İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN PİEZOELEKTRİK YAMALAR YARDIMIYLA TİTREŞİM KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alev KAÇAR

Anabilim Dalı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

Programı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

HAZİRAN 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN PİEZOELEKTRİK YAMALAR YARDIMIYLA TİTREŞİM KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Alev KAÇAR
(511071104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Mayıs 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 03 Haziran 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin Orhan KAYA (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL (İTÜ)
Prof. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ)

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

Lisans eğitimimden beri, değerli bilgi ve zamanını benden hiçbir zaman esirgemeyen, yol gösteren ve üzerimde çok büyük emek sahibi olan değerli hocam Prof. Dr. Metin Orhan KAYA başta olmak üzere fakültemiz değerli hocalarına teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, yüksek lisans eğitimim boyunca destekleyen TÜBİTAK'a, çalışmama sağladığı destekten ötürü İTÜ- Bilimsel Araştırma Projeleri Lisans Üstü Tezlerini Destekleme Programı'na teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, her zaman sonsuz fedakârlık ve sevgisiyle yanımda olan değerli annem, varlığını her an hissettiğim babam ve sevgili B. Taylan Aksongur'a tüm kalbimle teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2009

Alev Kaçar

(Uzay Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
KISALTMALAR ..... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Literatür Özeti 1
1.1.1 Kompozit plaklar 1
1.1.2 Piezoelektrik 2
2. KATMANLI KOMPOZİT PLAKLAR **5**
2.1 Kompozit Malzemeler 5
2.2 Kompozit Malzemelerin Sınıflandırılması 6
2.2.1 Bileşenlerin biçimine göre sınıflandırma 6
2.2.1.1 Lifli kompozitler 6
2.2.1.2 Parçacıklı kompozitler 7
2.2.2 Bileşenlerin yapısına göre sınıflandırma 7
2.2.2.1 Organik matrisli kompozitler 7
2.2.2.2 Metalik matrisli kompozitler 7
2.2.2.3 Mineral matrisli kompozitler 8
2.3 Kompozit Malzemelerin Temel Özellikleri 8
2.4 Katman ve Katmanlı Kompozit Malzemeler 10
2.4.1 İsimlendirme 11
2.4.2 Katmanların koordinatları 12
2.4.3 Katmanlar için kabuller 13
2.4.4 Katman bünye denklemleri 13
2.5 Klasik Katmanlı Plak Teorisi 17
2.5.1 Kabuller 17
2.5.2 Katmanlı Yapı Bünye Denklemleri 18
3. PİEZOELEKTRİK **21**
3.1 Piezoelektrik malzemeler 21
3.2 Piezoelektrik Etki 22
3.3 Piezoelektrik Algılayıcı ve Eyleyiciler 24
3.4 Piezoelektrik Bünye Denklemleri 25
4. PİEZOELEKTRİK YAMALI PLAĞIN TEORİK MODELLENMESİ **31**
4.1 Plak Doğal Frekansları ve Mod Şekilleri 31
4.1.1 Farklı sınır koşullarında mod şekil fonksiyonları ve mod şekilleri 32
4.1.2 Plak doğal frekansı 35
4.2 Yayılı Algılayıcı ve Eyleyiciye Sahip Plak Modeli 40
4.3 Titreşim Kontrolü 42

4.3.1 Deplasman geri beslemeli kontrol 43
4.3.2 Hız geri beslemeli kontrol 43
4.3.3 Geri besleme kazancı 44
4.4 Zamana Bağlı Cevaplar 45
4.5 Zamandan Bağımsız Cevaplar 46
4.6 Katmanlı Kompozit Plak 48
5. YAMA CEVAPLARININ TEORİK MODELLENMESİ 51
5.1 Basit Mesnetli Plaklar 51
5.1.1 Tek parça piezoelektrik yama 51
5.1.1.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali 51
5.1.1.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü 52
5.1.2 Bölünmüş piezoelektrik yamalar 57
5.1.2.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali 58
5.1.2.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü 60
Özel durumlar 63
5.2 Sabit Mesnetli Plaklar 65
5.2.1 Tek parça piezoelektrik yama 65
5.2.1.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali 65
5.2.1.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü 66
5.2.2 Bölünmüş piezoelektrik yamalar 66
5.2.2.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali 66
5.2.2.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü 67
6. SAYISAL ÇALIŞMALAR ve SONUÇLAR 69
6.1 Katmanlı Kompozit Plaklar 69
6.2 Kontrol Etkinliği 70
6.2.1 Homojen izotropik plak 71
6.2.1.1 Basit mesnetli plak 71
6.2.1.2 Sabit mesnetli plak 75
6.2.1.3 Plak kalınlığının etkisi 77
6.2.2 Kompozit plak 78
6.2.2.1 Sabit plak kalınlığında katman diziliminin etkisi 79
6.2.2.2 Sabit katman kalınlığında katman diziliminin etkisi 79
6.2.2.3 İki katmanlı plakta kalınlığın etkisi 80
6.2.2.5 Yama konumu 82
7. DEĞERLENDİRME 85
KAYNAKLAR 87

KISALTMALAR

CLPT : Klasik Katmanlı Plak Teorisi
FSDT : Birinci Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi
HSDT : Yüksek Derece Kayma Şekil Değiştirme Teorisi
PVDF : Poliviniliden Florid
PZT : Kurşun Zirkonat Titanat

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Farklı sınır koşullarında kirişlerin doğal frekansı 34
Çizelge 4.2 : Çeşitli sınır koşullarında plak doğal frekansları..... 38
Çizelge 4.3 : Sabit mesnetli plak doğal frekansları 38
Çizelge 5.1 : Gelişigüzel yerleştirilmiş yama koordinatları……...59
Çizelge 5.2 : Bölümlü yama koordinatları..... 64
Çizelge 6.1 : $[0,+45]_S$ plakta $\overline{Q}_{ij}$ 69
Çizelge 6.2 : [0,+45] plakta D_{ij} 70
Çizelge 6.3 : $[0,90]_S$ Plak doğal frekansı 70
Çizelge 6.4 : Malzeme özellikleri [34] 71
Çizelge 6.5 : Cam epoksi dokumanın malzeme özellikleri [23]..... 79

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : F-18'de kompozit malzeme kullanımı [20] 6
Şekil 2.2 : Çeşitli lifli kompozitler [23] 7
Şekil 2.3 : Malzemelerin simetriye göre davranışı [20] 9
Şekil 2.4 : Katman ve katmanlı yapılar [23] 11
Şekil 2.5 : Katmanlı yapıların isimlendirilmesi [25] 12
Şekil 2.6 : Katmanlı yapının koordinatları [23] 13
Şekil 3.1 : Piezoelektrik elemanın kristal yapısı [16] 22
Şekil 3.2 : Piezoelektrik seramik malzemede kutuplanma [16] 23
Şekil 3.3 : Piezoelektrik elemanın elektrik alanında davranışı [16] 24
Şekil 3.4 : Sıralı piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici sistemi [16] 25
Şekil 3.5 : Piezoelektrik eleman koordinatları ve indisler [16] 26
Şekil 4.1 : Kartezyen koordinatlarda plak yapı 32
Şekil 4.2 : Kiriş sınır koşulları 32
Şekil 4.3 : Kiriş frekans grafikleri 34
Şekil 4.4 : Plak sınır koşulları 35
Şekil 4.5 : Plak mod şekilleri 39
Şekil 4.6 : Piezoelektrik yamalı plak 40
Şekil 4.7 : Mekanik uyartı 46
Şekil 5.1 : Algılayıcı ve eyleyicili basit mesnetli plak 51
Şekil 5.2 : Birim basamak fonksiyonu 53
Şekil 5.3 : Plakta çarpım birim basamak fonksiyonu 53
Şekil 5.4 : 4 parçalı algılayıcı eyleyicili plak yapı 58
Şekil 5.5 : Bölünmüş eyleyici ve algılayıcı 60
Şekil 5.6 : Bölünmüş eyleyici için birim basamak fonksiyonu 61
Şekil 5.7 : Eyleyici bölümlerinin moment etkisi 61
Şekil 5.8 : Algılayıcı ve eyleyicili sabit mesnetli plak 65
Şekil 6.1 : Basit mesnetli plakta 1.tek mod grubunda sönümleme değişimi 72
Şekil 6.2 : Basit mesnetli plakta 2 ve 3.tek mod gruplarında sönümleme değişimi .. 73
Şekil 6.3 : Basit mesnetli plakta titreşim cevabı 74
Şekil 6.4 : Basit mesnetli plakta titreşim cevabı [34] 75
Şekil 6.5 : Sabit mesnetli plakta sönümleme değişimi 76
Şekil 6.6 : Sabit mesnet titreşim cevabı 77
Şekil 6.7 : Kalınlığın sönümlenmeye etkisi 78
Şekil 6.8 : Sabit katman kalınlığında sönümleme değişimi 80
Şekil 6.9 : Kompozit plakta kalınlığın sönümlemeye etkisi 81
Şekil 6.11 : Yama konumları 83
Şekil 6.12 : Yama konumuna bağlı ξ'_{mn} - ς değişimi 83

KATMANLI KOMPOZİT BİR PLAĞIN PİEZOELEKTRİK YAMALAR YARDIMIYLA TİTREŞİM KONTROLÜ

ÖZET

Piezoelektrik, mekanik gerilme altında elektrik alanı oluşturma özelliğidir. Piezoelektrik eleman basma veya çekmeye maruz kaldığında kutuplanır ve yüzeyinde net bir yük oluşur. Piezoelektrik etki tersinir olup, elektrik alana maruz bırakılan malzemenin boyunda kutuplanmanın doğrultusuna göre uzama veya kısalma görülür.

Piezoelektrik malzemeler, en sık kullanılan akıllı malzemelerin başında gelir. Kullanım alanları çok geniş bir yelpazede dağılmış olup, tenis raketi, kayak, mikrofon, ateşleyici, araç hava yastığı gibi günlük hayatta kullanılan birçok sistem ile jiroskop, ivme ve basınç ölçerler, transformatör, uçak kanatlarında dengeleyici, hassas konumlandırma cihazları, eyleyici ve algılayıcılar gibi ileri teknoloji alanında sıklıkla kullanılmaktadır. Piezoelektrik malzemelerin farklı boyut ve geometrideki yapılara kolay uygulanabilirliği ve ölçüm hassasiyeti, mühendislik uygulamalarında önemli bir yer edinmelerini sağlamıştır. Titreşim kontrolünde ise havacılık ve uzay yapıları başta olmak üzere birçok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, kompozit katmanlı bir plağın her iki yüzeyine yapıştırılmış piezoelektrik yamalar yardımıyla titreşim kontrolü analitik olarak incelenmiştir. Katmanlı kompozit, ince, dikdörtgen plak, *Klasik Katmanlı Plak Teorisi (CLPT)* ile modellenmiş, plağın alt ve üst yüzeylerinde film tabakası halinde yapıştırılmış *Poliviniliden florid (PVDF)* yamalar yardımıyla titreşimi sönümlenmiştir. Plak davranışı çeşitli sınır koşulları altında incelenmiştir. Plak kalınlığının, katman diziliminin, yamaların plak üzerindeki konum ve boyutlarının plak davranışına etkileri gözlenmiştir. Çalışmada elde edilen sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

VIBRATION CONTROL OF A LAMINATED COMPOSITE PLATE BY PIEZOELECTRIC PATCHES

SUMMARY

Piezoelectricity is the property of creating an electric field under the mechanical stress. When exposed to tension or compression, a piezoelectric element is polarized and a net charge is created on the surfaces. In a similar way, a piezoelectric material, which is exposed to an electric field, changes its length depending on the direction of polarization.

Among the smart materials, piezoelectric materials take place as frequently used materials in variety of fields. Usage of piezoelectric materials are spread widely in everyday life such in tennis racquets, skis, microphones, igniters, airbags as well as in advanced technologies such in gyroscopes, acceleration and pressure measurements, transformators, stabilizers in air-plane wings, positioning devices, sensors and actuators. Providing precise measurements and the simplicity in their applications to structures with different dimensions and geometry, piezoelectric materials have been very important in engineering fields. They are used in vibration control of engineering structures under dynamic loadings, especially in aerospace structures.

In this study, vibration control of a laminated composite plate by piezoelectric patches bonded onto the plate's surface is examined. The thin, laminated composite, rectangular plate is examined by *Classical Laminated Plate Theory (CLPT)*, vibration is suppressed by with thin films of *polyvinylidene fluoride (PVDF)* bonded to upper and bottom surfaces of the plate. Behavior of the plate is examined for the different boundary conditions. The effects of plate thickness, laminate configurations, dimension and position of patches to the plate behavior is observed. The results obtained within the study are compared with similar works.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, katmanlı kompozit, ince, dikdörtgen bir plağın, alt ve üst yüzeyine yapıştırılmış piezoelektrik özellikteki bir polimer yardımıyla titreşim kontrolü teorik olarak incelenmiştir. Plakta aktif titreşim kontrolü için piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici yamalar kullanılmıştır. Algılayıcı ve eyleyici arasında geri besleme ile titreşim sönümü sağlanmıştır. Farklı sınır koşulları, plak kalınlığı, yamaların konum ve boyutu ile katman dizilimlerinde plak davranışı incelenmiştir.

1.1 Literatür Özeti

1.1.1 Kompozit plaklar

Katmanlı plaklar için literatürde kabul görmüş birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmada klasik katmanlı ince plak teorisi kullanılarak plak modeli oluşturulmuştur. Klasik ince plak teorisi, Reissner ve Stavsky [1] ile Whitney [2] tarafından klasik katmanlı plaklar için genişletilmiştir (CLPT). Plağın orta düzlemine dik çizgilerin, şekil değiştirme sonrasında da dik kaldığı kabulüne dayanarak, enlemesine normal ve kayma etkileri ihmal edilmiştir. Ancak bu teori, doğal frekansları aslından yüksek değerlerde hesaplamaktadır. Kompozit katmanlı plakların yüksek kayma esnekliği sebebiyle, mekanik davranışların hassas çözümleri için, enlemesine kayma birim uzamaları hesaba katılması gerekmektedir. Bu sebeple, düzlem içi gerilme ve yer değiştirmelerin kalınlık yönünde lineer değiştiği, orta düzleme dik dönmelerin enlemesine şekil değiştirmeden bağımsız olduğu kabulüne dayanan birinci derece kayma şekil değiştirme teorisi (FSDT) ile başarılı çalışmalar sunulmuştur [3-5].

Daha hassas sonuçlar için, tüm katmanları, enlemesine kayma birim uzamaların kalınlık yönünde lineer olmayan şekilde değiştiği tek bir tabaka olarak kabul eden ve düzlem içi yer değiştirmeleri kalınlık koordinatı civarında yüksek mertebe polinomlar ile ifade eden yüksek derece kayma deformasyon teorisi (HSDT) geliştirilmiştir [6-15].

1.1.2 Piezoelektrik

Piezoelektrik etkiyi açıklayan ilk bilimsel yayın, 1880'de, çeşitli kristaller ile deneysel çalışmalar yürüten Pierre ve Jacques Curie kardeşler tarafından sunulmuştur. Curie kardeşler, deneyleri sırasında, turmalin, kuvartz, topaz, şeker kamışı şekeri ve Rochelle tuzu gibi bazı kristallerin, mekanik gerilme altında yüzey yüklerinin değiştiğini gözlemlemişlerdir. Bu özellik, yunanca baskı yapmak anlamında "*piezo*" dan "*piezoelektrik*" olarak adlandırılmıştır. Curie kardeşler her ne kadar direk piezoelektrik etkiyi bulmuş olsalar da ters piezoelektrik etki, bundan bir yıl sonra Lippmann tarafından termodinamiğin temel yasaları kullanılarak matematik olarak tahmin edilmiş, Curie Kardeşler tarafından da deneysel olarak doğrulanmıştır (1881) [16].

Piezoelektrik etki ilk kez 1. Dünya savaşında hidroakustik ölçümler için Fransız fizikçi Langevin tarafından kullanılmıştır [17]. Piezoelektrik eyleyiciler ise kirişlerin titreşim kontrolü için ilk kez, Bailey ve Hubbard (1985) ile Crawley ve Luis (1987) tarafından kullanılmıştır. Kirişlerde kullanılan piezoelektrik eyleyiciler, kirişin dış yüzeyine yapıştırılmış, kalınlık yönünde kutuplanan yapılardır. Crawley ve Luis bunların mekanik modellerini geliştirmiş (1987), Crawley, Anderson (1990) ve diğerleri yüzeye yapışık eyleyicili kirişlerde deformasyon ve gerilmeleri incelemiştir.

Lee (1990), Wang ve Rogers (1991), Batra ve Ghosh (1995) ile Mitchell ve Reddy (1995) gömülü ve/veya yüzeye yapışık piezoelektrik eyleyici ve algılayıcı bulunan kompozit katmanlar için plak teorileri geliştirmiştir.

Basit mesnetli, piezoelektrik katmanlı kompozit plaklarda şekil değiştirme ve gerilmeler için üç boyutlu analitik çözümler Heyliger (1994, 1997), Heyliger ve Brooks (1996), Heyliger ve Saravanos (1995), Bisegna ve Maceri (1996), Batra vd. (1996a), Batra ve Liang (1997),Lee ve Jiang (1996) ile Vel ve Batra (2000, 2001) tarafından sunulmuştur. Fonksiyonel derecelendirilmiş plaklar için ise Vel ve Batra (2002)'nın çalışmaları mevcuttur.

Plak boyutlarından biri diğerlerine nazaran çok büyükse şekil değiştirme durumu, şekil değiştirmeler o yöndeki koordinatlardan bağımsız kabul edilerek *silindirsel eğilme* olarak adlandırılır. Silindirsel eğilme için tam çözümler, basit mesnetli katmanlı plaklar için Heyliger ve Brooks (1996) ile Vel ve Batra (2001) tarafından, fonksiyonel derecelendirilmiş plaklar için Vel ve Batra (2003) tarafından verilmiştir. Ayrıca, Heyliger ve Brooks (1995) ile Yang vd. (1994) silindirsel eğilme titreşimi için tam çözüm geliştirmiştir.

Brooks ve Heyliger (1994) ile Batra vd. (1996), yayılı piezoelektrik eyleyicinin sadece bir parçasına elektrik potansiyeli vererek bölümlü bir piezoelektrik eyleyiciye benzetim yapmıştır. Çalışmada yapının sınırları basit mesnetli olup tüm katmanlar aynı genişlikte kabul edilerek sadece özel tipte elektrik sınır koşulları ele alınmış ve tüm katmanlar aynı genişlikte kabul edilmiştir. Batra ve Aimmanee (2003), basit mesnetli, homojen ve katmanlı plaklarla ilgili önceki analitik çalışmalarda eksik olan frekansları bulmuşlardır.

Vel ve Batra (2000), keyfi mekanik ve elektrik sınır koşullarına maruz kalan katmanlı piezoelektrik dikdörtgen plaklar için üç boyutlu yarı-statik çözümler geliştirmiştir. Akabinde, bölümlü piezoelektrik yamalı katmanlı plaklar için çözümlerini sunmuşlardır [18].

2. KATMANLI KOMPOZİT PLAKLAR

2.1 Kompozit Malzemeler

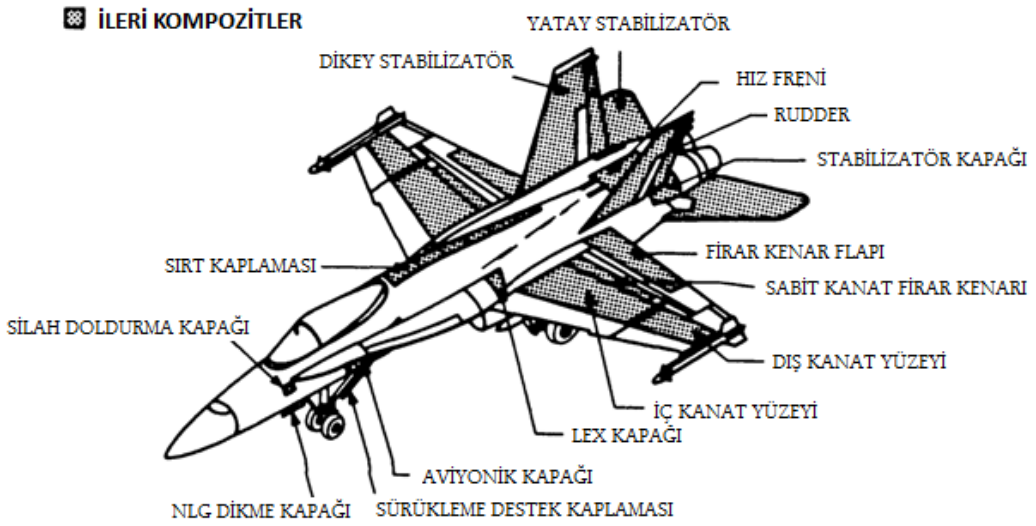
Farklı özellikte iki ya da daha çok bileşenden oluşan malzemelere genel olarak kompozit malzemeler denir [19]. Bileşenler, makroskopik ölçüde birleşerek sahip olduğu özelliklerden farklı özelliklerde bir kompozit malzeme oluşturur. Diğer bileşimlerden farklı olarak kompozit malzemelerde yapı homojen değildir [20] ve bu bileşenler birbiri içinde çözünmez [21].

Kompozit malzemeler sürekli bir bölgede yayılı halde bir veya daha fazla süreksiz bölgeler içeren malzemelerdir. Sürekli bölge, *matris* adı verilen bir dolgu malzemesi olup süreksiz bölgeler ise *takviye malzemesi* adı verilen, matrise göre daha sert ve üstün özelliklere sahip malzemelerdir. Farklı nitelikte süreksizlik bölgelerine sahip kompozitlere hibrit kompozitler denir.

Kompozit malzemelerin özelliklerini; bileşenlerinin özellikleri, geometrik dağılımı ve birbiriyle etkileşimi belirler. Bir kompozit malzeme; bileşenlerinin içeriği ve özellikleri, takviye malzemesinin geometrisi ve dağılımı, dolgu-takviye ara yüzeyinin yapısı ile tanımlanır. Takviye malzemesinin geometrisi ise şekli, boyutu, konsantrasyonu ve yönelimi gibi parametrelerle belirlenir. Dolgu içindeki konsantrasyonu hacimce veya ağırlıkça oran ile ölçülür. Lif takviyeli kompozit malzemelerde anizotropi liflerin yönelimine bağlıdır [22].

Liflerin bir yapısal elemanı oluşturup yük taşıması için dolgu malzemesi ile yapıştırılması gerekir. Matris, lifleri bir arada tutarak destekler, kırılmış lifler arasında gerilme iletimini sağlar. Liflerle karşılaştırıldığında matrisler daha düşük yoğunluklu, daha az mukavim malzemelerdir. Fakat liflerle birlikte, düşük yoğunlukta ancak yüksek katılık ve mukavemete sahip bir kompozit malzeme oluştururlar.

Hava - uzay yapıları gibi ağırlık ve maliyetin büyük önem arz ettiği yapılarda, mukavemet/ağırlık oranı yüksek ve maliyeti düşük olan kompozit malzemelerin kullanımı yaygınlaşmıştır [20].



Şekil 2.1 : F-18'de kompozit malzeme kullanımı [20]

2.2 Kompozit Malzemelerin Sınıflandırılması

Kompozit malzemeler bileşenlerin formuna veya niteliğine bağlı olarak iki ana grupta incelenir:

2.2.1 Bileşenlerin biçimine göre sınıflandırma

2.2.1.1 Lifli kompozitler

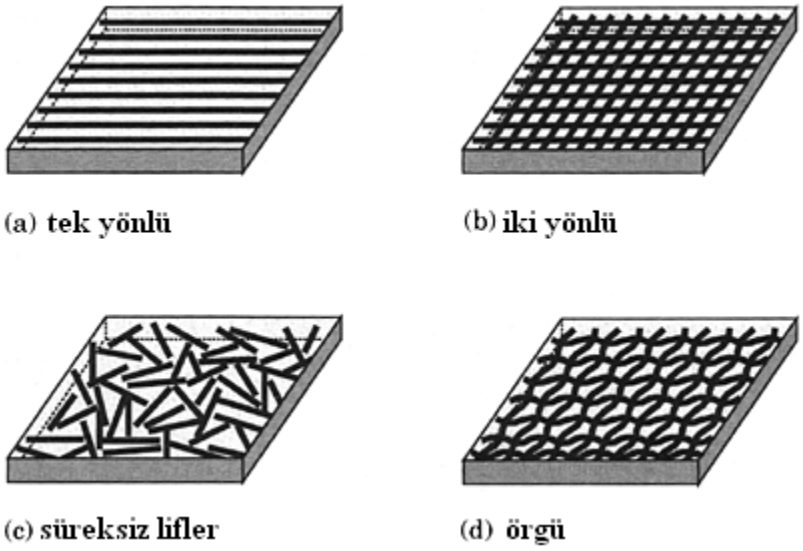
Takviye malzemesinin lifler şeklinde olduğu kompozit malzemelerdir. Liflerin yönelimi, kompozit malzemenin liflerin yönelimine göre düzenlenerek mekanik özelliklerinin ayarlanmasını mümkün kılmaktadır [22].

Çoğunlukla dolgunun liflere hacimce oranı %50'nin altındadır. Lifler hem katılık ve mukavemet sağlar, hem de yapının yükleme şartlarına uygun bir yönde uygulanmasına olanak sağlar [19].

Lif seklindeki bir malzeme, aynı malzemenin yığın haline göre çok daha katı ve mukavimdir. Örneğin bir cam lif, sıradan bir cam plağın dayanabileceği gerilmenin 240 katına kadar dayanabilir. Bunun sebebi liflerden oluşmuş bir malzemenin, yığın haline göre çok daha düzgün bir yapıda olmasıdır. Ayrıca, malzemelerin yığın halleri, lif yapılarına oranla çok daha fazla iç düzensizliğe sahiptir [20]. Kısa lifler, uzunlara göre daha iyi katılık ve mukavemet özelliği gösterir [23].

Grafit ve karbon lifler günümüzde en çok ilgi gören lifli kompozitlerin başında gelmektedir. Bu lifler, çok ince yapılar olup, dokuma yöntemi ile kullanıma hazır

olarak elde edilebilmektedir [20]. Şekil 2.2'de tek yönlü, iki yönlü, gelişigüzel ve örgü lifli kompozitler görülmektedir.



Şekil 2.2 : Çeşitli lifli kompozitler [23]

2.2.1.2 Parçacıklı kompozitler

Takviyeleri parçacıklar şeklinde olan kompozit malzemelerdir. Liflerden farklı olarak belirli bir yönelimi yoktur. Parçacıklar genellikle malzeme veya matrisin katılık, sıcaklık altında davranışı, aşınma direnci gibi özelliklerini arttırmak ve malzemenin özelliklerini bozmayacak şekilde maliyeti düşürmek için doldurucu olarak kullanılır [22]. Dolgu malzemesinin parçacıklara oranı genellikle %50 ve üstü olup, homojen ve izotropik olarak kabul edilir [19].

2.2.2 Bileşenlerin yapısına göre sınıflandırma

2.2.2.1 Organik matrisli kompozitler

Polimer reçine matris içinde,

- Mineral lifler: Cam, karbon, kevlar vb.
- Organik lifler: Kevlar, poliamidler vb.
- Metalik lifler: Boron, alüminyum vb.

2.2.2.2 Metalik matrisli kompozitler

Alüminyum, magnezyum ve titanyumun ultra hafif alaşımları içinde,

- Mineral lifler: Karbon, silikon karbür
- Metalik lifler: Boron
- Metal-mineral lifler: Silikon karbürle sarılmış boron lifler

2.2.2.3 Mineral matrisli kompozitler

Seramik içinde,

- Metalik lifler: Boron
- Metalik parçacıklar: Madeni seramik
- Mineral parçacıklar: Karbür, nitrit vb.

Organik matrisli kompozit malzemeler 200-300°C, metalik veya mineral matrisli kompozit malzemeler 600°C, seramik matrisliler ise 1000°C sıcaklığın altında kullanılmalıdır.

