İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ İLE YAPISAL DİNAMİK ANALİZ CEVAPLARININ SÜPER ELEMANLAR VE ALT YAPILARA BÖLME İLE İYİLEŞTİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Fikret Kamil ÇORBACI

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : İmalat

ŞUBAT 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ İLE YAPISAL DİNAMİK ANALİZ CEVAPLARININ SÜPER ELEMANLAR VE ALT YAPILARA BÖLME İLE İYİLEŞTİRİLMESİ

DOKTORA TEZİ
Fikret Kamil ÇORBACI
(503952006)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Eylül 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 02 Şubat 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Erhan ALTAN (YTÜ)
Doç. Dr. Hikmet KOCABAŞ (İTÜ)
Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)
Doç. Dr. Erol UZAL (İÜ)

ŞUBAT 2009

ÖNSÖZ

Doktora tezi çalışmamı yöneten değerli hocam Sn. Prof. Dr. Ata MUĞAN'a olumlu eleştirileri, yardımları ve sabrı için çok teşekkür ederim. Çalışmam süresince görüş, öneri ve değerlendirmelerinden dolayı tez izleme komitesi/tez jürisi üyeleri Sn. Prof. Dr. Erhan ALTAN'a ve Sn. Doç. Dr. Hikmet KOCABAŞ'a; tez jürisi üyeleri Sn. Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ'ye ve Sn. Doç Dr. Erol UZAL'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca varlıkları ile hayat kaynağım olan değerli eşim Sn. Emine ÇORBACI ve canım oğlum M. Egemen ÇORBACI'ya başta olmak üzere hayatım boyunca maddi ve manevi destekleri ile sürekli yanımda olan ailemin tüm fertlerine ayrı ayrı şükranlarımı sunarım.

Şubat 2009

Fikret Kamil ÇORBACI

Mak. Yük. Müh.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ... **iii**
İÇİNDEKİLER ... **v**
KISALTMALAR ... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ... **xiii**
SEMBOL LİSTESİ ... **xxiii**
ÖZET ... **xxvii**
SUMMARY ... **xxix**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Literatür Araştırması ... 4
1.1.1 Fiziksel koordinatların miktarlarının düşürülmesi esasına dayanan MDD yöntemleri ... 5
1.1.1.1 Guyan/Irons MDD yöntemi ... 7
1.1.1.2 Geliştirilmiş indirgenmiş sistem yöntemi (GİSY) ... 8
1.1.1.3 Tekrarlı (iteratif) geliştirilmiş indirgenmiş sistem yöntemi (TGİSY) ... 8
1.1.1.4 Dinamik yoğunlaşma (Dynamic condensation) yöntemi ... 8
1.1.2 Mod ayrıştırması ile uygulanan MDD yöntemleri ... 8
1.1.3 Ritz vektörü yöntemlerinin kullanılması ile uygulanan MDD yöntemleri ... 9
1.1.4 Parça modu oluşturma ve AYB yaklaşımları ile uygulanan MDD yöntemleri ... 10
1.2 Literatür Araştırmasının Değerlendirilmesi ... 12
1.3 Amaç ve İçerik ... 12
2. YAPISAL DİNAMİK SİSTEMLER ... **17**
2.1 Dinamik Sistemlerin Davranışı ... 17
2.2 Durum Uzayı (State-Space) Yaklaşımı ile Yapısal Dinamik Sistemlerin İncelenmesi ... 18
3. SONLU ELEMAN YAPISAL DENKLEMLERİ ... **21**
3.1 Kiriş Eleman Katılık Matrisi ... 21
3.2 Çubuk (Truss) Eleman Katılık Matrisi ... 23
3.3 Kiriş ve Çubuk Eleman Kütle Matrisi ... 23
3.4 Plak Elemanın Katılık ve Kütle Matrisleri ... 25
3.5 Eleman Global Katılık ve Kütle Matrisi ... 29
3.5.1 Eleman yerel koordinatlarının genel koordinatlara dönüştürülmesi ... 29
3.5.2 Genelleştirilmiş eleman katılık matrisi ... 30
3.5.3 Genelleştirilmiş eleman kütle matrisi ... 30
3.6 Yapısal Dinamik Analizlerde Sönüm Matrisi ... 31
4. MODEL DERECESİ DÜŞÜRME (MDD) TEKNİKLERİ ... **37**
4.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemleri ... 37
4.2 Sistem Cevabı ... 37
4.3 Model Derecesi Düşürme Yöntemleri ... 39
4.3.1 İmpuls cevap envaryant integrasyonu yöntemi (IRI) ... 40
4.3.2 İleri farklar yöntemi ... 41
4.3.3 Newmark yöntemi ... 42

4.4 Yeniden Mod Oluşturma ile Model Derecesi Düşürme Yöntemleri 43
4.4.1 Component mode synthesis – CMS yöntemi 43
4.4.1.1 Klasik CMS yöntemi 44
5. MODEL DERECESİ DÜŞÜRME TEKNİKLERİNDE YENİ YAKLAŞIMLAR 47
5.1 Toplam Enerjilerin Denkliği Yaklaşımı 48
5.2 Özdeğer Problemi Çözümü Yaklaşımı 50
5.3 Çubuk Eleman Sisteminde Model Derecesi Düşürme Uygulaması 52
5.3.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar 52
5.3.2 Dönüşüm matrisinin oluşturulması ve kullanılması 54
5.3.3 Özdeğerlerin karşılaştırılması ve MDD seçim kriteri olarak kullanılması 54
5.3.4 Model derecesi düşürme Matlab akış şeması 56
5.3.5 Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması 57
5.3.6 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması 77
5.3.7 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi 82
5.3.8 ANSYS'de düzlemsel çubuk sistem analizi 87
5.4 Euler-Bernoulli Kirişi Model Derecesi Düşürme Uygulaması 91
5.4.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar 91
5.4.2 Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması 93
5.4.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması 107
5.4.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi 107
5.5 Düzlemsel Plak Elemanı Sisteminde Model Derecesi Düşürme Uygulaması 114
5.5.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar 114
5.5.2 Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması 116
5.5.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması 125
5.5.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi 125
5.6 MDD Uygulamalarının Değerlendirilmesi 130
6. AYB (SUBSTRUCTURING) SÜPER ELEMAN YAKLAŞIMI VE UYGULAMALARI 133
6.1 AYB'in Faydaları 136
6.2 Süper Eleman Kullanımındaki Sınırlamalar 138
6.3 Alt Parça Oluşturma ve Kullanımı 139
6.4 AYB'de Statik Yoğunlaştırma 140
6.5 Dinamik Analizlerde Süper Eleman 141
6.6 Statik "Explicit" Açık Matris İşlemleri ile Yoğunlaştırma 142
6.7 Dinamik Explicit Matris İşlemleri ile Yoğunlaştırma 143
6.8 Gauss Eliminasyon Yöntemi ile Yoğunlaştırma 144
6.9 AYB'de Mod Seçim Kriterleri 145
6.10 Kiriş Sisteminde Süper Eleman Uygulamaları 145
6.10.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar 145
6.10.2 AYB uygulanmış sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması 146
6.10.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması 153
6.10.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi 153
6.11 Plak'da Süper Eleman Uygulamaları 158
6.11.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar 158
6.11.2 AYB uygulanmış sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması 159

6.11.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması 167
6.11.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi 167
6.12 AYB Uygulamalarının Değerlendirilmesi 171
7. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 173
KAYNAKLAR 179
ÖZGEÇMİŞ 185

KISALTMALAR

SEY	: Sonlu Elemanlar Yöntemleri
CMS	: Component Mode Synthesis
QSM	: Quasi-Static Mode Synthesis
QSC	: Quasi-Static Compansation
IRI	: Impulse Response Invariant
MDD	: Model Derecesi Düşürme
SD	: Serbestlik Derecesi
GİSY	: Geliştirilmiş İndirgenmiş Sistem Yöntemi
TGİSY	: Tekrarlı Geliştirilmiş İndirgenmiş Sistem Yöntemi
AYB	: Alt Yapılara Bölme (Substructuring)

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Mühendislik malzemelerinin β sönüm katsayıları [35].....35
Çizelge 5.1 : Analizlerde kullanılan malzemelerin özellikleri.....53
Çizelge 5.2 : Düzlemsel çubuk sistem analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları.....74
Çizelge 5.3 : Euler-Bernoulli kiriş SEY modelinin malzemelere göre ilk doğal frekansları, sönüm oranları, sönüm durumu, en küçük sistem periyotları ve sistem statik çökmeleri.....92
Çizelge 5.4 : Düzlemsel Euler-Bernoulli kiriş sistemi analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları.....104
Çizelge 5.5 : Orijinal kiriş sisteminin 5, 15, 100 ve 1000 eleman için hesaplama zamanlarının Toplam enerjilerin denkliği yöntemine göre MDD uygulanmış sistem için harcanan hesaplama zamanları ile karşılaştırılması. 106
Çizelge 5.6 : Düzlemsel plak sistemi SEY modelinin malzemelere göre ilk doğal frekansları, sönüm oranları, sönüm durumu, en küçük sistem periyotları ve sistem statik çökmeleri. 115
Çizelge 5.7 : Düzlemsel plak sistemi analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları.....125
Çizelge 6.1 : 5, 100 ve 200 elemanlı kiriş sistemlerinde AYB kullanarak ve AYB kullanmadan yapılan analizlerin hesaplama zamanları karşılaştırması. 153
Çizelge 6.2 : 24, 60, 96 elemanlı plak sistemlerinde AYB kullanarak ve AYB kullanmadan yapılan analizlerin hesaplama zamanları karşılaştırması. 166

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 **:** Kütle, yay, sönüm elemanı sistemi: a) Fiziksel sistem, b) Serbest cisim diyagramı. 17
Şekil 2.2 **:** Durum uzayı blok diyagramı. 19
Şekil 3.1 **:** Düzlemsel kiriş elemandaki düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri. 21
Şekil 3.2 **:** Düzlemsel dikdörtgen plak elemanı [71]. 25
Şekil 3.3 **:** Katılık orantılı sönüm katsayısının sıfır olduğu durumda kütle orantılı sönüm katsayısının frekans ile değişimi [74]....33
Şekil 3.4 **:** Kütle orantılı sönüm katsayısının sıfır olduğu durumda katılık orantılı sönüm katsayısının frekans ile değişimi [74]....34
Şekil 3.5 **:** Kütle ve katılık orantılı sönüm katsayılarının aynı sistemde olduğu durumda sönüm katsayılarının frekans ile değişimi [74]....34
Şekil 5.1 **:** 40 elemanlı düzlemsel çubuk sistem [45]. 52
Şekil 5.2 **:** Çubuk elemanın düğüm noktası ve serbestlik derecesi numaralandırması. 53
Şekil 5.3 **:** Model derecesi 7 için orijinal model 24üncü özdeğerine göre bulunan özvektörleri (daire) ile MDD uygulanmış sistemin 6ncı özdeğerine ait özvektörlerinin (kare) karşılaştırılması. 55
Şekil 5.4 **:** Model derecesi 7 için orijinal model 40ıncı özdeğerine göre bulunan özvektörleri (daire) ile MDD uygulanmış sistemin 7nci özdeğerine ait özvektörlerinin (kare) karşılaştırılması. 55
Şekil 5.5 **:** Düzlemsel çubuk sistem analizi için Matlab kodu akış şeması. 57
Şekil 5.6 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 58
Şekil 5.7 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 59
Şekil 5.8 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 59
Şekil 5.9 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 60
Şekil 5.10 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 60
Şekil 5.11 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 61

Şekil 5.12 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 61
Şekil 5.13 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 62
Şekil 5.14 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 62
Şekil 5.15 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 63
Şekil 5.16 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 63
Şekil 5.17 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 64
Şekil 5.18 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 64
Şekil 5.19 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 65
Şekil 5.20 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 65
Şekil 5.21 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 66
Şekil 5.22 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 66
Şekil 5.23 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 67
Şekil 5.24 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 67
Şekil 5.25 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 68
Şekil 5.26 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 68
Şekil 5.27 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 69

Şekil 5.28 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 69
Şekil 5.29 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 70
Şekil 5.30 **:** Uygulanan sinüs giriş fonksiyonu. 70
Şekil 5.31 **:** β=0.1 için 100 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 71
Şekil 5.32 **:** β=0.1 için 100 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 72
Şekil 5.33 **:** β=0.1 için 100 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 72
Şekil 5.34 **:** β=0.001 için 1000 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 73
Şekil 5.35 **:** β=0.001 için 1000 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için basamak cevapları. 73
Şekil 5.36 **:** β=0.001 için 1000 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 74
Şekil 5.37 **:** Orijinal model ve indirgenmiş sistem için özdeğerlerin karşılaştırılması. 76
Şekil 5.38 **:** β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 77
Şekil 5.39 **:** β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 78
Şekil 5.40 **:** β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 78
Şekil 5.41 **:** β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 79
Şekil 5.42 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 79
Şekil 5.43 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 80
Şekil 5.44 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 80

Şekil 5.45 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması. 81
Şekil 5.46 **:** β=0.001 için 100 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırması. 81
Şekil 5.47 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 82
Şekil 5.48 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 83
Şekil 5.49 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 83
Şekil 5.50 **:** β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 84
Şekil 5.51 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 84
Şekil 5.52 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 85
Şekil 5.53 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 85
Şekil 5.54 **:** β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları. 86
Şekil 5.55 **:** β=0.1 için 100 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için Bode diyagramları. 87
Şekil 5.56 **:** β=0.001 için 1000 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için Bode diyagramları. 87
Şekil 5.57 **:** ANSYS'de oluşturulan düzlemsel çubuk sistem SEY modeli. 88
Şekil 5.58 **:** ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin SEY modelinin impuls yüke karşılık yerdeğiştirmesi. 88
Şekil 5.59 **:** ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasının β=0.1 için impuls giriş cevabının orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırılması. 89
Şekil 5.60 **:** ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasının β=0.1 için basamak girişe karşılık cevabının orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırılması. 90

Şekil 5.61 **:** ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasının β=0.1 için sinüzoidal girişe karşılık cevabının orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırılması. 90
Şekil 5.62 **:** MDD uygulanacak Euler-Bernoulli kirişi elemanlarından oluşan sistem. 91
Şekil 5.63 **:** β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 94
Şekil 5.64 **:** β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 94
Şekil 5.65 **:** β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 95
Şekil 5.66 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 95
Şekil 5.67 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 96
Şekil 5.68 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 96
Şekil 5.69 **:** β=0. 01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 97
Şekil 5.70 **:** β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 97
Şekil 5.71 **:** β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 98
Şekil 5.72 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 98
Şekil 5.73 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 99
Şekil 5.74 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 99
Şekil 5.75 **:** β=0.00008 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 100
Şekil 5.76 **:** β=0.00008 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 100

Şekil 5.77 **:** β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 101
Şekil 5.78 **:** β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 101
Şekil 5.79 **:** β=0.001 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 148'e indirgenmiş sistem için Impuls cevapları. 102
Şekil 5.80 **:** β=0.001 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 148'e indirgenmiş sistem için Sinüs cevapları. 102
Şekil 5.81 **:** β=0.001 için 1000 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 1000'e indirgenmiş sistem için Impuls cevapları. 103
Şekil 5.82 **:** β=0.001 için 1000 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 1000'e indirgenmiş sistem için Sinüs cevapları. 103
Şekil 5.83 **:** Orijinal kiriş modelinin 5, 100 ve 1000 elemanlı durumlarında impuls giriş için verdiği sistem cevpaları. 105
Şekil 5.84 **:** β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 107
Şekil 5.85 **:** β=0.001 için5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 108
Şekil 5.86 **:** β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 108
Şekil 5.87 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 109
Şekil 5.88 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 109
Şekil 5.89 **:** β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 110
Şekil 5.90 **:** β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 110
Şekil 5.91 **:** β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 111
Şekil 5.92 **:** β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 111

Şekil 5.93 **:** β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 112
Şekil 5.94 **:** β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 112
Şekil 5.95 **:** β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 113
Şekil 5.96 **:** MDD uygulanacak 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli. 114
Şekil 5.97 **:** β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.....116
Şekil 5.98 **:** β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.....117
Şekil 5.99 **:** β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.....117
Şekil 5.100 **:** β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.....118
Şekil 5.101 **:** β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.....118
Şekil 5.102 **:** β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.....119
Şekil 5.103 **:** β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 119
Şekil 5.104 **:** β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 120
Şekil 5.105 **:** β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 120
Şekil 5.106 **:** β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 121
Şekil 5.107 **:** β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 121
Şekil 5.108 **:** β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 122

Şekil 5.109 : β=0.01 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 122
Şekil 5.110 : β=0.01 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 123
Şekil 5.111 : β=0.00008 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları. 123
Şekil 5.112 : β=0.00008 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları. 124
Şekil 5.113 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 126
Şekil 5.114 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 126
Şekil 5.115 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 127
Şekil 5.116 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 127
Şekil 5.117 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 128
Şekil 5.118 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 128
Şekil 5.119 : β=0.01 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 129
Şekil 5.120 : β=0.00008 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları. 129
Şekil 6.1 : Bir uçağın modeli. 133
Şekil 6.2 : Uçak modelinin ilk seviye alt yapıları. 134
Şekil 6.3 : Boru elemanlardan oluşturulan bir süper elemanda yer almaya devam eden düğüm noktaları. 134
Şekil 6.4 : İlk seviye uçak kanat alt parçasının diğer alt seviyeleri. 135
Şekil 6.5 : Çentikli plak üzerinde alt parça oluşturma uygulaması. 136
Şekil 6.6 : Süper elemanın bir kiriş elemanı ile bir arada kullanılması. 139
Şekil 6.7 : a) Uçak kuyruk dikmesi alt parçasının dış temas ve yoğunlaştırılmış düğüm noktaları, b) Bir süper elemanın dış temeas ve iç düğüm noktaları. 141
Şekil 6.8 : AYB uygulanacak kiriş ve süper eleman oluşturmada kullanılacak elemanlar. 145

Şekil 6.9 **:** β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 147
Şekil 6.10 **:** β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 148
Şekil 6.11 **:** β=0.010 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 148
Şekil 6.12 **:** β=0.010 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 149
Şekil 6.13 **:** β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 149
Şekil 6.14 **:** β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 150
Şekil 6.15 **:** β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 150
Şekil 6.16 **:** β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 151
Şekil 6.17 **:** β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 11 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 151
Şekil 6.18 **:** β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 11 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 152
Şekil 6.19 **:** β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 154
Şekil 6.20 **:** β=0.010 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 155
Şekil 6.21 **:** β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 155
Şekil 6.22 **:** β=0.00008 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 156
Şekil 6.23 **:** β=0.001 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 90 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 156
Şekil 6.24 **:** β=0.010 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 90 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 157

Şekil 6.25 **:** β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 90 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları. 157
Şekil 6.26 **:** AYB uygulanacak sistemler: a) 24 elemanlı plak sistemi, b) Süper elemanlardan oluşturulan indirgenmiş sistem. 158
Şekil 6.27 **:** β=0.001 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 160
Şekil 6.28 **:** β=0.001 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 161
Şekil 6.29 **:** β=0.00008 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 161
Şekil 6.30 **:** Şekil 6.15: β=0.00008 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 162
Şekil 6.31 **:** β=0.010 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 162
Şekil 6.32 **:** β=0.010 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 163
Şekil 6.33 **:** β=0.1 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 163
Şekil 6.34 **:** β=0.1 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sönümlü halde sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 164
Şekil 6.35 **:** β=0.1 için 60 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 164
Şekil 6.36 **:** β=0.1 için 60 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 165
Şekil 6.37 **:** β=0.1 için 96 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması. 165
Şekil 6.38 **:** β=0.1 için 96 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması. 166
Şekil 6.39 **:** β=0.001 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması. ... 168
Şekil 6.40 **:** β=0.010 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması. ... 168
Şekil 6.41 **:** β=0.100 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması. ... 169
Şekil 6.42 **:** β=0.00008 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması. ... 169
Şekil 6.43 **:** β=0.100 için 60 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması. ... 170
Şekil 6.44 **:** β=0.100 için 96 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması. ... 170

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$: Orijinal modelin kütle matrisi
m : Kütle
$\boldsymbol{K}$: Orijinal modelin katılık matrisi
k : Yay sabiti
$\boldsymbol{C}$: Orijinal modelin sönüm matrisi
$\boldsymbol{d}$: Yerdeğiştirme vektörü
$\dot{\boldsymbol{d}}$: Hız vektörü
$\ddot{\boldsymbol{d}}$: İvme vektörü
$\boldsymbol{f}$: Kuvvet vektörü
ω : Açısal frekans
ω_n : Doğal frekans
ω^2 : Özdeğer
$\boldsymbol{E}$: MDD tekniği dönüşüm matrisi
$\boldsymbol{\Phi}$: Özvektör
$\boldsymbol{M}_{aa}$: Kütle matrisi aktif alt parçası
$\boldsymbol{M}_{ao}$: Kütle matrisi aktif olmayan kolonlar alt parçası
$\boldsymbol{M}_{oa}$: Kütle matrisi aktif olmayan satırlar alt parçası
$\boldsymbol{M}_{oo}$: Kütle matrisi aktif olmayan
$\boldsymbol{K}_{aa}$: Katılık matrisi aktif alt parçası
$\boldsymbol{K}_{ao}$: Katılık matrisi aktif olmayan kolonlar alt parçası
$\boldsymbol{K}_{oa}$: Katılık matrisi aktif olmayan satırlar alt parçası
$\boldsymbol{K}_{oo}$: Katılık matrisi aktif olmayan
$\boldsymbol{d}_a$: Aktif yerdeğiştirme vektörü
$\boldsymbol{d}_o$: Aktif olmayan yerdeğiştirme vektörü
$\ddot{\boldsymbol{d}}_a$: Aktif yerdeğiştirme vektörü
$\ddot{\boldsymbol{d}}_o$: Aktif olmayan yerdeğiştirme vektörü
$\boldsymbol{f}_a$: Aktif kuvvet vektörü
$\boldsymbol{f}_o$: Aktif olmayan kuvvet vektörü
$\boldsymbol{T}$: Sembolik dönüşüm matrisi
$\boldsymbol{I}_{axa}$: Birim matris
$\boldsymbol{\Psi}_{oa}$: Ritz birim vektörü
$\hat{\boldsymbol{M}}$: Model derecesi düşürülmüş sistemin kütle matrisi
$\hat{\boldsymbol{K}}$: Model derecesi düşürülmüş sistemin katılık matrisi
$\hat{\boldsymbol{C}}$: Model derecesi düşürülmüş sistemin sönüm matrisi
$\hat{\boldsymbol{f}}$: Model derecesi düşürülmüş kuvvet matrisi

$\hat{\omega}^2$: Model derecesi düşürülmüş sistemin özdeğeri

$\hat{\boldsymbol{\Phi}}$: Model derecesi düşürülmüş sistemin özvektörü

$\boldsymbol{x}$: Yerdeğiştirme vektörü

$\dot{\boldsymbol{x}}$: Hız vektörü

$\ddot{\boldsymbol{x}}$: İvme vektörü

θ : Faz açısı

$\boldsymbol{X}(t)$: Durum uzayı vektörü

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{N}$: Durum uzayı matrisleri

q_1, q_2, q_4, q_4 : Kiriş ve çubuk eleman düğüm noktalarındaki ötelemeleri

q_5, q_6 : Kiriş eleman düğüm noktalarındaki dönmeler

$\boldsymbol{q}$: Kiriş ve çubuk elemanın yerdeğiştirme vektörü

E : Malzeme elastiklik modülü

G : Malzeme kayma modülü

A : Kesit alanı

l : Uzunluk

ρ : Yoğunluk

$s(x)$: Kiriş ve çubuk eleman eksenel yerdeğiştirmesi

$w(x)$: Kiriş ve çubuk eleman yanal yerdeğiştirmesi

SE : Kiriş ve çubuk eleman şekil değiştirme enerjisi

$\boldsymbol{K_B}$: Kiriş eleman katılık matrisi

$\boldsymbol{K_Ç}$: Çubuk eleman katılık matrisi

$\boldsymbol{K_P}$: Plak eleman katılık matrisi

KE : Kinetik enerji

$\boldsymbol{M_B}$: Kiriş eleman kütle matrisi

$\boldsymbol{M_T}$: Çubuk eleman kütle matrisi

$\boldsymbol{M_P}$: Plak eleman kütle matrisi

$\boldsymbol{q}^i$: i. elemanın sabit eksen takımına göre yerdeğiştirme vektörü

$\bar{\boldsymbol{q}}^i$: i. elemanın genel koordinatlara göre yerdeğiştirme vektörü

$\boldsymbol{S}^i$: Dönme matrisi

$\boldsymbol{K}^i$: i. elemanın sabit eksen takımına göre katılık matrisi

$\boldsymbol{M}^i$: i. elemanın sabit eksen takımına göre katılık matrisi

$\boldsymbol{SE}^i$: i. elemanın şekil değiştirme enerjisi vektörü

$\boldsymbol{KE}^i$: i. elemanın kinetik enerjisi vektörü

$\boldsymbol{z_g}$: Genel yerdeğiştirme vektörü

$\boldsymbol{\beta}^i$: Boolean dönüşüm matrisi

$\boldsymbol{K_g}$: Genelleştirilmiş katılık matrisi

$\boldsymbol{M_g}$: Genelleştirilmiş kütle matrisi

$\boldsymbol{x_k}$: Model derecesi düşürme uygulanmadan önceki sistem cevap vektörü

$\hat{\boldsymbol{x}}_k$: Model derecesi düşürme uygulanmış sistem cevap vektörü

$\boldsymbol{f_k}$: Model derecesi düşürme uygulanmadan önceki kuvvet vektörü

$\hat{\boldsymbol{f}}_k$: Model derecesi düşürme uygulanmış kuvvet vektörü

$\boldsymbol{e}_i$: i. eleman için birim vektör

Δt : Zaman aralığı

$\boldsymbol{x}_n$: Yerdeğiştirme vektörü

$\boldsymbol{v}_n$: Hız vektörü

$\boldsymbol{a}_n$: İvme vektörü

β, γ : Newmark parametreleri

$\boldsymbol{\Phi}_o$: Aktif olmayan özvektör

$\boldsymbol{\Phi}_a$: Aktif özvektör

$\boldsymbol{H}_k$: Kinetik enerji vektörü

$\boldsymbol{P}_k$: Potansiyel enerji vektörü

$\boldsymbol{T}_k$: Toplam enerji vektörü

$\hat{\boldsymbol{T}}_k$: Model derecesi düşürülmüş sistemin toplam enerji vektörü

α : Rayleigh kütle orantılı sönüm katsayısı

β : Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı

$\hat{\boldsymbol{f}}_a$: Model derecesi düşürülmüş sistemin aktif kuvvet vektörü

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ İLE YAPISAL DİNAMİK ANALİZ CEVAPLARININ SÜPER ELEMANLAR VE ALT YAPILARA BÖLME İLE İYİLEŞTİRİLMESİ

ÖZET

Bu çalışmada yapısal dinamik problemlerinin sonlu elemanlar yöntemleri ile elde edilen cevapların iyileştirilmesi incelenmiştir. Bu amaçla süpereleman ve alt yapılara bölme yaklaşımları kullanılmıştır. Geliştirilen yeni model derecesi düşürme yaklaşımları ile oldukça başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu yeni yaklaşımlarda sistem cevaplarının eşitliğini sağlayacak serbestlik derecelerinin aktif serbestlik dereceleri olarak model derecesi düşürülmüş sistemin içine taşınması temel ölçüt olarak seçilmiştir.

Hazırlanan Matlab kodları ile geliştirilen model derecesi düşürme yöntemi, düzlemsel çubuk sistemi, düzlemsel Euler-Bernoulli kiriş eleman sistemi ve plak eleman üzerinde uygulanmış ve alınan sonuçlar, orijinal modellerin cevapları ile karşılaştırılmıştır. Yine aynı kod içinde yer alan diğer model derecesi düşürme yöntemlerine –İleri Farklar, Newmark integrasyonu ve İmpuls Cevabı İnvaryantı- göre elde edilen sistem cevapları orijinal model cevabı ile karşılaştırılmıştır. Tüm bu karşılaştırmalarda sönüm durumları dikkate alınmış ve farklı model dereceleri için hesaplama zamanları ve başarımları açısından sonuçlar değerlendirilmiştir.

Orijinal model ile farklı yöntemlere göre model derecesi düşürülmüş sistemlerin frekans cevaplarının (Bode diyagramları) üzerinde karşılaştırmaları sönüm durumu dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, bu sistem frekans cevapları, çalışmada kullanılan model düşürme yöntemlerin doğrulanması için de kullanılmaktadır.

Süper eleman oluşturarak farklı analizlerde esnek bir şekilde kullanım imkanı sağlayan alt yapılara bölme (AYB)-"Substructuring" yöntemi, yapısal dinamik analizlerin cevap süresini kısaltarak hesaplama performanslarının artırılması açısından büyük katkı sağlamaktadır. Geliştirilen Matlab kodu ile düzlemsel Euler-Bernoulli kirişi ve plak sistemleri üzerinde üzerinde AYB uygulaması yapılmış, sonuçlar aynı kod içinde yer alan orijinal model cevabı ile karşılaştırılmıştır. Oluşturulan süper elemanların kullanılması ile hesaplama zamanları çok önemli ölçüde düşürülmüştür. Ancak süper eleman oluşturmaya harcanan zamanın yüksek olması nedeniyle AYB yöntemin de geliştirilen MDD yönteminden daha kötü performans gösterdiği görülmüştür.

THE IMPROVEMENT OF THE RESPONSES OBTAINED BY FINITE ELEMENT METHODS FOR THE ANALYSES OF THE STRUCTURAL DYNAMIC PROBLEMS BY SUPERELEMENTS AND SUBSTRUCTURING

SUMMARY

In this study, the improvement of the responses obtained by Finite Element Methods for the analyses of the structural dynamic problems is studied. To this end, superelement and substructuring methods are employed. With the proposed model order reduction approach, some improvements have been gained.

In the new approach, respecting the DOFs that give responses conforming with original system is assumed the main criteria at the selection of the degrees of freedom which are transferred into the reduced system as active DOFs.

Developed model order reduction method was applied to the sample structures of truss, beam and plate by using some Matlab codes and the results of the model order reduction analyses are compared with the original system response. In the same Matlab codes, responses of some other model order reduction methods –Forward differences, Newmark integration and Impulse response invariant- were also compared with the original system responses. Damping chracteristics of the systems are taken into account at all these comparisons and the results of analyses with different model orders are evaluated in terms of calculation time and performance.

Frequency responses (Bode diagrams) of the original and reduced order systems obtained by different approaches were compared with each others by respecting the damping characteristics. Also, these frequency responses are used for the verification of the model order reduction method used during the study.

Substructuring method which produces super elements and allows them to be used in different analyses with high flexibility, provides an important contribution on increasing of the accuracy of the structural dynamic analyses. With the developed Matlab code, two substructuring applications on a 2D Euler-Bernoulli beam and plate system are performed and their results are compared with the original system responses. Also, some important improvements have been gained on the reduction of the calculation times by using of the obtained superelements. Nevertheless, since the process time of the super element establishment with substructuring takes excessive time, it was observed that the substucturing exhibits a worse performance than developed model order reduction method.

1. GİRİŞ

Günümüz mühendislik uygulamalarında karşılaşılan problemlerin önemli bir kısmında analitik çözümlerin elde edilmesinde yaşanan zorluklar nedeniyle, yapısal sistemlerin analizinde de olduğu gibi, başta Sonlu Elemanlar Yöntemleri (SEY) olmak üzere çeşitli sayısal yöntemler kullanılmaktadır. SEY'de orijinal model, seçilen elemanların modelleri kullanılarak çok sayıda çözülebilir alt parçaya ayrılır ve elemanlar arasındaki bağlar düğüm noktaları (node) ile sağlanır. Problemin fiziksel modelinde ortaya konulan sınır şartları ve dış yüklemelerin düğüm noktaları yardımıyla iletildiği kabul edilir. Karşılaşılan problemin karmaşıklığı, beklenen çözüm hassasiyeti (kabul edilebilen hatanın seviyesi) ve beklenen çözüm zamanı, genellikle ele alınan sistemin eleman sayısının belirlenmesinde temel ölçütleri oluşturmaktadır. Eleman sayısının artması, düğüm noktası sayısının ve serbestlik derecesinin (SD), dolayısıyla model derecesinin artmasına neden olmaktadır. Ayrıca SEY ile yapılan analizlerin sonuçlarının analitik veya deneysel sonuçlar ile karşılaştırılması genellikle çözüm yönteminin onaylanmasını sağlamak amacıyla sıklıkla izlenen yaklaşımdır.

İzafi hareketler yapmaya müsait kütleler (parçalar) içeren sistemlerin dış etkiler altındaki davranışının incelendiği dinamik problemlerde kinetik enerji, sistemin içerdiği kütleyle, hızındaki değişimle ve zaman ile artıp azalabilir. Ayrıca sistemin elastik bileşenleri, elastik enerjiyi depolamaya müsaittir. Sisteme iş veya enerji, doğrudan kuvvet uygulanması veya ilk şartlar yoluyla girer. Öte yandan, sistemi oluşturan malzemelerin sönüm içerdiği durumlarda, bu enerjinin veya işin bir kısmının ısıya dönüşebileceği göz önünde bulundurulmalıdır.

Dinamik olarak yüklenmiş yapısal sistemin frekans ve zaman uzaylarındaki cevaplarının belirlenmesi, mühendislik uygulamalarında sıklıkla çözümüne ihtiyaç duyulan problemlerdendir. Dinamik cevabın belirlemesinde çeşitli analitik ve sayısal yöntemler bulunmasına rağmen en popüler yöntem SEY'dir. Özellikle otomobiller, uçaklar ve bunların parçaları gibi büyük ve karmaşık sistemlerin cevaplarının belirli

bir doğruluk mertebesinde alınabilmesi için SEY'de çok sayıda sonlu eleman kullanılarak model derecesinin arttırılması gerekmektedir.

Tüm bu etkiler dikkate alındığında büyük modellerin dinamik analizlerinde yüksek hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle dinamik analizlerde problem boyutları azaltılarak hesaplamalara devam etmek gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Günümüzde kullanılmakta olan temel dinamik analiz sonuçları iyileştirme yaklaşımları şu şekilde sıralanabilir [1]:

- Simetri kullanımı ile hesaplamalarda azalma sağlanması,
- Kapalı bir halka oluşturacak şekilde seçilmiş benzer elemanlardan oluşan dairesel periyodik –türbin veya kompresör kanatçıkları - yapılar kullanılarak hesaplama zamanının kısaltılması,
- Yapıya ait özdeğer denkleminin çözülmesinden önce uygulanacak farklı düzenlemeler ile yapıdaki birincil seviyede önem taşıyan serbestlik derecelerinin belirlenmesi ve bunların hesaplamalarda dikkate alınması ile hesaplamalardaki model derecesinin düşürülmesi,
- Parça modu oluşturma yaklaşımı –CMS parça modu oluşturma yöntemi- ile alt yapılara bölme (AYB) yöntemi kullanılarak veya blok oluşturulması sonucu yapıyı temsil edecek elemanın tanımlanması ve sadece bu eleman ile ilgili serbestlik decerelerinin hesaplamalarda kullanılması yoluyla model derecesinin düşürülmesi.

Bazı dinamik analiz problemlerinde ise model derecesi düşürme (MDD) yöntemlerinin kullanılması, sonuca ulaşmak için en verimli yoldur. Yukarıda sıralanan ilk iki yaklaşım özel durumlar olduklarından bu çalışmanın dışında tutulmuştur [2-4].

Model derecesi düşürme ve alt yapılara bölme yöntemleri ise literatürde halen üzerinde sıklıkla çalışılan ve iyileştirme imkanlarının yüksek olduğu yaklaşımlar içermektedir. Bazı dinamik analiz problemlerinde ise model derecesi düşürme (MDD) yöntemlerinin veya AYB yönteminin kullanılması, sonuca ulaşmak için verimli tek çözüm yolu olarak görüldüğü için, yukarıda yer alan son iki yaklaşım bu çalışmanın temel konuları olarak seçilmiştir [2,4].

Yapısal dinamik problemlerinde çözümün elde edilmesi ve iyileştirilmesi, seçilen iyileştirme yöntemine doğrudan bağlıdır. Literatürde bulunan pek çok çalışma birbirinin devamı durumunda olup sistemin özelliklerine (SD, frekans aralığı v.b.) bağlı olarak değişik doğrulukta sonuç vermektedir [2-4].

Gaz türbini gibi yüksek çalışma frekanslarına sahip yapısal sistemlerin dinamik analizinde elde edilen sonuçların doğruluğu kadar, ihtiyaç duyulan hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanının da optimize edilmesi yoluyla da cevapların iyileştirilmesi, günümüz endüstriyel rekabet şartlarında kaçınılmaz bir gerekliliktir. Boeing şirketinin SE ortamında oluşturduğu rotor modeli üzerinde yüksek hızda çalışan hafif malzemelerden üretilen motor disklerinin tasarımının optimize edilmesi amacıyla modal analiz, geçici rejim analizi ve sönüm denemeleri çalışmaları yapmaktadır. NASTRAN ortamında yapılan bu çalışmalar havacılık sanayisindeki rekabetin doğal bir sonucu olarak görülmektedir [5]. Benzer bir çalışma da MIT'den K. Willcox tarafından yapılmış ve gaz türbini motorlarının disklerine bağlanmış kompresör ve türbin kanatçıklarının hem yapısal hem de aerodinamik analizlerinin doğru sonuçlar vermesini sağlayacak MDD yöntemlerinin sonuçları irdelenmiştir [6].

Görüldüğü gibi ileri teknoloji içeren endüstrilerde değişik yapısal dinamik sistemlerin analizlerinde iyileştirilme yapılması kaçınılmaz bir gerekliliktir. Bu çalışmada ayrık eşdeğerlik prensibi kullanılarak zaman uzayında elde edilecek MDD uygulanmış eşdeğer sistemlerin bulunması yoluyla iyileştirmesi ve bu yeni indirgenmiş sistemlerin cevaplarının incelenmesi amacıyla iki ayrı yaklaşım geliştirilmiştir.

Bunlardan ilki "Toplam enerjilerin denkliği" olup, sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplandığında elde edilen toplam enerji değerinin orijinal model ve indirgenmiş sistemde aynı olmasını sağlayacak şekilde MDD uygulamasını sağlayan bir yaklaşımdır. Çalışmada geliştirilen diğer yöntem ise, "Özdeğer Probleminin Çözümü" ifadesinin orijinal model ve indirgenmiş sistem için değerlendirilmesine dayanmaktadır. Her iki yaklaşımda da eşdeğer sistem yaklaşımı kullanılarak sırasıyla toplam enerji hatalarının ve modal analiz sonuçlarındaki sapmaların en düşük seviyede olacağı sistem dönüşüm formülasyonu ve sonlu elemanlar yöntemleri ile elde edilen sistem matrisleri, $\boldsymbol{M}$ ve $\boldsymbol{K}$ için düzeltme algoritmaları veya terimleri geliştirilmiştir.

Çalışmada geliştirilen MDD yöntemleri, çubuk, kiriş ve plak elemanlardan oluşturulan farklı sistemler üzerinde uygulanmıştır. Hazırlanan Matlab kodu ile yeni yaklaşımların cevabının orijinal sistem cevabından ve literatürde bulunan MDD yöntemlerinden üstünlüğü incelenmiştir. Yapılan karşılaştırmalarda farklı sönüm değerleri için sistem cevapları, sistem enerji seviyeleri, hesaplama süreleri ve Bode diyagramları kullanılmıştır. Tüm karşılaştırma ölçütlerine göre bu çalışmada geliştirilmiş MDD yönteminin başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür. Elde edilen sonuçlar ve MDD uygulanmış sistem cevapları arasındaki benzerlikler ve farklılıklar yorumlanmıştır.

Benzer bir alt çalışma AYB yaklaşımı için yapılmış, kiriş ve plak elamanlardan oluşturulan iki farklı yapı üzerinde uygulamalar yapılmıştır. Hazırlanan Matlab kodları ile geliştirilen yaklaşımın cevapları, orijinal sistemin cevapları ile karşılaştırılmıştır. Orijinal modelin model derecesinden AYB uygulanarak elde edilen indirgenmiş sistemlerin model dereceleri, oldukça azaltılmış aynı zamanda AYB ile elde edilen süper elemanların kullanımları ile hesaplama zamanında iyileştirme sağlandığı tespit edilmiştir. Ancak süper eleman oluşturmaya harcanan zamanın yüksek olması nedeniyle AYB yöntemin de geliştirilen MDD yönteminden daha kötü performans gösterdiği görülmüştür.

