İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DOUGLAS METRİKLİ KROPİNA UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

Salim CEYHAN

Anabilim Dalı : Matematik Mühendisliği

Programı : Matematik Mühendisliği

ŞUBAT 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DOUGLAS METRİKLİ KROPİNA UZAYLARI

DOKTORA TEZİ

Salim CEYHAN
(509942074)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Ekim 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 24 Şubat 2009

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Gülçin ÇİVİ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER(KHAS)
Prof. Dr. Leyla Zeren AKGÜN (İÜ)
Prof. Dr. Zerrin ŞENTÜRK (İTÜ)
Doç. Dr. Uğur DURSUN (İTÜ)

ŞUBAT 2009

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince yardımlarını esirgemeyen ve geç saatlere kadar özverili bir şekilde çalışmamızda iyi niyetini gösteren değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Gülçin Çivi' ye sonsuz teşekkür ve minnet duygularımı burada belirtmeyi bir borç bilirim. Ayrıca, tez çalışma raporlarımda çok değerli katkı ve önerilerinden yararlandığım değerli hocalarım sayın Prof.Dr.Abdülkadir ÖZDEĞER ve sayın Doç.Dr.Uğur DURSUN 'a çok teşekkür ederim.

Şubat 2009 Salim CEYHAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ ..... **vi**
SEMBOL LİSTESİ ..... **vii**
ÖZET ..... **ix**
SUMMARY ..... **xiii**

1. GİRİŞ **1**

1.1 Finsler Geometrisinin Tarihsel Süreci 1
1.2 Minkowski Normları 2
1.3 Finsler Metrikleri 3
1.4 $(\alpha, \beta)-$Metrikli Finsler Uzayları 4
1.5 Finsler Metriklerinin Spreyleri 5
1.6 Riemannian Eğrilik ve Flag Eğrilik 7
1.7 Projektif Düz Finsler Metrikleri 9
1.8 Finsler Uzaylarının Projektif Dönüşümü 10

2. KROPİNA METRİKLİ FİNSLER UZAYLARI **13**

2.1 Douglas Metrikli Finsler Uzayları 13
2.2 Genelleştirilmiş Douglas Metrikli Finsler Uzayları 15
2.2.1 Genelleştirilmiş Douglas Metrikli Kropina Uzayları 16
2.3 Finsler Uzaylarında R-Eğrilik Tensörü 27
2.3.1 Skaler Flag Eğrilikli Kropina Uzayları 28
2.4 $Z-$Projektif Finsler Uzayları 39
2.4.1 $Z-$Projektif Koşulu Altında İnvaryant Kalan Büyüklükler 40
2.4.2 $Z-$Projektif Kropina Uzayları 41
2.5 $D-$Rekürant Finsler Uzayları 49
2.5.1 Genelleştirilmiş Douglas Metrikli $D-$Rekürant Kropina Uzayları 49

3. KROPİNA DÖNÜŞÜMLERİ **53**

3.1 Finsler Uzaylarında Kropina Dönüşümleri 53

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA **61**

KAYNAKLAR **63**
ÖZGEÇMİŞ **65**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1: Flag Eğrilik **8**

Şekil 1.2: Kesitsel Flag Eğrilik **8**

SEMBOL LİSTESİ

M	: $n-$boyutlu, diferansiyellenebilir manifold
$F = F(x, y)$	: Finsler metrik fonksiyonu
F_n	: $n-$boyutlu Finsler uzayı
$g_{ij}(x, y)$	: Finsler uzayının metrik tensörü
$g_y(u, v)$	: u, v vektörlerinin iç çarpımı
$\alpha(x, y)$	: Riemann metriği
$\beta(x, y)$	: Diferansiyel $1-$form
$a_{ij}(x)$	: Riemann uzayının metrik tensörü
δ^i_j	: Kronecker deltası
$h_{ij}(x, y)$	: Finsler uzayının açısal metrik tensörü
$G_{_F}$	: F Finsler metriğinin spreyi
$G^i_{_F}(x, y)$	: F Finsler metriğinin sprey (geodezik) katsayıları
$R^i_k(x, y)$	: Riemann eğrilik tensörü
R^i_i	: Ricci eğriliği veya Ricci skaleri
$K(x, y)$	: Flag eğrilik
$P(x, y)$	: Projektif çarpan
Q_0, Q_1, Q_2	: Projektif invaryantlar
W^i_k	: Weyl eğrilik tensörü
D^h_{ijk}	: Douglas eğrilik tensörü
$B\Gamma(G^i_{_{Fjk}}, G^i_{_{Fj}}, 0)$	: F Finsler metriğinin Berwald konneksiyonu
R^i_{ljk}	: R-eğrilik tensörü
;	: α Riemann metriğinin Berwald konneksiyonuna göre yatay kovaryant türevi
$\vert$	: F Finsler metriğinin Berwald konneksiyonuna göre yatay kovaryant türevi
$\Vert$	: $\widetilde{F}$ Finsler metriğinin Berwald konneksiyonuna göre yatay kovaryant türevi

GENELLEŞTİRİLMİŞ DOUGLAS METRİKLİ KROPİNA UZAYLARI

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak, Finsler geometrisinin kısa bir tarihçesi verildi. Sonra, Finsler metriklerine ait temel tanımlar ve özellikler ve son olarak da projektif dönüşümler altında invaryant kalan Douglas tensörü, Weyl tensörü ve $Q-$invaryantları adı verilen bazı büyüklükler tanıtıldı.

Bir V vektör uzayında negatif olmayan bir $F : V \to [0, \infty)$ fonksiyonu herhangi $y \in V$ için aşağıdaki özelliklere sahip ise bir Minkowski normudur:

1) $F(y) \geq 0$ ve $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$,

2) $\lambda > 0$ için, $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, yani, F birinci dereceden pozitif $y-$homojen,

3) F, $V\backslash\{0\}$ üzerinde C^∞ sınıfından ve V üzerindeki

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big[F^2(y + su + tv)\Big]\Big|_{t=s=0}$$

simetrik bilineer formu bir iç çarpımdır. g_y iç çarpımı, y doğrultusundaki esas form ve (V, F) çifti de bir Minkowski uzayı adını alır.

M, C^∞ sınıfından $n-$boyutlu diferansiyellenebilir, bağlantılı bir manifold ve $TM = \bigcup T_xM$, $(x \in M)$, M nin teğet uzayı demeti olsun. Burada $T_xM, x \in M$ noktasındaki teğet uzaydır. Bir $F = F(x, y) : TM \to [0, \infty)$ fonksiyonuna aşağıdaki özellikleri sağladığında bir Finsler metriği adı verilir:

a) F, $TM_0 = TM\backslash\{0\}$ de C^∞ sınıfından,

b) herhangi bir $x \in M$ noktasında, $F_x(y) = F(x, y)$, T_xM uzayında bir Minkowski normudur.

(M, F) çiftine de bir Finsler uzayı denir. Lokal koordinatlarda, bir Finsler uzayının $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$ metrik tensörü

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}F^2(x, y)$$

ile verilir.

Finsler geometrisinde, Finsler metrikleri geometrik özelliklerine göre çeşitli sınıflara ayrılır. Bir manifold üzerinde gerekli koşulları sağlayan bir çok Riemann ve Riemannian olmayan Finsler metrikleri vardır.

$\phi(s)$, $(-b_0, b_0)$ aralığında C^∞ sınıfından

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \quad |s| \leq b_0 \qquad (\phi > 0)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Burada a^{ij} Riemann metrik tensörünün kontravaryant bileşenlerini göstermek üzere, $b^2 = a^{ij}(x)b_i b_j = b^i b_i$, $b_i = b_i(x)$ dir. Herhangi bir $x \in M$ için $\| \beta_x \|_\alpha = \sqrt{a^{ij}(x)b_i b_j} \leq b_0$ ise,

$$F = \alpha\phi(s), \quad s = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \Big(\alpha = \alpha(x,y),\, \beta = \beta(x,y)\Big) \tag{1}$$

fonksiyonu bir Finsler metriğidir. (1) ile tanımlanan Finsler metriklerine $(\alpha, \beta)-$metrikleri denir. Burada $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ Riemannian bir metrik ve $\beta(x,y) = b_i(x)y^i$ diferansiyel bir formdur.

Randers ve Kropina metrikleri, sırasıyla, $F = \alpha + \beta$ ve $F = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$ formunda özel $(\alpha, \beta)-$metrikleridir.

Her F Finsler metriği ve F metriğinin $G^i_{_F}$ sprey katsayıları, geodezikleri veren bir $G_{_F} = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i_{_F} \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ spreyini meydana getirir. Bir Finsler uzayı üzerinde bir geodezik

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i_{_F}(x, \frac{dx}{dt}) = 0$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilir. Eğer $G^i_{_F} = G^i_{_F}(x,y)$ sprey katsayıları her x noktasındaki $y \in T_xM$ nin kuadratik fonksiyonları, yani,

$$\begin{aligned} G^i_{_F} &= \frac{1}{2}\,\Gamma^i_{jk}(x)\, y^j y^k \\ &= \frac{1}{4} g^{il}\Big\{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \Big\} \end{aligned}$$

ise, F Finsler metriğine bir Berwald metriği adı verilir. $(\alpha, \beta)-$metrikleri Berwald metriklerinin bir sınıfını oluşturur.

$R_y : T_xM \to T_xM$ Riemann eğriliği, Berwald konneksiyonlu bir manifold üzerinde

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i_{_F}}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i_{_F}}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j_{_F} \frac{\partial^2 G^i_{_F}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i_{_F}}{\partial y^j} \frac{\partial G^j_{_F}}{\partial y^k}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $y \in T_xM$ vektörünü içeren bir $P \subset T_xM$ teğet düzlemi için $u \in P$, ve $P = span\{y, u\}$ olmak üzere

$$K(P,y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y,y)g_y(u,u) - [g_y(y,u)]^2}$$

ile tanımlanan $K = K(P,y)$ ya flag eğrilik adı verilir. Eğer $K(P,y) = K(x,y)$ şeklinde bir skaler fonksiyon ise; F, skaler eğrilikli, $K(P,y) = sbt.$ ise F, sabit flag eğriliklidir.

$F_n = F_n(M,F)$ ve $\widetilde{F}_n = \widetilde{F}_n(M,\widetilde{F})$ iki Finsler uzayı olsun. Burada F ve $\widetilde{F}$, M üzerindeki temel fonksiyonlardır. Eğer F_n üzerinde herhangi bir geodezik $\widetilde{F}_n$ uzayınında bir geodeziği veya tersi de doğru ise, $\sigma : F \to \widetilde{F}$ dönüşümüne projektif dönüşüm adı verilir. σ dönüşümünün projektif bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki ilişkiyi sağlayan skaler bir $P = P(x,y)$ fonksiyonunun var olmasıdır:

$$G^i_{\widetilde{F}} = G^i_{F} + Py^i.$$

Burada projektif çarpan adı verilen P, y nin birinci dereceden pozitif homojen fonksiyonudur.

İkinci bölümde, Douglas uzayı ve genelleştirilmiş Douglas metrikleri tanıtıldı ve Kropina ve Riemann metriklerinin, sırasıyla, G^i_{F} ve G^i_{α} sprey katsayıları arasındaki

$$G^i_{F} = G^i_{\alpha} - \frac{\alpha^2}{2\beta}s^i_0 - \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{\alpha^2 b^2}y^i + \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{2\beta b^2}b^i \tag{2}$$

ilişkisi elde edildi.

Bir Douglas metriği

$$G^i_{F} = G^i_{F}(x,y) = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k + P(x,y)y^i$$

formundaki sprey katsayılarına sahip bir Finsler metriğidir. Bir F_n Finsler uzayının Douglas tensörü, eğer $h^p_i D^i_{jkl|m}y^m = 0$ denklem sistemini sağlıyorsa Finsler uzayına genelleştirilmiş Douglas uzayı adı verilir. Burada $h^p_i = \delta^p_i - \dfrac{y^p}{F}\dfrac{\partial F}{\partial y^i}$ dir. Bu çalışmada, öncelikle, bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek koşullar araştırılmıştır.

Bu amaçla, (2) de $G^i_{\bar{F}} = G^i_{\alpha} - \dfrac{\alpha^2\beta^{-1}}{2}s^i_0 + \dfrac{\alpha^2\beta^{-1}s_0 + r_{00}}{2b^2}b^i$ yazılarak $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayı ve F_n Kropina uzayı arasındaki bir projektif dönüşümü gösteren

$$G^i_{\bar{F}} = G^i_{F} + Py^i$$

ilişkisi bulundu. "Genelleştirilmiş Douglas uzayları projektif ilişkiler altında kapalıdır." sonucunu kullanarak, genelleştirilmiş Douglas metrikli Kropina uzayları için gerek ve yeter koşulu veren polinom denklemler

$$\begin{gathered}\beta^5 A_2 + \beta^4(\alpha^2 B_1 + B_3) + \beta^3(\alpha^4 B_0 + \alpha^2 B_2 + B_4) + \beta^2(\alpha^4 C_1 + \alpha^2 C_3 + C_5) \\ +\beta(\alpha^4 D_2 + \alpha^2 D_4) + \alpha^6 E_1 + \alpha^4 E_3 = 0\end{gathered}$$

olarak elde edildi ve bu polinom denklemi sağlayan gerek koşul bir teoremle ifade ve ispat edildi. Sonra, skaler flag eğrilikli bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olmasını sağlayan gerek ve yeter koşulun elde edilmesi problemi gözönüne alındı. Ele alınan problem için öncelikle, $R-$eğrilik tensörü incelendi ve $R-$eğrilik tensörü için Riemannian geometrideki birinci ve ikinci Bianchi özdeşliklerine eşdeğer olan özdeşlikler ispat edildi. Ayrıca, skaler flag eğrilikli Kropina uzayları karakterize edildi ve elde edilen tüm sonuçlar kullanılarak, skaler flag eğrilikli bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olması için gerek ve yeter koşul

$$s_{kl} = 0 \tag{3}$$

olarak elde edildi. Daha sonra, projektif dönüşüm üzerine $P_{|i} - PP_i = 0$, $\left(P_{|k} = \dfrac{\partial P}{\partial x^k} - G^r_{Fk}\dfrac{\partial P}{\partial y^r}, \quad P_i = \dfrac{\partial P}{\partial y^i}\right)$ ile tanımlanan $Z-$projektiflik koşulu gözönüne alınarak, bu koşul altında invaryant kalan büyüklükler incelendi ve

$$A_5\beta^4 + A_4\beta^3\alpha^2 + A_3\beta^2\alpha^4 + A_2\beta\alpha^6 + A_1\alpha^8 = 0$$

formundaki polinom denklemler çözülerek $\sigma : F \to \widetilde{F}$ projektif dönüşümün $Z-$projektif bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşullar bulundu. Ayrıca, $D^i_{jkl|m}y^m = \phi(x,y)D^i_{jkl}$, ($\phi = \phi(x,y) : y$ nin birinci dereceden pozitif homojen fonksiyonu) koşulunu sağlayan $D-$ rekürant Kropina uzayı incelenerek $D-$rekürant bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek ve yeter koşul

$$s_{ij} = \frac{1}{b^2}(b_i s_j - b_j s_i), \quad \left(s_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i;j} - b_{j;i}),\ s_j = s_{ij}b^i\right)$$

olarak elde edildi.

Bu bölümde son olarak, $D-$rekürant ve zayıf Berwald metrikli bir F_n Kropina uzayı için aşağıdaki koşulların eşdeğer olduğu ispat edildi.

1) F_n bir Berwald uzayıdır.

2) F_n bir genelleştirilmiş Douglas uzayıdır.

3) F_n için $s_{kl} = \dfrac{s_l b_k - s_k b_l}{b^2}$ dır.

4) F_n bir Douglas uzayıdır.

Üçüncü bölümde, F^* ve F metrikleri arasında

$$F^*(x,y) = \frac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)}$$

şeklinde tanımlanan $\rho : F \to F^*$ Kropina dönüşümü tanıtıldı. Projektif düz bir F Randers metriği ile bir F^* Finsler metriği arasında göz önüne alınan böyle bir dönüşüm altında, F^* Finsler metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşulun

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0$$

diferansiyel denkleminin sağlanması olduğu ispatlandı.

Sonra, projektif düz F metrikli bir F_n Randers uzayı ve projektif düz F^* metrikli bir F^*_n Finsler uzayı arasındaki $\rho : F \to F^*$ dönüşümünün bir Kropina dönüşümü olması halinde F^*_n Finsler uzayının flag eğriliğinin

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}\left(p^2 - y^i\frac{\partial p}{\partial x^i}\right), \qquad \text{(p: Randers metriğinin projektif çarpanı)}$$

olduğu gösterildi. Bu bölümde son olarak, bir F Finsler metriği ile bir F^* zayıf Berwald metriği arasındaki $\rho : F \to F^* = \dfrac{F^2}{\beta}$ Kropina dönüşümünün projektif düz bir Finsler metriğini, skaler flag eğrilikli ve genelleştirilmiş Douglas metrikli bir Kropina uzayının metriğine dönüştürmesi için gerek ve yeter koşulun $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0$ olduğu ispat edildi.

KROPINA SPACES WITH A GENERALIZED DOUGLAS METRIC

SUMMARY

This work contains three chapters. In Chapter I, firstly, a brief history of Finsler geometry is given, and then the fundamental definitions and properties concerning Finsler metrics are presented. Next, the Douglas tensor, Weyl tensor and some quantities named as $Q-$invariants under the projecive changes are introduced.

A Minkowski norm on a vector space V is a non-negative function $F : V \to [0, \infty)$ with the following properties:

1) $F(y) \geq 0$ for any $y \in V,$ and $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$,

2) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$ for any $\lambda > 0$ and any $y \in V$, i.e, F is positively $y-$homogeneous of degree one,

3) F is C^∞ on $V\backslash\{0\}$ such that for any $y \in V\backslash\{0\}$, the following bilinear symmetric form g_y on V is an inner product,

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big[F^2(y + su + tv)\Big]\Big|_{t=s=0}.$$

The inner product g_y is called the fundamental form in the direction of y. The pair $(V,\ F)$ is called a Minkowski space. Let M be a differentiable, connected manifold of dimension n of class C^∞ and $TM = \bigcup T_xM,\ (x \in M)$ be the tangent bundle of M, where T_xM is the tangent space at $x \in M$. A function $F = F(x, y) : TM \to [0, \infty)$ satisfying the following properties is called a Finsler metric

a) F is C^∞ on $TM_0 = TM\backslash\{0\}$

b) for any $x \in M,\ F_x(y) = F(x, y)$ is a Minkowski norm on T_xM.

The pair (M, F) is called a Finsler space. In a Finsler space, the metric tensor is given by

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}F^2(x, y).$$

In Finsler geometry, Finsler metrics are separated into several classes according to their geometric properties. And, there are many Riemannian and non-Riemannian Finsler metrics satisfying the necessary conditions on a manifold.

Let $\phi(s)$ be a positive C^∞ function on $(-b_0, b_0)$ satisfying

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \quad |s| \leq b_0$$

where $b^2 = a^{ij}(x)b_ib_j = b^ib_i, \quad b_i = b_i(x)$. If $\| \beta_x \|_\alpha = \sqrt{a^{ij}(x)b_ib_j} \leq b_0$ for any $x \in M$ then the function defined by

$$F = \alpha\phi(s), \quad s = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \Big(\alpha = \alpha(x,y),\, \beta = \beta(x,y)\Big) \tag{1}$$

is a metric and it is called a $(\alpha,\beta)-$metric, where $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ is a Riemannian metric, $\beta(x,y) = b_i(x)y^i$ is a $1-$form.

Randers and Kropina metrics are special $(\alpha,\beta)-$metrics having the forms $F = \alpha + \beta$ and $F = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$, respectively.

Every Finsler metric F and $G^i_{_F}$, the spray coefficients of F, induce a spray $G_{_F} = y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i_{_F}\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ which determines the geodesics. A geodesic in a Finsler space are given by the system of differential equations

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i_{_F}(x, \frac{dx}{dt}) = 0.$$

If the spray coefficients $G^i_{_F} = G^i_{_F}(x,y)$ are quadratic in $y \in T_xM$ at every point x, i.e.,

$$\begin{aligned} G^i_{_F} &= \frac{1}{2}\,\Gamma^i_{jk}(x)\,y^jy^k \\ &= \frac{1}{4}g^{il}\Big\{[F^2]_{x^ky^l}y^k - [F^2]_{x^l}\Big\}, \end{aligned}$$

then the Finsler metric F is called a Berwald metric. The $(\alpha,\beta)-$metrics are Berwald metrics.

The Riemann curvature $R_y : T_xM \to T_xM$ is defined by

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i_{_F}}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^2 G^i_{_F}}{\partial x^j\partial y^k} + 2G^j_{_F}\frac{\partial^2 G^i_{_F}}{\partial y^j\partial y^k} - \frac{\partial G^i_{_F}}{\partial y^j}\frac{\partial G^j_{_F}}{\partial y^k}$$

on a manifold with a Berwald connection.

For a tangent plane $P \subset T_xM$ containing $y \in T_xM$, $K = K(P,\, y)$ given by

$$K(P,y) = \frac{g_y(R_y(u),u)}{g_y(y,y)g_y(u,u) - [g_y(y,u)]^2}$$

is called the flag curvature, where $u \in P$ such that $P = span\{y,u\}$. If $K(P,y) = K(x,y)$ is a scalar function, F is said to have a scalar curvature and if $K(P,y) = const.$, F is said to have a constant flag curvature.

Let $F_n = F_n(M,F)$ and $\widetilde{F}_n = \widetilde{F}_n(M,\widetilde{F})$ be two Finsler spaces, where F ve $\widetilde{F}$ are fundamental functions on M. If any geodesic on F_n is also a geodesic on $\widetilde{F}_n$ and if the inverse is also valid, then the change $\sigma : F \to \widetilde{F}$ is called a projective change. A change from F to $\widetilde{F}$ is a projective change if and only if there exists a scalar field $P = P(x,y)$ such that

$$G^i_{_{\bar{F}}} = G^i_{_F} + Py^i,$$

where $P(x,y)$ being a positively homogeneous of degree one in y^i and is called the projective factor.

In Chapter II, The definitions of the Douglas and the generalized Douglas metrics are given and then the relation between the spray coefficients $G^i_{_F}$ and $G^i_{_\alpha}$ which belong to a Kropina metric and a Riemann metric ,respectively, is obtained as

$$G^i_{_F} = G^i_{_\alpha} - \frac{\alpha^2}{2\beta}s^i_0 - \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{\alpha^2 b^2}y^i + \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{2\beta b^2}b^i. \tag{2}$$

A Douglas metric is a Finsler metric having the spray coefficients in the form

$$G^i_{_F} = G^i_{_F}(x,y) = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)\, y^j y^k + P(x,y)y^i$$

If $h^p_i D^i_{jkl|m} y^m = 0$, the Finsler space F is called a generalized Douglas spaces, where $h^p_i = \delta^p_i - \dfrac{y^p}{F}\dfrac{\partial F}{\partial y^i}$.

In this work, firstly, the necessary and sufficient conditions for a Kropina space with generalized Douglas metric are studied.

For this aim, by substituting $G^i_{_{\tilde{F}}} = G^i_{_\alpha} - \dfrac{\alpha^2\beta^{-1}}{2}s^i_0 + \dfrac{\alpha^2\beta^{-1}s_0 + r_{00}}{2b^2}b^i$ in the relation given by equation (2), it is obtained that

$$G^i_{_{\tilde{F}}} = G^i_{_F} + Py^i$$

which characterizes a projective change between the Kropina space F_n and the Finsler space $\widetilde{F}_n$. By using the fact that generalized Douglas spaces are closed under projective relations, the polynomial equation giving the necessary and sufficient conditions for Kropina space with generalized Douglas metric are obtained as

$$\begin{aligned}\beta^5 A_2 + \beta^4(\alpha^2 B_1 + B_3) + \beta^3(\alpha^4 B_0 + \alpha^2 B_2 + B_4) + \beta^2(\alpha^4 C_1 + \alpha^2 C_3 + C_5)\\ +\beta(\alpha^4 D_2 + \alpha^2 D_4) + \alpha^6 E_1 + \alpha^4 E_3 = 0\end{aligned} \tag{3}$$

and, then the necessary condition satisfying the polynomial equation (3) is introduced and stated as a theorem. Next, the $R-$curvature is studied and the identities analogue to the first and the second Bianchi identities in the Riemannian geometry are proved. Next, the Kropina spaces of the scalar flag curvature are characterized and by using all results which are obtained, it is proved that a Kropina space of scalar flag curvature is a generalized Douglas space if and only if

$$s_{kl} = 0.$$

Later, the $Z-$projective change which is defined as $P_{|i} - PP_i = 0$, $\left(P_{|k} = \dfrac{\partial P}{\partial x^k} - G^r_{_F k}\dfrac{\partial P}{\partial y^r},\quad P_i = \dfrac{\partial P}{\partial y^i}\right)$ is considered and the quantities which are invariant under the $Z-$projective change are studied and the polynomial equations which are obtained in the form

$$A_5\beta^4 + A_4\beta^3\alpha^2 + A_3\beta^2\alpha^4 + A_2\beta\alpha^6 + A_1\alpha^8 = 0$$

are solved, and the necessary and sufficient conditions for which the projective change between a Kropina space F_n and a Finsler space $\widetilde{F}_n$ is a $Z-$projective change are proved by a theorem.

In addition, a $D-$recurrent Kropina space satisfying the condition $D^i_{jkl|m}y^m = \phi(x,y)D^i_{jkl}$ where $\phi = \phi(x,y)$ is a positively homogeneous function of degree one in y are studied and proved that a $D-$recurrent Kropina space carries a generalized Douglas metric if and only if the condition

$$s_{ij} = \frac{1}{b^2}(b_i s_j - b_j s_i)$$

holds, where $s_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i;j} - b_{j;i})$ and $s_j = s_{ij}b^i$.

In this chapter, finally it is proved that the following conditions are equivalent for a $D-$recurrent Kropina space F_n with weak Berwald metric:

1) F_n is a Berwald space.

2) F_n is a generallized Douglas space.

3) for F_n ,$s_{kl} = \frac{s_l b_k - s_k b_l}{b^2}$.

4) F_n is a Douglas space.

In Chapter III, The Kropina change $\rho : F(x,y) \to F^*(x,y)$ defined by

$$F^*(x,y) = \frac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)}$$

is considered and a such a change between the projective flat Randers metric F and the Finsler metric F^* is studied, and it is proved that the Finsler metric F^* is projectively flat under Kropina change if and only if the differential equation

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0$$

is satisfied.