2.3 Kompozit Malzemelerin Temel Özellikleri

Malzeme özelliklerinin tüm yapı boyunca aynı ve değişmez olduğu malzemelere *homojen* malzemeler denir. Homojen yapılarda malzeme özellikleri, yapının içindeki konumdan bağımsızdır.

Heterojen malzemelerde ise, malzeme özellikleri konumdan bağımsız, yapı içinde herhangi bir noktadaki malzeme özelliği diğerinden farklıdır.

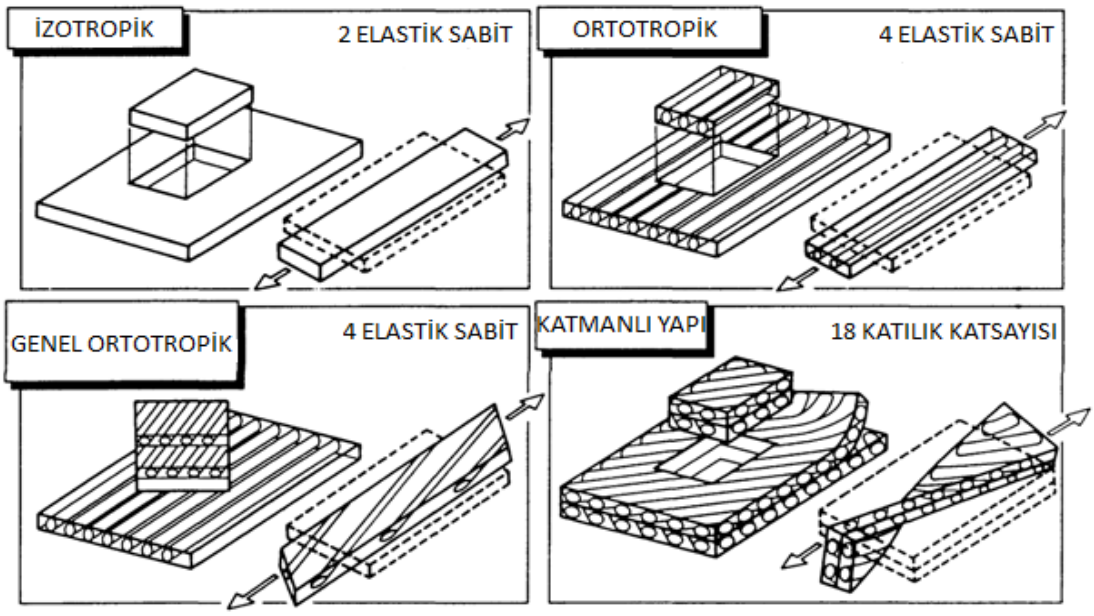
Anizotropik malzemelerde malzeme özellikleri her yönde birbirinden farklıdır.

İzotropi ise, yapı boyunca her yöndeki malzeme özelliklerinin aynı olmasıdır. Yapı içinde bir noktadan başlayarak bir yönde gidildiğinde malzeme özellikleri değişmez. İzotropik malzemelerde normal gerilme, kayma şekil değiştirmesi olmaksızın, o yönde uzamaya veya normal gerilmenin uygulanma yönüne dik yönde kısalmaya sebep olur. Yapı kayma gerilmesine maruz kaldığında ise, sadece kayma şekil değiştirmesi oluşur. Herhangi bir yönde uzama veya kısalma gözlenmez. İzotropik yapılarda malzemenin şekil değiştirmesini tanımlamak için elastisite modülü E ve Poisson oranı ν yeterlidir. Kayma modülü G ; E ve ν 'ye bağlı olarak bulunabilir.

Ortotropik yapıların malzeme özellikleri, yapı içindeki herhangi bir noktada karşılıklı üç dik yönde birbirinden farklıdır, birbirine dik üç simetri yüzeyi

mevcuttur. Ortotropik malzemelerde de izotropik malzemelerde olduğu gibi, asal eksenlerinden biri yönünde uygulanan normal gerilme o yönde uzamaya ve dik yönde kısalmaya sebep olur. Fakat her yöndeki malzeme özellikleri farklı olduğundan, aynı normal gerilme değeri iki farklı yönde uygulandığında elde edilen uzamalar farklıdır. Bu durumda her bir yöndeki E ve ν farklıdır. Kayma gerilmesi sadece kayma şekil değiştirme oluşturur. Fakat kayma modülü G, diğer malzeme özelliklerinden bağımsızdır. Ortotropik bir malzemeyi tanımlamak için en az beş malzeme özelliği gerekir. Asal eksenleri boyunca yüklemeye sahip ortotropik malzemeler *özel ortotropik*, asal eksenleri dışındaki doğrultuda bir yükleme altındaki ortotropik malzemeler ise *genel ortotropik malzemeler* olarak adlandırılır.

Kompozit malzemeler genellikle heterojen ve ortotropiktir [20]. Katmanlı bir yapı, A_{ij}, B_{ij} ve D_{ij} katılık katsayılarının her birinden altışar tane olmak üzere en fazla 18 elastik sabit ile ifade edilebilir. Her bir katman için gereken elastik sabit en fazla 4 olup, yapının her bir tabakası aynı katmandan oluşturulduysa katmanlı yapı da toplamda 4 elastik sabit ile ifade edilebilir.



Şekil 2.3 : Malzemelerin simetriye göre davranışı [20]

Şekil 2.3'te, çekme kuvveti etkisi altında çeşitli malzemelerin davranışları görülmektedir. İzotropik malzeme, çekme kuvveti yönünde uzar ve buna dik yönde kısalır. Ortotropik malzeme de asal eksenlerinden biri yönündeki çekme altında (özel ortotropik) benzer davranış gösterir. Fakat asal eksen doğrultuları dışında çekmeye

maruz kalan ortotropik malzeme (genel ortotorpik), kayma uzaması ilavesine de maruz kalır. Katmanlı kompozit yapıda ise burulma gözlenmektedir.

Lif takviyeli bir kompozit malzemenin elastisite modülü E ve Poisson oranı ν, bileşenlerinin E, ν ve hacim oranları υ cinsinden şu şekilde ifade edilir:

E_f, ν_f, υ_f lifin sırasıyla elastisite modülü, Poisson oranı ve lif hacim oranı; E_m, ν_m, υ_m matrisin sırasıyla elastisite modülü, Poisson oranı ve matris hacim oranı, E_1 ve E_2 katmanın boylamasına ve enlemesine modülü, ν_{12} birincil Poisson oranı, G_{12} kayma modülü olmak üzere;

$$E_1 = E_f \upsilon_f + E_m \upsilon_m \quad , \quad E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f \upsilon_m + E_m \upsilon_f} \quad , \quad G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f \upsilon_m + G_m \upsilon_f}$$

$$\nu_{12} = \nu_f \upsilon_f + \nu_m \upsilon_m \ , \ G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \ , \ G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \qquad \textbf{(2.1)}$$

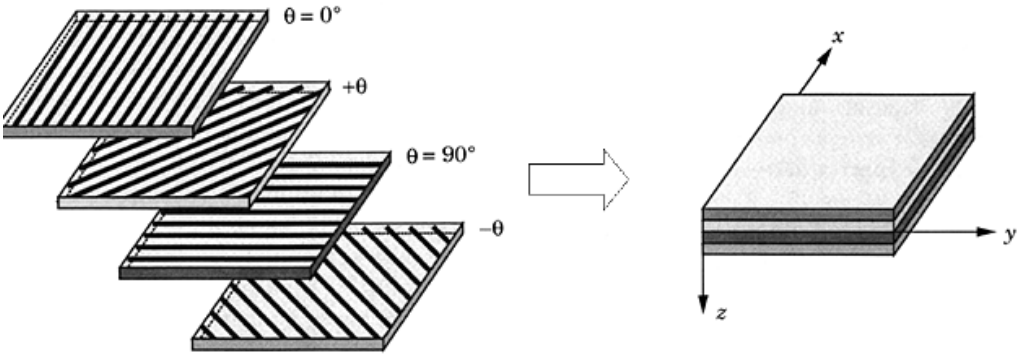
bağıntılarıyla bulunur [23].

2.4 Katman ve Katmanlı Kompozit Malzemeler

Lif takviyeli bir katman, dolgu malzemesine gömülmüş birçok liften oluşur. Bu lifler metal, metal olmayan veya polimer malzemelerden olabilir. Katmana genellikle lifler ve dolgu malzemesi arasındaki yapışmayı arttıran kimyasallar eklenir. Lifler sürekli, süreksiz, çok yönlü, iki yönlü veya gelişigüzel dağılmış olabilir.

Lifler ile güçlendirilmiş katmanlar, birçok mühendislik uygulaması için önemlidir. Hafif yapıda yüksek mukavemet sağlamasının yanı sıra, liflerin açıları ve/veya katman sayısının değiştirilebilmesi ile uygun yapısal özellikler oluşturmaya imkân vermesi en önemli avantajlarındandır [20].

Katmanlı yapılar ise, istenilen katılık ve kalınlığa ulaşmak için katmanların istiflenmesi ile elde edilir. Katmanlar genellikle, katmanın kendisinde kullanılan dolgu malzemesiyle birbirlerine yapıştırılır. Katmanlı yapının her bir katmanındaki liflerin yönelimi, yapının katılık ve mukavemetini gereken koşullara uyduracak şekilde yerleştirilebilir [23].



Şekil 2.4 : Katman ve katmanlı yapılar [23]

Gelişmiş lif takviyeli kompozit malzemelerden elde edilen katmanlı plaklar, yüksek performans gerektiren yapısal bileşenlerde geniş kullanım alanına sahiptir [24].

2.4.1 İsimlendirme

Katmanlı kompozit yapılarda, her bir katmanın yerleşim açısı, yapıyı tanımlamak için gerekli olup katmanların yerleşim açıları bir notasyona göre isimlendirilerek yapı belirlenir. Bir katmanın lif yönü x-ekseniyle çakışarak yerleşim açısı 0° kabul edilecek şekilde yerleştirildikten sonra, diğer katmanlar buna göre yerleştirilebilir. Saat yönü (+), saatin tersi yön ise (-) açıyı belirtir. Açılar virgüllerle ayrılarak köşeli parantez içinde listelenir.

Katmanlı yapıda tüm katmanların açıları belirtildiğinde parantezin dışına *toplam* katmanı belirten *T* indisi gelir:

$[0, +45, -45, 90, +30, -30]_T$

Eğer katmanlı yapı orta düzlemine göre simetrikse, orta düzleme kadar olan açılar listelenerek *simetri*yi belirten *S* indisi konulur:

$[0, +45, -45, 90, 90, -45, +45, 0]_T \rightarrow [0, +45, -45, 90]_S$

Eğer yapıda iki ya da daha fazla katman art arda aynı açıyla yerleştirilmişse, ortak açı değerine sahip katman sayısı, açının alt indisi olarak eklenerek gruplanır:

$[0, 90, 90, 90, 90, 0]_T \rightarrow [0, 90_4, 0]_T$

$[0, 90_4, 0]_T$ dizilimi de simetrik olduğu için $[0, 90_2]_S$ olarak yazılabilir.

Simetrik katmanlı yapının katman sayısı tekse, yapının orta düzlemi ortadaki katmanı ikiye böler, bölünen katmanın açısının üstüne bir çizgi konularak belirtilir:

$[0,90,90,90,0]_T \rightarrow [0,90,\overline{90}]_S$

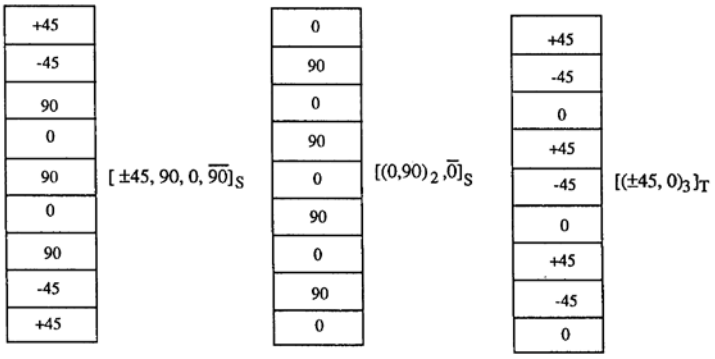
Eğer bir dizi açılı yerleşim tekrarlanıyorsa bunlar da parantez içine alınarak gruplanabilir:

$[0,90,0,90,0,90,0,90]_S \rightarrow [(0,90)_4]_S$

Bir açının (+) ve (-) değerleri yan yana diziliyse,

$[0,+45,-45,90,+30,-30]_T \rightarrow [0,\pm 45,90,\pm 30]_T$

şeklinde ifade edilir. Şekil 2.5'te farklı katman dizilimlerine sahip yapıların isimlendirilmesi ve katman dizilimleri verilmiştir [25].



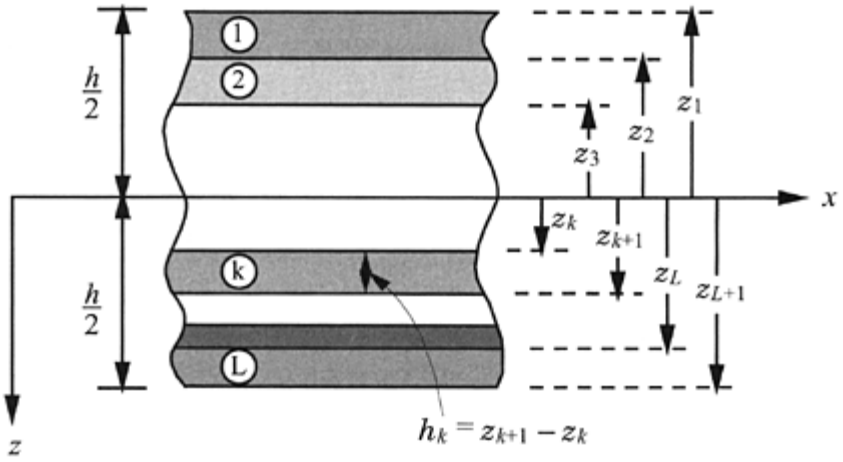
Şekil 2.5 : Katmanlı yapıların isimlendirilmesi [25]

2.4.2 Katmanların koordinatları

Lifli katmanlar ortotropik yapılardır. Liflerin doğrultusu yönü x_1, katman düzlemi içinde lif doğrultusuna dik yön x_2 ve katman düzlemine dik yön x_3 alınarak katmanın koordinatları belirlenir [23].

Katmanlı yapının mekanik davranışlarının belirlenmesi için her bir katmanın malzeme özelliğinin etkisi alınmalıdır. Bunun için katmanların yerleşim açılarının yanında katmanların yapı içindeki konumu da bilinmelidir. Şekil 2.6'da n katmanlı bir yapının katmanlarının koordinatları görülmektedir. Yapının toplam kalınlığı h olmak üzere, 1. katman –z ekseni yönünde, yapının alt yüzeyinden başlamakta ve n. katman +z yönünde, yapının üst yüzeyini oluşturmaktadır. 1. katmanın alt ve üst yüzeylerinin koordinatı, orta düzlem orijin kabul edilerek sırasıyla z_1 ve z_2'dir. Bu durumda sabit ve aynı kalınlıktaki katmanlar için katman kalınlığı $h_k = z_{k+1} - z_k$ 'dır

[23]. k. ve k+1. katmanların aynı tabaka olup yapının geometrik orta düzlemi tarafından ikiye ayrıldığına dikkat edilmelidir [25].



Şekil 2.6 : Katmanlı yapının koordinatları [23]

2.4.3 Katmanlar için kabuller

Lif takviyeli katmanlı kompozit malzemelerin mühendislik sabitlerinin bulunması aşağıdaki kabullere dayanarak hesaplanır [23].

- Lifler ve dolgu malzemesi arasında mükemmel yapışma mevcuttur.
- Lifler birbirine paralel ve düzgün dağılıdır.
- Matris içinde mikro çatlak ve boşluk yoktur. Malzeme başlangıçta gerilme taşımaz.
- Lifler ve dolgu malzemesi izotropik ve Hooke kanununa uygundur.
- Uygulanan yükler lif yönüne paralel veya diktir.

Bu kabuller altında lif takviyeli katmanlı kompozitlerin çeşitli yükler altında davranışları incelenebilir.

2.4.4 Katman bünye denklemleri

İzotermal koşullar altındaki bir anizotropik malzeme genelleştirilmiş Hooke yasasına göre Denklem (2.2)'i sağlar [23].

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad \textbf{(2.2a)}$$

Burada kartezyen koordinat sistemine göre σ_i ve ε_j, gerilme ve birim uzama bileşenleri, C_{ij} malzeme katsayılarıdır.

En genel halde bir malzemenin 21 bağımsız elastik sabiti vardır. Bölüm 2.3'te belirtilen kabuller altında 3 düzleme göre malzeme simetrisine sahip olan ortotropik malzemelerde sabit sayısı 9'a iner. Bu katsayılar en az dört test ile deneysel olarak belirlenir. Ortotropik malzemelerde birim uzama ve gerilme bağıntıları aşağıdaki gibidir [23]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.2b)}$$

$$\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\} \qquad \textbf{(2.2c)}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.3a)}$$

$$\{\varepsilon\}=[S]\{\sigma\} \qquad \textbf{(2.3b)}$$

Katmanın Denklem (2.2) ve (2.3)'teki gerilme ve birim uzamaların koordinatları malzemenin asal koordinatlarıyla çakışır. Fakat kompozit katmanlı bir yapıda farklı yönelimlerde dizilmiş birçok katman olduğundan, gerilme ve birim uzama bağıntılarını bir koordinat sisteminden diğerine çevirecek dönüşüm bağıntılarına ihtiyaç vardır. (x, y, z) katmanlı yapının koordinatları, (x_1, y_2, z_3) katmanın yerel koordinatları olmak üzere (Şekil 2.4), x_1 ekseni, x ekseninden saatin tersi yönde $+\theta$ açısında yerleşmiş ise, *g* ve *l* alt indisleri global ve lokal koordinatları belirtmek üzere, bu katman için gerilme ve birim uzama dönüşüm bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.4a)}$$

$$\{\sigma_g\}=[T]\{\sigma_l\} \quad \textbf{(2.4b)}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5a)}$$

$$\{\sigma_l\}=[R]\{\sigma_g\} \quad \textbf{(2.5b)}$$

Benzer şekilde birim uzamalar için bir dönüşüm bağıntısı aranırsa,

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ 2\varepsilon_{yz}\\ 2\varepsilon_{xz}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.6a)}$$

$$\{\varepsilon_g\}=\left[R^T\right]\{\varepsilon_l\} \quad \textbf{(2.6b)}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ 2\varepsilon_{yz}\\ 2\varepsilon_{xz}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{bmatrix} \quad \textbf{(2.7a)}$$

$$\{\varepsilon_l\}=\left[T^T\right]\{\varepsilon_g\} \quad \textbf{(2.7b)}$$

bağıntıları elde edilir.

Global x-eksenine $+\theta$ ile yerleştirilmiş bir katmanın genelleştirilmiş bünye denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\{\sigma_g\} = [T]\{\sigma_l\} = [T][C_l]\{\varepsilon_l\} = [T][C_l][T^T]\{\varepsilon_g\} = [\bar{C}]\{\varepsilon_g\} \quad \textbf{(2.8a)}$$

$$[\bar{C}] = [T][C_l][T^T] \quad \textbf{(2.8b)}$$

Ters bağıntı da benzer şekilde yazılabilir:

$$\{\varepsilon_g\} = [R^T]\{\varepsilon_l\} = [R^T][S_l]\{\sigma_l\} = [R^T][S_l][R]\{\sigma_g\} = [\bar{S}]\{\sigma_g\} \quad \textbf{(2.9a)}$$

$$[\bar{S}] = [R^T][S_l][R] \quad \textbf{(2.9b)}$$

Bölüm 2.4.3'teki kabuller altında, piezoelektrik özelliğe sahip, katmanlı yapıdaki k. ortotropik katman için termoelastik bünye denklemleri

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix}\varepsilon_1 - \alpha_1\Delta T\\ \varepsilon_2 - \alpha_2\Delta T\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & e_{13}\\ 0 & 0 & e_{32}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{Bmatrix}^{(k)} \quad \textbf{(2.10a)}$$

olup buradaki terimler,

$\{\sigma\}^{(k)}$:gerilme vektörü

$\left[Q\right]^{(k)}$:düzlem gerilme indirgenmiş katılık matrisi

$\left[e\right]^{(k)}$: piezoelektrik modül matrisi

$\{E\}^{(k)}$:elektrik alan vektörü

$\alpha_{1,2}$: $x_{1,2}$ yönlerinde ısıl genleşme katsayıları

ΔT : sıcaklık artımı

k. katman için Q_{ij} katsayıları, malzemenin mühendislik sabitlerinden aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$Q_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{12}=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}=\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{66}=G_{12} \qquad \textbf{(2.10b)}$$

Katmanlı yapıdaki her bir katman farklı yönelimlerde dizildiği için, her bir katmanın bünye denklemleri, yapının koordinatlarına çevrilmelidir. Denklem (2.10)'da gerilme, birim uzama ve elektrik alan vektörleri katmanlı yapı koordinatlarına dönüştürülürse genel halde k. katmanın bünye denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}^{(k)}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha_{xx}\\ \alpha_{yy}\\ 2\alpha_{xy}\end{Bmatrix}\Delta T\right)-\begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{13}\\ 0 & 0 & \bar{e}_{32}\\ 0 & 0 & \bar{e}_{36}\end{bmatrix}^{(k)}\begin{Bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{Bmatrix}^{(k)} \qquad \textbf{(2.11a)}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta+2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{22}\sin^4\theta\\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta+2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{22}\cos^4\theta\\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta\\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.11b)}$$

Dönüştürülmüş ısıl genleşme katsayıları $\alpha_{xx},\alpha_{yy},\alpha_{xy}$ ile dönüştürülmüş piezoelektrik modülü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\alpha_{xx} &= \alpha_1\cos^2\theta+\alpha_2\sin^2\theta & e_{31} &= e_{31}\cos^2\theta+e_{32}\sin^2\theta\\
\alpha_{yy} &= \alpha_1\sin^2\theta+\alpha_2\cos^2\theta & e_{32} &= e_{31}\sin^2\theta+e_{32}\cos^2\theta\\
2\alpha_{xy} &= 2(\alpha_1-\alpha_2)\sin\theta\cos\theta & e_{36} &= (e_{31}-e_{32})\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.11c)}$$

2.5 Klasik Katmanlı Plak Teorisi

2.5.1 Kabuller

Klasik katmanlı plak teorisi, Kirchoff hipotezinin katmanlı yapılar için genişletilmiş bir bölümüdür. Kirchoff ince plak teorisi için yapılan kabuller şunlardır [23,26]:

- Plak başlangıçta düzdür.

- Orta düzlemdeki yer değiştirmenin dik bileşeni, plak kalınlığına göre küçüktür.
- Deformasyon öncesi plak orta düzlemine dik doğrusal çizgiler, deformasyondan sonra da dikliğini korur.
- Orta düzleme dik doğrusal çizgilerde deformasyon sonrası uzama yoktur.
- Orta düzleme dik doğrusal çizgiler, deformasyondan sonra orta düzleme yine dik olacak şekilde döner.

Klasik katmanlı plak teorisinin kabulleri ise aşağıdaki gibidir:

- Her bir katman arasında mükemmel yapışma mevcuttur.
- Malzemeler lineer elastik ve ortotropiktir.
- Her katmanın kalınlığı sabit ve aynıdır.
- Birim uzama ve şekil değiştirmeler küçüktür.
- Katmanlı yapının alt ve üst yüzeylerinde enlemesine kayma gerilmesi sıfırdır.
- Düzlem gerilme hali: Katman kalınlıkları küçük olduğundan, yapı düzlem gerilmeye maruz kalır. $(\sigma_{33},\sigma_{13},\sigma_{23})$ gerilme bileşenleri, $(\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{22})$ bileşenlerine göre yeteri kadar küçük olduğundan ihmal edilir. Enlemesine birim uzama bileşenleri $(\varepsilon_{33},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23})$ sıfırdır.

2.5.2 Katmanlı Yapı Bünye Denklemleri

Her katmanı malzeme simetri eksenlerine göre ortotropik ve Hooke yasasına uyan, piezoelektrik ve ısıl etkilerin olmadığı varsayılan bir katmanlı yapı için, yapının koordinat sisteminde kuvvet ve moment bileşkeleri ile birim uzamalar arasındaki bağıntı Denklem (2.12) ile bulunur [23]:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{1} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{1} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{1} \end{Bmatrix} dz \qquad \textbf{(2.12)}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{1} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{1} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{1} \end{Bmatrix} z dz$$

(2.13)

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} : düzlem içi kuvvet bileşkeleri

M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} : moment bileşkeleri

A_{ij} : Uzama katılık katsayıları

D_{ij} : Eğilme katılık katsayıları

B_{ij} : Eğilme-uzama etkileşim katılık katsayıları

olmak üzere, bu katsayılar katman katılık katsayıları $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ cinsinden ifade edilebilir:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \qquad \textbf{(2.14)}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \qquad \textbf{(2.15)}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \qquad \textbf{(2.16)}$$

3. PİEZOELEKTRİK

3.1 Piezoelektrik malzemeler

Akıllı malzemeler, çevresel değişikliklere kendiliğinden cevap verecek şekilde adapte olan malzemelerdir. Yaygın olarak kullanılan akıllı malzemeler arasında; elektrik alana maruz kaldığında deforme olan *elektrostriktif malzemeler*, manyetik alana maruz kaldığında şekil değiştiren *magnetostriktif* malzemeler, elektrik alana maruz kaldığında akışkan özelliği değişen *electrorhelogical* sıvılar, manyetik alana maruz kaldığında akışkan özelliği değişen *magnetorhelogical* sıvılar, *şekil hafızalı* alaşımlar ve *piezoelektrik* malzemeler sayılabilir [27].

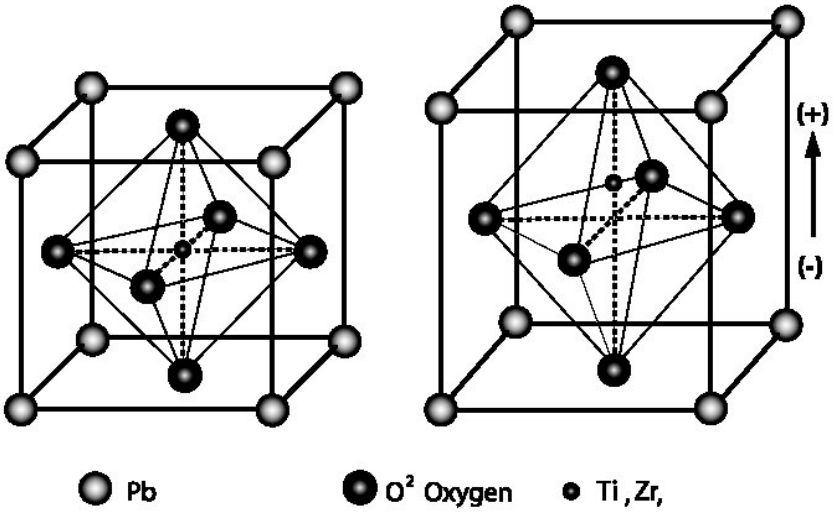
Pizeoelektrik malzemeler, mekanik enerjiyi elektrik enerjisine çevirme özelliğine sahiptir [28]. Piezoelektrik özellik ters yönde de mevcuttur, bu sayede elektrik enerjisi de mekanik enerjiye çevrilir. Piezoelektrik kristaller mekanik gerilmeye maruz bırakıldığında kutuplaşır (polarize olur). Bu kutuplanma *direk piezoelektrik etki*dir. Benzer şekilde *ters piezoelektrik etki*, elektrik alana maruz kalan kristallerin mekanik yer değiştirme oluşturmasıdır. Malzemeye kendi boyunca doğru akım gerilimi indüklenmesiyle malzeme kutuplanır. Bu kutuplanma sırasında malzemenin kutup elektrotları arasındaki boyutları kalıcı olarak artar, elektrotlara paralel olan boyutları ise azalır. Bu bağlantı, piezoelektrik malzemelerin, elektrik alana maruz kaldığında şekil değiştirmesine sebep olur (eyleyici özelliği). Benzer şekilde piezoelektrik malzemeler, elektrik alan değişimini ölçerek mekanik gerilmeyi algılar (algılayıcı özelliği) [27]. Piezoelektrik malzemelerin bu özellikleri, bu malzemelerin algılayıcı ve eyleyici olarak kullanımını sağlar [29]. Günümüzde en sık kullanılan piezoelektrik malzemelerin başında Kurşun Zirkonat Titanat Piezoseramik (PZT, Piezoceramic of Lead Zirconate Titanate) ile Poliviniliden Florid Piezopolimer (PVDF, Piezopolymers of Polyvinylidene Fluorids) gelmektedir.

