilir. Eğer, (47)'deki ifade için hem (44)'deki ifade hem de ilgili Lemma göz önüne alınırsa, kolayca,

$$\mathrm{z_0 w'(z_0) + w(z_0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\mathrm{Erf'(z_0)} - 1\right)$$

Veya

$$z_0 w'(z_0) + w(z_0) = c\, w(z_0) + w(z_0)$$

$$= (c+1) w(z_0)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erf}'(z_0) - 1 \quad (c \geq 2;\ z_0 \in \mathbb{U}_r) \qquad (48)$$

sonucu elde edilir.

Eğer ilgili lemma, yani yardımcı teorem konumunda olan Lemma 3.3'ün $c \geq 2$ koşulu da dikkate alınır ve (48)'de verilen eşitlik için modül kullanılırsa,

$$\left| \frac{\sqrt{\pi}}{2} Erf'(z_0) - 1 \right| = \left| (c+1) w(z_0) \right|$$

$$= (c+1) \left| w(z_0) \right|$$

$$= \rho(c+1)$$

$$\geq 3\rho$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da (42)'de verilen teoremin hipotezi konumunda olan eşitsizlikle çelişki oluşturur.

O halde, ilgili şartı sağlayan bir $z_0 \in \mathbb{U}_r$ gibi öge yoktur. Dolayısıyla, her $z \in \mathbb{U}_r$ için (44)'deki gibi tanımlanan $w(z)$ analitik fonksiyonun

$$| w(z) | < \rho \quad (\rho > 0)$$

şeklinde olmasını gerektirdiği göz önüne alınırsa, (45)'teki $w(z)$ fonksiyonunun tanımlanışından

$$| w(z) | = \left| \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{Erf}(z)}{z} - 1 \right| < \rho \quad (z \in \mathbb{U}_r\ ;\ \rho > 0)$$

şeklinde eşitsizliğe kolayca varılır. Basit işlemler sonucu elde edilecek olan eşitsizlik de teoremin (43)'teki hüküm konumunda olan eşitsizliğini verecektir. Dolayısıyla, Teorem 3.2'in ispatı da kolayca tamamlanır.

3.3 Teorem. Erf(z) kompleks hata fonksiyonu için

$$\left|\sqrt{\pi}\left(z\mathrm{Erf}''(z)+\mathrm{Erf}'(z)\right)-2\right| < 6\rho \quad (\rho>0; z\in\mathbb{U}_r) \tag{49}$$

şeklindeki eşitsizlik sağlasın. Bu durumda,

$$\left|\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}'(z)-2\right| < 2\rho \quad (\rho>0\,; z\in\mathbb{U}_r) \tag{50}$$

eşitsizliği de sağlanır.

İspat. (33)'te verilen Erf(z) kompleks fonksiyonunu yardımıyla,

$$w(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Erf}'(z)-1 \quad (z\in\mathbb{U}_r) \tag{51}$$

şeklindeki gibi bir $w(z)$ kompleks fonksiyonunu yine göz önüne alalım. Erf(z) fonksiyonunun (33)'teki seri açılımı da yine dikkate alınırsa,

$$w(z)=-z^2+\frac{1}{2}z^4-\frac{1}{6}z^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}z^{2n}+\cdots \quad (z\in\mathbb{U}_r)$$

şeklindeki bir kompleks seri açılımını kolayca elde edilir. Yine, bu fonksiyonun da $\mathbb{A}(2)$ fonksiyonlar sınıfında olduğu açıktır. Dolayısıyla, üstteki gibi tanımlanan w(z) kompleks fonksiyonunun $\mathbb{U}_r$ kümesinde analitik olduğu ve Lemma 3.3'teki $w(0)=0$ şartının da sağlandığı açıkça görülür. (51)'deki ifadenin her iki tarafının türevi alınır ve z ile çarpılırsa,

$$z\,w'(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,z\,\mathrm{Erf}''(z) \tag{52}$$

sonucu elde edilir. (36)'daki ifadenin kullanılabilmesi için, zorunlu olarak (51) ve (52)'de elde edilen sonuçlar birlikte kullanılırsa, kolayca

$$zw'(z) + w(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z\,\mathrm{Erf}''(z) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{Erf}'(z) - 1$$

sonucu veya denk olan

$$2[zw'(z) + w(z)] = \sqrt{\pi}\,[z\,\mathrm{Erf}''(z) + \mathrm{Erf}'(z)] - 2 \qquad (53)$$