Tüm SEY analizlerinde Microsoft Windows XP işletim sistemi ile çalıştırılan 2.01 GHz hızındaki AMD Athlon 64 3200+ işlemci ve 2.0 Gb RAM içeren bir bilgisayardan ve Matlab programının da 5.2.0 versiyonundan yararlanılmıştır.

1.1 Literatür Araştırması

Yapısal dinamik analiz problemlerinin çözümlerinin beklenen doğruluk derecesinde ve kısa hesaplama zamanında elde edilmesini sağlamak amacıyla geliştirilen farklı iyileştirme yaklaşımları literatürde yer almakta olup, bunlar genel olarak sistemin serbestlik derecelerinin arasından seçilenlerin dikkate alınmamasına dayanan temel MDD yaklaşımlarını ve sistemin ayrı olarak hesaplama matrisleri belli olan alt yapıları kullanmasına dayanan AYB yaklaşımlarını ele almaktadırlar. Çoğunlukla, katılık ve kütle matrislerinin derecelerinin düşürülmesi ile uygulanan MDD yöntemleri, MDD sonrasında elde kalan SD dikkate alındığında üç grupta incelenebilir.

MDD yöntemlerinin ilk grubu fiziksel koordinat sayılarının doğrudan düşürülmesi esasına dayanmaktadır [7-14]. Bu yöntemler, orijinal SEY modelinden seçilen bazı fiziksel koordinatların korunması ve diğer kısmının ise göz ardı edilmesine göre MDD uygulanmış sistemi oluşturur. Bu nedenle sonuçların doğruluk derecesi, yapılan seçimden çok fazla etkilenmektedir.

İkinci bir grup yöntem ise denklemlerin modlara ayrıştırılması esasına dayanan ve doğruluk derecesi daha iyi olan modal yöntemlerdir [15,16]. Ancak bu yöntemlerin kullanıldığı analizlerde çok sayıda moda ihtiyaç duyulması halinde hesaplama maliyeti artmaktadır. Ayrıca elde edilecek sonuçların doğruluğu dikkate alınan mod sayısı ile doğrudan ilgili olduğu için, yine yapılacak mod seçiminden çok fazla etkileneceği görülmektedir. Bu gruptaki yöntemlerin sakıncalarını ortadan kaldırmak için "quasi-static compansation" (QSC) yöntemi geliştirilmiştir [17-21]. Bu yöntem ile hesaplanan modların hesaplama hassasiyetinin Balmes'in [22] nolu kaynakta yer alan çalışmasına uygun olarak gözden geçirilmesi MDD uygulanmış sistemin doğruluğu hakkında önemli fikirler vermektedir.

Üçüncü bir grup yöntem, mod ayrıştırılması esasına alternatif olarak geliştirilen Ritz vektör yöntemleri olup genel olarak özdeğer problemlerinin çözümüne ihtiyaç göstermeden ve iyi seçilmemiş özvektörlerin olması durumunda da yeterli doğruluğun elde edilmesine imkan sağlayan yaklaşımlar içermektedir [23-33]. Çünkü bu yöntemlerde daha genel tanımlara sahip Ritz vektörleri, özvektörlerinin yerine kullanılmaktadır.

AYB yaklaşımlarında ise daha çok bölünecek alt yapıların seçimi, her bir alt yapı için hesaplama matrislerinin oluşturma yöntemleri ve bu hesaplama matrislerinin sistemi tam olarak ifade edecek şekilde birleştirilmesi konularında farklı çalışmalar bulunmaktadır [34-44].

MDD ve AYB kapsamında ele alınan tüm yöntemler içerdikleri avantaj ve dezavantajları ile birlikte değerlendirildiğinde, uygulamadaki başarıları göreceli olarak karmaşık sistemlerin analizlerinde gösterdikleri performans ile ölçülmektedir.

1.1.1 Fiziksel koordinatların miktarlarının düşürülmesi esasına dayanan MDD yöntemleri

Çok sayıda MDD yönteminin türetildiği bu gruptaki yöntemler, ilk geliştirilmiş yöntemleri içermekte olup halen yaygın olarak kullanılmaya devam edilmektedir [7-

14]. En temel MDD yöntemi olan bu yöntemde, seçilen SD'lerin etkisi ile oluşturulan dönüşüm matrisi, reel, sönümsüz ve doğrusal bir orijinal modeli MDD uygulanmış hale dönüştürmek için kullanılmaktadır.

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{1.1}$$

Burada $\boldsymbol{M}$ ve $\boldsymbol{K}$ nxn boyutlarındaki kütle ve katılık matrislerini temsil etmekte olup n boyutundaki $\ddot{\boldsymbol{d}}$ ve $\boldsymbol{d}$ vektörleri sırası ile zamana bağlı ivme ve yerdeğiştirme vektörlerini, $\boldsymbol{f}$ vektörü ise zamana bağlı yükleme vektörünü göstermektedir. Bu sistemin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{1.2}$$

Burada ω^2 orijinal modelin özdeğerleri ve $\boldsymbol{\Phi}$ ise sistemin özvektör matrisidir. Bu şekilde belirtilen orijinal model SD'leri ikiye ayrılarak MDD uygulanması için ilk adım atılmış olur. MDD uygulanmış sistemde tutulmak istenen SD'ler, aktif SD'ler olarak adlandırılır ve bundan sonraki ifadeler içinde "a" indisi ile temsil edilecektir. Orijinal modelde dikkate alınmayan SD'ler (omitted) ise aşağıdaki ifadelerde "o" indisi ile yer almaktadır.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{aa} & \boldsymbol{M}_{ao} \\ \boldsymbol{M}_{oa} & \boldsymbol{M}_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{d}}_a \\ \ddot{\boldsymbol{d}}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ao} \\ \boldsymbol{K}_{oa} & \boldsymbol{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_a \\ \boldsymbol{d}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{f}_o \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

Fiziksel koordinatların sayılarının düşürülmesi esasına dayanan MDD yöntemlerinde orijinal modelden MDD uygulanmış sisteme geçiş için her iki sistemdeki yerdeğiştirme vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı yazılır.

$$\boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_a \\ \boldsymbol{d}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{I}_{aa} \\ \boldsymbol{\Psi}_{oa} \end{Bmatrix} \boldsymbol{d}_a = \boldsymbol{T}\boldsymbol{d}_a \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{I}_{aa}$, axa boyutunda birim matris, $\boldsymbol{\Psi}_{oa}$ matrisi $\boldsymbol{d}_a$ ve $\boldsymbol{d}_o$ arasındaki MDD matrisi ve $\boldsymbol{T}$ ise dönüşüm matrisidir. MDD uygulanmış sistemin kütle ve katılık matrisleri ile yükleme vektörleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir [45].

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{T} \tag{1.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{T} \tag{1.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{f} \tag{1.7}$$

Böylece MDD uygulanmış sistemin denklemi şu şekilde ifade edilebilir,

$$\hat{\boldsymbol{M}}\ddot{\boldsymbol{d}}_a + \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{d}_a = \boldsymbol{f}_a \tag{1.8}$$

MDD uygulanmış sistemin karakteristik denklemi ise

$$(\hat{\boldsymbol{K}} - \hat{\omega}^2 \hat{\boldsymbol{M}})\hat{\boldsymbol{\Phi}} = 0 \tag{1.9}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\boldsymbol{T}$ dönüşüm matrisi, kolonları orijinal modelin modlarına yakınsama sağlayacak şekilde oluşturulur. Farklı MDD yöntemlerinde farklı dönüşüm matrisleri kullanılmaktadır.

Aktif SD kullanan yöntemler orijinal modelin özvektör çözümüne ihtiyaç göstermemeleri nedeniyle hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanı açısından avantajlıdır. Ayrıca dinamik yoğunlaşma (dynamic condensation) yöntemleri belirli frekans aralıklarında kesin sonuçlar verebilmektedirler. Ancak sadece fiziksel koordinatlar dikkate alınarak yapılan MDD yöntemlerinde fiziksel koordinatların seçimi analizlerin doğruluğunu etkilemektedir. Genel olarak aşağıda verilmekte olan dört tip MDD yöntemi bu grubu oluşturmaktadır.

1.1.1.1 Guyan/Irons MDD yöntemi

En basit ve en sık kullanılan MDD yöntemi olup [10,11] kütle matrisi dikkate alınmadan sadece katılık matrisindeki aktif SD'lerden MDD dönüşüm matrisi elde edilmektedir. Bu nedenle kütle/katılık oranının yüksek olduğu sistemlerde veya kötü seçilen aktif SD'ler nedeniyle doğruluk yeterli düzeye ulaşamamaktadır. Ancak hesaplama verimliliği ve kolay uygulanabilir olması nedeniyle halen pek çok ticari Sonlu Eleman Analiz programı bu yaklaşımı kullanmaktadır. Bu yöntemin statik sistemler üzerinde ve ideal olarak sıfır frekans değeri için, uygun doğrulukta sonuç verdiği ve artan giriş frekansına bağlı olarak sonuç doğruluğunun düştüğü bilinmektedir.

1.1.1.2 Geliştirilmiş indirgenmiş sistem yöntemi (GİSY)

O'Callahan [14] tarafından geliştirilen kütlesel etkinin Guyan/Irons yöntemine dahil edilmesi ile elde edilen bu yöntemin doğruluk derecesi daha fazladır. Uygulanması zor olmayan bu yöntem, düşük rezonans frekanslarının bulunmasında Guyan/Irons yönteminden daha etkilidir. Dikkate alınmayan SD'lerin özdeğerleri aktif SD'lere yaklaştıkça doğrulukta belirgin bir azalma görülmektedir. Yöntemin ilave hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanına ihtiyaç göstermesi nedeniyle geniş bir kullanımı bulunmamaktadır.

1.1.1.3 Tekrarlı (iteratif) geliştirilmiş indirgenmiş sistem yöntemi (TGİSY)

Bu yöntem, Geliştirilmiş İndirgenmiş Sistem Yöntemi'nin geliştirilmiş halidir. Blair ile arkadaşlarının [7] nolu kaynakta ve Frishwell ve arkadaşlarının [9] nolu kaynakta belirttiği gibi kütle matrisinin etkisi dikkate alınarak oluşturulan dönüşüm matrisi nedeniyle klasik Guyan/Irons yönteminden daha doğru sonuçlar beklenen bu yöntemde, özdeğer sisteminin belirli bir yakınsama kriterini sağlamasına kadar tekrarlı olarak kütle ve katılık matrisleri yenilenmektedir. Gerçekleştirilen tekrarlar sonrasında bazı durumlarda yakınsama sağlanabilmesi mümkün olamamaktadır. Bu nedenle aktif SD'lerin seçimi bu yöntemin sonucuna önemli ölçüde etki etmektedir [46].

1.1.1.4 Dinamik yoğunlaşma (Dynamic condensation) yöntemi

Dinamik etkileri dahil edebilmek için Orijinal modelin yükleme frekansı dikkate alınarak MDD sistemi oluşturulur [2]. Dinamik yoğunlaşma yöntemde genel olarak MDD uygulanan sistemin doğal frekansları, orijinal modelin düşük doğal frekanslarına yakınsamaktadır. Kütlesel etkilerin ve yükleme frekansının hesaba katılarak dönüşüm matrisinin oluşturulması bu yöntemin üstün taraflarıdır. Öte yandan hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanı ihtiyacı göstermesi ve sonuçlardaki doğruluğun aktif SD seçimine çok bağlı olması gibi temel bazı dezavantajlar da içermektedirler [2].

1.1.2 Mod ayrıştırması ile uygulanan MDD yöntemleri

Mod Ayrıştırması yöntemleri, karmaşık sistemlere de kolayca uygulanabilmesi ve hesaplama yöntemlerine çok uyumlu olması nedeniyle yaygın olarak tercih edilmiş olup ticari paket programlarda da uygulama seçeneği olarak sunulmaktadır [15,16].

Mod yerdeğiştirme yöntemi ve mod ivmeleme yöntemi olmak üzere iki türevi uzun zamandır dinamik analizlerin çözümlerinde kullanılmaktadır. Cevabın tahmin edilmesi için ilk bir kaç normal modun kullanılması ile mod yerdeğiştirme yöntemi, hassas yerdeğiştirme cevapları verebilmektedir, ancak yüksek frekans modlarının kesilmesinin etkisi ile gerilme sonuçları kabul edilemez mertebelerde olabilmektedir [17-21]. Öte yandan, mod ivmeleme yöntemi, yüksek frekans modlarının ihmal edildiği durumlarda ortaya çıkan uygun olmayan sonuçların düzeltilmesinde kullanılabilmektedir. Yükleme frekansının nispeten düşük olduğu durumlarda, yüksek frekans modlarının etkisine statik bir analiz yürütülerek yaklaşılabilir. Böylece yüksek frekansların kesilmesinden kaynaklanan hatalar, mod ivmeleme yöntemindeki statik dengeleme (compensation) yardımıyla düzeltilir [47]. Ancak, orta ve yüksek frekans bölgelerindeki problemlerde, ilgilenilen frekans bölgesinden daha düşük frekansların ihmal edilmesi de hesaplama açısından avantajlı bir durum ortaya çıkarmaktadır. Çok sayıda mod kullanılması istenilirse, mod ayrıştırması yöntemi avantajını kaybetmektedir. Bu durumlarda mod ivmeleme yöntemi, mod yerdeğiştirme yönteminden daha kötü sonuçlar vermektedir [2].

Son zamanlarda, quasi-static dengeleme (compensation) QSM adıyla yeni bir mod ayrıştırma yöntemi geliştirilerek bu etkinin üstesinden gelinmeye çalışılmıştır. QSM'de yüksek ve düşük frekans normal modlarının kesilmesinin etkileri dengelendiği için önceki yöntemlerden daha gelişmiş bir yaklaşımdır [45]. Quasi-static compansation yöntemi statik kısıtlı modlar yerine, ihmal edilen modların (truncated modes) atalet etkilerini yakalamak için kullanılır. Bu yöntem, düşük ve yüksek frekans modlarının dahil edilmediği orta frekans aralığındaki analizlerde de kabul edilebilir sonuçlar vermektedir. Bu yöntemde ayar parametresi olarak dikkate alınan merkezleme frekansı, quasi-static modların dinamik aralığını kontrol etmektedir.

1.1.3 Ritz vektörü yöntemlerinin kullanılması ile uygulanan MDD yöntemleri

Ritz vektörü yöntemleri, standart mod ayrıştırma yöntemleri ile rekabet edebilecek bir alternatif olarak geliştirildi [23-33]. Uygulanan yükleme biliniyorsa, uygun şekilde seçilen Ritz vektörü, hesaplaması zor olan özdeğer problemini ortadan kaldırmak yanında, kesin özvektörlerin en iyi seçenek olmadığı durumlardaki hassasiyeti de arttırır. Bu yüzden, Ritz vektörü yöntemleri, -kesin özvektörlerin

yerine daha genelleştirilmiş Ritz vektörlerinin kullanıldığı- genelleştirilmiş bir mod ayrıştırma yaklaşımı olarak kabul edilebilir. Ritz vektörü yöntemleri en uygun olan frekans dilimi düşük frekanslar olup, orta ve yüksek frekans problemlerinde yüksek sayıda iterasyon gerekliliği artmakta ve yöntemin verimliliği, çözüm hassasiyeti ve kararlılığı azalmaktadır [32,33].

Yüksek sayıda serbestlik derecesi içeren veya ayrı gruplar olarak tasarlanan ve analiz edilen parçalara sahip yapısal sistemler için diğer geliştirilmiş bir parça modu oluşturma yöntemi -CMS (component mode synthesis)-, verimli bir yaklaşım olarak ön plana çıkmaktadır. Bu yöntemde yüksek karmaşıklıktaki yapılar ayrı parça modelleri olarak ele alınmaktadır.

1.1.4 Parça modu oluşturma ve AYB yaklaşımları ile uygulanan MDD yöntemleri

AYB yaklaşımlarında ise daha çok bölünecek alt yapıların seçimi, her bir alt yapı için hesaplama matrislerinin oluşturma yöntemleri ve bu hesaplama matrislerinin sistemi tam olarak ifade edecek şekilde birleştirilmesi konularında farklı çalışmalar bulunmaktadır [34-44].

Ayrıca mevcut sistemin her biri sonlu elemanlar ile modellenen parçalara ve alt sistemlere ayrılması esasına dayanan bu yöntemde modların dönüşümü ile SD'lerin sayısı düşürülür. Bu yöntemde karmaşık yüksek model derecesine sahip sistemin çok sayıda alt parçaya bölünmesi ilk adımı oluşturmaktadır. Ardından bir Ritz vektörleri grubu ile her bir parçanın modellenmesi gerçekleştirilir ve orijinal modelin her bir alt parçasının fiziksel koordinatları, MDD uygulanmış fiziksel ve modal koordinatları olarak tanımlanır. Ayrılmış her bir parçanın koordinatlarının global koordinatlar ile birleştirilmesi sonrasında yapı analize hazır hale gelir. Birleştirilmiş yapı üzerinden yapılan analiz sonrasında gerekli veriler daha detaylı olarak incelenebilmektedir.

Yukarıda bahsedilen temel MDD yöntemlerinin yanında bu temel yöntemler ile birlikte uygulanan farklı yaklaşımlar da literatürde yer almaktadır.

Uygulanan MDD yönteminin verimliliğinin değerlendirilmesi ve uygun olmayan sonuç mertebelerinin incelenmesi ve gerekli düzeltmelerin gerçekleştirilmesinin yanı

sıra literatürde ilgili MDD yönteminin hesaplama maliyeti ve hassasiyeti de ayrıca değerlendirilmektedir [48,49].

Son yıllarda özellikle parametrik tasarımlı dinamik sistemlerin sıcaklık ve frekansa bağlı davranış gösteren malzemeler ile analizi konusunda Balmes'in yaptığı çalışmalarda model düşürme yöntemlerinin önemli bir düzeyde basitleştirme getirdiği görülmektedir [50].

Dinamik özellikleri frekansa bağlı olarak değişen viskoelastik malzemelerden oluşturulan yapıların MDD yöntemleri ile analizlerinin sonuçlarının değerlendirildiği Germes ve Plouin tarafından farklı iki çalışma yapılmıştır [51,52].

Yine Balmes'in Corus ve Sieget ile yaptığı ortak çalışmada sıcaklık etkisinin dinamik modellemeye yansıtılması ve alınacak sistem cevabı üzerindeki etkilerinin görülmesi açısından model derecesi düşürme yöntemlerinin yakın gelecekte yoğun olarak kullanılacak konulardan birisi olacağına işaret etmektedir [53].

Son yıllarda üzerinde çalışmakta olan diğer bir konuda model derecesi düşürmede otomatik yöntemlerin kullanılabilmesidir. Bu konuda [54] nolu kaynakta yer alan Greiner ve arkadaşlarının çalışması, geliştirilen otomatik model düşürme yönteminin harmonik ve geçici rejim analizlerinde çok başarılı sonuçlar verdiğini belirtmektedir.

Rudnyi ve Korvink'in [55,56] nolu kaynaklarda belirtildiği gibi yüksek karmaşıklığa sahip modellerin basitleştirilmesi için model derecesi düşürme yöntemlerinin yanında ANSYS'den de yararlanıldığı görülmektedir. Kendileri, farklı tipteki MDD yöntemlerinin ANSYS içinde uygulanabilmesini sağlayabilmek amacıyla bir yazılım geliştirmişlerdir [57].

Son zamanlarda yapılan MDD yöntemleri içeren çalışmalarda, seçilen model üzerinde gerçekleştirilen fiziksel deneylerin sonuçlarının değerlendirilmesi de önemli bir yer tutmaktadır [58]. MDD yöntemleri ile bulunan sonuçların doğrulamasının yapılmasını amaçlayan bu deneyler, ivmeölçer, yerdeğişimi ölçer ve benzeri algılıyıcıların, veri toplama ve işleme ünitelerini ile birlikte hızla gelişmesi sayesinde son zamanlarda yoğunluk kazanmıştır. Deney sonuçlarının seçilen MDD yöntemleri ile yapılan analiz sonuçları ile karşılaştırmaların ardından yapılan değerlendirme, ilgili MDD yönteminin geliştirilmesi amacıyla geri besleme olarak alınmaktadır [10,36,58,59]. Aynı durumda AYB ile uygulanan model derecesi düşürme yöntemleri modellenmiş sistemlerin deneysel sonuçlarının kullanımları için de

geçerlidir [60]. Ayrıca aynı yaklaşımlar ile gerçekleştirilen deneylerin sonuçlarının yapısal sistemin modelinin güncellenmesi amacıyla da kullanılması mümkündür [10,61].

Literatürde mekatronik sistemlerde kullanılmakta olan kontrol sistemlerinin model derecelerinin düşürülmesi için kullanılmakta olan yöntemlerin dinamik analizlerde kullanılmakta olanlar ile aynı oldukları görülmektedir. Böylece, geliştirilen yeni bir MDD yönteminin sonuçlarının deneysel çalışmalar ile doğrulanması, seçilen bir mekatronik kontrol sisteminin kullanılması ile mümkün olmaktadır [62].

1.2 Literatür Araştırmasının Değerlendirilmesi

Son yıllarda yapılan analizde kullanılmakta olan model karmaşıklığının artması nedeniyle hızlı analiz yapma ihtiyacının giderek arttığı görülmektedir. Bu talebin karşılanabilmesi için de özellikle yapısal dinamik analizlerde farklı yaklaşımların geliştirilmesi, bu yapılırken de alınacak cevabın beklenen hassasiyette olmasını sağlamak gerekmektedir. [48,63,64]

Literatürde temel yaklaşımların yanı sıra sıcaklık, sönüm ve malzeme özelliklerinin de dikkate alındığı dinamik analizlerin de gerçekleştirilebileceği yöntemlerin geliştirilmekte olduğu tespit edilmiştir.

Görüldüğü gibi yapısal dinamik problemlerin SEY analizlerinde iyileştirilme elde edilebilmesi için yapılan çalışmalar ile çok farklı yöntemlerin önerilmesine devam edilmektedir. Literatürde 1950'lerde başladığı görülen çalışmalar son zamanlarda oldukça çoğalmıştır. Son zamanlarda yapılan çalışmaların daha çok CMS yaklaşımının türevleri ve AYB ağırlıklı olduğu görülmektedir [58].

Yapılan çalışmada gerçekleştirilen yeni MDD yöntemleri, literatürde önemli yer tutan temel yöntemler ile kaynaklar kullanılarak karşılaştırılmış ve sonuçları literatürdekilere benzer şekilde çalışmanın içinde toplanmıştır. Geliştirilen yeni MDD yöntemlerinin literatürde yer alan ve yine çalışma içinde gerçekleştirilen AYB uygulamalarından üstün olan tarafları ilerleyen bölümlerde ele alınmıştır.

1.3 Amaç ve İçerik

Bu çalışmada ayrık eşdeğerlik prensibi kullanılarak zaman uzayında elde edilecek MDD uygulanmış eşdeğer sistemlerin bulunması yoluyla iyileştirmesi ve bu yeni

indirgenmiş sistemlerin cevaplarının incelenmesi amacıyla iki ayrı yaklaşım geliştirilmiştir.

Bunlardan ilki "Toplam enerjilerin denkliği" olup, sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplandığında elde edilen toplam enerji değerinin orijinal model ve indirgenmiş sistemde aynı olmasını sağlayacak şekilde MDD uygulamasını sağlayan bir yaklaşımdır. Çalışmada geliştirilen diğer yöntem ise, "Özdeğer Probleminin Çözümü" ifadesinin orijinal model ve indirgenmiş sistem için değerlendirilmesine dayanmaktadır. Her iki yaklaşımda da eşdeğer sistem yaklaşımı kullanılarak sırasıyla toplam enerji hatalarının ve modal analiz sonuçlarındaki sapmaların en düşük seviyede olacağı sistem dönüşüm formülasyonu ve sonlu elemanlar yöntemleri ile elde edilen sistem matrisleri, $\boldsymbol{M}$ ve $\boldsymbol{K}$ için düzeltme algoritmaları veya terimleri geliştirilmiştir.

Çalışmada geliştirilen MDD yöntemleri, çubuk, kiriş ve plak elemanlardan oluşturulan farklı sistemler üzerinde uygulanmıştır. Hazırlanan Matlab kodu ile yeni yaklaşımların cevabının orijinal sistem cevabından ve literatürde bulunan MDD yöntemlerinden üstünlüğü incelenmiştir. Yapılan karşılaştırmalarda farklı sönüm değerleri için sistem cevapları, sistem enerji seviyeleri, hesaplama süreleri ve Bode diyagramları kullanılmıştır. Tüm karşılaştırma ölçütlerine göre bu çalışmada geliştirilmiş MDD yönteminin başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür. Yapılan analizleri doğrulamak için, uygulamalardaki sistemlerin yapısal dinamik analizlerin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılmakta olan ticari kodlardan ANSYS'de analizi yapılması amaçlanmıştır. Ancak ANSYS'den alınan sonuçların sönüm değişimlerinden çok etkilenmesi ve nispeten daha basit yöntemlerden biri olan Guyan/Irons metodu ile dinamik analiz yapması nedeniyle güvenilir olmayan sonuçlar alınması dolayısıyla çubuk sistem dışında ANSYS sonuçlarına çalışma içinde yer verilmemiştir. Farklı yöntemlerden elde edilen sistem cevaplarının doğrulamak için Bode diyagramlarının uyumu temel ölçüt olarak alınmıştır.

MDD yöntemlerinin en ciddi alternatifi olan AYB yöntemi de çalışma içinde incelenmiş, farklı eleman sayısında ve farklı sönüm durumları için kiriş ve plak sistemleri için uygulamalar gerçekleştirilmiş, sonuçlar orijinal modeller ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalarda dikkat çeken ilk husus, kiriş sistemi için AYB ile oluşturulmuş süper eleman kullanımının hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmasıdır. Bu durum AYB'nin avantajlı noktasını açık bir şekilde

göstermektedir. Ancak, süper eleman oluşturmak için harcanan zamanın herhangi bir MDD uygulanmamış kiriş sistemi analizinden daha uzun olması nedeniyle, geliştirilen MDD yöntemlerinden daha iyi bir başarı gösterememiştir. Ayrıca bu durum, AYB uygulamalarında eleman seçimlerinin, tekrarlanacak analiz iterasyonlarında düzeltme yapılmadan kullanımını sağlayacak şekilde seçilmesi kaçınılmaz bir gereklilik olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmanın özgün katkıları şu şekilde özetlenebilir: Geliştirilen toplam enerjilerin denkliği ve özdeğer probleminin çözümü MDD yöntemlerinin performanslarının sönüm ve zamana bağlı değişimleri farklı şekillerde olan (örneğin, impuls, basamak ve sinüs bileşenleri) yüklemelere göre incelenmiştir. Tüm bu incelemelerde geliştirilen yöntemler, literatürde var olan IRI, Newmark, İleri farklar yöntemleri ile elde edilen indirgenmiş sistem cevapları ile ve orijinal model cevapları ile karşılaştırılmış, uyumluluğu araştırılmıştır. Bunu sonucunda şu sonuçlara varılmıştır: Özdeğer probleminin çözümü yöntemi Toplam Enerjilerin denkliği yöntemi ile aynı sonuçları vermektedir. Sönüm azaldıkça ve kuvvetin zamanla değişimi hızlandıkça doğruluk azalmaktadır. Ayrıca, toplam enerjilerin denkliği yönteminin uygulanan tüm eleman tiplerinde orijinal model cevaplarına uyumlu sistem cevabı verdiği görülmüştür. Ayrıca, incelenen MDD yöntemlerinin alt yapılara bölme-AYB algoritmalarına göre daha uygun zamanda hesaplama sonucu verdikleri gözlemlenmiştir. Ancak, AYB ile oluşturulan süper elemanların analizler içinde kullanılmasının MDD'den daha kısa sürede sonuç alınmasını sağladığı tespit edilmiştir. Sonuçların doğruluğunun eleman sayısındaki çoğalma ile arttığı görülmüştür. Ayrıca, frekans cevaplarının karşılaştırılması sonucu çalışma içinde geliştirilen MDD yöntemlerinin en uyumlu sonuçları verdiği görülmüştür. Sonuç olarak, incelenen yaklaşımların başarılı oldukları görülmüştür.

Çalışmanın ilk bölümünde yapısal dinamik problemlerin SEY analiz çözümlerinde kullanılan yöntemler, analizlerdeki iyileştirme gereklilikleri ve bu çalışmada geliştirilen yöntemler kısaca özetlenerek giriş bilgileri sunulmuştur. Ardından literatürde yer alan MDD ve AYB yöntemlerinin kısaca tanıtıldığı literatür araştırması ve bu araştırmanın değerlendirildiği alt bölümlere yer verilmiştir. İkinci bölümde ele alınan sistemin dinamik davranışı hakkında temel bilgiler özetlenmiştir. Yapısal dinamik sistemlerin analizinde yararlanılan "Durum Uzayı" yaklaşımı tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde geliştirilen MDD yöntemlerinin uygulamalarında kullanılacak eleman tipleri için katılık ile kütle matrislerinin elde edilmesi ve özellikleri özetlenmiştir. Yapısal dinamik analizlerdeki Rayleigh sönüm bağıntıları ve sönüm matrisi elde edilmesi için kullanılan yaklaşımlar kısaca özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde zaman uzayında uygulanan MDD yöntemlerinin içerdiği katılık, kütle ve sönüm matrisleri için temel kabuller açıklanmıştır.

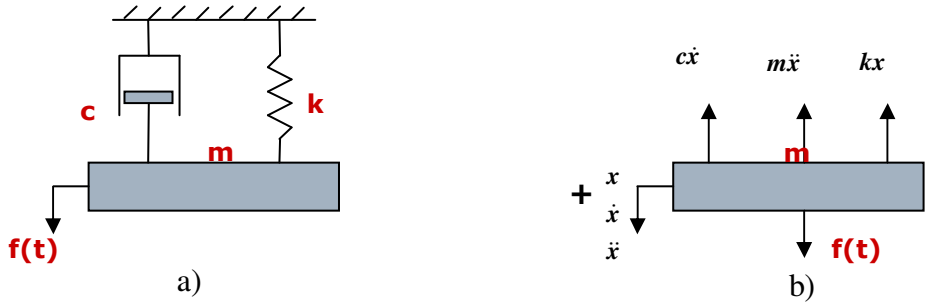
Beşinci bölümde enerji denklemleri kullanılarak yeni bir MDD yaklaşımı oluşturulmuştur. Geliştirilen MDD yöntemlerinin uygulandığı çubuk, kiriş ve plak sistemlerinin sistem cevaplarının literatürde var olan IRI, Newmark, İleri farklar yöntemlerinin verdiği sistem cevapları ile karşılaştırılması amacıyla bir Matlab kodu hazırlanmıştır. Aynı kodun içinde MDD uygulanacak serbestlik derecelerinin seçimi için farklı ölçütler denenmiş, farklı algoritmalar kullanılmıştır. Ayrıca, alınan sonuçlara göre yöntemler arasındaki hesaplama zamanları farkları değişik sönüm değerleri için incelenmiştir. İncelenen MDD yöntemlerinin uygulandığı sistem frekans cevapları, Bode diyagramlarında gözlenmiş ve orijinal model cevabı ile karşılaştırılmıştır. Bu bölümde yöntemlerin MDD uygulanmış sistem enerji seviyesi ile orijinal modelin enerji seviyesi değerleri karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde MDD yöntemleri için verdiği sonuçlar açısından yeterli verimlilikte olan AYB yaklaşımı tartışılmış, getirdiği önemli katkılar açıklanmıştır. Örnek uygulama olarak seçilen düzlemsel kiriş ve plak elemanlardan oluşan yapısal sistemler üzerinde süper elemanlar oluşturulmuştur. Süper elemanlar daha sonra orijinal model içinde uygun olan geometriye yerleştirilerek analiz tamamlanmıştır. Bulunan sistem cevabı ardından yapılan orijinal model analiz sonuçları ile karşılaştırılmış, sönüm durumu ile sistem cevabı arasındaki ilişki değerlendirilmiştir. Bulunan hesaplama zamanları, MDD uygulamalarında bulunan hesaplama zamanları ile kıyaslanmıştır. Yedinci bölümde çalışmada elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. YAPISAL DİNAMİK SİSTEMLER

2.1 Dinamik Sistemlerin Davranışı

Dinamik davranışı incelenecek sistem olarak bir kütle, yay, sönüm elemanı sistemi ele alınırsa, sistemin yüklenmiş hali ve serbest cisim diyagramı Şekil 2.1'deki gibi elde edilir [22,65].



Şekil 2.1 : Kütle, yay, sönüm elemanı sistemi: a) Fiziksel sistem, b) Serbest cisim diyagramı.

Uygulanan $f(t)$ kuvvetine karşılık sistem cevabı x yerdeğiştirme, $\dot{x}$ hız ve $\ddot{x}$ ivme olmak üzere aşağıdaki denge denkleminden elde edilmektedir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{2.1}$$

Dinamik sistemin modal analizi için sönüm değeri ihmal edilir ise,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.2}$$

Yerdeğiştirme ifadesi

$$x = \Phi \sin(\omega t + \theta) \tag{2.3}$$

olarak alınırsa, modal analiz denklemi

$$-\omega^2 \Phi \sin(\omega t + \theta) + \frac{k}{m} \Phi \sin(\omega t + \theta) = 0 \qquad \textbf{(2.4)}$$

haline dönüşür. (2.4) ifadesinde ω^2 sistemin özdeğerlerini ve $\boldsymbol{\Phi}$ sistemin özvektörlerini temsil ettiği kabul etmektedir. Çok girişli-çok çıkışlı sistem olarak matris formunda yazılırsa,

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

elde edilir. Bu denklem ile yapısal sistemin modal analizi yapılarak, sistemin doğal frekansları ve tireşim modları belirlenerek dinamik analizdeki ilk basamak gerçekleştirilir. Modal analizden alınan sonuçlar, farklı dinamik yükleme şekillerine karşılık yapısal sistemin cevabı hakkında ilk tahminlerin yapılmasında önemli rol oynar. Bu nedenle, genellikle tüm dinamik analizlerin öncesinde modal analizin tamamlanmış olması tavsiye edilmektedir.

(2.1)'de verilen genel denge denklemi matris formunda yeniden yazılırsa [66],

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(2.6)}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{K}$ sırasıyla kütle, sönüm ve katılık matrisleridir.

2.2 Durum Uzayı (State-Space) Yaklaşımı ile Yapısal Dinamik Sistemlerin İncelenmesi

Çok girişli-çok çıkışlı yapısal sistemlerin dinamik davranışının incelenmesinde yararlanılan Durum Uzayı yaklaşımı, t_0 başlangıç anında sistem giriş değişkenlerinin değerleri dikkate alarak sistemin t_0'dan sonrasında seçilen bir t anına kadarki davranışını belirleyebilmektedir [65-69].

2.1 kısmında verilen yapısal sistemin (2.6) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(2.7)}$$

ifadesi oluşur.

Sistemin durum vektörü,

$$\boldsymbol{y}(t)=\left[\boldsymbol{x}(t) \quad \boldsymbol{x}(t)\right]^{T} \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Durum vektörünün zamana göre türevi,

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(t) \tag{2.9}$$

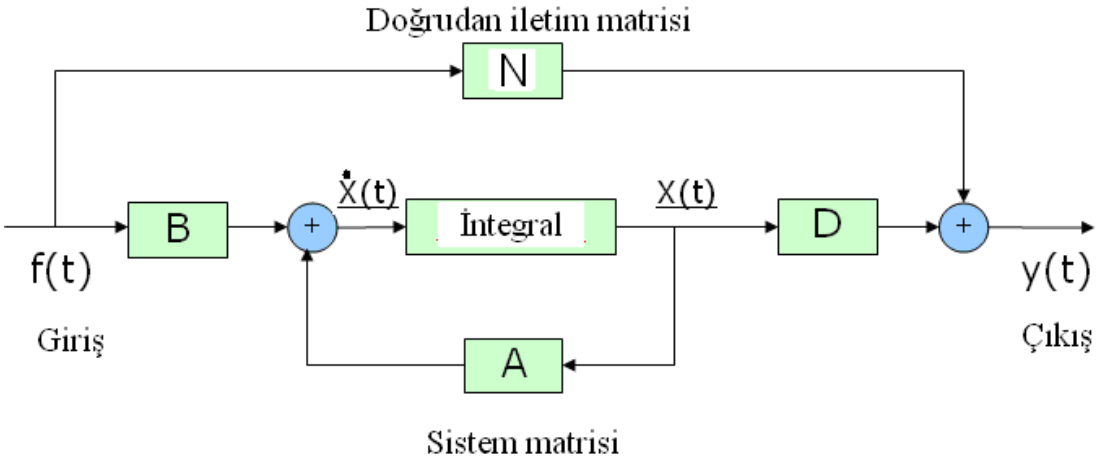
olarak elde edilir. Buna göre (2.7) denklemi yeniden yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}^{-1}\end{Bmatrix}\boldsymbol{f}(t) \tag{2.10}$$

ifadesi oluşur. Bu ifadede $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix} \tag{2.11a}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{Bmatrix}0\\ \boldsymbol{M}^{-1}\end{Bmatrix} \tag{2.11b}$$



Şekil 2.2 : Durum uzayı blok diyagramı.

Şekil 2.2'de verilen blok diyagramında görüldüğü gibi çıkış denklemi

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{N}\boldsymbol{f}(t) \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem dinamik sistemlerde sisteme verilen kuvvet vektörüne karşılık sistemin ürettiği yerdeğiştirme vektörü cevabının bulunmasında kullanılarak büyük bir kolaylık sağlamaktadır. Durum uzayı yaklaşımı (State-Space),

Matlab, Mathematica gibi ticari simülasyon programlarında fonksiyon olarak bulunmakta olup yapılacak dinamik analizlerde doğrudan kullanılması mümkün olmaktadır. Bu tip ticari kodlar sistem dinamiği çalışmalarında ihtiyaç duyulmakta olan tüm temel yaklaşımları içermekte olup, farklı analiz sonuçlarının doğrudan aynı grafik üzerinde alınması da karşılaştırmalar açısından önemli bir üstünlüktür [65-68,70].

Bu nedenlerle yapılan çalışmada Matlab ile hazırlanan kodlardan yararlanılmış ve sistem katılık, sönüm ve kütle matrisleri Matlab'de oluşturularak durum uzayı yaklaşım ile seçilen yapısal sistemin $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ ve $\boldsymbol{N}$ matrisleri hesaplanmış ve değişik giriş fonksiyonlarına karşılık verdiği cevaplar incelenmiştir.

3. SONLU ELEMAN YAPISAL DENKLEMLERİ

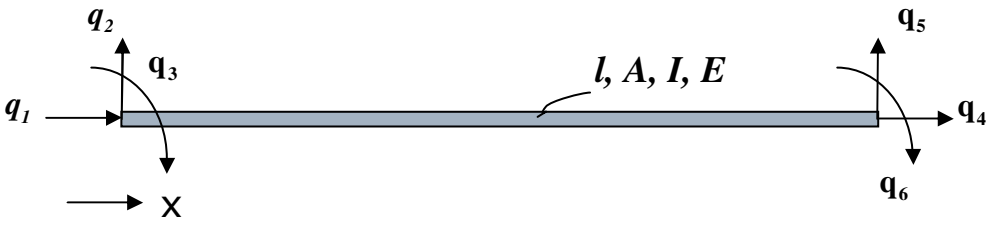
Yapısal sistemlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile yapılan analizlerinde birinci adım, orijinal modelin davranışını modellemek için kullanılan elemanların seçimi ve seçilen elemanların davranışlarıdır. Elemanların tipinin belirlenmesinden sonra elde edilen kütle, katılık ve sönüm matrisleri ile sistemin dinamik davranışını ifade eden denklemler oluşturulabilir. Bu denklemlerin çıkartılmasında enerji yöntemleri kullanılacaktır. Yapısal analizlerde enerji teoremlerini uygulamak için, şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve deformasyondan dolayı dış kuvvetlerin işinin tanımlanması gerekmektedir. Temel yaklaşım olarak yapıda beklenen deformasyonlar, eleman yerdeğiştirme fonksiyonlarıyla tanımlanır. Diğer bir ifadeyle eleman düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerinin bilinmesi gereklidir.