Piezoelektrik malzemelerin kullanımını mühendislik uygulamalarında yaygınlaştıran birçok avantajı mevcuttur. Piezoelektrik malzemeler, lineer davranış sergiler. Bu özellikleri sebebiyle, dinamik problemlerde avantaj sağlar. Sıcaklık hassasiyetinin

düşük olması sebebiyle, kontrol sistemi tasarımları için önem kazanmıştır. Piezoelektrik kaplamaların hem direk, hem de ters piezoelektrik etki özellikleri, bunların başka bir sisteme ihtiyaç kalmaksızın algılayıcı ve eyleyici olarak kullanımlarına olanak sağlar. Günümüzde karmaşık geometrilere uygun, yüzeye yapıştırılabilen ince örtüler halinde piezoelektrik malzemeler mevcuttur. Piezoelektrik malzemelerin kullanımı, yukarıda birkaçına değinilen avantajlarıyla birçok alana yayılmıştır. Günümüzde piezoelektrik teknolojisinin kullanıldığı başlıca uygulamalar arasında, otomobil hava yastığı, algılayıcı, mikrofon, Mikro-Elektro-Mekanik Sistemler sayılabilir. Ayrıca piezoelektrik malzemeler, katmanlı kompozit yapılarda şekil kontrolü, dalga üreteci, çatlak tespiti gibi uygulamalarda, akıllı malzemeler olarak kullanılmaktadır [27].

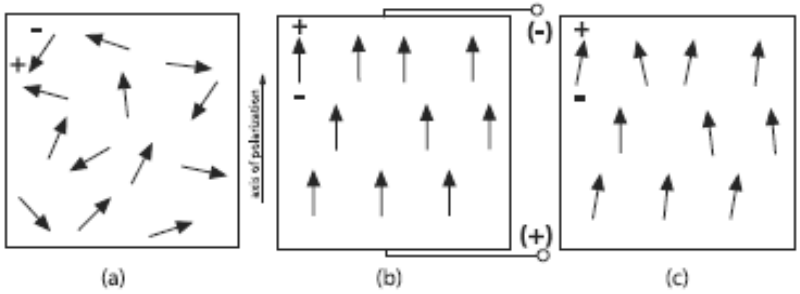
3.2 Piezoelektrik Etki

Curie sıcaklığı denilen bir sıcaklık değerinin üstünde piezoelektrik seramik malzemelerin kristalleri kutup çifti (dipol) momenti olmaksızın basit kübik simetri gösterir. Ancak kristaller Curie sıcaklığının altında tetragonal simetriye sahiptir ve buna bağlı olarak bir kutup çifti momenti vardır. Her bir kristalin yan yana gelen kutup çiftleri bir "etki alanı" oluşturur ve bu alanlar net bir kutup çifti momenti ve buna bağlı olarak net bir kutuplanma oluşturur [16]. Şekil 3.1'de, piezoelektrik seramik elemanın kutuplaşma öncesi ve sonrası kristal yapısı görülmektedir.



Şekil 3.1 : Piezoelektrik elemanın kristal yapısı [16]

Fakat elemanların kutuplaşması gelişigüzel dağılım gösterdiği için seramik elemanda Şekil 3.2-a'daki gibi, toplamda bir kutuplaşma görülmez. Seramik eleman yüksek bir doğru akım elektrik alanına maruz bırakıldığında, eleman içindeki etki alanları Şekil 3.2-b'deki gibi, elektrik alanı yönünde dizilir, böylece eleman elektrik alanı yönünde genişler. Elektrik alanı kaldırıldığında birçok kutup çifti dizilimlerini korur ve Şekil 3.2-c'de görüldüğü gibi kalıcı kutuplaşmaya sahip olur. Elemanın boyundaki uzama mikrometre mertebesindedir.

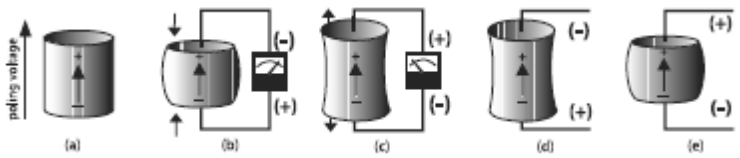


Şekil 3.2 : Piezoelektrik seramik malzemede kutuplanma [16]

Bir elemana etkiyen mekanik baskı veya çekme, o elemana ait kutup çifti momentini değiştirir ve bu sayede voltaj oluşur. Kutuplaşma yönünde baskı veya kutuplaşmaya dik yönde çekme, kutuplanma voltajıyla eşdeğer bir kutupsallık oluşturur. Kutuplanma yönündeki çekme veya bu yöne dik basma ise kutuplanma voltajının ters yönünde kutuplanan bir voltaj üretir. Böylece piezoelektrik eleman çekme ve basmadan kaynaklanan mekanik enerjiyi elektrik enerjisine çevirir. Bu modda çalıştığında piezoelektrik malzemeler algılayıcı olarak kullanılır.

Basınç kuvveti ve piezoelektrik seramik eleman tarafından bu basınç kuvvetine bağlı olarak elde edilen voltaj lineer orantılıdır. Bu ilişki tersinirdir, uygulanan voltaj ve elde edilen birim uzamalar için de geçerlidir.

Şekil 3.3'te, kutuplanmış bir piezoelektrik elemana çeşitli yönlerde uygulanan elektrik alanları altında elemanın cevabı görülmektedir. Seramik elemana kutuplanma voltajı değerinde ve yönünde uygulanan bir kutupsallık doğru akım voltajı elemanın uzamasına ve çapının azalmasına sebep olur. Eğer kutuplanma voltajına ters yönde bir kutupsallık voltajı uygulanırsa elemanın boyunda kısalma ve çapında artış gözlenir. Bu modda çalıştığında piezoelektrik eleman elektrik enerjisini mekanik enerjiye çevirmektedir, bu durumda eyleyici olarak kullanılır. Alternatif akım altında ise elemanın boyu periyodik olarak uzayıp kısalacaktır.



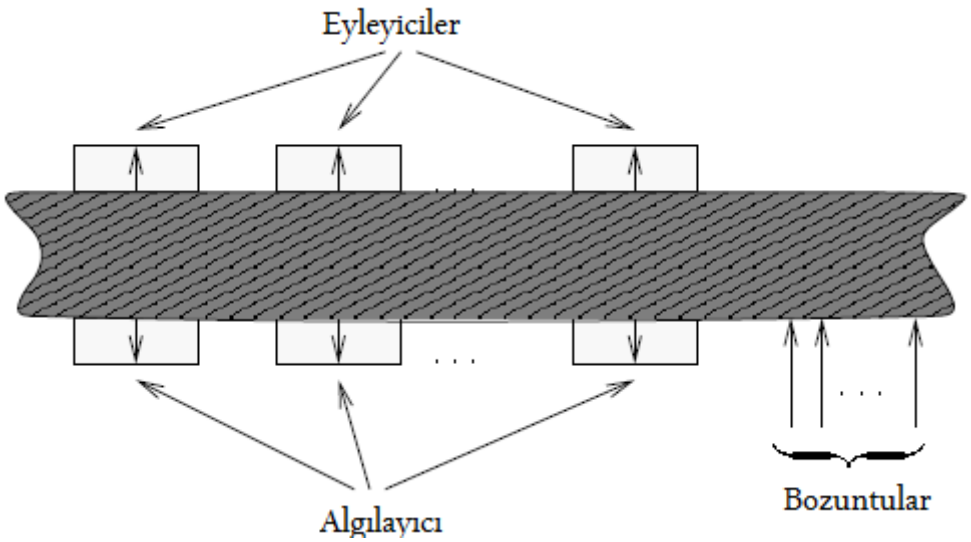
Şekil 3.3 : Piezoelektrik elemanın elektrik alanında davranışı [16]

3.3 Piezoelektrik Algılayıcı ve Eyleyiciler

Piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici sistemleri, aktif titreşim sönümlemesi ve şekil kontrolü için hızla, akıllı yapı ve sistemlerin tasarımında gerekli bir araç halini almaktadır. Piezoelektrik algılayıcılar, direk piezoelektrik etki ile voltaj üretme yeteneğine sahiptir. Titreşim cevabı olarak ortaya çıkan bu voltaj işlenip genişletilerek bir geri besleme giriş değeri ile eyleyiciye uygulanır. Eyleyici de, ters piezoelektrik etki ile bir kontrol kuvveti oluşturur. Uygun kontrol kuvveti yardımıyla yapının titreşiminde yeterli sönümleme sağlanır [30].

Aktif titreşim kontrolü uygulamalarında piezoelektrik elemanlar çoğunlukla algılayıcı ve eyleyici olarak kullanılırlar. Piezoelektrik parçalar algılayıcı ve eyleyici çiftleri halinde eş zamanlı çalışabildiği gibi kendi kendine algılamalı eyleyici sistemler de mevcuttur. Kendi kendine algılamalı eyleyici sistemlerde bir piezoelektrik dönüştürücü, hem algılayıcı hem de eyleyici olarak görev yapar. Geri besleme döngüsü içinde yer alan algılayıcı, kendisi içinde oluşan voltajı kestirerek şekil değiştirir. Voltaj ile mekanik uzama orantılı olduğundan kestirilen sinyal de geri besleme için anlamlı bir ölçüm sağlar.

Piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici sistemleri bir yapıda sıralı halde de bulunabilir. Şekil 3.4'te bir kiriş üzerine yapıştırılmış sıralı eyleyici ve algılayıcı sistemleri görülmektedir.



Şekil 3.4 : Sıralı piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici sistemi [16]

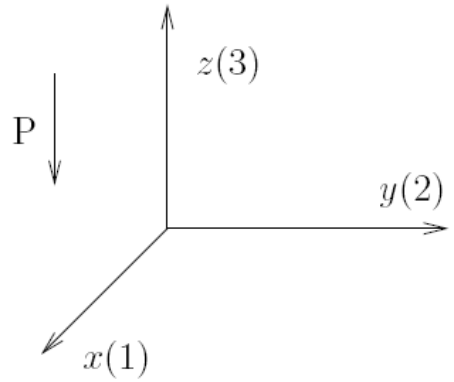
Piezoelektrik algılayıcılar, birim uzama ölçerlerle karşılaştırıldığında küçük birim uzamaların ölçülmesinde daha uygundur. Az yer kaplamaları, kullanıma hazır olarak bulunması, kolay yapıştırılabilirliği ve gerekli devrelerin makul sinyal koşullarına sahip olması, piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici sistemleri diğer sistemlere göre avantajlı kılar.

3.4 Piezoelektrik Bünye Denklemleri

Piezoelektrik malzemelerin lineer sınırlar içinde kaldığı kabulüne göre, piezoelektrik dönüştürücüler düşük elektrik alanında ve düşük mekanik gerilmeler altındadır [16].

Piezoelektrik bünye denklemleri elektromekanik özelliği tanımlar. Dönüştürücüdeki toplam birim uzamanın, mekanik gerilme sebebiyle oluşan mekanik birim uzama ile uygulanan voltaj sebebiyle oluşan eyleyicideki birim uzamanın toplamına eşit olması kabulüne dayanır [16].

Piezoelektrik etki, $\vec{P}$ kutuplaşma vektörü ile tanımlanır. $\vec{P}$, birim hacimdeki elektrik momenti veya birim alandaki kutuplaşma yüküdür [23]. Şekil 3.5'te koordinat isimlendirmesi, kutuplaşma vektörü ve bünye denklemlerinde kullanılan indis açıklamaları görülmektedir:



indis no.	eksen
1	x
2	y
3	z
4	x ekseni etrafında kayma
5	y ekseni etrafında kayma
6	z ekseni etrafında kayma

Şekil 3.5 : Piezoelektrik eleman koordinatları ve indisler [16]

Lineer piezoelektrik malzemenin elektromekanik denklemleri şu şekilde yazılabilir [16]:

$$\varepsilon_i = S_{ij}^E \sigma_j + d_{mi} E_m \qquad i, j : 1,2,...6 \qquad \textbf{(3.1a)}$$

$$D_m = d_{mi} \sigma_i + \xi_{ik}^\sigma E_k \qquad m, k : 1,2,3 \qquad \textbf{(3.1b)}$$

Denklem (3.1) ve (3.2) algılama uygulamalarında sıklıkla kullanılan aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\varepsilon_i = S_{ij}^D \sigma_j + g_{mi} D_m \qquad \textbf{(3.2a)}$$

$$E_i = g_{mi} \sigma_i + \beta_{ik}^\sigma D_k \qquad \textbf{(3.2b)}$$

σ : gerilme vektörü (N/m^2)

ε : birim uzama vektörü (m/m)

E : uygulanan elektrik alan vektörü (V/m)

ξ : elektriksel geçirgenlik (F/m)

d : piezoelektrik birim uzama sabitleri matrisi (m/V)

S : uyumluluk katsayıları matrisi (m^2/N)

D : elektrik yer değiştirme vektörü (C/m^2)

g : piezoelektrik sabitler matrisi (m^2/C)

β : elektriksel geçirmezlik (m/F)

olup, D, E ve σ üst indisleri ölçümlerin sırasıyla sabit elektrik deplasmanı, sabit elektrik alanı ve sabit gerilme altında yapıldığını belirtir.

Denklem (3.1) ve (3.2) açık halde yazılırsa:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36}\\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46}\\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56}\\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_{11} & d_{21} & d_{31}\\ d_{12} & d_{22} & d_{32}\\ d_{13} & d_{23} & d_{33}\\ d_{14} & d_{24} & d_{34}\\ d_{15} & d_{25} & d_{35}\\ d_{16} & d_{26} & d_{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_{11}^{\sigma} & e_{12}^{\sigma} & e_{13}^{\sigma}\\ e_{21}^{\sigma} & e_{22}^{\sigma} & e_{23}^{\sigma}\\ e_{31}^{\sigma} & e_{32}^{\sigma} & e_{33}^{\sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Piezoelektrik malzeme enlemesine izotropik ve kutuplanma yönü x_3 ekseni kabul edilirse birçok katsayı sıfırlanır veya birbiri cinsinden ifade edilebilir. Denklem (3.3) ve (3.4)'te sıfır olmayan uyumluluk katsayıları, piezoelektrik birim uzama sabitleri ve yalıtkanlık sabitleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}&S_{11}=S_{22}\\ &S_{13}=S_{31}=S_{23}=S_{32}\\ &S_{12}=S_{21}\\ &S_{44}=S_{55}\\ &S_{66}=2(S_{11}-S_{12})\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&d_{31}=d_{32}\\ &d_{15}=d_{24}\end{aligned} \qquad e_{11}^{\sigma}=e_{22}^{\sigma}=e_{33}^{\sigma} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Bu durumda (3.3) ve (3.4) denklemleri şu hale indirgenir:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & d_{31}\\ 0 & 0 & d_{31}\\ 0 & 0 & d_{33}\\ 0 & d_{15} & 0\\ d_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.6)}$$

$$\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0\\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_{11}^{\sigma} & 0 & 0\\ 0 & e_{22}^{\sigma} & 0\\ 0 & 0 & e_{33}^{\sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Denklem (3.6)'daki eyleyici matrisi, PZT malzemeler içindir. PVDF filmlerde indüklenmiş birim uzama film yüzeyinde anizotropik olduğundan kutuplaşma vektörü yönünde uygulanan elektrik alanı 1 ve 2. eksenlerde farklı birim uzamalar oluşturur. Bu sebeple PVDF eyleyiciler için eyleyici matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & d_{31}\\ 0 & 0 & d_{32}\\ 0 & 0 & d_{33}\\ 0 & d_{25} & 0\\ d_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.8)}$$

Piezoelektrik birim uzama sabitleri d_{ij}, uygulanan elektrik alanın elde edilen serbest birim uzamalara oranıdır. i, j alt indisleri, elektrik alanın i yönünde uygulandığını ve j yönünde yer değiştirme veya kuvvet elde edildiğini ifade eder.

g_{ij} piezoelektrik sabitler, malzeme j ekseni boyunca gerilmeye uğradığında i ekseni boyunca elde edilen elektrik alanı belirtir.

S_{ij} uyumluluk katsayıları, diğer iki eksende gerilme değişmediği halde i yönündeki birim uzamanın j yönündeki gerilmeye oranıdır.

e_{ij} yalıtkanlık katsayıları, j ekseninde uygulanan elektrik alan sebebiyle i ekseninde birim alanda oluşan yükü belirtir.

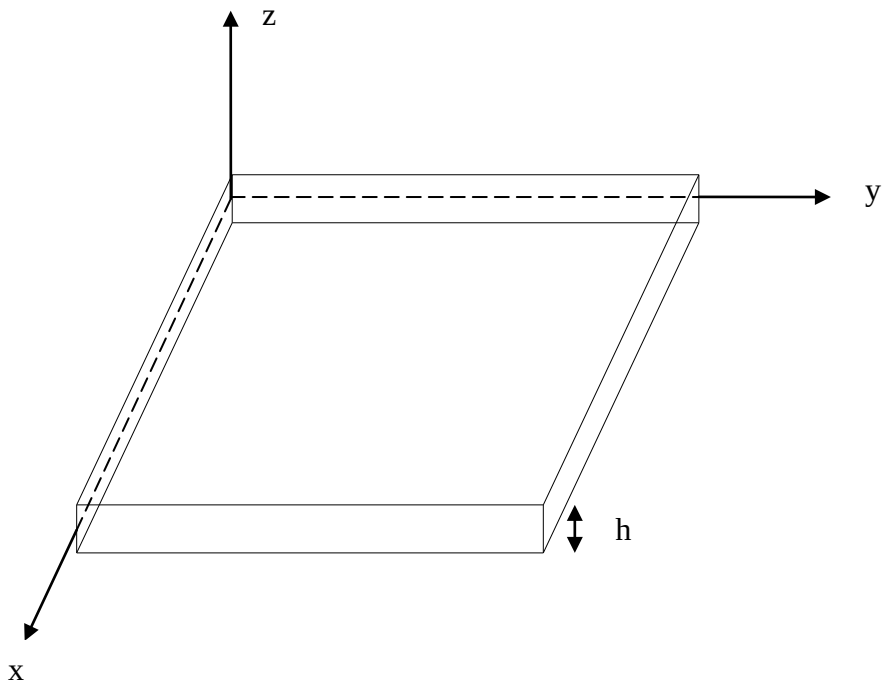
4. PİEZOELEKTRİK YAMALI PLAĞIN TEORİK MODELLENMESİ

Bu bölümde, alt ve üst yüzeyine piezoelektrik polimer yamalar yapıştırılmış dikdörtgen plağın dinamik davranışı teorik olarak incelenmiştir. Plak alt ve üst yüzeyindeki PVDF yamalar, titreşim kontrolü için algılayıcı ve eyleyici bir sistem oluşturmaktadır. Deplasman ve hız geri beslemeli kontrol algoritmaları oluşturularak sistemin kararlı haldeki cevabı incelenmiştir. Teorik analiz için geçerli kabuller şunlardır:

- Plak hareketi enlemesine eğilme salınımlarına bağlıdır, düzlem içi membran salınımları ihmal edilmiştir.
- Düzlem içi dönme piezoelektrik sabiti ihmal edilmiştir; $M_{xy}^{a} = 0$
- Piezoelektrik yama kalınlıkları, plak kalınlığına göre küçüktür, piezoelektrik katmanların kalınlık etkisi ihmal edilmiştir.
- Piezoelektrik yamalar ile plak yüzeyleri arasında mükemmel yapışma olup, yapıştırıcının fiziksel özellikleri ihmal edilmiştir.

4.1 Plak Doğal Frekansları ve Mod Şekilleri

Bir sistem, başlangıç bozuntusu verildikten sonra serbest titreşime bırakılırsa, dış kuvvetler olmaksızın doğal frekansında salınım yapar. Şekil 4.1'deki gibi x, y, z kartezyen koordinatlarındaki bir plağın doğal frekansı, yer değiştirme denklemi yardımıyla bulunur.

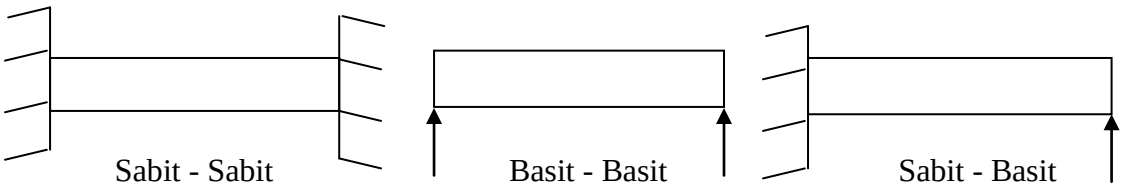


Şekil 4.1 : Kartezyen koordinatlarda plak yapı

4.1.1 Farklı sınır koşullarında mod şekil fonksiyonları ve mod şekilleri

Dikdörtgen plaklarda modal şekil fonksiyonları, kirişlerin aynı sınır koşullarındaki şekil değiştirme fonksiyonlarının çarpımı olarak Denklem (4.1)'deki gibi ifade edilebilir. Bu yöntem, plakta serbest kenarlar hariç tüm sınır koşullarını tam olarak sağlar [31].

$$U_{3mn}(x,y) = X(x).Y(y) \qquad \textbf{(4.1)}$$



Şekil 4.2 : Kiriş sınır koşulları

Kiriş yer değiştirmesi sadece enlemesine yönde alınırsa, Şekil 4.2'de verilen kirişlerin genel sınır koşulları için Rao'nun [32] önerdiği frekans denklemleri ile normal mod fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

a kiriş uzunluğu ve γ_i kiriş doğal frekansları olmak üzere;

Basit mesnet – Basit mesnet:

$$\sin \gamma_m = 0 \qquad \textbf{(4.2a)}$$

$$U_{3m}(x) = \sin \frac{\gamma_m x}{a} \qquad \textbf{(4.2b)}$$

Sabit mesnet – Sabit mesnet:

$$\cos \gamma_m \cosh \gamma_m = 1 \qquad \textbf{(4.3a)}$$

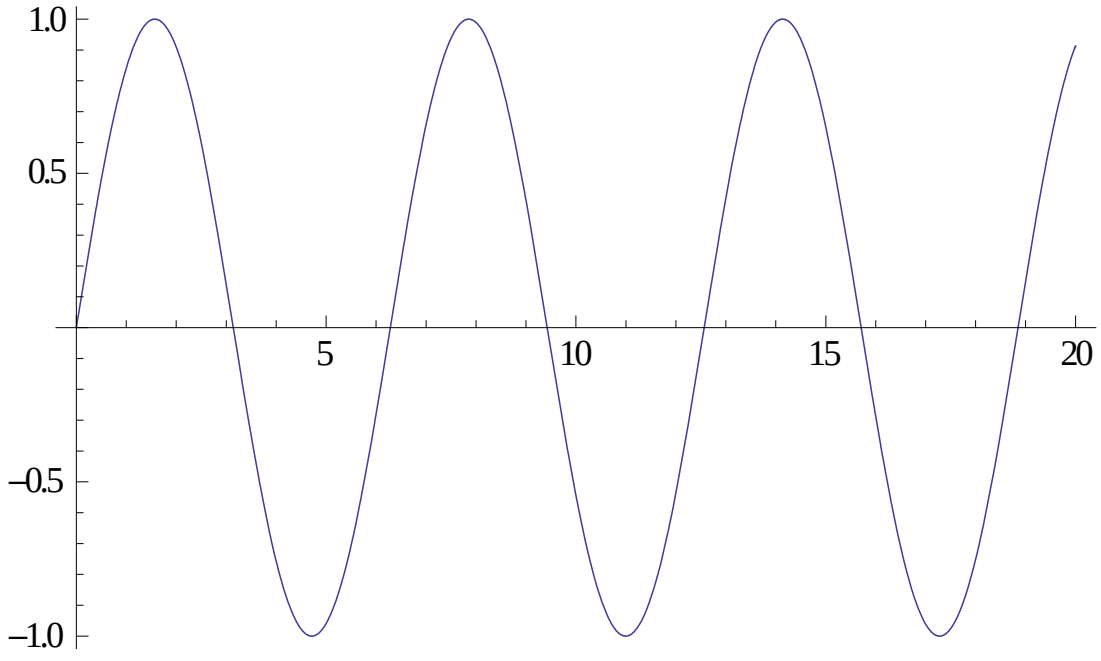
$$U_{3m}(x) = \sinh \frac{\gamma_m x}{a} - \sin \frac{\gamma_m x}{a} + (\frac{\sinh \gamma_m - \sin \gamma_m}{\cos \gamma_m - \cosh \gamma_m})(\cosh \frac{\gamma_m x}{a} + \cos \frac{\gamma_m x}{a}) \qquad \textbf{(4.3b)}$$

Sabit mesnet – Basit Mesnet:

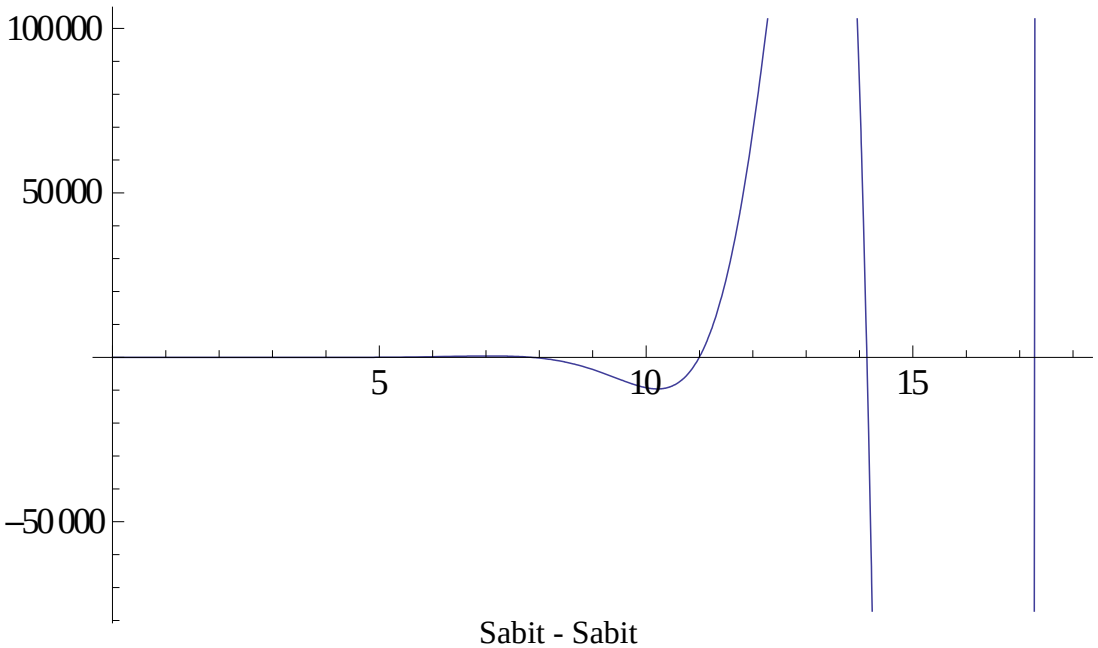
$$\tan \gamma_m - \tanh \gamma_m = 0 \qquad \textbf{(4.4a)}$$

$$U_{3m}(x) = \sin \frac{\gamma_m x}{a} - \sinh \frac{\gamma_m x}{a} + (\frac{\sin \gamma_m - \sinh \gamma_m}{\cos \gamma_m - \cosh \gamma_m})(\cosh \frac{\gamma_m x}{a} - \cos \frac{\gamma_m x}{a}) \qquad \textbf{(4.4b)}$$

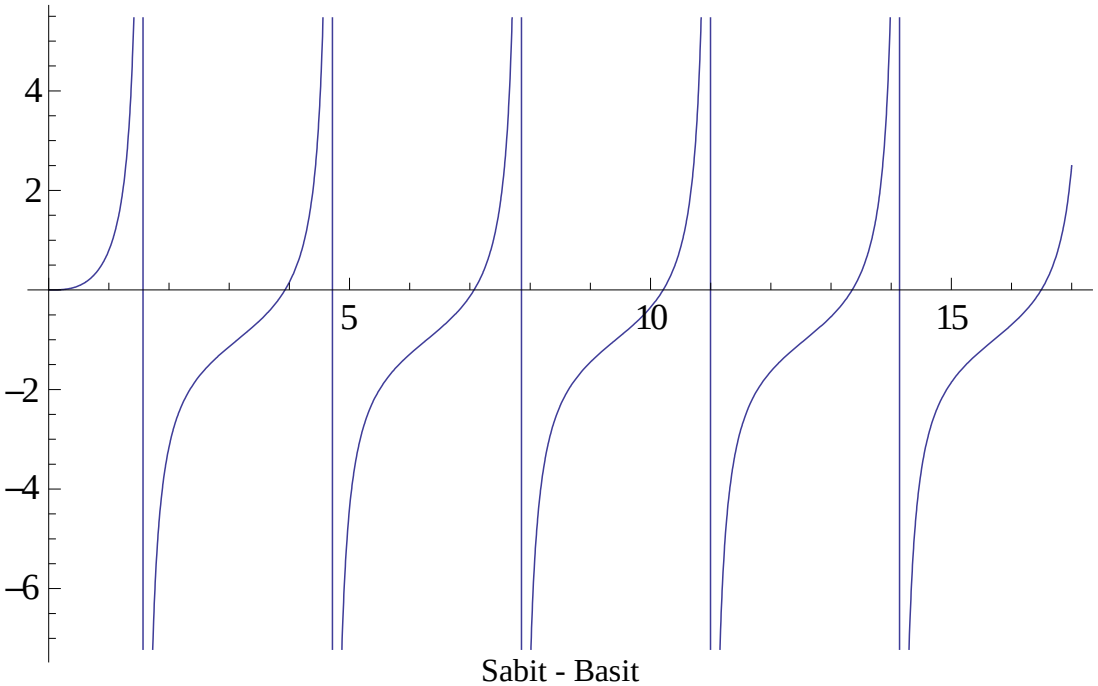
a=1 olmak üzere, kiriş frekans grafikleri Şekil 4.3'te görülmektedir. Çizelge 4.1'de kiriş doğal frekansları ilk üç mod için hesaplanmıştır.