Next, it is shown that if a Kropina change $\rho : F(x,y) \to F^*(x,y)$ between a projective flat Randers space F_n and a projective flat Finsler F^*_n, then the flag curvature of the Finsler space F^*_n is

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}\left(p^2 - y^i\frac{\partial p}{\partial x^i}\right), \text{(p: the projective factor for the Randers metrics)}.$$

In this chapter, finally, we considered the Kropina change $\rho : F(x,y) \to F^*(x,y)$ between the projective flat Finsler metric F and the weakly Berwald metric F^* and, then we proved that the metric F^* is a Kropina metric with the type of the generalized Douglas of scalar flag curvature if and only if $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0$.

1. GİRİŞ

1.1 Finsler Geometrisinin Tarihsel Süreci

M.Ö. 300 de Öklid, düzlem geometriyi ünlü beş aksiyomu ile tanımlamıştır. Öklidyen geometri, R^n de noktalar, doğrular, düzlemler, açılar gibi kavramları ve Öklid geometrisinin aksiyomlarıyla oluşturulmuş önerme ve teoremleri baz alır (Pisagor teoremi, trigonometrik formüller,...). Doğayı anlamak için düz olmayan uzaylar üzerinde geometri inşa etmeye ihtiyaç vardır. İlk olarak Gauss bu amaçla R^3 te $2-$boyutlu yüzeyleri çalışarak düz olmayan uzayları tanımlamıştır. Daha sonra, B. Riemann, 1854 de Öklidyen uzaylara yerel olarak homeomorfik olan manifold tanımını vermiştir. Sonra bir manifold üzerinde, vektörler arasındaki açıları, iki nokta arasındaki uzaklığı ve eğrilerin uzunluğunu ölçmeyi sağlayan Riemann metriğinin tanımını vermiştir. Bununla birlikte, Riemann sonsuz küçük bir büyüklüğün verilmesiyle, genel düzgün mesafe fonksiyonlarını ifade etme problemini de ortaya atmıştır. P. Finsler tarafından bir Finsler manifoldu üzerinde varyasyonlar hesabı yöntemleriyle, bu problem incelenineye kadar yaklaşık 60 yıl süren çalışmalardan somut bir sonuç elde edilememiştir. Finsler'in 1918 deki doktora tezi çalışması bu doğrultudaki ilk adım olmuş ve izleyen bir kaç yıl içinde varyasyonlar hesabının notasyonları yerini tensör hesabı notasyonlarının kullanımına bırakmıştır. 1925 te Synge, Taylor ve Berwald hemen hemen eş zamanlı olarak bu yeni uzay için tensör hesabı metotlarını kullanmışlardır. Tensör notasyonları ile bir Finsler uzayının metrik tensörünün bileşenleri, Riemann geometrisindeki metrik tensöre eşdeğer olarak $g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\Big[F^2\Big]_{y^i y^j}(x,y)$ şeklinde tanımlanmıştır. Berwald 1926 da bir Finsler manifoldu üzerinde Berwald konneksiyonu tanımını ve bazı Riemannian olmayan büyüklükleri vermiştir. Daha sonraki yıllarda Cartan ve Chern kendi konneksiyonlarını Finsler uzayı için tanımlamışlardır.

1.2 Minkowski Normları

Sonlu bir V vektör uzayı üzerinde bir $F : V \to [0, \infty)$ fonksiyonu herhangi bir $y \in V$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir Minkowski normudur:

(a) $F(y) \geq 0$ ve $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$,

(b) $\lambda > 0$ için $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, ($F$ birinci dereceden pozitif $y-$homojen)

(c) $F, V\backslash\{0\}$ da C^∞ sınıfındandır ve

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big[F^2(y + su + tv)\Big]\Big|_{t=s=0} \tag{1.1}$$

ile tanımlanan $g_y : V \times V \to R$ bilineer simetrik fonksiyoneli bir iç çarpımdır [1].

Buna göre, $\{e_i\}, V$ vektör uzayının bir baz takımı ve $y = (y^i) \in V$ olmak üzere $y \neq 0$ için bir iç çarpım (1.1) den

$$g_{ij}(y) = g_y(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\big[F^2\big]_{y^i y^j}(y), \quad (i, j = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{1.2}$$

şeklindedir. Bu iç çarpım yardımıyla bir Minkowski normu

$$F(y) = \sqrt{g_{ij}(y)y^i y^j}, \quad y = y^i e_i \tag{1.3}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma göre,

$$\alpha(y) = \sqrt{< y, y >} = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}, \qquad \left(y = y^i e_i \in V, a_{ij} = \Big\langle e_i, e_j \Big\rangle\right)$$

Riemann metriği ve

$$|y| = \sqrt{< y, y >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i)^2}, \qquad \left((y^i) \in R^n,\, a_{ij} = \delta_{ij}\right)$$

Öklid normu birer Minkowski normudur. Burada a_{ij}, α Riemann metriğinin metrik tensörü ve δ_{ij} Kronecker deltasıdır. Bir $n-$boyutlu manifold üzerinde tanımlı bir Finsler metriği, teğet uzaylar üzerindeki Minkowski normlarından meydana gelir [1].

1.3 Finsler Metrikleri

Bir $n-$boyutlu M manifoldu üzerinde $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ ile tanımlı bir $F = F(x, y)$ fonksiyonu

(a) F, $TM\backslash\{0\}$ da C^∞ sınıfından ve

(b) herhangi $x \in M$ için $F_x(y) = F(x, y)$, T_xM üzerinde bir Minkowski normu

olma özelliklerini sağlarsa, M üzerinde bir Finsler metriği adını alır.

$F_n = F_n(M, F)$ çiftine Finsler manifoldu veya Finsler uzayı denir. Buna göre, T_xM üzerinde bir iç çarpım

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j} \tag{1.4}$$

dir. Buradan bir F Finsler metriği,

$$F = \sqrt{g_y(y, y)} = \sqrt{g_{ij}(x, y)y^i y^j} \tag{1.5}$$

iç çarpımı ile verilir[1].

Bir F Finsler metriğinin, metrik tensörün bileşenleri eğer $g_{ij} = g_{ij}(x)$ şeklinde ise Riemannian metrik veya $g_{ij} = g_{ij}(y)$ şeklinde ise Minkowskian metriktir.

Finsler geometrisindeki oldukça karışık işlemlerde, kolaylık sağladığı için homojen fonksiyonlara ait Euler teoremi kullanılır. Homojen fonksiyonlar için Euler teoremine göre, ϕ, R^n de reel değerli ve $\forall y \neq 0$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

- $\phi(\lambda y) = \lambda^r \phi(y), \quad \forall \lambda > 0, \quad (r$ inci derece pozitif homojenlik) ve
- $y^i \phi_{y^i} = r\phi$;

durumları birbirine eşdeğerdir.

Euler teoreminden yararlanılarak, (1.4) ten

$$\frac{1}{2}[F^2]_{y^i} = g_{ij}(x, y)y^j$$

ve

$$F^2 = g_{ij}(x,y)y^i y^j \tag{1.6}$$

yazılabilir [2].

$n-$boyutlu bir M manifoldu üzerinde Riemannian ve Riemannian olmayan birçok Finsler metriği vardır [1, 2]. $(\alpha,\beta)-$metrikleri Riemannian olmayan metriklerin önemli bir sınıfını oluşturur.

1.4 $(\alpha,\beta)-$Metrikli Finsler Uzayları

TM üzerinde,

$$F = \alpha\phi(s),\ \ s = \frac{\beta}{\alpha},\quad \Big(\alpha = \alpha(x,\,y),\ \beta = \beta(x,\,y)\Big) \tag{1.7}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlı olsun. Burada $n-$boyutlu bir M manifoldu üzerinde $\alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j},\quad (a_{ij} = a_{ij}(x))$ bir Riemann metriği ve $\beta(x,y) = b_i(x)y^i$ diferansiyel $1-$formdur.

$\phi = \phi(s),\ (-b_0, b_0)$ açık aralığında C^∞ sınıfından bir fonksiyon olsun. Burada herhangi bir $x \in M$ için $\parallel \beta \parallel_\alpha (x) = \sqrt{a^{ij}b_i b_j} < b_0,\ (a^{ij} = a^{ij}(x),\ b_i = b_i(x))$ ve $b_0 = \sup_{x\in M} \parallel \beta \parallel_x$ dir. Eğer ϕ ve b_0,

$$\phi(s) > 0,\ \ (|s| \le b_0) \tag{1.8}$$

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0,\ \ (|s| \le b \le b_0,\ b^2 = b^i b_i) \tag{1.9}$$

eşitsizliklerini sağlarsa, (1.7) ile tanımlanan F fonksiyonu M manifoldu üzerinde bir Finsler metriği tanımlar[1]. Bu formdaki metriklere $(\alpha,\beta)-$metrikleri adı verilir.

(1.7) de $\phi(s) = 1 + s$ alınırsa, G. Randers tarafından 1941 de tanımlanan ve $(\alpha,\beta)-$metriklerinin özel bir sınıfını oluşturan

$$F = \alpha + \beta \tag{1.10}$$

Randers metrikleri elde edilir. Eğer (1.7) de $\phi(s) = \dfrac{1}{s}$ alınırsa $(\alpha,\beta)-$metriklerinin diğer bir özel sınıfını oluşturan $F = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$ Kropina metriği elde edilir [1, 3].

1.5 Finsler Metriklerinin Spreyleri

$TM_0 = TM\backslash\{0\}$ üzerinde her F Finsler metriği, geodezikleri veren

$$G_{_F}(x,y) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \; - \; 2G^i_{_F} \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{1.11}$$

spreyini tanımlar. Bir Finsler uzayı üzerinde bir geodezik

$$\ddot{x}^i(t) \; + \; 2\, G^i_{_F}\Big(x(t), \dot{x}(t)\Big) = \; 0 \tag{1.12}$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilir. Burada tanımlanan $G^i_{_F} = G^i_{_F}(x,y)$ katsayılarına F Finsler metriğinin sprey katsayıları denir. Bir Finsler metriğinin sprey katsayıları

$$\begin{aligned} G^i_{_F} &= \frac{1}{4}\, g^{il}(x,y) \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x,y) + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}(x,y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x,y) \right) y^j y^k \\ &= \frac{1}{4}\, g^{il}(x,y) \Big\{ [F^2]_{x^k y^l} y^k \; - \; [F^2]_{x^l} \Big\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

ile tanımlanan ikinci dereceden pozitif $y-$homojen fonksiyonlardır [1, 4, 5]. Buna göre,

$$G^i_{_F}(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i_{_F}(x,y), \quad \lambda > 0 \tag{1.14}$$

dir. L. Berwald herhangi bir yerel koordinat sisteminde bir F Finsler metriğinin (1.13) ile verilen sprey katsayılarının

$$G^i_{_F j} = \frac{\partial G^i_{_F}}{\partial y^j}, \qquad G^i_{_F jk} = \frac{\partial G^i_{_F j}}{\partial y^k} \tag{1.15}$$

türevleri yardımıyla $B\Gamma(G^i_{_F jk}, G^i_{_F j}, 0)$ Berwald konneksiyonunu tanımlamıştır [5, 6]. Burada $G^i_{_F jk} = G^i_{_F jk}(x,y)$ alt indislerine göre simetriktir.

Bir F Finsler metriğinin (1.12) ile verilen sprey katsayılarına bağlı geodeziklerinin denklemi

$$\ddot{x}^i \dot{x}^j - \ddot{x}^j \dot{x}^i + 2D^{ij}(x, \dot{x}) = 0, \qquad (i,j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.16}$$

şeklinde de ifade edilebilir [5]. Burada

$$y = \dot{x} = \Big(\frac{dx^i}{dt}\Big)$$

dır ve

$$D^{ij}(x,y) = G^i_{_F} y^j - G^j_{_F} y^i, \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{1.17}$$

ile gösterilen $D^{ij}(x,y)$ fonksiyonları $y = (y^i)$ nin üçüncü dereceden pozitif homojen fonksiyonudur [7]. Her x noktasındaki $y \in T_xM$ için bir F Finsler metriğinin $G^i_{_F}$ sprey katsayılarının

i) kuadratik,

ii) $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x)$ ikinci cins Christoffel sembollerini göstermek üzere,
$G^i_{_F}(x,y) = \dfrac{1}{2}\,\Gamma^i_{jk}\,y^j y^k$ ve

iii) $G^i_{_F jkl} = 0$

eşdeğer durumlarından birini sağlaması halinde, F Finsler metriğine bir Berwald metriği adı verilir. Burada $G^i_{_F jkl} = \dfrac{\partial^3 G^i_{_F}}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}$ dır. Berwald metrikli bir Finsler uzayına Berwald uzayı denir.

Berwald metriklerini tanımlayan (iii) halinde özel olarak $i = l$ alınarak elde edilen $G^i_{_F jki} = 0$ şartını sağlayan metriklere de zayıf Berwald metrikleri ve böyle bir metriğe sahip Finsler uzaylarına da zayıf Berwald uzayları adı verilir [8].

Eğer F_n bir Riemann uzayı ise, F_n uzayının $F(x,\,y) = \alpha(x,\,y) = \sqrt{a_{mn}y^m y^n}$ Riemann metriğinin sprey katsayıları (1.13) de g_{ij} yerine a_{ij} alınarak

$$\begin{aligned}
G^i_{_F}(x,y) &= \frac{1}{4}a^{il}\Big\{F^2_{x^k y^l}y^k - F^2_{x^l}\Big\} \\
&= \frac{1}{4}a^{il}\Big\{\Big(\frac{\partial a_{mn}}{\partial x^k}y^m y^n\Big)_{y^l}y^k - \frac{\partial a_{mn}}{\partial x^l}y^m y^n\Big\} \\
&= \frac{1}{4}a^{il}\Big\{\frac{\partial a_{mn}}{\partial x^k}\Big(\delta^m_l y^n + \delta^n_l y^m\Big) - \frac{\partial a_{mn}}{\partial x^l}y^m y^n\Big\} \\
&= \frac{1}{4}a^{il}\Big\{\frac{\partial a_{ln}}{\partial x^m} + \frac{\partial a_{ml}}{\partial x^n} - \frac{\partial a_{mn}}{\partial x^l}\Big\}y^m y^n \\
G^i_{_F}(x,y) &= \frac{1}{2}\,\Gamma^i_{jk}(x)\,y^j y^k
\end{aligned} \tag{1.18}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$\Gamma^i_{jk} \;=\; \frac{1}{2}a^{il}\left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial x^k} \;+\; \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^j} \;-\; \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^l}\right), \quad \Gamma^i_{jk} \;=\; \Gamma^i_{kj} \tag{1.19}$$

dır. Buna göre Riemann ve Minkowski uzayları Berwald uzaylarının birer özel sınıfını oluşturur.

1.6 Riemannian Eğrilik ve Flag Eğrilik

Riemannian geometride Riemann tensörü uzayın bir noktasındaki eğriliğini ölçen oldukça önemli bir büyüklüktür. İlk olarak, L.Berwald, Riemann tensörünü Finsler metriklerine genişletmiştir [1, 4]. Bu genişleme, Finsler geometrisi için bir dönüm noktası olmuştur.

Riemann eğriliği teğet uzaylar üzerinde

$$R_y = R^i_k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k\big|_{x\in M} : T_xM \to T_xM \tag{1.20}$$

şeklinde tanımlı lineer tasvirlerin bir ailesidir.

Riemann tensörünün R^i_k bileşenleri, bir F Finsler metriğinin Berwald konneksiyonu için

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i_{_F}}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i_{_F}}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j_{_F} \frac{\partial^2 G^i_{_F}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i_{_F}}{\partial y^j}\frac{\partial G^j_{_F}}{\partial y^k} \tag{1.21}$$

ile ifade edilir ve

$$R^i_k y^k = 0 \tag{1.22}$$

koşullarını sağlar [9].

Bir $x \in M$ noktasının T_xM uzayının P teğet düzleminin $K = K(P, y)$ flag eğriliği

$$K(P, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - [g_y(y, u)]^2}\,, \qquad (u \in P)$$

veya lokal koordinatlarda

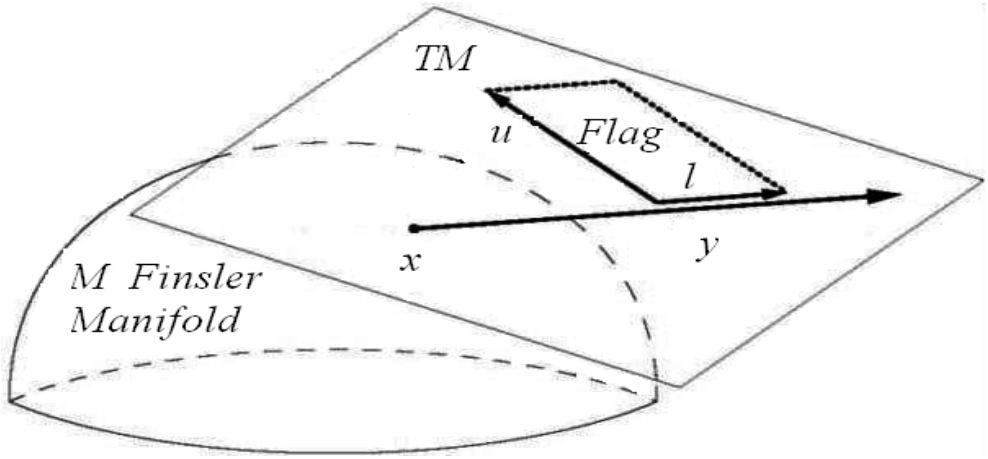
$$K = \frac{R_{jk}(x, y)u^j u^k}{F^2 h_{jk}(x, y)u^j u^k} \tag{1.23}$$

olarak ifade edilir. Burada $R_{jk} = g_{ij}R^i_k$ ve $h_{ij} = h_{ij}(x, y)$, $h_y(u, v) = h_{ij}u^i v^j$ açısal formunun

$$h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j, \quad \left(l_i = \frac{\partial F}{\partial y^i},\ l^i = \frac{y^i}{F}\right) \tag{1.24}$$

ile tanımlanan bileşenleridir [1].

K flag eğriliği, $x \in M$, $y \in P \subset T_xM$ için $K(P, y) = K(x, y)$ ise skaler flag eğriliği, $K(P, y) = sbt.$ ise de sabit flag eğriliği adını alır. Şekil: 1.1 de flag eğrilik gösterilmiştir.



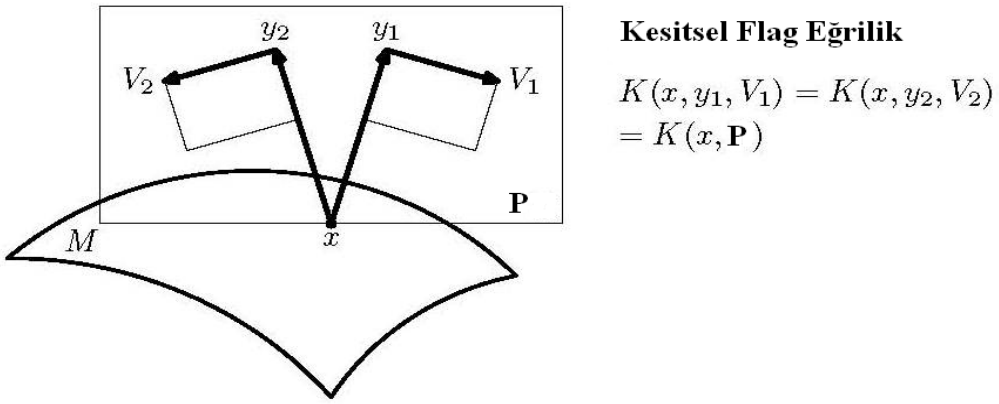
Şekil 1.1 : Flag Eğrilik

(1.21) eşitliklerine göre, Riemann tensörü sadece Finsler metriğinin sprey katsayılarına bağlıdır.

(1.23) den, Riemann tensörü ile skaler flag eğrilikli bir F_n Finsler uzayının flag eğriliği arasındaki ilişki

$$R_k^i = KF^2 h_k^i \tag{1.25}$$

ile karakterize edilir [10, 11]. Burada $h_i^k = g^{jk}h_{ij}$ dır. Eğer herhangi bir $y \in T_xM$ için $K(P,y) = K(P)$ ise flag eğrilik Riemannian geometrideki kesitsel eğriliğe indirgenmiş olur. Bu anlamda Finsler geometrisindeki $K(P,y)$ flag eğriliği Riemann geometrisindeki kesitsel eğriliğin genelleştirilmişidir (Şekil: 1.2).



Şekil 1.2 : Kesitsel Flag Eğrilik

İki boyutta, $P = T_xM$ teğet düzlemi için $K(x, y)$ flag eğriliği, $TM_0 = TM\backslash\{0\}$ da Gauss eğriliğine indirgenmiş olur.

1.7 Projektif Düz Finsler Metrikleri

Hilbert'in dördüncü problemi, R^n in açık bir alt kümesindeki herhangi iki noktayı birleştiren en kısa mesafenin düzgün doğrular olmasını sağlayan mesafe fonksiyonlarını karakterize etmektedir [12]. Mesafe fonksiyonu olarak, Finsler metriği alındığında, Hilbert'in dördüncü problemi düzgün halde, R^n deki açık bir alt küme üzerinde geodezikleri düz doğrular olan Finsler metriklerini karakterize etme problemine indirgenmiş olur. Bu şekilde tanımlanan Finsler metriklerine projektif düz Finsler metrikleri adı verilir. Bu problem için genel Finsler metriklerini karakterize etmek oldukça zordur. Shen(2003), $F = \alpha + \beta$ Randers metriklerinin yerel projektif düz olması için gerek ve yeter koşulun α nın yerel projektif düz ve β nın kapalı olması olduğunu belirlemiştir [10, 13].

Hamel(1993), R^n in açık bir alt kümesinde projektif düz Finsler metriğini karakterize etmek için basit bir PDE sistemi elde etmiştir. Hamel'e göre, R^n in açık bir alt kümesinde bir F Finsler metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşul F metriğinin

$$F_{x^k y^l} y^k = F_{x^l} \tag{1.26}$$

kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini sağlamasıdır [14]. Bu koşul altında (1.13) den projektif düz bir Finsler uzayının sprey katsayıları için,

$$\begin{aligned} G^i_{_F}(x,y) &= \frac{1}{4} g^{il} \Big\{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \Big\} \\ &= \frac{1}{4} g^{il} \Big\{ 2(F F_{x^k})_{y^l} y^k - 2 F F_{x^l} \Big\} \\ &= \frac{1}{2} g^{il} \Big\{ (F_{y^l} F_{x^k} + F F_{x^k y^l}) y^k - F F_{x^l} \Big\} \\ &= \frac{1}{2} g^{il} F_{y^l} F_{x^k} y^k \end{aligned} \tag{1.27}$$

elde edilir ve Euler teoremi yardımıyla bulunan

$$F_{y^j} = \frac{g_{ij} y^i}{F}$$

(1.27) de yerine yazılarak, projektif düz bir Finsler uzayının sprey katsayıları

$$G^i_{_F} = \frac{F_{x^k} y^k}{2F} y^i \tag{1.28}$$

olarak bulunur. Burada

$$P = \frac{F_{x^k} y^k}{2F} \tag{1.29}$$

denirse, bir M manifoldu üzerinde tanımlı F Finsler metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşulun

$$G^i_{_F} = P y^i \tag{1.30}$$

olduğu görülür [10]. Burada $P = P(x, y)$ fonksiyonuna projektif çarpan adı verilir ve P pozitif birinci dereceden $y-$homojen bir fonksiyondur.

1.8 Finsler Uzaylarının Projektif Dönüşümü

Bir M manifoldu üzerinde tanımlı $\widetilde{F}_n$ ve F_n Finsler uzayları, eğer F_n uzayının herhangi bir geodeziği $\widetilde{F}_n$ uzayınında bir geodeziği ise(tersi de doğru), $\sigma : F \to \widetilde{F}$ metrik dönüşümüne projektif dönüşüm denir. Dönüşümün projektif olması için gerek ve yeter koşul P projektif çarpanı yardımıyla uzayların sprey katsayıları arasında

$$G^i_{_{\tilde{F}}} = G^i_{_F} + P y^i \tag{1.31}$$

ilişkisinin olmasıdır[4]. (1.31) deki eşitliğin iki tarafı y^j ve y^k ya göre türetilirse, iki uzayın Berwald konneksiyonunun katsayıları arasındaki

$$G^i_{_{\tilde{F}}jk} = G^i_{_{F}jk} + P_{jk} y^i + P_j \delta^i_k + P_k \delta^i_j \tag{1.32}$$

ilişkisi elde edilir. Burada $P_j = \dfrac{\partial P}{\partial y^j}$ dir.

(1.31) ile tanımlanan projektif dönüşüm altında Finsler uzayının invaryant kalan $Q_0,\ Q_1$ ve Q_2 büyüklükleri, sırasıyla,

$$Q^h = G^h_{_F} - \frac{1}{n+1} G_{_F} y^h, \tag{1.33}$$

$$Q^h_i = G^h_{_{F}i} - \frac{1}{n+1}(G_{_{F}i} y^h + G_{_F} \delta^h_i), \quad Q^h_i = \dot{\partial}_i Q^h, \tag{1.34}$$

$$Q^h_{ij} = G^h_{_{F}ij} - \frac{1}{n+1}(G_{_{F}ij} y^h + G_{_{F}i} \delta^h_j + G_{_{F}j} \delta^h_i), \quad Q^h_{ij} = \dot{\partial}_j \dot{\partial}_i Q^h \tag{1.35}$$

ile tanımlanmaktadır. Burada $G_{_F} = \dot{\partial}_r G^r_{_F} = G^r_{_{F}r},\ G_{_F i} = G^r_{_{F}ri},\ G_{_F ij} = G^r_{_{F}rij}$ ve $\dot{\partial}_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ dir. (1.31) dönüşümü altında,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}^h &= G^h_{_{\tilde{F}}} - \frac{1}{n+1} G_{_{\tilde{F}}} y^h \\
&= G^h_{_F} + P y^h - \frac{1}{n+1}(\dot{\partial}_r G^r_{_F} + P_{y^r} y^r + P\delta^r_r) y^h \\
&= Q^h + \Big(P - \frac{1}{n+1} P - \frac{n}{n+1} P \Big) y^h \qquad (1.36) \\
\widetilde{Q}^h &= Q^h
\end{aligned}$$

dır. Benzer işlemler yapıldığında

$$\widetilde{Q}^h_i = Q^h_i \quad \textit{ve} \quad \widetilde{Q}^h_{ij} = Q^h_{ij}$$

elde edilir. (1.31) dönüşümü altında invaryant kalan Q^h, Q^h_i ve Q^h_{ij} büyüklüklerine, sırasıyla, Q_0, Q_1 ve Q_2 invaryantları denir. Q_1 ve Q_2 invaryantlarının tanımından

$$Q^i_{kj} = Q^i_{jk}, \quad Q^i_{ij} = Q^i_{ji} = 0 \quad \textit{ve} \quad Q^i_i = 0 \qquad (1.37)$$

olduğu kolayca görülür [7].