3.1 Kiriş Eleman Katılık Matrisi

Düzlemsel bir (Bernoulli) kiriş elemanı yerdeğiştirme ifadeleriyle birlikte Şekil 3.1'de verilmektedir [3,4,68,71].

q_1, q_2, q_4 ve q_5 kiriş elemanın düğüm noktalarının yerdeğiştirmelerini, q_3 ve q_6 ise düğüm noktalarının dönmelerini temsil etmektedir. Eksenel şekil değiştirmeden dolayı kiriş eleman üzerinde herhangi bir x noktasının $(0 \le x \le l)$ eksenel yerdeğiştirmesi aşağıdaki şekilde doğrusal olarak ifade edilebilmektedir.

$$s(x) = -q_1 \frac{(x-l)}{l} + q_4 \frac{x}{l} \qquad \textbf{(3.1)}$$



Şekil 3.1 : Düzlemsel kiriş elemandaki düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve dönmeleri.

Burada $s(x)$ ifadesi, kiriş kesit alanının sabit ve eksenel yükün yayılı tipte olmadığı durumdaki kirişin kesin (exact) ifadesidir. Bu ifadeyle, eksenel şekil değiştirmeden kaynaklanan kiriş eksenel yerdeğiştirme $s(x)$ ifadesinin, kirişin düşey yerdeğiştirmesinin $w(x)$ neden olduğu boy değişiminden etkilenmediği varsayılmaktadır.

Kiriş elemanın herhangi bir x noktasındaki düşey yerdeğiştirme ifadesi aşağıdaki ifade ile verilmektedir [3, 71].

$$w(x)=\frac{q_2}{l^3}(2x^3-3lx^2+l^3)-\frac{q_5}{l^3}(2x^3-3lx^2)+\frac{q_3}{l^2}(x^3-2lx^2+l^2x)+\frac{q_6}{l^2}(x^3-lx^2) \qquad \textbf{(3.2)}$$

Verilen $w(x)$ ifadesi kiriş kesitinin sabit ve düşey yayılı yükün olmadığı haldeki kesin ifadeyi oluşturmaktadır. Kiriş şekil değiştirmesinden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisi SE,

$$SE=\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) dx \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{SE}=&\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{AE}\left(\frac{\boldsymbol{q_4}}{\boldsymbol{l}}-\frac{\boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{l}}\right)^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{dx}+ \\ &+\frac{1}{2}\int_0^l \boldsymbol{EI}\left(\frac{\boldsymbol{q_2}}{\boldsymbol{l^3}}(12\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{l})-\frac{\boldsymbol{q_5}}{\boldsymbol{l^3}}(12\boldsymbol{x}-6\boldsymbol{l})+\frac{\boldsymbol{q_3}}{\boldsymbol{l^2}}(6\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{l})+\frac{\boldsymbol{q_6}}{\boldsymbol{l^2}}(6\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{l})\right)^2 \boldsymbol{dx} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Burada A kiriş kesit alanını, I kiriş kesitinin atalet momentini, E ise malzemenin elastiklik modülüdür. Yukarıdaki ifadenin integrali alınarak, $\mathrm{q}=[q_1 q_2 ... q_6]^T$ olmak üzere, ifadenin quadratik biçimde yeni hali elde edilir.

$$\boldsymbol{SE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{q} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Bu ifadede $\boldsymbol{K_B}$, (Bernoulli) kiriş elemanın katılık matrisidir [3].

$$\boldsymbol{K}_B = \frac{E}{l^3}\begin{bmatrix} Al^2 & 0 & 0 & Al^2 & 0 & 0 \\ & 12I & 6lI & 0 & -12I & 6lI \\ & & 4l^2I & 0 & -6lI & 2l^2I \\ & & & Al^2 & 0 & 0 \\ & \text{Simetrik} & & & 12I & -6lI \\ & & & & & 4l^2I \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

3.2 Çubuk (Truss) Eleman Katılık Matrisi

Çubuk eleman üzerinde eğilme etkisi olmadan sadece eksenel yerdeğiştirme görülmektedir. Kiriş eleman için oluşturulan şekilde yer alan q_1 ve q_4 bu yerdeğiştirmeleri temsil eden SD'lerdir [3,71,72]. Çubuk elemanın katılık matrisi, kiriş elemanın katılık matrisinden faydalanarak oluşturulursa,

$$\boldsymbol{K}_{\text{Ç}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & \text{Simetrik} & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

ifadesine ulaşılır.

3.3 Kiriş ve Çubuk Eleman Kütle Matrisi

Kiriş kesitinin dönme atalet momenti ihmal edilerek, kiriş elemanın kinetik enerjisi,

$$KE = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]dx \tag{3.8}$$

şeklindedir. Bu ifade, ρ yoğunluk ve (.) zamana göre türev olmak üzere yeniden yazılırsa,

$$KE = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]dx +$$

$$\left[\frac{\dot{q}_2}{l^3}\left(2x^3 - 3lx^2 + l^3\right) + \frac{\dot{q}_5}{l^3}\left(2x^3 - 3lx^2\right) + \frac{\dot{q}_3}{l^2}\left(x^3 - 2lx^2 + l^2x\right) + \frac{\dot{q}_6}{l^2}\left(x^3 - lx^2\right)\right]^2\Bigg\}dx \qquad \textbf{(3.9)}$$

ifadesi elde edilir [3, 4, 71, 72]. İntegral işlemi sonrasında $\boldsymbol{M_B}$ kiriş eleman kütle matrisi olmak üzere kinetik enerji,

$$\boldsymbol{KE} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{M}_B \dot{\boldsymbol{q}} \qquad \textbf{(3.10)}$$

şekline dönüşür, bu bağıntıdaki kiriş kütle matrisinin açık ifadesi de aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{M_B} = \frac{\rho A l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ & & 4l^2 & \boldsymbol{0} & 13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \text{Simetrik} & & & 156 & -22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Çubuk elemanın kütle matrisi için kiriş elemanda dikkate alınan eğilme etkisi ihmal edilecektir, bu durumda düşey yerdeğiştirme ifadesi de aşağıdaki şekilde bulunur.

$$w(x) = q_2 + (q_5 - q_2)\frac{x}{l} \qquad \textbf{(3.12)}$$

Bu eşitlik, kiriş eleman için verilen kinetik enerji ifadesine uygulandığında çubuk elemanın kütle matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

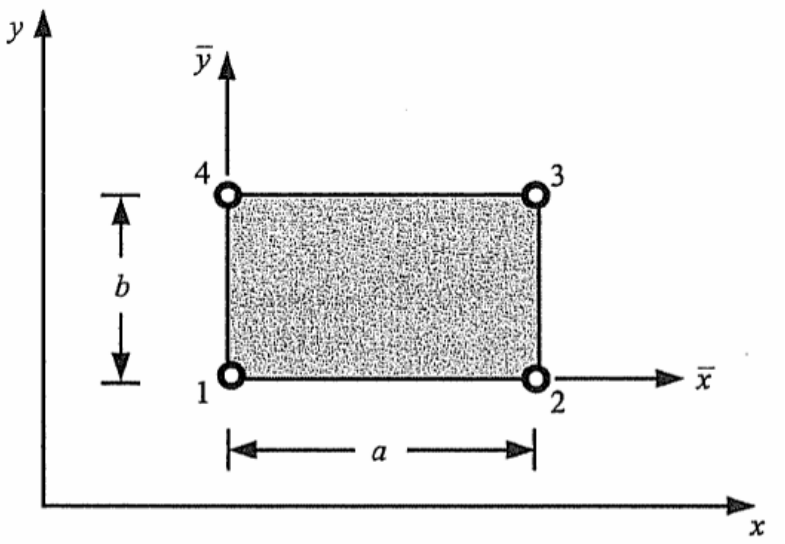
$$\boldsymbol{M_ç} = \frac{\rho A l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & \boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & \text{Simetrik} & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.13)}$$

3.4 Plak Elemanın Katılık ve Kütle Matrisleri

Kenar uzunlukları a ve b olan dört düğüm noktasına sahip Şekil 3.2'de yer alan doğrusal dikdörtgen eleman kullanılarak modelleme yapıldığı kabul edilerek plak elemanın katılık ve kütle matrisleri ele alınmaktadır [71].

Enterpolasyon fonksiyonlarını türetmek için $(\bar{x}, \bar{y})$ eleman yerel koordinat sistemi seçilerek, yerdeğiştirme ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U(\bar{x}, \bar{y}) = c_1 + c_2\bar{x} + c_3\bar{y} + c_4\bar{x}\bar{y} \qquad \textbf{(3.14)}$$



Şekil 3.2 : Düzlemsel dikdörtgen plak elemanı [71].

Bu denklem, her bir düğüm noktasının koordinatları için yeniden yazıldığında,

$$u_1 = U(0,0) = c_1 \qquad \textbf{(3.15a)}$$

$$u_2 = U(a,0) = c_1 + c_2 a \qquad \textbf{(3.15b)}$$

$$u_3 = U(a,b) = c_1 + c_2 a + c_3 b + c_4 ab \qquad \textbf{(3.15c)}$$

$$u_4 = U(0,b) = c_1 + c_3 b \qquad \textbf{(3.15d)}$$

ifadeleri elde edilir. Bu dört denklemdeki (i=1, 2, 3, 4) olmak üzere c_i sabitlerini her bir düğüm noktasındaki yerdeğiştirmelere bağlı olarak ifade edersek,

$$c_1 = u_1 \qquad \textbf{(3.16a)}$$

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1}{a} \tag{3.16b}$$

$$c_3 = \frac{u_4 - u_1}{b} \tag{3.16c}$$

$$c_4 = \frac{u_3 - u_4 + u_1 - u_2}{ab} \tag{3.16d}$$

sonuçları bulunur. Bu sonuçlar, (3.14) nolu ana denkleme taşınırsa,

$$U(\bar{x},\bar{y}) = u_1\left(1 - \frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{y}}{b} + \frac{\bar{x}}{a}\frac{\bar{y}}{b}\right) + u_2\left(\frac{\bar{x}}{a} - \frac{\bar{x}}{a}\frac{\bar{y}}{b}\right) + u_3\left(\frac{\bar{x}}{a}\frac{\bar{y}}{b}\right) + u_4\left(\frac{\bar{y}}{b} - \frac{\bar{x}}{a}\frac{\bar{y}}{b}\right) \tag{3.17}$$

bulunur. Buradaki enterpolasyon fonksiyonları aşağıdaki gibi yazıldığında,

$$\psi_1^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)\left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right) \tag{3.18a}$$

$$\psi_2^e = \frac{\bar{x}}{a}\left(1 - \frac{\bar{y}}{b}\right) \tag{3.18b}$$

$$\psi_3^e = \frac{\bar{x}}{a}\frac{\bar{y}}{b} \tag{3.18c}$$

$$\psi_4^e = \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)\frac{\bar{y}}{b} \tag{3.18d}$$

yerdeğiştirme denklemi kısaltılmış hali ile şu şekilde olur.

$$U(\bar{x},\bar{y}) = u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + u_3\psi_3 + u_4\psi_4 = \sum_{i=1}^{4} u_i^e \psi_i^e \tag{3.19}$$

Plak elemanın her bir düğüm noktasındaki serbestlik derecesi, w, ϕ_x ve ϕ_y olmak üzere üçtür.

Bulunan bu yerdeğiştirme ifadesi kullanılarak ve kayma deformasyon etkisi dikkate alınarak katılık ve kütle matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir [71].

$$\boldsymbol{K_P} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{K}^{11}] & [\boldsymbol{K}^{12}] & [\boldsymbol{K}^{13}] \\ & [\boldsymbol{K}^{22}] & [\boldsymbol{K}^{23}] \\ \text{Simetrik} & & [\boldsymbol{K}^{33}] \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{M_P} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{M}^{11}] & [0] & [0] \\ & [\boldsymbol{M}^{22}] & [0] \\ \text{Simetrik} & & [\boldsymbol{M}^{33}] \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Eleman katılık matrisinin (3.20)'deki genel ifadesi içinde yer alan bileşenlerinin açık hali aşağıda verilmektedir.

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{11} = \int \left(A_{55} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial y} \right) dxdy \tag{3.22a}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{12} = \int A_{55} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial x} \partial \boldsymbol{\psi}_j dxdy \tag{3.22b}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{13} = \int A_{44} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial y} \partial \boldsymbol{\psi}_j dxdy \tag{3.22c}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{22} = \int \left(D_{11} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial y} + A_{55} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_j \right) dxdy \tag{3.22d}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{23} = \int \left(D_{12} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial x} \right) dxdy \tag{3.22e}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{33} = \int \left(D_{66} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial y} + A_{44} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\psi}_j \right) dxdy \tag{3.22f}$$

$k = 5/6$ kayma düzeltme katsayısı, G kayma modülü, E elastiklik modülü ve ν Poisson oranını temsil etmek üzere, A_{ij} ve D_{ij} sabitlerinin değeri aşağıdaki bağıntılar ile bulunmaktadır.

$$A_{44} = kG_{23}h \tag{3.23a}$$

$$A_{55} = kG_{13}h \tag{3.23b}$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \tag{3.23c}$$

$$D_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \tag{3.23d}$$

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \tag{3.23e}$$

$$D_{66} = \frac{1}{12} G_{12} h^3 \tag{3.23f}$$

İzotropik malzemeler için elastiklik modülü, Poisson oranı ve kayma modülü aşağıdaki eşitlikler yazılabilmektedir.

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \tag{3.24}$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \tag{3.25}$$

$$G_{12} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.26}$$

Eleman kütle matrisinin (3.21)'deki genel ifadesi içinde yer alan bileşenlerinin açık hali aşağıda verilmektedir.

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{11} = I_o \boldsymbol{M}_{ij} \tag{3.27a}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{22} = \boldsymbol{M}_{ij}^{33} = I_2 \boldsymbol{M}_{ij} \tag{3.27b}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \int \psi_i \psi_j dxdy \tag{3.27c}$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan I_o ve I_2 kütlesel atalet momentleri, ρ yoğunluk ve h plak kalınlığı olmak üzere,

$$I_o = \rho h \tag{3.28a}$$

$$I_2 = \frac{1}{12}\rho h^3 \qquad \textbf{(3.28b)}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

3.5 Eleman Global Katılık ve Kütle Matrisi

Analizi gerçekleştirilecek bir yapının SEY modelinde yer alan her bir elemanın şekil değiştirme enerjisi ve kinetik enerji değerleri toplanarak, yapının toplam şekil değiştirme ve kinetik enerji değerleri elde edilir. Bu nedenle, bir önceki kısımda bahsedilen -yerel koordinatlara göre- eleman katılık ve eleman kütle matrislerinin kullanıldığı değişik yapılarda uygun sonuç verebilmeleri için, bu ifadelerin yapının genel koordinatlarına göre durumu dikkate alınarak yeniden yazılması gerekmektedir. Bir elemanın düğüm noktalarının yerel koordinatlarının yapı üzerinde bulunduğu konuma göre yapının genel koordinatları ile ifade edilmesi için $z_g \in R^n$ olmak üzere genel yerdeğiştirme vektörü kullanılacaktır.

3.5.1 Eleman yerel koordinatlarının genel koordinatlara dönüştürülmesi

Analizi yapılacak yapıyı oluşturan her bir elemanın yapı içindeki konumunun farklı olması nedeniyle, elemanların yerel koordinatlarının yapının genel koordinatlarına göre tanımlanması gerekmektedir. Bunun için yerdeğiştirmelerin öncelikle eleman yerel koordinat sisteminden, genel koordinatlara paralel bir koordinat sistemine dönüştürülmesi gerekmektedir. $\boldsymbol{q}^i$ i.elemanın kendi yerel eksen takımına göre yerdeğiştirme vektörünü temsil ettiğini kabul edelim. Elemanın yerdeğiştirme vektörünün genel koordinatlar $\bar{\boldsymbol{q}}^i$ cinsinden tanımlanabilmesi için $\boldsymbol{S}^i$ dönme matrisinin tanımlanması gerekmektedir [3].

$$\boldsymbol{q}^i = \boldsymbol{S}^i \bar{\boldsymbol{q}}^i \qquad \textbf{(3.29)}$$

$$\bar{\boldsymbol{q}}^i = \boldsymbol{\beta}^i \boldsymbol{z}_g \qquad \textbf{(3.30)}$$

Bu dönüşüm sonrasında elemanın yerel yerdeğiştirmeleri artık genel yerdeğiştirme vektörü $\boldsymbol{z}_g$'nin bileşenlerine karşılık gelmektedir. Bu yüzden sadece sıfır ve

birlerden oluşan $\boldsymbol{\beta}^i$ Boolean dönüşüm matrisi tanımlanmakta ve $\overline{\boldsymbol{q}}^i$ ile z_g arasındaki ilişki kurulmaktadır [3].

3.5.2 Genelleştirilmiş eleman katılık matrisi

i. elemanın katılık matrisi $\boldsymbol{K}^i$ olarak dikkate alındığında bu elemanın şekil değiştirme enerjisi

$$\boldsymbol{SE}^i = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{iT}\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{q}^i \tag{3.31}$$

şekilde yazılabilmektedir.

Yukarıdaki üç eşitlik (3.29, 3.30 ve 3.31) kullanılarak şekil değiştirme enerjisi yeniden oluşturulduğunda

$$\boldsymbol{SE}^i = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{q}}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{S}^i\overline{\boldsymbol{q}}^i = \frac{1}{2}z_g^T\boldsymbol{\beta}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{S}^i\boldsymbol{\beta}^i z_g \tag{3.32}$$

elde edilmektedir.

Yapı içindeki şekil değiştirme enerjisi, bu durumda yapıyı oluşturan tüm elemanların şekil değiştirme enerjilerinin toplamı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir [3].

$$\boldsymbol{SE} = \frac{1}{2}z_g{}^T\left[\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{\beta}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{S}^i\boldsymbol{\beta}^i\right]z_g \tag{3.33}$$

Burada $\boldsymbol{K}_g$ genelleştirilmiş katılık matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\boldsymbol{K}_g = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\beta}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{K}^i\boldsymbol{S}^i\boldsymbol{\beta}^i \tag{3.34}$$

3.5.3 Genelleştirilmiş eleman kütle matrisi

Şekil değiştirme enerjisinde olduğu gibi, i. elemanın kinetik enerjisi genelleştirilmiş hızlar cinsinden yazılabilir. $\boldsymbol{S}^i$ ve $\boldsymbol{\beta}^i$ genelleştirilmiş koordinatlardan bağımsız oldukları için,

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{S}^i\overline{\boldsymbol{q}}^i \tag{3.35}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{q}}} = \boldsymbol{\beta}^i \dot{\boldsymbol{z}}_g \tag{3.36}$$

i. elemanın kütle matrisi $\boldsymbol{M}^i$ ile göstrilirse, bu elemanın kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde yazılabilir [3].

$$\boldsymbol{KE}^i = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{iT}\boldsymbol{M}^i\dot{\boldsymbol{q}}^i = \frac{1}{2}\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{M}^i\boldsymbol{S}^i\dot{\bar{\boldsymbol{q}}}^i = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{z}}_g{}^T\boldsymbol{\beta}^{iT}\boldsymbol{M}^i\boldsymbol{S}^i\boldsymbol{\beta}^i\dot{\boldsymbol{z}}_g \tag{3.37}$$

Yapıdaki tüm elemanların kinetik enerjileri toplamı alınarak aşağıdaki şekilde yapının toplam kinetik enerjisi elde edilir.

$$\boldsymbol{KE} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{z}}_g{}^T\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\beta}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{M}^i\boldsymbol{S}^i\boldsymbol{\beta}^i\right]\dot{\boldsymbol{z}}_g \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{KE} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{z}}_g{}^T\boldsymbol{M}_g\dot{\boldsymbol{z}}_g \tag{3.39}$$

Burada $\boldsymbol{M}_g$ genelleştirilmiş kütle matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\boldsymbol{M}_g = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\beta}^{iT}\boldsymbol{S}^{iT}\boldsymbol{M}^i\boldsymbol{S}^i\boldsymbol{\beta}^i \tag{3.40}$$

3.6 Yapısal Dinamik Analizlerde Sönüm Matrisi

Tüm dinamik sistemlerde yapının doğal frekansları civarında daha çok artan titreşim seviyelerinin kabul edilebilir sınırlar içinde tutulabilmesi ve mekanik sistemin işlevini gerçekleştirebilmesi için yapının sönümleme özellikleri büyük önem taşımaktadır [35,73-75]. Sönümleme, mekanik sistemlerdeki enerji yutma mekanizması olup, hemen hemen tüm mekanik sistemlerde farklı bir şekilde bulunabilmektedir. Yapıdaki titreşimleri hız ile orantılı olarak azaltır ve hatta zamana bağlı olarak etkisini tamamen durdurabilir. Sönümleme miktarı, temel olarak malzeme, hareket hızı ve titreşim frekansına bağlı olarak değişmektedir. Mekanik sistemlerde genel olarak viskoz sönümleme, histerezis sönümleme ve Coulomb tipi sönümleme ile karşılaşılmaktadır [1,76-80].

Viskoz sönümleme kuvvetinin hız ile orantılı olması nedeniyle dinamik analizlerde özellikle lastik ve polimerlerde bu sönümlemenin etkisi dikkate alınmaktadır.

Histerezis sönümlemede malzeme dayanan özellikler daha çok etkili olmaktadır. Dinamik analizlerde bu nedenle dikkate alınması önem taşımaktadır. Coulomb tipi sönümleme, daha çok yapının kayma ve sürtünmesi durumlarında karşılaşılan ve yüzey normali yönündeki kuvvet ile orantılı bir sönümleme kuvveti olarak ortaya çıkmaktadır. Dinamik yapısal analizlerde bu sönümleme tipi genellikle dikkate alınmamaktadır.

Sönüm kuvvetlerinin matematiksel ifadelerinin karmaşık olması nedeniyle fiziksel yaklaşımdan daha çok matematiksel temele dayanan ve SEY analizlerine uygunluğu daha yüksek olan basitleştirilmiş modellerin kullanılması tercih edilmektedir. Bu modellerde sönüm kuvvetleri, eşdeğer viskoz sönüm kuvvetleri ile temsil edilmektedir [35]. Dinamik analizlerde etkili olan viskoz ve histerezis sönümlemelerin etkilerini bünyesinde toplayan Rayleigh sönümleme modeli dinamik analizlerde oldukça iyi sonuçlar vermektedir [1].

$[\boldsymbol{C}]$ yapısal sönümleme matrisi, α kütle matrisi sabit çarpanı, $[\boldsymbol{M}]$ yapısal kütle matrisi, β katılık matrisi sabit çarpanı, β_c katılık matrisi değişken çarpanı, $[\boldsymbol{K}]$ yapısal katılık matrisi, β_j katılık matrisi malzeme sabit çarpanı, $[\boldsymbol{C}_k]$ eleman sönümleme matrisi ve $[\boldsymbol{C}_\xi]$ frekansa bağlı sönümleme matrisi olmak üzere sönümleme modelinin genel ifadesi aşağıdaki gibi yazılmaktadır [74,79,80].

$$[\boldsymbol{C}]=\alpha[\boldsymbol{M}]+(\beta+\beta_c)[\boldsymbol{K}]+\sum_{j=1}^{nmat}\beta_j[\boldsymbol{K}_j]+\sum_{k=1}^{nel}\boldsymbol{C}_k+[\boldsymbol{C}_\xi] \qquad \textbf{(3.41)}$$

SEY ile yapılan analizlerde sadece kütle ve katılık matrislerinin katsayılarının kullanılmasının yeterli doğrulukta sonuç verdiği görüldüğü için Rayleigh sönümleme modeli'nin aşağıdaki sadeleştirilmiş hali ile kullanılmaktadır [1].

$$[\boldsymbol{C}]=\alpha[\boldsymbol{M}]+\beta[\boldsymbol{K}] \qquad \textbf{(3.42)}$$

ω doğal frekans ve ζ sönüm oranı olmak üzere kütle ve katılık orantılı Rayleigh sönüm katsayıları arasındaki ilişki ise

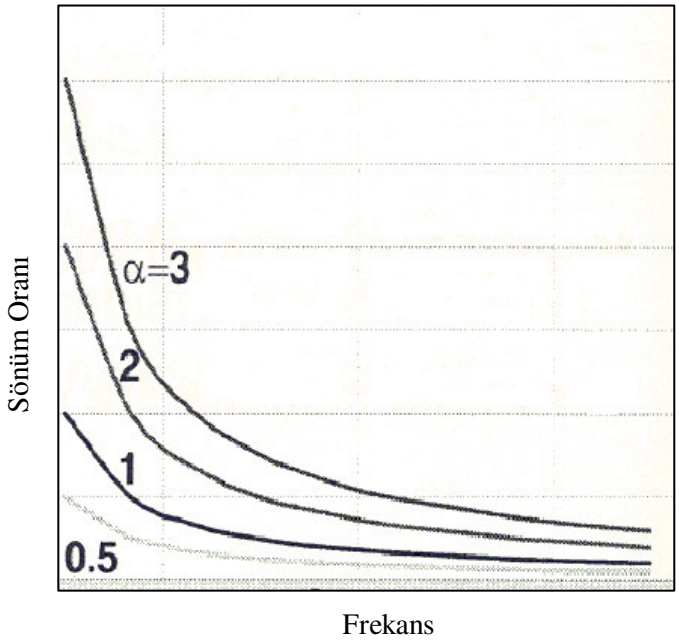
$$\frac{\alpha}{2\omega}+\frac{\beta\omega}{2}=\zeta \qquad \textbf{(3.43)}$$

şeklinde ifade edilmektedir [74].

α Rayleigh sönüm katsayısı, şok sönümleyici eleman, su altındaki veya rüzgara karşı direnç gibi akışkan uygulamalarında daha etkili olmaktadır. Bu tip uygulamalarda katılık orantılı sönüm ihmal edildiğinde $(\beta = 0)$ kütle orantılı sönüm katsayısı,

$$\alpha = 2\zeta\omega \qquad \textbf{(3.44)}$$

olarak elde edilir (Şekil 3.3).



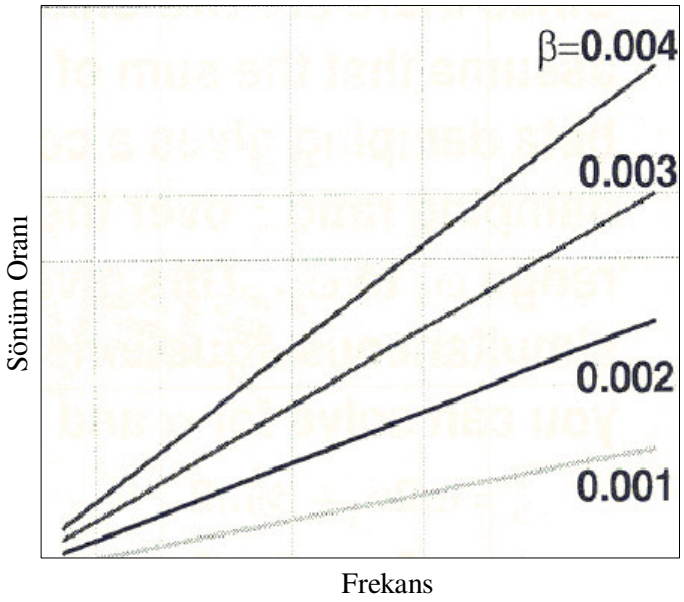
Şekil 3.3 : Katılık orantılı sönüm katsayısının sıfır olduğu durumda kütle orantılı sönüm katsayısının frekans ile değişimi [74].

β katılık orantılı sönüm katsayısı yapının malzeme özelliklerinin bir sonucu olup, her bir malzeme için yaklaşık değerleri vardır. Kütle orantılı sönüm ihmal edildiğinde $(\alpha = 0)$ katılık orantılı sönüm katsayısı,

$$\beta = \frac{2\zeta}{\omega} \qquad \textbf{(3.45)}$$

olarak elde edilir (Şekil 3.4).

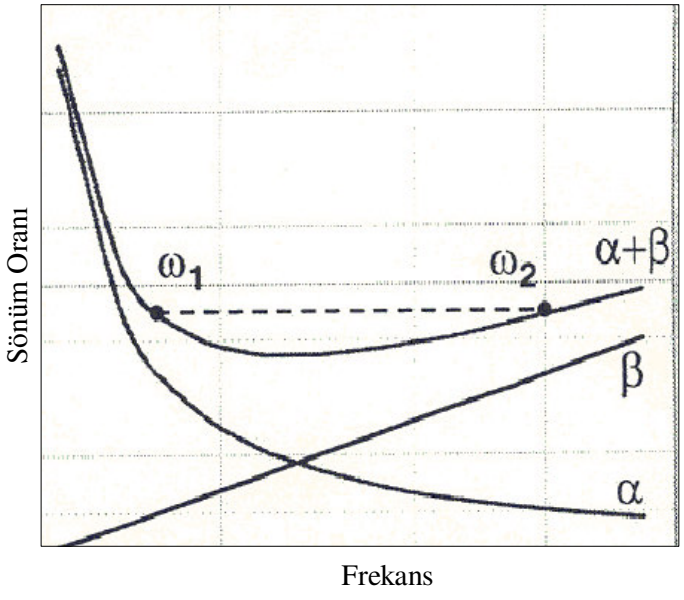
Analizde dikkate alınacak yapısal sönümleme sadece yapının kendi özelliklerine bağlı olmayıp, malzeme iç sürtünmelerinden ve yapı elemanlarının bağlantı noktalarından dolayı da ortaya çıkacağı gözden bulundurulmalıdır [1].



Şekil 3.4 : Kütle orantılı sönüm katsayısının sıfır olduğu durumda katılık orantılı sönüm katsayısının frekans ile değişimi [74].

α ve β sönüm katsayılarının aynı analizde beraber etkin olması durumunda ω_1 ve ω_2 olmak üzere iki frekansta aynı sönüm oranını vermekte olduğu çözümler elde edilmektedir (Şekil 3.5).

Çalışma boyunca yapılan analizlerde sadece β sönüm katsayısı dikkate alınmış olup, farklı β değerleri için analizler gerçekleştirilmiştir. Bu değerlerin seçiminde β sönüm katsayısının doğrudan seçilen malzemeye bağlı olduğu dikkate alınmıştır.



Şekil 3.5 : Kütle ve katılık orantılı sönüm katsayılarının aynı sistemde olduğu durumda sönüm katsayılarının frekans ile değişimi [74].

β sönüm katsayısının belirlenmesi için malzemenin enerji yutma miktarının tespitine dayanan deneysel yöntemler kullanılmaktadır. Mühendislik malzemelerinin sönüm değerlerinin toplandığı Çizelge 3.1'de görüleceği gibi metal malzemelerin sönüm değerlerinin çok küçük mertebelerde enerji yuttuğu ve sönümlemeye çok yardımcı olmadığı sonucuna varılmaktadır [35,74].

Çizelge 3.1 : Mühendislik malzemelerinin β sönüm katsayıları [35].

Malzeme	Katılık Orantılı Sönüm Katsayısı β
Saf alüminyum	0.00002-0.002
Dural	0.0004-0.001
Çelik	0.001-0.008
Kurşun	0.008-0.14
Dökme demir	0.003-0.03
Manganezli bakır alaşımı	0.05-0.1
Doğal kauçuk	0.1-0.3
Sert kauçuk	1.0
Cam	0.0006-0.002
Beton	0.01-0.06

Yapılan bu deneysel çalışmalarda çok kullanılmakta olan mühendislik malzemelerinin yanı sıra, titreşim kaynaklı yorulma ve gürültüye karşı yüksek direnci olan manganez-bakır alaşımı gibi özel malzemelerin de üretilmeye ve kullanılmaya başlandığı görülmektedir. Havacılık ve otomotiv sanayilerinde bu tip malzemelerin kullanım taleplerinin artması, maliyetlerinin de düşmesini sağlayacaktır.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, farklı frekans aralıklarında iyi performans göstermekte olan yüksek sönüm değerlerine sahip farklı titreşim izolasyon malzemelerin özelliklerinin bir arada tek bir malzemede toplanılması hedeflenmektedir [81].

Örnek uygulamalarda Çizelge 3.1'de yer alan çelik malzeme için verilen 0.001, dökme demir için verilen 0.01, kurşun için verilen 0.1 ve saf alüminyum için verilen 0.00008 değerleri dikkate alınmaktadır.

4. MODEL DERECESİ DÜŞÜRME (MDD) TEKNİKLERİ

Giriş bölümünde belirtildiği gibi literatürde pek çok MDD yöntemi bulunmaktadır. Zaman uzayında ayrık zaman aralıklarında sistemin kesin cevaplarının uyuştuğu kabulü yapılarak geliştirilen MDD yöntemleri bu bölümde sunulmaktadır. Zaman uzayındaki MDD yöntemlerinin temellerinin kısaca ele alındığı bu bölümde, ayrıca daha sonraki bölümde açıklanacak çalışma kapsamında geliştirilen yeni MDD yaklaşımlarının karşılaştırılacağı yöntemler de tanıtılmaktadır.

4.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemleri

Yapısal problemler için sonlu elemanlar yöntemi denklemleri aşağıdaki gibidir [82, 83].

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \tag{4.1}$$

Burada $\boldsymbol{M} \in R^{nxn}$ kütle matrisi, $\boldsymbol{C} \in R^{nxn}$ sönüm matrisi, $\boldsymbol{K} \in R^{nxn}$ katılık matrisi, $\boldsymbol{f} \in R^{n}$ dış kuvvet vektörü, $\boldsymbol{x} \in R^{n}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$ ile $\ddot{\boldsymbol{x}}$ sırasıyla yerdeğiştirme, hız ve ivme vektörleridir [4]. Bu denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\boldsymbol{D}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{F}(s) \tag{4.2}$$

Burada, $\boldsymbol{D}(s)$ ve $\boldsymbol{F}(s)$ sırasıyla $\boldsymbol{x}(t)$ ve $\boldsymbol{f}(t)$ vektörlerinin Laplace dönüşümleri alınmış hali ve sistem transfer matrisi $\boldsymbol{G}(s) = (\boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{C}s + \boldsymbol{K})^{-1}$ şeklindedir. Bu ifadelerdeki Laplace dönüşüm değişkeni $s = j\omega$ konulursa, sistemin frekans cevabı elde edilir.

4.2 Sistem Cevabı

Genel olarak (4.1) denklemi ile verilen hiperbolik bir problem, değişken dönüşümü ile 1nci derece parabolik bir denkleme indirgenebileceği için, aşağıdaki yarı-ayrık denklem incelenebilir [45].

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} \tag{4.3}$$

Bu takdirde, $\boldsymbol{G}_s(s)$ sürekli zaman transfer matrisi sıfır başlangıç şartları için Laplace dönüşümü alınarak şu şekilde bulunur.

$$\boldsymbol{G}_s(s) = (\boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{K})^{-1} \tag{4.4}$$

Δt zaman adımlarında ayrık sistem cevapları ile ilgilenildiği için bu ayrık zaman adımlarında impulsa tepki için kuvvet

$$\boldsymbol{f}_d(k\Delta t) = Z^{-1}\{\boldsymbol{G}_z(z)\} \tag{4.5}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\boldsymbol{f}_d(k\Delta t)$ ayrık $k\Delta t$ zaman adımlarındaki kuvvet değerlerini, $\boldsymbol{G}_z(z)$ ayrık zaman transfer matrisini ve Z^{-1} ters Z-transformunu göstermektedir. Benzer şekilde kuvvet ifadesinin zamanla değişimi

$$\boldsymbol{f}_c(t) = L^{-1}\{\boldsymbol{G}_s(s)\} \tag{4.6}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\boldsymbol{f}_d(k\Delta t) = \Delta t \boldsymbol{f}_c(t)\big|_{t=k\Delta t} \tag{4.7}$$

olacağı için sürekli zaman ve ayrık zaman transfer matrisleri arasında aşağıdaki bağıntı geçerli olmalıdır.

$$\boldsymbol{G}_z(z) = Z\{L^{-1}\{\boldsymbol{G}_s(s)\}\}\Delta t \tag{4.8}$$

Bu noktada $G_s(s)$ sürekli zaman transfer matrisi için

$$\boldsymbol{G}_s(s) = (s\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{M}^{-1} \tag{4.9}$$

elde edilir. Burada I birim matristir.

Impuls cevap envaryant integrasyonu [45] uygulanarak (4.8) denklemi ile aşağıdaki ayrık zamanlarda sistem cevabı elde edilir.

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = e^{-\Delta t \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}} \boldsymbol{x}_k + \Delta t \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{f}_{k+1} \quad \textbf{(4.10)}$$

4.3 Model Derecesi Düşürme Yöntemleri

Ayrık orijinal model genel ifadesi (4.1) eşitliğinden,

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)$$

şeklinde verilmektedir. Orijinal modele eşdeğer başka bir sistemin yerdeğiştirme vektörü, E dönüşüm matrisi kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k \quad \textbf{(4.11)}$$

Bu ifade, temel olarak MDD uygulandıktan sonraki sistemin cevabını temsil etmektedir.

Benzer şekilde aynı dönüşüm matrisi kullanılarak MDD uygulanmış sistemin kuvvet vektörü de şu şekilde yazılabilir,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_k = \boldsymbol{E}\boldsymbol{f}_k \quad \textbf{(4.12)}$$

E dönüşüm matrisi

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_i^T \\ \boldsymbol{e}_j^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{e}_k^T \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.13)}$$

ifadesi ile tanımlanmaktadır. $\boldsymbol{e}_i$, i. elemanı 1 ve diğer elemanları 0 olan birim vektördür.

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Dönüşüm matrisi genel olarak dikdörtgen bir matris olup $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j^{\,T} = \boldsymbol{\delta}_{ij}$ Kronecker delta fonksiyonuna eşit olduğu için tanımı gereği $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{I}$ olmaktadır.

Dönüşüm uygulanması sonrasında eşdeğer sistem aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\hat{\boldsymbol{M}}\ddot{\hat{\boldsymbol{x}}} + \hat{\boldsymbol{C}}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} + \hat{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{f}} \tag{4.15}$$

$\hat{\boldsymbol{M}}$, $\hat{\boldsymbol{C}}$, $\hat{\boldsymbol{K}}$ matrisleri MDD uygulanmış sistemin sırasıyla kütle, sönüm ve katılık matrisleridir. Bu matrisler uygulanan integrasyon yöntemine göre farklı yaklaşımlar ile elde edilebilmektedir [84].

4.3.1 İmpuls cevap envaryant integrasyonu yöntemi (IRI)

İmpuls cevap envaryant integrasyonu uygulanılarak bulunan orijinal model cevabı olarak verilen (4.10) ifadesi eşdeğer sistem için yazıldığında

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = e^{-\Delta t \hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{K}}}\hat{\boldsymbol{x}}_k + \Delta t \hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{f}}_{k+1} \tag{4.16}$$

ifadesi elde edilmektedir [4, 45].

(4.11) eşitliğine göre (4.16) yeniden yazıldığında

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{k+1} = e^{-\Delta t \hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{K}}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_k + \Delta t \hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{f}_{k+1} \tag{4.17}$$

bulunur. (4.10) ifadesi E dönüşüm matrisi ile çarpıldığında ve (4.17) ifadesindeki $\boldsymbol{f}_{k+1}$ terimlerinin eşitliğinden

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{T}\right)^{-1} \tag{4.18}$$

ve benzer işlemler $\boldsymbol{x}_k$ terimlerinin eşitliğine uygulanırsa,

$$\hat{\boldsymbol{K}} = -\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t}\ln\left(\boldsymbol{E}e^{-\Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}^{T}\right) \tag{4.19}$$

elde edilir.

4.3.2 İleri farklar yöntemi

Çok kullanılmakta olan zaman integrasyonu yöntemlerinden biri olan bu yöntemde yerdeğiştirmenin zamana göre birinci ve ikinci türevleri sırasıyla,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_k = \frac{\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k}{\Delta t} \tag{4.20}$$

ve

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_k = \frac{\dot{\boldsymbol{x}}_{k+1} - \dot{\boldsymbol{x}}_k}{\Delta t} \tag{4.21}$$

şeklinde ifade edilmektedir. (4.20) ve (4.21) bağıntıları, (4.1) denkleminde yerlerine yazılıp yeniden düzenlenirse,

$$\frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2}\boldsymbol{x}_{k+2} + \left[\frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t} - \frac{2\boldsymbol{M}}{\Delta t^2}\right]x_{k+1} + \left[\frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} - \frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t} + \boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_k \tag{4.22}$$

bulunur. Aynı işlemler (4.15) bağıntısındaki MDD uygulanmış ifadede yazılırsa,

$$\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+2} + \left[\frac{\hat{\boldsymbol{C}}}{\Delta t} - \frac{2\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\right]\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} + \left[\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} - \frac{\hat{\boldsymbol{C}}}{\Delta t} + \hat{\boldsymbol{K}}\right]\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{f}}_k \tag{4.23}$$

elde edilir. İlave işlemler yapılarak elde edilen denklemlerin eşitliklerinden yararlanılarak ileri farklar integrasyon yöntemi ile MDD uygulanmış eşdeğer sistemin sırasıyla kütle, sönüm ve katılık matrisleri aşağıdaki şekilde bulunmuş olur.