şeklindeki gibi bir sonuç karşımıza çıkar. Aynen diğer teoremlerde düşünüldüğü gibi ve Lemma 3.2'nin gereği olarak, ispatta temel rol oynayan Lemma 3.3 yardımcı teoremi yine burada da kullanılabilir. Bunun için de,

$$\max\{|w(z)| : |z| \le |z_0| \;\; (z, z_0 \in \mathbb{U}_r)\} = |w(z_0)| = \rho \quad (\rho > 0)$$

koşulunu sağlayacak şekilde (en az) bir $z_0 \in \mathbb{U}_r$ ögesinin var olduğu yine kabul edilir, gerekli elementer işlemler yapılır ve elde edilen sonuca da modül uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\pi}\,[z_0\,\mathrm{Erf}''(z_0) + \mathrm{Erf}'(z_0)\,] - 2 \right| &= 2\,|\,[z_0 w'(z_0) + w(z_0)]\,| \\ &= 2\,(c+1)|w(z_0)| \quad (c \ge 2) \\ &\ge 6\rho \quad (\rho > 0) \end{aligned}$$

şeklindeki eşitsizlik kolayca elde edilir. Bu ise, teoremin hipotezi olan (49)'daki eşitsizlikle çelişki oluşturur.

O halde, her $z \in \mathbb{U}_r$ için (51)'deki gibi tanımlanan $w(z)$ analitik fonksiyonu yine

$$|w(z)| < \rho \qquad (\rho > 0\,;\, z \in \mathbb{U}_r)$$

koşulunun sağlamasını zorunlu kılar. Dolayısıyla, (51)'deki gibi verilen $w(z)$ analitik fonksiyonunundan, kolayca,

$$|\,w(z)| = \left| \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Erf}'(z)\; - 1 \right| < \rho \qquad (z \in \mathbb{U}_r\,;\; \rho > 0)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ise, Teorem 3.3'ün (50)'deki hükmü konumunda olan eşitsizliğin dengi durumundaki eşitsizliktir. Böylece, Teorem 3.3'ün ispatı da tamamlanır.

3.4 Teorem. Erf(z) kompleks değişkenli fonksiyonu için,

$$\sqrt{\pi}\,|\,z^2\mathrm{Erf}''(z) - 2z\mathrm{Erf}'(z) + 2\mathrm{Erf}(z)\,| < 2\rho|z|^2 \quad (\rho > 0\,;\, z \in \mathbb{U}_r) \tag{54}$$

eşitsizliği sağlasın. O zaman,

$$\sqrt{\pi}\,|\,z\mathrm{Erf}'(z) - \mathrm{Erf}(z)\,| < 2\rho|z|^2 \quad (\rho > 0\,;\, z \in \mathbb{U}_r) \tag{55}$$

eşitsizliği de sağlanır.

İspat. İspat için **y**ine, (33)'teki gibi seri açılımına sahip olan Erf(z) kompleks fonksiyonunu kullanarak

$$w(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\mathrm{Erf}(z)}{z}\right)' \tag{56}$$

şeklindeki gibi bir kompleks fonksiyon tanımlansın. (34)'teki Erf(z) kompleks fonksiyonunun seri açılımı dikkate alındığında,

$$w(z) = -\frac{2}{3}z + \frac{2}{5}z^3 - \frac{1}{7}z^5 + \cdots + \frac{2n\,(-1)^n}{(2n+1)n!}z^{2n-1} + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}_r)$$