(1.31) altında invaryant kalan diğer iki önemli büyüklük W^i_k Weyl(projektif) tensörü ve 2. bölümde ele alınacak olan D^i_{jkl} Douglas tensörüdür. Weyl tensörü

$$W^i_k = R^i_k - R\delta^i_k - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}(R^m_k - R\delta^m_k) y^i \qquad (1.38)$$

ile tanımlanır[10, 13]. Burada

$$R = \frac{1}{n-1} R^m_m \qquad (1.39)$$

ve R^m_m Ricci eğriliği veya Ricci skaleridir.

Projektif dönüşüm altında, (1.21) ve (1.31) den

$$\widetilde{R}^i_k = R^i_k + (2P_{|k} - P_{k|0} - PP_k) y^i - (P_{|0} - P^2)\delta^i_k \qquad (1.40)$$

elde edilir. Burada "$|$", F_n Finsler uzayında Berwald konneksiyonuna göre kovaryant türev alınacağını göstermektedir ve $P_{|k} = \dfrac{\partial P}{\partial x^k} - G^r_{_{F}k}\dfrac{\partial P}{\partial y^r}, \quad P_{|0} = P_{|k} y^k$dır. (1.40) da $i = k$ alınırsa,

$$\widetilde{R}^m_m = R^m_m + (n-1)(P^2 - P_{|0}) \tag{1.41}$$

elde edilir.

(1.40) ve (1.41) in (1.38) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}^i_k &= \widetilde{R}^i_k - \widetilde{R}\delta^i_k - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}(\widetilde{R}^m_k - \widetilde{R}\delta^m_k)y^i \\
&= R^i_k + (2P_{|k} - P_{k|0} - PP_k)y^i - (P_{|0} - P^2)\delta^i_k - R\delta^i_k - (P^2 - P_{|0})\delta^i_k \\
&\quad -\frac{1}{n+1}\Big\{\frac{\partial R^m_k}{\partial y^m} + (2P_{|k\cdot m} - P_{k|0\cdot m} - P_mP_k - PP_{km})y^m + (2P_{|k} - P_{k|0} \\
&\quad -PP_k)\delta^m_m - (P_{|0\cdot m} - 2PP_m)\delta^m_k - \frac{\partial R}{\partial y^m}\delta^m_k - (2PP_m - P_{|0\cdot m})\delta^m_k\Big\}y^i \\
&= W^i_k + (2P_{|k} - P_{k|0} - PP_k)y^i - \frac{1}{n+1}\Big\{(n+1)(2P_{|k} - P_{k|0} - PP_k)\Big\}y^i \\
\widetilde{W}^i_k &= W^i_k
\end{aligned} \tag{1.42}$$

bulunur. Burada ".", y^i ye göre kısmi türevi göstermektedir. Buradan, W^i_k Weyl tensörünün projektif dönüşüm altında invaryant olduğu görülür.

Bu çalışmadaki bir kısım tensörel hesapların yapılması ve düzenlenmesinde Maple programı kullanılmıştır. Bu işlemlere ait Maple program kodları ekteki CD de verilmiştir.

2. KROPİNA METRİKLİ FİNSLER UZAYLARI

S.Baćsó tarafından tanımlanan Douglas metrikleri Berwald metriklerinin daha genel bir sınıfını oluşturur. Bir Finsler metriğinin $G^i_{_F} = G^i_{_F}(x, y)$ sprey katsayıları

$$G^i_{_F} = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)\, y^j y^k + P(x, y)y^i \tag{2.1}$$

şeklinde ise metrik, Douglas metriği adını alır [15]. Douglas metrikli uzaylara da Douglas uzayı denir. Burada $P(x, y),\ y$ nin birinci dereceden homojen fonksiyonudur.

Bu kısımda, bir geodezik boyunca Douglas eğriliğinin değişim oranının geodeziğe teğet kaldığı genelleştirilmiş Douglas metrikli Finsler uzayları tanımlanmıştır [16]. Böyle bir metriğe sahip Kropina uzayları incelenmiştir.

2.1 Douglas Metrikli Finsler Uzayları

Bir $F_n = F_n(M, F)$ Finsler uzayına ait F Finsler metriğinin Douglas tensörü

$$D^h_{ijk} = G^h_{_F ijk} - \frac{1}{n+1}\left(y^h \frac{\partial G_{_F ij}}{\partial y^k} + \delta^h_i G_{_F jk} + \delta^h_k G_{_F ij} + \delta^h_j G_{_F ki}\right) \tag{2.2}$$

ile tanımlanır[15, 17]. Burada

$$G^h_{_F ijk} = \frac{\partial G^h_{_F ij}}{\partial y^k}, \quad G_{_F ij} = G^r_{_F ijr} \tag{2.3}$$

dır. Bir Douglas metriğine sahip bir Finsler uzayı için Douglas tensörü sıfırdır [15, 7].

(1.33) ve (1.35) dikkate alınırsa, Douglas tensörü

$$\begin{aligned} D^h_{ijk} &= \dot\partial_k Q^h_{ij} \\ &= \dot\partial_i \dot\partial_j \dot\partial_k Q^h \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Q_{ij}^h projektif dönüşüm altında invaryant olduğundan

$$\begin{aligned} D_{ijk}^h &= \dot{\partial}_k Q_{ij}^h \\ &= \dot{\partial}_k \widetilde{Q}_{ij}^h = \widetilde{D}_{ijk}^h \end{aligned} \tag{2.5}$$

dır. Buna göre, Douglas tensörü projektif dönüşüm altında invaryanttır [7, 17]. Douglas tipli bir Finsler uzayı için

$$D_{ijk}^h = \dot{\partial}_k Q_{ij}^h = 0$$

olduğundan

$$Q_{ij}^h = Q_{ij}^h(x) \tag{2.6}$$

Q_2-invaryantı yalnız x in fonksiyonudur. Tersine olarak, $Q_{ij}^h = Q_{ij}^h(x)$ halinde $D_{ijk}^h = 0$ dır.

Ayrıca, (1.17) ile tanımlanan D^{ij}, y nin üçüncü dereceden bir polinomu ise, $D_{ijk}^h = 0$ olacağı açıktır. Diğer taraftan, (1.30) ile verilen projektif düzlük koşulu (2.2) de yerine yazılır ve $P(x,y)$ nin birinci dereceden $y-$homojen olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} D_{ijk}^h = \quad & \dot{\partial}_i\dot{\partial}_j\dot{\partial}_k(Py^h) - \frac{1}{n+1}\left[y^h(n+1)P_{ijk} + (n+1)\Big(\delta_i^h P_{jk} + \delta_k^h P_{ij} + \delta_j^h P_{ki}\Big)\right] \\ = \quad & (P_{kji}y^h + P_{kj}\delta_i^h + P_{ki}\delta_j^h + P_{ji}\delta_k^h) - \Big(y^h P_{ijk} + \delta_i^h P_{jk} + \delta_k^h P_{ij} + \delta_j^h P_{ki}\Big) \\ = \quad & 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, projektif düz uzaylar Douglas uzaylarıdır. Buna göre, bir Douglas uzayı için aşağıdaki teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.1: Aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlayan bir Finsler uzayı bir Douglas uzayıdır.

1) $Q_{jk}^i = Q_{jk}^i(x)$, burada $Q_{jk}^i = \dot{\partial}_j\dot{\partial}_k Q^i$, $Q^i = G_{_F}^i - \dfrac{1}{n+1}G_{_F}\, y^i$,

2) $G_{_F}^i(x,y) = P(x,y)\, y^i$, (uzay projektif düz)

3) $D^{ij}(x,y) = G_{_F}^i(x,y)y^j - G_{_F}^j(x,y)y^i$, üçüncü dereceden homojen polinomdur.

Burada $1)$ ve $3)$ şartları bir Finsler uzayının Douglas olması için gerek ve yeter koşullardır. Fakat her Douglas uzayı projektif düz metrikli olmadığından $2)$ şartı yeter koşul değildir.

Q_1 ve Q_2 nin (1.37) ile verilen özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} D^h_{ijk} &= \dot\partial_k Q^h_{ij} = \dot\partial_k Q^h_{ji} = D^h_{jik} \\ &= \dot\partial_k \dot\partial_i \dot\partial_j Q^h = \dot\partial_i Q^h_{jk} = D^h_{jki}, \end{aligned}$$

ve $h = i$ alındığında,

$$\begin{aligned} D^i_{ijk} &= \dot\partial_k Q^i_{ij} = \dot\partial_j Q^i_{ki} = 0, \\ D^i_{ijk} &= D^i_{jik} = D^i_{jki} = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, Douglas tensörü -1 inci dereceden $y-$homojen bir fonksiyon olduğundan, homojen fonksiyonlar için Euler teoremi gereğince, D^h_{ijk} Douglas tensörünün y^i, y^j veya y^k ile daraltılması sıfırdır. Buna göre, D^h_{ijk} Douglas tensörü,

$$\begin{aligned} &i) \quad D^h_{ijk} = D^h_{jik} = D^h_{jki}, \\ &ii) \quad D^i_{ijk} = D^i_{jik} = D^i_{jki} = 0, \\ &iii) \quad D^h_{ijk} y^i = D^h_{ijk} y^j = D^h_{ijk} y^k = 0 \end{aligned}$$

koşullarını sağlar.

2.2 Genelleştirilmiş Douglas Metrikli Finsler Uzayları

Bir F_n Finsler uzayına ait Douglas tensörü

$$h^p_i D^i_{jkl|m} y^m = 0, \qquad \left(h^p_i = \delta^p_i - l^p l_i,\ l^p = \frac{y^p}{F},\ l_i = \frac{\partial F}{\partial y^i} = F_{y^i} \right) \tag{2.7}$$

denklemlerini sağlarsa, Finsler uzayına genelleştirilmiş Douglas uzayı denir. (2.7), geometrik olarak bir geodezik boyunca D^i_{jkl} Douglas eğriliğinin değişim oranının geodeziğe teğet kaldığını göstermektedir [16]. Burada, $D^i_{jkl|m}$, D^i_{jkl} Douglas tensörünün F_n Finsler uzayının $B\Gamma(G^i_{_F jk}, G^i_{_F j}, 0)$ Berwald konneksiyonuna göre yatay kovaryant türevidir ve

$$D^i_{jkl|m} = \frac{\partial D^i_{jkl}}{\partial x^m} - G^p_{_F m} \frac{\partial D^i_{jkl}}{\partial y^p} + G^i_{_F pm} D^p_{jkl} - G^p_{_F jm} D^i_{pkl} - G^p_{_F km} D^i_{jpl} - G^p_{_F lm} D^i_{jkp} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır [16, 18].

Kolayca görüleceği gibi, her Douglas uzayı bir genelleştirilmiş Douglas uzayıdır ve Yardımcı Teorem $2.2.1$ den dolayı aşağıdaki sonuçlar açıktır.

Sonuç 2.2.1: Projektif düz Finsler uzayları genelleştirilmiş Douglas uzaylarıdır.

Sonuç 2.2.2: Berwald uzayları genelleştirilmiş Douglas uzaylarıdır.

Bu çalışmada ele alınan temel problem, Douglas uzaylarından farklı olarak, Kropina metrikli Finsler uzaylarının genelleştirilmiş Douglas olmasını sağlayan gerek ve yeter koşulların elde edilmesidir.

2.2.1 Genelleştirilmiş Douglas Metrikli Kropina Uzayları

$(\alpha, \beta)-$metrikleri için (1.7) de $\phi(s) = \dfrac{1}{s},\ s = \dfrac{\beta}{\alpha}$ alındığında

$$\begin{aligned} F &= \alpha\phi(s) \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kropina metriği elde edilir. Burada

$$\alpha = \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$$

Riemann metriği ve

$$\beta = \beta(x, y) = b_i(x)y^i$$

diferansiyel 1-formdur.

α Riemann metriğinin $G^i_{\alpha} = G^i_{\alpha}(x, y)$ sprey ve $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x)$ Christoffel katsayıları, sırasıyla,

$$G^i_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}y^j y^k,\ \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}a^{il}\left\{\frac{\partial a_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^l}\right\} \tag{2.10}$$

dır [5]. Burada $a_{ij} = a_{ij}(x)$ ve $a^{ij} = a^{ij}(x)$, sırasıyla, Riemann metrik tensörünün kovaryant ve kontravaryant bileşenleridir. Bir Finsler metriğinin sprey katsayılarını veren

$$G^i_{F} = \frac{1}{4}g^{il}\Big\{[F^2]_{x^k y^l}y^k\ -\ [F^2]_{x^l}\Big\}, \qquad \Big(g^{il} = g^{il}(x, y),\ F = F(x, y)\Big) \tag{2.11}$$

ifadesinde $F = \alpha\phi(s)$ ve (2.10) kullanılırsa, bir $(\alpha,\ \beta)-$metriğinin $G^i_{_F} = G^i_{_F}(x,y)$ sprey katsayıları ile α Riemann metriğinin G^i_{α} sprey katsayıları arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} G^i_{_F} &= G^i_{\alpha} + \frac{\alpha\phi'}{\phi - s\phi'}s^i_0 + \frac{\phi\phi' - s(\phi\phi'' + \phi'\phi')}{2\phi[(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'']}\left(\frac{-2\alpha\phi'}{\phi - s\phi'}s_0 + r_{00}\right)\times \\ &\quad \left(\frac{y^i}{\alpha} + \frac{\phi\phi''}{\phi\phi' - s(\phi\phi'' + \phi'\phi')}b^i\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir [1, 4]. Burada $b_{i;j}, b_i$ nin α Riemann metriğine göre kovaryant türevidir. $b_{i;j}$ nin simetrik ve anti-simetrik kısımları, sırasıyla,

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\big(b_{i;j} + b_{j;i}\big), \qquad s_{ij} = \frac{1}{2}\big(b_{i;j} - b_{j;i}\big)$$

olmak üzere

$$s^i_j = a^{ir}s_{rj}, \quad s^i_0 = s^i_j y^j, \quad s_j = s_{ij}b^i, \quad s_0 = s_i y^i, \quad r_{00} = r_{ij}y^i y^j, \quad b^2 = a^{ij}b_i b_j$$

dir.

Yardımcı Teorem 2.2.1.1 : Bir Kropina metriğinin $G^i_{_F}$ sprey katsayıları ile α Riemann metriğinin G^i_{α} sprey katsayıları arasındaki ilişki

$$G^i_{_F} = G^i_{\alpha} - \frac{\alpha^2}{2\beta}s^i_0 - \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{\alpha^2 b^2}y^i + \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{2\beta b^2}b^i \tag{2.13}$$

şeklindedir.

İspat 2.2.1.1 : (2.9) ile tanımlanan F Kropina metriği (2.12) de kullanılır ve gerekli hesaplar yapılırsa (2.13) bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(2.13) eşitliğinde

$$\begin{aligned} G^i_{\tilde{F}} &= G^i_{\alpha} - \frac{\alpha^2\beta^{-1}}{2}s^i_0 + \frac{\alpha^2\beta^{-1}s_0 + r_{00}}{2b^2}b^i \\ &= G^i_{\alpha} + \Omega^i, \qquad \left(\Omega^i = -\frac{\alpha^2\beta^{-1}}{2}s^i_0 + \frac{\alpha^2\beta^{-1}s_0 + r_{00}}{2b^2}b^i\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

denirse, F_n Kropina ve yeni bir $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayının sprey katsayıları arasında

$$G^i_{\tilde{F}}(x,y) = G^i_{_F}(x,y) + P(x,y)y^i \tag{2.15}$$

ilişkisi yazılabilir. (2.15) ilişkisi iki Finsler uzayının projektif ilişkili oldu ğunu gösterir [19, 20]. Burada $P(x,y)$ projektif çarpandır ve bu problem için

$$P(x,y)=\frac{1}{b^2}\Big(s_0+\beta\frac{r_{00}}{\alpha^2}\Big) \tag{2.16}$$

dir.

"Genelleştirilmiş Douglas uzayları sınıfı projektif ilişkiler altında kapalıdır[18]" teoremi gereğince $\sigma : F \to \widetilde{F}$ projektif dönüşümü altında F_n Finsler uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olma koşulları ile $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olma koşulları eşdeğerdir.

Buna göre, F_n Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olma koşullarını elde etme problemi için, $\widetilde{F}_n$ nin genelleştirilmiş Douglas uzayı olma koşulunu elde etmek yeterli olacaktır. Buna göre, ele alınan problem, (2.5) ve (2.6) kullanılmasıyla,

$$\begin{gathered}\widetilde{h}_i^p\widetilde{D}^i_{jkl\|m}y^m=h_i^pD^i_{jkl|m}y^m=0, \\ \Big(h_i^r=\delta_i^r-l^rl_i,\ l^r=\frac{y^r}{F},\ l_i=\dot\partial_iF,\ y^il_i=F,\ y^i\widetilde{l_i}=\widetilde{F}\Big)\end{gathered} \tag{2.17}$$

denklem sisteminin çözümünü elde etme problemine indirgenmiş olur. Burada

$$\begin{aligned} h_i^p &= \delta_i^p-l^pl_i \\ &= \delta_i^p-\frac{y^p}{F}\frac{\partial F}{\partial y^i} \\ &= \delta_i^p-\frac{y^p}{F}\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)_{y^i} \\ &= \delta_i^p-\frac{y^p}{F}\left(\frac{2y^i\beta-\alpha^2b_i}{\beta^2}\right) \\ &= \delta_i^p-2\frac{y^py_i}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta}y^pb_i \end{aligned} \tag{2.18}$$

olup (2.17) de kullanılır ve gerekli tensörel hesaplar yapılırsa, F_n Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olma koşulu,

$$\left(\delta_i^p-2\frac{y^py_i}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta}y^pb_i\right)\widetilde{D}^i_{jkl\|m}y^m=0$$

veya

$$\widetilde{D}^p_{jkl\|m}y^m-\frac{2y^py_i}{\alpha^2}\widetilde{D}^i_{jkl\|m}y^m+\beta^{-1}y^pb_i\widetilde{D}^i_{jkl\|m}y^m=0 \tag{2.19}$$

şeklini alır. Burada, $\widetilde{D}^i_{jkl}$ Douglas tensörünün $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayının

$B\Gamma = (G^i_{\tilde{F}jk}, G^i_{\tilde{F}j}, 0)$ Berwald konneksiyonuna göre yatay kovaryant türevi

$$\widetilde{D}^i_{jkl\|m} = \frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial x^m} - G^p_{\tilde{F}m}\frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial y^p} + G^i_{\tilde{F}pm}\widetilde{D}^p_{jkl} - G^p_{\tilde{F}jm}D^i_{pkl} - G^p_{\tilde{F}km}\widetilde{D}^i_{jpl} - G^p_{\tilde{F}lm}\widetilde{D}^i_{jkp} \tag{2.20}$$

şeklindedir. (2.20) de

$$G^i_{\tilde{F}j} = G^i_{\alpha j} + \Omega^i_j, \qquad \Omega^i_j = \frac{\partial \Omega^i}{\partial y^j}$$

ve

$$G^i_{\tilde{F}jk} = G^i_{\alpha jk} + \Omega^i_{jk}, \qquad \Omega^i_{jk} = \frac{\partial \Omega^i_j}{\partial y^k}$$

yazılır ve (2.20) nin her iki tarafı y^m ile daraltılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^i_{jkl\|m}y^m &= \frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial x^m}y^m - 2(G^p_\alpha + \Omega^p)\frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial y^p} + (G^i_{\alpha p} + \Omega^i_p)\widetilde{D}^p_{jkl} - (G^p_{\alpha j} + \Omega^p_j)\widetilde{D}^i_{pkl} \\
&\quad -(G^p_{\alpha k} + \Omega^p_k)\widetilde{D}^i_{jpl} - (G^p_{\alpha l} + \Omega^p_l)\widetilde{D}^i_{jkp} \\
&= \widetilde{D}^i_{jkl;m}y^m - 2\Omega^p\frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial y^p} + \Omega^i_p\widetilde{D}^p_{jkl} - \Omega^p_j\widetilde{D}^i_{pkl} - \Omega^p_k\widetilde{D}^i_{jpl} - \Omega^p_l\widetilde{D}^i_{jkp}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{D}^i_{jkl}$ Douglas tensörü ve bu tensörün α Riemann metriğine göre kovaryant türevini gösteren $\widetilde{D}^i_{jkl;m}$, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^i_{jkl} &= \frac{\partial^3 \widetilde{Q}^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} \\
&= \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\Big[G^i_{\tilde{F}} - \frac{1}{n+1}G_{\tilde{F}}y^i\Big] \\
&= \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\Big[G^i_\alpha + \Omega^i - \frac{1}{n+1}\Big(G^m_{\alpha m} + \Omega^m_m\Big)y^i\Big] \\
&= \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\Big[\Big(G^i_\alpha - \frac{1}{n+1}G^m_{\alpha m}\Big) - \frac{\alpha^2\beta^{-1}}{2}s^i_0 + \frac{\alpha^2\beta^{-1}s_0 + r_{00}}{2b^2}b^i \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{n+1}\frac{s_0 + r_0}{b^2}y^i\Big] \\
&= \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\Big[Q^i_\alpha - \frac{\alpha^2\beta^{-1}}{2}s^i_0 + \frac{\alpha^2\beta^{-1}s_0 + r_{00}}{2b^2}b^i - \frac{1}{n+1}\frac{s_0 + r_0}{b^2}y^i\Big]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

ve

$$\widetilde{D}^i_{jkl;m} = \frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial x^m} - G^p_{\alpha m}\frac{\partial \widetilde{D}^i_{jkl}}{\partial y^p} + G^i_{\alpha mp}\widetilde{D}^p_{jkl} - G^p_{\alpha mj}\widetilde{D}^i_{pkl} - G^p_{\alpha mk}\widetilde{D}^i_{jpl} - G^p_{\alpha ml}\widetilde{D}^i_{jkp} \tag{2.23}$$

$(a_{ij;m} = 0,\ \alpha_{;m} = 0)$

şeklindedir.

(2.22) deki Q^i_α Riemannian terimi ile $\dfrac{r_{00}}{b^2}\ b^i$ ve $-\dfrac{1}{n+1}\dfrac{s_0+r_0}{b^2}\ y^i$ terimleri y nin kuadratik fonksiyonları olduğundan, y ye göre üçüncü türevleri sıfırdır. Buna göre, $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayının (ve F_n Kropina uzayının) Douglas tensörü

$$\begin{aligned}\widetilde{D}^i_{jkl} &= \frac{\partial^3}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}\left[F\left(\frac{s_0b^i-b^2s^i_0}{2b^2}\right)\right]\\ &= \frac{\partial^3}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}\left[FA^i_0\right]\\ &= A^i_m\frac{\partial^3(Fy^m)}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}\\ &= A^i_m(y^mF_{jkl}+F_{jk}\delta^m_l+F_{jl}\delta^m_k+F_{kl}\delta^m_j) \qquad (2.24)\end{aligned}$$