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{E}^{T}\right)^{-1} \tag{4.24}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \Delta t\left\{\frac{2\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} + \hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\left[\frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t} - \frac{2\boldsymbol{M}}{\Delta t^2}\right]\boldsymbol{E}^T\right\} \tag{4.25}$$

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{M}^{-1}\left[\frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} - \frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t} + \boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{E}^T - \frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{C}}}{\Delta t} \tag{4.26}$$

4.3.3 Newmark yöntemi

Orijinal modelin (4.1)'de verilen denge denkleminin çözümü $x(0) = d_0$ ve $\dot{x}(0) = v_0$ sınır şartları altında ve $\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{a}_n$ sırasıyla $\boldsymbol{x}(t_n)$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t_n)$ ve $\ddot{\boldsymbol{x}}(t_n)$ olmak üzere

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{n+1} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{n+1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}_{n+1} \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilmektedir [4]. Burada

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \Delta t\dot{\boldsymbol{x}}_k + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{x}}_k + 2\beta\ddot{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right] \tag{4.28}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \dot{\boldsymbol{x}}_k + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{x}}_k + \gamma\ddot{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right] \tag{4.29}$$

denklemleri orijinal modelin yaklaşık çözümünün değişimini tanımlayan sonlu fark ifadeleridir. β ve γ parametreleri göz önünde bulundurulan şartlar altında algoritmanın doğruluk karakteristiğini ve kararlılığını belirlemektedir. [4] nolu referansta verilen işlemler sonrasında, $\boldsymbol{E}$ dönüşüm matrisi ile Newmark MDD yöntemi uygulanmış eşdeğer sistemin katılık, sönüm ve kütle matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^T \tag{4.30}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{C} + \Delta t\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{E}^T - \Delta t\hat{\boldsymbol{K}} \tag{4.31}$$

$$\hat{\boldsymbol{M}} = -\gamma\Delta t\hat{\boldsymbol{C}} - \beta\Delta t^2\hat{\boldsymbol{K}} + \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{M} + \gamma\Delta t\boldsymbol{C} + \beta\Delta t^2\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{E}^T \tag{4.32}$$

4.4 Yeniden Mod Oluşturma ile Model Derecesi Düşürme Yöntemleri

4.4.1 Component mode synthesis – CMS yöntemi

Mevcut sistemin her biri sonlu elemanlar ile modellenen parçalara ve alt sistemlere ayrılması esasına dayanan bu yöntemde modların dönüşümü ile SD'lerin sayısı düşürülür.

Bu yöntemde karmaşık yüksek model derecesine sahip sistemin çok sayıda alt parçaya bölünmesi ilk adımı oluşturmaktadır. Ardından bir Ritz vektörleri grubu ile her bir parçanın modellenmesi gerçekleştirilir ve orijinal modelin her bir alt parçasının fiziksel koordinatları, MDD uygulanmış fiziksel ve modal koordinatları olarak tanımlanır. Ayrılmış her bir parçanın koordinatlarının global koordinatlar ile birleştirilmesi sonrasında yapı analize hazır hale gelir. Birleştirilmiş yapı üzerinden yapılan analiz sonrasında gerekli veriler daha detaylı olarak incelenebilmektedir.

Bu yaklaşım ile karmaşık bir özdeğer problemi, ayrıldığı alt sistemlerin çok sayıdaki daha az karmaşık seviyesine sahip problemler haline dönüştürüldüğü için pek çok avantajı da beraberinde getirmektedir [2].

- Çok sayıda giriş verisinin uygulanması, alt gruplar yolu ile daha verimli yapılmaktadır.
- Her bir ayrılmış parça veya alt sistem için veri girişi neredeyse tamamen bağımsız analizciler tarafından hazırlanabilir.
- Uzun hesaplama zamanına duyulan ihtiyacı ortadan kaldırır.
- Yerel olarak gereken düzeltmelerin uygulanmasında yeniden yapılacak analizler için sürenin en aza indirilmesi sağlanır.

Orijinal model ile karşılaştırıldığında önemli ölçekte derecesi düşürülmüş Ritz tabanlı vektörlerin süperpoze edilmesi sonucunda her bir parçanın davranışı analize yansıtılır. Bu nedenle, CMS, -özellikle yapısal sistemin parçaları ayrı olarak tasarlanıyor ve analiz edildiği durumlarda- tasarım ve analiz işlemleri için verimli bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

CMS olarak 1960'larda ortaya atılan ilk çalışmaların ardından, Ritz tabanlı vektörlerin tanımlarına dayanan pek çok sayıda yöntem geliştirilmiştir. Mevcut CMS yöntemleri düşük frekans aralığındaki analizlerde başarılı sonuçlar vermektedir.

4.4.1.1 Klasik CMS yöntemi

Yöntem sönümsüz bir yapı için (4.3)'de verilen temel davranış ifadesinde

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

yapının her bir bileşeni için yerdeğiştirme vektörü aktif SD $\boldsymbol{x}_a$ ve yok edilen SD $\boldsymbol{x}_o$ vektörlerine bölünür. Burada a+o kısıtlanmamış serbestlik derecesinin n_{eq} toplamıdır.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{aa} & \boldsymbol{M}_{ao} \\ \boldsymbol{M}_{oa} & \boldsymbol{M}_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_a \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ao} \\ \boldsymbol{K}_{oa} & \boldsymbol{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{f}_o \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

Parçalara ayrılma aşamasında büyük yerel yerdeğiştirmelerin olduğu SD'lerin aktif SD olarak seçilmesi büyük önem taşımaktadır. Ayrıca nispeten büyük kütlelere sahip ya da dış yüklemelerin bulunduğu SD'ler ile parçalar arasındaki bağlantıların SD'leri de aktif SD olarak seçilmelidir. Bu adım her bir parçanın karakteristik davranışını en az maliyet ile yakalamak için önem taşımaktadır [45].

Daha sonra yapının her bir bileşeni aşağıdaki gibi özdeğer problemi şeklinde yazılır.

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{oo} & \boldsymbol{K}_{oa} \\ \boldsymbol{K}_{ao} & \boldsymbol{K}_{aa} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{oo} & \boldsymbol{M}_{oa} \\ \boldsymbol{M}_{ao} & \boldsymbol{M}_{aa} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_o \\ \boldsymbol{\Phi}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

Burada $(\omega^2, \boldsymbol{\Phi})$ sırasıyla özdeğer ve özvektörleri temsil etmektedir. $\boldsymbol{\Phi}_n$ ise yukarıdaki denklemden elde edilen n nolu normal modu göstermektedir. CMS'nin amacı problemin boyutlarını düşürmektir, bu nedenle $n \langle\langle n_{eq}$ olmalıdır. Bu yüzden fiziksel koordinatlar yerine uygun bir grup birim vektör koordinatlarına ihtiyaç duyulmaktadır [45]. Bileşen fiziksel koordinatları $\boldsymbol{x}$ ile MDD uygulanmış bileşen birim vektörü koordinatları $\boldsymbol{z}$ arasındaki koordinat dönüşümü aşağıdaki ifadeyle tanımlanır,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \tag{4.35}$$

Burada T dönüşüm matrisini temsil eder ve genellikle Φ_n bileşeni normal modlar arasından seçilmiş bazı modlardan oluşur. Kısıtlı modlar, bağlantı modları, rijit cisim modları, "inertia-relief" modları ve "quasi-static" modlar gibi hesaplamalı olarak adlandırılan diğer bileşen Ritz vektörü Ψ kullanılarak T dönüşüm matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\boldsymbol{T} = \left[\boldsymbol{\Psi} \quad \boldsymbol{\Phi}_n\right] \tag{4.36}$$

Diğer bir iyileştirme yöntemi olan AYB-Alt Yapılara Bölme (Substructuring) ile süper eleman elde edilmesi ve ilgili uygulamalar, çalışmanın altıncı bölümünde detaylı olarak ele alınacaktır.

5. MODEL DERECESİ DÜŞÜRME TEKNİKLERİNDE YENİ YAKLAŞIMLAR

Bu çalışmada ayrık eşdeğerlik prensibi kullanılarak zaman uzayında elde edilecek MDD uygulanmış eşdeğer sistemlerin bulunması ve bunların cevaplarının incelenmesi amacıyla iki ayrı yaklaşım geliştirilmiştir.

Bunlardan ilki "Toplam enerjilerin denkliği" olup, sistemin (5.1) ve (5.2)'de verilen kinetik ve potansiyel enerjilerinin (5.3)'deki gibi toplandığında elde edilen toplam enerji değerinin orijinal model ve indirgenmiş sistemde aynı olmasını sağlayacak şekilde MDD uygulamasını sağlayan bir yaklaşımdır.

Kinetik enerji : $\boldsymbol{H}_k = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{d}}_k{}^T \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{d}}_k$ **(5.1)**

Potansiyel enerji: $\boldsymbol{P}_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}_k{}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_k$ **(5.2)**

Toplam enerji: $\boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{H}_k + \boldsymbol{P}_k$ **(5.3)**

Çalışmada geliştirilen diğer yöntem ise, (5.4)'de verilen "Özdeğer Problemlerinin Çözümü" ifadesinin orijinal model ve indirgenmiş sistem için değerlendirilmesine dayanmaktadır.

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \omega^2 \boldsymbol{d} \quad \textbf{(5.4)}$$

Her iki yaklaşımda da bölüm 4.2'de verilen eşdeğer sistem yaklaşımı kullanılarak sırasıyla toplam enerji hatalarının ve modal analiz sonuçlarındaki sapmaların en düşük seviyede olacağı sistem dönüşüm formülasyonu ve sonlu elemanlar yöntemleri ile elde edilen sistem matrisleri, $\boldsymbol{M}$ ve $\boldsymbol{K}$ için düzeltme algoritmaları veya terimleri geliştirilmiştir.

5.1 Toplam Enerjilerin Denkliği Yaklaşımı

MDD ile indirgenmiş sistemin orijinal modelin toplam enerjisi ile aynı mertebede toplam enerjiye sahip olması, oluşturulan indirgenmiş sistem algoritmasının doğruluk derecesini gösteren önemli bir ölçüt olup, hesaplanan sistem toplam enerjileri karşılaştırılacaktır.

Toplam enerji değerlerinin hesaplanması için öncelikle, bölüm 4.2'de verilen impuls cevabı eşdeğerlik prensibi dikkate alınarak (5.1) ve (5.2) bağıntılarında verilen kinetik enerji ve potansiyel enerji ifadeleri kullanılarak ve ileri farklar integrasyon yöntemi (4.20), (4.21) ifadeleriyle $\boldsymbol{d}_k$ ve $\boldsymbol{d}_{k+1}$'in fonksiyonu olarak alınarak yazılmaktadır.

$\dot{\boldsymbol{d}}_k \cong \dfrac{\boldsymbol{d}_{k+1}-\boldsymbol{d}_k}{\Delta t}$ bağıntısı kullanılarak (5.1) bağıntısındaki orijinal model kinetik enerji ifadesi,

$$\boldsymbol{H}_k = \frac{1}{2\Delta t^2}\left(\boldsymbol{d}_{k+1}^T - \boldsymbol{d}_k^T\right)\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{d}_{k+1} - \boldsymbol{d}_k\right) \tag{5.5}$$

şeklinde yazılır ve (5.2) bağıntısı aynı şekilde kullanılırsa orijinal modelin toplam enerjisi,

$$\boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{H}_k + \boldsymbol{P}_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}_k^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}_k + \frac{1}{2\Delta t^2}\left[\boldsymbol{d}_{k+1}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{d}_{k+1} - \boldsymbol{d}_{k+1}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{d}_k^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{d}_{k+1} + \boldsymbol{d}_k^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{d}_k\right] \tag{5.6}$$

olarak elde edilir. Matris şekline dönüştürülmüş hali ise,

$$\boldsymbol{T}_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_k^T & \boldsymbol{d}_{k+1}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}+\dfrac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} & -\dfrac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} \\ -\dfrac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} & \dfrac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_k \\ \boldsymbol{d}_{k+1}\end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

olarak yazılır. Model derecesi düşürülmüş sistemin toplam enerjisi benzer şekilde

$$\hat{\boldsymbol{T}}_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{d}}_k^T & \hat{\boldsymbol{d}}_{k+1}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{K}}+\dfrac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} & -\dfrac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} \\ -\dfrac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} & \dfrac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{\boldsymbol{d}}_k \\ \hat{\boldsymbol{d}}_{k+1}\end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

şeklinde yazılabilir. (5.8) ifadesi düzenlenirse,

$$\hat{\boldsymbol{T}}_k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_k^T & \boldsymbol{d}_{k+1}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{E}^T\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{K}}+\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} & -\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\\ -\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} & \frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\end{bmatrix}\boldsymbol{E}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_k\\ \boldsymbol{d}_{k+1}\end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

elde edilir. Orijinal model ve MDD uygulanmış sistemlerin aktif SD'ler dikkate alındığında enerjilerinin eşitliği $\boldsymbol{T}_k \equiv \hat{\boldsymbol{T}}_k$ olması isteneceği için karşılıklı katsayıların da eşit olması (enerji koruyan algoritma), gerekmektedir. Dolayısıyla,

$$\boldsymbol{E}^T\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{K}}+\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2} & -\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\\ -\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{\Delta t^2}} & \frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\end{bmatrix}\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}+\frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} & -\frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2}\\ -\frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} & \frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2}\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

olmalıdır. Bu eşitliğin her iki tarafındaki matrislerin elemanlarının eşit olması gerekliliğinden hareketle,

$$\boldsymbol{E}^T\hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^T\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K} + \frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} \tag{5.11a}$$

ve

$$\boldsymbol{E}^T\frac{\hat{\boldsymbol{M}}}{\Delta t^2}\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{M}}{\Delta t^2} \tag{5.11b}$$

eşitliklerine ulaşılır. (5.11b) ifadesinde dönüşüm matrisinin kendi transpozu ile çarpımının birim matris olacağı ($\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{I}$) dikkate alınarak MDD uygulanmış sistemin kütle matrisi

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}^T \tag{5.12}$$

şeklinde bulunur. (5.11a) ifadesinde eşitliğin her iki tarafındaki ikinci terimlerin (5.11b)'deki eşitliğinde yer alan terimlere eşit olması nedeniyle (5.11a) ifadesinin birinci terimleri, (5.13)'de verildiği şekilde birbirine eşit olması gerekmektedir.

$$\boldsymbol{E}^T\hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K} \tag{5.13}$$

Dönüşüm matrisinin transpozu ile çarpımının birim matrisi vermesi tanımı tekrar kullanılarak MDD uygulanmış sistemin katılık matrisi,

$$\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{EKE}^T \tag{5.14}$$

şeklinde bulunur.

Elde edilen (5.12) ve (5.14) denklemlerinde yer alan E dönüşüm matrisinin MDD seviyesine uygun olarak seçilmesi sonrasında indirgenme yapılarak, orijinal model cevabı ile karşılaştırılacak indirgenmiş sistem oluşturulur.

5.2 Özdeğer Problemi Çözümü Yaklaşımı

Bu çalışmada geliştirilen ikinci MDD yöntemi de özdeğer sonuçlarının orijinal model ve indirgenmiş sistemde aynı olması prensibine dayanmaktadır.

Buna göre, özdeğer problemlerinin çözümü ele alındığında model derecesi düşürülmüş sistem ile orijinal model arasındaki bağıntıyı bulmak amacıyla $d = d_k(t)$ olmak üzere öncelikle her iki sistemin özdeğer ifadesi yazılacaktır. (5.4)'de belirtilen orijinal model,

$$\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{M}\omega^2\boldsymbol{d} \tag{5.15}$$

olarak yazılarak ve eşitliğin her iki tarafını E dönüşüm matrisi ile soldan çarpılarak yeniden düzenlenirse,

$$\boldsymbol{EKd} = \boldsymbol{EM}\omega^2\boldsymbol{d} \tag{5.16}$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıda belirtilen model derecesi düşürülmüş sistem,

$$\hat{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{d}} = \hat{\boldsymbol{M}}\omega^2\hat{\boldsymbol{d}} \tag{5.17}$$

(4.11) eşitliği kullanılarak yeniden düzenlenirse,

$$\hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{Ed} = \hat{\boldsymbol{M}}\omega^2\boldsymbol{Ed} \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.16) ve (5.18) bağıntılarında, eşitliklerin her iki tarafındaki katsayıların eşitlikleri göz önüne alınarak, önce sol tarafların eşit olması incelenirse,

$$\hat{K}E = EK \tag{5.19}$$

bulunur.

$EE^T = I$ olduğu bilindiği için ifadenin her iki tarafı E^T ile sağdan çarpılırsa, model derecesi düşürülmüş sistemin katılık matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\hat{K} = EKE^T \tag{5.20}$$

Model derecesi düşürülmüş sistemin kütle matrisi ise benzer işlemler tekrar edilerek

$$\hat{M} = EME^T \tag{5.21}$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi, bulunan sonuç (5.12) ve (5.14) eşitliklerindeki ile aynıdır. Özetle, enerji koruyan bir algoritma, seçilen aktif SD'lerde aynı modlara sahip olmalıdır.

Geliştirilen yeni MDD yöntemleri seçilen temel eleman tipleri olan çubuk, kiriş ve plak üzerinde hazırlanan Matlab kodları yardımıyla uygulanarak yöntemlerin performansı, literatürde bulunan diğer yöntemler ile karşılaştırılmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir. Geliştirilen iki yeni yönteminde aynı algoritmaları vermesi nedeniyle yeni yaklaşım "Toplam enerjilerin denkliği" yöntemi olarak adlandırılmıştır.

Çubuk eleman sistemi için yapılan örnek uygulamalar, kısım 5.3'de, Euler-Bernoulli kiriş eleman sistemi için yapılan örnek uygulamalar, kısım5.4'de ve Plak eleman için yapılan uygulamalar da kısım 5.5'de toplanmıştır.

Diğer yöntemler ile yapılan karşılaştırmaların yanısıra aynı sistemler, yapısal dinamik analizlerin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılmakta olan ticari kodlardan ANSYS'de doğrulamak amacıyla çubuk sistem uygulamalarının analizleri gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar ile MDD uygulanmış sistem cevaplarının arasındaki benzerlikler ve farklılıklar yine yukarıda belirtilen kısımların içinde yorumlanmıştır.

5.3 Çubuk Eleman Sisteminde Model Derecesi Düşürme Uygulaması

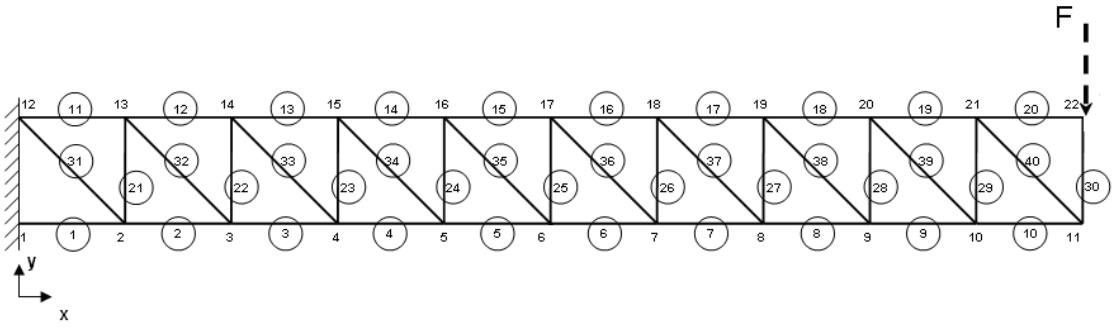
Yeni yöntemlerin uygulanması için ilk örnek uygulama Şekil 5.1'de verilmekte olan düzlemsel çubuk eleman sistemi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu seçimde düzlemsel çubuk eleman sisteminin analitik kesin çözümünün bilinmesi önemli rol oynamıştır. Sistemin farklı eleman sayıları ve model düşürme dereceleri için yapılan analizlerinin sonuçları elde edilmiş ve değerlendirilmiştir.

Toplam enerjilerin denkliği ve özdeğer problemi çözümü yaklaşımlarından bulunan (5.12), (5.21) ve (5.14), (5.20) nolu bağıntılar, MATLAB'te hazırlanan bir program içerisinde Şekil 5.1'de verilmekte olan orijinal çubuk sistem modelinin dinamik analizinde uygulanmıştır.

5.3.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar

Uygulamada yapının sönümlü ve sönümsüz davranışları farklı yükleme tiplerine göre incelenmiş ve farklı MDD yöntemleri uygulanmış sistem cevaplarının bu hesaplamalarda kullandığı işlem zamanları karşılaştırılmıştır.

Analizi yapılan sistem 40 adet çubuktan oluşmakta olup bunlardan 30 adedinin uzunluğu $l_1 = 1m$, 10 adedinin uzunluğu da $l_2 = 1.41m$'dir. Kesit alanları $A = 0.00045m^2$ olan 2.5 mm et kalınlığına sahip 60 mm çapındaki boru kesitli çubukların birleşimleri, 22 düğüm noktasında gerçekleşmektedir.



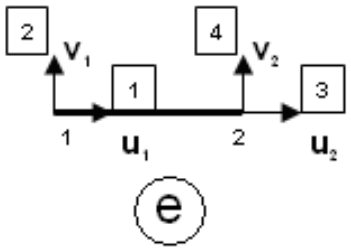
Şekil 5.1 : 40 elemanlı düzlemsel çubuk sistem [45].

Çubukların malzemesi olarak ilk örneklerde yoğunluğu $\rho = 7850kg/m^3$ olan çelik seçilmiş olup, elastiklik modülü $E = 210GPa$ alınmıştır. Farklı sönüm katsayısı, yoğunluk, poisson oranı, elastiklik modülü ve kayma modülü değerlerine sahip malzemeler için MDD yöntemlerinin sonuçlarını görebilmek amacıyla, Çizelge 5.1'de verilen malzemeler kullanılarak analizler tekrarlanmıştır.

Çizelge 5.1 : Analizlerde kullanılan malzemelerin özellikleri.

Malzeme	Katılık orantılı sönüm katsayısı β	Yoğunluk ρ [kg/m^3]	Poisson oranı ν	Elastiklik modülü E [GPa]	Kayma modülü G [GPa]
Saf alüminyum	0.00008	2700.00	0.35	70.00	26.00
Çelik	0.001	7850.00	0.30	210.00	75.00
Dökme demir	0.01	7700.00	0.29	211.00	82.00
Kurşun	0.1	11340.00	0.44	16.00	5.60

Şekil 5.1'de verilen kafes sistemde kullanılan elemanların düğüm noktası tanımları ve serbestlik derecelerinin numaralandırılması, Şekil 5.2'de verilmektedir.



Şekil 5.2 : Çubuk elemanın düğüm noktası ve serbestlik derecesi numaralandırması.

Öncelikle sisteme ait topoloji matrisi oluşturularak, elemanlar ile düğüm noktaları ve serbestlik dereceleri arasındaki ilişki tanımlanmıştır. Bu ilişki kullanılarak $\boldsymbol{K}_{\text{Ç}}$ eleman katılık ve $\boldsymbol{M}_{\text{Ç}}$ eleman kütle matrislerinin montaj işlemi yapılmış ve $\boldsymbol{K}$ sistem katılık matrisi ile $\boldsymbol{M}$ sistem kütle matrisi elde edilmiştir. 1 ve 12 nolu düğüm noktalarından ankastre olarak sabitlenmiş olan sistemin sınır şartları uygulanarak orijinal modelin düzenlenmiş $\boldsymbol{K}_2$ ve $\boldsymbol{M}_2$ sistem matrisleri elde edilmiştir. Rayleigh yaklaşımı ile sistemin sönüm matrisi $\boldsymbol{C}_2 = \beta \boldsymbol{K}_2$ bağıntısı ile oluşturulmuştur. Uygulamada seçilen örnek malzemelerin Çizelge 5.1'de verilen katılık orantılı sönüm katsayıları (β=0.00008, 0.001, 0.01, 0.1) için analizler tekrarlanmıştır. Çubuk sistemin sınır şartları uygulandıktan sonra kuvvet yüklemesinin uygulandığı serbestlik derecesi 40'dır. Bu yükleme, 30 numaralı elemanın üst ucunda yer alan 22 nolu düğüm noktasına F=-100 N kuvveti uygulanmaktadır. Buna göre kuvvet matrisi $\boldsymbol{F}_2$ oluşturulmaktadır.

5.3.2 Dönüşüm matrisinin oluşturulması ve kullanılması

MDD uygulanmış sistem, (4.11) bağıntısı kullanılarak elde edilmektedir. (4.11) denklemindeki $\boldsymbol{E}$ dönüşüm matrisinin oluşturulması için öncelikle MDD uygulanmış sistemde korunacak serbestlik dereceleri belirlenmiştir. $\boldsymbol{E}$ dönüşüm matrisini oluşturacak aktif serbestlik derecelerinin seçimine uygun bir yaklaşım getirilmesi, alınan sonuçlardaki doğruluğun artmasını sağlacaktır. Aktif serbestlik derecelerinin seçiminde izlenecek yol olarak öncelikle yüklemelerin yapıldığı düğüm noktaları, yükleme yapılan bölgeye yakın düğüm noktaları, deneme-yanılma yolu (heuristic) ve son olarak özdeğerlerin karşılaştırılması gibi değişik seçenekler bulunmaktadır. Yüklemelerin yapıldığı ve bunların yakınlarındaki düğüm noktaları kuvvet, gerilme ve yerdeğişimi değerlerindeki değişimlerin yeterli doğrulukta izlenebilmesi için gereklidir. Bu çalışmada bütün bu yöntemler uygulanmıştır. Bu yaklaşımlar arasında özdeğerlerin karşılaştırılması, en sistematik yöntem olmasına karşılık model derecesi düşürme imkanlarını kısıtladığı görülmüştür.

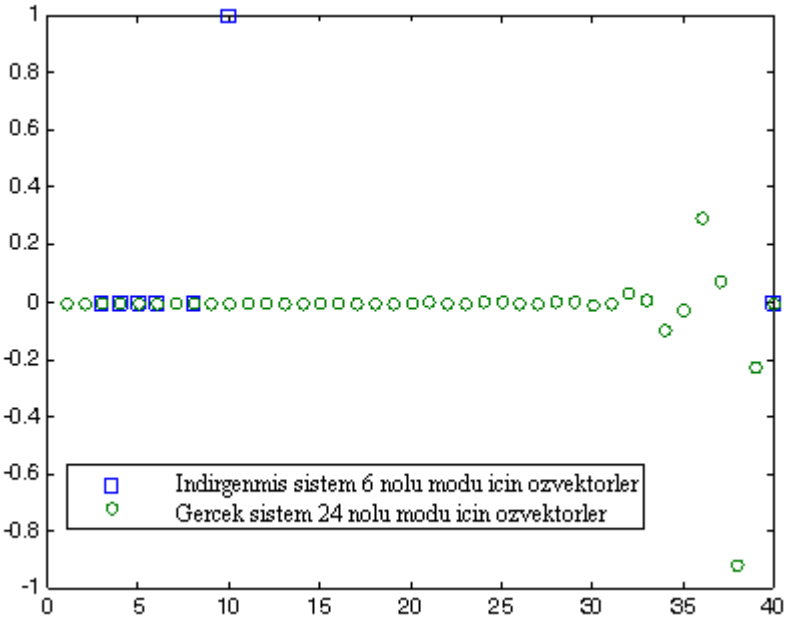
Aktif serbestlik derecelerinin seçiminde kullanılan bu yaklaşımlar, çalışmada incelenen tüm MDD yöntemleri için dikkate alınarak statik analizlere de uygulanabilmektedir.

5.3.3 Özdeğerlerin karşılaştırılması ve MDD seçim kriteri olarak kullanılması

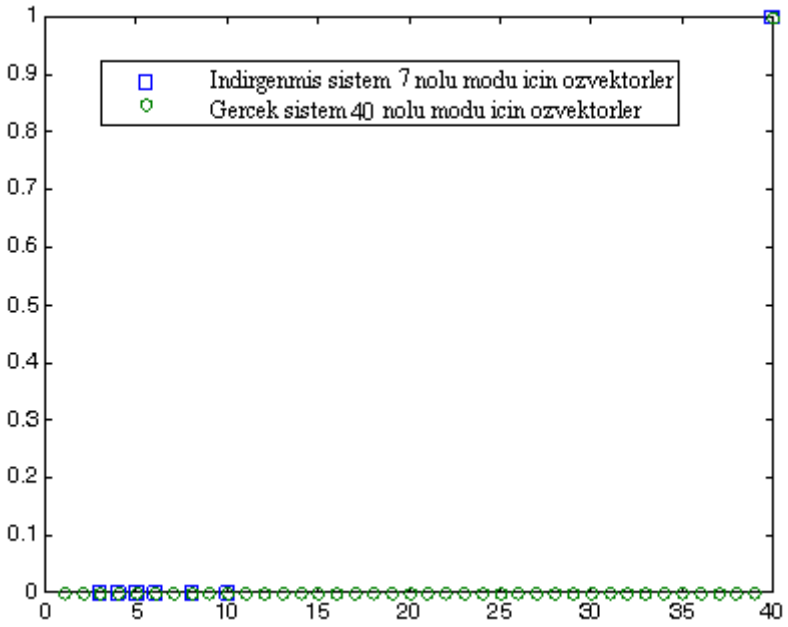
Bu yeni yaklaşımda MDD uygulanarak elde edilecek sistemin serbestlik derecelerinin seçiminde modal analiz sonucunda bulunan özdeğerlerinin orijinal sisteminkiler ile çakışması ölçütünün kullanılması hedeflenmiştir. Elde edilen $\boldsymbol{E}$ dönüşüm matrisi, (5.20), (5.21) ve (3.42) bağıntıları uygulanarak model derecesi düşürülmüş sistemin $\hat{\boldsymbol{K}}$, $\hat{\boldsymbol{M}}$ ve $\hat{\boldsymbol{C}}$ matrisleri oluşturulmuştur. Orijinal modelin ve model derecesi düşürülmüş sistemin katılık, kütle ve sönüm matrisleri kullanılarak her iki sistemin özdeğerleri ve özvektörleri hesaplanmıştır. Bu seçim ölçütünün hazırlanan Matlab kodunda doğrudan kullanılabilmesi için değişik algoritmalar denenmiştir. MDD işleminde kullanılacak modların seçimi için yeni bir sistematik getirilerek, özdeğerleri orijinal sisteme yakın sonuçlar veren düğüm noktalarının haricindeki pasif serbestlik dereceleri analizlerde dikkate alınmaması sağlanmıştır.

Her bir serbestlik derecesi için elde edilen özdeğerlerin sonuçları birbirleri ile karşılaştırılarak uyumlu olanlar tespit edilmektedir. Ardından uyumlu olduğu görülen serbestlik dereceleri için sistem cevaplarını veren özvektörler grafik üzerinde

incelenerek aynı sonuçları oluşturan yerdeğiştirmeler, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'de verildiği gibi elde edilmektedir.



Şekil 5.3 : Model derecesi 7 için orijinal model 24üncü özdeğerine göre bulunan özvektörleri (daire) ile MDD uygulanmış sistemin 6ncı özdeğerine ait özvektörlerinin (kare) karşılaştırılması.



Şekil 5.4 : Model derecesi 7 için orijinal model 40ıncı özdeğerine göre bulunan özvektörleri (daire) ile MDD uygulanmış sistemin 7nci özdeğerine ait özvektörlerinin (kare) karşılaştırılması.

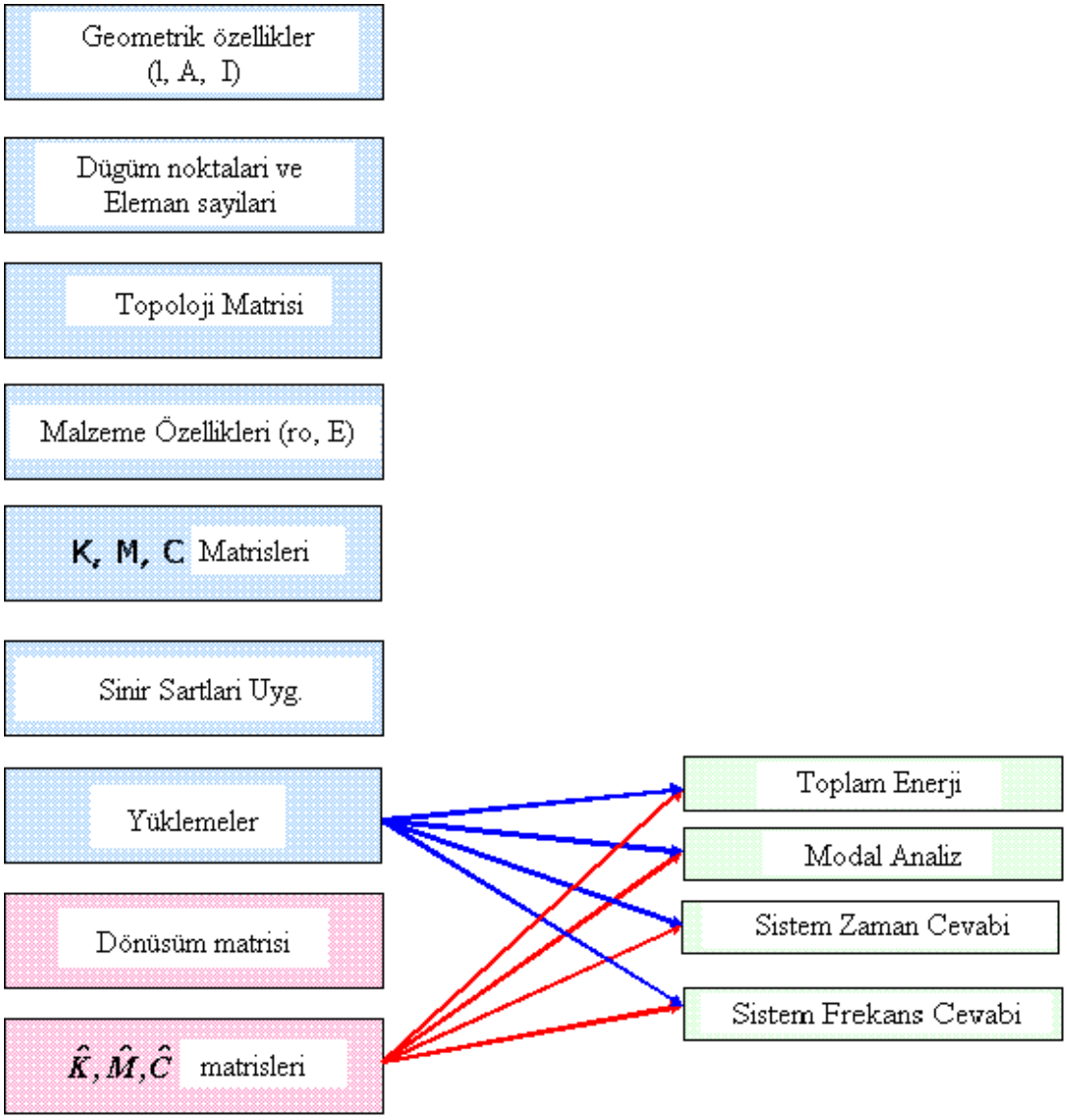
Orijinal model ve model derecesi düşürülmüş sistemden alınan cevaplar karşılaştırıldığında özdeğerleri uyumlu olan modlardaki tüm serbestlik derecelerindeki sistem cevaplarının ise bir kısmının uyumlu, bir kısmının uyumsuz olduğu gözlenmektedir. Şekil 5.3 ve 5.4'de orijinal model derecesi 40 olan bir sistemin ve 7nci dereceye indirgenmiş hali için yapılan modal analizden örnekler sunulmaktadır. Bu örnekte önce orijinal modelin özdeğer sonuçları ile indirgenmiş sistemin özdeğer sonuçları karşılaştırılmıştır. Her iki sistemde de birbirine yakın olan özdeğer sonuçları alınıp alınmadığı kontrol edilmiş ve bu şekilde devam eden iterasyonlar sonunda optimum indirgenmiş sistem ele alınmıştır. Bu karşılaştırmada 40 SD'li orijinal modelin 24 nolu özdeğerinin, indirgenmiş sistemin 6 ve 40 nolu orijinal model modunun da indirgenmiş sistemde 7 nolu moda yakın olduğu tespit edilmiştir. Ardından orijinal model ve indirgenmiş sistem için bu özdeğer sonuçları incelenmiş ve Şekil 5.3 ile 5.4'de görüldüğü şekilde özdeğer sonuçları birbirine yakın olan bu sistem modlarında özvektör sonuçlarının da aynı olduğu tespit edilmiştir. Daha ileride sunulacağı üzere, orijinal model ve indirgenmiş sistem zaman cevapları birbirine çok yakındır.

Buradaki karşılaştırmalar sonunda varılan sonuç, zaman cevapları çok yakın olan orijinal model ve indirgenmiş sistemin özdeğerleriyle özvektörleri birbirinden çok farklı olabilmektedir. Eğer orijinal model ve indirgenmiş sistemin özdeğerleriyle özvektörlerinin aynı olması isteniyorsa, bu ancak aktif serbestlik derecelerinin özvektör içinde sıfırdan farklı yer değişimine sahip olan düğüm noktalarının seçilmesi ile mümkün olabilmektedir.

Ancak yapılan diğer analizlerde bu kritere uyulmadan seçilen SD'leri içeren indirgenmiş sistemlerin de orijinal modellerle çok uyumlu sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu nedenle, devam eden analizlerde indirgenmiş sistem SD seçimleri, model derecesinin daha fazla düşürülmesine imkan sağlaması şartı ile deneme-yanılma yaklaşımı ile herhangi bir genel kriter kullanılmadan gerçekleştirilmiştir.

5.3.4 Model derecesi düşürme Matlab akış şeması

Model derecesi düşürme yöntemlerinin karşılaştırılması amacıyla hazırlanan Matlab kodunun temel adımlarını içeren akış şeması Şekil 5.5'de verilmektedir. MDD ile elde edilen indirgenmiş sistemlerin ve orijinal modellerin analizlerinde bu metodoloji izlenmiştir.



Şekil 5.5 : Düzlemsel çubuk sistem analizi için Matlab kodu akış şeması.

5.3.5 Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması

Çalışmanın devam eden aşamasında seçilen model üzerine farklı sönüm değerlerine sahip sistemler üzerine uygulanan impuls, basamak ve sinüs girişlerine karşılık orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve İmpuls Cevabı İnvaryantı (IRI) yöntemleri ile model derecesi düşürülmüş sistemlerden alınan cevapların zaman uzayında ayrı ayrı karşılaştırılmaları yapılmıştır. Yapılan analiz uygulamalarının ilk kısmında eleman sayısı 40 olarak alınmıştır.

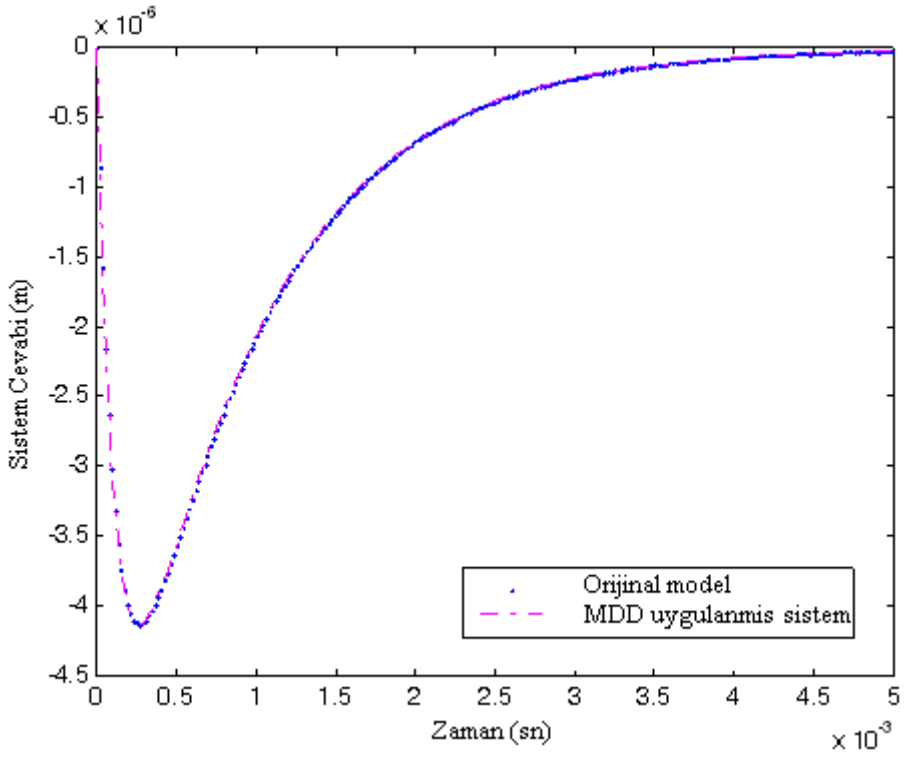
Yapılan analizlerde IRI metodu ile gerçekleştirilebilen en düşük sönüm değerinin β=0.00008 olması nedeniyle karşılaştırma yapılan diğer tüm sistemler için sönümsüz durumu temsil etmesi amacıyla bu sönüm değeri kullanılmıştır.