Basit - Basit



Sabit - Sabit



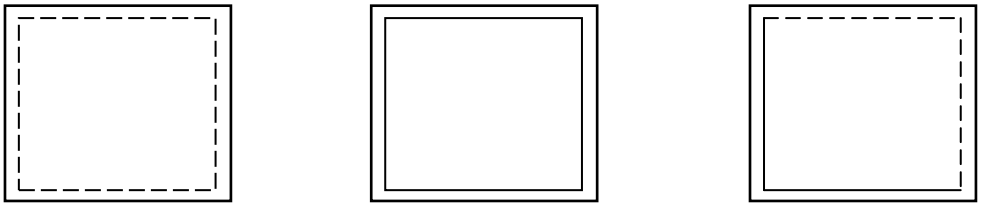
Sabit - Basit

Şekil 4.3 : Kiriş frekans grafikleri

Çizelge 4.1 : Farklı sınır koşullarında kirişlerin doğal frekansı

γ_m	Basit-Basit	Sabit-Sabit	Sabit-Basit
1	π	4.73004	3.9266
2	2π	7.8532	7.0686
3	3π	10.9956	10.2102
4	4π	14.1372	13.3518

Şekil 4.4'te, Şekil 4.2'deki sınır koşullarında verilen kiriş modal şekil fonksiyonlarının çarpım yöntemi ile plakta elde edilen sınır koşulları görülmektedir.



Şekil 4.4 : Plak sınır koşulları

Normal mod şekli fonksiyonlarını çarpımı yöntemi ile plak, x ve y eksenlerinde tanımlı iki kiriş fonksiyonunun çarpımı olarak ifade edilir. Çarpım yöntemi Denklem (4.2, 4.3, 4.4)'te kiriş için önerilen normal mod şekli fonksiyonlarına uygulanırsa bu sınır koşullarındaki plak mod şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

Basit mesnetli plak:

$$U_{3mn}(x,y) = \sin\frac{\gamma_m x}{a}\sin\frac{\gamma_n y}{b} \tag{4.5}$$

Sabit mesnetli plak:

$$U_{3mn}(x,y) = (\sinh\frac{\gamma_m x}{a} - \sin\frac{\gamma_m x}{a} + (\frac{\sinh\gamma_m - \sin\gamma_m}{\cos\gamma_m - \cosh\gamma_m})(\cosh\frac{\gamma_m x}{a} + \cos\frac{\gamma_m x}{a}))$$
$$(\sinh\frac{\gamma_n y}{b} - \sin\frac{\gamma_n y}{b} + (\frac{\sinh\gamma_m - \sin\gamma_m}{\cos\gamma_m - \cosh\gamma_m})(\cosh\frac{\gamma_m y}{b} + \cos\frac{\gamma_m y}{b})) \tag{4.6}$$

Sabit-Basit mesnetli plak:

$$U_{3mn}(x,y) = (\sin\frac{\gamma_m x}{a} - \sinh\frac{\gamma_m x}{a} + (\frac{\sin\gamma_m - \sinh\gamma_m}{\cos\gamma_m - \cosh\gamma_m})(\cosh\frac{\gamma_m x}{a} - \cos\frac{\gamma_m x}{a}))$$
$$(\sin\frac{\gamma_n y}{b} - \sinh\frac{\gamma_n y}{b} + (\frac{\sin\gamma_m - \sinh\gamma_m}{\cos\gamma_m - \cosh\gamma_m})(\cosh\frac{\gamma_m y}{b} - \cos\frac{\gamma_m y}{b})) \tag{4.7}$$

4.1.2 Plak doğal frekansı

İnce elastik kabuk ve plakların hareket denklemleri etkileşimsiz enlemesine titreşim durumunda üç asal eksende hareketten (u_1, u_2, u_3) yalnızca enlemesine harekete (u_3) indirgenir [31]. İnce plaklarda serbest titreşimi tanımlayan temel diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir [26]:

$$D\left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4}\right)+\rho h\ddot{u}_3=0 \qquad \textbf{(4.8)}$$

u_3 : enlemesine yer değiştirme

D :eğilme rijitliği $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

ρ : plak yoğunluğu

h : plak kalınlığı

u_3 zamana ve koordinata bağlı iki fonksiyonun çarpımının seri toplamı cinsinden yazılabilir:

$$u_3(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{mn}(t)U_{3mn}(x,y) \qquad \textbf{(4.9)}$$

$u_3(x,y,t)$: t anında tüm mod şekillerinin etkisinin toplamı, gerçek yer değiştirme

$U_{3mn}(x,y)$: mod şekil fonksiyonu

$\eta_m(t)$: modal katılım faktörü, genlik

Denklem (4.9), sistemin genel denklemi Denklem (4.8)'de yerine konulursa;

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[D\eta_{mn}\left(\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial y^4}\right)+\rho h\ddot{\eta}_{mn}U_{3mn}\right]=0 \qquad \textbf{(4.10)}$$

Denklem (4.10), doğal frekansların modal ortogonelliği kullanılarak çözülebilir. Eşitlik $U_{3m'n'}$ fonksiyonu ile çarpılıp plak alanı üzerinde integre edilirse, sistemin hareket denklemi genel halde Denklem (4.12)'deki gibi elde edilir:

$$\frac{D}{\rho h}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\eta_{mn}\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial y^4}\right)U_{3m'n'}dxdy+\ddot{\eta}_{mn}U_{3mn}U_{3m'n'}\right]=0 \qquad \textbf{(4.11a)}$$

$$\eta_{mn}\underbrace{\frac{D}{\rho h N_k}\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial y^4}\right)U_{3mn}dxdy}_{\omega_{mn}^2}+\ddot{\eta}_{mn}=0 \qquad \textbf{(4.11b)}$$

$$\ddot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2 \eta_{mn} = 0 \qquad \textbf{(4.12)}$$

ω_{mn} doğal frekans olup genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h N_k} \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial y^4}\right) U_{3mn} dxdy \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$N_k = \int_y \int_x U_{3mn} U_{3mn} dxdy \qquad \textbf{(4.14)}$$

Denklem (4.14), N_k katsayısının genel ifadesi olup farklı plak sınır koşulları için uygun seçilen mod şekil fonksiyonları için ayrı ayrı bulunur.

Basit mesnetli a x b plakta modal şekil fonksiyonu ve N_k aşağıdaki gibidir:

$$U_{3mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$N_k = \int_0^b \int_0^a U_{3mn}^2 dxdy = \frac{ab}{4} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Yukarıdaki ifadeler plak doğal frekansının genel ifadesine uygulanırsa, basit mesnetli *a x b* plak için *mn*. doğal frekans Denklem (4.17)'deki gibi elde edilir.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D\pi^4}{\rho h}\left((\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2\right)^2 \qquad \textbf{(4.17)}$$

Sabit mesnetli a x b plak için modal şekil fonksiyonu

$$U_{3mn}(x, y) = (\cos\frac{2\pi mx}{a} - 1)(\cos\frac{2\pi ny}{b} - 1) \qquad \textbf{(4.18)}$$

$$N_k = \int_0^b \int_0^a U_{3mn}^2 dxdy = \frac{9}{4} ab \qquad \textbf{(4.19)}$$

olmak üzere a x b sabit mesnetli plağın *mn*. doğal frekansı;

$$\omega_{mn}^2 = \frac{4D}{9\rho hab}(12\frac{b}{a^3} m^4\pi^4 + \frac{4}{ab} m^2 n^2 \pi^4 + 12\frac{a}{b^3} n^4 \pi^4) \qquad \textbf{(4.20)}$$

olarak elde edilir.

Plaklar için elde edilen mod şekil fonksiyonları kullanılarak çeşitli sınır koşullarındaki plakların doğal frekansları hesaplanmıştır. *mn=1,1* için doğal frekans sonuçları ve literatür ile karşılaştırma Çizelge 4.2'de verilmiştir:

Çizelge 4.2 : Çeşitli sınır koşullarında plak doğal frekansları

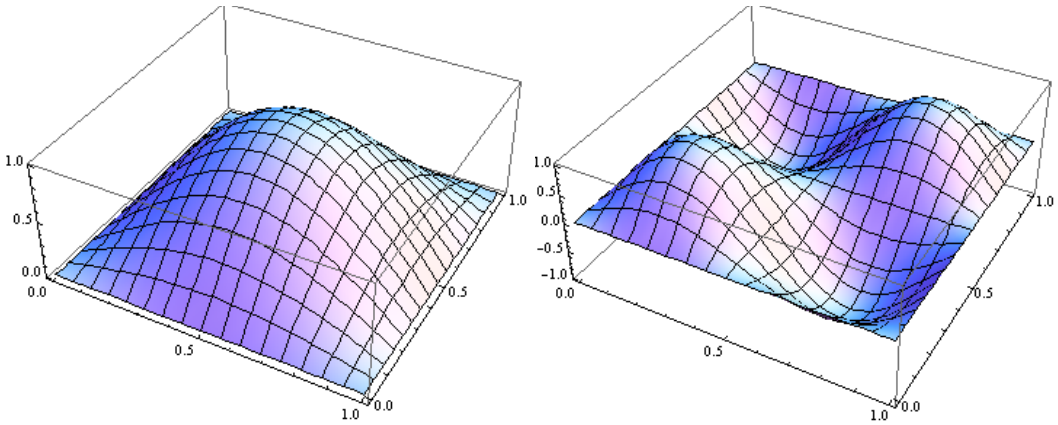
	Çalışma	[31]
Sınır Koşulları	$\omega_{11}(x\sqrt{\frac{D}{a^4\rho h}})$	$\omega_{11}(x\sqrt{\frac{D}{a^4\rho h}})$
Basit – Basit	19.7392	19.7392
Sabit – Sabit	36.1087	37.2206
Sabit – Basit	27.2125	28.3311

Ayrıca, serilerin varyasyonunu kullanarak kare plak için yaklaşık çözümler elde eden Bolotin'in sabit mesnetli plak sonuçları ile Çizelge 4.3'te karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.3 : Sabit mesnetli plak doğal frekansları

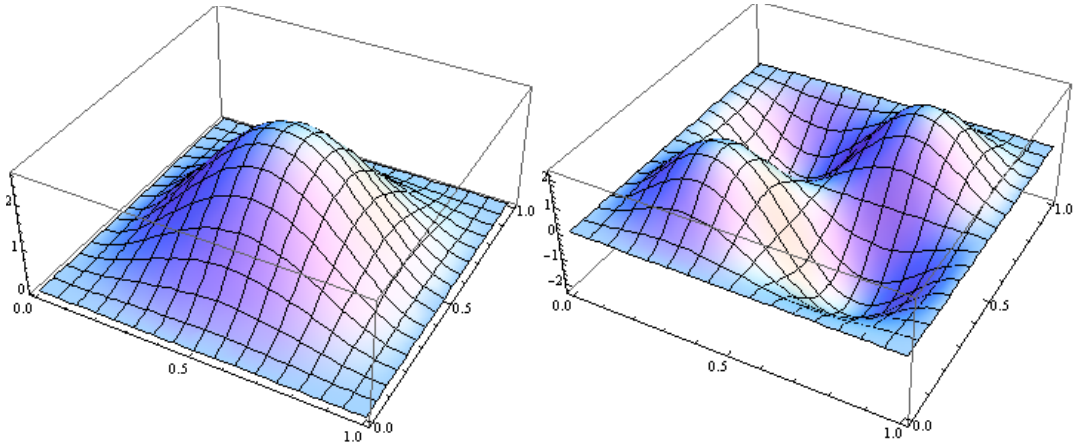
		Çalışma	[31]
m	n	$\omega_{11}(x\sqrt{\frac{D}{a^4\rho h}})$	$\omega_{11}(x\sqrt{\frac{D}{a^4\rho h}})$
1	1	36.1087	35.10
2	1	73.7372	72.90
2	2	108.85	107.47
3	1	132.483	131.63
3	2	165.923	164.39

Farklı sınır koşullarındaki plak mod şekilleri Şekil 4.5'de verilmiştir.



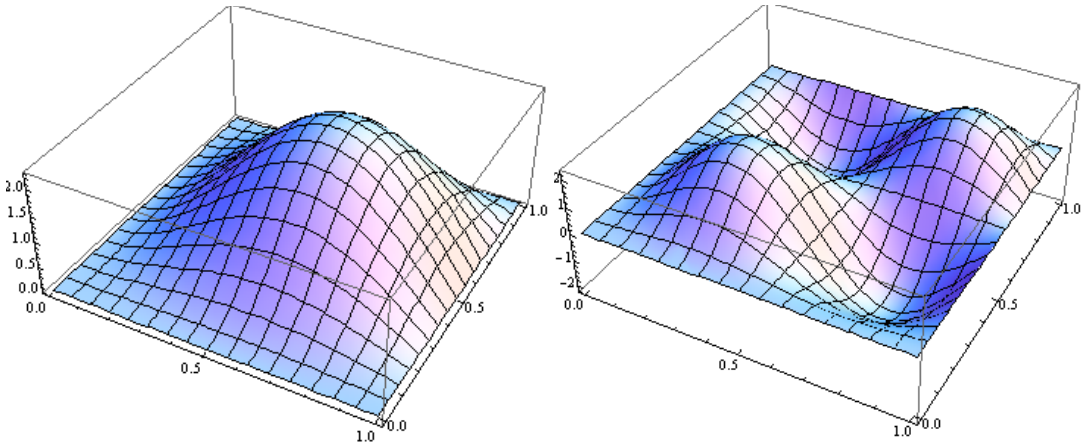
Basit-Basit

Mod (1,1) *Mod (2,2)*



Sabit-Sabit

Mod (1,1) *Mod (2,2)*



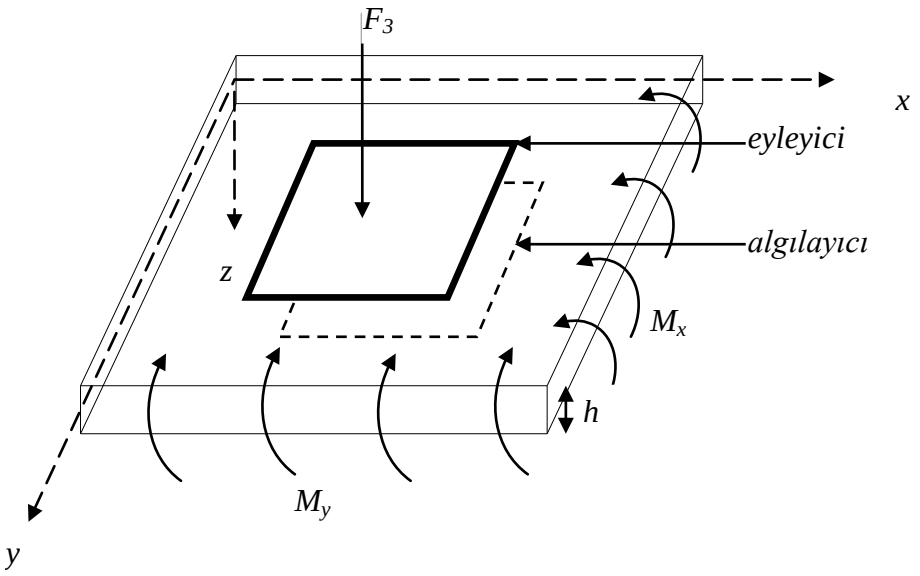
Sabit-Basit

Mod (1,1) *Mod (2,2)*

Şekil 4.5 : Plak mod şekilleri

4.2 Yayılı Algılayıcı ve Eyleyiciye Sahip Plak Modeli

İnce plakta enlemesine titreşim durumunda, alt ve üst yüzeylerinde yayılı algılayıcı ve eyleyicilere sahip izotropik, homojen bir plak Şekil 4.6'daki gibi olup, sistem denklemi ve bileşenleri Denklem (4.21)'deki gibidir [33]:



Şekil 4.6 : Piezoelektrik yamalı plak

$$D\left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4}\right)+\rho h\ddot{u}_3+c\dot{u}_3=F_3+\frac{\partial^2 M_{xx}^a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}^a}{\partial y^2} \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$M_{xx}^a=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_m(t)r_1^a d_{31}E_p\varsigma\phi_{mn}^s \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$M_{yy}^a=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_m(t)r_2^a d_{32}E_p\varsigma\phi_{mn}^s \qquad \textbf{(4.23)}$$

$\eta_m(t)$: genlik

c : viskoz sönümleme katsayısı

F_3 : mekanik uyartı

M_{xx}^a, M_{yy}^a : yayılı kontrol momentleri

r_i^a : moment kolu, plak tarafsız ekseninden piezoelektrik eyleyici tarafsız eksenine uzaklık $r_i^a = \dfrac{h + h^a}{2}$

h^a : eyleyici katman kalınlığı

d_{31}, d_{32} : piezoelektrik sabitler

E_p : piezoelektrik elastisite modülü

ς : geri besleme kazancı

ϕ_{mn}^s : *mn*. modda algılayıcıdan elde edilen çıkış sinyali, geri besleme voltajı

$\overline{\phi}_{mn}^s$: ortalama algılayıcı çıkış sinyali

$$\phi_{mn}^s = -h^s (h_{31} r_1^s \frac{\partial^2 U_{3mn}}{\partial x^2} + h_{32} r_2^s \frac{\partial^2 U_{3mn}}{\partial y^2}) \qquad \textbf{(4.24)}$$

$$\overline{\phi}_{mn}^s = -\frac{h^s}{A^s} \int_{A^s} \phi_{mn}^s dA^s \qquad \textbf{(4.25)}$$

r_i^s : moment kolu, plak tarafsız ekseninden piezoelektrik algılayıcı tarafsız eksenine uzaklık $r_i^s = \dfrac{h + h^s}{2}$

h^s : algılayıcı katman kalınlığı

A^s : etkin algılayıcı alanı

Enlemesine yer değiştirme u_3 Denklem (4.9)'daki gibi ifade edilirse,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (D\eta_{mn} (\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial y^4}) + \rho h \ddot{\eta}_{mn} U_{3mn} + c\dot{\eta}_{mn} U_{3mn}) = F_3 + \frac{\partial^2 M_{xx}^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^a}{\partial y^2} \qquad \textbf{(4.26)}$$

ifadesi elde edilir. Denklem (4.26), ortogonellik prensibi ile çözülürse, sistemin hareket denklemi genel halde Denklem (4.28)'deki gibi elde edilir:

$$\eta_{mn}\underbrace{\frac{D}{\rho h N_k}\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 U_{3mn}}{\partial y^4}\right)U_{3mn}dxdy}_{\omega_{mn}^2}+\ddot{\eta}_{mn}+\frac{c}{\rho h}\dot{\eta}_{mn}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho h N_k}\int_0^b\int_0^a F_3 U_{3mn}dxdy}_{\hat{F}_k}+\frac{1}{\rho h N_k}\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^2 M_{xx}^a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}^a}{\partial y^2}\right)U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.27)}$$

$$\ddot{\eta}_{mn}+\frac{c}{\rho h}\dot{\eta}_{mn}+\omega_{mn}^2\eta_{mn}=\hat{F}_k+\frac{1}{\rho h N_k}\int_0^b\int_0^a\left(\frac{\partial^2 M_{xx}^a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}^a}{\partial y^2}\right)U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.28)}$$

Modal sönümleme oranı ξ_{mn} ile $\hat{F}_k$ aşağıdaki gibi olmak üzere,

$$\xi_{mn}=\frac{c}{2\rho h\omega_{mn}} \qquad \textbf{(4.29)}$$

$$\hat{F}_k=\frac{1}{\rho h N_k}\int_0^b\int_0^a F_3 U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.30)}$$

sistemin genel denklemi son halde aşağıdaki gibidir:

$$\ddot{\eta}_{mn}+2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn}+\omega_{mn}^2\eta_{mn}=\hat{F}_k+\frac{1}{\rho h N_k}\int_0^y\int_0^x\left(\frac{\partial^2 M_{xx}^a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}^a}{\partial y^2}\right)U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.31)}$$

Modal sönümleme oranı deneysel olarak bulunur.

4.3 Titreşim Kontrolü

Plak titreşim denklemindeki kontrol etkisi, yayılı eğilme kontrol momentleri ile sağlanır. Kontrol momentleri, $M_{xx}^a=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{mn}(t)M_{xmn}$ ve $M_{yy}^a=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{mn}(t)M_{ymn}$ ve birim modal kontrol momentleri

$$M_{xmn}=r_1^a d_{31}E_p\varsigma\phi_{mn}^s \qquad \textbf{(4.32)}$$

$$M_{ymn}=r_2^a d_{32}E_p\varsigma\phi_{mn}^s \qquad \textbf{(4.33)}$$

olmak üzere yayılı eğilme kontrol momentlerinin Denklem (4.22-23) ifadeleri sistemin denklemine konulursa,

$$\ddot{\eta}_{mn} + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = \hat{F}_k + \frac{\eta_{mn}}{\rho h N_k}\int_0^y\int_0^x(\frac{\partial^2 M_{xmn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{ymn}}{\partial y^2})U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.34)}$$

elde edilir. *mn.* moddaki kontrol etkisini ifade eden terim *modal geri besleme faktörü,* $\hat{M}_{mn}$ olarak isimlendirilir.

$$\hat{M}_{mn} = \frac{1}{\rho h N_k}\int_0^y\int_0^x(\frac{\partial^2 M_{xmn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{ymn}}{\partial y^2})U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.35)}$$

4.3.1 Deplasman geri beslemeli kontrol

Modal geri besleme faktörü $\hat{M}_{mn}$, deplasman geri beslemeli kontrolde sistemin denkleminde $\eta_{mn}(t)$ teriminin katsayısı olarak sol tarafa geçer. *mn*. terim dışında kalan kontrol momenti bileşenleri ise Denklem(4.36)'daki gibi ifade edilir:

$$\hat{T}_k = \frac{1}{\rho h N_k}\sum_{\substack{p=1\\p\neq m}}^{\infty}\sum_{\substack{q=1\\q\neq n}}^{\infty}\eta_{pq}\int_0^y\int_0^x(\frac{\partial^2 M_{xpq}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{ypq}}{\partial y^2})U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.36)}$$

$\hat{T}_k$ ifadesi, mn. modda etkileşim terimleri ve diğer tüm modlardan gelen artık terimleri ifade etmektedir.

Deplasman geri beslemeli kontrolde sistemin genel denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\ddot{\eta}_{mn} + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + (\omega_{mn}^2 - \hat{M}_{mn})\eta_{mn} = \hat{F}_k + \hat{T}_k \qquad \textbf{(4.37)}$$

Deplasman geri beslemeli kontrolde geri besleme birim uzamayla bağlantılıdır.

4.3.2 Hız geri beslemeli kontrol

Hız geri beslemeli kontrolde $M_{xx}^a = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\eta}_{mn}(t)M_{xmn}$ ve $M_{yy}^a = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{\eta}_{mn}(t)M_{ymn}$ için, $\hat{M}_{mn}$ sistemin denkleminde $\dot{\eta}_{mn}(t)$ katsayısı olarak sol tarafa geçer. Bu halde

sistemin genel denklemi Denklem (4.38)'de verilmiştir. Hız geri beslemeli kontrolde, geri besleme birim zamandaki birim uzama ile bağlantılıdır.

$$\ddot{\eta}_{mn} + (2\xi_{mn}\omega_{mn} - \hat{M}_{mn})\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = \hat{F}_k + \hat{T}_k' \qquad \textbf{(4.38)}$$

$$\hat{T}_k' = \frac{1}{\rho h N_k} \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq m}}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ q\neq n}}^{\infty} \dot{\eta}_{pq} \int_0^y \int_0^x \left(\frac{\partial^2 M_{xpq}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{ypq}}{\partial y^2}\right) U_{3mn}\, dxdy \qquad \textbf{(4.39)}$$

Buraya kadar olan denklemler genel ifadeler olup, farklı sınır koşulları, farklı geometrik konfigürasyonlar için düzenlenebilir.

Deplasman ve hız geri beslemeli kontrollerde elde edilen $\hat{T}_k$ ve $\hat{T}_k'$ ifadeleri, kararlı olmayan salınımlara sebep olduğundan, modal filtreler kullanıldığı kabul edilerek ihmal edilir. Böylece kontrol etkinliği sadece modal geri besleme faktörü $\hat{M}_{mn}$ ile sağlanır.

4.3.3 Geri besleme kazancı

Algılayıcı çıkış sinyalleri, titreşim genliklerinin bir fonksiyonu olan birim uzamalardan elde edilir. Sistemin toplam geri besleme kazancı, algılayıcı sinyali ile geri besleme sinyalinin oranıdır:

$$\varsigma = \frac{\left|\phi^a\right|}{\left|\phi^s\right|} = \frac{\text{geri besleme voltaj genliği}}{\text{algılayıcı sinyal voltaj genliği}} \qquad \textbf{(4.40)}$$

Geri besleme kazancı, algılayıcıdan gelen çıkış sinyalini genişleterek geri beslemeye sokar. Deplasman kontrollü geri besleme için, Denklem (4.40) ifadesi geçerlidir. Fakat hız geri beslemeli kontrolde kazanç sinyal değişiminden kaynaklanan bir titreşim bileşeni ω_{mn}'e sahiptir. Bu durumda hız geri beslemeli kontrolde geri besleme kazancı

$$\varsigma' = \varsigma / \omega_{mn} \qquad \textbf{(4.41)}$$

olarak elde edilir.