şekline indirgenmiş olur. Burada,

$$A^i_m(x)=\frac{s_mb^i-b^2s^i_m}{2b^2},\quad A^i_0=A^i_my^m=\frac{s_0b^i-b^2s^i_0}{2b^2}, \qquad (2.25)$$

$$F_{jk}=2\beta^{-2}\left\{a_{jk}\beta+\alpha^2\beta^{-1}b_kb_j-(y_jb_k+y_kb_j)\right\}$$

ve

$$F_{jkl}=-2\beta^{-3}\left\{(a_{jk}b_l+a_{lj}b_k+a_{kl}b_j)\beta+3\alpha^2\beta^{-1}b_jb_kb_l-2(y_jb_kb_l+y_lb_jb_k+y_kb_lb_j)\right\}$$

dır. Böylece (2.19) da (2.22), (2.23), (2.24) ve (2.25) in kullanılmasıyla,

$$6b^2b_jb_kb_l\Big\{s_0s^p+s^r_0(b^2s^p_r-s_rb^p)\Big\}\alpha^6+\Big\{-b^2b^p\Big[s_ks_{lj}-s_js_{lk}\Big]\beta^3+\Big[2b_kb_l(-b^4s^p_{j;0}+b^2s_jr^p_0-b^2r_{j0}s^p-b^2b^pr_{r0}s^r_j-b^ps_js_0-b^ps_jr_0+b^2b^ps_{j;0})+2b_jb_k(-b^4s^p_{l;0}+b^2s_lr^p_0-b^2r_{l0}s^p-b^2b^pr_{r0}s^r_l-b^ps_ls_0-b^ps_lr_0+b^2b^ps_{l;0})+2b_jb_l(-b^4s^p_{k;0}+b^2s_kr^p_0-b^2r_{k0}s^p-b^2b^pr_{r0}s^r_k-b^ps_ks_0-b^ps_kr_0+b^2b^ps_{k;0})+2b^2(b_ja_{lk}+b_la_{jk}+b_ka_{jl})(s_0s^p-s^r_0s_rb^p+b^2s^r_0s^p_r)-b^2b^pb_l(s_js_{k0}-s_ks_{j0})\Big]\beta^2+\Big[2b^2b_jb_k(b^2y^ps^r_ls_{r0}-y^ps_ls_0-3b^2s^r_0s^p_ry_l+3b^ps^r_0s_ry_l-3s^ps_0y_l)+2b^2b_jb_l(b^2y^ps^r_ks_{r0}-y^ps_ks_0-3b^2s^r_0s^p_ry_k+3b^ps^r_0s_ry_k-3s^ps_0y_k)+2b^2b_kb_l(b^2y^ps^r_js_{r0}-y^ps_js_0-3b^2s^r_0s^p_ry_j+3b^ps^r_0s_ry_j-3s^ps_0y_j)+6b_jb_kb_l(b^2r_{00}s^p-b^2b^ps_{0;0}+b^4s^p_{0;0}+b^ps_0r_0-b^2r^p_0s_0+b^ps^2_0+2b^2y^ps^r_0s_r+b^2b^ps^r_0r_{r0})\Big]\beta+6b^2y^pb_jb_kb_l(b^2s_{r0}s^r_0-s^2_0)\Big\}\alpha^4+\Big\{\Big[2b^2\Big((2y^pb_jb_l+b^py_jb_l+b^py_lb_j)s^r_k+(2y^pb_jb_k+b^py_jb_k+b^py_kb_j)s^r_l+(2y^pb_kb_l+b^py_kb_l+b^py_lb_k)s^r_j\Big)r_{r0}+2b^2(y_jb_l+y_lb_j)s^pr_{k0}+2b^2s^p(y_kb_l+y_lb_k)r_{j0}+2b^2s^p(y_jb_k+y_kb_j)r_{l0}+2b^2(y_ka_{jl}+y_ja_{lk}+y_la_{jk})(b^ps^r_0s_r-$$

$$b^2 s_0^r s_r^p) + 2y^p b^2(-s_l b_j - 2s_j b_l + b^2 s_{lj}) s_{k0} + 2y^p b^2 s_j b_k s_{l0} + 2y^p b^2 (s_l b_k + s_k b_l - b^2 s_{lk}) s_{j0} +$$
$$2b^4 \Big((y_k b_j + y_j b_k) s_{l;0}^p + (y_l b_j + y_j b_l) s_{k;0}^p + (y_l b_k + y_k b_l) s_{j;0}^p \Big) - 2b^2 \Big(2y^p b_j b_l + b^p (y_l b_j +$$
$$y_j b_l) \Big) s_{k;0} - 2b^2 \Big(2y^p b_j b_k + b^p (y_j b_k + y_k b_j) \Big) s_{l;0} - 2b^2 \Big(2y^p b_l b_k + b^p (y_k b_l + y_l b_k) \Big) s_{j;0} +$$
$$2(b_j a_{lk} + b_k a_{jl} + b_l a_{jk})(b^4 s_{0;0}^p + b^2 s^p r_{00} + 2b^2 y^p s_0^r s_r - b^2 b^p s_{0;0} + b^p s_0^2 + b^2 b^p s_0^r r_{r0} - b^2 r_0^p s_0 +$$
$$b^p r_0 s_0) + 2b^p s_0 \Big(s_j (y_l b_k + y_k b_l) + s_l (y_k b_j + y_j b_k) + s_k (y_l b_j + y_j b_l) \Big) - 2b^2 s^p s_0 (y_l a_{jk} +$$
$$y_j a_{lk} + y_k a_{jl}) + 4y^p (s_0 + r_0)(s_k b_j b_l + s_l b_j b_k + s_j b_l b_k) - 2y^p b^2 s_0 (s_j a_{lk} + s_l a_{jk} + s_k a_{jl}) +$$
$$2y^p b^4 (a_{lk} s_j^r + a_{jl} s_k^r + a_{jk} s_l^r) s_{r0} - 2(b^2 r_0^p - b^p r_0) \Big(s_l (y_k b_j + y_j b_k) + s_j (y_k b_l + y_l b_k) +$$
$$s_k (y_j b_l + y_l b_j) \Big) \Big] \beta^3 + \Big[-4y^p b^2 r_{00} (s_j b_l b_k + s_k b_j b_l + s_l b_j b_k) - 4y^p b^4 (s_{j0;0} b_l b_k + s_{k0;0} b_j b_l +$$
$$s_{l0;0} b_j b_k) + 2y^p b^2 (b_k a_{jl} + b_j a_{lk} + a_{jk} b_l)(b^2 s_0^r s_{r0} - s_0^2) + 2y^p b^2 s_0 (s_l y_k b_j + s_k y_j b_l + s_j y_l b_k +$$
$$s_j y_k b_l + s_k y_l b_j + s_l y_j b_k) + 4y^p b^2 s_0 (r_{j0} b_l b_k + r_{l0} b_j b_k + r_{k0} b_j b_l) - 6y^p b^2 s_0 (s_{l0} b_j b_k + s_{j0} b_l b_k -$$
$$2s_{k0} b_j b_l) - 2y^p b^4 \Big((y_j b_k + y_k b_j) s_l^r + (y_l b_j + y_j b_l) s_k^r + (y_l b_k + y_k b_l) s_j^r \Big) s_{r0} + 4b^2 (b^2 s_0^r s_r^p -$$
$$b^p s_0^r s_r + s^p s_0)(y_l y_k b_j + y_k y_j b_l + y_l y_j b_k) - 4(b^4 s_{0;0}^p + b^p s_0 r_0 + b^2 b^p s_0^r r_{r0} + b^p s_0^2 - b^2 s_0 r_0^p -$$
$$b^2 s_{0;0} b^p + 3y^p b^2 s_0^r s_r + s^p b^2 r_{00})(y_l b_j b_k + y_k b_j b_l + y_j b_k b_l) - 12y^p b_j b_k b_l (r_0 s_0 + s_0^2 + b^2 s_0^r r_{r0} -$$
$$b^2 s_{0;0}) \Big] \beta^2 + \Big[-8b^2 y^p (y_k b_j b_l + y_j b_k b_l + y_l b_j b_k)(b^2 s_0^r s_{r0} - s_0^2) \Big] \beta \Big\} \alpha^2 + 4y^p \Big[b^2 r_{r0} (s_k^r a_{jl} +$$
$$s_l^r a_{jk} + s_j^r a_{lk}) + r_0 (s_j a_{lk} + s_l a_{jk} + s_k a_{jl}) - b^2 (s_{j;0} a_{lk} + s_{k;0} a_{jl} + s_{l;0} a_{jk}) + s_0 (s_k a_{jl} + s_j a_{lk} +$$
$$s_l a_{jk}) \Big] \beta^5 + 4y^p \Big[b^2 (s_{j;0} y_k b_l + s_{l;0} y_j b_k + s_{k;0} y_l b_j) + b^2 b_k (r_{l0} s_{j0} + r_{j0} s_{l0}) - b^2 s_0^r s_r (y_l a_{jk} +$$
$$y_j a_{lk} + y_k a_{jl}) + s_0 b^2 (r_{k0} a_{jl} + r_{j0} a_{lk} + r_{l0} a_{jk}) - b^2 r_{00} (s_l a_{jk} + s_k a_{jl} + s_j a_{lk}) - (y_k b_l +$$
$$y_l b_k)(s_0 s_j + b^2 s_j^r r_{r0}) - (y_j b_k + y_k b_j)(s_l s_0 + b^2 s_l^r r_{r0}) - (y_l b_j + y_j b_l)(s_k s_0 + b^2 s_k^r r_{r0}) -$$
$$(b_j a_{lk} + b_k a_{jl} + a_{jk} b_l) \Big(b^2 s_0^r r_{r0} + b^2 s_{0;0} + s_0 r_0 + s_0^2 \Big) - (r_{j0} b_l + r_{l0} b_j) b^2 s_{k0} + b^2 (s_{j;0} y_l b_k +$$
$$s_{l;0} y_k b_j + s_{k;0} y_j b_l) - b^4 (s_{k0;0} a_{jl} + s_{l0;0} a_{jk} + s_{j0;0} a_{lk}) - r_0 (s_l y_j b_k + s_j y_k b_l + s_l y_k b_j +$$
$$s_j y_l b_k + s_k y_j b_l + s_k y_l b_j) \Big] \beta^4 + 4y^p \Big[b^2 (y_j b_l + y_l b_j)(b^2 s_{k0;0} + s_k r_{00} - s_0 r_{k0} - s_0 s_{k0}) -$$
$$r_{00} b^2 (s_{j0} b_k b_l - 2s_{k0} b_j b_l + s_{l0} b_j b_k) + b^2 (y_j b_k + y_k b_j)(b^2 s_{l0;0} - s_0 r_{l0} + s_l r_{00}) + b^2 (y_l b_k +$$
$$y_k b_l)(b^2 s_{j0;0} - s_0 r_{j0} + s_j r_{00}) + b^2 s_0 (s_{l0} y_j b_k + s_{j0} y_l b_k) + b^2 (y_l a_{jk} + y_j a_{lk} + y_k a_{jl})(s_0^2 -$$
$$b^2 s_0^r s_{r0}) + 2b^2 s_0^r s_r (y_j y_l b_k + y_k y_j b_l + y_l y_k b_j) + 2(b^2 s_0^r r_{r0} - b^2 s_{0;0} + s_0 r_0 + s_0^2)(y_k b_j b_l +$$
$$y_j b_k b_l + y_l b_j b_k) \Big] \beta^3 - \Big[8b^2 y^p (y_k y_j b_l + y_j y_l b_k + y_k y_l b_j)(b^2 s_0^r s_{r0} - s_0^2) \Big] \beta^2 = 0$$

veya kapalı formda

$$\alpha^6 [E_1] + \alpha^4 [\beta^3 B_0 + \beta^2 C_1 + \beta D_2 + E_3] + \alpha^2 [\beta^4 B_1 + \beta^3 B_2 + \beta^2 C_3 + \beta D_4]$$
$$+ [\beta^5 A_2 + \beta^4 B_3 + \beta^3 B_4 + \beta^2 C_5] = 0$$

polinom denklemleri elde edilir. Bu denklemler β ya göre düzenlenirse

$$\beta^5 A_2 + \beta^4(\alpha^2 B_1 + B_3) + \beta^3(\alpha^4 B_0 + \alpha^2 B_2 + B_4) + \beta^2(\alpha^4 C_1 + \alpha^2 C_3 + C_5)$$
$$+\beta(\alpha^4 D_2 + \alpha^2 D_4) + \alpha^6 E_1 + \alpha^4 E_3 = 0 \qquad (2.26)$$

şeklini alır. Burada

$A_2 = 4y^p\Big[b^2 r_{r0}(s^r_k a_{jl} + s^r_l a_{jk} + s^r_j a_{lk}) + r_0(s_j a_{lk} + s_l a_{jk} + s_k a_{jl}) - b^2(s_{j;0}a_{lk} + s_{k;0}a_{jl} + s_{l;0}a_{jk}) + s_0(s_k a_{jl} + s_j a_{lk} + s_l a_{jk})\Big]$,

$B_1 = 2a_{jk}(-b^4 s^p_{l;0} - b^2 b^p r_{r0} s^r_l - b^2 s^p r_{l0} + b^2 b^p s_{l;0} + b^2 s_l r^p_0 - b^p s_l s_0 - b^p s_l r_0) + 2a_{lk}(-b^4 s^p_{j;0} - b^2 b^p r_{r0} s^r_j - b^2 s^p r_{j0} + b^2 b^p s_{j;0} + b^2 s_j r^p_0 - b^p s_j s_0 - b^p s_j r_0) + 2a_{jl}(-b^4 s^p_{k;0} - b^2 b^p r_{r0} s^r_k - b^2 s^p r_{k0} + b^2 b^p s_{k;0} + b^2 s_k r^p_0 - b^p s_k s_0 - b^p s_k r_0) + 2b^2 y^p(s_k s_{lj} - s_j s_{lk})$,

$B_3 = 4y^p\Big[b^2(s_{j;0}y_k b_l + s_{l;0}y_j b_k + s_{k;0}y_l b_j) + b^2 b_k(r_{l0}s_{j0} + r_{j0}s_{l0}) - b^2 s^r_0 s_r(y_l a_{jk} + y_j a_{lk} + y_k a_{jl}) + s_0 b^2(r_{k0}a_{jl} + r_{j0}a_{lk} + r_{l0}a_{jk}) - b^2 r_{00}(s_l a_{jk} + s_k a_{jl} + s_j a_{lk}) - (y_k b_l + y_l b_k)(s_0 s_j + b^2 s^r_j r_{r0}) - (y_j b_k + y_k b_j)(s_l s_0 + b^2 s^r_l r_{r0}) - (y_l b_j + y_j b_l)(s_k s_0 + b^2 s^r_k r_{r0}) - (b_j a_{lk} + b_k a_{jl} + a_{jk} b_l)\Big(b^2 s^r_0 r_{r0} + b^2 s_{0;0} + s_0 r_0 + s^2_0\Big) - (r_{j0}b_l + r_{l0}b_j)b^2 s_{k0} + b^2(s_{j;0}y_l b_k + s_{l;0}y_k b_j + s_{k;0}y_j b_l) - b^4(s_{k0;0}a_{jl} + s_{l0;0}a_{jk} + s_{j0;0}a_{lk}) - r_0(s_l y_j b_k + s_j y_k b_l + s_l y_k b_j + s_j y_l b_k + s_k y_j b_l + s_k y_l b_j)\Big]$,

$B_2 = 2b^2\Big[(2y^p b_j b_l + b^p y_j b_l + b^p y_l b_j)s^r_k + (2y^p b_j b_k + b^p y_j b_k + b^p y_k b_j)s^r_l + (2y^p b_k b_l + b^p y_k b_l + b^p y_l b_k)s^r_j\Big]r_{r0} + 2b^2(y_j b_l + y_l b_j)s^p r_{k0} + 2b^2 s^p(y_k b_l + y_l b_k)r_{j0} + 2b^2 s^p(y_j b_k + y_k b_j)r_{l0} + 2b^2(y_k a_{jl} + y_j a_{lk} + y_l a_{jk})(b^p s^r_0 s_r - b^2 s^r_0 s^p_r) + 2y^p b^2(-s_l b_j - 2s_j b_l + b^2 s_{lj})s_{k0} + 2y^p b^2 s_j b_k s_{l0} + 2y^p b^2(s_l b_k + s_k b_l - b^2 s_{lk})s_{j0} + 2b^4((y_k b_j + y_j b_k)s^p_{l;0} + (y_l b_j + y_j b_l)s^p_{k;0} + (y_l b_k + y_k b_l)s^p_{j;0}\Big] - 2b^2\Big[2y^p b_j b_l + b^p(y_l b_j + y_j b_l)\Big]s_{k;0} - 2b^2\Big[2y^p b_j b_k + b^p(y_j b_k + y_k b_j)\Big]s_{l;0} - 2b^2\Big[2y^p b_l b_k + b^p(y_k b_l + y_l b_k)\Big]s_{j;0} + 2(b_j a_{lk} + b_k a_{jl} + b_l a_{jk})(b^4 s^p_{0;0} + b^2 s^p r_{00} + 2b^2 y^p s^r_0 s_r - b^2 b^p s_{0;0} + b^p s^2_0 + b^2 b^p s^r_0 r_{r0} - b^2 r^p_0 s_0 + b^p r_0 s_0) + 2b^p s_0(s_j(y_l b_k + y_k b_l) + s_l(y_k b_j + y_j b_k) + s_k(y_l b_j + y_j b_l)) - 2b^2 s^p s_0(y_l a_{jk} + y_j a_{lk} + y_k a_{jl}) + 4y^p(s_0 + r_0)(s_k b_j b_l + s_l b_j b_k + s_j b_l b_k) - 2y^p b^2 s_0(s_j a_{lk} + s_l a_{jk} + s_k a_{jl}) + 2y^p b^4(a_{lk}s^r_j + a_{jl}s^r_k + a_{jk}s^r_l)s_{r0} - 2(b^2 r^p_0 - b^p r_0)\Big[s_l(y_k b_j + y_j b_k) + s_j(y_k b_l + y_l b_k) + s_k(y_j b_l + y_l b_j)\Big]$,

$$B_4 = 4y^p\Big[b^2(y_jb_l+y_lb_j)(b^2s_{k0;0}+s_kr_{00}-s_0r_{k0}-s_0s_{k0})-r_{00}b^2(s_{j0}b_kb_l-2s_{k0}b_jb_l+s_{l0}b_jb_k)+b^2(y_jb_k+y_kb_j)(b^2s_{l0;0}-s_0r_{l0}+s_lr_{00})+b^2(y_lb_k+y_kb_l)(b^2s_{j0;0}-s_0r_{j0}+s_jr_{00})+b^2s_0(s_{l0}y_jb_k+s_{j0}y_lb_k)+b^2(y_la_{jk}+y_ja_{lk}+y_ka_{jl})(s_0^2-b^2s_0^rs_{r0})+2b^2s_0^rs_r(y_jy_lb_k+y_ky_jb_l+y_ly_kb_j)+2(b^2s_0^rr_{r0}-b^2s_{0;0}+s_0r_0+s_0^2)(y_kb_jb_l+y_jb_kb_l+y_lb_jb_k)\Big],$$

$$B_0 = -b^2b^p(s_ks_{lj}-s_js_{lk}),$$

$$C_1 = +2b_kb_l(-b^4s^p_{j;0}+b^2s_jr_0^p-b^2r_{j0}s^p-b^2b^pr_{r0}s_j^r-b^ps_js_0-b^ps_jr_0+b^2b^ps_{j;0})+2b_jb_k(-b^4s^p_{l;0}+b^2s_lr_0^p-b^2r_{l0}s^p-b^2b^pr_{r0}s_l^r-b^ps_ls_0-b^ps_lr_0+b^2b^ps_{l;0})+2b_jb_l(-b^4s^p_{k;0}+b^2s_kr_0^p-b^2r_{k0}s^p-b^2b^pr_{r0}s_k^r-b^ps_ks_0-b^ps_kr_0+b^2b^ps_{k;0})+2b^2(b_ja_{lk}+b_la_{jk}+b_ka_{jl})(s_0s^p-s_0^rs_rb^p+b^2s_0^rs_r^p)-b^2b^pb_l(s_js_{k0}-s_ks_{j0}),$$

$$C_3 = -4y^pb^2r_{00}(s_jb_lb_k+s_kb_jb_l+s_lb_jb_k)-4y^pb^4(s_{j0;0}b_lb_k+s_{k0;0}b_jb_l+s_{l0;0}b_jb_k)+2y^pb^2(b_ka_{jl}+b_ja_{lk}+a_{jk}b_l)(b^2s_0^rs_{r0}-s_0^2)+2y^pb^2s_0(s_ly_kb_j+s_ky_jb_l+s_jy_lb_k+s_jy_kb_l+s_ky_lb_j+s_ly_jb_k)+4y^pb^2s_0(r_{j0}b_lb_k+r_{l0}b_jb_k+r_{k0}b_jb_l)-6y^pb^2s_0(s_{l0}b_jb_k+s_{j0}b_lb_k-2s_{k0}b_jb_l)-2y^pb^4\Big[(y_jb_k+y_kb_j)s_l^r+(y_lb_j+y_jb_l)s_k^r+(y_lb_k+y_kb_l)s_j^r\Big]s_{r0}+4b^2(b^2s_0^rs_r^p-b^ps_0^rs_r+s^ps_0)(y_ly_kb_j+y_ky_jb_l+y_ly_jb_k)-4(b^4s^p_{0;0}+b^ps_0r_0+b^2b^ps_0^rr_{r0}+b^ps_0^2-b^2s_0r_0^p-b^2s_{0;0}b^p+3y^pb^2s_0^rs_r+s^pb^2r_{00})(y_lb_jb_k+y_kb_jb_l+y_jb_kb_l)-12y^pb_jb_kb_l(r_0s_0+s_0^2+b^2s_0^rr_{r0}-b^2s_{0;0}),$$

$$C_5 = -8b^2y^p(y_ky_jb_l+y_jy_lb_k+y_ky_lb_j)(b^2s_0^rs_{r0}-s_0^2),$$

$$D_2 = 2b^2b_jb_k(b^2y^ps_l^rs_{r0}-y^ps_ls_0-3b^2s_0^rs_r^py_l+3b^ps_0^rs_ry_l-3s^ps_0y_l)+2b^2b_jb_l(b^2y^ps_k^rs_{r0}-y^ps_ks_0-3b^2s_0^rs_r^py_k+3b^ps_0^rs_ry_k-3s^ps_0y_k)+2b^2b_kb_l(b^2y^ps_j^rs_{r0}-y^ps_js_0-3b^2s_0^rs_r^py_j+3b^ps_0^rs_ry_j-3s^ps_0y_j)+6b_jb_kb_l(b^2r_{00}s^p-b^2b^ps_{0;0}+b^4s^p_{0;0}+b^ps_0r_0-b^2r_0^ps_0+b^ps_0^2+2b^2y^ps_0^rs_r+b^2b^ps_0^rr_{r0}),$$

$$D_4 = -8b^2y^p(y_kb_jb_l+y_jb_kb_l+y_lb_jb_k)(b^2s_0^rs_{r0}-s_0^2),$$

$$E_1 = 6b^2b_jb_kb_l(s_0s^p+s_0^r(b^2s_r^p-s_rb^p)),$$

$E_3 = 6b^2 y^p b_j b_k b_l (b^2 s_{r0} s_0^r - s_0^2)$

dir ve harflerin altındaki indisler homojenlik derecelerini gösterir.

Teorem 2.2.1.1: Bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek ve yeter koşul (2.26) polinom denklemlerinin sağlanmasıdır.

Yardımcı Teorem 2.2.1.2 [21, 22]**:** $(\alpha, \beta)-$metrikli bir Finsler uzayı için $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\beta}$ olması halinde uzay iki boyutludur ve $b^2 = 0$ dır. Bu durumda $\alpha^2 = \beta\delta$ eşitliğini sağlayan bir $\delta = d_i(x)y^i$ $1-$formu vardır ve $d_i b^i = 2$ dir.

İspat 2.2.1.2: $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\beta}$ ise $a_{ij}y^i y^j$ kuadratik formu $\beta = b_i y^i$ yi bir çarpan olarak içerir. Bu durumda $\alpha^2 = \delta\beta$ ve $\delta = d_i y^i$ $(d_i = d_i(x), b_i = b_i(x))$ için

$$a_{ij}y^i y^j = b_i y^i d_j y^j$$

yazılabilir. Burada $i \leftrightarrow j$ indis değişimi yapılarak elde edilen iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$a_{ij} + a_{ji} = b_i d_j + b_j d_i$$

veya

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\Big(b_i d_j + b_j d_i\Big) \tag{2.27}$$

bulunur. $n>2$ için $\det[a_{ij}]=0$ olduğu kolayca görülür. Bu nedenle $n = 2$ olmalıdır.

$n = 2$ için

$$\det[a_{ij}] = \begin{vmatrix} b_1 d_1 & \frac{1}{2}(b_1 d_2 + b_2 d_1) \\ \frac{1}{2}(b_1 d_2 + b_2 d_1) & b_2 d_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 d_1 d_2 - \frac{1}{4}(b_1 d_2 + b_2 d_1)^2 = -\frac{1}{4}(b_1 d_2 - b_2 d_1)^2 < 0$$

olduğundan α Riemannian metriği pozitif definit bir metrik olma koşulunu sağlamamaktadır. Bu durumda δ, β ile orantılı değildir. Bunun sonucu olarak d_i ve b_i birbirinden lineer olarak bağımsızdır. Diğer taraftan, (2.27) den elde edilen

$$2a_{ij} = b_i d_j + b_j d_i$$

eşitliğinin her tarafı b^j ile daraltılırsa

$$b^2 d_i = (2 - d_j b^j) b_i$$

bulunur. d_i ve b_i lineer bağımsız olduklarına göre katsayıların sıfır olması gerektiği açık olur. Sonuç olarak, $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\beta}$ durumunda

$$b^2 = 0, \quad d_j b^j = 2, \quad n = 2$$

dir.

Teorem 2.2.1.1: Bir $F_n \quad (n > 2)$ Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek koşul

$$\begin{aligned} &-b^2 b_p s_r s_i^r + b_p s_i r_r b^r - b^2 r_p s_i - b^2 b_p b^r s_{i;r} + b^4 b^r s_{pi;r} + b^2 b_p s_i^r r_r + b^2 s_p r_i \\ &+ b_i \Big(- s_p r_r b^r + b^2 s_{pr} r^r + b^2 b^r s_{p;r} - b^2 s_{pr} s^r \Big) = 0, \quad p, i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{2.28}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat 2.2.1.1: (2.26) denkleminin açık hali, $b^j b^k b^l$ ile daraltılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} &-(\alpha^2 b^2 - \beta^2) \Big\{ \beta^2 (b^2 s_{p;0} - s_p (r_0 + s_0) - b^2 s_p^r r_{r0}) + \beta (b^4 s_{p0;0} + s_0 r_0 b_p + b^2 s_p r_{00} \\ &+ s_0^2 b_p + b^2 b_p s_0^r r_{r0} + b^2 s^r s_{r0} y_p - b^2 b_p s_{0;0} - b^2 s_0 r_{p0}) + \alpha^2 b^2 (s_0 s_p - b_p s^r s_{r0} \\ &- b^2 s_p^r s_{r0}) + b^2 y_p (s_0^r s_{r0} b^2 - s_0^2) \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

polinom denklemleri elde edilir. $n > 2$ ve $b^2 \neq 0$ için

$$\alpha^2 b^2 - \beta^2 \not\equiv 0$$

dır. Gerçekten $\alpha^2 b^2 - \beta^2 = 0$ olması durumunda, $\alpha^2 \equiv 0 (\mod \beta)$ olacağından Yardımcı Teorem 2.2.1.3 den $n = 2$ olmak zorundadır. Buna göre (2.29) denklemlerinin sağlanması için

$$\begin{aligned} &\beta^2 (b^2 s_{p;0} - s_p (r_0 + s_0) - b^2 s_p^r r_{r0}) + \beta (b^4 s_{p0;0} + s_0 r_0 b_p + b^2 s_p r_{00} + s_0^2 b_p \\ &+ b^2 b_p s_0^r r_{r0} + b^2 s^r s_{r0} y_p - b^2 b_p s_{0;0} - b^2 s_0 r_{p0}) + \alpha^2 b^2 (s_0 s_p - b_p s^r s_{r0} - b^2 s_p^r s_{r0}) \\ &+ b^2 y_p (s_0^r s_{r0} b^2 - s_0^2) = 0 \end{aligned}$$

veya kapalı formda

$$\beta(C_1\beta + C_2) + \alpha^2 D_1 + C_3 = 0 \tag{2.30}$$

polinom denklemleri sağlanmalıdır. Burada

$C_1 = b^2 s_{p;0} - s_p(r_0 + s_0) - b^2 s_p^r r_{r0},$

$C_2 = b^4 s_{p0;0} + s_0 r_0 b_p + b^2 s_p r_{00} + s_0^2 b_p + b^2 b_p s_0^r r_{r0} + b^2 s^r s_{r0} y_p - b^2 b_p s_{0;0} - b^2 s_0 r_{p0},$

$D_1 = b^2(s_0 s_p - b_p s^r s_{r0} - b^2 s_p^r s_{r0}),$

$C_3 = b^2 y_p(s_0^r s_{r0} b^2 - s_0^2)$

dir. (2.30) da $\beta(C_1\beta + C_2) + C_3$ terimi α^2 yi içermemektedir. Bu durumda

$$\beta(C_1\beta + C_2) + C_3 = \alpha^2 u_{p1} \tag{2.31}$$

eşitliğini sağlayan $1-$homojen bir $u_{p1} = u_{pi}(x)y^i$ terimi mevcut olmalıdır. Böylece (2.30) dan

$$D_1 = -u_{p1} \tag{2.32}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (2.31) y^i ve y^j ye göre türetilir ve b^i ile daraltılırsa u_{p1};

$$\begin{aligned} u_{p1} &= \beta(-s_p r_r b^r + b^2 s_{pr} r^r + b^2 b^r s_{p;r} - b^2 s_{pr} s^r) + b_p s_0 r_r b^r - b^2 r_p s_0 \\ &\quad -b^2 b_p b^r s_{0;r} - b^4 s_{pr} s_0^r + b^4 b^r s_{p0;r} + b^2 b_p s_0^r r_r - b^2 s_p s_0 + b^2 s_p r_0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

olarak elde edilir. (2.32), (2.33) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D_1 + u_{p1} &= -b^2 b_p s^r s_{r0} + \beta(-s_p r_r b^r + b^2 s_{pr} r^r + b^2 b^r s_{p;r} - b^2 s_{pr} s^r) + b_p s_0 r_r b^r \\ &\quad -b^2 r_p s_0 - b^2 b_p b^r s_{0;r} + b^4 b^r s_{p0;r} + b^2 b_p s_0^r r_r + b^2 s_p r_0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

bulunur ve (2.34) ün y^i ye göre türevinin alınmasıyla da

$$\begin{aligned} &-b^2 b_p s_r s_i^r + b_p s_i r_r b^r - b^2 r_p s_i - b^2 b_p b^r s_{i;r} + b^4 b^r s_{pi;r} + b^2 b_p s_i^r r_r + b^2 s_p r_i \\ &+b_i(-s_p r_r b^r + b^2 s_{pr} r^r + b^2 b^r s_{p;r} - b^2 s_{pr} s^r) = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

elde edilir.