Yapılan analizlerde uygulanan Δt zaman adımlarının eleman tipine bağlı olarak seçilmesinin analiz sonuçlarının detaylarının görülebilmesi açısından öneminin büyük olduğu görülmüştür. Öncelikle genel olarak 0,001 saniye seçilen zaman adımının analiz sonuçlarındaki sönüm salınımlarının görülmesini engellediği tespit edilmiş ve [4] nolu kaynakta her bir eleman tipi için önerilen yaklaşım kullanılarak sonuç grafikleri üzerinde önemli gelişmeler elde edilmiştir [4].

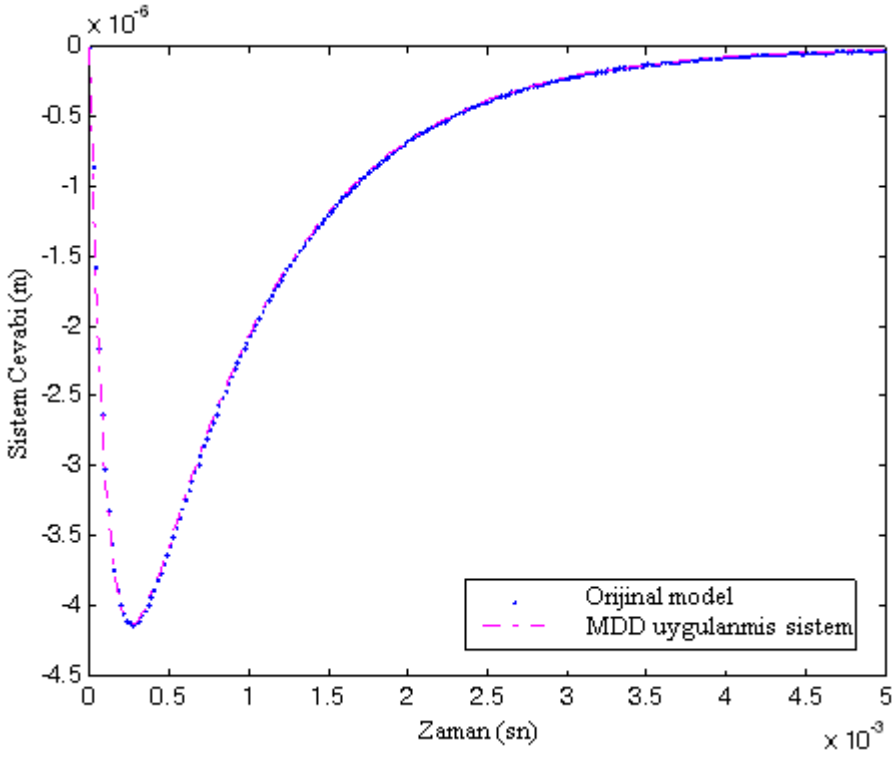
Çubuk sistemi analizi için seçilmesi tavsiye edilen en küçük zaman adımı, L eleman boyu, E elastiklik modülü ve ρ yoğunluk olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\Delta t \leq \frac{L}{\sqrt{E/\rho}} \qquad \textbf{(5.22)}$$

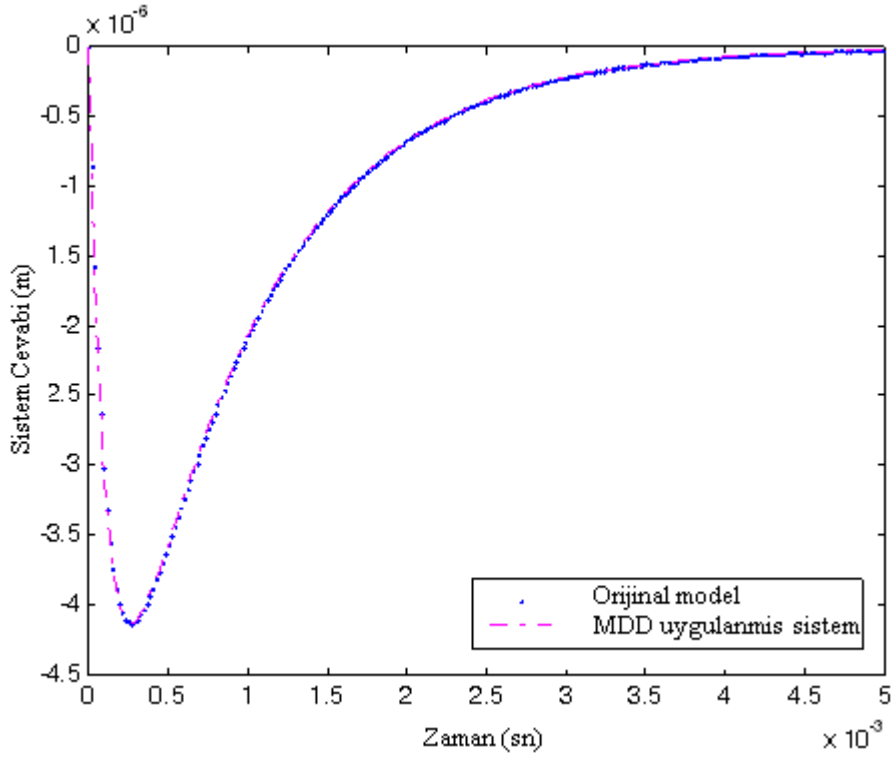
Çalışmada dikkate alınan MDD yöntemlerinin β=0.001 için impuls cevapları, Şekil 5.6-5.9'da verilmektedir.



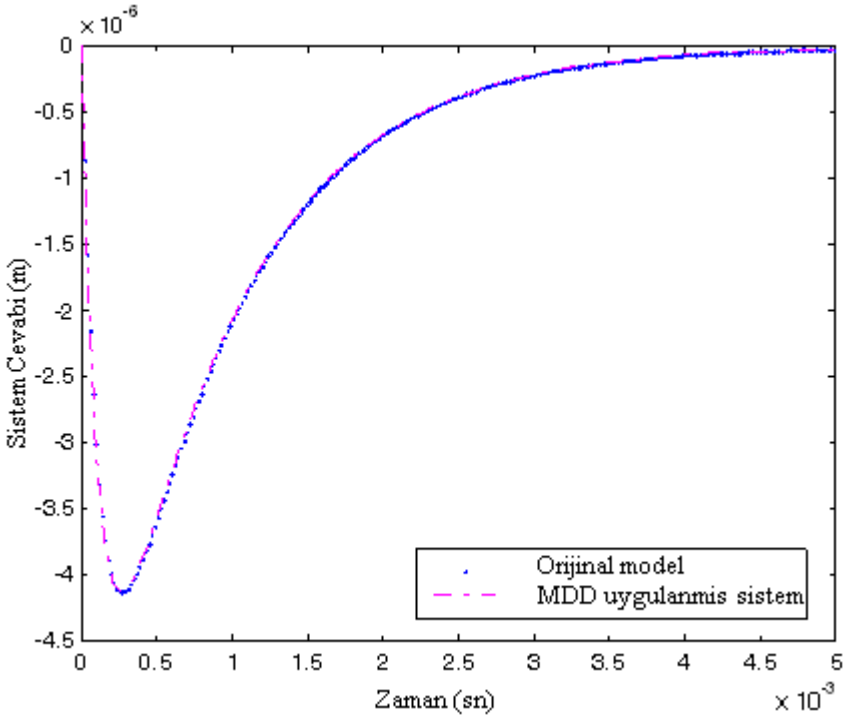
Şekil 5.6 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.



Şekil 5.7 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

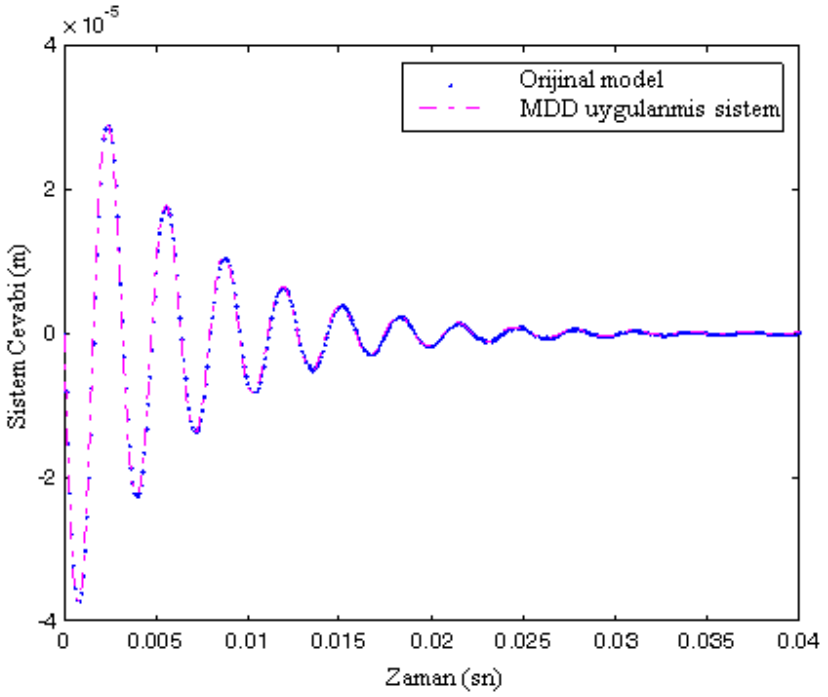


Şekil 5.8 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

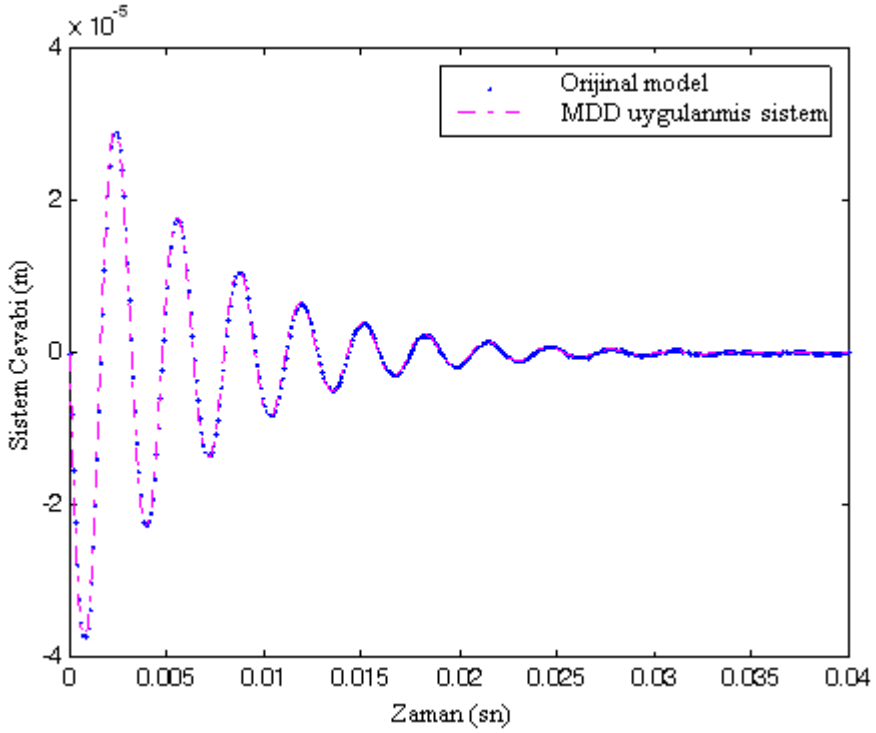


Şekil 5.9 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

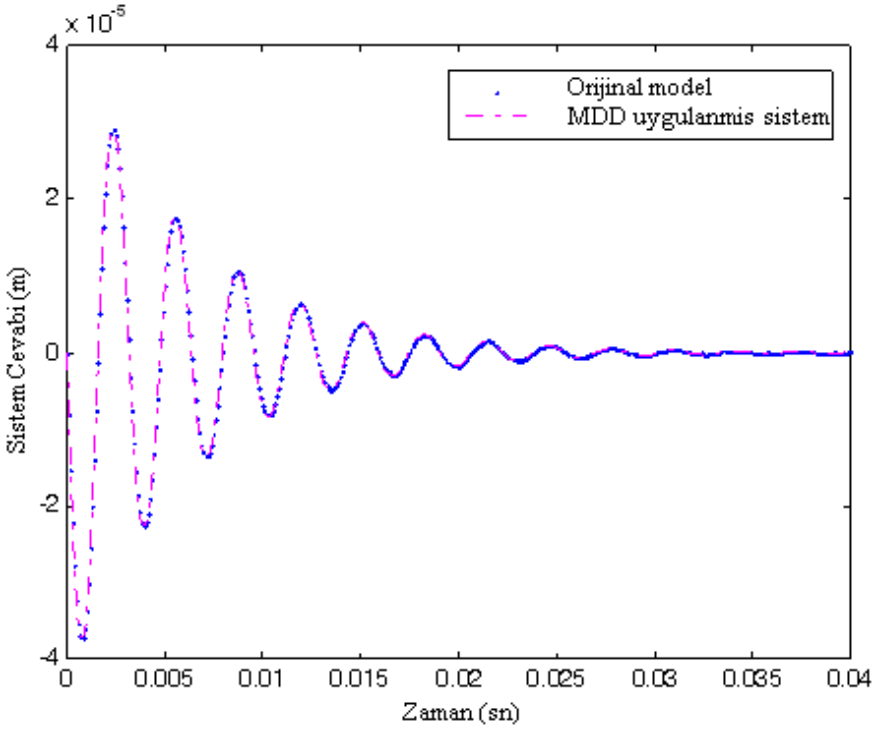
Çalışmada dikkate alınan MDD yöntemlerinin β=0.00008 için impuls cevapları, Şekil 5.10-5-13'de verilmektedir.



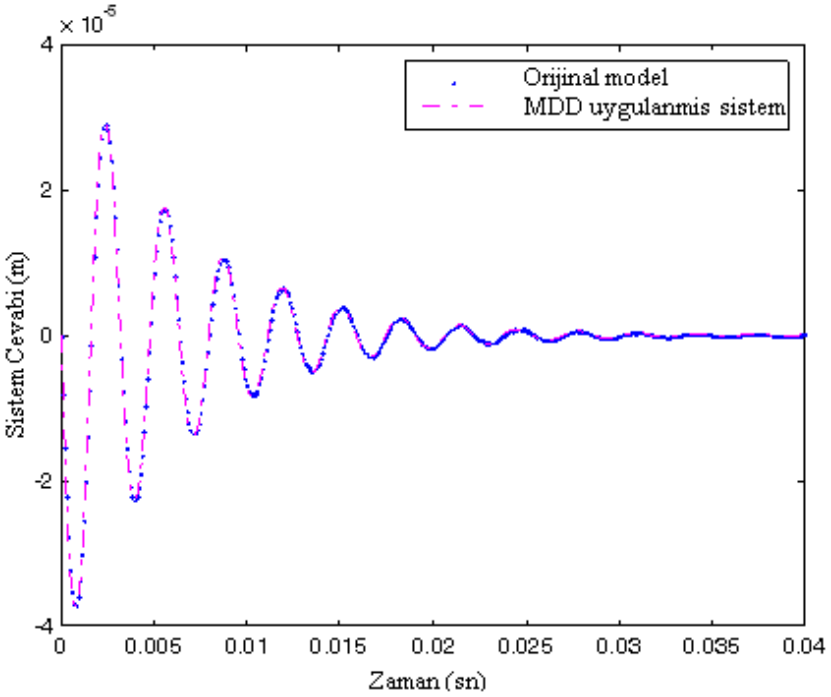
Şekil 5.10 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.



Şekil 5.11 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

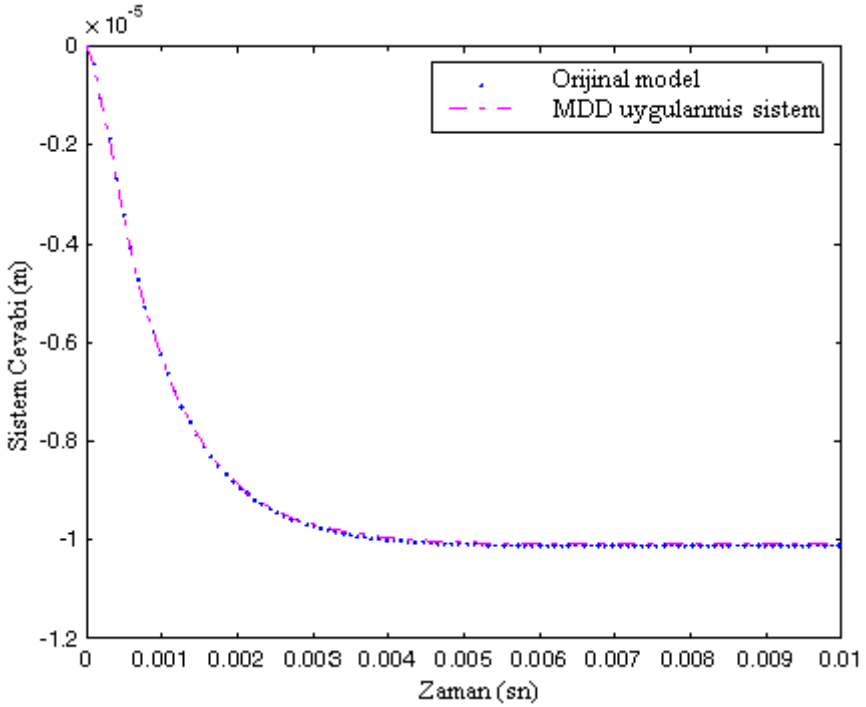


Şekil 5.12 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

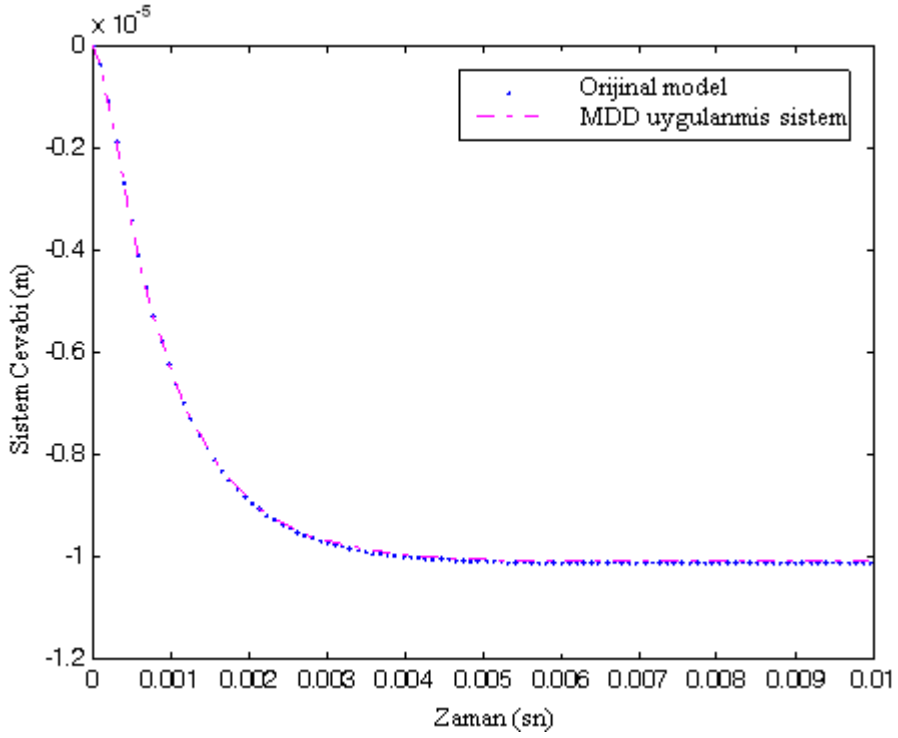


Şekil 5.13 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

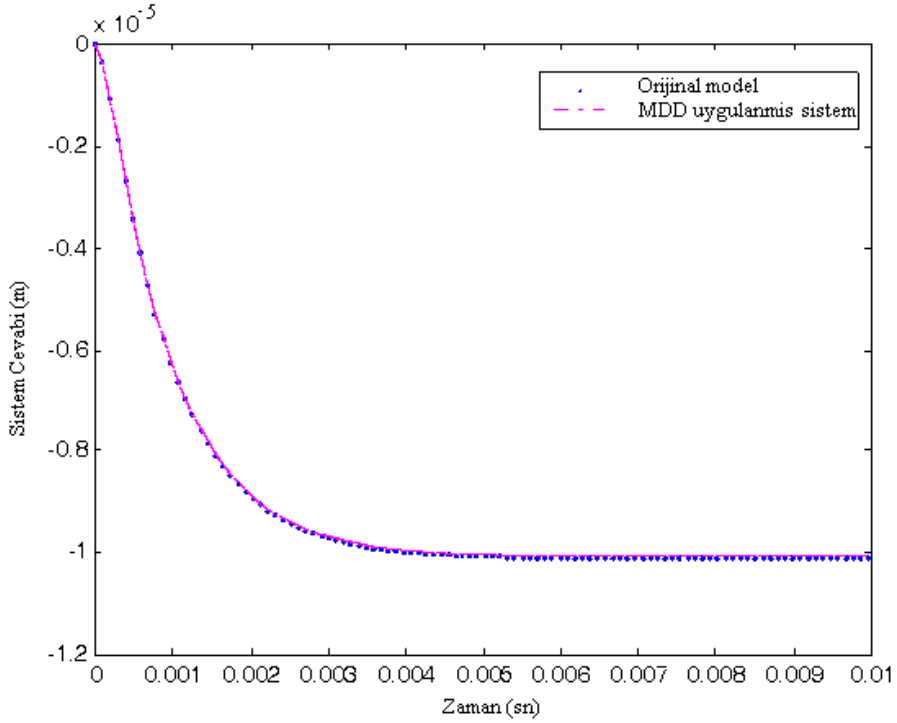
Çalışmada dikkate alınan MDD yöntemlerinin β=0.001 için basamak cevapları, Şekil 5.14-5.17'de verilmektedir.



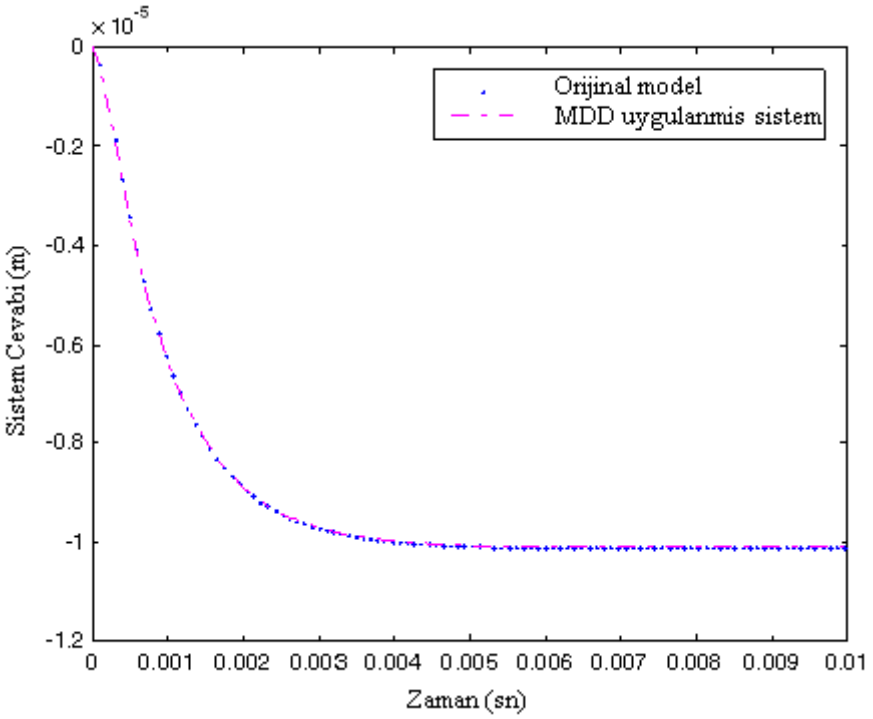
Şekil 5.14 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.



Şekil 5.15 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

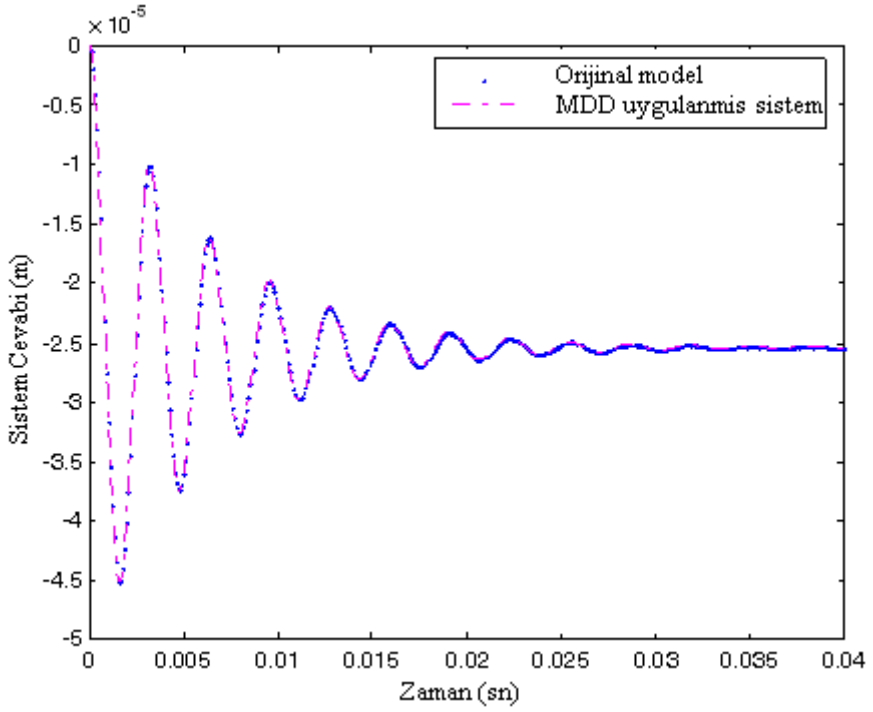


Şekil 5.16 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

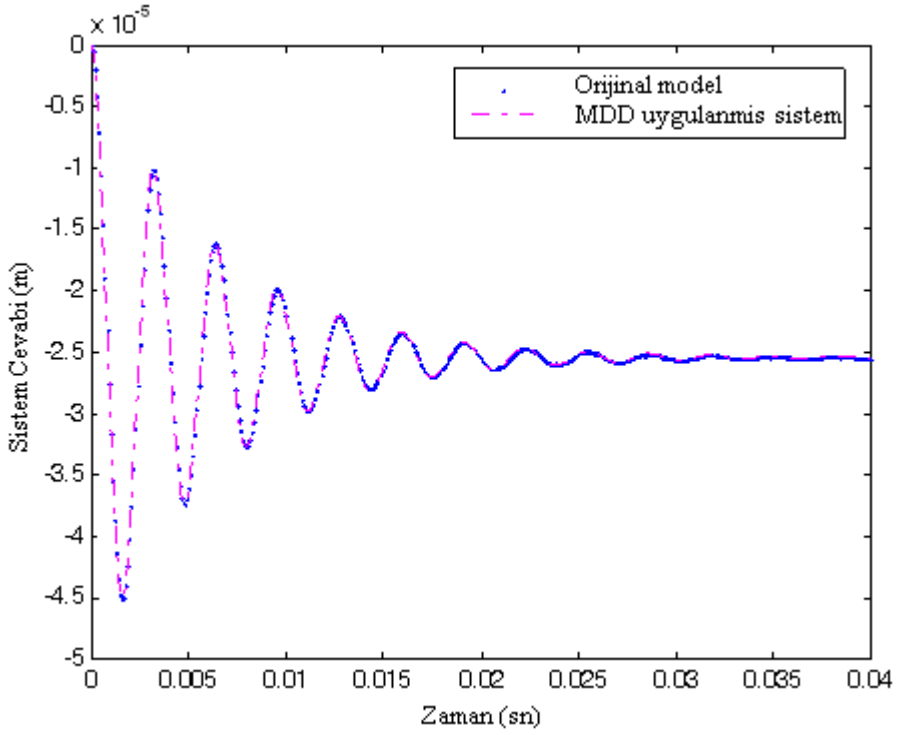


Şekil 5.17 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

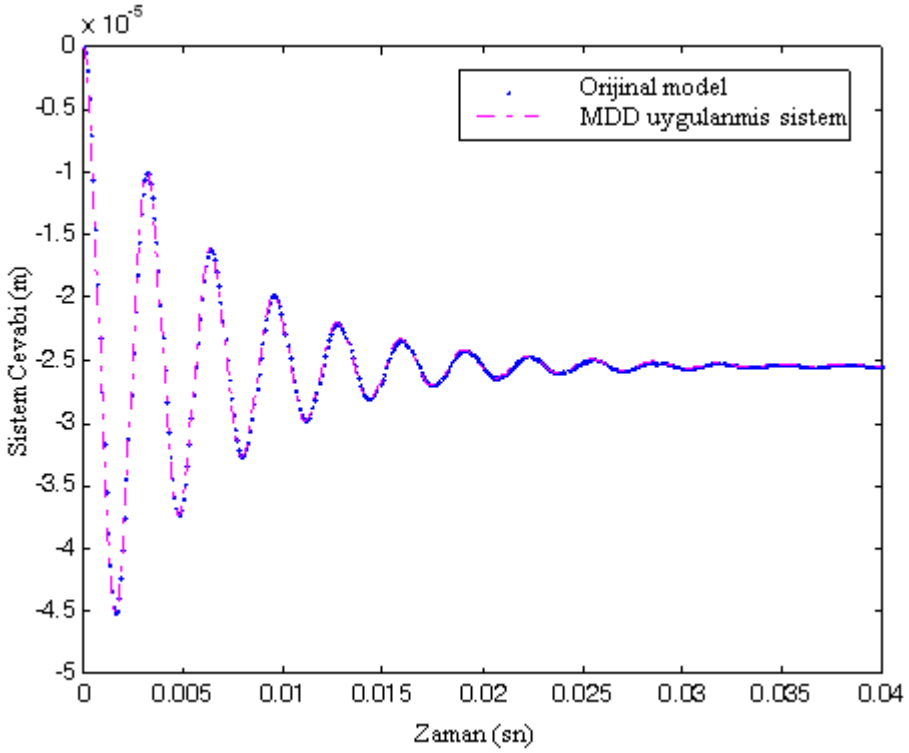
Çalışmada dikkate alınan MDD yöntemlerinin β=0.00008 için basamak cevapları, Şekil 5.18-5.21'de verilmektedir.



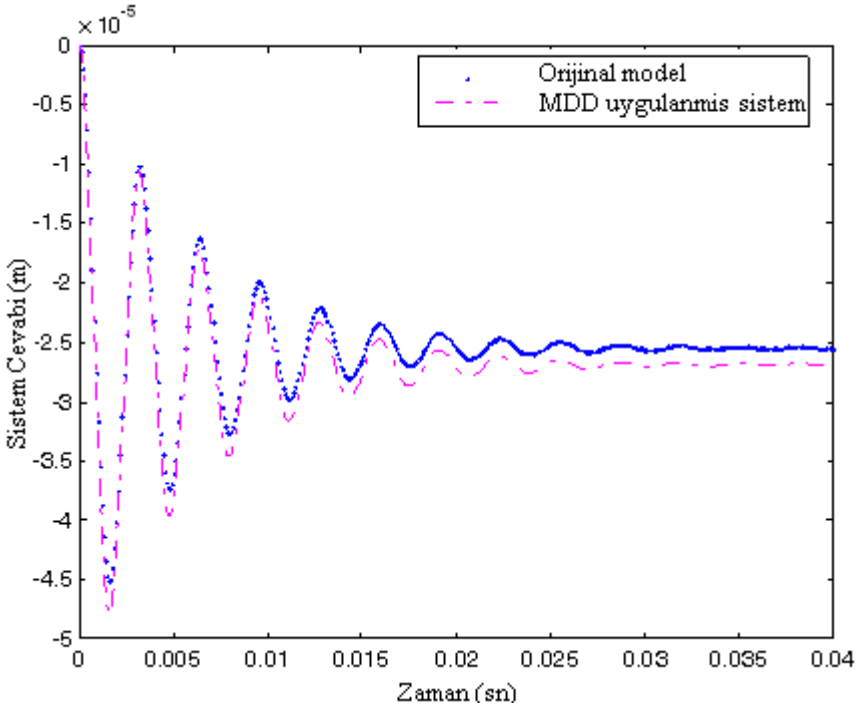
Şekil 5.18 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.



Şekil 5.19 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

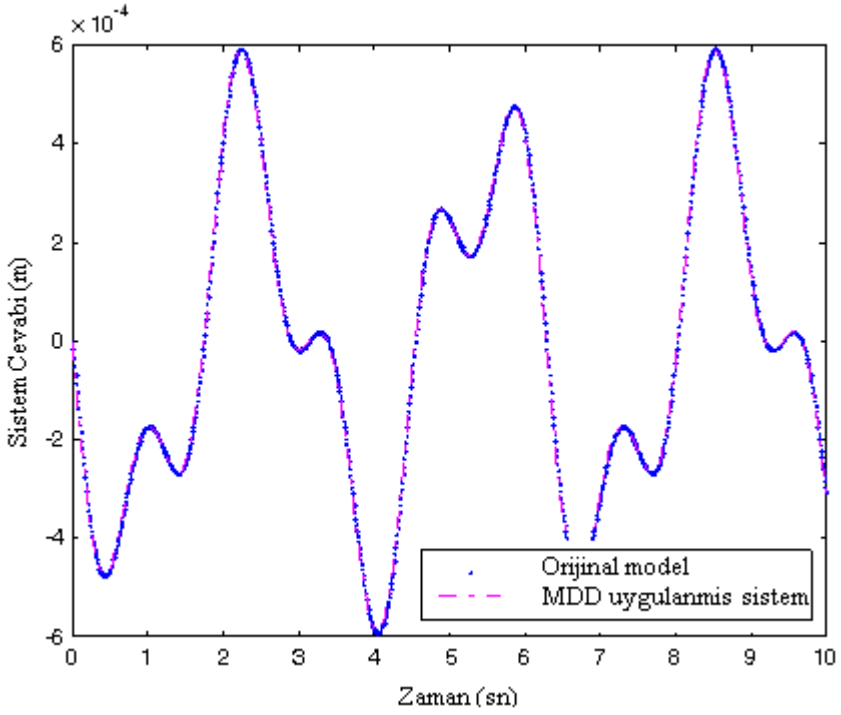


Şekil 5.20 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

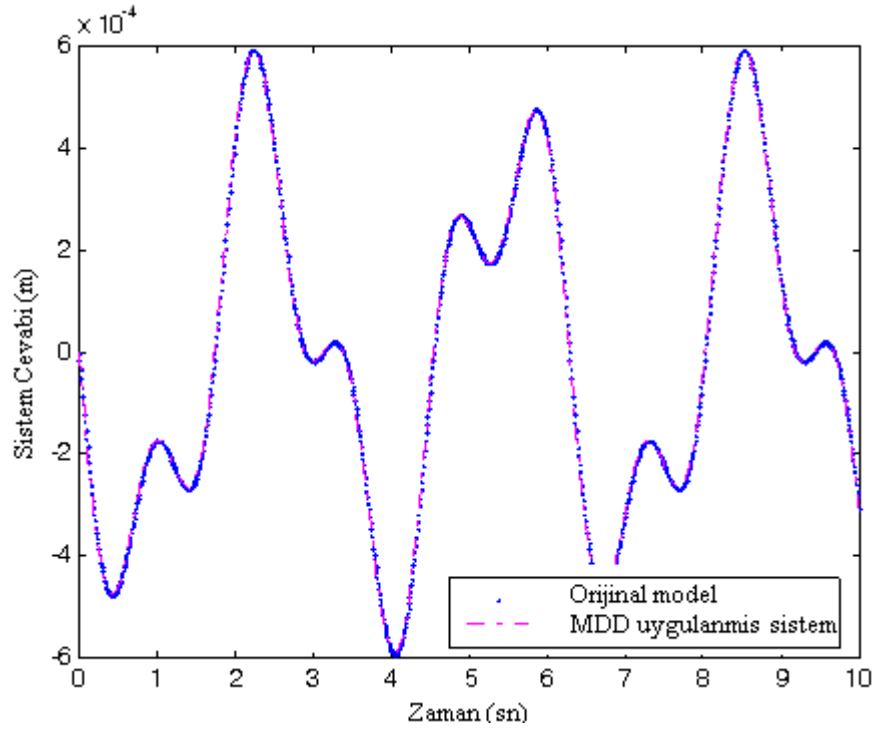


Şekil 5.21 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

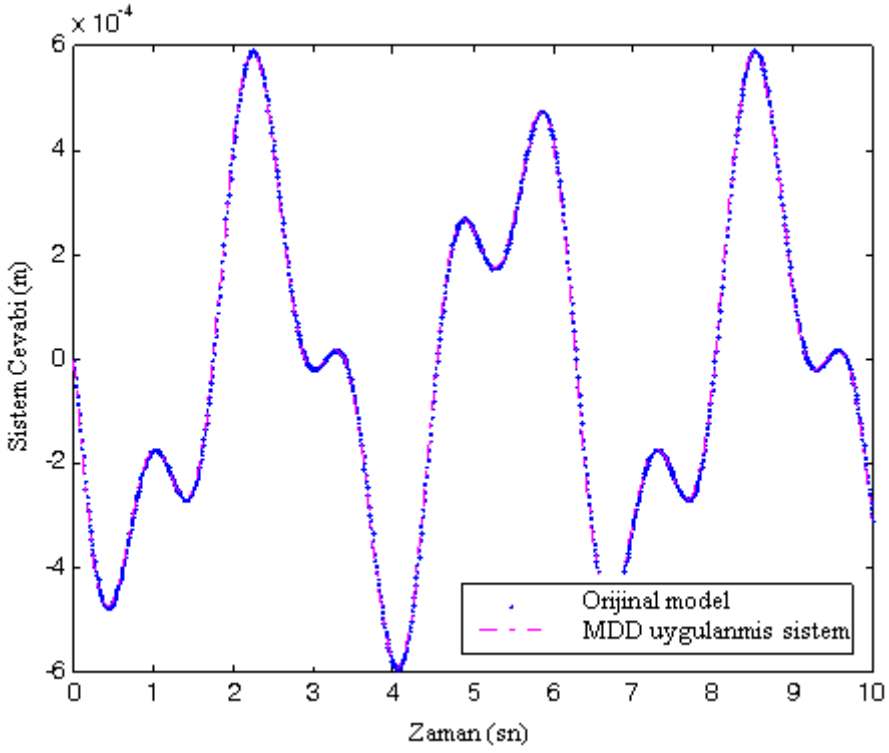
Çalışmada dikkate alınan MDD yöntemlerinin β=0.001 için sinüs cevapları, Şekil 5.22-5.25'de verilmektedir.



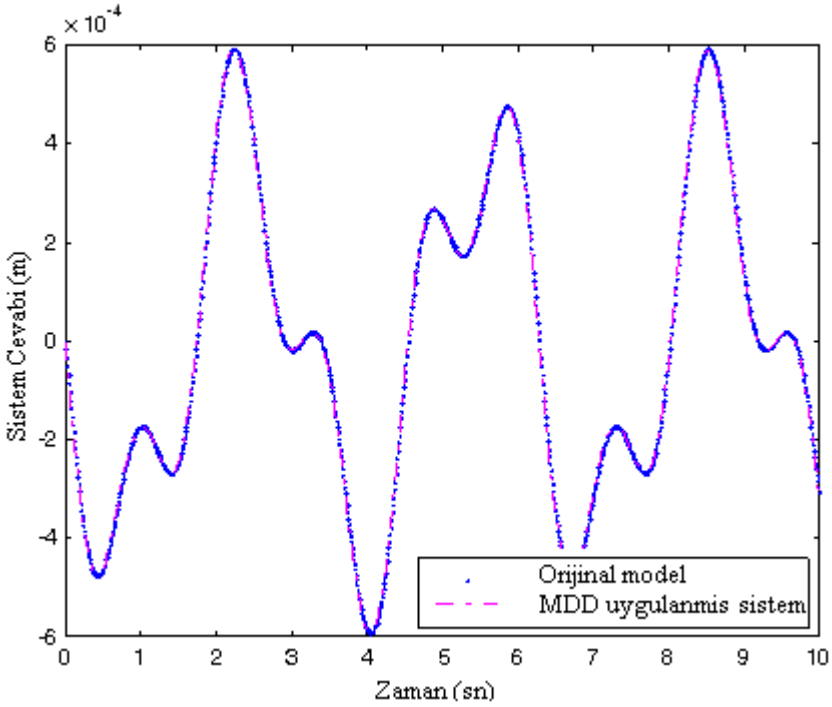
Şekil 5.22 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.