şeklindeki bir kompleks seri açılımının varlığı yine açıkça görülür. Basit bir odaklanma sonucu, üstteki gibi bir serinin belirlediği fonksiyonun, yani $w(z)$'nin $\mathbb{A}(1)$ sınıfında olduğu, o tanımlanan kompleks fonksiyonunun $\mathbb{U}_r$ kümesinde analitik olduğu ve Lemma 3.3'teki $w(0) = 0$ şartını da sağladığı kolayca görülür. Eğer, (56)'daki eşitliğin her iki tarafının z kompleks değişkenine göre birinci mertebeden türevi alınır ve elde edilen sonucun z ile çarpımı bize aşağıdaki sonucu kolayca verir.

$$zw'(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}z\left(\frac{z^2\mathrm{Erf}''(z) - 2z\mathrm{Erf}'(z) + 2\mathrm{Erf}(z)}{z^3}\right) \quad (z \in \mathbb{U}_r) \tag{57}$$

Burada, eğer teoremin ispatı için yine Lemma 3.3 göz önüne alınırsa, aynen önceki teoremlerin ispatlarındaki mantık ve varsayımlar çerçevesinde,

$$\max\left\{|w(z)| : |z| \leq |z_0| \ \ (z, z_0 \in \mathbb{U}_r)\right\} = |w(z_0)| = \rho \quad (\rho > 0)$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{U}_r$ elemanının var olduğunu kabul eder ve bu varsayım doğrultusunda gerekli elemeter işlemler yapılır ve elde edilen sonuç için de modül uygulanırsa, (57)'den

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\left(\frac{z_0{}^2 \mathrm{Erf}''(z_0) - 2z_0\mathrm{Erf}'(z_0) + 2\mathrm{Erf}(z_0)}{z_0{}^3}\right)\right| = |\, z_0 w'(z_0)\,|$$

olup ve burada yine (36)'daki özdeşlik kullanılırsa, kolayca,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\left(\frac{z_0{}^2\, \mathrm{Erf}''(z_0) - 2z_0\mathrm{Erf}'(z_0) + 2\mathrm{Erf}(z_0)}{z_0{}^2}\right)\right| = |z_0 w'(z_0)|$$

$$= |c\, w(z_0)|$$

$$= c|w(z_0)|$$

$$= c\rho \quad (c \geq 2)$$

$$\geq \rho\sqrt{\pi} \quad (\rho > 0)$$

şeklindeki eşitsizlik kolayca elde edilir. Bu eşitsizlik (54)'teki eşitsizlik ile karşılaştırıldığında yine bir çelişkinin olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, diğer teoremlerin ispatındaki gibi takip edilen adımlar tekrar yinelenirse, (56)'da tanımlanan w(z) fonksiyonunun tanımlanışından;

$$|\, w(z)\,| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\left(\frac{\mathrm{Erf}(z)}{z}\right)'\right|$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\frac{z\mathrm{Erf}'(z) - \mathrm{Erf}(z)}{z^2}\right|$$

$$< \rho \qquad (z \in \mathbb{U}_r\,;\ \rho > 0)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada da bazı basit matematiksel işlemler yapılırsa, üstteki eşitsizliğin (55)'teki eşitsizliğe denk olan bir eşitsizliğin olduğu kolayca görülür. Böylece Teorem 3.4'ün ispatı da biter.

Tez çalışmamızın orijinal sonuçları konumunda olan Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 teoremleri kompleks fonksiyonlar teorisi açısından oldukça kapsamlı önermeler bazında sonuçlar içermektedir. Bunun ortaya çıkarmak için, bazı kapsamlı bilgilere daha ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bilgiler bazen tez çalışmamızın çok temel tanımı olan Tanım 2.2.1.2'de verilen (24)'teki kompleks hata fonksiyonunun tanımı ile; bazen Teorem 2.2.2.1'de verilen kompleks hata fonksiyonunun türevlerine ilişkin elementer fonksiyonlar arasındaki ilişkilerle, bazen Teorem 3.1'de verilen (33)'deki veya bunun açık formu olan (34)'teki kompleks hata fonksiyonun seri açılımına ilişkin serilerle olan ilişkilerden, bazen de vurgulamış olduğumuz tüm mümkün olabilen ilişkilerin alakalı olduğu sonuçların özel fonksiyonlar veya fonksiyon serileri ile ilgili özelleklerin çeşitli mantıklar dahilinde kullanılması ile mümkün olabilmektedir. Tüm bu bilgilendirmeler için, kaynaklar kısmında yer alan ve giriş bölümünde belirtilen literatür taraması ile ilgili olan temel kaynaklar ve makalelerdir.