2.3 Finsler Uzaylarında $R-$Eğrilik Tensörü

$B\Gamma(G^i_{Fjk}, G^i_{Fj}, 0)$ Berwald konneksiyonlu bir F_n Finsler uzayı için

$$R^i_{jk} = \partial_k G^i_{Fj} - \partial_j G^i_{Fk} + G^i_{Fkr} G^r_{Fj} - G^i_{Fjr} G^r_{Fk}$$

ifadesinin y^l ye göre kısmi türevi

$$\begin{aligned} R^i_{ljk} &= \dot{\partial}_l R^i_{jk} \qquad (2.36) \\ &= \partial_k G^i_{Fjl} - \partial_j G^i_{Fkl} - G^r_{Fk} \dot{\partial}_l G^i_{Fjr} + G^r_{Fj} \dot{\partial}_l G^i_{Fkr} + G^i_{Fkr} G^r_{Fjl} - G^i_{Fjr} G^r_{Fkl} \end{aligned}$$

$R-$eğrilik tensörüdür[23]. Bir Berwald uzayı için $R-$eğrilik tensörü

$$R^i_{ljk} = \dot{\partial}_l R^i_{jk} = \partial_k G^i_{Fjl} - \partial_j G^i_{Fkl} + G^i_{Fkr} G^r_{Fjl} - G^i_{Fjr} G^r_{Fkl} \qquad (2.37)$$

şeklindedir. Burada $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}, \quad \dot{\partial}_k = \dfrac{\partial}{\partial y^k}$ dır.

R^i_{jk} için aşağıdaki eşitlikler sağlanır[23]:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y^l R^i_{ljk} = R^i_{0jk} = R^i_{jk} \qquad (b) \quad y^j R^i_{jk} = R^i_{0k} = R^i_k \\ &(c) \quad R^i_{jk} = -R^i_{kj}, \quad R^i_{ljk} = -R^i_{lkj} \quad (d) \quad R^i_{jk} = \frac{1}{3}\Big(\dot{\partial}_j R^i_k - \dot{\partial}_k R^i_j\Big). \end{aligned}$$

Bir F_n Finsler uzayının (2.36) ile verilen R-eğrilik tensörü R^i_{jlk} ifadesinde j ve l indisleri üzerine daraltma yapıldığında

$$R^i_k = y^l y^j R^i_{ljk} = 2\partial_k G^i_F - \partial_j G^i_{Fk} y^j - G^i_{Fr} G^r_{Fk} + 2G^i_{Fkr} G^r_F \qquad (2.38)$$

Riemann eğriliği elde edilir. (2.38) de $k = i$ alındığında da

$$R^i_i = 2\partial_i G^i_F - y^j \partial_j G_F - G^i_{Fr} G^r_{Fi} + 2G_{Fr} G^r_F \qquad (2.39)$$

Ricci tensörü (veya skaleri) bulunur.

Teorem 2.3.1: Berwald konneksiyonlu bir Finsler uzayının $R-$eğrilik tensörü, Riemann geometrisindeki birinci ve ikinci Bianchi özdeşliklerine eşdeğer olan

$$a) R^i_{jkl} + R^i_{ljk} + R^i_{klj} = 0$$

ve

$$b) R^i_{jkl|m} + R^i_{jlm|k} + R^i_{jmk|l} = 0$$

özdeşliklerini sağlar.

İspat 2.3.1:

$a)$ Berwald uzayında $G^i_{_Fjk} = G^i_{_Fjk}(x)$ olduğundan (2.36) ile tanımlanan $R-$eğrilik tensörü

$$R^i_{ljk} = \partial_k G^i_{_Fjl} - \partial_j G^i_{_Fkl} - G^i_{_Fjr} G^r_{_Fkl} + G^i_{_Fkr} G^r_{_Fjl}$$

olur.

l, j, k indisleri devirsel olarak değiştirilir

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= \partial_l G^i_{_Fkj} - \partial_k G^i_{_Flj} - G^i_{_Fkr} G^r_{_Fjl} + G^i_{_Flr} G^r_{_Fkj} \\ R^i_{ljk} &= \partial_k G^i_{_Fjl} - \partial_j G^i_{_Fkl} - G^i_{_Fjr} G^r_{_Fkl} + G^i_{_Fkr} G^r_{_Fjl} \\ R^i_{klj} &= \partial_j G^i_{_Flk} - \partial_l G^i_{_Fjk} - G^i_{_Flr} G^r_{_Fjk} + G^i_{_Fjr} G^r_{_Fkl} \end{aligned}$$

ve elde edilen üç eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$R^i_{jkl} + R^i_{ljk} + R^i_{klj} = 0$$

bulunur.

$b)$ R^i_{jkl} nin y^m göre kovaryant türevi alınır ve k, l, m indisleri devirsel olarak değiştirilirse, sırasıyla,

$$\begin{aligned} R^i_{jkl|m} &= \partial_m R^i_{jkl} - G^p_{_Fm} R^i_{pjkl} + G^i_{_Frm} R^r_{jkl} - G^p_{_Fjm} R^i_{pkl} - G^p_{_Fkm} R^i_{jpl} - G^p_{_Flm} R^i_{jkp} \\ R^i_{jlm|k} &= \partial_k R^i_{jlm} - G^p_{_Fk} R^i_{pjlm} + G^i_{_Frk} R^r_{jlm} - G^p_{_Fjk} R^i_{plm} - G^p_{_Flk} R^i_{jpm} - G^p_{_Fmk} R^i_{jlp} \\ R^i_{jmk|l} &= \partial_l R^i_{jmk} - G^p_{_Fl} R^i_{pjmk} + G^i_{_Frl} R^r_{jmk} - G^p_{_Fjl} R^i_{pmk} - G^p_{_Flm} R^i_{jpk} - G^p_{_Fkl} R^i_{jmp} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplandığında Riemann geometrisindeki ikinci Bianchi özdeşliğinin genelleştirilmişi olan

$$R^i_{jkl|m} + R^i_{jlm|k} + R^i_{jmk|l} = 0$$

özdeşliği elde edilir.

2.3.1 Skaler Flag Eğrilikli Kropina Uzayları

Yardımcı Teorem 2.3.1.1 [13]**:** Bir Finsler metriğinin skaler flag eğrilikli olması için gerek ve yeter koşul W^i_j Weyl tensörünün sıfır olmasıdır.

İspat 2.3.1.1: Bir F Finsler metriği $K = \sigma(x,y)$ skaler flag eğrilikli olsun. Bu durumda

$$R_j^i = KF^2 h_j^i \tag{2.40}$$

dır[1]. (2.40), (1.38) de yazılırsa

$$\begin{aligned} W_j^i &= R_j^i - R\delta_j^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}(R_j^m - R\delta_j^m)y^i \qquad (2.41)\\ &= \sigma F^2(\delta_j^i - \frac{y^i}{F}F_j) - \sigma F^2\delta_j^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}\Big[\sigma F^2(\delta_j^m - \frac{y^m}{F}F_j) - \sigma F^2\delta_j^m\Big]y^i \\ &= \frac{1}{2(n+1)}\Big[F^2\Big]_{y^j}\sigma_m y^m y^i \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\sigma = \sigma(x,y), \sigma_m = \dfrac{\partial\sigma}{\partial y^m}$ dir. $K = \sigma(x,y)$ sıfırıncı dereceden skaler bir fonksiyon olduğundan

$$\sigma_m y^m = 0 \tag{2.42}$$

ve (2.41) den $W_j^i = 0$ dır.

Tersine olarak, $W_j^i = 0$ olsun. (2.40) ve (2.41) den

$$KF^2 h_j^i = R_j^i - R\delta_j^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}(KF^2 h_j^m - R\delta_j^m)y^i$$

kullanılarak,

$$\begin{aligned} KF^2\frac{y^i}{F}F_j &= \frac{1}{n+1}(K_m y^m F F_j + KF_m y^m F_j + KF\delta_m^m F_j + KFF_{jm}y^m)y^i, \\ &= \frac{1}{2(n+1)}\Big[K_m y^m (F^2)_{y^j} + (n+1)K(F^2)_{y^j}\Big]y^i \end{aligned}$$

veya

$$\frac{1}{n+1}K_m y^m\Big[F^2\Big]_{y^j} = 0 \tag{2.43}$$

bulunur. Burada, $\Big[F^2\Big]_{y^j} \neq 0$ olduğundan, (2.43) den

$$K_m y^m = 0 \tag{2.44}$$

dır. (2.44) kismi türevli diferansiyel denkleminin çözümü $K = \sigma(x,y)$ skaler fonksiyonunu verir [24]. Böylece iki yönlü ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2.3.1.2: Bir F Kropina metriği ile α Riemann metriğinin Weyl eğrilikleri arasındaki ilişki

$$W_{Fk}^i = W_{\alpha k}^i + \Theta_k^i \tag{2.45}$$

şeklindedir. Burada Θ_k^i terimi açık formda,

$$\Theta_k^i = -\frac{1}{4(n^2-1)\beta^5 b^4}\Bigg\{\alpha^4\Bigg\{ - b^2\Big[b^2(1-n^2)s_r^i s_k^r + (1+n)b^2\delta_k^i s_r^m s_m^r + (1-n)s^i s_k n^2\Big]\beta^3 + b^2(1+n)\Big[2(1-n)s_0(s_k b^i - b^2 s_k^i) + b^2 y^i s_k^r s_r + (1-n)s_0 b_k s^i\Big]\beta^2 + \Big[b^4(1+n)y^i(s_0 s_k + s_0^r s_r b_k)\Big]\beta - b^4(1+n)b_k y^i(b^2 s_0^r s_{r0} - s_0^2)\Bigg\} + 2\alpha^2\Bigg\{\Big[2b^2(1-n^2)s_{0;k}b^i - b^2(1-n^2)r_0^i s_k - 2b^4(1-n^2)s_{0;k}^i - b^2(1-n^2)s^i r_{k0} + 2b^2(1-n^2)s_0 r_k^i + b^4(1-n^2)s_{k;0}^i + b^2(1+n)s^r r_{rk}y^i + b^4(1+n)s_{k;r}^r - 2(1-n^2)s_0 b^i r_k - b^2(1-n^2)s_{k;0}b^i + b^2(1+n)(s_r + r_r)s_k^r y^i - b^2(1+n)y^i s_k r_r^r - b^2(1+n)y^i s_{k;r}b^r - 2(1+n)\delta_k^i s_0 r_r b^r + 2b^2(1+n)s_0 r_r^r\delta_k^i + (1+n)s_k b^r r_r y^i - 2b^2(1+n)\delta_k^i s^r r_{r0} + (1-n^2)b^i s_k r_0 - 2b^4(1+n)\delta_k^i s_{0;r}^r + 2b^2(1+n)b^r s_{0;r}\delta_k^i + b^2(1+n)\delta_k^i r_0^r s_r + b^2(1-n^2)b^i r_{r0}s_k^r - b^2(1-n^2)s_k s_0^i\Big]\beta^4 + 2\Big[b^2(1-n^2)b_k b^i s_{0;0} - b^2(1+n)y^i b_k s_0 r_r b^r - b^2(1-n^2)r_{00}s^i b_k + 3b^2(1+n)s_0^2\delta_k^i - 3b^4(1-n^2)s_0^i s_{k0} + b^4(1+n)s_0^r r_{r0}\delta_k^i - b^4(1-n^2)b_k s_{0;0}^i + b^2(1+n)s_0 y^i b_k r_r^r + 3b^2(1-n^2)s_0 s_{k0}b^i + b^2(1-n^2)b_k s_0 r_0^i + b^2(1-n^2)s_0 s^i y_k - (1-n^2)b_k b^i s_0^2 + b^2(1+n)y^i b_k s_{0;r}b^r - b^4(1+n)b_k s_{0;r}^r - 3b^2(1+n)y^i s_0 s_k - 2(1-n^2)b_k b^i s_0 r_0 - 2b^4(1+n)\delta_k^i s_0^r s_{r0} - b^4(1+n)y^i s_0^r s_{rk} - b^2(1+n)s_0^r s_r b_k y^i\Big]\beta^3 + 2\Big[- 2b^4(1+n)y^i s_0 s_{k0} - b^2(1-n^2)s_0^2 y_k b^i + b^4(1+n)y^i s_{r0}s^r y_k + b^4(1-n^2)s_0 y_k s_0^i + b^2(1+n)s_0^2 b_k y^i - b^4(1+n)y^i s_0^r s_r y_k - b^2(1+n)y^i s_0 r_0 b_k - 2b^4(1+n)y^i r_{r0}s_0^r b_k\Big]\beta^2 - \Big[2b^4(1+n)s_0^2 y^i y_k\Big]\beta\Bigg\} + 4\Big[- b^2(1+n)(s_{0;0}+r_{0;0})\delta_k^i + (1+n)r_0^2\delta_k^i - (1-n^2)r_{00}b^i r_k - (1+n)r_{00}r_r b^r\delta_k^i + b^2(1+n)\delta_k^i r_{00;r}b^r + b^2(1+n)s_0^r r_{r0}\delta_k^i + b^2(1-n^2)r_{00;k}b^i + (1+n)s_0^2\delta_k^i + 2(1+n)s_0 r_0\delta_k^i + (1+n)r_{k0}r_r b^r - (1-n^2)r_{00}b^i s_k - b^2(1-2n)y^i r_{k;0} + (1-n^2)r_{k0}s_0 b^i - b^2(1+n)y^i r_{k0;r}b^r + b^2(1-n^2)r_{00}r_k^i - (1+n)y^i r_k(s_0+r_0) - b^2(1-n^2)r_{k0;0}b^i - b^2(1+n)y^i r_{r0}s_k^r + b^2(1-n)r_{00}r_r^r\delta_k^i + (1-n^2)r_0 r_{k0}b^i + b^2(2-n)(s_{k;0}+r_{k;0})y^i - b^2(1+n)r_{k0}r_r^r y^i - b^2(1-n)y^i s_{0;k} - (1+n)y^i(s_0+r_0)s_k - b^2(1-n^2)r_{k0}r_0^i\Big]\beta^5 + 4\Big[(1-n^2)s_0^2 b^i y_k + b^4(1+n)y^i y_k s_{0;r}^r + b^2(1+n)y^i s_{k0}s_0 + b^2(1-n^2)r_{00}y_k s^i - b^2(1+n)y^i y_k s_{0;r}b^r + (1-n^2)s_0 r_0 y_k b^i + (1+n)y^i y_k s_0 r_r b^r - b^2(1+n)y^i y_k s_0 r_r^r + b^4(1-n^2)s_{0;0}^i y_k - b^2(1-n^2)s_0 y_k r_0^i - b^2(1-n^2)s_{0;0}y_k b^i\Big]\beta^4 + \Big[4b^2(1+n)y^i y_k(b^2 r_{r0}s_0^r + s_0 r_0)\Big]\beta^3\Bigg\} = 0$$

veya kapalı formda,

$$\Theta_k^i = -\frac{1}{4(n^2-1)\beta^5 b^4}\Bigg\{\alpha^4\Big[A_0\beta^3 + A_1\beta^2 + A_2\beta + A_3\Big] + \alpha^2\Big[B_1\beta^4 + B_2\beta^3 + B_3\beta^2 + B_4\beta\Big] + C_2\beta^5 + C_3\beta^4 + C_4\beta^3\Bigg\} \tag{2.46}$$

dır. Burada

$$A_0 = -b^2\Big[b^2(1-n^2)s^i_r s^r_k + (1+n)b^2\delta^i_k s^m_r s^r_m + (1-n)s^i s_k n^2\Big],$$

$$A_1 = -b^2(1+n)\Big[2(1-n)s_0(s_k b^i - b^2 s^i_k) + b^2 y^i s^r_k s_r + (1-n)s_0 b_k s^i\Big],$$

$$A_2 = b^4(1+n)y^i(s_0 s_k + s^r_0 s_r b_k),$$

$$A_3 = -b^4(1+n)b_k y^i(b^2 s^r_0 s_{r0} - s^2_0),$$

$$B_1 = 4b^2(1-n^2)s_{0;k}b^i - 2b^2(1-n^2)r^i_0 s_k - 4b^4(1-n^2)s^i_{0;k} - 2b^2(1-n^2)s^i r_{k0} + 4b^2(1-n^2)s_0 r^i_k + 2b^4(1-n^2)s^i_{k;0} + 2b^2(1+n)s^r r_{rk}y^i + 2b^4(1+n)s^r_{k;r} - 4(1-n^2)s_0 b^i r_k - 2b^2(1-n^2)s_{k;0}b^i + 2b^2(1+n)(s_r + r_r)s^r_k y^i - 2b^2(1+n)y^i s_k r^r_r - 2b^2(1+n)y^i s_{k;r}b^r - 4(1+n)\delta^i_k s_0 r_r b^r + 4b^2(1+n)s_0 r^r_r\delta^i_k + 2(1+n)s_k b^r r_r y^i - 4b^2(1+n)\delta^i_k s^r r_{r0} + 2(1-n^2)b^i s_k r_0 - 4b^4(1+n)\delta^i_k s^r_{0;r} + 4b^2(1+n)b^r s_{0;r}\delta^i_k + 2b^2(1+n)\delta^i_k r^r_0 s_r + 2b^2(1-n^2)b^i r_{r0}s^r_k - 2b^2(1-n^2)s_k s^i_0,$$

$$B_2 = 2b^2(1-n^2)b_k b^i s_{0;0} - 2b^2(1+n)y^i b_k s_0 r_r b^r - 2b^2(1-n^2)r_{00}s^i b_k + 6b^2(1+n)s^2_0\delta^i_k - 6b^4(1-n^2)s^i_0 s_{k0} + 2b^4(1+n)s^r_0 r_{r0}\delta^i_k - 2b^4(1-n^2)b_k s^i_{0;0} + 2b^2(1+n)s_0 y^i b_k r^r_r + 6b^2(1-n^2)s_0 s_{k0}b^i + 2b^2(1-n^2)b_k s_0 r^i_0 + 2b^2(1-n^2)s_0 s^i y_k - 2(1-n^2)b_k b^i s^2_0 + 2b^2(1+n)y^i b_k s_{0;r}b^r - 2b^4(1+n)b_k s^r_{0;r} - 6b^2(1+n)y^i s_0 s_k - 2(1-n^2)b_k b^i s_0 r_0 - 4b^4(1+n)\delta^i_k s^r_0 s_{r0} - 2b^4(1+n)y^i s^r_0 s_{rk} - 2b^2(1+n)s^r_0 s_r b_k y^i,$$

$$B_3 = -4b^4(1+n)y^i s_0 s_{k0} - 2b^2(1-n^2)s^2_0 y_k b^i + 2b^4(1+n)y^i s_{r0}s^r y_k + 2b^4(1-n^2)s_0 y_k s^i_0 + 2b^2(1+n)s^2_0 b_k y^i - 2b^4(1+n)y^i s^r_0 s_r y_k - 2b^2(1+n)y^i s_0 r_0 b_k - 4b^4(1+n)y^i r_{r0}s^r_0 b_k,$$

$$B_4 = -2b^4(1+n)s^2_0 y^i y_k,$$

$$C_2 = -4b^2(1+n)(s_{0;0} + r_{0;0})\delta^i_k + 4(1+n)r^2_0\delta^i_k - 4(1-n^2)r_{00}b^i r_k - 4(1+n)r_{00}r_r b^r\delta^i_k + 4b^2(1+n)\delta^i_k r_{00;r}b^r + 4b^2(1+n)s^r_0 r_{r0}\delta^i_k + 4b^2(1-n^2)r_{00;k}b^i + 4(1+n)s^2_0\delta^i_k + 8(1+n)s_0 r_0\delta^i_k + 4(1+n)r_{k0}r_r b^r - 4(1-n^2)r_{00}b^i s_k - 4b^2(1-2n)y^i r_{k;0} + 4(1-n^2)r_{k0}s_0 b^i -$$

$4b^2(1+n)y^i r_{k0;r}b^r + 4b^2(1-n^2)r_{00}r^i_k - 4(1+n)y^i r_k(s_0+r_0) - 4b^2(1-n^2)r_{k0;0}b^i -$
$4b^2(1+n)y^i r_{r0}s^r_k + 4b^2(1-n)r_{00}r^r_r\delta^i_k + 4(1-n^2)r_0 r_{k0}b^i + 4b^2(2-n)(s_{k;0}+r_{k;0})y^i -$
$4b^2(1+n)r_{k0}r^r_r y^i - 4b^2(1-n)y^i s_{0;k} - 4(1+n)y^i(s_0+r_0)s_k - 4b^2(1-n^2)r_{k0}r^i_0,$

$C_3 = 4(1-n^2)s^2_0 b^i y_k + 4b^4(1+n)y^i y_k s^r_{0;r} + 4b^2(1+n)y^i s_{k0}s_0 + 4b^2(1-n^2)r_{00}y_k s^i -$
$4b^2(1+n)y^i y_k s_{0;r}b^r + 4(1-n^2)s_0 r_0 y_k b^i + 4(1+n)y^i y_k s_0 r_r b^r - 4b^2(1+n)y^i y_k s_0 r^r_r +$
$4b^4(1-n^2)s^i_{0;0}y_k - 4b^2(1-n^2)s_0 y_k r^i_0 - 4b^2(1-n^2)s_{0;0}y_k b^i,$

$C_4 = 4b^2(1+n)y^i y_k(b^2 r_{r0}s^r_0 + s_0 r_0)$

dır.

İspat 2.3.1.2: Yardımcı Teorem $2.2.1.1$ e göre F Kropina metriği ile α Riemann metriğinin sprey katsayıları arasında

$$G^i_F = G^i_\alpha + \Omega^i - Py^i \tag{2.47}$$

ilişkisi mevcuttur. Burada

$$\Omega^i = -\frac{\alpha^2}{2\beta}s^i_0 + \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{2\beta b^2}b^i \tag{2.48}$$

ve

$$P = \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{\alpha^2 b^2} \tag{2.49}$$

dir. (2.47) de

$$G^i_{\widetilde{F}} = G^i_\alpha + \Omega^i \tag{2.50}$$

denirse, bir $\widetilde{F}$ Finsler uzayı ile F_n Kropina uzayının projektif ilişkili olduğunu tanımlayan

$$G^i_{\widetilde{F}} = G^i_F + Py^i$$

eşitliği elde edilir.

Projektif ilişki altında Weyl eğriliği invaryant olduğundan (1.42) den

$$W^i_{\widetilde{F}k} = W^i_{Fk} \tag{2.51}$$

dır. Diğer taraftan, (2.50), (1.21) ve (1.38) dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} R^i_{\bar{F}k} &= R^i_{\alpha k} + 2(\Omega^i_{;k} + G^j_{\alpha k}\Omega^i_j - G^i_{\alpha jk}\Omega^j) - (\Omega^i_{;j\cdot k}y^j + G^r_{\alpha k}\Omega^i_r + 2G^r_{\alpha}\Omega^i_{rk} - G^i_{\alpha r}\Omega^r_k) \\ &\quad +2G^j_{\alpha}\Omega^i_{jk} + 2G^i_{\alpha jk}\Omega^j + 2\Omega^j\Omega^i_{jk} - G^i_{\alpha j}\Omega^j_k - G^j_{\alpha k}\Omega^i_j - \Omega^i_j\Omega^j_k \\ &= R^i_{\alpha k} + 2\Omega^i_{;k} - \Omega^i_{;j\cdot k}y^j + 2\Omega^j\Omega^i_{jk} - \Omega^i_j\Omega^j_k \\ &= R^i_{\alpha k} + H^i_k, \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{n-1}R^m_m \\ &= \frac{1}{n-1}\Big[R^m_{\alpha m} + 2\Omega^m_{;k} - \Omega^m_{;j\cdot m}y^m + 2\Omega^j\Omega^m_{jm} - \Omega^m_j\Omega^j_m\Big] \\ &= R_{\alpha} + \frac{1}{n-1}\Big[2\Omega^m_{;k} - \Omega^m_{;j\cdot m}y^m + 2\Omega^j\Omega^m_{jm} - \Omega^m_j\Omega^j_m\Big] \\ &= R_{\alpha} + H, \end{aligned} \tag{2.53}$$

ve

$$\begin{aligned} W^i_{\tilde{F}k} &= R^i_{\tilde{F}k} - R_{\tilde{F}}\delta^i_k - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}(R^m_{\tilde{F}k} - R_{\tilde{F}}\delta^m_k)y^i \\ &= W^i_{\alpha k} + \Theta^i_k \end{aligned} \tag{2.54}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} \Theta^i_k &= H^i_k - H\delta^i_k - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}(H^m_k - H\delta^m_k)y^i, \\ H^i_k &= 2\Omega^i_{;k} - \Omega^i_{;j.k}y^j + 2\Omega^j\Omega^i_{.j.k} - \Omega^i_{.j}\Omega^j_{.k}, \qquad \Big(H = \frac{1}{n-1}H^m_m\Big) \end{aligned}$$

ve $W^i_{\alpha k}$, α Riemann metriğinin Weyl eğriliğidir. Buna göre, F_n Kropina metriği ile α Riemann metriğinin Weyl eğriliği arasındaki ilişki, (2.51) ve (2.54) den

$$W^i_{Fk} = W^i_{\alpha k} + \Theta^i_k \tag{2.55}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3.1.1: Bir M manifoldu üzerinde tanımlı bir F_n $(n > 2, b^2 \neq sbt.)$ Kropina

uzayının skaler flag eğrilikli olması için gerek ve yeter koşullar

$$\begin{aligned}
r_{00} &= c\alpha^2, \quad \Big(c=\frac{n-1}{n-2}\Big) \\
s_0 &= 0, \quad s^r_j s_{ri}=0 \qquad (2.56)\\
W^i_{\alpha k} &= \frac{1}{2\beta^2 b^4(n^2-1)(n-2)^2}\Big\{2\beta\delta^i_k(1-n^2)\Big[(1-n)\beta\big(\beta^2-\alpha^2b^2\big)-\alpha^2b^4s^r_{0;r}\\
&\quad (2-n)^2\Big]-2\beta^2(1-n)^2(1+n)\Big[\beta y_k b^i n+b^2y_ky^i+\alpha^2b_kb^i\Big]\\
&\quad -\alpha^2\beta b^4(1-n)^3(1+n)s^i_{k;0}-b^4(1+n)(2-n)^2\Big[s^r_{0;r}y^i+(1+n)s^i_{0;0}\Big]\\
&\quad (2\beta y_k-\alpha^2b_k)-b^2s_{k0}(1-n)(2-n)\Big[\alpha^2\beta b^i(1-n^2)+(2-n)\big(4\beta^2y^i\\
&\quad +3\alpha^2b^2s^i_0(1+n)\big)\Big]-\alpha^2\beta b^4(1+n)(2-n)^2\Big[y^is^r_{k;r}+2(1-n)s^i_{0;k}\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

dır. Burada $W^i_{\alpha k}$, α Riemann metriğinin Weyl eğriliğidir.