Şekil 5.23 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

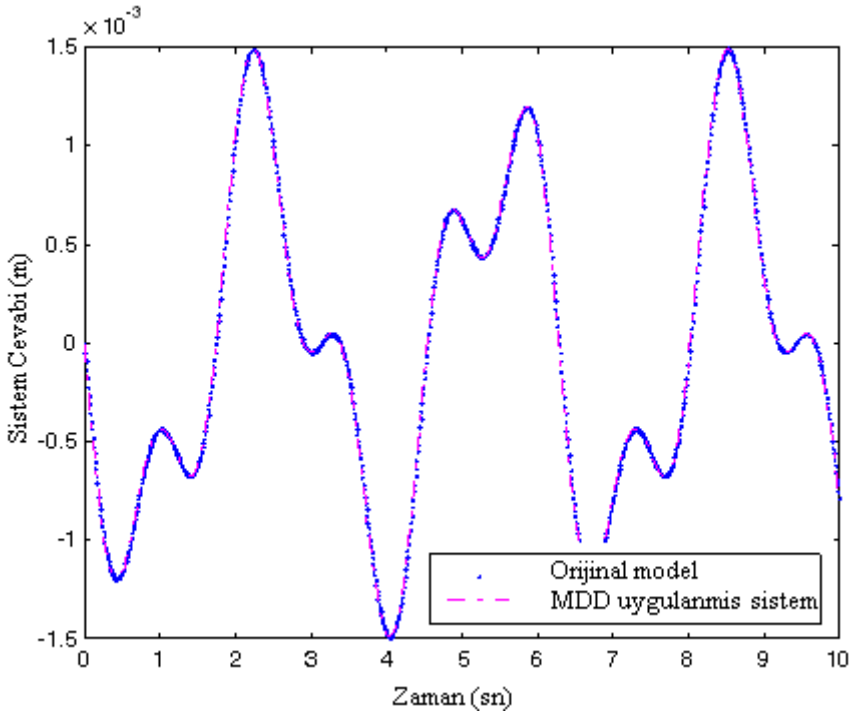


Şekil 5.24 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

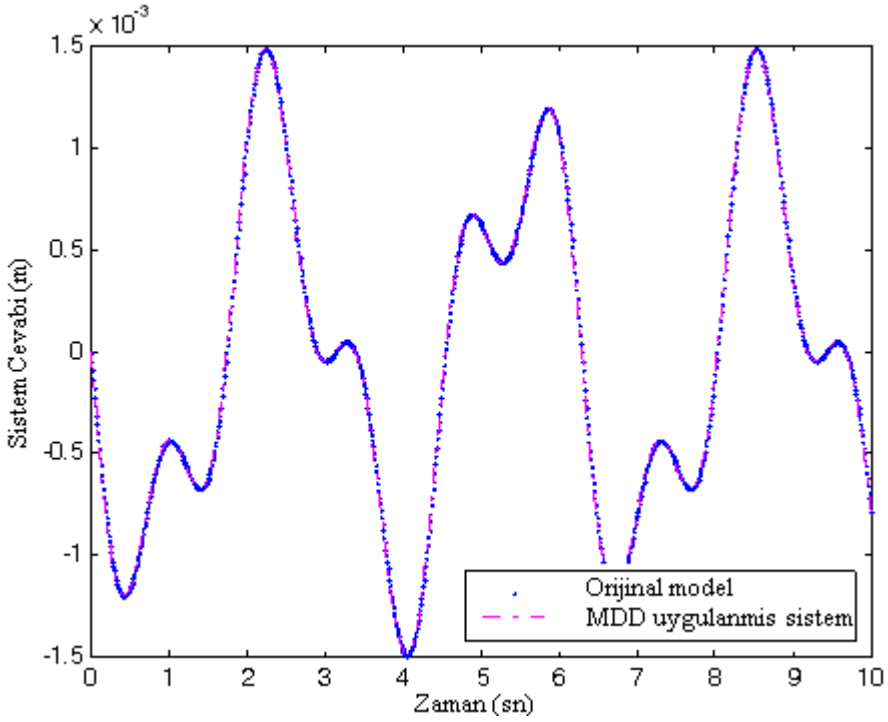


Şekil 5.25 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

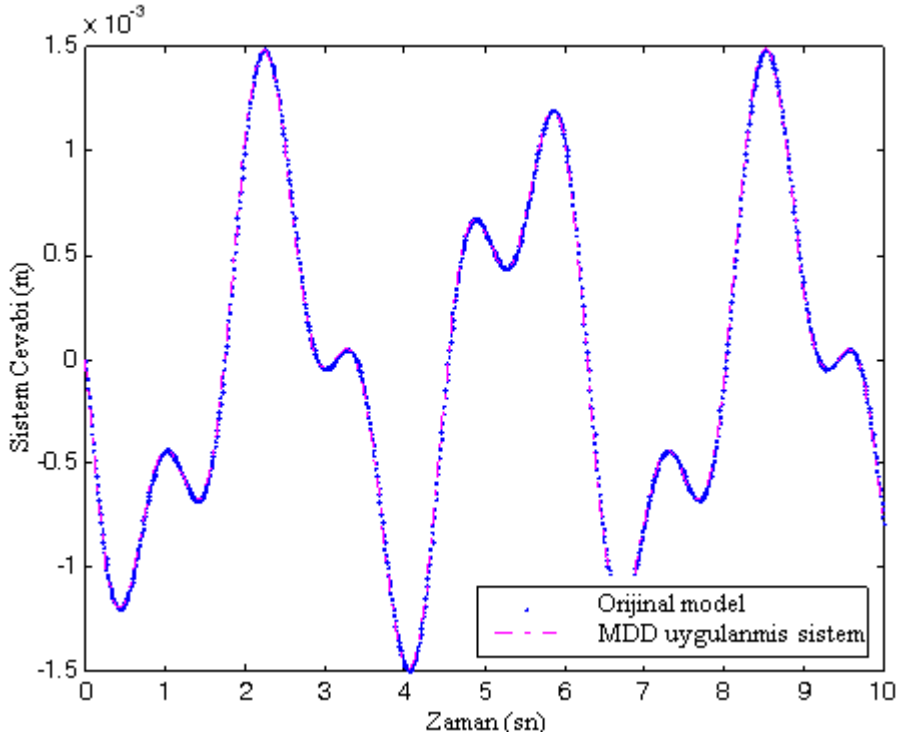
Çalışmada dikkate alınan MDD yöntemlerinin β=0.00008 için sinüs cevapları, Şekil 5.26-5.29'da verilmektedir.



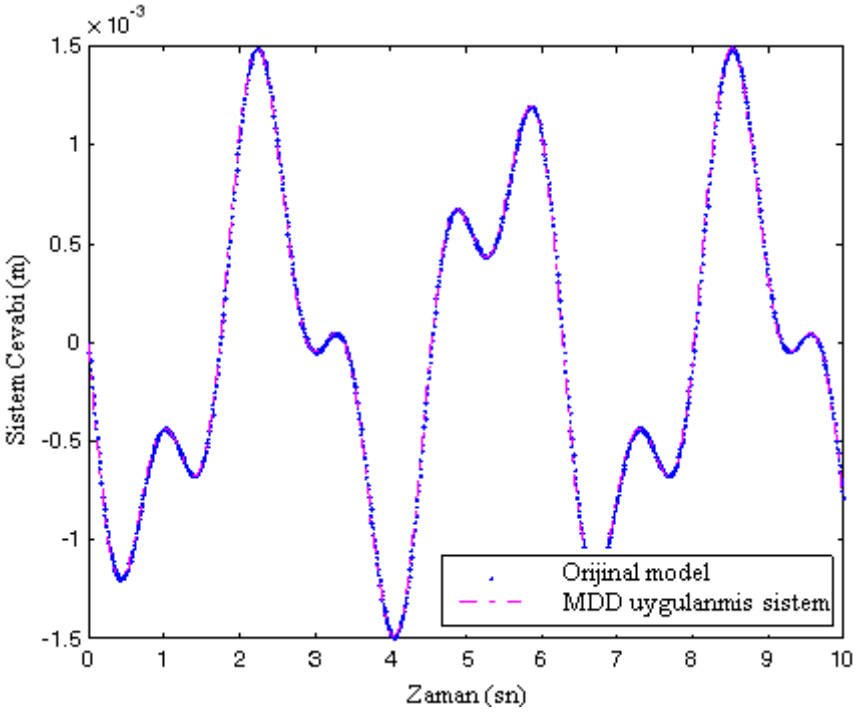
Şekil 5.26 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.



Şekil 5.27 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

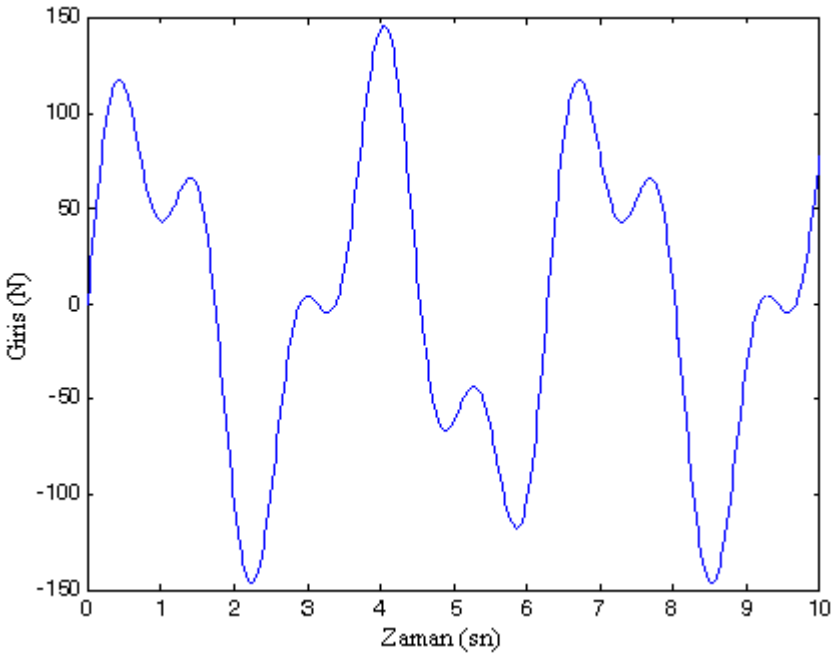


Şekil 5.28 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.



Şekil 5.29 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

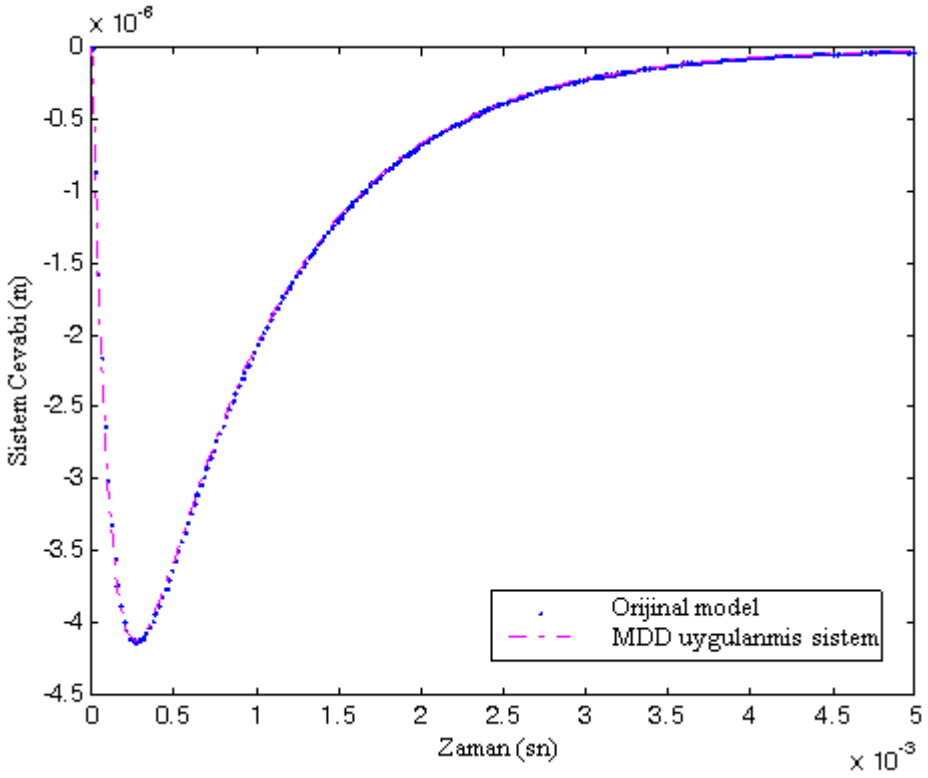
Uygulanan sinüs kuvvet giriş fonksiyonu f=100*sin(2*tzaman)+50*sin(5*tzaman) Şekil 5.30'da yer almaktadır. Görüldüğü gibi, yükleme iki farklı değerde açısal frekans içeren sinüs fonksiyonlarının toplamından oluşmaktadır.



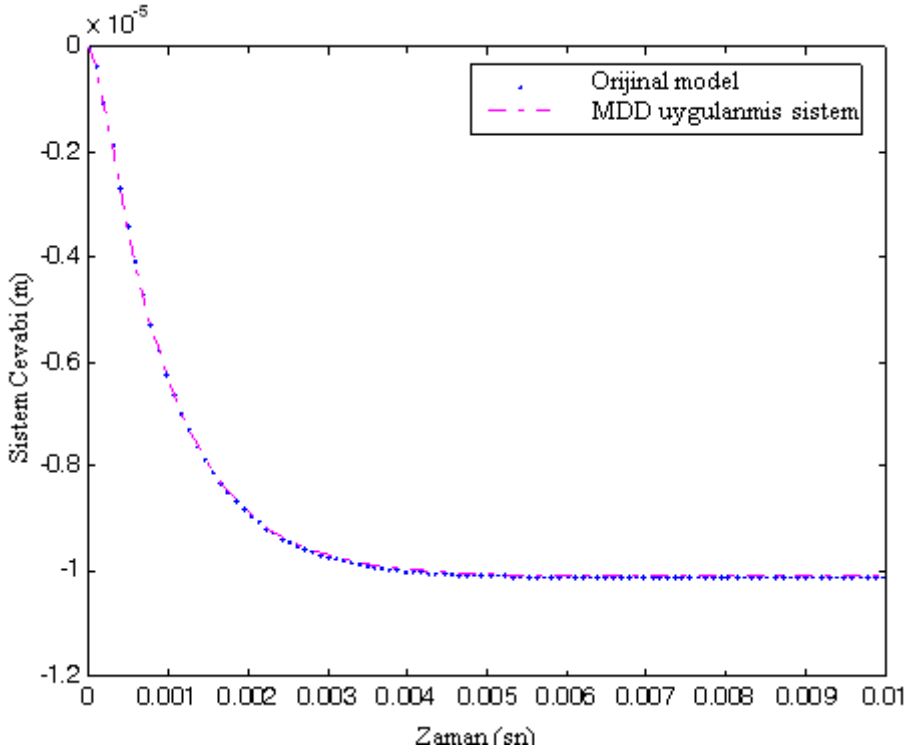
Şekil 5.30 : Uygulanan sinüs giriş fonksiyonu.

Eleman sayısının 40 alındığı analizlerin yanı sıra, eleman sayısı 100 ve 1000 olan sistemler ile ilgili örnek analiz çalışmaları yapılmıştır. Serbestlik dereceleri, 100 eleman için 100'den 12'ye ve 1000 eleman için 1000'den 20'ye serbestlik dereceleri düşürülmüş sistemlerde başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

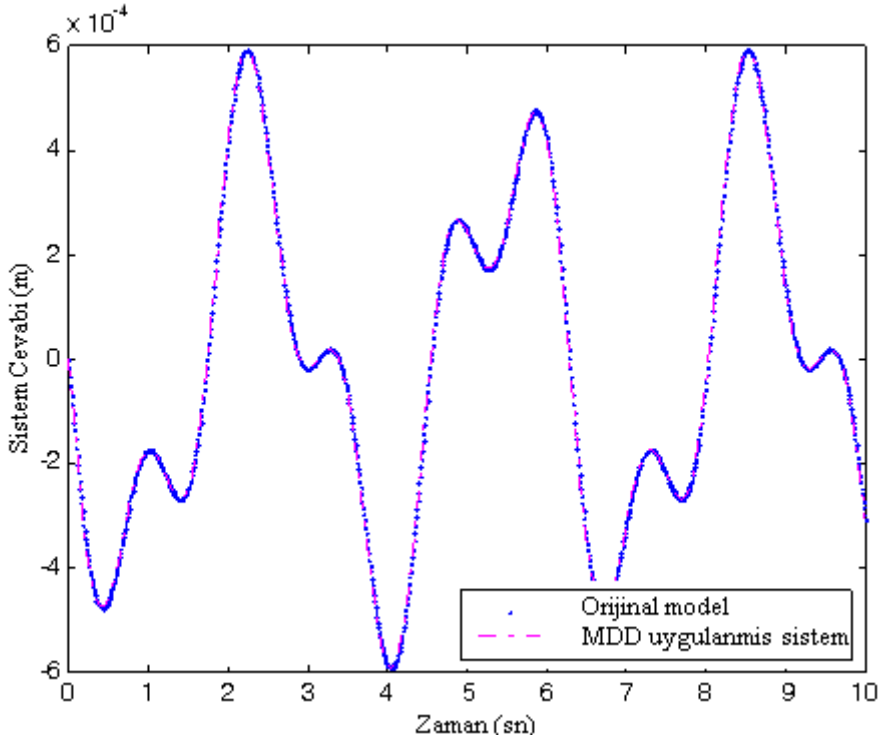
Yüksek eleman sayısına sahip sistemlerin cevaplarına örnek olması için yapılan bu uygulamalardan sönüm katsayısı β=0.1 olan 100 elemanlı orijinal çubuk modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemine göre 12 model derecesine indirgenmiş sistemin sırasıyla impuls, basamak ve sinüzoidal girişlere cevapları, Şekil 5.31-33'de yer almaktadır.



Şekil 5.31 : β=0.1 için 100 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

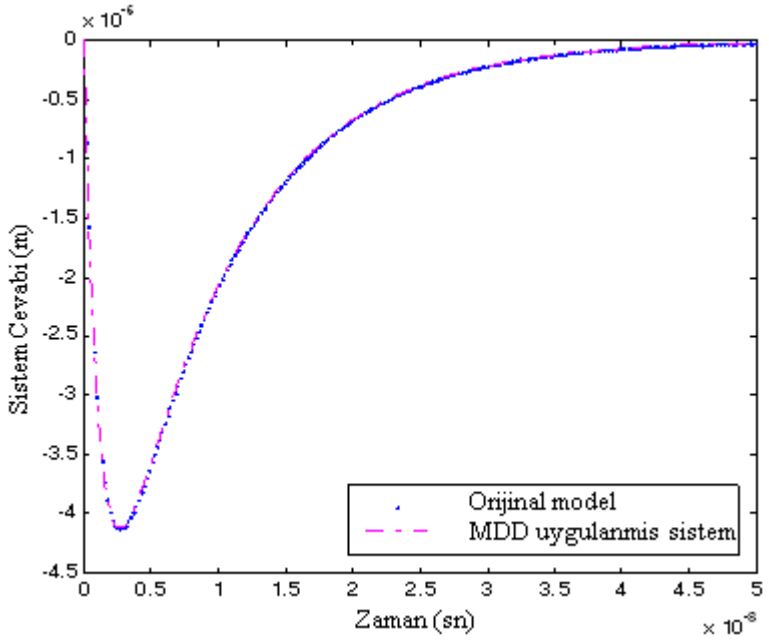


Şekil 5.32 : β=0.1 için 100 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için basamak cevapları.

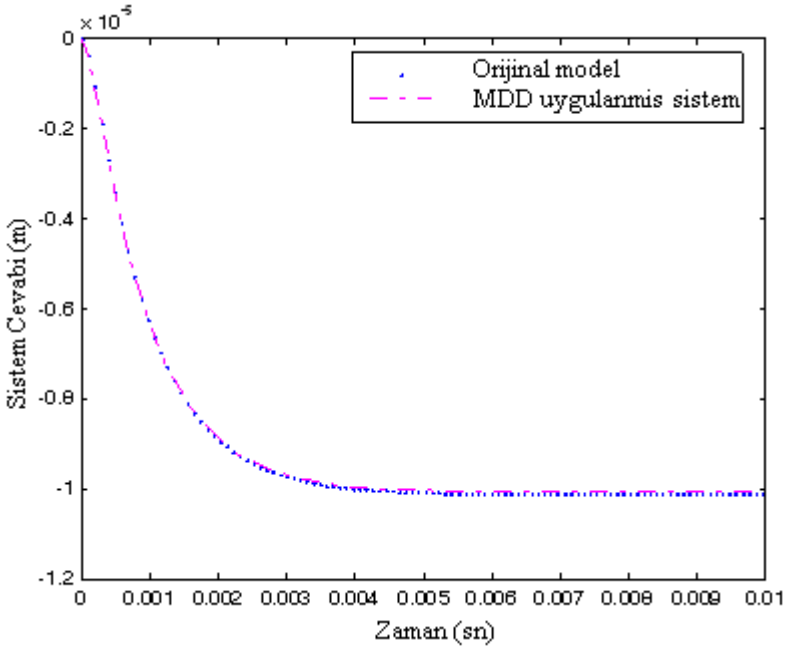


Şekil 5.33 : β=0.1 için 100 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

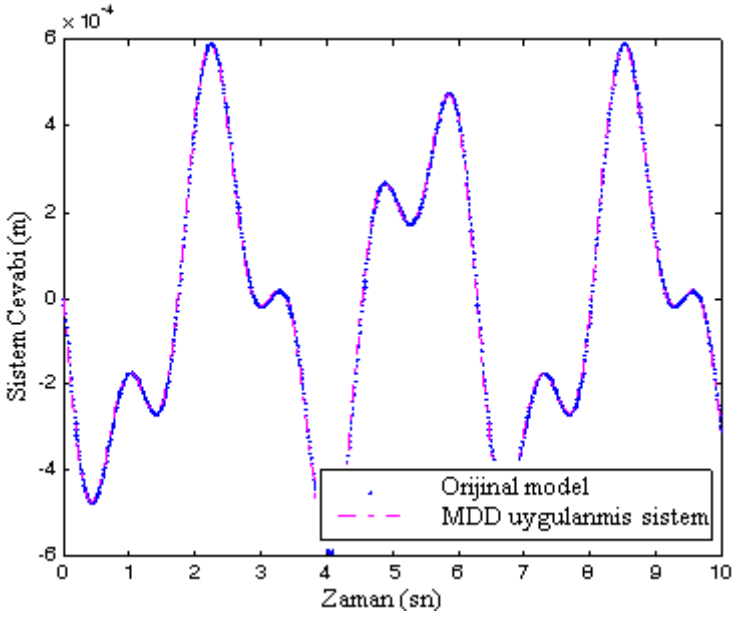
Sönüm katsayısı β=0.01 olan 1000 elemanlı orijinal çubuk modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemine göre 20 model derecesine indirgenmiş sistemin sırasıyla impuls, basamak ve sinüzoidal girişlere cevapları, Şekil 3.34-36'da yer almaktadır.



Şekil 5.34 : β=0.001 için 1000 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için impuls cevapları.



Şekil 5.35 : β=0.001 için 1000 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için basamak cevapları.



Şekil 5.36 : β=0.001 için 1000 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Buna paralel olarak kullanılan hesaplama zamanları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve IRI yöntemi kullanımında sönümlü ve sönümsüz durumlar için Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.2 : Düzlemsel çubuk sistem analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları.

Eleman sayısı	Orijinal model derecesi ve MDD sonrası model derecesi	Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı	Toplam enerjilerin denkliği ile MDD işlemci zamanı [saniye]	İleri farklar ile MDD işlemci zamanı [saniye]	Newmark ile MDD işlemci zamanı [saniye]	IRI ile MDD işlemci zamanı [saniye]	MDDsiz işlemci zamanı [saniye]
40	**40'den 5'e**	**0.00008**	0.016	0.016	0.016	0.032	0.062
		0.001	0.016	0.016	0.016	0.031	0.062
		0.01	0.016	0.016	0.016	0.031	0.046
		0.1	0.015	0.015	0.015	0.032	0.047
40	**40'den 12'ye**	**0.00008**	0.015	0.016	0.015	0.047	0.047
		0.001	0.015	0.015	0.016	0.047	0.047
		0.01	0.016	0.015	0.016	0.046	0.047
		0.1	0.015	0.015	0.016	0.047	0.046
100	**100'den 12'ye**	**0.00008**	0.015	0.031	0.015	0.390	0.298
		0.001	0.016	0.031	0.015	0.389	0.284
		0.01	0.015	0.031	0.016	0.39	0.294
		0.1	0.015	0.031	0.016	0.39	0.298
1000	**1000'den 20'ye**	**0.00008**	0.157	3.558	0.738	709.356	305.736
		0.001	0.155	3.561	0.748	709.516	308.391
		0.01	0.154	3.553	0.75	709.214	307.596
		0.1	0.156	3.578	0.732	708.839	306.783

Eleman sayısı aynı tutularak yapılan analizlerde sönümün hesaplama zamanında önemli bir etkisi olmadığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca model derecesindeki artışın çözüm zamanı uzattığı görülmüştür. Eleman sayısının arttırılması ile yöntemler arasındaki hesaplama süresi farklarının da arttığı gözlenmiştir. Özellikle IRI yönteminde hesaplama zamanının çok arttığı görülmektedir. Bunun temel nedeni, sistem cevabı elde etmek için bu yöntemde aşağıda **A** matrisi için verilen matris exponansiyeli işleminin (5.23) çok fazla kullanılmasının gerekli olmasıdır. Bu işlemin çok kullanılmasının daha karmaşık tipte elemanların seçildiği analizlerde büyük bir dezavantaja dönüşeceği değerlendirilmektedir.

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \frac{\mathbf{A}^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(5.23)}$$

Ayrıca, Toplam enerjilerin denkliği yönteminin kullanıldığı indirgenmiş sistemlerin impuls ve sinüs girişlere verdiği sistem cevaplarının orijinal model cevapları ile aynı olduğu görülmüş, basamak cevaplarının ise orijinal modelin cevabından bir miktar sapma gösterdiği tespit edilmiştir.

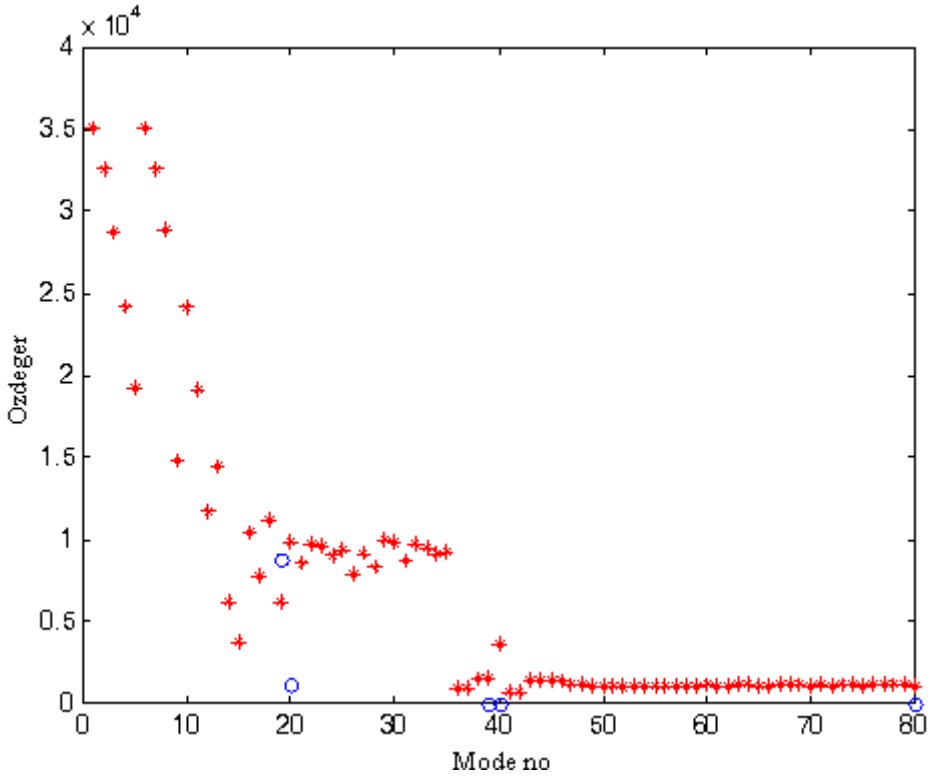
Basamak girişlerde rastlanan bu sapmanın Matlab'deki hesaplama hatalarından kaynaklandığı sonucuna varılmıştır. Benzer sapmaları diğer örnek uygulamalarda da göstermesi nedeniyle basamak giriş fonksiyonu sonuçları takip eden örnek uygulamalarda dikkate alınmamıştır. Ayrıca uygulanan giriş fonksiyonuna bağlı olarak, sisteme uygulanan kuvvet ne kadar yavaş değişiyorsa, MDD uygulanmış sistemlerin cevaplarının doğruluğunun buna bağlı olarak genellikle yükseldiği görülmüştür.

Sistem cevaplarının değerlendirilmesinde genel olarak tüm MDD yöntemlerinin birbirine yakın sonuçlar verdiği, sönüm artıkça orijinal model ile MDD uygulanmış sistemlerin cevaplarının uyumunun arttığı görülmüştür. Sönüm azalmasının en çok IRI yöntemi üzerinde etkili olduğu ve IRI ile oluşturulan indirgenmiş sistem cevabının sönümsüz ve az sönümlü analizlerde önemli sapmalar gösterdiği gözlenmiştir. Bu özellikleri taşıyan analiz sonuçları, Şekil 5.21 ve 5.29'da açık bir şekilde incelenebilmektedir.

Öte yandan analiz sonuçları karşılaştırmaları incelendiğinde, kuvvet uygulama noktasının indirgenmiş sisteme dahil edilmediği durumlarda, orijinal model sonuçları

ile indirgenmiş sistem cevapları arasında büyük farklar olduğu görülmüştür. Bu durum, bir sistemi kuvvet uygulama noktasından ikiye ayırmadığınız zaman problem olmaktadır. Bunu önlemek için iç kuvvetleri, hayali dış kuvvet olarak kabul edip, AYB-Alt Yapılara Bölme (substructuring) yöntemi uygulanmıştır. Bu konu, 6ncı Bölüm'de ele alınmıştır.

Zaman uzayında alınan sonuçlar ile modal çözümler arasında bir paralellik olduğu, öncelikle orijinal model ve indirgenmiş sistem için yapılacak modal analizlerin değerlendirilmesi ile sistem cevapları hakkında önemli bilgi elde edilmiş olacağı görülmüş ve yapılan tüm örnek uygulamalarda modal analizler gerçekleştirilmiştir.



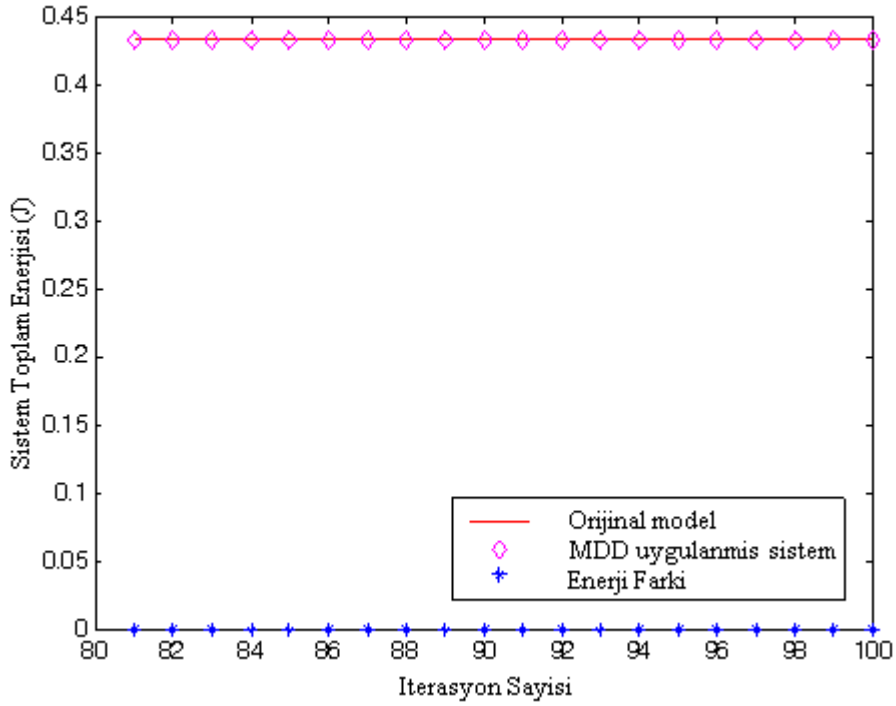
Şekil 5.37 : Orijinal model ve indirgenmiş sistem için özdeğerlerin karşılaştırılması.

80 serbestlik dereceli orijinal modelin ve MDD derecesi 5 olan sistemin özdeğerleri, Şekil 5.37'de verilmektedir. Orijinal model ve indirgenmiş sistem özdeğerlerinin dağılım yoğunluğu, indirgenmiş sistemin seçim ve atanmasında dikkate alınmıştır. Sonuç olarak, özdeğerler arasında büyük farklar olmasına rağmen orijinal model ve indirgenmiş sistemin zaman cevaplarının çok uyumlu olabildiği görülmüştür.

5.3.6 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması

Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve son olarak IRI yöntemi ile MDD uygulanmış sistemlerin ve orijinal modellerin toplam enerji değerlerinin karşılaştırmaları yapılarak eşdeğer sistemlerin uyumu kontrol edilmiştir. Orijinal model ve MDD uygulanmış sistemin toplam enerji değerleri (5.7) ve (5.9) bağıntılarında verilen ifadeler ile hesaplanmıştır. Bölüm 5.1'de verilen "Toplam enerjilerin denkliği" yaklaşımının uygulamada verdiği sonuçların doğruluğunu gösteren çok sayıda analiz sonucu, farklı sönüm katsayıları için elde edilmiştir.

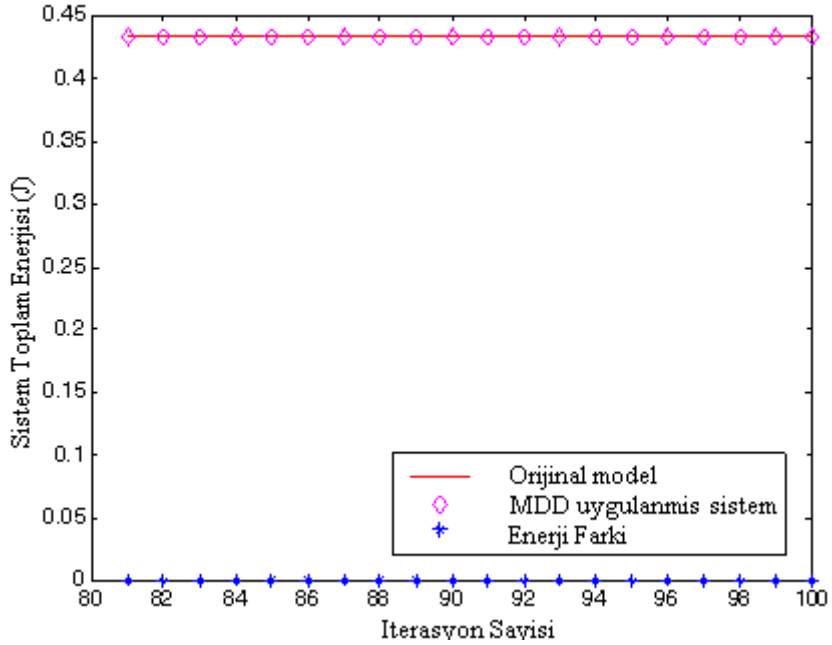
β=0.001 değeri için sistem enerji karşılaştırması, her dört MDD yöntemi için Şekil 5.38-5.41 arasındaki şekillerde verilmiştir



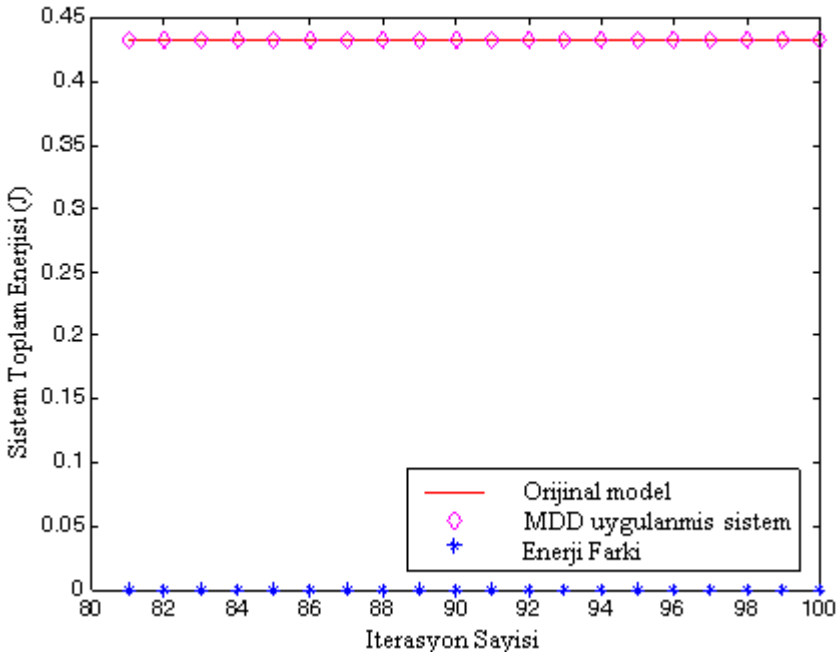
Şekil 5.38 : β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.

Yapılan hesaplamaların sağlaması amacıyla da kullanılması düşünülen bu karşılaştırmalar, sönümlü sistemler için tam uyum halinde cevaplar vermektedir. Ancak, sönüm azaldıkça ve kuvvet ani değişiklikler gösterdikçe uyum seviyesinde azalma görülmektedir. Ayrıca sisteme kuvvet uygulanan noktaların aktif serbestlik derecesi olarak seçilip indirgenmiş sisteme dahil edilmesi durumunda hem sönümlü

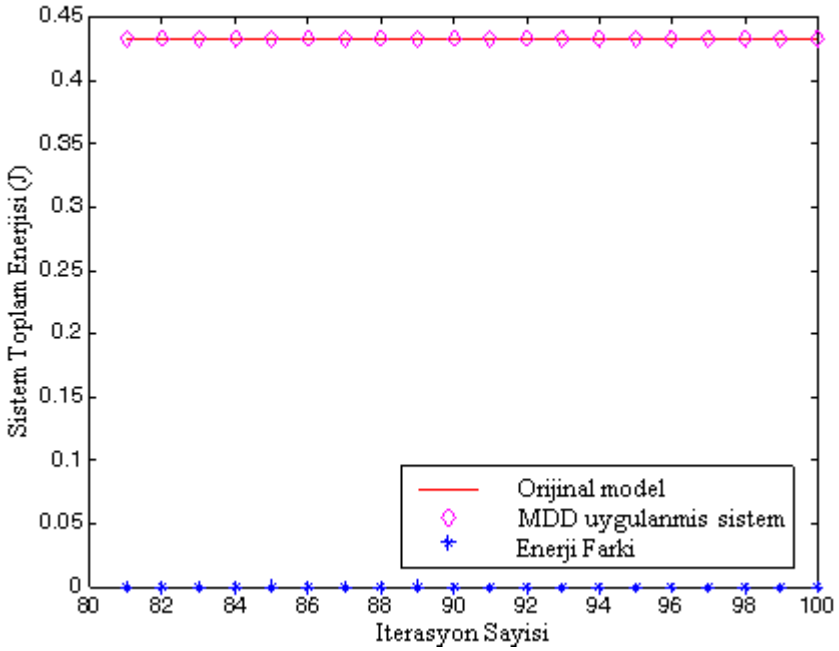
ve hem de sönümsüz sistemlerde enerji seviyelerinin aynı değerlerde hesaplandığı sonucuna varılmıştır.



Şekil 5.39 : β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.