Üstte vurgualandığı gibi, tartışma kapsamına sahip olan belirtilmiş tüm olası ilişkileri ortaya çıkarmak elbette ki mümkün değildir. Yine de, bazı açıklamalar ve bilgilendirmeler paralelinde, bazı önermelerin dayanakları ile vurgulamakta fayda görüyoruz.

Kompleks düzlemde bilinen çok sayıdaki temel sonuçlar dikkate alınarak, hem üstte elde etmiş olduğumuz hem de bundan sonraki elde edilebilinecek tüm olası sonuçlardan çok sayıda özel sonuçlar elde edebiliriz. Bu gibi sonuçları önermeler şeklinde oluşturacağız. Bunlardan biri gerekçesiyle birlikte aşağıda verilmiştir.

Her $z, w \in \mathbb{C}$ için

$$\big||w| - |z|\big| \leq |w + z|$$

doğruluğu bilinen ve literatürde de Ters Üçgen Eşitsizliği olarak bilinen bu genel sonuç, Teorem 3.1 için göz önüne alınırsa, aşağıdaki gibi verilen önerme, yani Önerme 3.1 kolayca elde edilir. Bu sonuç, Irmak and Duran (2019) tarafından elde edilmiş ve belirtilen makalede Proposition 2 olarak Sayfa 60'da yer almaktadır.

3.1 Önerme. $\rho > 0$ ve $z \in \mathbb{U}_r$ olmak üzere, $\mathrm{Erf}(z)$ kompleks hata fonksiyonu için, aşağıda verilen önerme daima doğrudur:

$$\sqrt{\pi}\,\big||z|\,|\,\mathrm{Erf}'(z)| - |\mathrm{Erf}(z)|\,\big| < 4\rho \;\Rightarrow\; \sqrt{\pi}\,\big|\,\mathrm{Erf}(z)\,\big| < 4\rho$$

Diğer kapsamlı sonuçlardan bazıları da, kompleks değişkenli hata fonksiyonun belirtilen genel özelliklerini içeren ve Faddeyeva and Terentev (1961), Abramowitz and Stegun (1965), Lebedev (1965), Carlson (1977), McKenna (1984), Wideman (1994), Temme (1996), Olver *et al.* (2010) ve Irmak and Duran (2019) eserlerinde belirtilen çok sayıda bağıntı detaylıca verilmesine rağmen, bahsi geçen bağıntıların bazıları da;

$$\mathrm{Erf}(-z) = -\mathrm{Erf}(z)\,, \tag{58}$$

$$\mathrm{Erf}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{Erf}(z)}\,, \tag{59}$$

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(z) = 2\,z\;{}_1F_1\left(\tfrac{1}{2}\,;\,\tfrac{3}{2}\,;\,-z^2\right)\,, \tag{60}$$

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(z) = 2\,z^2 e^{-z^2}\;{}_1F_1\left(1\,;\,\tfrac{3}{2}\,;\,z^2\right) \tag{61}$$

ve

$$\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(z) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\,,\,z^2\right) \tag{62}$$

şeklindeki özel bağıntılardır. Bilindiği üzere, üstte belirtilen

$$ {}_1F_1\,(-\,;\,-\,;\,z) \qquad \text{ve} \qquad \Gamma\,(-\,,\,z^2) $$

fonksiyonlar sırasıyla literatürde çok iyi bilinen Birinci Tipten Confluent Hypergeometric ve Gamma fonksiyonları olarak bilinir.

Üstte vurgulanan özel fonksiyonlara ilişkin hem teorik hem de uygulama alanları çok geniş olan, ilgili fonksiyonların detayı için Nehari (1952), Artin (1964), Zang (1966), Bell (1968), Rainville (1987), Seaborn (1991), Coffey and Johnston (2009) ve Wang and Guo (2010) eserleri verilebilir. Özellikle, hem Irmak and Duran (2019) hem de Irmak and Mohapatra (2020) tarafından elde edilen aşağıdaki önemli bağıntı çalışmanın kapsamı için de oldukça önemli olacaktır.