İspat 2.3.1.1: Skaler flag eğrilikli bir Kropina uzayı için Yardımcı Teorem $2.3.1.1$ ve Yardımcı Teorem $2.3.1.2$ kullanılarak (2.45) den

$$W^i_{\alpha k}+\Theta^i_k=0 \qquad (2.57)$$

dır. Bu denklemin açık ifadesi $b^2\neq 0$ için Maple yardımıyla hesaplandığında,

(2.57) denkleminde (2.46) gözönüne alınarak $b^2\neq 0$ için,

$$\begin{aligned}
&- \quad 4(n^2-1)\beta^5b^4W^i_{\alpha k}+\alpha^4\Big\{A_0\beta^3+A_1\beta^2+A_2\beta+A_3\Big\}+\alpha^2\Big\{B_1\beta^4+B_2\beta^3\\
&+ \quad B_3\beta^2+B_4\beta\Big\}+C_2\beta^5+C_3\beta^4+C_4\beta^3=0 \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

dır. (2.58) denkleminde β yı içermeyen $A_3=-b^4(1+n)b_ky^i(b^2s^r_0s_{r0}-s^2_0)$ terimi için

$$b^2s^r_0s_{r0}-s^2_0=\beta u_1 \qquad (2.59)$$

yazılır ve (2.59), y^i ve y^j göre türetildikten sonra b^ib^j ile daraltılırsa,

$$u_1=-\frac{1}{b^2}(2b^2s^rs_{r0}+\beta s^rs_r) \qquad (2.60)$$

bulunur. Burada $u_1=u_i(x)y^i$ dir. $A_3=-b^4(1+n)b_ky^i\beta u_1$, (2.58) de yerine yazılır ve tekrar β yı içermeyen terimler dikkate alınırsa

$$\alpha^2(s_0 s_k + 4b_k s_0^r s_r) - 2y_k s_0^2 = \beta v_{2k} \tag{2.61}$$

eşitliğini sağlayan $v_{2k} = v_{kij}(x)y^i y^j$ nın mevcut olması gerektiği görülür. Diğer taraftan, (2.61) in y^k ile daraltılması ile elde edilen $\alpha^2(-s_0^2+4\beta s_0^r s_r) = \beta v_{2k}y^k$ polinom denkleminin sağlanabilmesi için $v_{2k}y^k = \alpha^2 w_1$ olacak şekilde bir $w_1 = w_i(x)y^i$ bulunmalıdır. Buna göre, $\alpha^2 \neq 0$ için $-s_0^2 + \beta(4s_0^r s_r - w_1) = 0$ dır ve

$$s_0^2 = \beta q_1 \tag{2.62}$$

olmalıdır. Burada $q_1 = q_i(x)y^i$ dir. (2.62) eşitliği önce y^i ye göre türetilip b^i ile daraltılır sonra tekrar y^k ya göre türetilip ve b^k ile daraltılırsa, sırasıyla,

$$0 = b^2 q_1 + \beta q_i b^i \tag{2.63}$$

ve

$$0 = b^2 q_k b^k \tag{2.64}$$

elde edilir. (2.63) ve (2.64) den $b^2 \neq 0$ için $q_i b^i = 0$ ve $q_1 = 0$ bulunur. Böylece (2.59), (2.60) ve (2.62) den

$$s_0 = 0, s_k = 0, s_0^r s_{r0} = 0, s_i^r s_{rj} = 0, s_m^r s_r^m = 0, s_i^r s_{r0} = 0 \tag{2.65}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.65) sonuçları (2.58) denkleminde yazılır ve elde edilen denklem y^k ile daraltılır ve $W_{\alpha k}^i y^k = 0$ kullanılırsa,

$$\alpha^2\Big\{-\beta(n-1)b^i+2b^2y^i\Big\}s_0^r r_r - 2b^2\beta\Big\{r_{0;0}y^i+(n-1)r_{00}y^i-(n-1)r_{00}r_0^i\Big\} = 0 \tag{2.66}$$

elde edilir. Burada β yı içermeyen terim $2b^2 s_0^r r_r$ dır. $2b^2 s_0^r r_r = \beta f(x)$ alınarak, gerekli hesaplamalar sonucunda $f(x) = 0$ dır. Böylece (2.66) denklemi

$$r_{0;0}y^i + (n-1)r_{00}y^i - (n-1)r_{00}r_0^i = 0 \tag{2.67}$$

haline indirgenmiş olur. (2.67) ile verilen denklemin b_i ve y_i ile daraltılmasıyla, sırasıyla,

$$\beta\Big[r_{0;0} + (n-1)r_{00}\Big] - (n-1)r_{00}r_0 = 0 \tag{2.68}$$

ve

$$\alpha^2\Big[r_{0;0} + (n-1)r_{00}\Big] - (n-1)r_{00}^2 = 0 \tag{2.69}$$

elde edilir. (2.68) ve (2.69) dan

$$r_{00}\Big(\alpha^2 r_0 - \beta r_{00}\Big) = 0 \tag{2.70}$$

dir. $r_{00} = 0$ için $r_0 = 0$ dır. (2.65) den $s_0 = 0$ kullanılarak $b^2_{;0} = b^2_{;j}y^j = 2(s_0 + r_0) = 0$ bulunur. Buradan $b^2 \neq sabit$ için $r_{00} \neq 0$ olduğu açıktır. Buna göre (2.70) in sağlanması için $r_{00} = c(x)\alpha^2$ olmalıdır. Diğer taraftan, $r_{00} = c(x)\alpha^2$ koşulu altında (2.69) denklemi

$$c_{;0}\beta = \alpha^2 c(x)[(n-2)c(x) - n + 1]$$

şeklini alır ki buradan $c_{;0} = 0$ ve $(n-2)c(x) - n + 1 = 0$ veya

$$c(x) = c = \frac{n-1}{n-2}$$

elde edilir.

$r_{00} = \dfrac{n-1}{n-2}\ \alpha^2,\ s_0 = 0,\ s^r_0 s_{r0} = 0$ sonuçları (2.58) eşitliğinde yerine yazıldığında α Riemann metriğinin Weyl tensörü

$$\begin{aligned} W^i_{\alpha k} \;=\; & \frac{1}{2\beta^2 b^4(n^2-1)(n-2)^2}\Bigg\{2\beta\delta^i_k(1-n^2)\Big[(1-n)\beta\big(\beta^2-\alpha^2b^2\big)-\alpha^2b^4s^r_{0;r}\\ & (2-n)^2\Big]-2\beta^2(1-n)^2(1+n)\Big[\beta y_k b^i n + b^2 y_k y^i + \alpha^2 b_k b^i\Big]\\ & -\alpha^2\beta b^4(1-n)^3(1+n)s^i_{k;0} - b^4(1+n)(2-n)^2\Big[s^r_{0;r}y^i + (1+n)s^i_{0;0}\Big]\\ & (2\beta y_k - \alpha^2 b_k) - b^2 s_{k0}(1-n)(2-n)\Big[\alpha^2\beta b^i(1-n^2) + (2-n)\big(4\beta^2 y^i\\ & + 3\alpha^2 b^2 s^i_0(1+n)\big)\Big] - \alpha^2\beta b^4(1+n)(2-n)^2\Big[y^i s^r_{k;r} + 2(1-n)s^i_{0;k}\Big]\Bigg\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Böylece bir Kropina uzayı skaler flag eğrilikli ise

$$\begin{aligned} r_{00} &= c\,\alpha^2,\ c = \frac{n-1}{n-2}\\ s_0 &= 0, \quad s^r_i s_{rj} = 0 \end{aligned} \tag{2.71}$$

ve (2.71) koşullarını sağlar. Tersine olarak, bu koşulların sağlanması halinde (2.46) kullanılarak $W^i_{\alpha k} + \Theta^i_k = 0$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 2.3.1.2 den $W^i_{F k} = 0$ dır. Dolayısıyla, Kropina uzayları (2.71) ve (2.71) koşulları altında skaler flag eğriliklidir.

Teorem 2.3.1.2: Skaler flag eğrilikli bir $F_n\,(n>2)$ Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek ve yeter koşul

$$s_{kl}=0 \tag{2.72}$$

dır.

İspat 2.3.1.2: Bir $F_n\,(n>2)$ Kropina uzayının, skaler flag eğrilikli bir genelleştirilmiş Douglas uzayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem $2.3.1.1$ ile verilen $r_{00}=c\alpha^2, s_0=0, s_i^r s_{rj}=0,\quad c=\dfrac{n-1}{n-2}$ koşulları bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olma koşulunu veren (2.26) denkleminde yerine yazıldığında

$$\Big\{\Big[b_jb_l(cb^ps_{k0}-b^2s^p_{k;0})+b_jb_k(cb^ps_{l0}-b^2s^p_{l;0})+b_lb_k(cb^ps_{j0}-b^2s^p_{j;0})\Big]\beta+3b^2s^p_{0;0}b_jb_kb_l\Big\}\alpha^4+\Big\{\Big[a_{jk}(b^pcs_{l0}-b^2s^p_{l;0})+a_{jl}(b^pcs_{k0}-b^2s^p_{k;0})+a_{lk}(b^pcs_{j0}-b^2s^p_{j;0})\Big]\beta^3+\Big[y^pb^2(s_{k0}s_{lj}+s_{l0}s_{jk})-2y^pc(2b_lb_ks_{j0}+2b_jb_ks_{l0}-b_jb_ls_{k0})+(b^2s^p_{k;0}-b^pcs_{k0})(y_lb_j+y_jb_l)+(b^2s^p_{j;0}-b^pcs_{j0})(y_kb_l+y_lb_k)+(b^2s^p_{l;0}-b^pcs_{l0})(y_jb_k+y_kb_j)+b^2s^p_{0;0}(a_{jk}b_l+a_{jl}b_k+a_{lk}b_j)\Big]\beta^2-2b^2\Big[b_kb_l(y^ps_{j0;0}+y_js^p_{0;0})+b_jb_k(y^ps_{l0;0}+y_ls^p_{0;0})+b_jb_l(y^ps_{k0;0}+y_ks^p_{0;0})\Big]\beta\Big\}\alpha^2-2y^p\Big[a_{lk}cs_{j0}+a_{jl}cs_{k0}+a_{jk}cs_{l0}\Big]\beta^4+2y^p\Big[cs_{l0}(y_kb_j+2y_jb_k)+cs_{j0}(y_kb_l+2y_lb_k)-b^2(s_{j0;0}a_{lk}+s_{k0;0}a_{jl}+s_{l0;0}a_{jk})\Big]\beta^3+2b^2y^p\Big[s_{j0;0}(y_lb_k+y_kb_l)+s_{k0;0}(y_lb_j+y_jb_l)+s_{l0;0}(y_kb_j+y_jb_k)\Big]\beta^2=0$$

veya kapalı formda

$$(A_1\beta+A_2)\alpha^4+(B_1\beta^3+B_2\beta^2+B_3\beta)\alpha^2+C_2\beta^4+C_3\beta^3+C_4\beta^2=0 \tag{2.73}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$A_1=b_jb_l(cb^ps_{k0}-b^2s^p_{k;0})+b_jb_k(cb^ps_{l0}-b^2s^p_{l;0})+b_lb_k(cb^ps_{j0}-b^2s^p_{j;0}),$$

$$A_2=3b^2s^p_{0;0}b_jb_kb_l,$$

$$B_1=a_{lk}(cb^ps_{j0}-b^2s^p_{j;0})+a_{jk}(cb^ps_{l0}-b^2s^p_{l;0})+a_{jl}(cb^ps_{k0}-b^2s^p_{k;0}),$$

$$B_2=y^pb^2(s_{k0}s_{lj}+s_{l0}s_{jk})-2y^pc(2b_lb_ks_{j0}+2b_jb_ks_{l0}-b_jb_ls_{k0})+(b^2s^p_{k;0}-b^pcs_{k0})(y_lb_j+y_jb_l)+(b^2s^p_{j;0}-b^pcs_{j0})(y_kb_l+y_lb_k)+(b^2s^p_{l;0}-b^pcs_{l0})(y_jb_k+y_kb_j)+b^2s^p_{0;0}(a_{jk}b_l+$$

$a_{jl}b_k + a_{lk}b_j)$,

$$B_3 = -2b^2b_kb_l(y^p s_{j0;0} + y_j s^p_{0;0}) - 2b^2b_jb_k(y^p s_{l0;0} + y_l s^p_{0;0}) - 2b^2b_jb_l(y^p s_{k0;0} + y_k s^p_{0;0}),$$

$$C_2 = -2y^p c(a_{lk}s_{j0} + a_{jl}s_{k0} + a_{jk}s_{l0}),$$

$$C_3 = 2y^p\Big[cs_{l0}(y_kb_j + 2y_jb_k) + cs_{j0}(y_kb_l + 2y_lb_k) - b^2s_{j0;0}a_{lk} - b^2s_{k0;0}a_{jl} - b^2s_{l0;0}a_{jk}\Big],$$

$$C_4 = 2y^pb^2\Big[s_{j0;0}(y_lb_k + y_kb_l) + s_{k0;0}(y_lb_j + y_jb_l) + s_{l0;0}(y_kb_j + y_jb_k)\Big]$$

dır. Bu denklemde β yı içermeyen $A_2 = 3b^2s^p_{0;0}b_jb_kb_l$ için

$$s^p_{0;0} = \beta u^p_1\,; \quad u^p_1 = u^p_i(x)y^i \tag{2.74}$$

dir. (2.74) ün y^m ve y^l göre türevi alınıp b^mb^l ile daraltılma yapılırsa,

$$u^p_1 = \frac{1}{b^2}(s^p_{0;k}b^k - cs^p_0)$$

ve u^p_1 in (2.74) te yerine yazılması ile

$$b^2s^p_{0;0} = \beta(s^p_{0;r}b^r - cs^p_0), \qquad b^2s_{k0;0} = \beta(s_{k0;r}b^r - cs_{0k}) \tag{2.75}$$

elde edilir. (2.75), (2.73) de kullanılırsa β yı içermeyen $A_1 + \bar{A}_2, \quad (\bar{A}_2 = \dfrac{A_2}{\beta})$ terimi için

$$\begin{aligned} A_1 + \bar{A}_2 \;\; = \;\; & b_jb_l(cb^ps_{k0} - b^2s^p_{k;0}) + b_jb_k(cb^ps_{l0} - b^2s^p_{l;0}) + b_lb_k(cb^ps_{j0} - b^2s^p_{j;0}) \\ & +3b_lb_jb_k(s^p_{0;r}b^r - cs^p_0) = \beta z(x) \end{aligned} \tag{2.76}$$

olacak şekilde bir $z(x)$ skaler fonksiyonunun mevcut olması gerektiği görülür. (2.76) eşitliği y^m ile türetilip, b^m ile daraltılırsa

$$z(x) = -b_lb_ks^p_{j;r}b^r - b_lb_js^p_{k;r}b^r - b_jb_ks^p_{l;r}b^r$$

elde edilir. $z(x)$ in (2.76) da yerine yazılması ve elde edilen denklemin $b^jb^kb^l$ ile daraltılmasıyla da

$$s^p_{0;r}b^r - cs^p_0 - s^p_{r;0}b^r = s^p_{0;r}b^r = 0 \tag{2.77}$$

bulunur. Buradan $z(x) = 0$ olacağı açıktır. $z(x) = 0$ için (2.76) denkleminin her iki tarafı a^{jk} ile daraltılırsa,

$b^2 \neq 0$ için

$$b^p c s_{l0} - b^2 s^p_{l;0} - c b_l s^p_0 = 0 \tag{2.78}$$

bulunur. (2.78) den

$$s^p_{l;k}y^k = s^p_{l;0} = \frac{c}{b^2}\Big(b^p s_{l0} - b_l s^p_0\Big), \qquad s^p_{l;k} = \frac{c}{b^2}\Big(b^p s_{lk} - b_l s^p_k\Big)$$

dir. Böylece, (2.73) te (2.75), (2.77) ve (2.78) kullanılarak (2.73),

$$(b_j b_k s_{l0} - 2b_j b_l s_{k0} + b_l b_k s_{j0})\alpha^2 + (y_j b_l s_{k0} - y_l b_k s_{j0} + y_l b_j s_{k0} - y_j b_k s_{l0})\beta = 0 \tag{2.79}$$

şekline indirgenmiş olur. Burada β yı içermeyen $(b_j b_k s_{l0} - 2b_j b_l s_{k0} + b_l b_k s_{j0})\alpha^2$ terimi için

$$b_j b_k s_{l0} - 2b_j b_l s_{k0} + b_l b_k s_{j0} = \beta g(x) \tag{2.80}$$

denirse ve her taraf y^m ile türetilip b^m ile daraltılırsa $g(x) = 0$ olduğu görülür. Buradan $b^2 \neq 0, (n > 2)$ için (2.80) nin a^{jk} ile daraltılması sonucunda da

$$s_{kl} = 0 \tag{2.81}$$

elde edilir. Buna göre, skaler flag eğrilikli bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek koşul $s_{kl} = 0$ olmasıdır. Tersine olarak, skaler flag eğrilikli bir Kropina uzayı için $s_{kl} = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $s_l = s_{kl}b^k = 0,\ s_0 = s_l y^l = 0$ ve

$$D^i_{jkl} = \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\left[F\left(\frac{s_0 b^i - b^2 s^i_0}{2b^2}\right)\right] = 0$$

olduğundan uzay bir Douglas uzayı ve dolayısıyla, genelleştirilmiş Douglas uzayıdır.

2.4 Z-Projektif Finsler Uzayları

$\sigma : F \to \widetilde{F}$ metrik dönüşümü aynı bir M manifoldu üzerinde bulunan herhangi iki Finsler uzayının metrikleri arasında tanımlanan bir projektif dönüşüm olsun. M

manifoldu üzerinde bu dönüşüme ait birinci dereceden $y-$homojen $P(x,y)$ projektif çarpanı

$$P_{|i} - PP_i = 0, \qquad \left(P_i = \frac{\partial P}{\partial y^i}, \quad P_{|i} = \frac{\partial P}{\partial x^i} - G^r_{F^i}\frac{\partial P}{\partial y^r}\right) \tag{2.82}$$

denklemlerini sağlıyorsa σ projektif dönüşümüne $Z-$projektif dönüşüm adı verilir[23]. Burada "$|$", F Finsler metriğinin $B\Gamma(G^i_{Fjk}, G^i_{Fj}, 0)$ Berwald konneksiyonuna göre yatay kovaryant türevini göstermektedir.

2.4.1 Z-Projektif Koşulu Altında İnvaryant Kalan Büyüklükler

Herhangi iki Finsler uzayı arasında tanımlanan projektif dönüşüm altında invaryant kalan iki önemli büyüklük Douglas tensörü ve Weyl tensörüdür. Bu kısımda, Douglas ve Weyl tensöründen farklı olan ve $Z-$projektif dönüşüm altında invaryant kalan büyüklükler incelenmiştir.

Teorem 2.4.1.1: $Z-$projektif dönüşüm altında Finsler uzayının Riemann eğriliğinin invaryant kalması için gerek ve yeter koşul

$$P_{|k} - P_{k|0} = 0, \quad \left(P_{k|0} = P_{k|l}y^l\right) \tag{2.83}$$

dır.

İspat 2.4.1.1: Herhangi iki Finsler uzayı arasında tanımlanan $Z-$projektif dönüşüm altında iki uzayın Riemann eğriliklerini gösteren R^i_k ve $\widetilde{R}^i_k$ için

$$\widetilde{R}^i_k = R^i_k$$

olsun. (1.40), (2.82) ve P nin $1.$ dereceden homjen olmasından dolayı

$$(PP_k - P_{k|0})y^i - (P_{|0} - P^2)\delta^i_k = 0$$

dır. Burada $P_{|0} - P^2 = (P_{|k} - PP_k)y^k = 0$ olduğundan

$$P_{|k} - P_{k|0} = 0$$

bulunur. Tersine olarak, (2.83) koşulu altında (1.40) dan

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^i_k &= R^i_k + (2P_{|k} - P_{k|0} - PP_k)y^i - (P_{|0} - P^2)\delta^i_k \\
&= R^i_k + (P_{|k} - P_{k|0})y^i \\
&= R^i_k
\end{aligned}$$

dır. Buna göre $Z-$projektif dönüşüm altında ve (2.83) koşulu sağlanması halinde iki uzayın Riemann eğrilikleri invaryanttır.

Teorem 2.4.1.2: $Z-$projektif dönüşüm altında Finsler uzayının R^i_{ljk}, $R-$eğrilik tensörü invaryanttır.

İspat 2.4.1.2: Herhangi bir projektif dönüşüm altında F ve $\widetilde{F}$ metrikli iki Finsler uzayın sprey katsayıları arasındaki ilişki $G^i_{\widetilde{F}} = G^i_F + Py^i$ ilişkisi yardımıyla

$$\begin{aligned} G^i_{\widetilde{F}j} &= G^i_{\widetilde{F}j} + y^i P_j + P\delta^i_j \\ G^i_{\widetilde{F}jk} &= G^i_{\widetilde{F}jk} + y^i P_{jk} + P_j\delta^i_k + P_k\delta^i_j \\ \dot{\partial}_l G^i_{\widetilde{F}kr} &= G^i_{\widetilde{F}krl} = G^i_{\widetilde{F}krl} + y^i P_{krl} + \delta^i_k P_{rl} + \delta^i_r P_{kl} + \delta^l_k P_{kr} \end{aligned} \tag{2.84}$$

bulunur. Burada $P_i = \dot{\partial}_i P$ ve $P_{ij} = \dot{\partial}_j P_i$ dir. (2.36) ve (2.84) den $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayının $R-$eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R^i_{\widetilde{F}ljk} &= \partial_k G^i_{\widetilde{F}jl} - \partial_j G^i_{\widetilde{F}kl} - G^r_{\widetilde{F}k}\dot{\partial}_l G^i_{\widetilde{F}jr} + G^r_{\widetilde{F}j}\dot{\partial}_l G^i_{\widetilde{F}kr} + G^i_{\widetilde{F}kr}G^r_{\widetilde{F}jl} - G^i_{\widetilde{F}jr}G^r_{\widetilde{F}kl} \\ &= R^i_{Fljk} + y^i\dot{\partial}_l\Sigma_{jk} + \delta^i_l\Sigma_{jk} + \delta^i_j\dot{\partial}_l\Sigma_k - \delta^i_k\dot{\partial}_l\Sigma_j \end{aligned} \tag{2.85}$$

şeklindedir. Burada $\Sigma_i = P_{|i} - PP_i$ ve $\Sigma_{jk} = P_{j|k} - P_{k|j} = \dot{\partial}_j\Sigma_k - \dot{\partial}_k\Sigma_j$ dir ve $Z-$projektiflik koşulu altında $\Sigma_i = 0$ ve $\Sigma_{jk} = 0$ olduğundan, $R-$eğrilik tensörü $Z-$projektif dönüşüm altında invaryanttır.

2.4.2 Z-Projektif Kropina Uzayları

Yardımcı Teorem 2.4.2.1 [8]**:** $F_n(n > 2)$ Kropina uzayının zayıf Berwald olması için gerek ve yeter koşul $r_{00} = c(x)\alpha^2$ olmasıdır. Burada $c = c(x)$, x in skaler bir fonksiyonudur.

İspat 2.4.2.1: F_n Kropina ve α Riemann uzaylarına ait sprey katsayıları, sırasıyla, G_F ve G_α olmak üzere bu katsayılar arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} G^i_F &= G^i_\alpha + B^i \\ &= \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}y^j y^k - Py^i + \Omega^i \end{aligned} \tag{2.86}$$

şeklindedir. Burada,

$$P = \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{\alpha^2 b^2}, \quad \Omega^i = -\frac{\alpha^2}{2\beta} s_0^i + \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{2\beta b^2} b^i$$

dır. F_n Finsler uzayı zayıf Berwald uzayı olsun. Bu durumda,

$$G^i_{Fjki} = 0$$

veya B^i_i, $1-$formdur.

Kropina uzayının B^i katsayıları

$$B^i = -\frac{\alpha^2}{2\beta} s_0^i - (\alpha^2 s_0 + \beta r_{00})\Big(\frac{y^i}{\alpha^2 b^2} - \frac{b^i}{2\beta b^2}\Big)$$

dır. Bu katsayıların y^i ye göre türevi

$$B^i_i = -(n+1)\frac{\beta r_{00}}{\alpha^2 b^2} + \frac{r_0}{b^2} - \frac{n s_0}{b^2}, \quad (\alpha^2 \not\equiv 0 \quad (mod\beta))$$

dir. Burada B^i_i nin $1-$form olması için $r_{00} = c(x)\alpha^2$ olmalıdır. Tersine olarak, $r_{00} = c(x)\alpha^2$ ise $B^i_i = -\frac{n}{b^2}(s_0 + \beta c(x))$ ifadesi $1-$form olduğundan F_n Kropina uzayı zayıf Berwald uzayıdır.