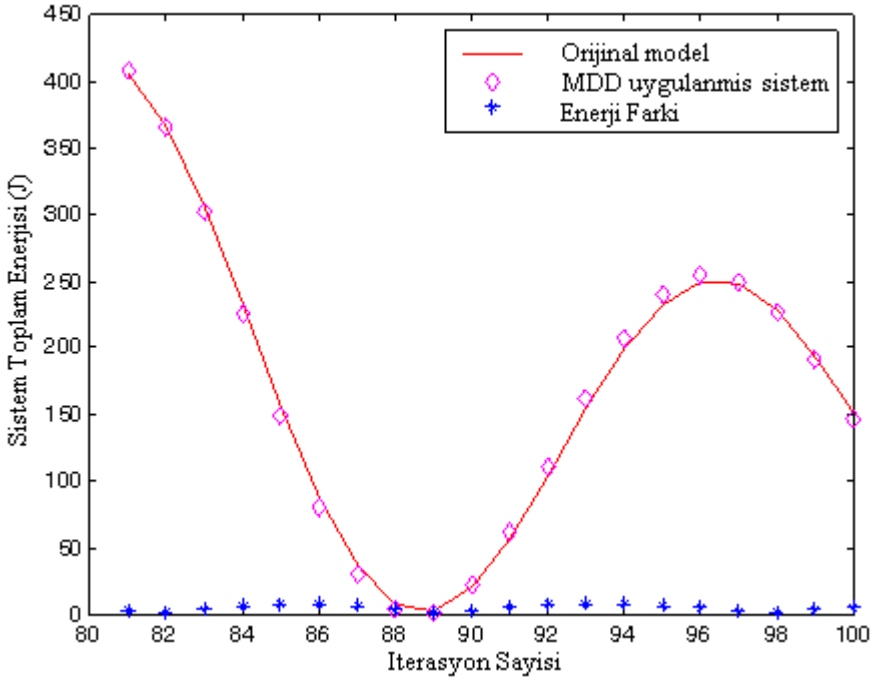


Şekil 5.40 : β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.

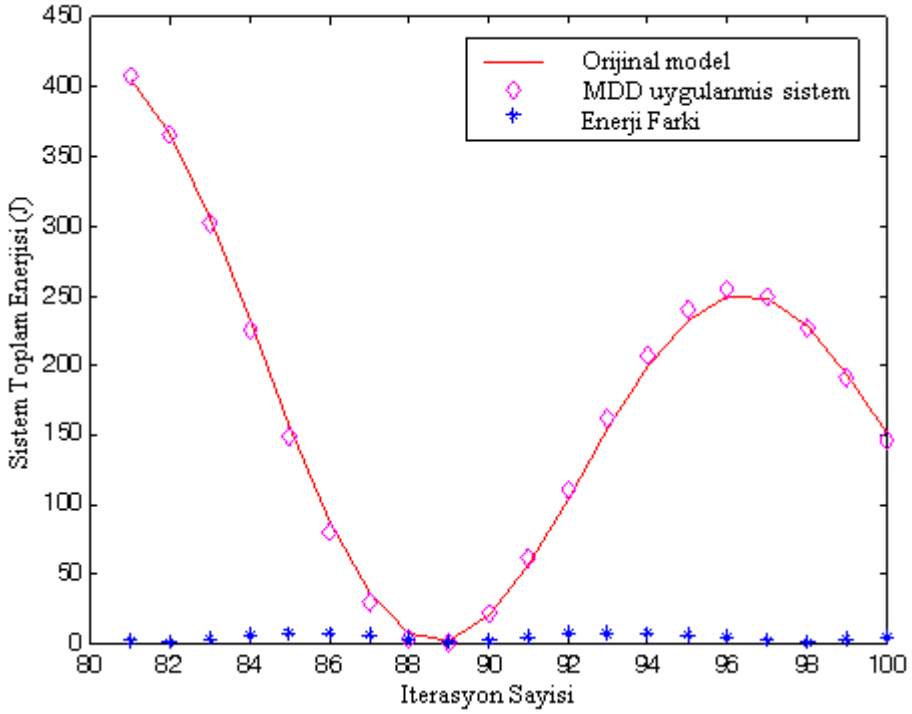


Şekil 5.41 : β=0.001 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.

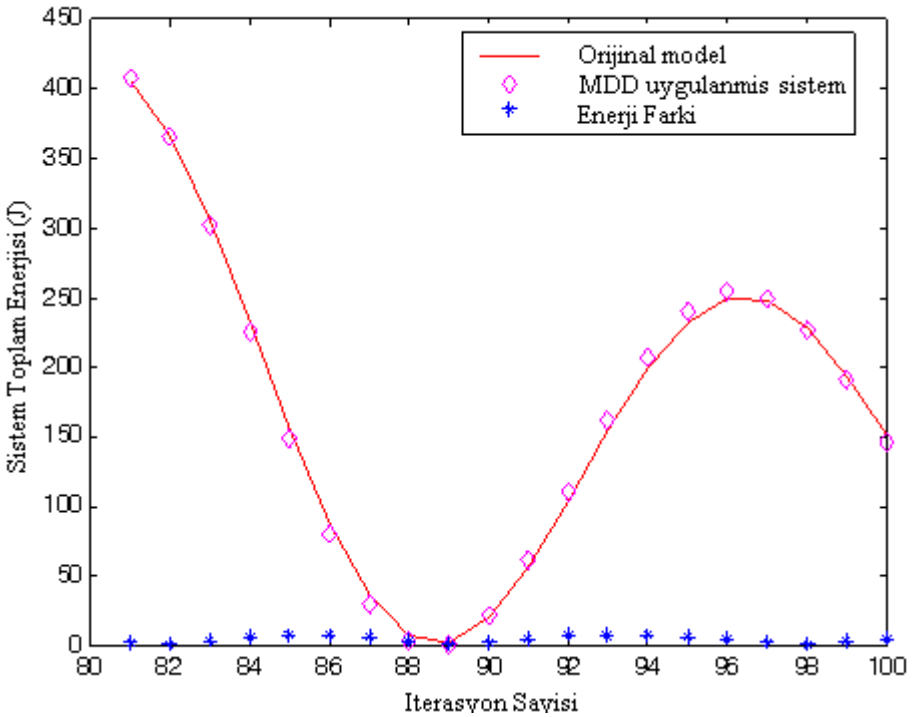
Benzer şekilde sönümsüz sistem enerji karşılaştırması da Şekil 5.42-5.45 arasındaki şekillerde yer almaktadır.



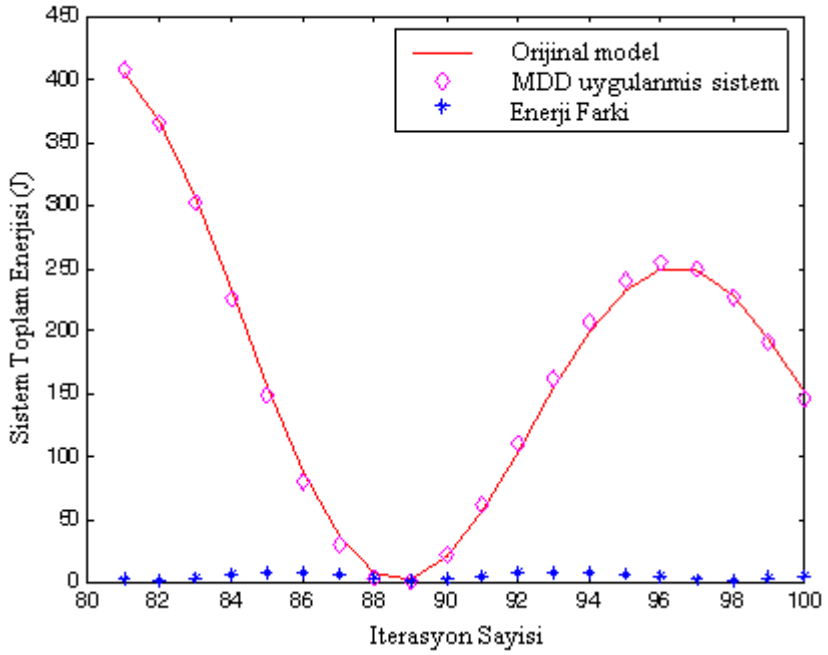
Şekil 5.42 : β=0.00008 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.



Şekil 5.43 : β=0.00008 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.

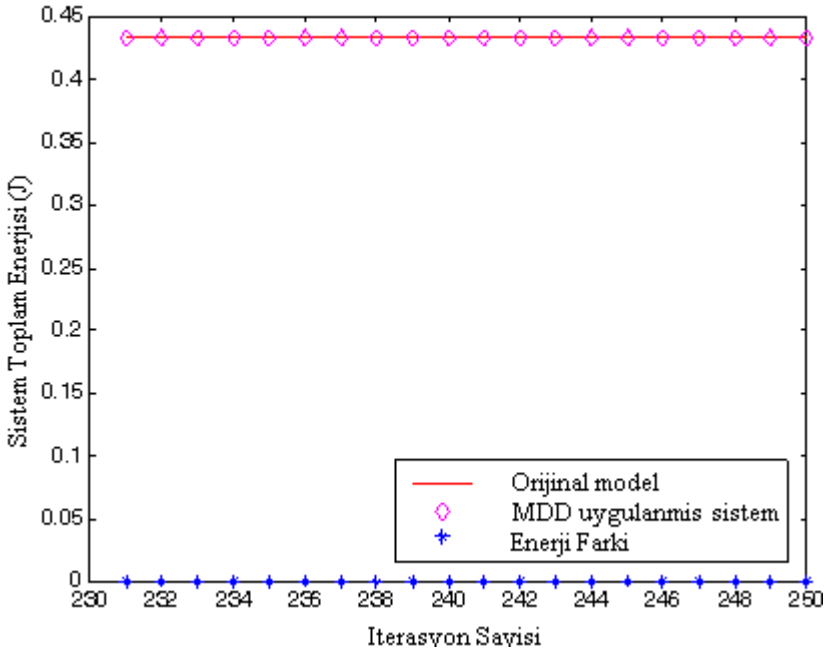


Şekil 5.44 : β=0.00008 için 40 elemanlı Orijinal çubuk sistem modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.



Şekil 5.45 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırılması.

Ayrıca sönüm katsayısı β=0.001 olan 100 elemanlı orijinal modelin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sisteminin enerji karşılaştırması Şekil 5.46'da verilmektedir.



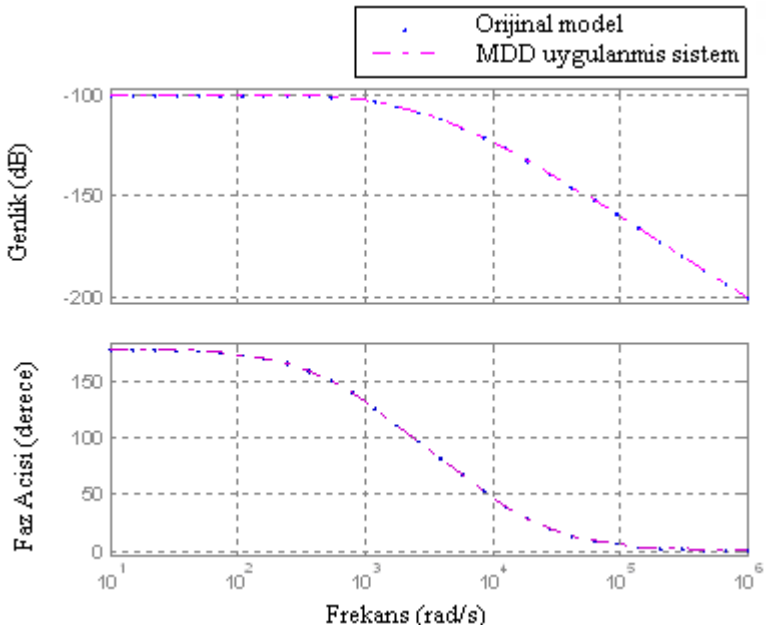
Şekil 5.46 : β=0.001 için 100 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için enerji seviyelerinin karşılaştırması.

Kuvvet uygulama noktalarının indirgenmiş sistem dahil edilmediği durumda, enerji karşılaştırma sonuçları oldukça kötü olup, yakınsamada önemli mertebelerde farklar olduğu tespit edilmiştir.

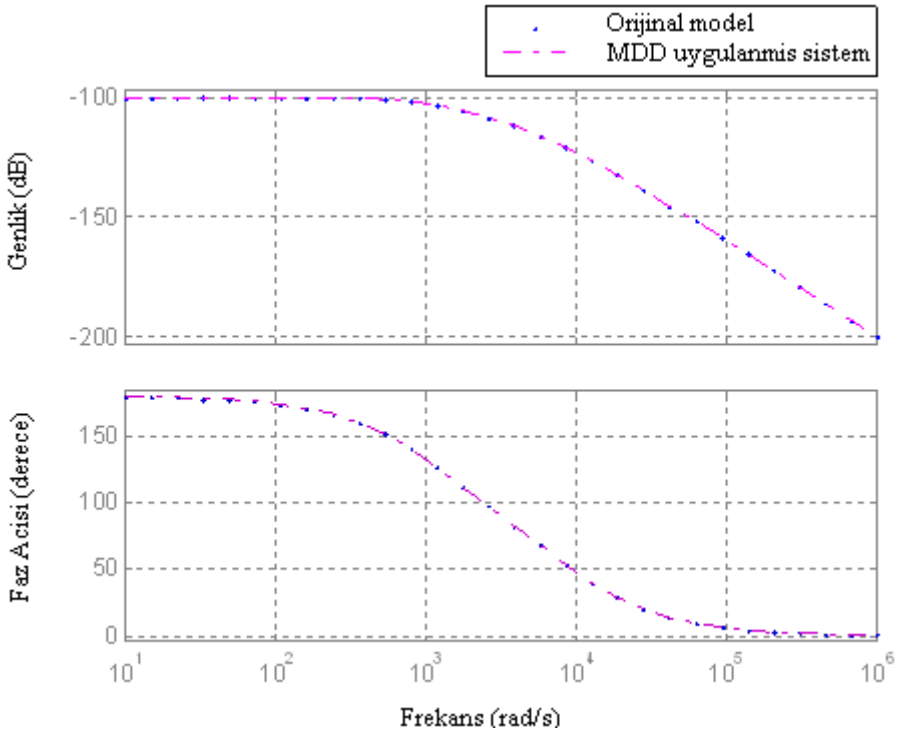
5.3.7 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi

Yapısal sistemlerin frekans cevapları, sistem uyumluluğu ile ilgili önemli bilgiler vermektedir. Frekans cevabının genlik-frekans ve faz açısı-frekans olarak incelendiği Bode diyagramlarından sistemin düşük ve yüksek frekanslardaki davranışları birlikte görülebilmektedir. Orijinal model ve MDD uygulanarak indirgenmiş sistemlerin zamana bağlı cevaplarının uyum içinde olduğu ve uygulanan "Toplam enerjilerin denkliği" yaklaşımının verdiği sonuçların doğruluğu bu kısımda incelenmektedir.

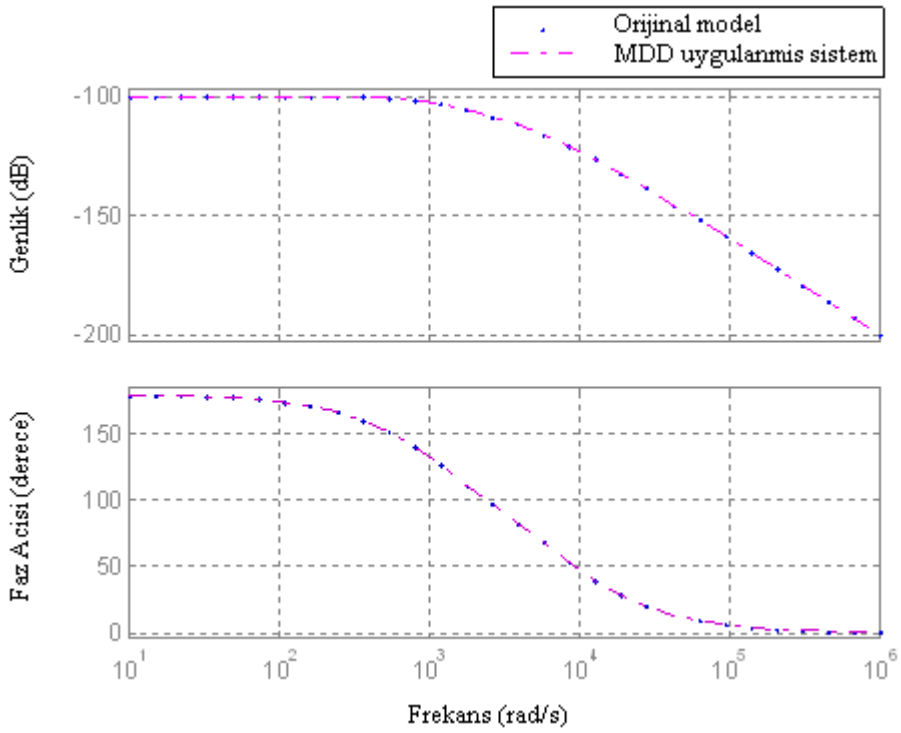
Aşağıda bu çalışmada incelenen Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve son olarak IRI yöntemi ile model derecesi düşürme yöntemleri uygulanmış sistemlerin davranışları ve orijinal modelin davranışı Bode diyagramları ile gösterilmiştir. Orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasından uygulanan kuvvete karşılık yine aynı noktadaki sönümlü sistem frekans cevapları, her dört MDD yöntemi için Şekil 5.47-5.50'de verilmiştir.



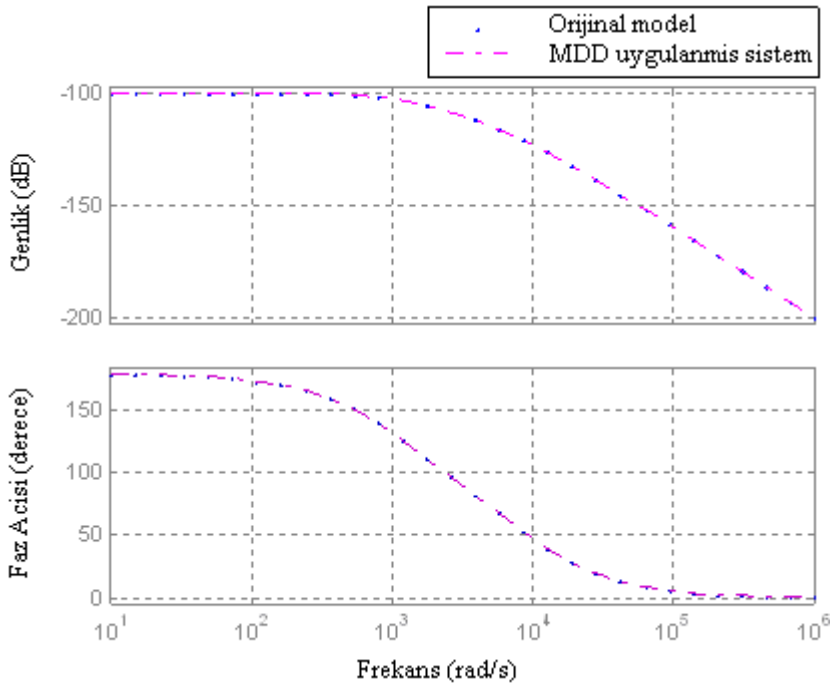
Şekil 5.47 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.



Şekil 5.48 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.

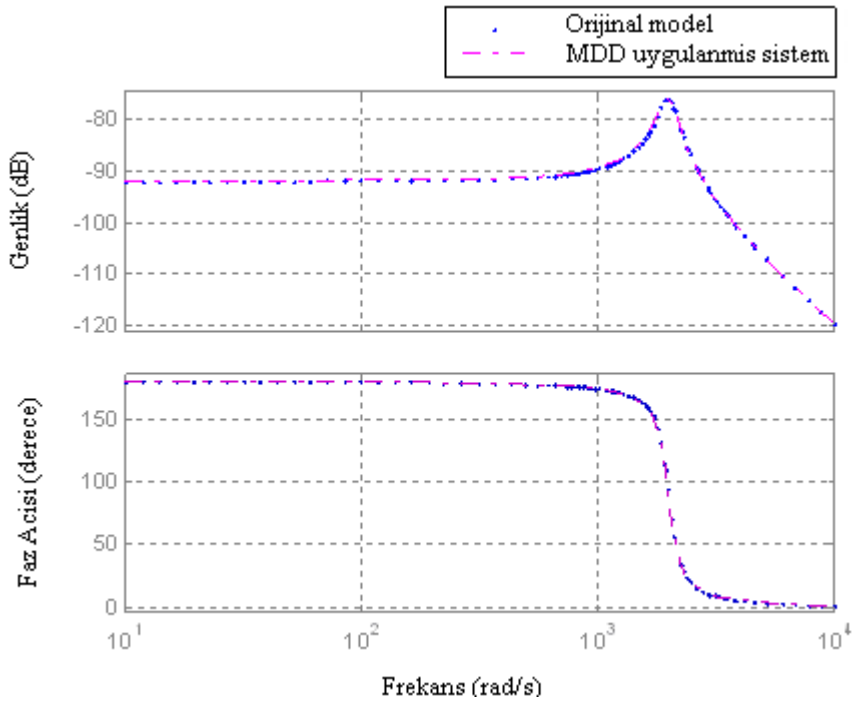


Şekil 5.49 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.

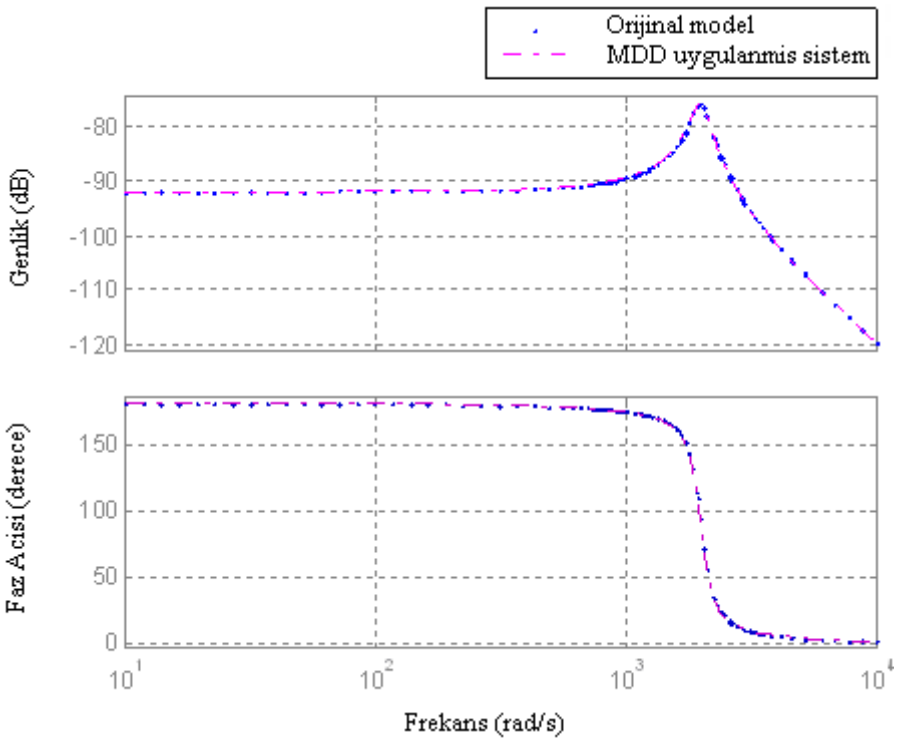


Şekil 5.50 : β=0.001 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.

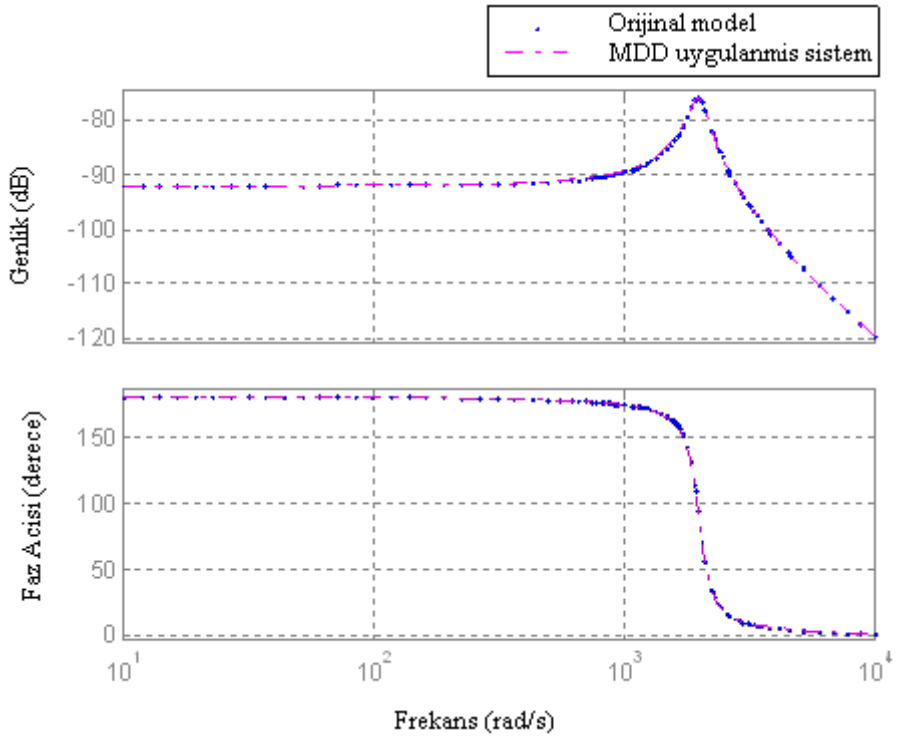
Benzer şekilde sönümsüz sistem frekans cevapları da Şekil 5.51-5.54'de yer almaktadır.



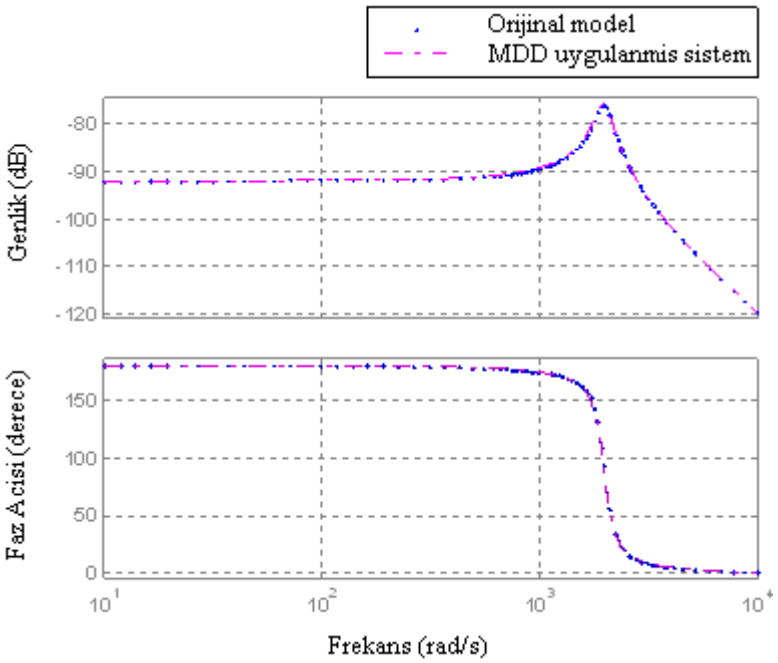
Şekil 5.51 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.



Şekil 5.52 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.

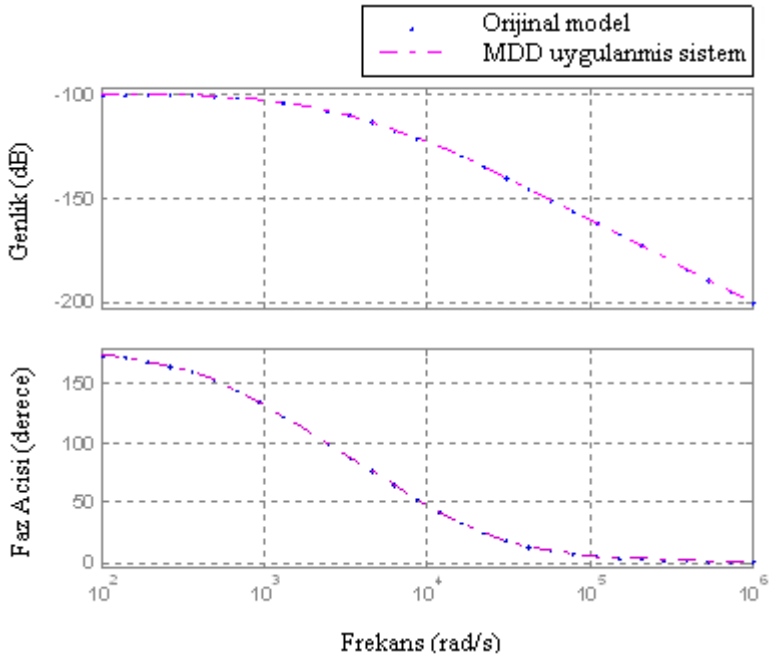


Şekil 5.53 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.



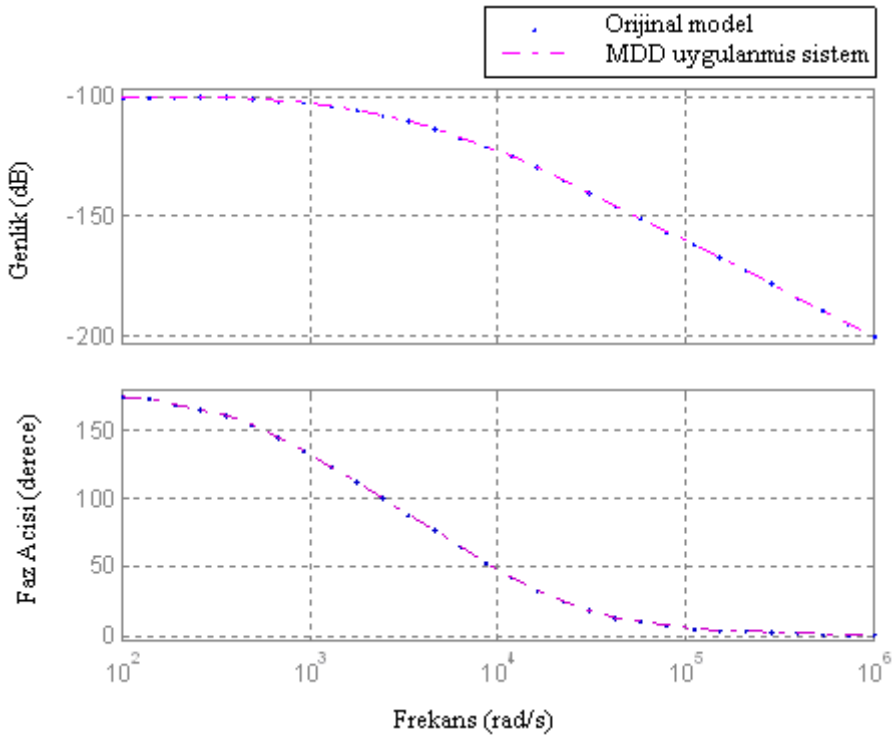
Şekil 5.54 : β=0.00008 için 40 elemanlı orijinal çubuk sistem modelinin ve IRI yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için Bode Diyagramları.

Eleman sayısı 40 olan sistemin yanı sıra, eleman sayısı 100 olan β=0.1 sönüm katsayısı içeren orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistemi için Bode diyagramları Şekil 5.55'de verilmektedir.



Şekil 5.55 : β=0.1 için 100 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 12'ye indirgenmiş sistem için Bode diyagramları.

Sönüm katsayısı β=0.001 olan 1000 elemanlı diğer bir orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistemi için Bode diyagramları da Şekil 5.56'da yer almaktadır.



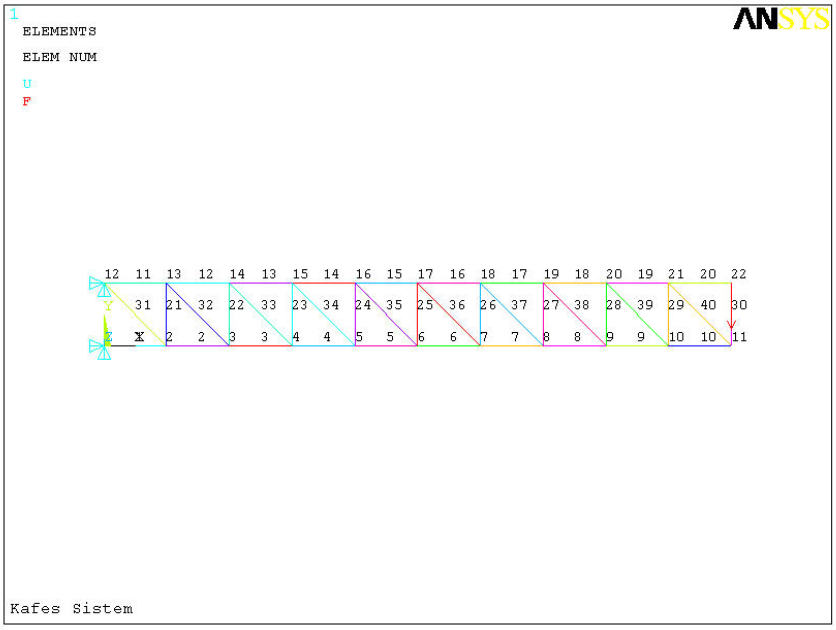
Şekil 5.56 : β=0.001 için 1000 elemanlı orijinal çubuk sistem modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 20'ye indirgenmiş sistem için Bode diyagramları.

Burada MDD sonrasında elde edilen sönümlü sistemlerin hem düşük, hem de yüksek frekanslarda orijinal model ile aynı frekans cevabını verdiği görülmektedir. Bu durumda sistemin MDD sonrasında sistem karakterinin frekans uzayında değişmediği sonucuna varılmaktadır.

Sönümsüz sistemlerde alınan cevapların karşılaştırılmasında yerel küçük uyumsuzluk gözlense de MDD ile elde edilen indirgenmiş sistemlerin, orijinal modellere benzer karakterde frekans cevaplarına sahip oldukları görülmüştür.

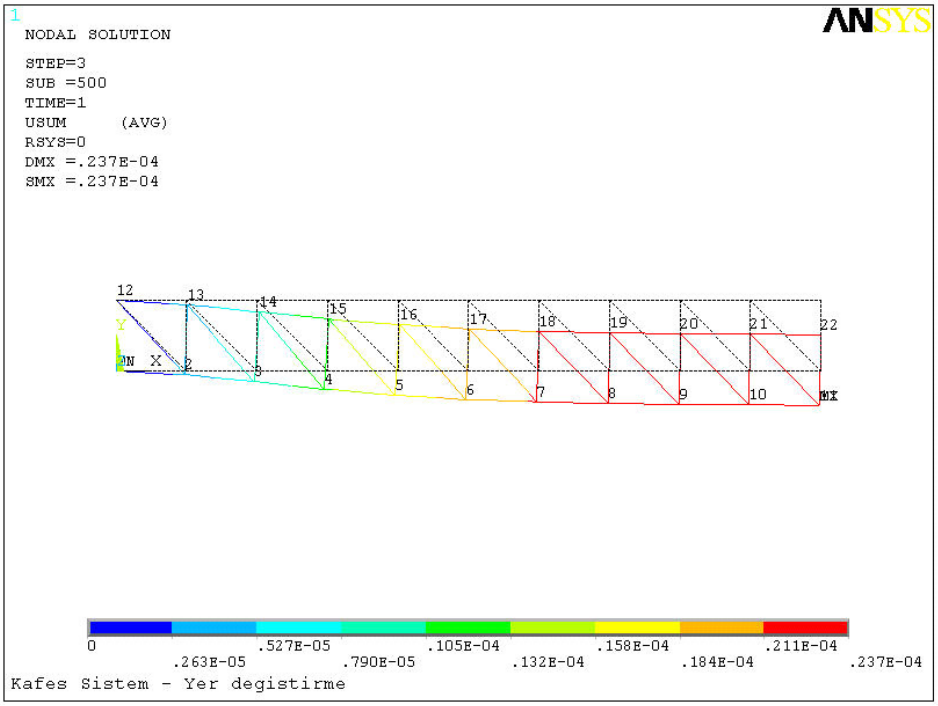
5.3.8 ANSYS'de düzlemsel çubuk sistem analizi

Yapılan çalışmaları doğrulamak amacıyla, Bölüm 5.3.1'de tanımlanan yapısal sistem modeli, Şekil 5.57'de görüldüğü üzere ANSYS ortamında oluşturulmuştur.



Şekil 5.57 : ANSYS'de oluşturulan düzlemsel çubuk sistem SEY modeli.

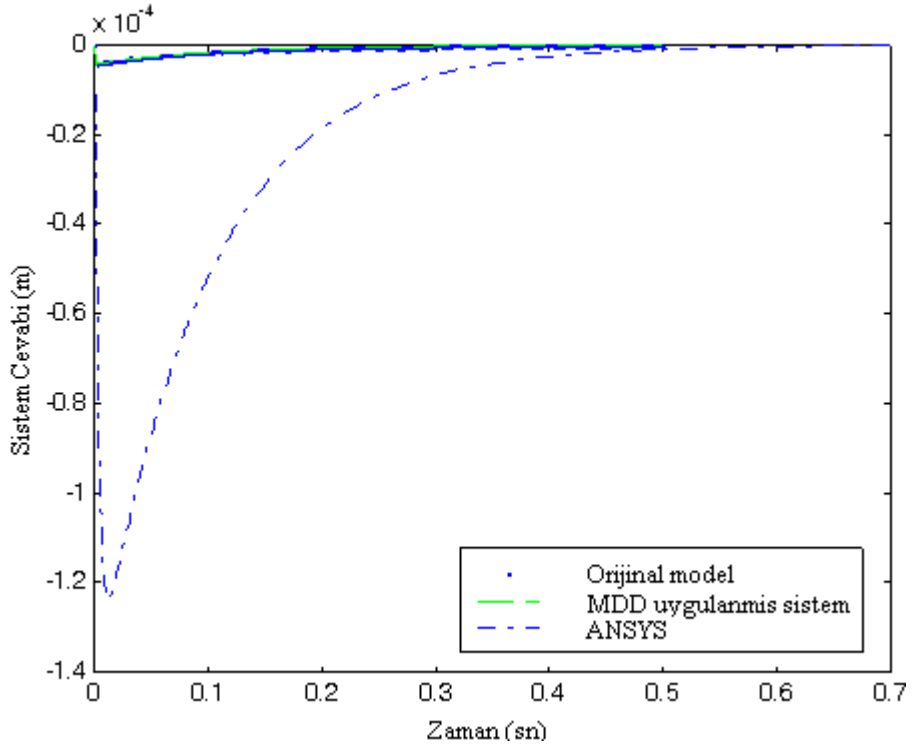
Sisteme yükleme olarak 22 nolu düğüm noktasından düşey yönde aşağıya doğru 100 N'luk kuvvet uygulanmıştır. Öncelikle sistemin impuls yüke vereceği cevap, zaman adımı 0.001 s olarak alınarak geçici rejim analizi gerçekleştirilmiştir. Yükleme sonrasında elde edilen yerdeğiştirme Şekil 5.58'de verilmektedir.



Şekil 5.58 : ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin SEY modelinin impuls yüke karşılık yerdeğiştirmesi.

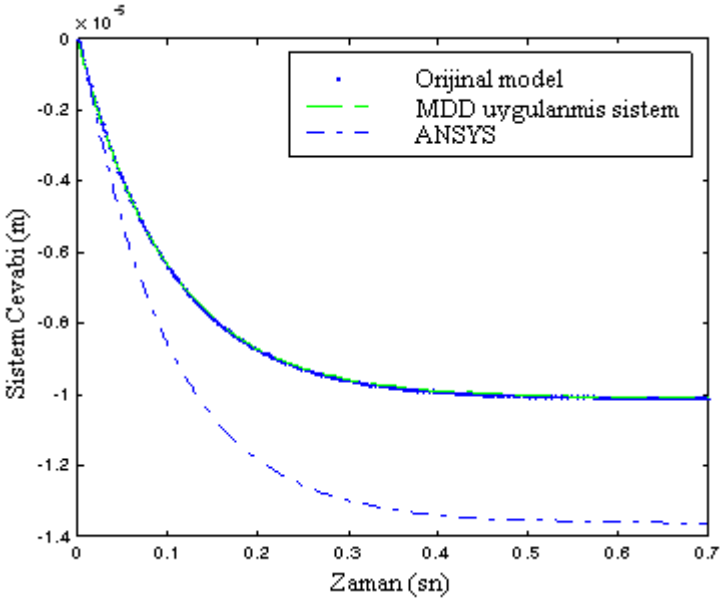
Seçilen sistemde MDD uygulanmış örneklerin tamamı için ANSYS'de farklı sönüm katsayıları kullanılarak analizler gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerde sönüm değerlerinin düşük olduğu durumlarda ANSYS analizlerinden büyük kazanç sapmalar ile cevap alındığı görülmüştür. Ancak sönüm katsayısının 0.1'e yakın değerler aldığında sonuçların Matlab sonuçlarına yakın olduğu gözlenmiştir. Çalışmanın birinci bölümünde belirtilen temel dinamik analiz yöntemlerinden biri olan Guyan/Irons yönteminin ANSYS'de kullanılması, bu yöntemde kütle etkilerinin dikkate alınmaması nedeniyle belirtilen kazanç hatalarına neden olmaktadır.