Önceden elde edilen (6)'da ki gibi önemli sonuç dikkate alınarak, yani

$$ \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} $$

şeklindeki bilindik sonucun yardımıyla,

$$ \begin{aligned} \mathrm{Erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau - \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \end{aligned} \qquad (63) $$

şeklindeki ilişkiler kolayca elde edilir. Dolayısıyla, bu önemli sonuçta elde edilen,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

şeklindeki kompleks integral literatürde Erf(z) kompleks hata fonksiyonunun Tamamlayıcı Hata Fonksiyonu (The Complementary Error Function) olarak tanımlanır ve genellikle Erfc(z) notasyonu ile gösterilir.

O halde,

$$\mathrm{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \tag{64}$$

şeklindeki tamamlayıcı kompleks hata fonksiyonu ile Erf(z) kompleks hata fonksiyonu arasındaki (63)'teki bağıntı ile elde edilen

$$\mathrm{Erf}(z) = 1 - \mathrm{Erfc}(z) \tag{65}$$

şeklindeki bağıntı elde etmiş olduğumuz teoremlerle birlikte düşünülürse çok sayıda önemli (genel) sonuçlar da elde edilebilir. Ayrıca, Kompleks Hata Fonksiyonu'nun Teorem 2.2.3.1'de elde edilen seri açılımı ile (65)'de elde etmiş olduğumuz özellik birlikte göz önüne alınırsa, Tamamlayıcı Kompleks Hata Fonksiyon'unun seri açılımı olan,

$$\mathrm{Erfc}(z) = 1 - \mathrm{Erf}(z)$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{66}$$

şeklindeki seri açılımı da kolayca elde edilir.

(65)'te verilen bağıntı, Irmak and Duran (2019) tarafından elde edilen Teorem 3.1'için göz önüne alınmış (ve ilgili makalenin 62. sayfasında Proposition 1 şeklindeki önerme) aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

3.2 Önerme. $\rho > 0$ ve $z \in \mathbb{U}_r$ olmak üzere, $\mathrm{Erfc}(z)$ Tamamlayıcı Kompleks Hata Fonksiyon'u için, aşağıda verilen önerme daima doğrudur.

$$\sqrt{\pi}\,|z\mathrm{Erfc}'(z) + \mathrm{Erfc}(z) - 1| < 4\rho \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\pi}\,|\,\mathrm{Erfc}(z) - 1\,| < 2\rho$$

Üstteki gibi elde edilen sonuçlar her ne kadar modül kapsamında elde edilen sonuçlar olsa da, ilgili (hata fonksiyonlarına ait) kompleks seriler ve serilerle alakalı olan (bilindik) temel (bazı) bilgiler göz önüne alınırsa, herbirinden yine çok sayıda sonuçlar da elde edilir. Bu gibi sonuçlar ilgili olan hem kompleks serilerin hem de ilgili genel (veya özel) sonuçların belirlenmesinde, en basitten aşağıdaki gibi verilen yönlendirici olan bilgilendirmelerin dikkate alınması yeterli olacaktır.

Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\mathrm{Re}(z) \le |z| \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{\dot{I}m}(z) \le |z|$$

şeklindeki önermelerinin daima doğru olduğunu biliyoruz. Bu genel sonuçlar, eğer Teorem 3.2'nin hipotezi için göz önüne alınırsa;

$$\mathrm{Re}\left\{\mathrm{Erf}\,'(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\} \le \left|\mathrm{Erf}\,'(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right| < \frac{6\rho}{\sqrt{\pi}} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{67}$$

ve

$$\mathrm{\dot{I}m}\left\{\mathrm{Erf}\,'(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\} \le \left|\mathrm{Erf}\,'(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right| < \frac{6\rho}{\sqrt{\pi}} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{68}$$

şeklindeki eşitsizlikleri ve aynı teoremin hükmü için de göz önüne alınırsa;