4.4 Zamana Bağlı Cevaplar

Plak yer değiştirme fonksiyonu, zamana bağlı modal katılım faktörü ile mod şekil fonksiyonunun çarpımının seri toplamı olarak ifade edilmiştir. Modal katılım faktörü, bir t anında hangi mod şeklinin daha baskın olduğunu belirler. Toplam yer değiştirme ise, katılan tüm modların toplamıdır. Sadece *mn*. mod tutulup, diğer bileşenler ihmal edilirse, *mn*. modal katılım faktörünün genliği , *mn*. modun salınım genliğini gösterir. *mn*. moddaki modal hareket denklemi $m,n=1,2,3,...\infty$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\ddot{\eta}_{mn}+2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn}+\omega_{mn}^{2}\eta_{mn}=0 \qquad \textbf{(4.42)}$$

Bu diferansiyel denklem için $\eta_{mn}(t)=Ae^{st}$ çözümü aranırsa,

$$\eta_{mn}(t)=e^{-\xi_{mn}\omega_{mn}t}(A\cos\gamma_{mn}t+B\sin\gamma_{mn}t) \qquad \textbf{(4.43)}$$

elde edilir.

γ_{mn}: sönümlenmiş doğal frekans, $\gamma_{mn}=\sqrt{1-\xi_{mn}}$

Plak hareketini kesin olarak tanımlamak için başlangıç koşullarına ihtiyaç vardır. $\eta_{mn}(0)$ başlangıç şartı, plağın maksimum modal konuma ulaştığı anda tanımlıdır. Modal uyarı sırasında başlangıç modal hızı sıfırdır. Bundan sonra uyarı kapatılarak plak serbest salınım yapar. O andaki voltaj $\phi^{s}(0)$'dır. Böylece başlangıç koşulları[34],

$$\eta_{mn}(0)=\phi^{s}\Big/\phi_{mn}^{s} \qquad \textbf{(4.44)}$$

$$\dot{\eta}_{mn}(0)=0 \qquad \textbf{(4.45)}$$

olup, modal katılım faktörünün açık ifadesi şu şekildedir:

$$\eta_{mn}(t)=e^{-\xi_{mn}\omega_{mn}}\eta_{mn}(0)(\cos\gamma_{mn}t+\frac{\xi_{mn}\omega_{mn}}{\gamma_{mn}}\sin\gamma_{mn}t) \qquad \textbf{(4.46)}$$

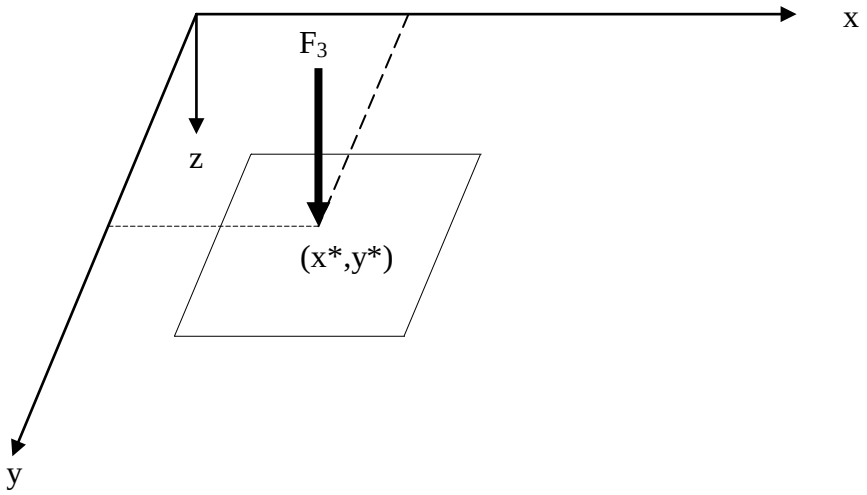
Burada az sönümlenmiş sistemler için modal sönümleme oranı $\xi_{mn} < 1$ kabul edilmiştir.

4.5 Zamandan Bağımsız Cevaplar

Denklem (4.42), herhangi bir dış kuvvet veya uyarı olmadığı durumda plak hareket denklemini verir. Plağa harmonik bir uyarı vermek için elektrik veya mekanik bir harmonik uyarı verilebilir. Harmonik elektrik uyarı, piezoelektrik katmanlara voltaj şeklinde gönderilir. Ancak bu giriş sinyalleri genellikle geri besleme kontrolünde kullanıldığından sisteme mekanik uyartı verilir. Mekanik uyarıcı kuvvet Delta-Dirac fonksiyonları ile şu şekilde ifade edilir:

$$F_3(x,y,t) = P_3\delta(x-x^*)\delta(y-y^*)\sin\omega t \qquad \textbf{(4.47)}$$

P_3 kuvvet genliği olup fonksiyonun belirttiği kuvvet Şekil 4.7'deki gibidir:



Şekil 4.7 : Mekanik uyartı

Denklem (4.47)'te verilen harmonik noktasal uyarı, başka kuvvet olmadığı durumda Denklem (4.31) ifadesinde kullanılırsa, Denklem (4.48) elde edilir.

$$\ddot{\eta}_{mn} + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = \hat{F}_k \qquad \textbf{(4.48)}$$

$$\ddot{\eta}_{mn} + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = \hat{F}_k * \sin\omega t \qquad \textbf{(4.49)}$$

Mekanik harmonik uyarıcı $\hat{F}_k$, Denklem (4.30)'dan, basit mesnetli plak için Denklem (4.15)'te verilen modal şekil fonksiyonu ile aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\hat{F}_k = \frac{P_3}{\rho h N_k} \underbrace{\sin\omega t \sin\frac{m\pi x^*}{a} \sin\frac{n\pi y^*}{b}}_{\hat{F}_k^*} \qquad \textbf{(4.50)}$$

Denklem (4.49)'a $\eta_{mn}(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$ çözümü uygulanarak denklem düzenlenirse,

$$\cos\varphi(-A\omega^2 + A{\omega_{mn}}^2) + 2\xi_{mn}\omega_{mn}A\omega\sin\varphi) = \hat{F}_k^* \qquad \textbf{(4.51)}$$

$$\cos\varphi 2\xi_{mn}\omega_{mn}A\omega + A\sin\varphi(\omega^2 - {\omega_{mn}}^2) = 0 \qquad \textbf{(4.52)}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$A = \frac{\hat{F}_k^*}{{\omega_{mn}}^2\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_{mn}})^2)^2 + 4\xi_{mn}^2\omega^2}} \qquad \textbf{(4.53)}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\xi_{mn}\,\omega/\omega_{mn}}{1-(\omega/\omega_{mn})^2} \qquad \textbf{(4.54)}$$

ve $N_k = ab/4$ olmak üzere, genel bir ω uyarıcı frekansına sahip basit mesnetli *a x b* plakta zamandan bağımsız çözüm Denklem (4.55)'teki gibi elde edilir.

$$\eta_{mn} = \frac{\hat{F}_k^*}{{\omega_{mn}}^2\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_{mn}})^2)^2 + 4\xi_{mn}^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi) \qquad \textbf{(4.55)}$$

$\omega = \omega_{mn}$ için sistemin zamandan bağımsız çözümü ise

$$\eta_{mn}(t) = \frac{2P_3}{\rho hab{\omega_{mn}}^2\xi_{mn}}\sin\frac{m\pi x^*}{a}\sin\frac{n\pi y^*}{b}\sin(\omega_{mn}t - \pi/2) \qquad \textbf{(4.56)}$$

olmaktadır. Genlik, modal sönümleme katsayısı ve frekansın karesi ile ters orantılıdır.

mn. doğal frekansta uygulanan bir noktasal harmonik uyarı, plağın *mn*. modunu uyarır. Sistem sönümlemesi rezonansa karşı koyacak kadar güçlüdür. Doğal frekanstaki harmonik uyarının amacı, yalnızca o modu uyarmak ve her bir mod için ayrı kontrol etkisini elde etmektir [34].

4.6 Katmanlı Kompozit Plak

Her iki yüzeyinde piezoelektrik algılayıcı ve eyleyici yamaları bulunan katmanlı kompozit plağın hareket denklemi Denklem (4.57)'deki gibidir.

$$D_{11}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4}+I_0\ddot{u}_3+c\dot{u}_3 = F_3+\frac{\partial^2 M^a_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M^a_{yy}}{\partial y^2} \qquad \textbf{(4.57)}$$

D_{ij} , Denklem (2.16)'dan elde edilen katılık katsayılarıdır.

I_0 : kütle atalet momenti olmak üzere,

$$I_0=\int_{-h/2}^{h/2}\rho dz=\sum_{k=1}^{L}\rho^k(z_{k+1}-z_k) \qquad \textbf{(4.58)}$$

Denklem (4.57)'de enlemesine yer değiştirme fonksiyonu, Denklem (4.9)'daki gibi alınır. Basit mesnetli plak için mod şekil fonksiyonu (4.15)'tir. Bu ifadeler, Denklem (4.57)'ye uygulanarak ortogonellik prensibi yardımıyla kompozit katmanlı plak hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\ddot{\eta}_{mn}+\frac{c}{I_0}\dot{\eta}_{mn}+\eta_{mn}\frac{\pi^4}{I_0}\left(D_{11}(\frac{m}{a})^4+2\ D_{12}(+2D_{66})(\frac{mn}{ab})^2+D_{22}(\frac{n}{b})^4\right) = \frac{4}{I_0ab}\int_0^b\int_0^a F_3U_{3mn}dxdy+\frac{4}{I_0ab}\int_0^b\int_0^a(\frac{\partial^2 M^a_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M^a_{yy}}{\partial y^2})U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.59)}$$

Katmanlı kompozit plağın mn. doğal frekansı

$$\omega_{mn}^2=\frac{\pi^4}{I_0}\left(D_{11}(\frac{m}{a})^4+2\ D_{12}(+2D_{66})(\frac{mn}{ab})^2+D_{22}(\frac{n}{b})^4\right) \qquad \textbf{(4.60)}$$

olmak üzere sistemin denklemi,

$$\ddot{\eta}_{mn} + 2\xi_{mn}\omega_{mn}\dot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2\eta_{mn} = \hat{F}_k + \frac{1}{I_0 N_k}\int_0^b\int_0^a (\frac{\partial^2 M_{xx}^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^a}{\partial y^2})U_{3mn}dxdy \qquad \textbf{(4.61)}$$

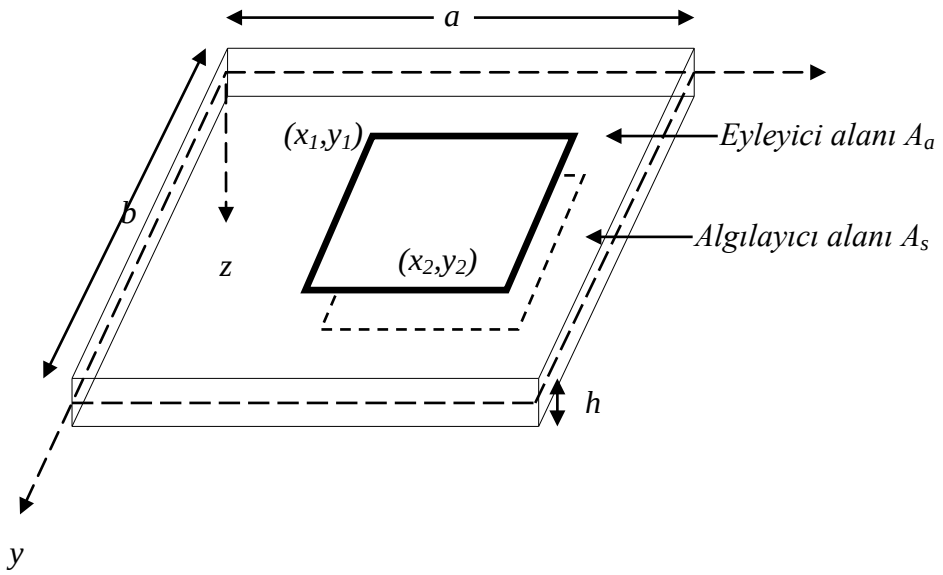
olarak elde edilir.

Denklem (4.61)'de görüldüğü üzere, piezoelektrik yama kontrolünde kompozit katmanlı plak, sistemde sadece doğal frekansı değiştirmektedir.

5. YAMA CEVAPLARININ TEORİK MODELLENMESİ

5.1 Basit Mesnetli Plaklar

Basit mesnetli a x b plak için modal şekil fonksiyonu, Denklem (4.15)'te verilmiştir. Şekil (5.1), üst ve alt yüzeylerinde algılayıcı ve eyleyici yamalar bulunan basit mesnetli a x b plağı göstermektedir.



Şekil 5.1 : Algılayıcı ve eyleyicili basit mesnetli plak

5.1.1 Tek parça piezoelektrik yama

5.1.1.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali

Plakta ortalama algılayıcı çıkış sinyali Denklem (4.25)'te verilmiştir. Şekil 5.1'deki gibi, plak üzerinde herhangi bir $(x_{1,} y_1), (x_2, y_2)$ alanında konumlanmış algılayıcı sinyali, basit mesnetli plakta mod şekil fonksiyonu Denklem (4.15) olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\phi_{mn}^{s} = -\frac{h^s}{A^s}\int_{A^s}(h_{31}r_1^s\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}) + h_{32}r_2^s\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}))dA^s \quad \textbf{(5.1)}$$

$$\phi_{mn}^{s} = \frac{h^s}{A^s}(h_{31}r_1^s(\frac{m\pi}{a})^2 h_{32}r_2^s(\frac{n\pi}{b})^2)\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$
$$= \frac{ab}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}\underbrace{\frac{h^s}{mn}((\frac{m}{a})^2 h_{31}r_1^s + (\frac{n}{b})^2 h_{32}r_2^s)}_{S_{mn}} \quad \textbf{(5.2)}$$
$$\text{x } (\cos\frac{m\pi x_2}{a} - \cos\frac{m\pi x_1}{a})(\cos\frac{n\pi y_2}{b} - \cos\frac{n\pi y_1}{b})$$

$$\phi_{mn}^{s} = S_{mn}(\cos\frac{m\pi x_2}{a} - \cos\frac{m\pi x_1}{a})(\cos\frac{n\pi y_2}{b} - \cos\frac{n\pi y_1}{b}) \quad \textbf{(5.3)}$$

S_{mn} : *mn*. modal hassasiyet,

$$S_{mn} = \frac{h^s}{mn}((\frac{m}{a})^2 h_{31}r_1^s + (\frac{n}{b})^2 h_{32}r_2^s) \quad \textbf{(5.4)}$$

Denklem (5.3), izotropik, basit mesnetli *a x b* dikdörtgen plak üzerinde, plak yüzeyinde $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ konumundaki piezoelektrik algılayıcının çıkış sinyalidir. Bu çıkış sinyali, aktif titreşim kontrolünde geri besleme kazancı ile genişletilerek algılayıcıya gönderilir.

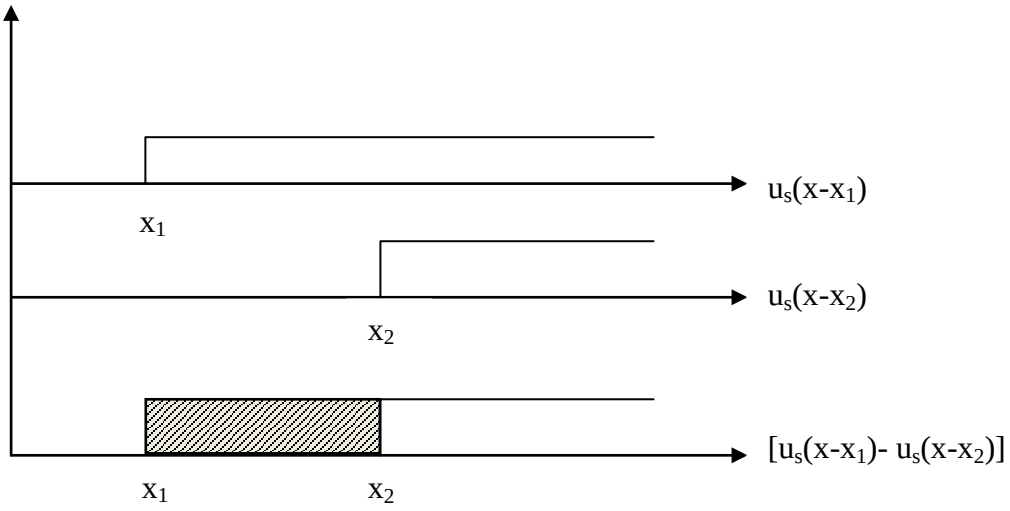
5.1.1.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü

Algılayıcı kaynaklı olarak eyleyiciye gelen geri besleme voltajı, eyleyici üzerinde sabit ve düzgün dağılı olduğundan, Denklem (4.32-33)'te verilen birim modal kontrol momentleri (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) koordinatları eyleyici koordinatları olmak üzere, birim basamak fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir:

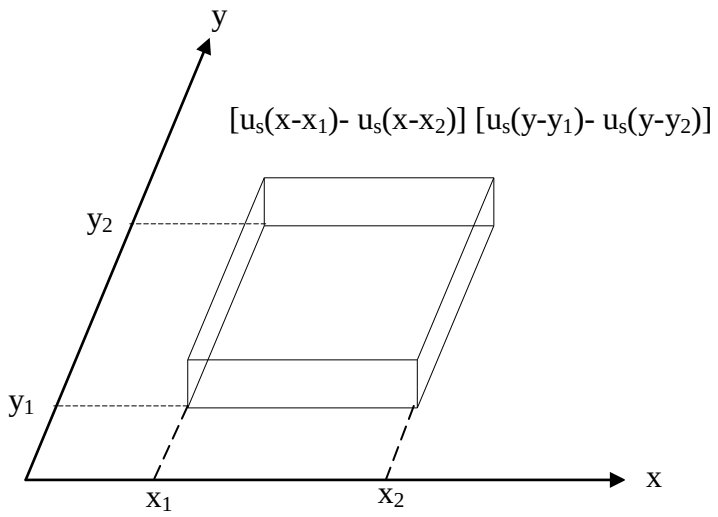
$$M_{xmn}^{*} = M_{xmn}[u_s(x-x_1) - u_s(x-x_2)][u_s(y-y_1) - u_s(y-y_2)] \quad \textbf{(5.5)}$$

$$M_{ymn}^{*} = M_{ymn}[u_s(x-x_1) - u_s(x-x_2)][u_s(y-y_1) - u_s(y-y_2)] \quad \textbf{(5.6)}$$

Denklem (5.7)'de verilen, Şekil 5.2'deki gibi bir birim basamak fonksiyonu, Şekil 5.3'te görülen alanı tanımlar.



Şekil 5.2 : Birim basamak fonksiyonu



Şekil 5.3 : Plakta çarpım birim basamak fonksiyonu

Birim basamak fonksiyonunun türevi Delta-Dirac fonksiyonu olup bu fonksiyonlar ve özellikleri Denklem (5.8-9)'daki gibidir:

$$u_s(x-x_i)=\begin{cases}1; x > x_i\\ 0; x \le x_i\end{cases} \qquad \textbf{(5.7)}$$

$$\frac{d}{dx}(u_s(x-x_i)) = \delta(x-x_i) = \begin{cases} \infty; x = x_i \\ 0; x \neq x_i \end{cases} \quad \textbf{(5.8)}$$

$$\int_0^a \delta(x-x_i) f(x) = f(x_i) \quad \textbf{(5.9)}$$

Denklem (4.35)'te verilen modal geri besleme faktörü ifadesine, basit mesnetli plak için modal şekil fonksiyonu ve Denklem (5.5-6)'daki birim modal kontrol momentleri M^*_{xmn} ve M^*_{ymn} uygulanırsa:

$$\hat{M}_{mn} = \frac{1}{\rho h N_k}\int_0^y \int_0^x \left(\frac{\partial^2}{dx^2}(M_{xmn}[u_s(x-x_1)-u_s(x-x_2)][u_s(y-y_1) - u_s(y-y_2)]) + \frac{\partial^2}{dy^2}(M_{ymn}[u_s(x-x_1)-u_s(x-x_2)] [u_s(y-y_1)-u_s(y-y_2)])\right) \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy$$

$$= \frac{1}{\rho h N_k}\int_0^a \int_0^b (M_{xmn}[u_s(y-y_1)-u_s(y-y_2)]\frac{d}{dx}[\delta(x-x_1) - \delta(x-x_2)]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + M_{ymn}[u_s(x-x_1)-u_s(x-x_2)] \frac{d}{dy}[\delta(y-y_1)-\delta(y-y_2)]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b})dxdy \quad \textbf{(5.10)}$$

İşlem kolaylığı için denklem iki ayrı integrale ayrılarak işlem yapılırsa:

$$I = \frac{1}{\rho h N_k} M_{xmn}\int_0^b \underbrace{[u_s(y-y_1)-u_s(y-y_2)]}_{u_1}\underbrace{\sin\frac{n\pi y}{b}d}_{dv_1}$$

$$\int_0^a \underbrace{\frac{d}{dx}[\delta(x-x_1)-\delta(x-x_2)]}_{dv_2}\underbrace{\sin\frac{m\pi x}{a}d}_{u_2} \quad x$$

$$= ([u_s(y-y_1)-u_s(y-y_2)](-\frac{b}{n\pi})\cos\frac{n\pi y}{b}\Big|_0^b$$

$$-\int_0^b(-\frac{b}{n\pi})\cos\frac{n\pi y}{b}[\delta(y-y_1)-\delta(y-y_2)]d\ ).$$

$$\text{x}(\sin\frac{m\pi x}{a}[\delta(x-x_1)-\delta(x-x_2)]\Big|_0^a$$

$$-\int_0^a[\delta(x-x_1)-\delta(x-x_2)]\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}d\ )x$$

$$= ([u_s(b-y_1)-u_s(b-y_2)](-\frac{b}{n\pi})\cos n\pi -$$

$$[u_s(0-y_1)-u_s(0-y_2)](-\frac{b}{n\pi})-(-\frac{b}{n\pi}) \qquad \textbf{(5.11)}$$

$$(\cos\frac{n\pi y_1}{b}-\cos\frac{n\pi y_2}{b}))\text{x}(\sin m\pi[\delta(a-x_1)-\delta(a-x_2)]$$

$$-\sin 0[\delta(0-x_1)-\delta(0-x_2)]-\frac{m\pi}{a}(\cos\frac{m\pi x_1}{a}-\cos\frac{m\pi x_2}{a}))$$

$$II = \frac{1}{\rho h N_k} M_{ymn} \int_0^a \underbrace{[u_s(x-x_1) - u_s(x-x_2)]}_{u_1} \underbrace{\sin\frac{m\pi x}{a}}_{dv_1} d \quad x$$

$$\int_0^b \underbrace{\frac{d}{dy}[\delta(y-y_1) - \delta(y-y_2)]}_{dv_2} \underbrace{\sin\frac{n\pi y}{b}}_{u_2} d \quad y$$

$$= \frac{1}{\rho h N_k} M_{ymn} ([u_s(x-x_1) - u_s(x-x_2)](-\frac{a}{m\pi})\cos\frac{m\pi x}{a}\Big|_0^a$$

$$- \int_0^a (-\frac{a}{m\pi})\cos\frac{m\pi x}{a}[\delta(x-x_1) - \delta(x-x_2)]dx)$$

$$\text{x}(\sin\frac{n\pi y}{b}[\delta(y-y_1) - \delta(y-y_2)]\Big|_0^b \qquad \textbf{(5.12)}$$

$$- \int_0^b [\delta(y-y_1) - \delta(y-y_2)]\frac{n\pi}{b}\cos\frac{n\pi y}{b} d \quad \Rightarrow y$$

$$= \frac{1}{\rho h N_k} M_{ymn} ((-\frac{a}{m\pi})\cos m\pi[u_s(a-x_1) - u_s(a-x_2)] -$$

$$(-\frac{a}{m\pi})[u_s(0-x_1) - u_s(0-x_2)] - (-\frac{a}{m\pi})$$

$$(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a}))\text{x}(\sin n\pi[\delta(b-y_1) - \delta(b-y_2)]$$

$$- \sin 0[\delta(0-y_1) - \delta(0-y_2)] - \frac{n\pi}{b}(\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b}))$$

Denklem (5.11) ve (5.12) ifadelerinde sınır koşullarının tekillik vermeden uygulanması için $x_1 > 0, x_2 < a$ ve $y_1 > 0, y_2 < b$ olacak şekilde, plağın piezoelektrik yamalarla tamamen kaplı olmadığı durum ele alınır. Ancak modal geri besleme faktörü elde edildikten sonra tamamen yama kaplı plak için sonuç bulunabilir. Bu durumda tek parça piezoelektrik eyleyici için elde edilen modal geri besleme faktörü Denklem (5.10)'daki gibi olur.

$$I = \frac{1}{\rho h N_k} M_{xmn} (-\frac{mb}{na})(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a})$$
$$(\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b}) \qquad \textbf{(5.9a)}$$

$$II = \frac{1}{\rho h N_k} M_{ymn} (-\frac{na}{mb})(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a}) \\ (\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b}) \quad \textbf{(5.9b)}$$

$$\hat{M}_{mn} = -\frac{1}{\rho h N_k}(M_{xmn}\frac{mb}{na} + M_{ymn}\frac{na}{mb})(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a}) \\ (\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b}) \quad \textbf{(5.10)}$$

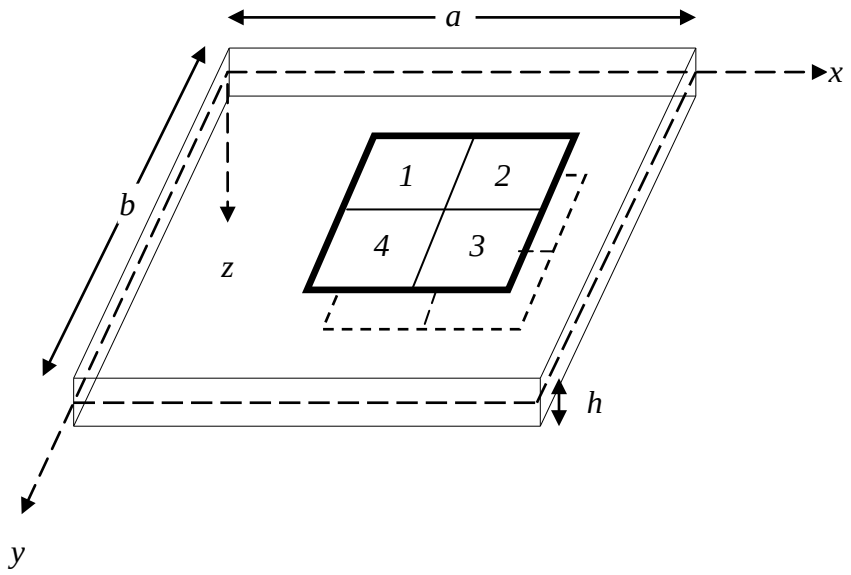
Denklem (5.10), basit mesnetli plakta tek parçalı piezoelektrik eyleyicinin kontrol etkisini ifade eder.

5.1.2 Bölünmüş piezoelektrik yamalar

Algılayıcının tüm plak yüzeyini kapladığı durumda, Denklem (5.3)'te elde edilen çıkış sinyali, çift sayılı modlar için sıfırlanmakta ve çıkış sinyali elde edilememektedir. Eğilme hareketi sırasında algılayıcı boyunca bazı yerler çekmeye maruz kalırken bazı yerler basmaya maruz kalır. Bunların oluşturduğu (+) ve (-) yükler birbirini sıfırlayarak kontrolü engeller [33].

Bunun yanı sıra modal geri besleme faktörü bazı durumlarda çok küçük değerler almaktadır. Örneğin *m=2,n=1* için bir yöndeki moment hareketi bastırırken diğeri arttırmaya çalışır ve çok küçük bir değerde kontrol momenti elde edilir. Algılayıcı çıkış sinyalinin sıfırlanması farklı yöntemler ile giderilse de, bazı modlar için kontrol etkisinin sıfıra yakın değerlerde elde edilmesi kontrol için önemli sorun olmaktadır.

Tzou [33], yapıların simetrik olmayan modları için, tek parçalı simetrik yayılı piezoelektrik algılayıcı ve eyleyicilerden sıfır veya sıfıra yakın algılama ve kontrol etkisi elde edilmesi sebebiyle piezoelektrik yamaların sürekliliğini bozmayacak şekilde bölümlenmesi çözümünü geliştirmiştir.