Yardımcı Teorem 2.4.2.2 [8]**:** $F_n\,(n > 2)$ Kropina uzayının Berwald olması için gerek ve yeter koşullar

$$r_{ij} = c(x)a_{ij} \quad \text{ve} \quad s_{ij} = \frac{s_j b_i - s_i b_j}{b^2} \tag{2.87}$$

dır.

İspat 2.4.2.2: F_n Kropina uzayı bir Berwald uzayı olsun. Bu durumda

$$G^i_{{}_F jkl} = 0$$

dır. Bir Berwald uzayı aynı zamanda zayıf Berwald uzayı olduğundan Yardımcı Teorem $2.4.2.1$ gereğince, F_n için

$$r_{00} = c(x)\alpha^2 \tag{2.88}$$

dır. F_n Kropina uzayının $G^i_{{}_F}$ sprey katsayılarında (2.88) kullanılırsa

$$\begin{aligned} G^i_{{}_F} &= \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k - Py^i + \Omega^i \\ &= \Big(G^i_{{}_\alpha} - \frac{s_0}{b^2}y^i - \frac{c\beta}{b^2}y^i + \frac{c\alpha^2}{2b^2}b^i\Big) - \frac{\alpha^2}{2\beta b^2}(s_0^i b^2 - b^i s_0) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $-\dfrac{\alpha^2}{2\beta b^2}(s_0^i b^2 - b^i s_0)$ ifadesinin $s_0^i b^2 - b^i s_0$ çarpanı

$$s_0^i b^2 - b^i s_0 = \beta u^i(x), \quad (u^i(x)\ x \text{ in skaler bir fonksiyonu}) \tag{2.89}$$

formunda olmalıdır. (2.89) nın her iki tarafının y^j ye göre türevi alınır ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı b^j ile daraltılırsa, sırasıyla,

$$s_j^i b^2 - b^i s_j = b_j u^i \tag{2.90}$$

ve

$$-s^i b^2 = b^2 u^i$$

veya

$$u^i = -s^i, \quad (b^2 \neq 0) \tag{2.91}$$

bulunur. (2.91), (2.90) da yazılarak,

$$s_j^i b^2 - b^i s_j = -s^i b_j \tag{2.92}$$

veya

$$s_j^i = \frac{b^i s_j - b_j s^i}{b^2}$$

ve her iki tarafın a_{im} ile daraltılmasıyla

$$s_{mj} = \frac{b_m s_j - b_j s_m}{b^2}$$

elde edilir. Tersine olarak, $r_{00} = c(x)\alpha^2$ ve $s_{ij} = \dfrac{s_j b_i - s_i b_j}{b^2}$ ise,

$$\begin{aligned} G_{_F}^i &= \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k - P y^i + \Omega^i \\ G_{_F}^i &= G_{_\alpha}^i + \Big(-\frac{s_0}{b^2} y^i - \frac{c(x)\alpha^2}{2b^2} b^i \Big) + \frac{\alpha^2 s^i}{2b^2} - \frac{c(x)\beta}{2b^2} y^i \\ &= \frac{1}{2}\gamma_{jk}^i(x) y^j y^k \end{aligned}$$

elde edilir ki buda F_n Kropina uzayının Berwald uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.2.1: Bir $F_n \quad (n > 2)$ Kropina uzayı ile bir $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayı arasındaki $\sigma : F \to \widetilde{F}$ projektif dönüşümünün $Z-$projektif olması için gerek ve yeter koşullar

$$\begin{aligned} & b^2 s_0^i s_i + \beta s^i s_i = 0, \\ & r_{00} = c(x)\alpha^2, \\ & b^2 s_{j|i} - c b_i s_j - s_i s_j + b^2 c s_{ji} - s^r s_r a_{ij} = 0 \end{aligned} \tag{2.93}$$

dır. Burada $c = c(x), \quad b^2 c_{|i} - c^2 b_i - c s_i = 0$ koşulunu sağlayan diferansiyellenebilen bir fonksiyondur.

İspat 2.4.2.1: Bir Kropina uzayı ile Riemann uzayının sprey katsayıları arasındaki ilişki

$$G^i_{_F} = G^i_{_\alpha} - P y^i + \Omega^i \tag{2.94}$$

dir. Burada $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayının sprey katsayıları

$$\begin{aligned} G^i_{_{\tilde{F}}} &= G^i_{_\alpha} + \Omega^i \\ &= G^i_{_\alpha} - \frac{\alpha^2}{2\beta} s^i_0 + \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{2\beta b^2} b^i \end{aligned} \tag{2.95}$$

olarak yazılırsa, (2.94) denklemi

$$G^i_{_{\tilde{F}}} = G^i_{_F} + P y^i$$

şeklini alır. Bu ilişki F ve $\widetilde{F}$ arasında bir projektif dönüşüm tanımlar. $\sigma : F \to \widetilde{F}$ projektif dönüşümü $Z-$projektif olsun. Bu durumda $P(x, y)$ projektif çarpanı

$$P_{|i} - P P_i = 0 \tag{2.96}$$

koşulunu sağlar. Burada

$$P(x, y) = \frac{\alpha^2 s_0 + \beta r_{00}}{\alpha^2 b^2}$$

dir. Projektif çarpanın bu değeri dikkate alınarak, (2.96) da

$$P_{|i} = \frac{\partial P}{\partial x^i} - G^r_{Fi} \frac{\partial P}{\partial y^r}$$

ve

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial y^i}$$

yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &4 r_{00} \beta^4 \Big\{ 2\alpha^2 r_{i0} - y_i r_{00} \Big\} + 2\beta^3 \alpha^2 \Big\{ \Big[-2 r_{00} r_i + b^2 r_{00|i} + 2 r_{i0}(s_0 - r_0) \Big] \alpha^2 + b_i r^2_{00} \Big\} \\ &+ 2\beta^2 \alpha^4 \Big\{ \Big[b^2 s_{0|i} - s_i (r_0 + s_0) + b^2 s^r_i r_{r0} - 2 s_0 r_i \Big] \alpha^2 + 2 y_i (b^2 s^r_0 r_{r0} - s_0 r_0) \Big\} \\ &+ \beta \alpha^6 \Big\{ \alpha^2 b^2 s^r_i s_r - 2 b^2 b_i s^r_0 r_{r0} + 2 b^2 y_i s^r_0 s_r + 2 b_i s_0 r_0 \Big\} - \alpha^8 b^2 b_i s^r_0 s_r = 0 \end{aligned} \tag{2.97}$$

dokuzuncu dereceden polinom denklemleri elde edilir. Bu denklemler

$$A_5\beta^4 + A_4\beta^3\alpha^2 + A_3\beta^2\alpha^4 + A_2\beta\alpha^6 + A_1\alpha^8 = 0 \tag{2.98}$$

yapısındadır. Burada katsayılar

$A_5 = 4r_{00}(2\alpha^2 r_{i0} - y_i r_{00}),$

$A_4 = 2\big[\big(-2r_{00}r_i + b^2 r_{00|i} + 2r_{i0}(s_0 - r_0)\big)\alpha^2 + b_i r_{00}^2\big],$

$A_3 = 2\big[\big(b^2 s_{0|i} - s_i(r_0 + s_0) + b^2 s_i^r r_{r0} - 2s_0 r_i\big)\alpha^2 + 2y_i(b^2 s_0^r r_{r0} - s_0 r_0)\big],$

$A_2 = \alpha^2 b^2 s_i^r s_r - 2b^2 b_i s_0^r r_{r0} + 2b^2 y_i s_0^r s_r + 2b_i s_0 r_0,$

$A_1 = -b^2 b_i s_0^r s_r$

dır. Bu denklemler de β yı içermeyen $A_1 = -b^2 b_i s_0^r s_r$ için

$$b_i b^2 s_0^r s_r = \beta f_i(x) \tag{2.99}$$

olacak şekilde bir $f_i(x)$ skaler fonksiyonu mevcut olmalıdır. (2.99) un her iki tarafı y^j ye göre türetilir ve elde edilen denklemin her iki tarafı b^j ile daraltılırsa

$$f_i(x) = -b_i s^r s_r$$

ve $f_i(x)$ in (2.99) da yerine yazılmasıyla,

$$b_i(b^2 s_0^r s_r + \beta s^r s_r) = 0$$

veya $b^2 \neq 0$ için

$$b^2 s_0^r s_r + \beta s^r s_r = 0 \tag{2.100}$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.100), (2.98) de yerine yazılır ve β yı içermeyen terimler $A_2 + A_1 = -2b^2 b_i s_0^r r_{r0} + 2b_i s_0 r_0$ dikkate alınırak

$$b_i(s_0 r_0 - b^2 s_0^r r_{r0}) = \beta u_{i1} \tag{2.101}$$

eşitliğinin sağlanması gerektiği görülür. Burada $u_{i1} = u_{ij}(x)y^j$ dir. (2.101) in her iki tarafı y^j ve y^k ya göre türetilir ve elde edilen denklem b^j ve b^k ile daraltılırsa, sırasıyla,

$$b_i s_j r_k b^k - b_i b^2(-r_{jr}s^r + r_r s_j^r) = b_j u_{ik} b^k + b^2 u_{ij} \tag{2.102}$$

ve

$$b_i s^r r_r = u_{ir} b^r \tag{2.103}$$

denklemleri bulunur. (2.103) ün (2.102) de yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} u_{ij}(x) &= \frac{b_i}{b^2}\big[s_j r_r b^r - b_j s^r r_r + b^2(r_{jr}s^r - s_j^r r_r)\big], \\ u_{i1} &= u_{ij}(x)y^j = \frac{b_i}{b^2}\big[s_0 r_r b^r - \beta s^r r_r + b^2(r_{0r}s^r - s_0^r r_r)\big] \end{aligned} \tag{2.104}$$

ve (2.101) in kullanılması ile de

$$u_{i1}b^i = s_0 r_r b^r - \beta s^r r_r + b^2(r_{0r}s^r - s_0^r r_r)$$

elde edilir. Buna göre (2.98) denklemi

$$\begin{aligned} &\alpha^6\Big\{b^2 s_{0|i} - s_i(r_0+s_0) + b^2 s_i^r r_{r0} - 2s_0 r_i - s^r s_r y_i + \frac{b_i}{b^2}\Big[s_0 r_r b^r - \beta s^r r_r \\ &+ b^2(r_{0r}s^r - s_0^r r_r)\Big]\Big\} + \alpha^4\beta\Big\{ - 2r_{00}r_i + b^2 r_{00|i} + 2r_{i0}(s_0 - r_0) \\ &- \frac{2}{b^2}y_i\Big[s_0 r_r b^r - \beta s^r r_r + b^2(r_{0r}s^r - s_0^r r_r)\Big]\Big\} + \alpha^2\beta r_{00}(4\beta r_{i0} + r_{00}b_i) \\ &- 2\beta^2 r_{00}^2 y_i = 0 \end{aligned} \tag{2.105}$$

şeklini alır. Burada β yı içermeyen terim için

$$b^2 s_{0|i} - s_i(r_0+s_0) + b^2 s_i^r r_{r0} - 2s_0 r_i - s^r s_r y_i + \frac{b_i}{b^2}\big[s_0 r_r b^r - \beta s^r r_r + b^2(r_{0r}s^r - s_0^r r_r)\big] = \beta g_i(x) \tag{2.106}$$

olacağı açıktır. (2.106), y^j ye göre türetilir ve elde edilen denklem b^j ile daraltılırsa $g_i(x)$ fonksiyonu

$$g_i(x) = -s^r(s_{ri} + r_{ri}) + s_i^r r_r - \frac{1}{b^2}s_i r_r b^r + \frac{1}{b^2}(2s^r r_r - s^r s_r)b_i \tag{2.107}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, (2.105) denklemi b^i ile çarpılır ve $u_{i1}b^i = \dfrac{b^2}{\beta}(s_0 r_0 - b^2 s_0^r r_{r0})$, $(g_i(x)b^i = 0)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &\alpha^2\{\alpha^4(-s^i r_i) + \alpha^2(b^2 b^i r_{00|i} - 2r_{00}r_i b^i - 2r_0^2 + 2b^2 s_0^i r_{i0}) + b^2 r_{00}^2\} \\ &= 2\beta r_{00}(\beta r_{00} - 2\alpha^2 r_0) \end{aligned} \tag{2.108}$$

bulunur.

$\alpha^2 \not\equiv 0 \pmod{\beta}$ ve $b^2 \neq 0$ olarak kabul edildiği için (2.108) in sağ tarafındaki terim α^2 nin bir katı olmalıdır. Buna göre, (2.108) in gerçeklenmesi için

$$r_{00} = c\alpha^2 \tag{2.109}$$

veya

$$r_{00}\beta - 2r_0\alpha^2 = \alpha^2 v_1 \tag{2.110}$$

olmalıdır. Burada $v_1 = v_i(x)y^i$ ve $c = c(x)$, x in skaler fonksiyonudur. (2.109) ve (2.110) nun birbirine eşdeğer olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, $r_{00} = c\alpha^2$ ve $b^2 s_0^r s_r + \beta s^r s_r = 0$ koşulları, (2.97) de yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$b^2 s_{j|i} - cb_i s_j - s_i s_j + b^2 c s_{ji} - s^r s_r a_{ij} = 0$$

ve x in skaler bir fonksiyonu olan $c(x)$ için $b^2 c_{|i} - c^2 b_i - c s_i = 0$ bulunur. Buna göre, $\sigma : F \to \widetilde{F}$ projektif dönüşümünün $Z-$projektif olması için gerek koşullar,

$$b^2 s_0^r s_r + \beta s^r s_r = 0, \quad r_{00} = c\alpha^2$$

ve

$$b^2 s_{j|i} - cb_i s_j - s_i s_j + b^2 c s_{ji} - s^r s_r a_{ij} = 0$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Burada $b^2 c_{|i} - c^2 b_i - c s_i = 0$ dir.

Tersine olarak, (2.93) koşulları $P_{|i} - PP_i$ de yerine yazılırsa $P_{|i} - PP_i = 0$ bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Buna göre, Yardımcı Teorem $2.4.2.1$ ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.2.1: $\sigma : F \to \widetilde{F}$ projektif dönüşümünün $Z-$projektif olması için gerek ve yeter koşullar F_n Kropina uzayının

$$b^2 s_0^r s_r + \beta s^r s_r = 0$$

ve

$$b^2 s_{j|i} - cb_i s_j - s_i s_j + b^2 c s_{ji} - s^r s_r a_{ij} = 0$$

koşullarını sağlayan zayıf Berwald uzayı olmasıdır. Burada $c = c(x)$, $b^2 c_{|i} - c^2 b_i - c\, s_i = 0$ koşulunu sağlar.

Teorem 2.4.2.2: Bir $F_n\,(n > 2)$ Kropina uzayı ile bir $\widetilde{F}_n$ Berwald uzayının projektif ilişkili olması için gerek ve yeter koşul Kropina uzayının Douglas uzayı olmasıdır.

İspat 2.4.2.2: $\sigma : F \to \widetilde{F}$ dönüşüm bir projektif dönüşüm olsun. Bu taktirde sprey katsayıları arasındaki ilişki

$$G^i_{\tilde{F}} = G^i_{F} + Py^i \tag{2.111}$$

şeklindedir. $\widetilde{F}_n$ Finsler uzayı bir Berwald uzayı olduğundan bu uzayın $G^i_{\tilde{F}}$ sprey katsayıları y^i ye göre ikinci dereceden polinom şeklinde olmalıdır. Burada $G^i_{\tilde{F}}$ (2.14) ten

$$\begin{aligned} G^i_{\tilde{F}} &= G^i_{\alpha} + \Omega^i \\ &= G^i_{\alpha} - \frac{\alpha^2}{2\beta b^2}\Big(b^2 s^i_0 - s_0 b^i\Big) + \frac{r_{00}}{2b^2} b^i \end{aligned} \tag{2.112}$$

dir. (2.112) nin y^i ye göre kuadratik yapıda olması için,

$$b^2 s^i_0 - s_0 b^i = \beta v^i(x) \tag{2.113}$$

eşitliğini gerçekleyen bir $v^i(x) = a^{il} v_l(x)$ skaler fonksiyonunun bulunması gerekir. (2.113) den y^j ye göre türev alınır ve elde edilen denklemin her iki tarafı b^j ile daraltılırsa, sırasıyla,

$$b^2 s^i_j - s_j b^i = b_j v^i$$

ve

$$b^2(s^i + v^i) = 0 \tag{2.114}$$

bulunur. $b^2 \neq 0$ için (2.113) ve (2.114) ten

$$s_{ij} = \frac{s_j b_i - s_i b_j}{b^2} \tag{2.115}$$

bulunur. Bu koşul M.Matsumoto'ya göre Kropina uzayının bir Douglas uzayı olduğunu gösterir[25].

Tersine olarak, F_n Kropina uzayı bir Douglas uzayı olsun. Bir Kropina uzayının bir Douglas uzayı olması için gerek ve yeter koşul olan (2.115) ve (2.115) in y^j ile daraltılmasıyla elde edilen

$$s_{i0} = \frac{s_0 b_i - \beta s_i}{b^2} \qquad \text{veya} \qquad s^i_0 = \frac{s_0 b^i - \beta s^i}{b^2}$$

Yardımcı Teorem 2.2.1.1 de verilen (2.13) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} G^i_{F} &= G^i_{\alpha} - Py^i + \Omega^i \\ &= G^i_{\alpha} + \frac{\alpha^2 s^i}{2b^2} + \frac{r_{00} b^i}{2b^2} - Py^i \end{aligned} \tag{2.116}$$

bulunur. Burada $G^i_{\tilde{F}}$ sprey katsayıları için

$$G^i_{\tilde{F}} = G^i_{\alpha} + \frac{\alpha^2 s^i}{2b^2} + \frac{r_{00} b^i}{2b^2} \tag{2.117}$$

alınarak (2.116) dan, F_n uzayının, sprey katsayıları (2.117) ile verilen bir $\widetilde{F}_n$ Berwald uzayı ile projektif ilişkili olduğunu gösteren

$$G^i_{\tilde{F}} = G^i_{F} + Py^i$$

bağıntısı elde edilir.

Sonuç 2.4.2.2: Bir Kropina uzayı ile bir Berwald uzayı projektif ilişkili iseler Kropina uzayı genelleştirilmiş Douglas uzayıdır.

İspat 2.4.2.2: $\sigma : F \to \widetilde{F}$ bir F_n Kropina uzayı ile bir $\widetilde{F}_n$ Berwald uzayının F ve $\widetilde{F}$ metrikleri arasında projektif bir dönüşüm olsun. Her Berwald uzayı bir genelleştirilmiş Douglas uzayı olduğundan ve genelleştirilmiş Douglas uzayı olma koşulu projektif dönüşüm altında kapalı olduğundan F_n Kropina uzayı da bir genelleştirilmiş Douglas uzayıdır.

2.5 D-Rekürant Finsler Uzayları

Bir F_n Finsler uzayına ait Douglas tensörü

$$D^i_{jkl|m} y^m = \phi(x,y) D^i_{jkl} \tag{2.118}$$

koşulunu sağlıyorsa uzay $D-$rekürant bir uzaydır. Burada $\phi(x,y)$ birinci dereceden y homojen bir fonksiyondur[23] ve "$|$", F metriğinin Berwald konneksiyonuna göre kovaryant türevini göstermektedir.

2.5.1 Genelleştirilmiş Douglas Metrikli D-Rekürant Kropina Uzayları

Teorem 2.5.1.1: $D-$rekürant bir $F_n\ (n > 2)$ Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek ve yeter koşul

$$s_{lk} = \frac{1}{b^2}\Big(b_l s_k - b_k s_l\Big) \tag{2.119}$$

dır.

İspat 2.5.1.1: $D-$rekürant F_n Kropina uzayı genelleştirilmiş Douglas metrikli olsun. Bu durumda

$$h_i^p D^i_{jkl|m} y^m = h_i^p \phi(x,y) D^i_{jkl} = 0 \tag{2.120}$$

ve $\phi(x,y) \neq 0$ için

$$h_i^p D^i_{jkl} = 0 \tag{2.121}$$

(2.121) in her iki tarafı y_p ile daraltılır ve (2.24) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
h_i^p y_p D^i_{jkl} &= (\delta_i^p - \frac{y^p}{F} F_{y^i}) y_p D^i_{jkl} \\
&= \Big[y_i - \beta(\frac{2y^i}{\beta} - \frac{F}{\beta} b_i) \Big] D^i_{jkl} \\
&= (Fb_i - y_i) D^i_{jkl} \\
&= (Fb_i - y_i) \Big[A^i_m (y^m F_{jkl} + F_{jk}\delta^m_l + F_{jl}\delta^m_k + F_{kl}\delta^m_j) \Big] \\
&= -y_i \Big[A^i_m (y^m F_{jkl} + F_{jk}\delta^m_l + F_{jl}\delta^m_k + F_{kl}\delta^m_j) \Big] \\
&= -\frac{1}{2b^2}(s_m \beta + b^2 s_{m0}) \Big(y^m F_{jkl} + \delta^m_j F_{kl} + \delta^m_k F_{jl} + \delta^m_l F_{kj} \Big) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.122}$$

elde edilir. Burada F_{jkl}, F_{jk} terimleri F Kropina metriğinin y ye göre kısmi türevleridir ve

$$A^i_m(x) = \frac{s_m b^i - b^2 s^i_m}{2b^2}$$

dir.

Maple sembolik matematik işlemci yardımıyla (2.122),

$$\begin{aligned}
&\Big\{ \beta \Big[s_l b_j b_k + s_k b_l b_j + s_j b_k b_l \Big] + b^2 (s_{l0} b_j b_k + s_{k0} b_l b_j + s_{j0} b_k b_l) - 3 s_0 b_j b_k b_l \Big\} \alpha^2 \\
&+ \beta^3 \Big[s_j a_{kl} + s_l a_{jk} + s_k a_{lj} \Big] + \beta^2 \Big[- s_0 (a_{jk} b_l + a_{lj} b_k + b_j a_{kl}) - s_l (y_j b_k + y_k b_j) \\
&- s_k (y_l b_j + y_j b_l) - s_j (y_l b_k + y_k b_l) + b^2 (s_{j0} a_{kl} + s_{l0} a_{jk} + s_{k0} a_{lj}) \Big] + \beta \Big[2 s_0 (y_j b_l b_k \\
&+ y_k b_l b_j + y_l b_j b_k) - b^2 \Big(s_{l0} (y_j b_k + y_k b_j) + s_{k0} (y_l b_j + y_j b_l) + s_{j0} (y_l b_k + y_k b_l) \Big) \Big] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.123}$$

şekline indirgenir. (2.123) ifadesinin $b^j b^k$ ile daraltılması sonucunda

$$b^2 (\alpha^2 b^2 - \beta^2) \Big(b^2 s_{l0} - s_0 b_l + s_l \beta \Big) = 0 \tag{2.124}$$

bulunur. $\alpha^2 b^2 - \beta^2 = 0$ olması durumunda $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\beta}$ olacağından Yardımcı Teorem $2.2.1.3$ den $n = 2$ olmalıdır. Dolayısıyla, $n > 2$ için $\alpha^2 b^2 - \beta^2 \not\equiv 0$ dır. Bu durumda $(n > 2)$ veya $b^2 \neq 0$ için (2.124) denkleminden

$$b^2 s_{l0} - s_0 b_l + s_l \beta = 0$$

veya

$$s_{kl} = \frac{1}{b^2}(s_l b_k - s_k b_l)$$

elde edilir.

Tersine olarak, (2.119) koşulunun sağlanması halini ele alalım. Matsumoto [25] ya göre bir Kropina uzayının Douglas uzayı olması için gerek ve yeter koşul (2.119) un sağlanması olduğundan ve her Douglas uzayı genelleştirilmiş Douglas uzayı olduğundan

$$h_i^p D^i_{jkl|m} y^m = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, $D-$rekürant ve (2.119) koşulunu sağlayan bir F Finsler metriği genelleştirilmiş Douglas metriğidir. Böylece iki yönlü ispat yapılmış olur.

Sonuç 2.5.1.1: $D-$rekürant bir $F_n\,(n > 2)$ Kropina uzayı için $r_{00} = c(x)\alpha^2$ koşulu altında aşağıdaki durumlar eşdeğerdir:

1) F_n bir Berwald uzayıdır,

2) F_n bir genelleştirilmiş Douglas uzayıdır,

3) F_n için $s_{kl} = \dfrac{s_l b_k - s_k b_l}{b^2}$,

4) F_n bir Douglas uzayıdır.

İspat 2.5.1.1:

1) F_n bir Berwald uzayı olsun. Her Berwald uzayı bir Douglas ve her Douglas uzayı bir genelleştirilmiş Douglas uzayı olduğundan $1) \Rightarrow 2)$.

2) F_n bir genelleştirilmiş Douglas uzayı olsun. Teorem $2.5.1.1$ den

$$s_{kl} = \frac{s_l b_k - s_k b_l}{b^2}$$

dır. Böylece $2) \Rightarrow 3)$.

3) Matsumoto [25] ya göre $s_{kl} = \dfrac{s_l b_k - s_k b_l}{b^2}$ koşulu bir Kropina uzayının bir Douglas uzayı olması için gerek ve yeter koşuldur. Buna göre $3) \Rightarrow 4)$.

4) F_n bir Douglas uzayı olsun. Hipotez gereğince $r_{00} = c(x)\,\alpha^2$ olduğundan Yardımcı Teorem $2.4.2.2$ gereğince uzay Berwald uzayıdır. Buna göre $4) \Rightarrow 1)$ dir.

5) F_n için $s_{kl} = \dfrac{s_l b_k - s_k b_l}{b^2}$ olsun. $r_{00} = c(x)\alpha^2$ olduğundan Yardımcı Teorem $2.4.2.2$ gereğince uzay bir Berwald uzayıdır. Sonuç olarak $3) \Rightarrow 1)$.