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{Erf}(z)}{z} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\} \le \left|\frac{\mathrm{Erf}(z)}{z} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right| < \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \quad (z \in \mathbb{C} - \{0\}) \tag{69}$$

ve

$$\mathrm{\dot{I}m}\left\{\frac{\mathrm{Erf}(z)}{z} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\} \le \left|\frac{\mathrm{Erf}(z)}{z} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right| < \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \quad (z \in \mathbb{C} - \{0\}) \tag{70}$$

şeklindeki eşitsizlikler kendini kolayca gösterir. Çok basit bağıntılarla elde edilen bu üstteki, yani (67)-(70) arasındaki eşitsizlikler ile ilgili hata fonksiyonu (ve türevi) birlikte düşünülürse, ilgili teorem paralelinde yeni önerme de kolayca oluşturulabilir.

Ayrıca, analitik fonksiyonların reel ve sanal kısımları olan reel değişkenli ve reel değerli diğer fonksiyonlarla olan bilindik ilişkileri dikkate alınırsa, yani

$$z = x + iy$$

bağımsız değişkeni için

$$\begin{aligned} w &= f(z) \\ &= f(x + iy) \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned} \tag{71}$$

şeklindeki gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonun analtik olması durumunda,

$$u = u(x, y) \qquad \text{ve} \qquad v = v(x, y)$$

şeklinde gerçel değişkenli fonksiyonların x ve y bağımsız değişkenlerinin kısmi türevleri ile olan

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \tag{72}$$

veya eşiti konumunda olan

$$f'(z) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) \tag{73}$$

şeklindeki ilişkiler aynen Kompleks Hata Fonksiyonları için de göz önünü alınabilir. Çünkü, hem Kompleks Hata Fonksiyonu hem de Tamamlayıcı Kompleks Hata Fonksiyonu tüm $\mathbb{C}$'de türevlenebilir, dolayısıyla analitik olan kompleks fonksiyonlardır. Bu gibi kompleks fonksiyonların aynı zamanda birer tam fonksiyon olarak da adlandırıldıklarını biliyoruz. Dolayısyla, (71)-(73) arasında hatırlatılan bilgilerin geçerlilikleri aynen

$$f(z) = \mathrm{Erf}(z) \qquad \text{ve} \qquad f(z) = \mathrm{Erfc}(z) \tag{74}$$

şeklindeki analitik olan kompleks fonksiyonlar ve her mertebeden türevleri için de geçerli olacaktır. Bu açıklamalar ışığında, elde edilen temel bazdaki teoremler yine basit forma sahip olan *kompleks serilerle* de ilişkilendirilebilir. Bu gibi önermeler de yine bizleri *gerçel değişkenli serilerle* olan özel sonuçlara götürür.

Üstte temel sonuçlardan yeniden oluşturulan veya temel sonuçların özel sonuçlarından elde edilebilen bazı sonuçların varlığı vurgulanmıştı. Mümkün olan tüm yeni oluşturmalar veya çıkarımlar, (27)-(32), (58)-(66) ve (71)-(74) ile belirtilen (vurgulanan) hedef dahilinde araştırmalar ve tartışmalar yine mümkün olacaktır. Özellikle, herbir genel sonucun veya bunlarda elde edilebilinecek tüm özel sonuçların, kompleks düzlemdeki (*modül, argüment, reel ve sanal* kısımlarına ilişkin) geometrik (bazı) özellikleri Kompleks Fonksiyonlar Teorisi için ne kadar önemli olsa da yaklaşım teorisinden olasılık teorisine kadar çeşit bilim alanlarındaki bazı özel halleri hata fonksiyonlarının uygulamaları boyutunda da oldukça önemlidir.

Son olarak, özellikle, (31)'de vurgulamış olduğumuz ve Teorem 2.2.2.12'de yer alan ve literatür açısından zengin bir içeriğe sahip olan (kompleks değişkenli) *Hermite Polinonmları* da dikkate alınarak, esas sonuçlara olarak elde etmiş olduğumuz Teorem 3.1-Teorem 3.4 arsındaki sonuçlara daha genel yapıya ve bunlara denk gelen seri ilişkilerini de genişletilebilir. Böylesi bir araştırma ile, üstte vurgulamış olduğumuz kapsam da aşırı özel sonuçların önünü açacaktır.