Şekil 5.4 : 4 parçalı algılayıcı eyleyicili plak yapı

Şekil 5.3 ‘te görüldüğü gibi, a x b plak üzerinde gelişigüzel yerleşmiş piezoelektrik yamalar 4 parçaya bölünmüştür. Yamalar saat yönünde numaralandırılmıştır. Plak alt ve üst yüzeylerinde aynı koordinatlara yerleşmiş olan her bir yama bölümünden algılayıcı olanı lokal hareketi algılar, oluşan sinyal işlenerek lokal kontrol etkisi elde etmek üzere eyleyiciye döner.

Yamalar, kısa devre yapmayacak ve sürekliliği bozmayacak kadar küçük, ihmal edilebilir boşluklarla bölünmüştür [33].

5.1.2.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali

Plak yüzeyindeki herhangi bir $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ alanında konumlanmış algılayıcı çıkış sinyallerinin hesaplanması için, algılayıcı çıkış sinyali, her bir algılayıcı bölümü için Çizelge 5.1’de verilen sınırlarda hesaplanmıştır.

Çizelge 5.1 : Gelişigüzel yerleştirilmiş yama koordinatları

Yama	x_1	y_1	x_2	y_2
1	x_1	y_1	$\frac{x_1+x_2}{2}$	$\frac{y_1+y_2}{2}$
2	x_1	$\frac{y_1+y_2}{2}$	$\frac{x_1+x_2}{2}$	y_2
3	$\frac{x_1+x_2}{2}$	$\frac{y_1+y_2}{2}$	x_2	y_2
4	$\frac{x_1+x_2}{2}$	y_1	x_2	$\frac{y_1+y_2}{2}$

$$\phi_{mn}^{s_i} = \frac{h^s}{A^s}(h_{31}r_1^s(\frac{m\pi}{a})^2 + h_{32}r_2^s(\frac{n\pi}{b})^2)\int_{y_{1i}}^{y_{2i}}\int_{x_{1i}}^{x_{2i}} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy$$
$$= \frac{4ab}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}\frac{h^s}{mn}(h_{31}r_1^s(\frac{m}{a})^2 + h_{32}r_2^s(\frac{n}{b})^2)\cos\frac{m\pi x}{a}\Big|_{x_{1i}}^{x_{2i}}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big|_{y_{1i}}^{y_{2i}} \qquad \textbf{(5.11)}$$

Denklem (5.11), Çizelge 5.1'deki integral sınırlarında hesaplanırsa, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ alanında konumlanmış bölümlenmiş algılayıcı çıkış sinyalleri, her bir bölüm için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi_{mn}^{s_1} = \frac{4ab}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}S_{mn}(\cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - \cos\frac{m\pi x_1}{a})(\cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - \cos\frac{n\pi y_1}{b}) \qquad \textbf{(5.12)}$$

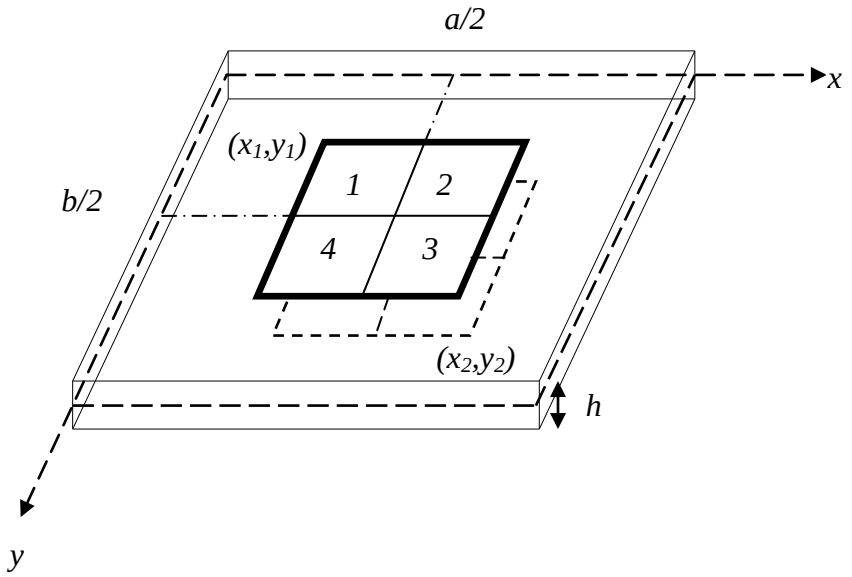
$$\phi_{mn}^{s_2} = \frac{4ab}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}S_{mn}(\cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - \cos\frac{m\pi x_1}{a})(\cos\frac{n\pi y_2}{b} - \cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b}) \qquad \textbf{(5.13)}$$

$$\phi_{mn}^{s_3} = \frac{4ab}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}S_{mn}(\cos\frac{m\pi x_2}{a} - \cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a})(\cos\frac{n\pi y_2}{b} - \cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b}) \qquad \textbf{(5.14)}$$

$$\phi_{mn}^{s_4} = \frac{4ab}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} S_{mn} (\cos\frac{m\pi x_2}{a} - \cos\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{2a}) \\ (\cos\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{2b} - \cos\frac{n\pi y_1}{b}) \quad \textbf{(5.15)}$$

5.1.2.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü

Bölünmüş algılayıcıdan elde edilen çıkış sinyallerindeki işaret değişikliğine bağlı olarak eyleyiciye gelen geri besleme voltajı ve indüklenmiş moment değişmektedir. Bu işaret değişimleri göz önüne alınarak, Şekil 5.4'teki gibi kenar ortayları plak kenar ortayı ile çakışık durumdaki bir eyleyici yama için birim modal kontrol momenti aşağıdaki gibi önerilmiştir [33]:

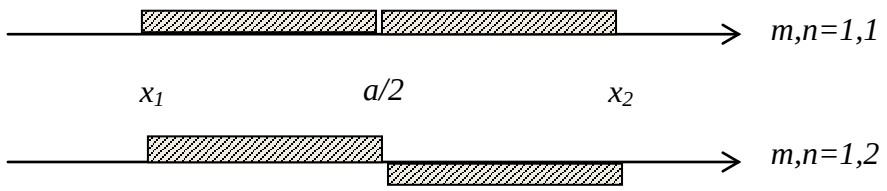


Şekil 5.5 : Bölünmüş eyleyici ve algılayıcı

$$M_{xmn}^{*} = M_{xmn}([u_s(x - x_1) - u_s(x - a/2)] - (-1)^m[u_s(x - a/2) - u_s(x - x_2)]) \\ \text{x}([u_s(y - y_1) - u_s(y - b/2)] - (-1)^n[u_s(y - b/2) - u_s(y - y_2)]) \quad \textbf{(5.16)}$$

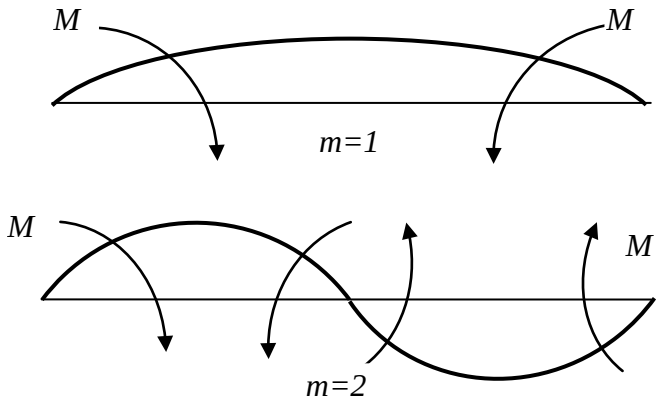
$$M_{ymn}^{*} = M_{ymn}([u_s(x - x_1) - u_s(x - a/2)] - (-1)^m[u_s(x - a/2) - u_s(x - x_2)]) \\ \text{x}([u_s(y - y_1) - u_s(y - b/2)] - (-1)^n[u_s(y - b/2) - u_s(y - y_2)]) \quad \textbf{(5.17)}$$

Denklem (5.16-17)'deki birim basamak fonksiyonu grafiği Şekil 5.5'te görülmektedir:



Şekil 5.6 : Bölünmüş eyleyici için birim basamak fonksiyonu

Bu kontrol momentlerinin plağa etkisi ise Şekil 5.6'daki gibidir.



Şekil 5.7 : Eyleyici bölümlerinin moment etkisi

Plak üzerinde gelişigüzel bir $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ alanında konumlanmış eyleyici yama için birim modal kontrol momentleri ise şu şekilde yazılabilir:

$$M^*_{xmn} = M_{xmn}([u_s(x-x_1)-u_s(x-\frac{x_1+x_2}{2})]-(-1)^m[u_s(x-\frac{x_1+x_2}{2})-u_s(x-x_2)])$$
$$\times([u_s(y-y_1)-u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})]-(-1)^n[u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})-u_s(y-y_2)]) \quad \textbf{(5.18)}$$

$$M^*_{ymn} = M_{ymn}([u_s(x-x_1)-u_s(x-\frac{x_1+x_2}{2})]-(-1)^m[u_s(x-\frac{x_1+x_2}{2})-u_s(x-x_2)])$$
$$\times([u_s(y-y_1)-u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})]-(-1)^n[u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})-u_s(y-y_2)]) \quad \textbf{(5.19)}$$

Yukarıdaki ifadeler, Denklem (4.35)'e uygulanırsa, gelişigüzel yerleşmiş bir eyleyici için modal geri besleme faktörü elde edilir:

$$\hat{M}_{mn} = \frac{1}{\rho h N_k}\Big(\underbrace{\int_y \int_x \frac{\partial^2 M^*_{xmn}}{\partial x^2} U_{3mn}\, dxdy}_{I} + \underbrace{\int_y \int_x \frac{\partial^2 M^*_{ymn}}{\partial y^2} U_{3mn}\, dxdy}_{II} \qquad \textbf{(5.20)}$$

$$\frac{\partial^2 M^*_{xmn}}{\partial x^2} = M_{xmn}([u_s(y-y_1) - u_s(y-b/2)] - (-1)^n[u_s(y-b/2) - u_s(y-y_2)])$$
$$\times \frac{d}{dx}([\delta(x-x_1) - \delta(x-a/2)] - (-1)^m[\delta(x-a/2) - \delta(x-x_2)]) \qquad \textbf{(5.21)}$$

$$I = M_{xmn}\int_y \int_x \; ([u_s(y-y_1) - u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})] - (-1)^n[u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})$$
$$- u_s(y-y_2)])\times \frac{d}{dx}([\delta(x-x_1) - \delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})]$$
$$- (-1)^m[\delta(x-\frac{x_1+x_2}{2}) - \delta(x-x_2)])\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, dxdy$$
$$= M_{xmn}\int_0^a \underbrace{\frac{d}{dx}([\delta(x-x_1) - \delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})] - (-1)^m[\delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})}_{dv_1}$$
$$\underbrace{-\delta(x-x_2)]}_{dv_1})\underbrace{\sin\frac{m\pi x}{a}}_{u_1} d\; x\int_0^b \underbrace{([u_s(y-y_1) - u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})] - (-1)^n}_{u_2}$$
$$\underbrace{[u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2}) - u_s(y-y_2)])}_{u_2}\underbrace{\sin\frac{n\pi y}{b}\, dy}_{dv_2} \qquad \textbf{(5.22)}$$
$$= M_{xmn}(\sin\frac{m\pi x}{a}([\delta(x-x_1) - \delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})] - (-1)^m[\delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})\Big|_0^a$$
$$- \delta(x-x_2)])\Big|_0^a - \int_0^a([\delta(x-x_1) - \delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})] - (-1)^m[\delta(x-\frac{x_1+x_2}{2})$$
$$- \delta(x-x_2)])\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}dx\times([u_s(y-y_1) - u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2})] - (-1)^n$$
$$[u_s(y-\frac{y_1+y_2}{2}) - u_s(y-y_2)])(-\frac{b}{n\pi})\cos\frac{n\pi y}{b}\Big|_0^b - \int_0^b(-\frac{b}{n\pi})\cos\frac{n\pi y}{b}$$
$$[\delta(y-y_1) - \delta(y-\frac{y_1+y_2}{2})] - (-1)^n[\delta(y-\frac{y_1+y_2}{2}) - \delta(y-y_2)]d\;)y$$

$$I = M_{xmn}((-\frac{mb}{na})(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - (-1)^m(\cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a}))(\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - (-1)^n(\cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b}))) \quad \textbf{(5.23)}$$

Benzer şekilde integralin ikinci parçası;

$$II = \int_y\int_x M_{ymn}([u_s(x-x_1) - u_s(x-a/2)] - (-1)^m[u_s(x-a/2) - u_s(x-x_2)]) \times \frac{d}{dy}([\delta(y-y_1) - \delta(y-b/2)] - (-1)^n[\delta(y-b/2) - \delta(y-y_2)])\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \quad \textbf{(5.24)}$$

$$II = M_{ymn}((-\frac{na}{mb})(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - (-1)^m(\cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a}))(\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - (-1)^n(\cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b}))) \quad \textbf{(5.25)}$$

olup, modal geri besleme faktörü,

$$\hat{M}_{mn} = -\frac{1}{\rho h N_k}(M_{xmn}\frac{mb}{na} + M_{ymn}\frac{na}{mb})(\cos\frac{m\pi x_1}{a} - \cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - (-1)^m(\cos\frac{m\pi(x_1+x_2)}{2a} - \cos\frac{m\pi x_2}{a}))(\cos\frac{n\pi y_1}{b} - \cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - (-1)^n(\cos\frac{n\pi(y_1+y_2)}{2b} - \cos\frac{n\pi y_2}{b})) \quad \textbf{(5.26)}$$

olarak elde edilir.

Özel durumlar

Yüzeyi tamamen yama ile kaplı plakta yama koordinatları,

$(x_1, y_1) = (0,0)$
$(x_2, y_2) = (a,b)$

olmak üzere, tek parçalı algılayıcı çıkış sinyali aşağıdaki gibidir:

$$\phi_{mn}^{s} = S_{mn}(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi) \qquad \textbf{(5.27)}$$

Bu ifadede, *m=2* veya *n=2* değerleri için çıkış sinyali sıfırlanmaktadır. Algılayıcı, Şekil 5.4'teki gibi bölümlendiğinde ise, *a x b* yama için algılayıcı çıkış sinyalleri, her bir yama bölümünün koordinatları Çizelge 5.2'deki gibi olmak üzere, Denklem (5.28-31)'de verilmiştir.

Çizelge 5.2 : Bölümlü yama koordinatları

Yama	x_1	y_1	x_2	y_2
1	0	0	a/2	b/2
2	0	b/2	a/2	b
3	a/2	b/2	0	b
4	a/2	0	0	b/2

$$\begin{aligned}\phi_{mn}^{s_1} &= 4S_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big|_0^{a/2}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big|_0^{b/2} \\ &= 4S_{mn}(1-\cos\frac{m\pi}{2})(1-\cos\frac{n\pi}{2})\end{aligned} \qquad \textbf{(5.28)}$$

$$\phi_{mn}^{s_2} = 4S_{mn}(1-\cos\frac{m\pi}{2})(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi) \qquad \textbf{(5.29)}$$

$$\phi_{mn}^{s_3} = 4S_{mn}(\cos\frac{m\pi}{2}-\cos m\pi)(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi) \qquad \textbf{(5.30)}$$

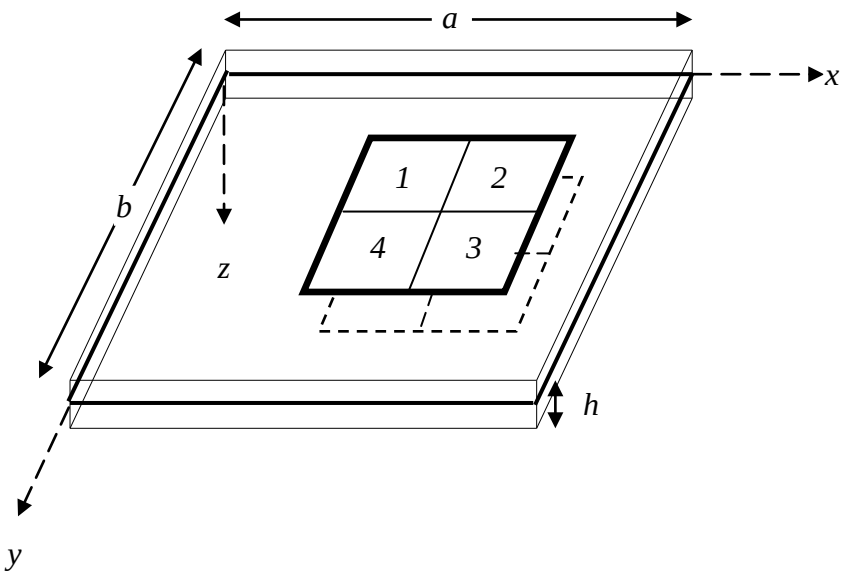
$$\phi_{mn}^{s_4} = 4S_{mn}(\cos\frac{m\pi}{2}-\cos m\pi)(1-\cos\frac{n\pi}{2}) \qquad \textbf{(5.31)}$$

olarak elde edilmektedir. Bu halde, *m=2* veya *n=2* olduğu modlarda çıkış sinyali elde edilmektedir. Algılayıcıdan elde edilen sinyal ancak *m=4* veya *n=4* ve *4*'ün katı olduğu değerlerde sıfırlanmaktadır. $m,n = 2,2$ için her bir algılayıcı bölümünden elde edilen sinyal değerleri arasında $\phi_{22}^{s_1} = \phi_{22}^{s_3} = -\phi_{22}^{s_2} = -\phi_{22}^{s_4}$ bağıntısı vardır. *m* ve *n*'nin

$m, n = 1,1\ ;\ 1,3\ ;\ 3,1\ ;\ 3,3$ gibi tek sayı değerlerinde ise tek parça ve bölünmüş algılayıcıdan elde edilen çıkış sinyalleri aynı olmaktadır.

5.2 Sabit Mesnetli Plaklar

Yüzeylerinde algılayıcı ve eyleyici yamalar bulunan sabit mesnetli a x b plak Şekil 5.7'deki gibidir. Sabit mesnetli plak için modal şekil fonksiyonu Denklem (4.18)'de, verilmiştir.



Şekil 5.8 : Algılayıcı ve eyleyicili sabit mesnetli plak

5.2.1 Tek parça piezoelektrik yama

5.2.1.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali

Sabit mesnetli plak üzerinde herhangi bir $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ alanında konumlanmış tek parça algılayıcı için çıkış sinyali Denklem (5.33)'teki gibi elde edilir:

$$\phi_{mn}^{s} = \frac{4h^{s}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (h_{31} r_1^{s} (\frac{m\pi}{a})^{2} (\cos\frac{2n\pi y}{b} - 1) \cos\frac{2m\pi x}{a} + h_{32} r_2^{s} (\frac{n\pi}{b})^{2} (\cos\frac{2m\pi x}{a} - 1) \cos\frac{2n\pi y}{b}) \qquad \textbf{(5.32)}$$

$$\phi_{mn}^{s}=\frac{h^{s}}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(h_{31}r_1^{s}\frac{mb}{na}(\sin\frac{2m\pi x_2}{a}-\sin\frac{2m\pi x_1}{a})(y_1-y_2+\sin\frac{2n\pi y_2}{b}-\sin\frac{2n\pi y_1}{b})+h_{32}r_2^{s}\frac{na}{mb}(\sin\frac{2m\pi x_2}{a}-\sin\frac{2m\pi x_1}{a}+x_1-x_2)(\sin\frac{2n\pi y_2}{b}-\sin\frac{2n\pi y_1}{b})) \quad \textbf{(5.33)}$$

5.2.1.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü

Tek parçalı eyleyici için, birim modal kontrol momentleri Denklem (5.5-6)'da önerildiği gibidir. Sabit mesnetli plak için mod şekil fonksiyonu ile birim kontrol momentleri Denklem (4.35)'e uygulanırsa, herhangi bir $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ alanında bulunan eyleyici için modal geri besleme faktörü bulunur.

$$\hat{M}_{mn}=\frac{4}{9\rho hab}(M_{xmn}\frac{2m\pi}{a}(\sin\frac{2m\pi x_1}{a}-\sin\frac{2m\pi x_2}{a})(y_1-y_2-\frac{b}{2n\pi}(\sin\frac{2n\pi y_2}{b}-\sin\frac{2n\pi y_1}{b})))\times(M_{ymn}\frac{2n\pi}{b}(\sin\frac{2n\pi y_1}{b}-\sin\frac{2n\pi y_2}{b})(x_1-x_2-\frac{a}{2m\pi}(\sin\frac{2m\pi x_2}{a}-\sin\frac{2m\pi x_1}{a}))) \quad \textbf{(5.34)}$$

5.2.2 Bölünmüş piezoelektrik yamalar

5.2.2.1 Yayılı algılayıcı çıkış sinyali

Plak yüzeyinde gelişigüzel yerleşmiş bölümlü algılayıcının integral sınırları Çizelge 5.1'de verilmiştir. Algılayıcı çıkış sinyali ifadesi her bir algılayıcı bölümü için bu sınırlarda alınırsa yayılı algılayıcı çıkış sinyalleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi_{mn}^{s_1}=\frac{4h^{s}}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}(h_{31}r_1^{s}\frac{mb}{na}(\sin\frac{m\pi(x_1+x_2)}{a}-\sin\frac{2m\pi x_1}{a})(\sin\frac{n\pi(y_1+y_2)}{b}-\sin\frac{2n\pi y_1}{b}+\frac{y_1-y_2}{2})+h_{32}r_2^{s}\frac{na}{mb}(\sin\frac{n\pi(y_1+y_2)}{b}-\sin\frac{2n\pi y_1}{b})(\sin\frac{m\pi(x_1+x_2)}{a}-\sin\frac{2m\pi x_1}{a}+\frac{x_1-x_2}{2})) \quad \textbf{(5.35)}$$

$$\phi_{mn}^{s_2} = \frac{4h^s}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(h_{31} r_1^s \frac{mb}{na}(\sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} - \sin\frac{2m\pi x_1}{a})$$
$$(\sin\frac{2n\pi y_2}{b} - \sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b} + \frac{y_1 - y_2}{2}) + h_{32} r_2^s \frac{na}{mb}(\sin\frac{2n\pi y_2}{b}$$
$$-\sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b})(\sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} - \sin\frac{2m\pi x_1}{a} + \frac{x_1 - x_2}{2})) \quad \textbf{(5.36)}$$

$$\phi_{mn}^{s_3} = \frac{4h^s}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(h_{31} r_1^s \frac{mb}{na}(\sin\frac{2m\pi x_2}{a} - \sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a})$$
$$(\sin\frac{2n\pi y_2}{b} - \sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b} + \frac{y_1 - y_2}{2}) + h_{32} r_2^s \frac{na}{mb}(\sin\frac{2n\pi y_2}{b}$$
$$-\sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b} -)(\sin\frac{2m\pi x_2}{a} - \sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} + \frac{x_1 - x_2}{2})) \quad \textbf{(5.37)}$$

$$\phi_{mn}^{s_4} = \frac{4h^s}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}(h_{31} r_1^s \frac{mb}{na}(\sin\frac{2m\pi x_2}{a} - \sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a})$$
$$(\sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b} - \sin\frac{2n\pi y_1}{b} + \frac{y_1 - y_2}{2}) + h_{32} r_2^s \frac{na}{mb}(\sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b}$$
$$-\sin\frac{2n\pi y_1}{b})(\sin\frac{2m\pi x_2}{a} - \sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} + \frac{x_1 - x_2}{2})) \quad \textbf{(5.38)}$$

5.2.2.2 Yayılı eyleyici modal geri besleme faktörü

Gelişigüzel yerleştirilmiş eyleyici için modal geri besleme faktörü hesaplanırken, Denklem (5.18-19)'daki birim modal kontrol momentleri kullanılır. Benzer işlemler yapılırsa;

$$\hat{M}_{mn} = \frac{4}{9\rho hab}\{M_{xmn}\frac{2m\pi}{a}(\sin\frac{2m\pi x_1}{a} - \sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} - (-1)^m$$
$$(\sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} - \sin\frac{2m\pi x_2}{a}))(-\frac{b}{2n\pi}(\sin\frac{2n\pi y_1}{b} - \sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b}$$
$$-(-1)^n(\sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b} - \sin\frac{2n\pi y_2}{b}) + \frac{y_1 - y_2}{2} - (-1)^n\frac{y_1 - y_2}{2}))$$
$$+ M_{ymn}\frac{2n\pi}{b}(\sin\frac{2n\pi y_1}{b} - \sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b} - (-1)^n(\sin\frac{n\pi(y_1 + y_2)}{b}$$
$$-\sin\frac{2n\pi y_2}{b}))(-\frac{a}{2m\pi}(\sin\frac{2m\pi x_1}{a} - \sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} - (-1)^m$$
$$(\sin\frac{m\pi(x_1 + x_2)}{a} - \sin\frac{2m\pi x_2}{a}) + \frac{x_1 - x_2}{2} - (-1)^m\frac{x_1 - x_2}{2}))\} \quad \textbf{(5.39)}$$

elde edilir. Denklem (5.38), sabit mesnetli plak üzerinde gelişigüzel yerleşmiş dört bölümlü bir eyleyicinin modal geri besleme faktörü ifadesidir.

Sabit mesnetli plakta, algılayıcı ve eyleyici yamaları plak yüzeyini kaplıyorsa, herhangi bir modda kontrol etkisi elde edilememektedir.

6. SAYISAL ÇALIŞMALAR ve SONUÇLAR

6.1 Katmanlı Kompozit Plaklar

Katmanlı kompozit plaklarda katılık katsayıları hesaplanarak, literatürdeki çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

$[0,+45]_S$ dizilimindeki kompozit plağın katman malzeme özellikleri şu şekilde verilmiştir [25]:

$$E_1 = 20010000 lb/in^2 \qquad \nu_{12} = 0.3$$
$$E_2 = 1301000 lb/in^2 \qquad \nu_{21} = 0.02$$
$$G_{12} = 1001000 lb/in^2 \qquad h = 0.005 in$$

Katmanların global düzlem gerilme indirgenmiş katılık katsayıları $\bar{Q}_{ij}$, Çizelge 6.1'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 6.1 : $[0,+45]_S$ plakta $\bar{Q}_{ij}$

$\bar{Q}_{ij}$ (lb/in^2)	Çalışma	[25]	Çalışma	[25]
	0^o	0^o	45^o	45^o
$\bar{Q}_{11}$	2.01308e7	20130785	6.55724e6	6557237
$\bar{Q}_{12}$	392656	392656	4.55524e6	4555238
$\bar{Q}_{22}$	1.30885e6	1308853	6.55724e6	6557237
$\bar{Q}_{66}$	1001000	1001000	5.16358e6	5163582

Aynı malzeme özelliklerine sahip $[0,+45]_T$ kompozit plakta hesaplanan eğilme katılık katsayıları D_{ij}, Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.2 : [0,+45] plakta D_{ij}

D_{ij} *(in-lb)*	Çalışma	[25]
D_{11}	1.112	1.112
D_{12}	0.206162	0.206
D_{22}	0.327754	0.328
D_{66}	0.256858	0.257

$[0,90]_S$ dizilime sahip özel ortotropik kare kompozit bir plağın boyutsuz malzeme özellikleri $E_2 / E_1 = 10$, $G_{12} = 0.5E_2$ ve $\nu_{12} = 0.25$ olmak üzere, boyutsuzlaştırılmış frekansı $\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn}(\frac{b^2}{\pi^2})\sqrt{\frac{\rho h}{D_{22}}}$ hesaplanarak Çizelge 6.3'te Reddy'nin çalışması [23] ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 6.3 : $[0,90]_S$ Plak doğal frekansı

$\bar{\omega}_{mn}$	Çalışma	[23]
$\bar{\omega}_{11}$	2.51934	2.519
$\bar{\omega}_{12}$	4.98586	4.986
$\bar{\omega}_{13}$	9.78324	9.783
$\bar{\omega}_{21}$	8.51504	8.515
$\bar{\omega}_{22}$	10.0773	10.077
$\bar{\omega}_{23}$	13.7828	13.783
$\bar{\omega}_{31}$	18.7037	18.704
$\bar{\omega}_{32}$	19.9107	19.911
$\bar{\omega}_{33}$	22.674	22.674

6.2 Kontrol Etkinliği

Titreşim kontrolünde, bölümlü piezoelektrik yamalar için hız geri beslemeli kontrol algoritması uygulanmıştır.