6) F_n bir genelletirilmiş Douglas uzayı olsun. Teorem $2.5.1.1$ den ve hipotez gereğince uzayın bir Berwald uzayı olduğu açıktır. Buna göre $2) \Rightarrow 1)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. KROPİNA DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 Finsler Uzaylarında Kropina Dönüşümleri

F_n^* Finsler uzayının $F^* = F^*(x,y)$ metrik fonksiyonu ile F_n Finsler uzayının $F = F(x,y)$ metrik fonksiyonu arasındaki ilişki

$$F^*(x,y) = \frac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı ise $\rho : F \to F^*$ dönüşümüne Kropina dönüşümü adı verilir[26]. Burada $\beta = \beta(x,y) = b_i(x)y^i$ diferansiyel 1-formdur. Eğer (3.1) dönüşümünde F Finsler metriği α Riemann metriği olarak alınırsa, F^* Kropina uzayının metrik fonksiyonuna indirgenir.

F_n^* Finsler uzayının metrik tensörünün g_{ij}^* kovaryant bileşenleri ile g^{*ij} kontravaryant bileşenleri ve h_{ij}^* açısal metrik tensörü, sırasıyla,

$$g_{ij}^* = 2\beta^{-2}F^2(g_{ij} + 2l_il_j) - 4\beta^{-3}F^3(l_ib_j + l_jb_i) + 3\beta^{-4}F^4b_ib_j, \tag{3.2}$$

$$g^{*ij} = \beta^2F^{-2}\Big\{2^{-1}(g^{ij} - b^{-2}b^ib^j) + (1 - 2\beta^2F^{-2}b^{-2})l^il^j\Big\} + \beta^3F^{-3}b^{-2}(l^ib^j + l^jb^i) \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned} h_{ij}^* &= g_{ij}^* - l_i^*l_j^* = F^*\dot{\partial}_i\dot{\partial}_jF^* \\ &= 2\beta^{-2}F^2(h_{ij} + l_il_j) - 2\beta^{-3}F^3(l_ib_j + l_jb_i) + 2\beta^{-4}F^4b_ib_j \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir[26]. Burada $l_i = \dot{\partial}_iF$ ve $h_{ij} = g_{ij} - l_il_j = F\dot{\partial}_i\dot{\partial}_jF$, $b^2 = g^{ij}b_ib_j, \quad b^i = g^{ij}b_j, \quad l^i = g^{ij}l_j$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ dır.

F ve F^* metriklerinin $G^i_{_F}$ ve $G^i_{_{F^*}}$ sprey katsayıları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
G^i_{_{F^*}} &= \frac{1}{4}g^{*ij}\left[(F^{*2})_{x^k y^j}y^k - (F^{*2})_{x^j}\right] \\
&= \frac{1}{4}g^{*ij}\left[\left(\frac{F^4}{\beta^2}\right)_{x^k y^j}y^k - \left(\frac{F^4}{\beta^2}\right)_{x^j}\right] \\
&= \frac{1}{4}\beta^3 F^{-3}b^{-2}\Bigg\{\beta^{-1}Fb^2[2^{-1}(g^{ij}-b^{-2}b^ib^j)+(1-2\beta^2F^{-2}b^{-2})l^il^j] \\
&\quad +(l^ib^j+l^jb^i)\Bigg\}\cdot\left[\left(\frac{F^4}{\beta^2}\right)_{x^k y^j}y^k - \left(\frac{F^4}{\beta^2}\right)_{x^j}\right] \\
&= G^i_{_F} + \left[\frac{\beta}{Fb^2}(F_{x^k y^j}y^k - F_{x^j})b^j - \frac{1}{2b^2}(\beta_{x^k y^j}y^k - \beta_{x^j})b^j - \frac{\beta}{F^2b^2}\beta_{x^k}y^k\right. \\
&\quad \left.+\frac{\beta^2}{F^3b^2}F_{x_k}y^k\right]y^i + \left[-\frac{F}{2b^2}(F_{x^k y^j}y^k - F_{x^j})b^j + \frac{F^2}{4\beta b^2}(\beta_{x^k y^j}y^k - \beta_{x^j})b^j\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{2b^2}\beta_{x^k}y^k - \frac{\beta}{2Fb^2}F_{x_k}y^k\right]b^i - \frac{F^2}{4\beta}g^{ij}(\beta_{x^k y^j}y^k - \beta_{x^j}) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Bundan sonra ispat edilecek bazı teoremlerin ispatının daha iyi anlaşılabilmesini sağlamak amacıyla, [1, 4] de verilen aşağıdaki yardımcı teoremin ispatını tekrar vereceğiz:

Yardımcı Teorem 3.1.1 [1]**:** $F = \alpha + \beta$ Randers metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşul α Riemann metriğinin projektif düz ve β, $1-$formunun kapalı olmasıdır.

İspat 3.1.1: Bir $(\alpha, \beta)-$metriğinin $G^i_{_F}$ sprey katsayıları ile α Riemann metriğinin sprey katsayıları arasındaki

$$\begin{aligned}
G^i_{_F} &= G^i_{_\alpha} + \frac{\alpha\phi'}{\phi - s\phi'}s^i_0 + \frac{\phi\phi' - s(\phi\phi'' + \phi'\phi')}{2\phi[(\phi - s\phi') + (b^2 - s^2)\phi'']}\left(\frac{-2\alpha\phi'}{\phi - s\phi'}s_0 + r_{00}\right)\cdot \\
&\quad \left(\frac{y^i}{\alpha} + \frac{\phi\phi''}{\phi\phi' - s(\phi\phi'' + \phi'\phi')}b^i\right)
\end{aligned}$$

ilişkisinde $\phi = 1 + s$ alınarak bir Randers metriğinin sprey katsayıları

$$G^i_{_F} = G^i_{_\alpha} + Py^i + \Omega^i \qquad (3.6)$$

olarak bulunur. Burada

$$P = \frac{r_{00}}{2F} - \frac{\alpha}{F}s_0, \qquad \Omega^i = \alpha s_0^i$$

dır.

$F = \alpha + \beta$ Randers metriği projektif düz olsun. Bu durumda

$$G_{_F}^i = \tilde{P}y^i \tag{3.7}$$

şeklinde olacaktır. (3.6) ve (3.7) den elde edilen

$$G_{_\alpha}^i + Py^i + \Omega^i = \tilde{P}y^i \tag{3.8}$$

eşitliğinin her iki tarafı y^m e göre türetilir ve $i = m$ daraltılması yapılırsa

$$\frac{\partial G_{_\alpha}^m}{\partial y^m} = (n+1)(\tilde{P} - P), \qquad \Omega_m^m = (\alpha s_0^m)_m = \frac{y^m}{\alpha}s_0^m + \alpha s_m^m = 0 \tag{3.9}$$

ve (3.9) un (3.8) de yerine yazılmasıyla da

$$\begin{aligned} \Omega^i &= (\tilde{P} - P)y^i - G_{_\alpha}^i \\ &= \alpha s_0^i = \frac{1}{n+1}\frac{\partial G_{_\alpha}^m}{\partial y^m}y^i - G_{_\alpha}^i \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur. (3.10) eşitliğinin sol tarafında αs_0^i, y nin kuadratik fonksiyonu iken sağ tarafı irrasyonel fonksiyonudur. Buna göre,

$$s_0^i = 0, \quad \frac{1}{n+1}\frac{\partial G_{_\alpha}^m}{\partial y^m}y^i - G_{_\alpha}^i = 0 \tag{3.11}$$

olduğu açıktır. (3.11) in ilk denkleminden β nın kapalı $1-$form olduğunu gösteren

$$\begin{aligned} s_{ml} &= \frac{1}{2}(b_{m|l} - b_{l|m}), \qquad (s_m^i a_{il} = s_{lm}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial b_m}{\partial x^l} - \frac{\partial b_l}{\partial x^m}\Big) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.11) deki ikinci denklemden α nın projektif düz olduğunu gösteren

$$G_{_\alpha}^i = \frac{1}{n+1}\frac{\partial G_{_\alpha}^m}{\partial y^m}y^i = P_{_\alpha}y^i \tag{3.13}$$

denklemi elde edilir. (1.26) nın dikkate alınmasıyla (3.13) den $\alpha_{x^k y^j}y^k - \alpha_{x^j} = 0$ olduğu açıktır.

Tersine olarak, eğer β kapalı $1-$form ve α metriği projektif düz bir metrik ise, $s_0^i = 0, (\Omega^i = 0)$ ve $G_{\alpha}^i = P_{\alpha} y^i$ olacağından (3.6) dan, $F = \alpha + \beta$ randers metriğinin projekif düz olduğunu gösteren

$$G_{F}^i = \tilde{P} y^i, \qquad \left(\tilde{P} = P + P_{\alpha}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1: $n > 2$ için F_n ve F_n^*, sırasıyla, F metrikli bir projektif düz Randers uzayı ve F^* metrikli bir Finsler uzayı olsun. $\rho : F \to F^*$ Kropina dönüşümü altında, F^* Finsler metriğinin projektif düz bir uzay olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0 \tag{3.14}$$

olmasıdır.

İspat 3.1.1: Hipotez gereğince, $F = \alpha + \beta$ Randers metriği projektif düz olduğundan sprey katsayıları $G_{F}^i = \widetilde{P} y^i, \quad \widetilde{P} = \dfrac{F_{x^k} y^k}{2F}$ şeklindedir ve Yardımcı Teorem $3.1.1$ e göre,

$$\alpha_{x^k y^j} y^k - \alpha_{x^j} = 0 \tag{3.15}$$

ve

$$s_0^i = 0 \quad \text{veya} \qquad \beta_{x^k y^j} y^k - \beta_{x^j} = 0 \tag{3.16}$$

dir. (3.15) ve (3.16) koşulları altında (3.5)

$$\begin{aligned} G_{F^*}^i &= G_{F}^i + P y^i + \Omega b^i \\ &= (\widetilde{P} + P) y^i + \Omega b^i \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklini alır. Burada,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\beta^2}{F^3 b^2} F_{x^k} y^k - \frac{\beta}{F^2 b^2} \beta_{x^k} y^k, \\ &= \frac{\beta}{F^2 b^2} (2\beta \widetilde{P} - \beta_{x^k} y^k), \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{\beta}{2F b^2} F_{x^k} y^k + \frac{1}{2b^2} \beta_{x^k} y^k \\ &= -\frac{1}{2b^2} (2\beta \widetilde{P} - \beta_{x^k} y^k) \end{aligned} \tag{3.19}$$

dır.

F_n^* uzayı projektif düz olsun. Bu durumda F^* metriğinin sprey katsayıları

$$G^i_{F^*} = P^* y^i, \quad P^* = \frac{F^*_{x^k} y^k}{2F^*} = 2\widetilde{P} - \frac{1}{2\beta}\beta_{x^k} y^k \tag{3.20}$$

şeklinde olacağından (3.17) den

$$(P^* - \widetilde{P} - P)y^i = \Omega b^i \tag{3.21}$$

yazılır. Bu eşitliğinin her iki tarafının b_i ile daraltılması ve $P^*, \widetilde{P}$ ve P nin değerlerinin yerine yazılması ile

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{F^2 b^2}\right)\left(2\widetilde{P}\beta - \beta_{x^k} y^k\right) = 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem $2.2.1.3$ den $n > 2$ için $b^2 \neq 0$ dır. $1 - \dfrac{\beta^2}{F^2 b^2} = 0$ ise $b^2 = 0$ olduğu kolayca görülür. O halde,

$$1 - \frac{\beta^2}{F^2 b^2} \neq 0$$

dır ve (3.22) nin sağlanması ancak

$$2\widetilde{P}\beta - \beta_{x^k} y^k = 0 \tag{3.23}$$

ile mümkündür. Burada $\widetilde{P}$ nin değeri dikkate alınarak,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. Tersine olarak, (3.24) sağlandığında $P = \Omega = 0$ dır. $\Omega = 0$ için F^* ın projektif düz olduğunu gösteren

$$\begin{aligned} G^i_{F^*} &= (\widetilde{P} + P)y^i + \Omega b^i \\ &= \widetilde{P} y^i \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\widetilde{P}$ ve P nin değerleri yerine yazıldığında F^* metriğinin projektif çarpanı

$$P^* = \widetilde{P} = \frac{\beta_{x^k} y^k}{2\beta}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.1: F_n projektif düz Randers uzayını F_n^* projektif düz bir Finsler uzayına dönüştüren $\rho : F \to F^* = \dfrac{F^2}{\beta}, \quad (n > 2)$ Kropina dönüşümü altında, projektif düz Randers uzayının projektif çarpanı ve sprey katsayıları invaryant kalır.

İspat 3.1.1: (3.23) koşulu altında $P = 0$ ve $\Omega = 0$ olduğundan

$$G^i_{F^*} = \widetilde{P} y^i = G^i_F$$

ve

$$\begin{aligned} P^* &= 2\widetilde{P} - \frac{1}{2\beta}\beta_{x^k} y^k \\ &= \widetilde{P} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2: $\rho : F \to F^* = \dfrac{F^2}{\beta}$ dönüşümü projektif düz bir F_n Randers uzayını skaler flag eğrilik , projektif düz bir Finsler uzayına dönüştüren bir Kropina dönüşümü olsun. F^*_n uzayının skaler flag eğriliği

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}(\widetilde{P}^2 - y^i \partial_i \widetilde{P}) \tag{3.25}$$

şeklindedir.

İspat 3.1.2: F^*_n uzayının (2.36) ile verilen R^{*i}_{jkl} R-eğrilik tensöründe j ve l indisleri üzerine daraltma yapıldığında

$$R^{*i}_k = y^l y^j R^{*i}_{ljk} = 2\partial_k G^i_{F^*} - \partial_j G^i_{F^* k} y^j - G^i_{F^* r} G^r_{F^* k} + 2G^i_{F^* kr} G^r_{F^*} \tag{3.26}$$

olur.

(3.26) da $k = i$ alındığında

$$R^{*i}_i = 2\partial_i G^i_{F^*} - y^j \partial_j G_{F^*} - G^i_{F^* r} G^r_{F^* i} + 2G_{F^* r} G^r_{F^*} \tag{3.27}$$

elde edilir. Projektif düz bir Finsler metriği için $G^i_F = \widetilde{P} y^i$ olduğundan Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri $R^i_k = (\widetilde{P}^2 - \widetilde{P}_{x^k} y^k) h^i_k = KF^2 h^i_k$ olarak elde edilir. O halde projektif düz bir Finsler metriği skaler flag eğriliklidir [10]. Buna göre (1.25) ve (3.17), (3.27) de kullanıldığında

$$\begin{aligned} R^{*i}_i &= K^* F^{*2} h^{*i}_i = (1-n)\, y^i\, \partial_i(\widetilde{P} + P) + 2\partial_i(\Omega b^i) - y^j\, \partial_j(\Omega_i b^i) \\ &\quad + (n-1)(\widetilde{P} + P)^2 + 2(n-1)\Omega(\widetilde{P} + P)_r b^r - \Omega_r \Omega_i b^r b^i + 2\Omega\Omega_{ri} b^i b^r \end{aligned} \tag{3.28}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem $3.1.1$ gereğince $\Omega = 0, P = 0$ ve $h_i^{*i} = n-1$, (3.28) de yerine yazıldığında

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}\,(\,\widetilde{P}^2 - y^i\partial_i\widetilde{P}\,)$$

olma koşulu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3.1.2: Bir $\rho : F \to F^*$ Kropina dönüşümü altında bir Finsler uzayının projektif düz bir Finsler uzayına dönüşmesi için gerek ve yeter koşul

$$2F\beta^2(F_{x^k y^l}y^k - F_{x^l}) - F^2\beta(\beta_{x^k y^l}y^k - \beta_{x^l}) + 2(Fb_l - \beta\frac{y_l}{F})(F\beta_{x^k} - \beta F_{x^k})y^k = 0 \quad (3.29)$$

dır.

İspat 3.1.2: Bir $F^* = \dfrac{F^2}{\beta}$ metriği projektif düz bir Finsler metriği olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} F^*_{x^k y^l}y^k - F^*_{x^l} &= \left(\frac{F^2}{\beta}\right)_{x^k y^l} y^k - \left(\frac{F^2}{\beta}\right)_{x^l} \qquad (3.30)\\ &= -F^2\beta^{-2}(\beta_{x^k y^l}y^k - \beta_{x^l}) + 2F\beta^{-1}(F_{x^k y^l}y^k - F_{x^l}) \\ &\quad +2\beta^{-3}(\beta F_{y^l} - Fb_l)(F_{x^k}\beta - F\beta_{x^k})y^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$2F\beta^2(F_{x^k y^l}y^k - F_{x^l}) - F^2\beta(\beta_{x^k y^l}y^k - \beta_{x^l}) + 2(Fb_l - \beta\frac{y_l}{F})(F\beta_{x^k} - \beta F_{x^k})y^k = 0$$

dır. Tersine olarak (3.29) ile verilen denklemin sağlanması halinde (3.30) dan $F^*_{x^k y^l}y^k - F^*_{x^l} = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.3: $\rho : F \to F^* = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$ dönüşümü, projektif düz bir Riemann metriğini bir Kropina metriğine dönüştüren bir Kropina dönüşümü olsun. $r_{00} = c\alpha^2$, $c = \dfrac{n-1}{n-2}, (n > 2)$ koşulu ve ρ dönüşümü altında, $F^* = \dfrac{\alpha^2}{\beta}$ Kropina metriğinin skaler flag eğrilikli bir genelleştirilmiş Douglas metriği olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0 \qquad (3.31)$$

dır.

İspat 3.1.3: F_n^*, $\rho : F \to F^* = \dfrac{F^2}{\beta}$ Kropina dönüşümü ile elde edilmiş bir skaler flag eğrilikli genelleştirilmiş Douglas metrikli bir Kropina uzayı olsun. Bu taktirde F_n

uzayı $F=\alpha$ metrikli bir Riemann uzayıdır ve bu hal için (3.29) denklemi

$$2\alpha\beta^2(\alpha_{x^k y^l}y^k-\alpha_{x^l})-\alpha^2\beta(\beta_{x^k y^l}y^k-\beta_{x^l})+2(\alpha b_l-\beta\alpha_{y_l})(\alpha\beta_{x^k}-\beta\alpha_{x^k})y^k=0 \quad (3.32)$$

şeklini alır. Hipotez gereğince $F=\alpha$ Riemann metriği projektif düz ve $F^*=\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ Kropina metriği skaler flag eğrilikli genelleştirilmiş Douglas metriği olduğundan (1.26) ve Teorem $2.3.1.2$ den, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\alpha_{x^k y^l}y^k-\alpha_{x^l} &= 0\\ s_{kl} &= 0, \quad \left(\beta_{x^k y^l}y^k-\beta_{x^l}=0\right)\end{aligned}$$

dır. Bu koşullar altında (3.32) den elde edilen denklemin her iki tarafının b^l ile daraltılması ile

$$2(\alpha b^2-\frac{\beta^2}{\alpha})(\alpha\beta_{x^k}-\beta\alpha_{x^k})y^k=0$$

bulunur. $n>2$ için $\alpha b^2-\dfrac{\beta^2}{\alpha}\neq 0$ olacağından

$$\left(\alpha\beta_{x^k}-\beta\alpha_{x^k}\right)y^k=0$$

veya

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k}y^k=0$$

elde edilir. Tersine olarak, (3.31) koşulu altında , projektif düz bir F_n uzayı için (3.32) koşulu β nın kapalı veya $s_{kl}=0$ olduğunu gösteren

$$-\alpha^2\beta(\beta_{x^k y^l}y^k-\beta_{x^l})=0$$

formuna indirgenir. Diğer taraftan, hipotez gereğince, $r_{00}=c\alpha^2$, $c=\dfrac{n-1}{n-2}$, $(n>2)$ olduğundan Teorem $2.3.1.1$ ve Teorem $2.3.1.2$ den F_n^* uzayı skaler eğrilikli bir genelleştirilmiş Douglas uzayıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Yapılan literatür taramaları sonucunda Douglas metrikli Finsler uzaylarının karakterizasyonunun yapıldığı ve bazı özel koşulları sağlayan özel Douglas tipli metriklerin özelliklerinin tespit edildiği saptanmıştır. Bu alanda yapılmış daha önceki çalışmalar tez çalışmasındaki ana problemin belirlenmesine yardımcı olmuş ve problem Douglas metrikli uzayların daha genel bir sınıfını oluşturan genelleştirilmiş Douglas metrikli uzayları araştırma problemi olarak düşünülmüştür. Bu problemin özel bir hali olan bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olma koşullarının belirlenmesi temel problem olmuştur. Çalışmada, genelleştirilmiş Douglas metrikli Kropina uzayları göz önüne alınarak, öncelikle, bu uzayların temel özellikleri belirlenmiş ve böyle bir metriğe sahip Kropina uzaylarını karakterize eden polinom denklemler elde edilmiştir. Daha sonra, bu polinom denklemleri sağlayan gerek koşullar bir teoremle ifade ve ispat edilmiştir. Sonra, R^i_{jkl} eğrilik tensörü incelenmiş ve bu tensörü için Riemannian geometrideki birinci ve ikinci Bianchi özdeşliklerine eşdeğer olan özdeşlikler ispat edilmiştir. Ayrıca, skaler flag eğrilikli Kropina uzaylarını karakterize eden koşullar yardımıyla skaler flag eğrilikli bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas uzayı olması için gerek ve yeter koşullar bir teoremle ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra, Finsler uzaylarının projektif dönüşümü üzerine $Z-$projektiflik koşulu gözönüne alınarak, bu koşul altında invaryant kalan büyüklükler elde edilmiştir. Bununla birlikte bu çalışmada, bir Kropina uzayı ile bir Finsler uzayı arasındaki projektif dönüşümün $Z-$projektif olması için gerek ve yeter koşullar elde edilerek bir teoremle ifade ve ispat edilmiştir. Sonra bir Finsler uzayının $D-$rekürant olması tanımlanarak $D-$rekürant bir Kropina uzayının genelleştirilmiş Douglas metrikli olması için gerek ve yeter koşullar bulunarak ispatlanmıştır. Tezin son bölümünde, iki Finsler uzayının metrikleri arasında bir Kropina dönüşümü tanımlanarak, bu Kropina dönüşümü altında, projektif düz bir Randers uzayının projektif düz bir Finsler uzayına dönüşmesi için gerek ve yeter koşul elde edilerek

ispat edilmiştir ve dönüşüm uzayının skaler flag eğriliği elde edilmiştir. Son olarak projektif düz bir Riemann metriğinin bir Kropina dönüşümü ile skaler flag eğrilikli ve genelleştirilmiş Douglas metrikli bir Kropina metriğine dönüşmesi için gerek ve yeter koşul bir teoremle ispat edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Z. Shen**, Lectures on Finsler geometry, *World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong,* (2001).

[2] **D. Bao and C. Robles**, Ricci and flag curvatures in Finsler geometry, *Riemann Finsler Geometry MSRI Publ.*, **50**, $197-261(2004)$.

[3] **M. Matsumoto**, Theory of Finsler spaces with an $(\alpha,\beta)-$metric, *Rep. on Math.Phys.*, **31**, $43-83(1992)$.

[4] **Z. Shen**, Differential geometry of spray and Finsler spaces, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,* (2001).

[5] **D. Bao, S.S. Chern and Z. Shen**, An introduction to Riemann-Finsler geometry, *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc.*, (2000).

[6] **M. Matsumoto**, The Berwald connection of a Finsler space with an $(\alpha,\beta)-$metric, *Tensor, N. S.*, **50**, $18-25(1991)$.

[7] **S. Bácsó and M. Matsumoto**, On Finsler spaces of Douglas type II. projectively flat spaces, *Publ. Math., Debrecen,* **53/3-4**, $423-438(1998)$.

[8] **R. Yoshikawa, K. Okubo and M. Matsumoto**, The conditions for some $(\alpha,\beta)-$metric spaces to be weakly-Berwald spaces, *Tensors, N., S.*, **65**, $278-290(2004)$.

[9] **S.S. Chern and Z. Shen**, Riemann-Finsler geometry, *World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong,* (2005).

[10] **Z. Shen**, Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, **355(4)**, $1713-1728(2002)$.

[11] **M. Matsumoto and X. Wei**, Projective change of Finsler spaces of constant curvature, *Publ. Math., Debrecen,* **44/1-2**, $175-181(1994)$.

[12] **Z.I. Szabó**, Hilbert's fourth problem, *Adv. in Math.*, **59**, $185-301(1986)$.

[13] **Z. Shen and G.C. Yıldırım**, A characterization of Randers metrics of scalar flag curvature, *Preprint,* (2005).

[14] **A. Rapsáck**, Über die bahntreuen abbildungen metrisher räume, *Publ. Math., Debrecen*, **8**, $285-290(1961)$.

[15] **S. Bácsó and M. Matsumoto**, On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion of Berwald space, *Publ. Math., Debrecen*, **53/3-4**, $423-438(1998)$.

[16] **B. Najafi, Z. Shen and A. Tayebi**, On a projective class of Finsler metrics, *Math. Subj. Class., preprint.*

[17] **X. Chen and Z. Shen**, On Douglas metrics, *Publ. Math., Debrecen*, $1-8(2005)$.

[18] **S. Bácsó and I. Papp**, A note on generalized Douglas space, *Per. Math., Hung.*, **48/1-2**, $181-184(2004)$.

[19] **H.G. Nagaraja**, On projective changes of Finsler metrics, *Tensor, N.S.*, **65**, $181-188(2004)$.

[20] **J. Szilasi and Sz. Vattamány**, On projective geometry of sprays, *Diff. Geom. Appl.*, **12**, $185-206(2000)$.

[21] **S. Bacso and M. Matsumoto**, Projective changes between Finsler spaces with $(\alpha,\beta)-$metric, *Tensor, N.S.*, **55**, (1994).

[22] **M. Hashiguchi, S. Hojo and M. Matsumoto**, Landsberg spaces of dimension two with $(\alpha,\beta)-$metric, *Tensor, N.S.*, **57**, $145-153(1996)$.

[23] **B-D. Kim and Ha-Y. Park**, On special Finsler spaces with common geodesics , *Korean Math. Soc.*, **15**, $331-338(2000)$.

[24] **L. Debnath**, Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers, *Birkhauser, Boston*, (1997).

[25] **M. Matsumoto**, Finsler spaces with $(\alpha,\ \beta)-$ metric of Douglas type, *Tensor, N.,S.*, **60**, $123-134(1998)$.

[26] **U.P. Singh, B.N. Prasad and B. Kumari**, On a Kropina change of Finsler metric, *Tensor, N.S.*, **64**, $181-188(2003)$.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Salim CEYHAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Gölcük-KOCAELİ, 08.08.1971

Lisans Üniversite: İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği

Yayın Listesi:

- **Ceyhan, S.** and Şuhubi, E.S., 1995: Boundary Layer Formation in Planar Uniaxial Ferroelectric Crystals with Domain Structure. Bull. Tech. Univ. Istanbul, $48, 639-655$.