4. SONUÇ

Ülkemizde ilk kez üzerinde çalışılan teorik boyutlu bu bilimsel araştırmada, araştırma için öncelikli olarak gerekli olan temel bilgiler öncelikli olarak verilmiş, ardından da tez konusunun temel hedefinde yer alan Kompleks Hata Fonksiyonu, Tamamalayıcı Kompleks Hata Fonksiyonu ve bunlarla ilgili olan bazı temel tanımlar, teoremler, bağıntılar ve bazı özel sonuçlar verilmiştir ve tartışılmıştır. Irmak ve Duran (2019) tarafından önceden elde edilmiş olan bu genel sonuçlar sırasıyla Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 şeklinde oluşturulan temel sonuçlar ile bunların özel sonuçları konumunda olan ve (27)-(32), (58)-(66) ve (67)-(74) bilgilendirmeleri kapsamında belirlenmesi mümkün olabilen diğer tüm özel sonuçlardır. Ayrıca, hem elde edilen bu orijinal sonuçların hem de bunların tüm olası özel sonuçların uygulama boyutu açısından, Matlab, Mathematica vb hazır programlar yardımıyla da kolayca oluşturulabilen bazı geometrik şekillerinin 2D ve 3D şeklindeki özel analizleri çeşitli boyutları ile araştırmacıların dikkatine de sunulmuştur. Belirtilen bu analizlerin oluşturulması açısından, hem bu tezde elde edilen sonuçların birer farklı analizleri hem de Hata Fonksiyonları'nın çeşitli bilim dallarındaki bazı farklı uygulamaları olarak, kaynaklar kısmında verilen Jaeger (1946), Faddeyeva and Trentev (1961), Carlitz (1963), Abramowitz and Stengun (1965), Zang and Jin (1966), Bell (1968), Chiarella and Reichel (1968), Gautschi (1970), McKenna (1984), Herden (1987), Spannier and Oldham (1987), Erdely *et al.* (1953), Abrarov and Quine (2015), Mori (1983) ve Temme (1994) eserleri ile vurgulanan (elde edilen) sonuçlar ilgilenen araştırmacılar için de birer farklı uygulama alanlarına ilişkin örnekler oluşturacaktır.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M., Stegun, I.A. 1965. Handbook of mathematical functions with formu- formulas, graphs and mathematical tables, Dover.

Abrarov, S.M, Quine, B. M. 2015. Accurate approximations for the complex error function with small imaginary argument, J. Math. Research 7; 44-53.

Abfrarov, S.M, Quine, B. M. 2018. A rational approximation of the Dawsons integral for efficient computation of the complex error function, Appl. Math. Comput. 321; 526-543.

Adams, M., Guillemin, V., 1996. Measure theory and probability, Birkheauser, Boston.

Artin, E., The gamma function, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964.

Bell, W.W. 1968. Special functions for scientists and engineers, D. Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York.

Brown, J.W., Churchill, R.V. 1996. Complex variables and applications, McGraw- Hill.

Burrill, C.W. 1972. Measure, Integration and probability, McGraw-Hill Book Company.

Carlitz, L. 1963. The inverse of the error function, Pasific J. Math., 13; 459-470.

Carlson, B. 1977. Special functions of applied mathematics, Academic Press, New York.

Chiarella, C., Reichel, A. 1968. On the evaluation of integrals related to the error function, Math. Comp. 22; 137-143.

Coffey, M.W., Johnston S.J. 2009. Some results involving series representations of hypergeometric functions, J. Comp. Appl. Math. 233; 674-679.

Duran, M. 2019. Kompleks Düzlemde Hata Fonksiyonu, Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Semineri, Çankırı, Türkiye.

Duren, P.L. 1983. Univalent functions, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.

Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger., F., Tricomi, F.G. 1953. Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill Book Co. Inc., USA.