Geri besleme kazancı: $\varsigma' = \varsigma / \omega_{mn}$ (Hız geri beslemeli kontrol)

Birim modal kontrol momentleri: $M_{xmn} = r_1^a d_{31} E_p \varsigma' \phi_{mn}^1$ ve $M_{ymn} = r_2^a d_{32} E_p \varsigma' \phi_{mn}^1$

Başlangıç modal sönümleme oranı $\xi_{mn} = 0.01$

Kontrollü modal sönümleme oranı: $\xi'_{mn} = \xi_{mn} - \frac{\hat{M}_{mn}}{2\omega_{mn}}$

Sönümlenmiş doğal frekans: $\gamma_{mn} = \omega_{mn}\sqrt{1-\xi_{mn}^2}$

Kontrollü sönümlenmiş doğal frekans: $\gamma_{mn} = \omega_{mn}\sqrt{1-\xi'_{mn}{}^2}$

olmak üzere sistemin kontrol etkisi altındaki cevabı incelenmiştir.

6.2.1 Homojen izotropik plak

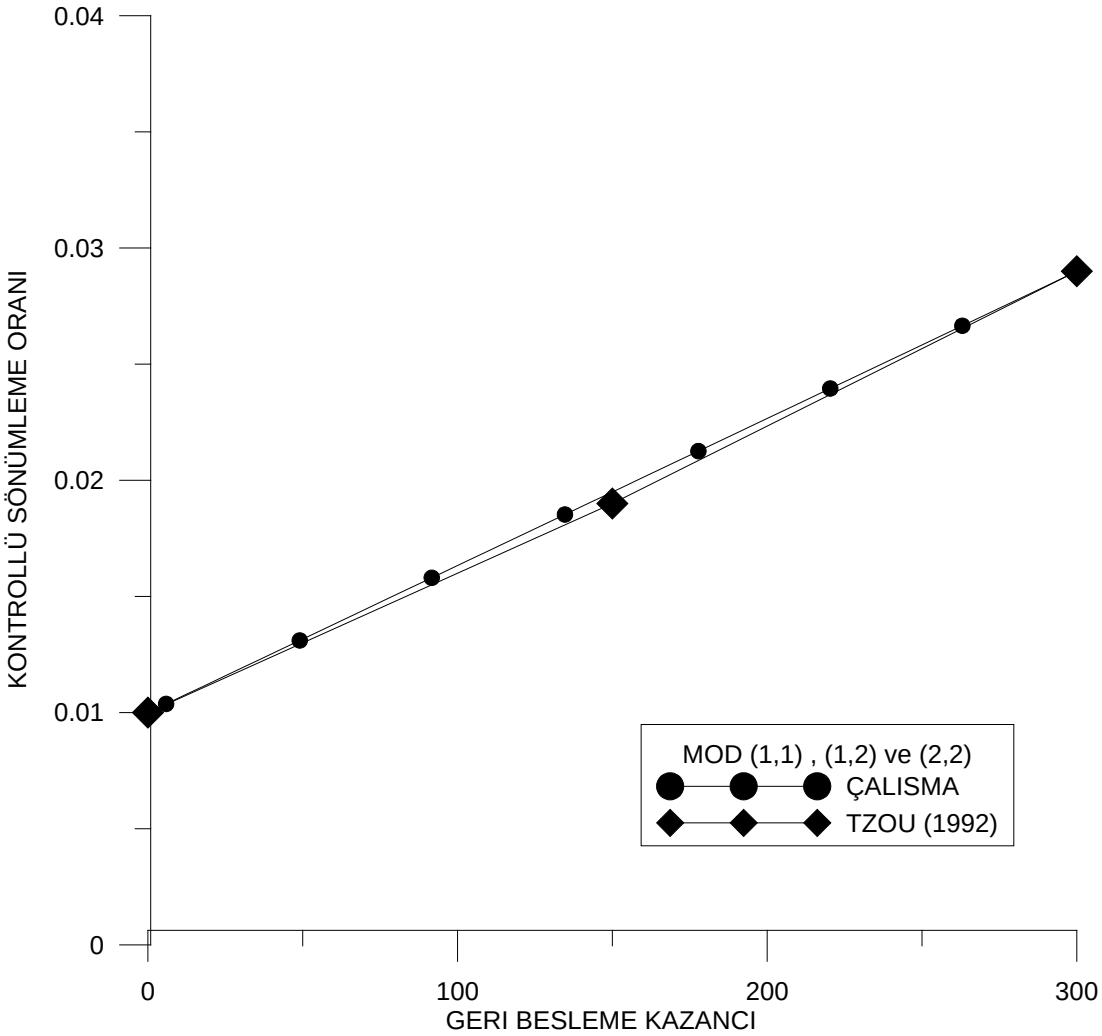
6.2.1.1 Basit mesnetli plak

(0.2 m x 0.2 m) boyutlarında alt ve üst yüzeyi PVDF film arasında pleksiglas plak olan sandviç yapının malzeme özellikleri Çizelge 6.4'teki gibidir:

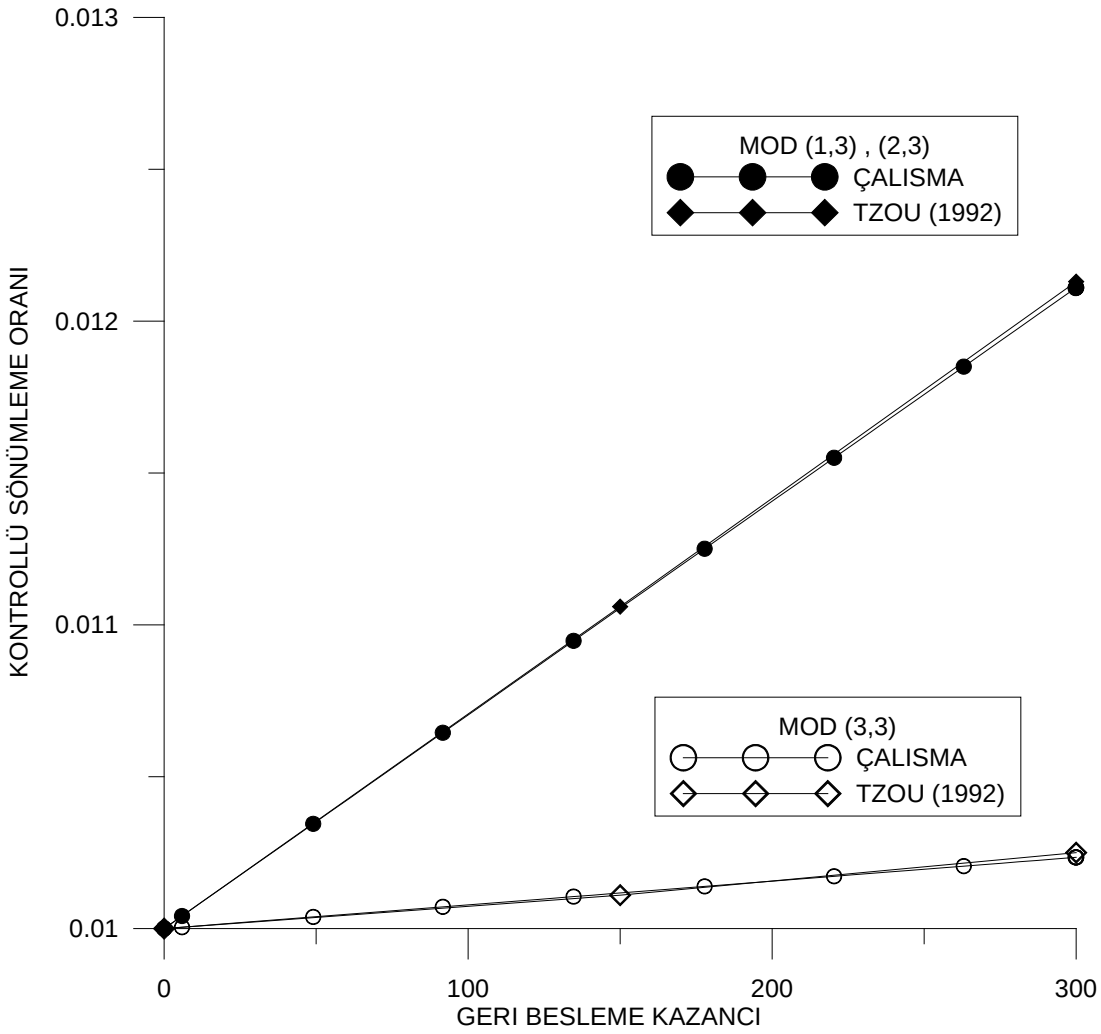
Çizelge 6.4 : Malzeme özellikleri [34]

	Pleksiglass	PVDF	Birim
ρ	1.19e3	1.80e3	kg/m^3
E	3.10e3	2.00e9	N/m^2
h	1.60e3	4.00e-5	m
ν	0.35	0.20	
d_{31}		1.00e-11	m/V
d_{32}		1.00e-11	m/V

Dört bölümlü eyleyici ve algılayıcının alanları plak alanına eşit ve kenarları basit mesnetli plakta, farklı modlarda, kontrollü modal sönümleme oranının geri besleme kazancı ile değişimi Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'deki gibi olmaktadır.



Şekil 6.1 : Basit mesnetli plakta 1.tek mod grubunda sönümleme değişimi



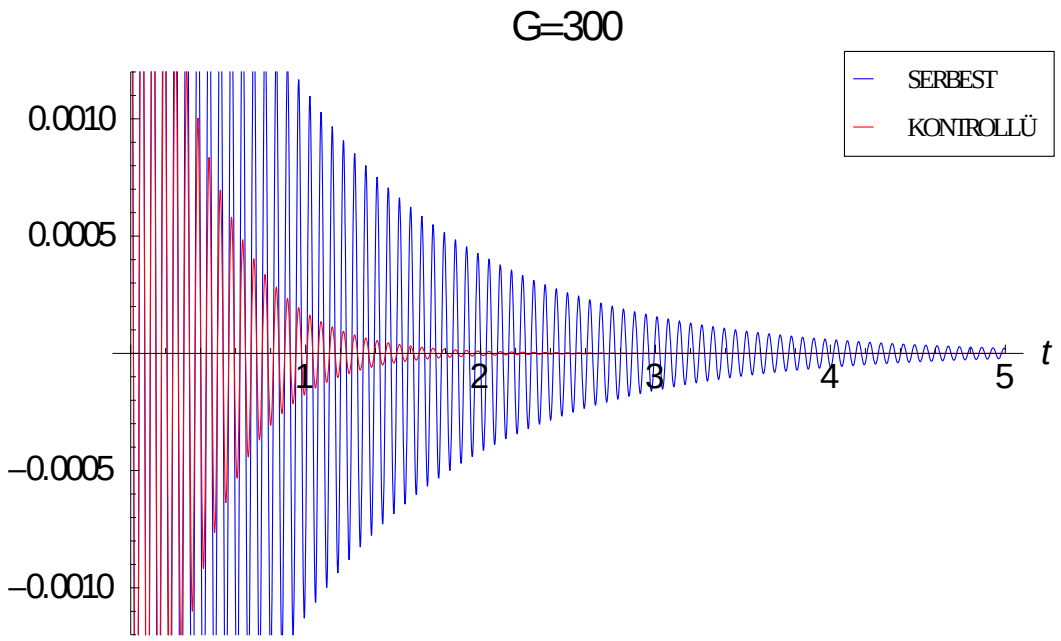
Şekil 6.2 : Basit mesnetli plakta 2 ve 3.tek mod gruplarında sönümleme değişimi

Plak yapının ilk dokuz modu, (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) olup modal simetriden dolayı, (1,1), (1,2), (1,1), (1,2), (1,3), (2,3) ve (3,3) olmak üzere altı modda incelenebilir. Kontrollü modal sönümleme oranı geri besleme kazancı ile doğru orantılıdır. Geri besleme kazancı arttıkça sönümle etkinliğinin de arttığı gözlemlenmektedir. Plağın (1,1), (1,3) ve (3,3) gibi tek modları geri besleme kazancına bağlı kontrol etkinliklerinde ayırıcı noktalar olmaktadır. Belirtilen tek modların sönümleme değişimini grupladığı Şekil 6.1 ve 6.2'de görülebilir. 1. tek mod grubu $(1,1),(1,2),(2,2)$, 2. tek mod grubu $(1,3),(2,3)$ olmak üzere, sönümleme değişimi gruplar içinde aynıdır. Üst modlar için de benzer sonuçlar geçerlidir. Eş sonuçlar Tzou [34] tarafından elde edilmiş olup ilgili grafik Şekil 6.2'de sunulmuştur.

Geri besleme kazancı kontrol etkinliğiyle lineer bir değişim sergiler, fakat yüksek geri besleme kazancı kararsızlık sorunlarını da beraberinde getirmektedir. Yüksek

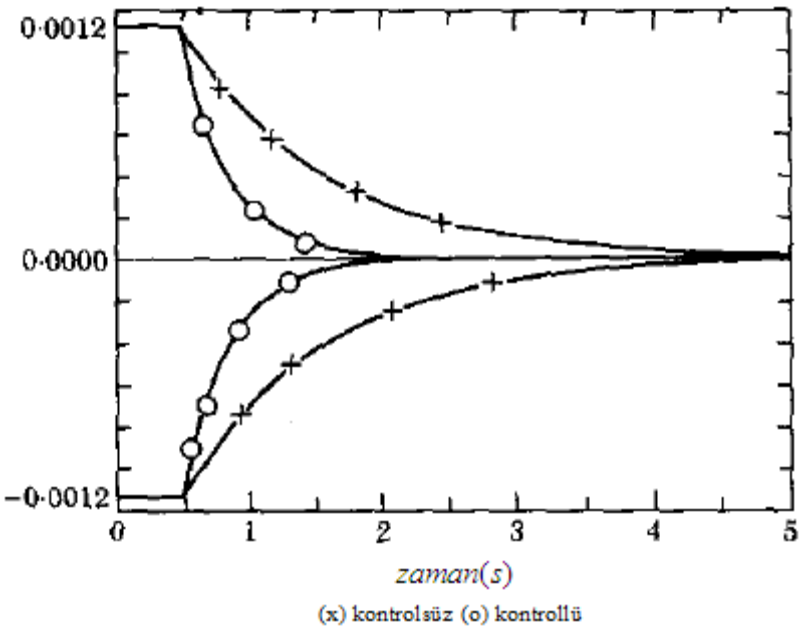
kazanç değerlerinde elde edilen yüksek geri besleme kuvvetlerinin ani işaret değişimi bu tür kararsızlıklara sebep olmaktadır.

Sistemin zamana bağlı grafiği, serbest titreşim ve kontrollü sönümleme cevapları geri besleme kazancı $\varsigma = 300$ ve (1,1). mod için Şekil 6.3'te verilmiştir.



Şekil 6.3 : Basit mesnetli plakta titreşim cevabı

Şekil 6.3'te piezoelektrik yama yardımıyla sönümleme kontrolü etkisi açıkça görülmektedir. Sistemin zaman bağlı cevabı Şekil 6.4'te verilen çalışma ile karşılaştırılmıştır.

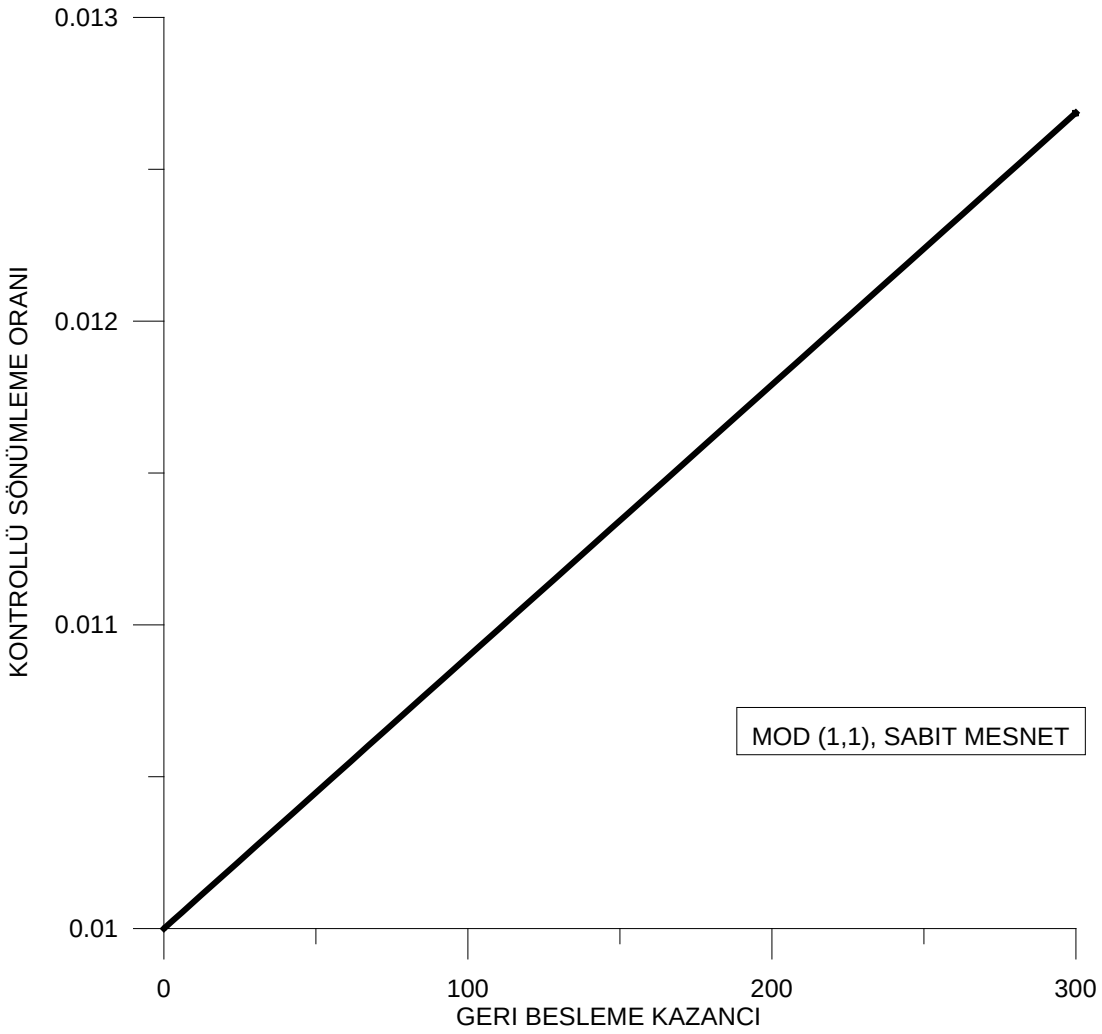


Şekil 6.4 : Basit mesnetli plakta titreşim cevabı [34]

6.2.1.2 Sabit mesnetli plak

Aynı boyutlarda ve aynı malzeme özelliklerine sahip sabit mesnetli plakta ise sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

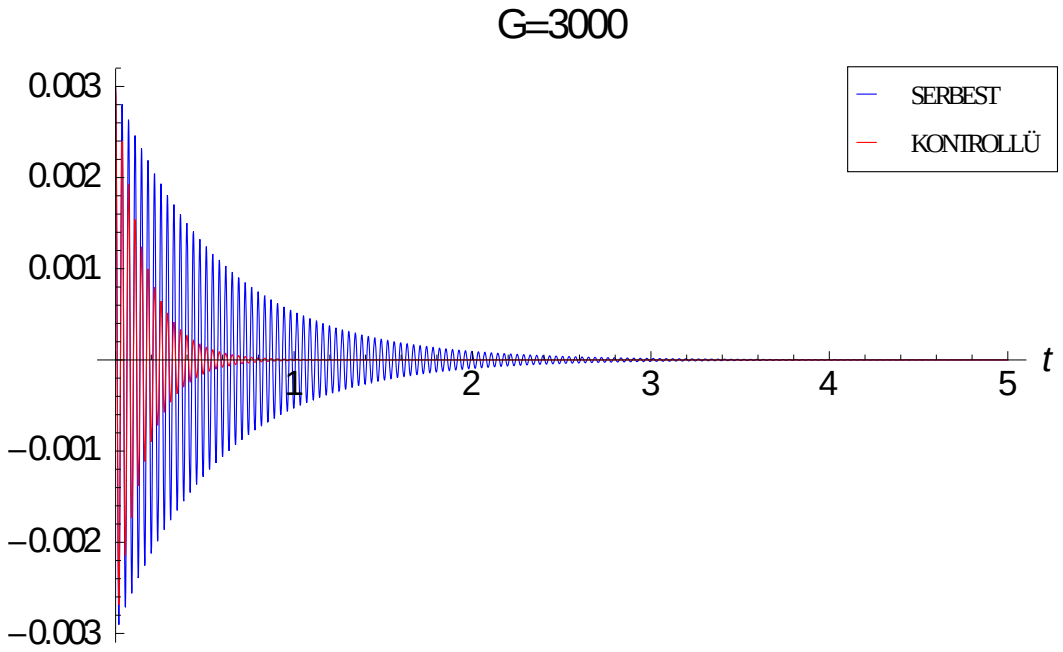
Yamaların plak yüzeyini tamamen kapladığı durumda, kenarları sabit mesnetli plakta algılayıcı ve eyleyici sinyalleri sıfırdır. Tek parçalı veya bölümlü yamalarda sonuç değişmemektedir. Ancak yama koordinatları $(0.15, 0.15)$, $(0.35, 0.35)$ alındığında kontrollü modal sönümleme oranının geri besleme kazancı ile değişimi Şekil 6.5'teki gibidir.



Şekil 6.5 : Sabit mesnetli plakta sönümleme değişimi

Sabit mesnette çeşitli boyutlarda yamaların kontrol etkisi hemen hemen aynı ve küçük olmuştur.

Elde edilen sönümleme oranı, basit mesnetli plağa göre çok küçüktür. Bu sebeple sabit mesnetli plakta sistemin cevabında kontrol etkisi $\varsigma = 300$ için yetersizdir. Ancak geri besleme kazancı 10 kat arttırılırsa sistemin zamana bağlı cevabı Şekil 6.6'daki gibi elde edilmektedir.

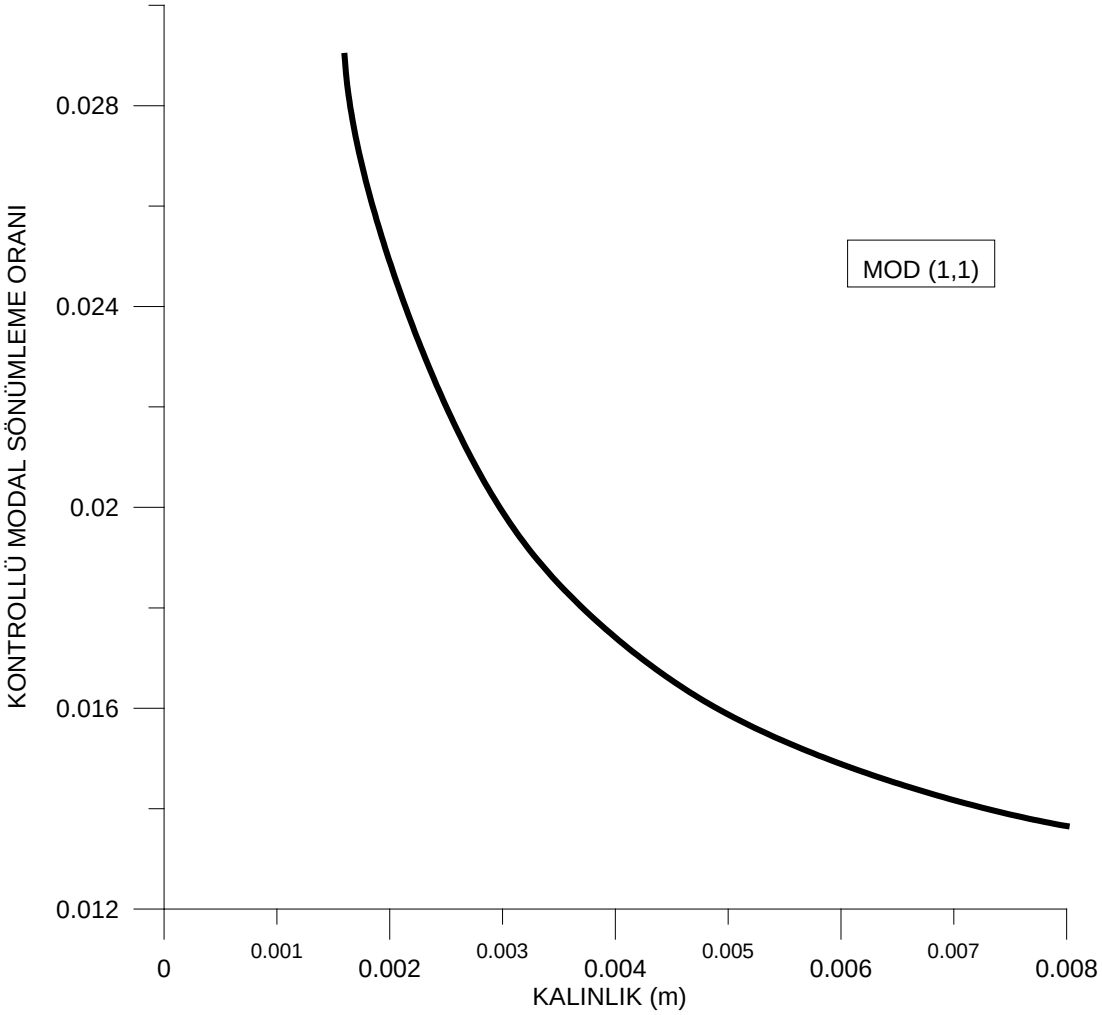


Şekil 6.6 : Sabit mesnet titreşim cevabı

Sabit mesnette plak boyutları arttırıldığında kontrol etkisi nispeten daha iyi gözlemlenebilmektedir. Ancak basit mesnetli plaklarla karşılaştırıldığında kontrol momentlerinden elde edilen değerler ve kontrol etkinliği yine de oldukça küçüktür.

6.2.1.3 Plak kalınlığının etkisi

Basit mesnetli ve Çizelge 6.4'teki malzeme özelliklerine sahip plak yapının kalınlığı 5 kata kadar arttırılarak kontrollü modal sönümleme oranı ξ', (1,1). modda hesaplanmıştır. Kalınlığa bağlı sönümleme oranının değişimi Şekil 6.7'te görülmektedir. Kalınlık arttıkça kontrol etkinliği azalmaktadır.



Şekil 6.7 : Kalınlığın sönümlenmeye etkisi

Plak kalınlığı, kontrol momenti ifadesine moment kolu ile dahil olmaktadır. Bu sebeple plak kalınlığı kontrol etkinliğine lineer bağlı bir ifadedir. Ancak Şekil 6.7'de plak kalınlığı arttıkça kontrol etkisinin azaldığı görülmektedir. Plak kalınlığı eğilme katılığında kübik olarak sistem kontrolüne etki etmektedir. Böylece, plağın kalınlığına bağlı olarak eğilme katılığındaki artım, moment kolundaki artımdan çok daha fazla olmaktadır. Bu sebeple plak kalınlığı arttıkça kontrol etkisinin azaldığı gözlenmektedir.

6.2.2 Kompozit plak

Kompozit plakta kontrol etkinliği için PVDF film tabakası arasında, cam-epoksi kompozit katmanının çeşitli dizilimleri incelenmiştir. Cam-epoksi malzeme özellikleri Çizelge 6.5'te verilmiştir. Plak en ve boyu (0.2 m x 0.2 m) alınmıştır.