Faddeyeva V.N., Terentev N.M. 1961. Tables of the probability integral

$$w(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt\right)$$

for complex argument, Pergamon Press, Oxford.

Fettis, H.E., Caslin, J.C., Cramer K.R. 1973. Complex zeros of the error function and of the complementary error function, Math. Comp. 27; 401-407.

Gautschi, W. 1970. Efficient computation of the complex error function, Siam J. Numer. Anal. 7; 187-198.

Goodman, A.W. 1983. Univalent functions, Vols, I and II, Polygonal Publishing Company.

Herden, G. 1987. The role of error functions in order to obtain relatively optimal classification, Classification and related methods of data analysis, North Holland, Amsterdam.

Irmak, H., Duran, M. 2019. Some results for error fuction with complex argument, J. Orissa Math. Soc. 38; 53-68.

Irmak, H., Mohapatra, R. N. 2020. Various results for series expansions of the error functions in the complex plane and related implications, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 27 (3); 11-24.

Jaeger, J.C. 1946. Some applications of the repeated integrals of the error function, Quart. Appl. Math. 4; 100-103.

Jack, I.S. 1971. Functions starlike and convex of order α, J. London. Math. Soc., 2 (3); 469-474.

Lebedev, N.N. 1965. Special functions and their applications, Prentice Hall, New Jersey.

McKenna, S.J. 1984. A method of computing the complex probability function and other related functions over the whole complex plane, Astrophys. Space Sci., 107 (1); 71-83.

Miller, S.S., Mocanu, P.T. 1978. Second-order differential inequalities in the complex plane, J. Math. Anal. 65; 289-305.

Nehari, Z. 1952. Conformal mapping, McGraw-Hill book company, New York, Toronto, and London.

Mori, M. 1983. A method for evaluation of the error function of real and complex variable with high relative occuracy, Kyoto Univ. Research Inst. Math. Sci. 19; 1081-109.

Olver, F.W.J., Lozier, D.W., Boisvert R.F., Clark, C.W. 2010. NIST handbook of mathematical functions, Cambridge University Press, New York.

Rainville, E.D. 1960. Special functions, Chelsea Publishing Company, New York.

Spannier, J., Oldham, K.B. 1987. The error function erf(x) and its complement erf(x), An atlas of functions, pp. 385-393, Washington.

Seaborn, J.B. 1991. Hypergeometric functions and their appplications, Springer Verlag.

Temme, N.M. 1996. Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics, John Wiley.

Wang, Z.X., Guo, D.R. 2010. Special functions, World Scientific, Singapore.

Weideman, J.A.C. 1994. Computation of the complex error function, Siam J. Numer. Anal. 31; 1497-1518.

Wunsch, A.D. 1994. Complex Variables with applications, Addison-Wesley Publishing Company, USA.

Zang, S., Jin, J. 1966. Computation of special functions, John Wiley.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Meryem DURAN AKKOYUN

Doğum Yeri : Çankırı

Doğum Tarihi : 01.08.1991

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dil : İngilizce

Adres : Abdülhalik Renda Mahallesi Nilüfer Sokok Yeşilkent Sitesi A Blok No:13, ÇANKIRI

Tel : 0 539 281 34 92

e-posta : meryemduran03@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Çankırı Lisesi

Lisans : Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2013)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

- Çankırı Atatürk Ortaokulu (2013)
- Çankırı Ahmet Mecbur Efendi Bilim ve Sanat Merkezi (2015)
- Çankırı Muazzez Ser-Ved Amaratoğlu Ortaokulu (2015)
- Çankırı Karatekin Ortaokulu (2016)
- Özel Akılküpü Etüt ve Eğitim Merkezi (2017)

Orcid ID : https://orcid.org/0000-0001-5846-4869

Bildiri ve Yayınlar

1) M. Duran, Korkulu Rüyam Matematik, 5. Ulusal Çocuk Kongresi, Sayfa 79-80, İstanbul, 2016.
2) H. Irmak and M. Duran, Some results for error fuction with complex argument, J. Orissa Math. Soc. 38 (1-2) 2019, 53-68.