Çizelge 6.5 : Cam epoksi dokumanın malzeme özellikleri [23]

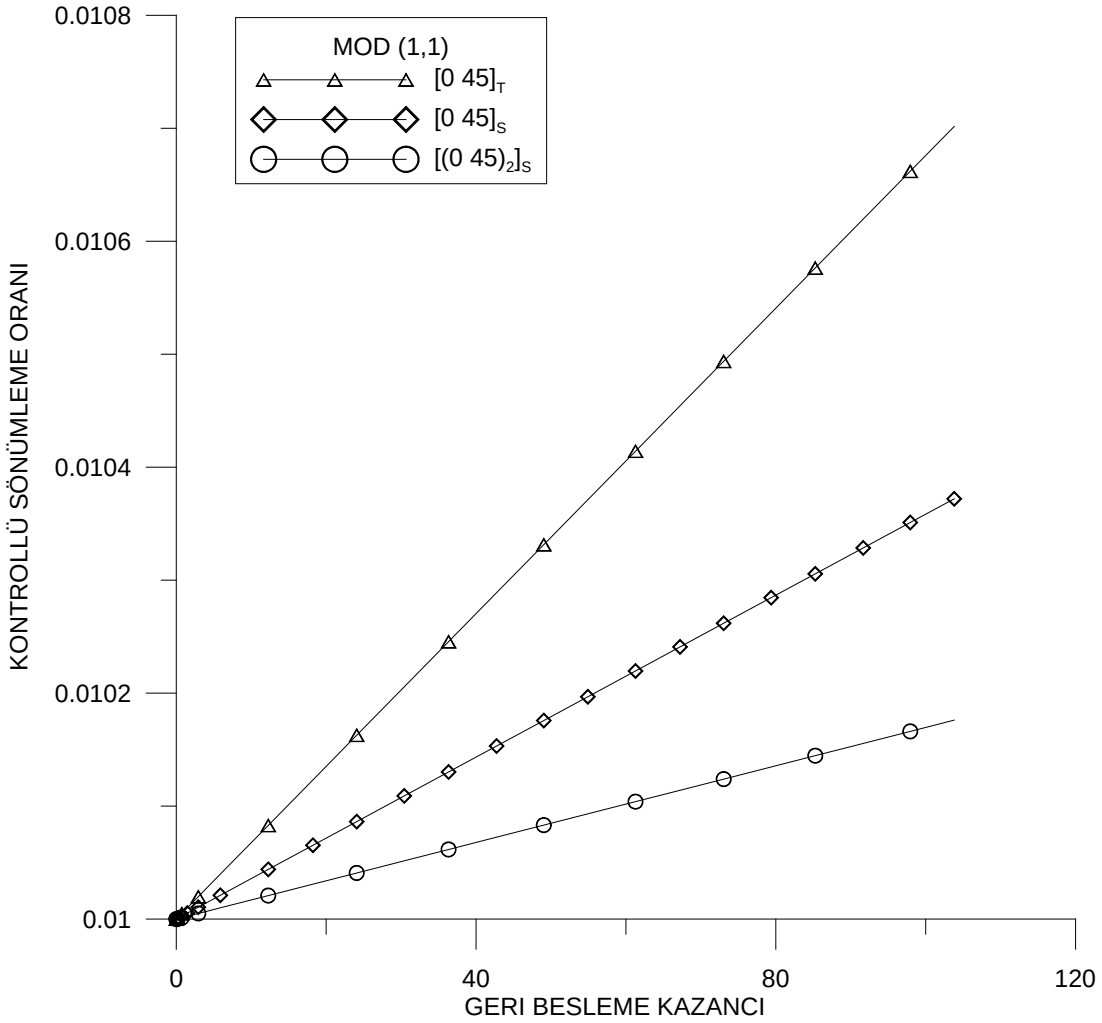
	Cam epoksi	Birim
E_1	53,779128e9	N/m^2
E_2	17,926376e9	N/m^2
G_{12}	8.963188e9	N/m^2
ν_{12}	0.25	
ρ	1750	kg/m^3

6.2.2.1 Sabit plak kalınlığında katman diziliminin etkisi

Basit mesnetli plağın toplam kalınlığı sabit ve *1,6e-3 m.* olmak üzere farklı kompozit katmanlı dizilimlerinin, kontrol etkinliğinin geri besleme kazancı ile değişimine etkisi ihmal edilebilecek kadar azdır. Bunun sebebi 6.2.1.3'te açıklandığı gibi, plak kalınlığının kontrol momentine lineer, eğilme momentine kübik bir ifadeyle bağlı olmasıdır.

6.2.2.2 Sabit katman kalınlığında katman diziliminin etkisi

Her bir katmanın kalınlığı sabit ve *0.8e-3 m.* olmak üzere farklı dizilimlerdeki kontrol etkinlikleri ise Şekil 6.8'deki gibi olmaktadır.

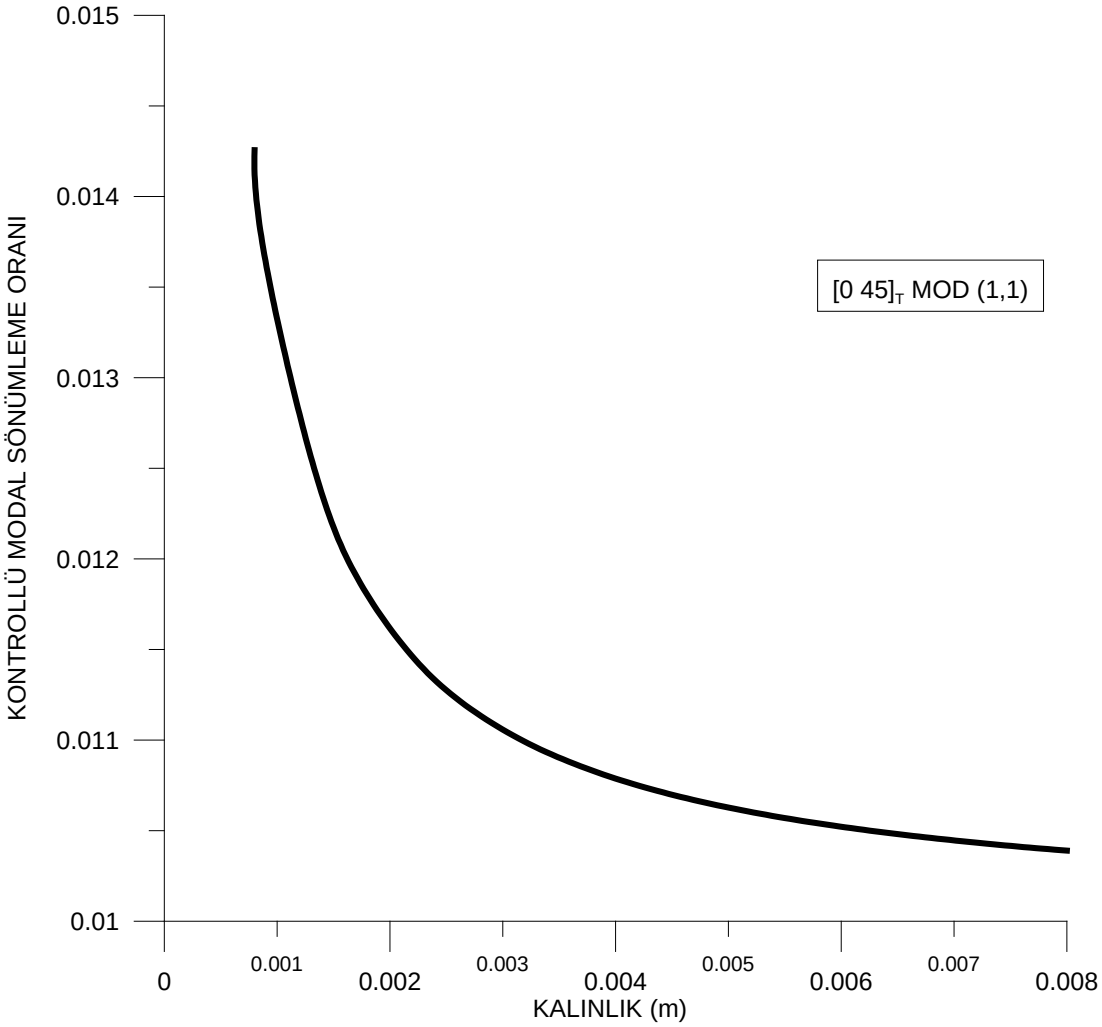


Şekil 6.8 : Sabit katman kalınlığında sönümleme değişimi

Burada farklı katman dizilimlerinin etkisinden daha çok plak toplam kalınlığının artması kontrolü etkilemektedir.

6.2.2.3 İki katmanlı plakta kalınlığın etkisi

$[0,45]_T$ diziliminde bir cam epoksi kompozit plakta piezoelektrik sönümlemenin etkisi farklı plak kalınlıklarında incelenmiştir. Birinci modda kontrollü modal sönümleme oranının kalınlıkla değişim grafiği Şekil 6.9'daki gibi olmaktadır.

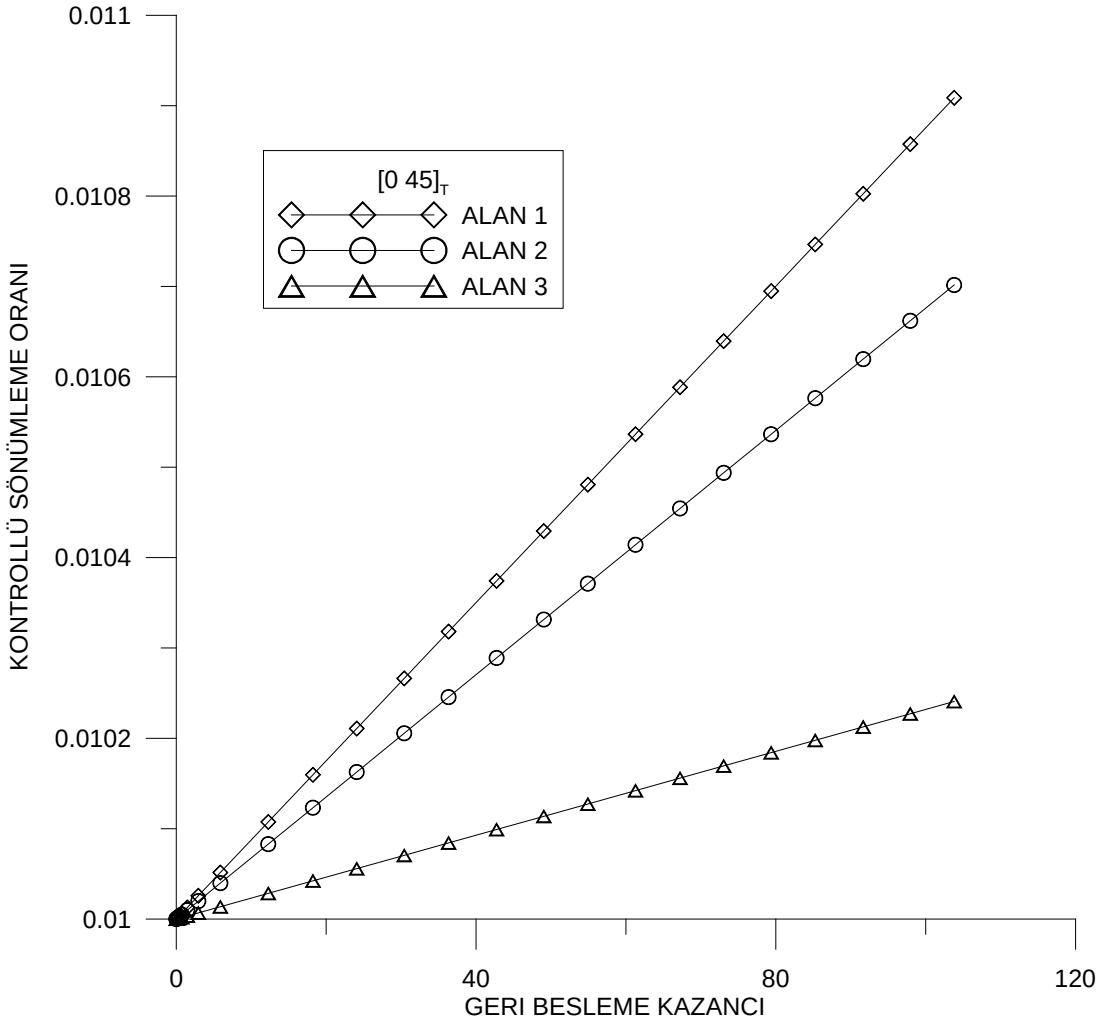


Şekil 6.9 : Kompozit plakta kalınlığın sönümlemeye etkisi

Şekil 6.9'da kompozit plakta sönümleme kontrolünün kalınlıkla değişimi, Şekil 6.7'de görülen pleksiglas izotropik plakta kalınlıkla değişime benzerdir.

6.2.2.4 Yama alanının etkisi

$[0,45]_T$ cam epoksi kompozit plağın, farklı alanlardaki piezoelektrik yamaların etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Piezoelektrik yamalar Çizelge 6.4'te malzeme özellikleri belirtilen PVDF filmler olup plak basit mesnetlidir. Plak (0.4 m x 0.4 m) boyutlarında olup, Alan 1'de yama koordinatları $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$=(0.05 , 0.05), (0.35 , 0.35); Alan 2'de (0.1 , 0.1), (0.3 , 0.3); Alan 3'te (0.15 , 0.15), (0.25 , 0.25) *m*'dir. bu durumda farklı yama alanlarında kontrol etkisi Şekil 6.10'daki gibi olmaktadır.

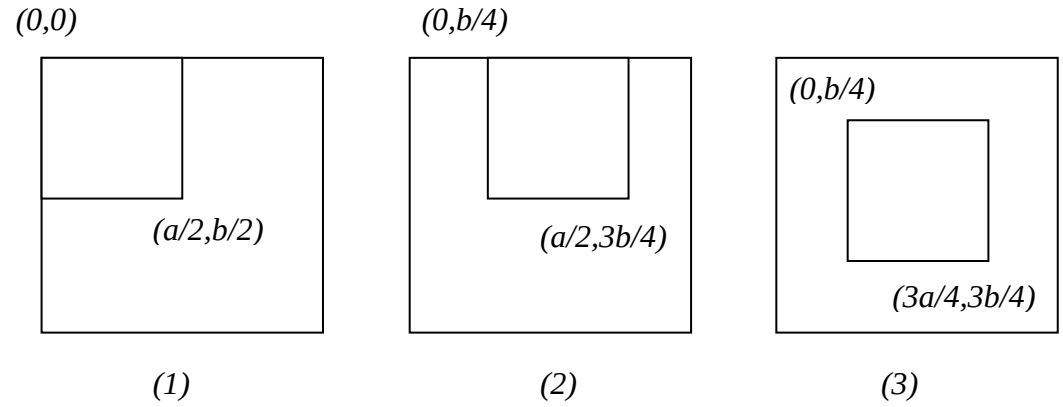


Şekil 6.10 : Farklı yama alanlarında ξ'_{mn} - ς değişimi

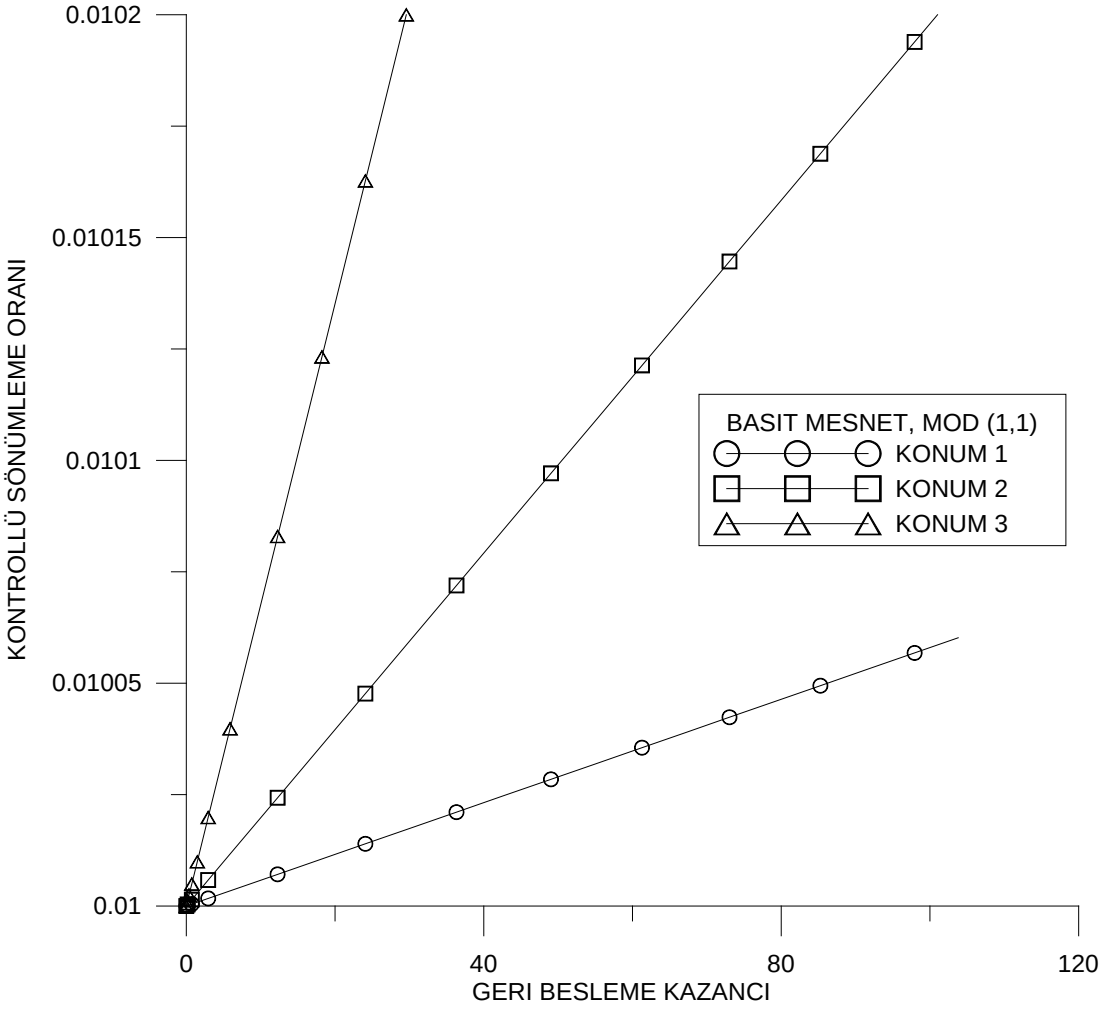
Şekil 6.10'da görüldüğü üzere, basit mesnetli plak üzerindeki etkin algılayıcı ve eyleyici alanı kontrol etkinliği ile doğru orantılıdır. Eyleyici ve algılyıcı alanı arttıkça kontrol etkinliği de artmaktadır. Basit mesnetli plakta en verimli titreşim sönümleme kontrolü yamaların plak alanına eşit olduğu durumda elde edilmiştir.

6.2.2.5 Yama konumu

1,6e-3 m. kalınlığında, basit mesnetli, $[0,45]_T$ plak üzerinde Şekil 6.11'de görülen yama konumlarına bağlı olarak elde edilen kontrol etkinliği, Şekil 6.12'de görülmektedir.



Şekil 6.11 : Yama konumları



Şekil 6.12 : Yama konumuna bağlı ξ'_{mn} - ς değişimi

Basit mesnetli plakta yama plak kenarında yerleştirildiğinde kontrol etkisi azalmaktadır. Yama, plağın ortasında konumlandığında daha fazla kontrol etkisi elde edilmektedir.

7. DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, ince kompozit katmanlı plak titreşimi, piezoelektrik yamalar yardımıyla kontrol edilmiştir. Algılayıcı ve eyleyici olarak çalışan piezoelektrik yamalar arasında geri besleme sağlanarak plakta titreşim sönümlemesi yapılmıştır. Basit mesnetli plaklarda, yama alanının plak alanına eşit olması gibi bazı özel durumlarda algılayıcıdan elde edilen sinyallerin sıfırlandığı görülmüş, algılayıcı ve eyleyici yamalar dört eşit parçaya bölünerek bu sorunun önüne geçilmiştir. Kompozit katmanlı plak alt ve üst yüzeylerinde herhangi bir alanda konumlanmış piezoelektrik yamalar ile plak titreşimi hız geri beslemeli olarak kontrol edilmiş, sistemin zamana bağlı ve zamandan bağımsız cevapları incelenmiştir. Farklı sınır koşullarındaki plakların mod şekil fonksiyonları, kiriş mod şekil fonksiyonlarının çarpımı yöntemi ile elde edilmiştir. Kompozit plağın farklı katman dizilimleri, farklı sınır koşulları, plak kalınlığı, yama boyutu ve konumunun sönümlemeye etkisi araştırılmıştır. Kontrol etkinliğinin yama alanıyla doğru, plak kalınlığı ile ters orantılı olduğu görülmüştür. Basit mesnetli plaklarda, sabit mesnetli plağa nazaran daha etkin bir kontrol sağlandığı gözlemlenmiştir. Sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak, nonlineer davranış gösteren kompozit plaklarda piezoelektrik yardımıyla titreşim kontrolünün incelenmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca sabit kazanç için oluşturulan kontrol algoritması sabit genlik için geliştirilerek daha verimli bir kontrol etkinliği sağlanması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **Reissner, E., Stavsky, Y.**, 1961: Bending And Stretching Of Certain Types Of Heterogeneous Elotropic Elastic Plates. *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. **28**, pp. 402–408.

[2] **Whitney, J. M.**, 1987: Structural Analysis Of Laminated Anisotropic Plates. *Lancaster: Technomic*.

[3] **Reddy, J. N.**, 1979: Free Vibration Of Antisymmetric Angle Ply Laminated Plates Including Transverse Shear Deformation By The Finite Element Method. *J. Sound Vibr.* Vol. **4**, pp 565–576.

[4] **Noor, A. K., Burton, W. S.**,1989: Stress And Free Vibration Analysis Of Multilayer Composite Plates. *Compos. Struct*. Vol. 11, pp.183–204.

[5] **Bert, C. W., Malik, M.**, 1997: Differential Quadrature: A Powerful New Technique For Analysis Of Composite Structures. *Compos. Struct.* Vol.**39**, pp. 179–189.

[6] **Nelson, R. B., Lorch, D. R.**, 1974: A Refined Theory For Laminated Orthotropic Plates. *ASME J. Appl. Mech.* Vol. **41**, pp. 177–183.

[7] **Reddy, J. N., Phan, N. D.**, 1985: Stability and Vibration Of Isotropic, Orthotropic And Laminated Plates According To A Higher-Order Shear Deformable Theory. *J. Sound Vibr*. Vol. **98**, pp. 157–170.

[8] **Khdeir, A.A., Librescu, L.**, 1988: Analysis Of Symmetric Cross-Ply Laminated Elastic Plates Using A Higher-Order Theory. Part II: Buckling and Free Vibration. *Compos. Struct.* Vol. **9**, pp. 259–277.

[9] **Khdeir, A. A.**, 1988: Free Vibration And Buckling Of Symmetric Cross-Ply Laminated Plates By An Exact Method. *J. Sound Vibr.* Vol. **126**, pp. 447–461.

[10] **Mallikarjuna, Kant, T.**, 1989: Free Vibration Of Symmetrically Laminated Plates Using A Higher Order Theory With Finite Element Technique. *Int. J. Numer. Meth. Eng*. Vol. **28**, pp. 1875–1889.

[11] **Wu, C. P., Chen, W. Y.**, 1994: Vibration And Stability Of Laminated Plates Based On A Local High Order Plate Theory. *J. Sound Vibr*. Vol.**177**, pp. 503–520.

[12] **Zenkour, A. M.**, 2000: Natural Vibration Analysis Of Symmetrical Cross-Ply Laminated Plates Using A Mixed Variational Formulation. *Eur. J. Mech. A/Solids*. Vol. **19**, pp. 469–485.

[13] **Matsunaga, H.**, 2000: Vibration And Stability Of Cross-Ply Laminated Composite Plates According To A Global Higher-Order Plate Theory.*Compos. Struct.* Vol. **48**, pp. 231–244.

[14] **Aydogdu, M., Timarci, T.**, 2003: Vibration Analysis Of Cross-Ply Laminated Square Plates With General Boundary Conditions. *Compos. Sci. Technol.* Vol. **63**, pp. 1061–1070.

[15] **Chen, W. O., Lüe, C. F.**, 2005: 3D Free Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Plates With One Pair of Opposite Edges Simply Supported. *Compos. Struct*. Vol. **69**, pp. 77-87.

[16] **Moheimani, S. O R., Fleming, A. J.**, 2006. Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping. Springer. Almanya.

[17] **Rogacheva, N. N.**,1994. Piezoelectric Shells and Plates. CRC Press, USA

[18] **Batra, R. C., Mewer, R. C., Vel, S. S.**, 2004: Analytical Solution for the Cylindrical BendingVibration of Piezoelectric Composite Plates. *Int. J. Solids and Struct.,* Vol. **41**, pp. 1625-1643.

[19] **Vasiliev, V. V., Morozov, E. V.**, 2001. Mechanics and Analysis of Composite Materials. Elsevier Science, UK.

[20] **Jones, R. M.**, 1999. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis, USA.

[21] **Kaw, A. K.**, 2006. Mechanics of Composite Materials. CRC Press, USA.

[22] **Berthelot, J. M.**,1999. Composite Materials. Springer, USA.

[23] **Reddy, J. N.**, 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. CRC Press, USA.

[24] **Nallim, L. G., Oller, S.**, 2008: An Analytical–Numerical Approach To Simulate The Dynamic Behaviour of Arbitrarily Laminated Composite Plates. Comp. Struct. Vol 85, pp. 311-325.

[25] **Nettles, A. T.**, 1994. Basic Mechanics of Laminated Composite Plates. Nasa Reference Publication, USA.

[26] **Ventsel, E., Krauthammer, T.**, 2001. Thin Plates and Shells. Marcel Dekker, USA.

[27] **Zabihollah, A.**, 2007. Analysis, Design Optimization and Vibration Suppression of Smart Laminated Beams, PhD Thesis, Concordia Uni., Canada.

[28] **Bisegna, P., Caruso, G., Maceri, F.**, 2001: A Layer-Wise Reissner-Mindlin-type Model for the Vibraion Analysis and Suppression of Piezoactuated Plates. Computers and Structures, Vol.**79**, pp. 2309-2319.

[29] **Gristchak, V. Z., Ganilova, O. A.**, 2008: A Hybrid WKB–Galerkin Method Applied to a Piezoelectric Sandwich Plate Vibration Problem Considering Shear Force Effects. Journal of Sound and Vibration, Vol. **317**, pp. 366–377.

[30] **He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashanker, S., Liew K. M.**, 2001: Active Control of FGM Plates with Integrated Piezoelectric Sensors and Actuators. International Journal of Solids and Structures, Vol. **38**, pp. 1641-1655.

[31] **Leissa, A.**, 1993. Vibrations of Shells. Acoustical Society of America, USA.

[32] **Rao, S. S.**, 2004. Mechanical Vibrations. Pearson Edu., USA.

[33] **Tzou, H. S., Fu, H. Q.**, 1994: A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part 1: Theoretical Analysis. *J. Sound and Vibr.* Vol. 172, pp. 247-259

[34] **Tzou, H. S., Fu, H. Q.**, 1994: A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part 2: Parametric Study and Active Vibration Control. *J. Sound and Vibr.* Vol. 172, pp. 261-275.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Alev KAÇAR

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 1983

Adres: İmrahor Salacak M. Bestekar Selahattin Pınar S. 40 / 1 Üsküdar

Lisans Üniversite: İTÜ, Uzay Mühendisliği

Yayın Listesi:

- Kaçar, A., Kaya, M. O., Vibration Control of Laminated Plate by Smart Patches, 3. International Conference on Integrity, Reliability, Failure, 20-24 Temmuz 2009, Porto, Portekiz.
- Kaçar, A., Özkol,İ., Durmaz, S., Kaya, M. O, 2009: More Physical-Base Solution of a Sliding Mass on a Hemisphere in both Newton and Lagrange Mechanics, The Physics Teacher (değerlendirmede).
- Kaçar, A., Kaya, M. O., Active Vibration Control of a Composite Plate With Piezoelectric Patches, 4. Ankara International Aerospace Conference, 17-19 Ağustos 2009, ODTÜ, Ankara (değerlendirmede).