Ayrıca ANSYS'in dinamik analizlerde sönüm katsayısındaki değişimlere karşı çok hassas olduğu ve 0.1'den daha düşük sönüm değerlerinde yeterli doğrulukta sonuç alınamadığı görülmüştür. Bu nedenle, sadece 0.1 sönüm değerine sahip örnek sistemlerin ANSYS analizleri sonuçları, çalışmada karşılaştırma amacıyla kullanılabilmiştir. Diğer sönüm katsayılarına sahip sistemlerin cevaplarının doğrulanması amacıyla Bode Diyagramları dikkate alınmıştır. Şekil 5.59'da analizi gerçekleştirilen sistemin β=0.1 için karşılaştırma grafiüi verilmiştir.

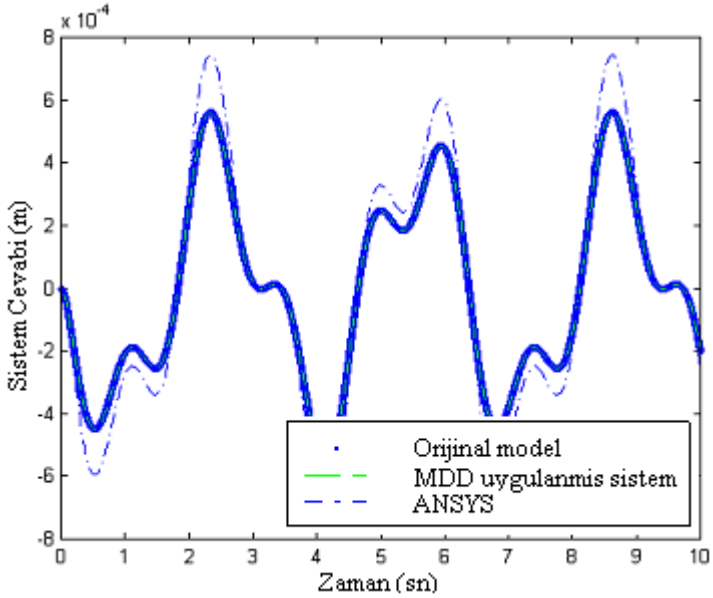


Şekil 5.59 : ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasının β=0.1 için impuls giriş cevabının orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırılması.

Bu grafikte analizi gerçekleştirilen sistemin β=0.1 için orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırıldığı impuls cevapları, Şekil 5.60'da basamak cevapları ve Şekil 5.61'de sinüzoidal girişe karşılık sistem cevapları verilmektedir.



Şekil 5.60 : ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasının β=0.1 için basamak girişe karşılık cevabının orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırılması.



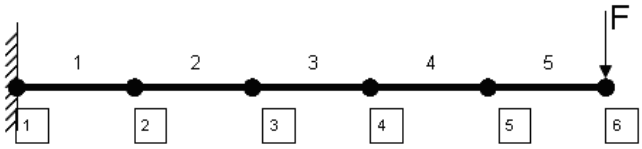
Şekil 5.61 : ANSYS'de oluşturulan orijinal çubuk sistem modelinin 22 nolu düğüm noktasının β=0.1 için sinüzoidal girişe karşılık cevabının orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile MDD uygulanmış sistem cevapları ile karşılaştırılması.

5.4 Euler-Bernoulli Kirişi Model Derecesi Düşürme Uygulaması

Yeni yöntemlerin uygulanması için ikinci örnek, Şekil 5.62'de verilmekte olan düzlemsel Euler-Bernoulli kiriş eleman sistemi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Farklı eleman sayıları ve model düşürme dereceleri için sistemin Matlab'de hazırlanan ayrı bir kod ile yapılan analizlerinin sonuçları önceki MDD yöntemleri ile karşılaştırılmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir.

5.4.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar

Uygulamada yapının sönümlü ve sönümsüz davranışları farklı yükleme tiplerine göre incelenmiş ve farklı MDD yöntemleri uygulanmış sistem cevaplarının ve bu hesaplamalar için işlem zamanları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.62 : MDD uygulanacak Euler-Bernoulli kirişi elemanlarından oluşan sistem.

Seçilen düzlemsel kiriş sistemi, Şekil 5.62'de görüldüğü gibi, 5 eleman ve 6 düğüm noktasından oluşmaktadır. Düzlemsel kiriş elemanın her bir düğüm noktasında Bölüm 3'de tanımlandığı gibi 2 öteleme, 1 dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi bulunmaktadır. Seçilen ankastre bağlı kare kesitli kirişin toplam uzunluğu 0.5 m, kesit alanı 4.10^{-4} m^2, kesit yüksekliği 2.10^{-2} m, kesit atalet momenti $1{,}33.10^{-8}$ m^4 dir. Kiriş malzemesi olarak yoğunluğu 7850 kg/m^3 ve elastiklik modülü 210 GPa olan çelik seçilmiştir. Yükleme 6 nolu düğüm noktasında düşey doğrultuda aşağıya doğru -100 N olarak alınmıştır.

Örnek sistem üzerinde öncelikle, Bölüm 5.3'de belirtilen yaklaşımlar ile topoloji matrisi, indirgenmiş sistemin topoloji matrisi, orijinal modelin katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek montaj işlemleri yapılmıştır. Yine aynı bölümde belirtilen seçim yöntemleri ile MDD uygulaması için E dönüşüm matrisi oluşturulmuş, ardından indirgenmiş sistem katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek montaj işlemleri tamamlanmıştır. Sınır şartları ile impuls ve sinüzoidal yüklemelerin uygulanması sonrasında orijinal model ve indirgenmiş sistem cevapları bulunmuştur. Seçilen örnek malzemelerin Çizelge 5.1'de verilen katılık orantılı

sönüm katsayıları (β=0.00008, 0.001, 0.01, 0.1) ve sönümsüz (β=0) olma durumu için analizler tekrarlanmıştır.

Bu örnek uygulamadaki SEY modelinin seçilen her bir malzeme için ilk özdeğerine karşılık gelen ilk doğal frekans değeri, SEY ile, analitik olarak ve ANSYS ile ayrı ayrı hesaplanmıştır. Ayrıca her bir malzeme için kritik sönüm katsayısı değeri farklı olacağı için malzemeler için SEY modelinden elde edilen sönüm oranları bulunmuştur. Hesaplanan doğal frekanslar ve kritik sönüm oranları, Çizelge 5.3'de toplanmıştır. Kritik sönüm durumlarının incelenmesine yarayan sönüm oranının 1'in altında bir değere sahip olması durumunda sistemin yeterince sönümlenmediği için yüklemelere vereceği cevapta bir salınım oluşması beklenmektedir. Sönüm oranının kritik değeri olan 1'in üzerindeki durumlarda ise sistemin aşırı sönümlendiği kritik üstü sönüm durumu ile karşılaşılır. Sistem cevaplarının kritik üstü ve kritik altı durumları da Çizelge 5.3'e yansıtılmıştır. Yukarıda bahsedilen salınım tüm kritik altı sönüme sahip sistemlerde görülmüştür.

Çizelge 5.3 : Euler-Bernoulli kiriş SEY modelinin malzemelere göre ilk doğal frekansları, sönüm oranları, sönüm durumu, en küçük sistem periyotları ve sistem statik çökmeleri.

Özellik\Malzeme		**Saf alüminyum**	**Çelik**	**Dökme demir**	**Kurşun**
Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı		0.00008	0.001	0.01	0.1
Sönüm oranı		0.017	0.213	2.150	4.890
Sönüm durumu		Kritik altı	Kritik altı	Kritik üstü	Kritik üstü
İlk doğal frekans [rad/s]	**Analitik**	419.0	425.6	430.7	97.7
	SEY	412.9	419.5	424.5	96.3
	ANSYS	412.8	419.1	424.1	96.1
En küçük sistem periyodu [s]	**Analitik**	0.01499	0.01476	0.01458	0.06428
	SEY	0.01521	0.01497	0.01479	0.06521
	ANSYS	0.01522	0.01499	0.01481	0.06538
Statik çökme [m]	**Analitik**	-0.00446	-0.00149	-0.00148	-0.01953
	SEY	-0.00447	-0.00149	-0.00148	-0.01958
	ANSYS	-0.00448	-0.00149	-0.00149	-0.01958

Çizelge 5.3'de verilen analitik, SEY ve ANSYS statik çökme değerlerinin birbirleri ile uyum içinde oldukları görülmektedir. Doğal frekansların karşılaştırmasında ise modal analizin sonucunda analitik, SEY ve ANSYS sonuçları arasında küçük de olsa farklar oluştuğu tespit edilmiştir.

5.4.2 Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması

Çalışmanın devam eden aşamasında uygulanan impuls ve sinüs girişlerine karşılık orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği, İleri farklar ve Newmark yöntemleri ile model derecesi düşürülmüş sistemlerden alınan cevapların zaman uzayında ayrı ayrı karşılaştırılmaları yapılmıştır. İlk uygulama olan çubuk sistem örneğinde, İmpuls Cevabı İnvaryantı (IRI) yönteminden alınan sonuçların diğerleri kadar yeterli olmadığı görüldüğü için kiriş uygulamasında bu yöntem kullanılmamıştır. Yapılan analiz uygulamalarının ilk kısmında eleman sayısı, sabit 5 olarak alınmıştır.

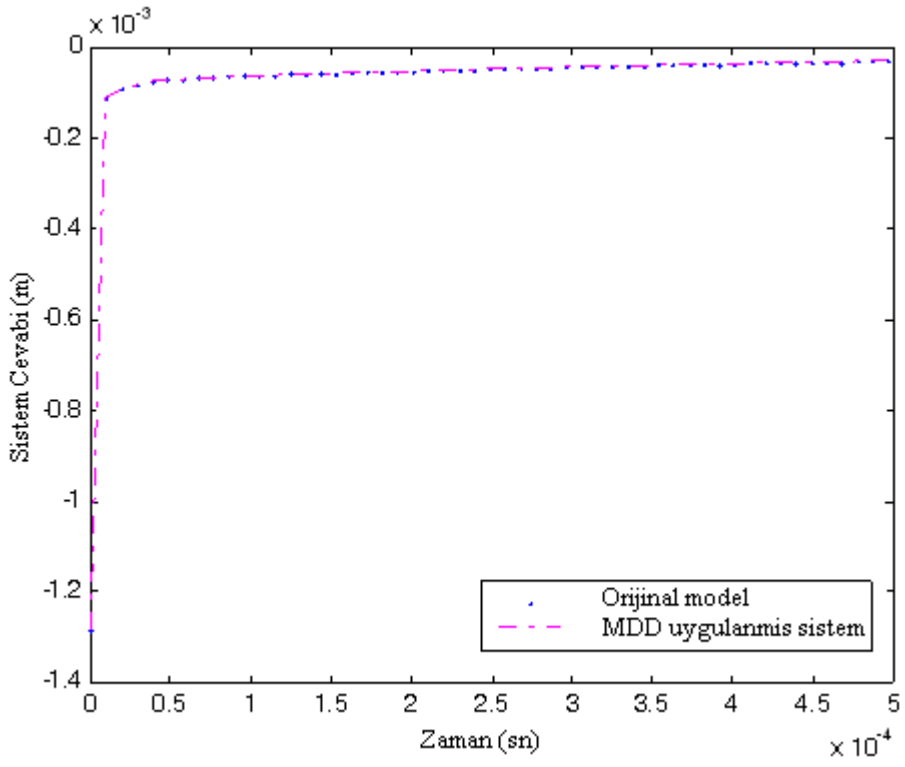
Yapılan analizlerde uygulanan Δt zaman adımlarının eleman tipine bağlı olarak seçilmesinin analiz sonuçlarının detaylarının görülebilmesi açısından öneminin büyük olduğu görülmüştür. Öncelikle genel olarak 0,001 saniye seçilen zaman adımının analiz sonuçlarındaki sönüm salınımlarının görülmesini engellediği tespit edilmiş ve [4] nolu kaynakta her bir eleman tipi için önerdiği yaklaşım kullanılarak sonuç grafikleri üzerinde önemli gelişmeler elde edilmiştir.

Kiriş sistemi analizi için seçilmesi tavsiye edilen en küçük Δt zaman adımı, L eleman boyu, a eleman kesit yüksekliği, E elastiklik modülü ve ρ yoğunluk olmak üzere (5.24) ifadesinde verildiği şekildedir.

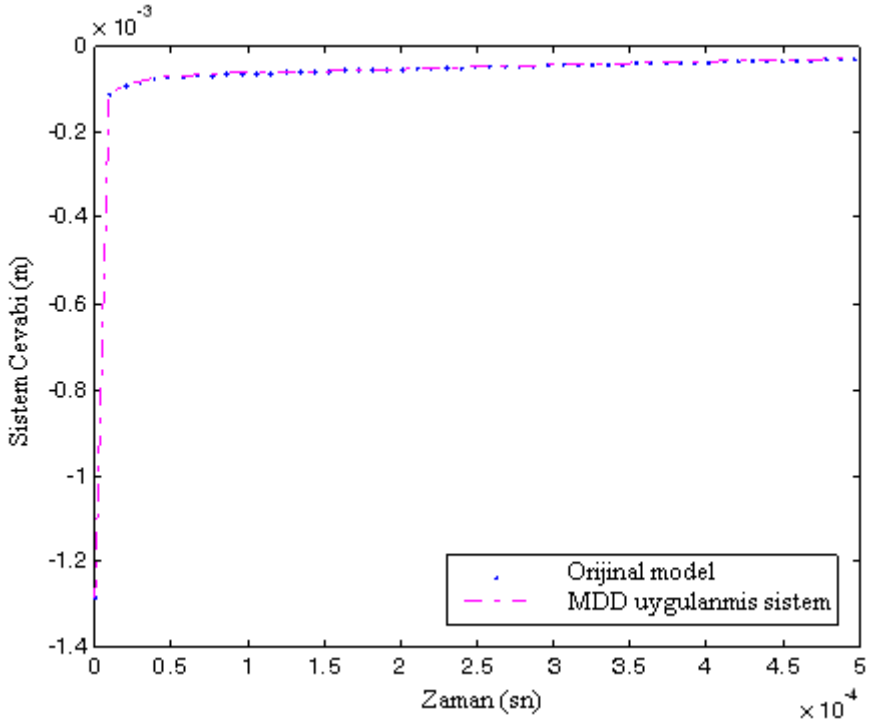
$$\Delta t \le \min\left(\frac{L}{\sqrt{E/\rho}} . \sqrt{\frac{3}{2}} . \frac{L}{a}, \frac{L}{\sqrt{E/\rho}} \right) \qquad \textbf{(5.24)}$$

Bu yaklaşıma seçilen tüm malzemelere göre Δt farklılaşmakta olmasına karşın 10^{-5} [s] mertebelerinde değerler elde edilmiş ve bu değerler kritik altı sönüm özelliklerine sahip sistemlerin cevaplarında beklenen salınımın görülmesi için yeterli olmuştur.

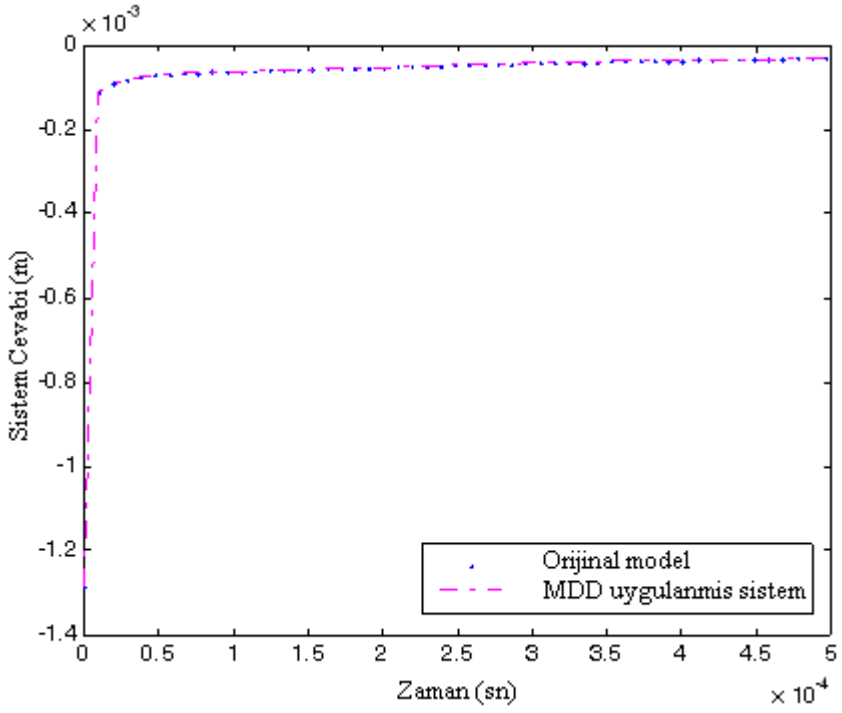
Örnek sistemin β=0.01 için MDD yöntemlerine ait impuls cevapları, Şekil 5.63-5.65'de verilmektedir.



Şekil 5.63 : β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

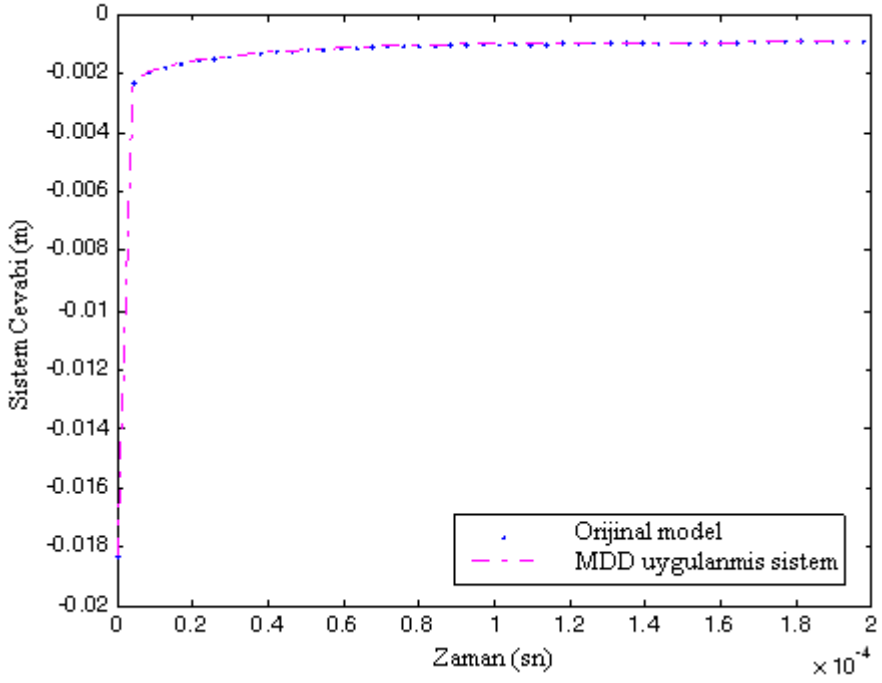


Şekil 5.64 : β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

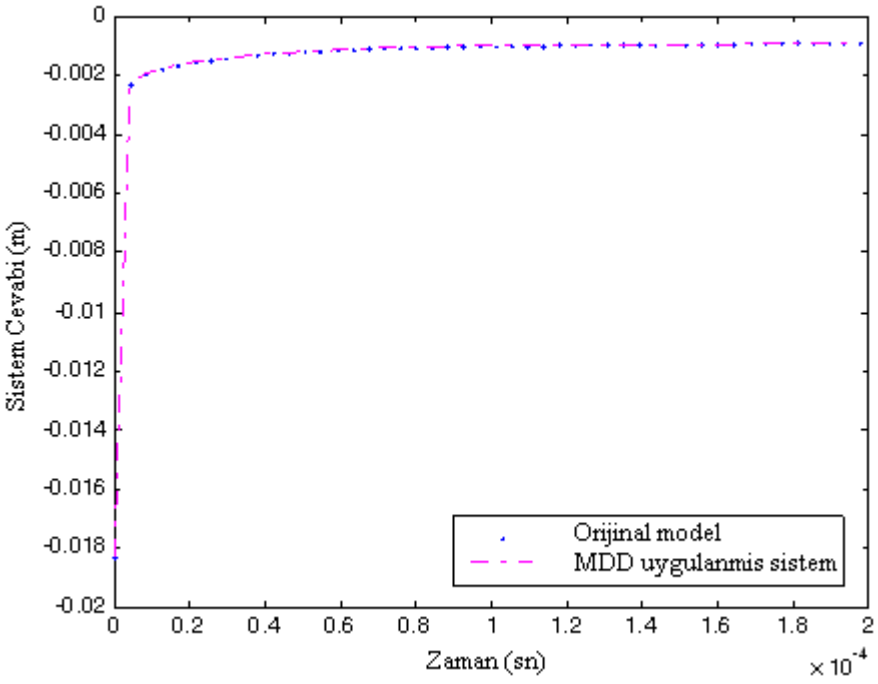


Şekil 5.65 : β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

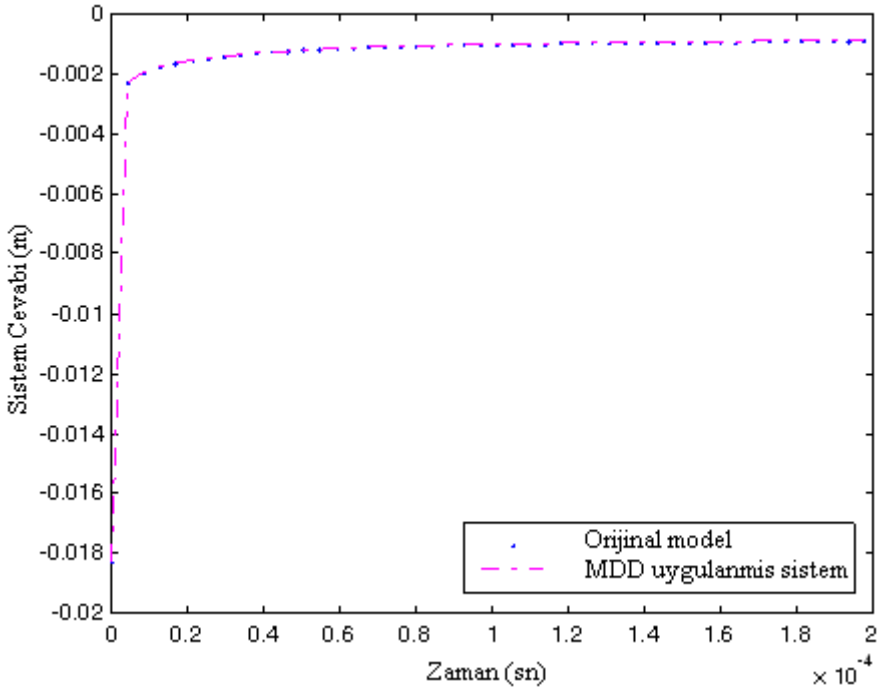
Örnek sistemin β=0.1 için MDD yöntemlerine ait impuls cevapları, Şekil 5.66-5-68'de verilmektedir.



Şekil 5.66 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

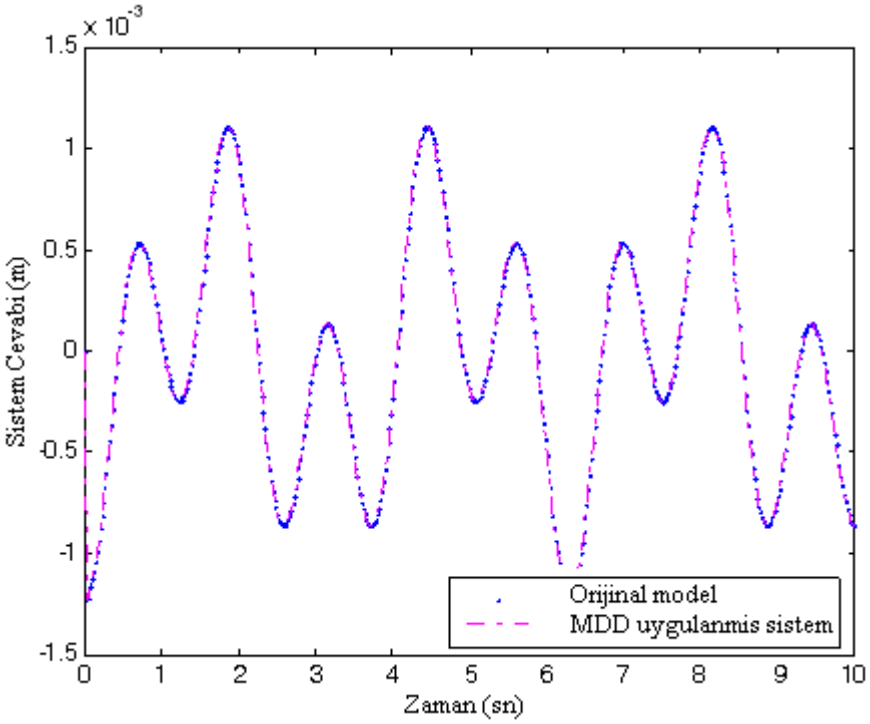


Şekil 5.67 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

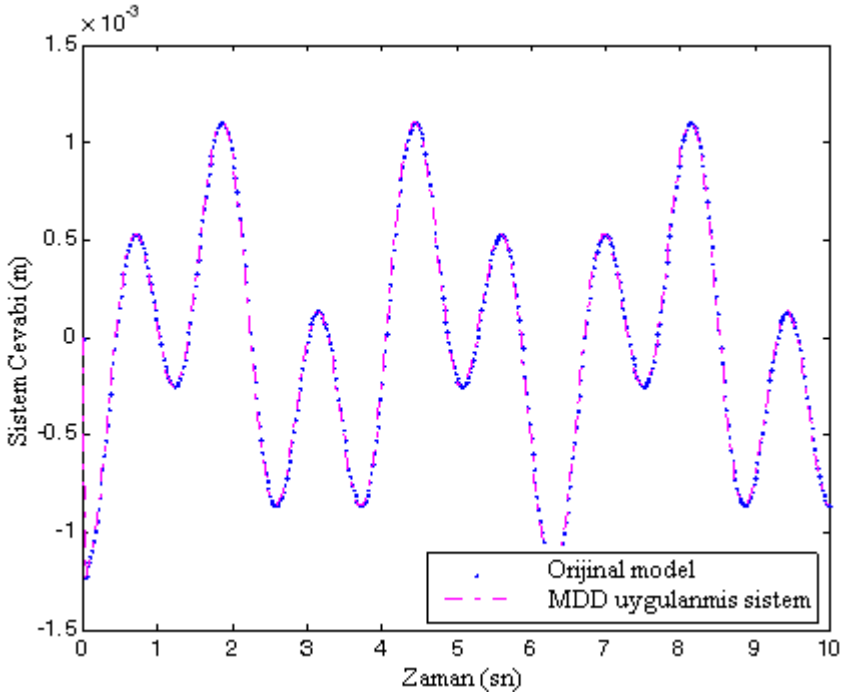


Şekil 5.68 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

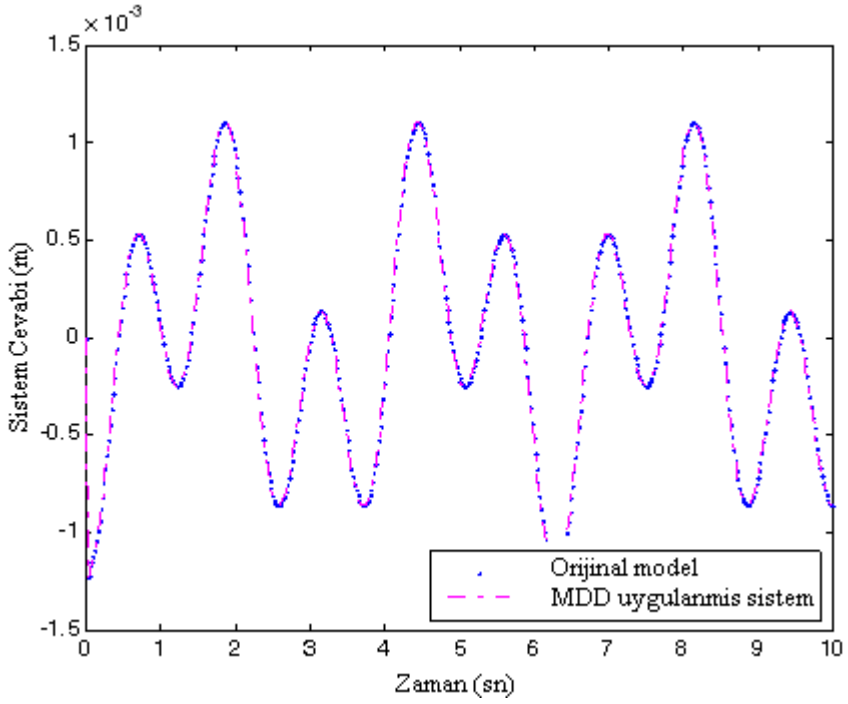
Örnek sistemin β=0.01 için MDD yöntemlerine ait sinüs cevapları, Şekil 5.69-5.71'de verilmektedir.



Şekil 5.69 : β=0. 01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

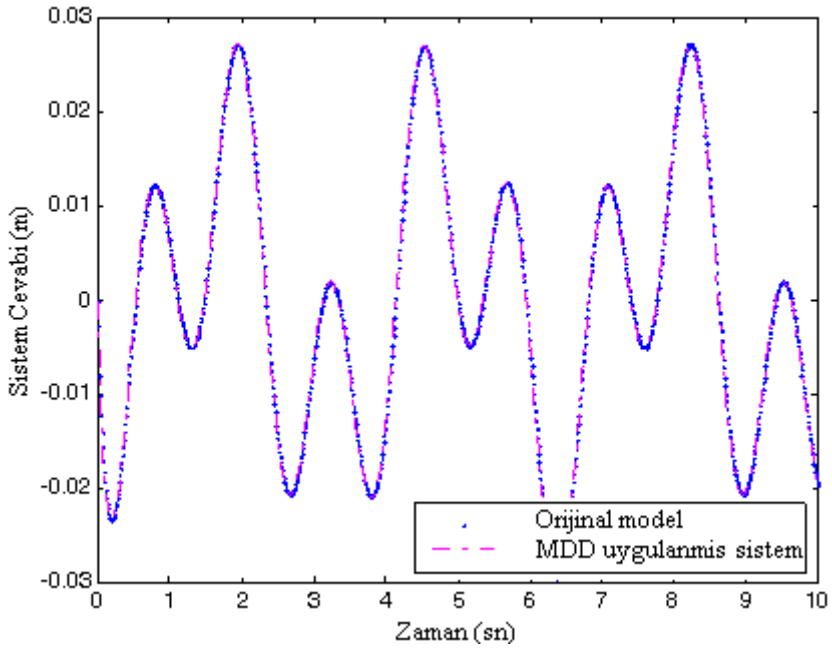


Şekil 5.70 : β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

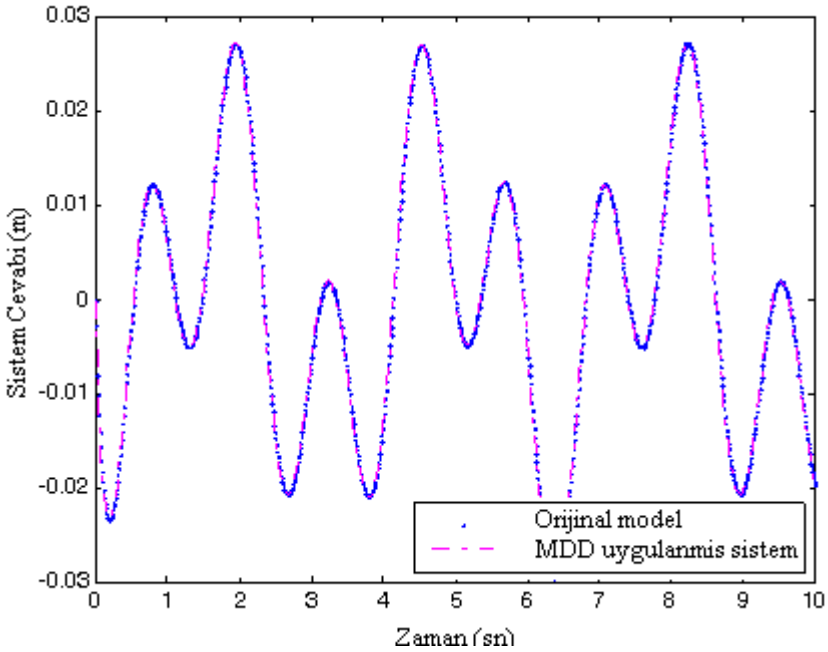


Şekil 5.71 : β=0.01 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

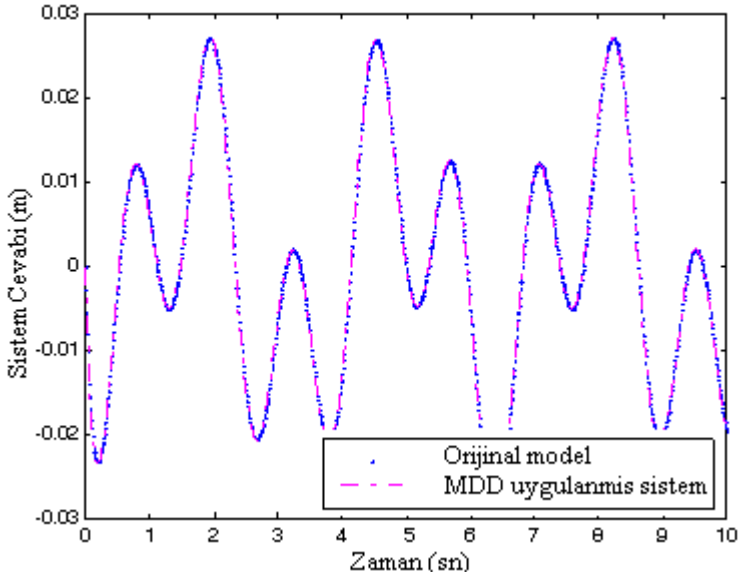
Örnek sistemin β=0.1 için MDD yöntemlerine ait sinüs cevapları, Şekil 5.72-5.74'de verilmektedir.



Şekil 5.72 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.



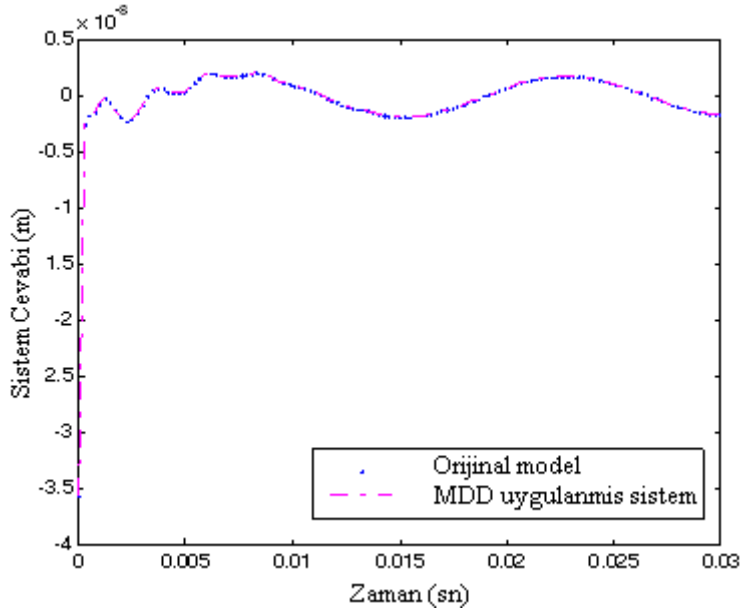
Şekil 5.73 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.



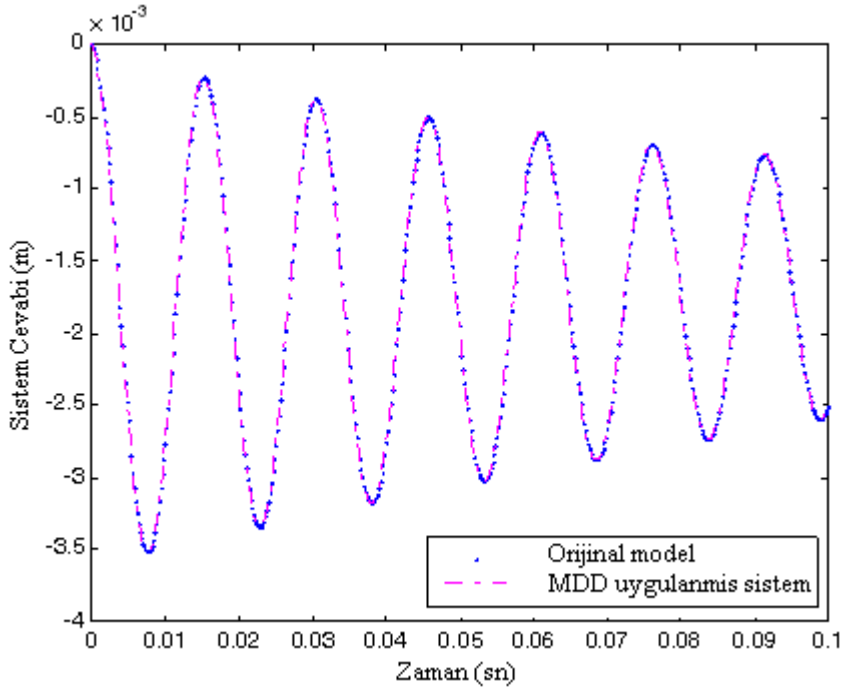
Şekil 5.74 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Newmark yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Uygulanan sinüs kuvvet giriş fonksiyonu f=100*sin(2*tzaman)+50*sin(5*tzaman) Şekil 5.30'da verilmektedir. Burada girilen 2 ve 5 açısal frekans değerleri, seçilen kiriş sistemi malzemelerinin Çizelge 5.1'de verilen özellikleri dikkate alınarak ve Çizelge 5.3'de verilen sistem doğal frekanslardan düşük olacak şekilde seçilmiştir.

Şekil 5.75-5.76'da örnek sistemin ve β=0.00008 için Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistemin sırasıyla impuls ve sinüs cevapları verilmektedir.

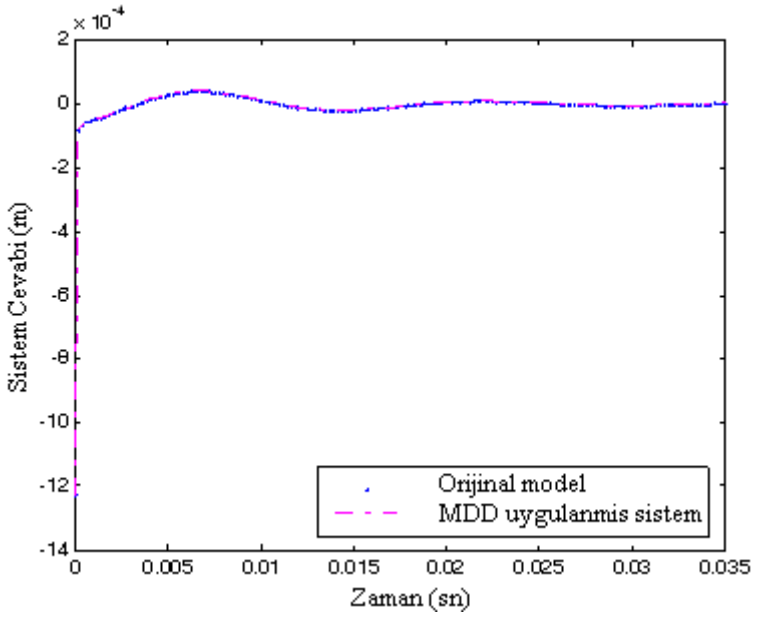


Şekil 5.75 : β=0.00008 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

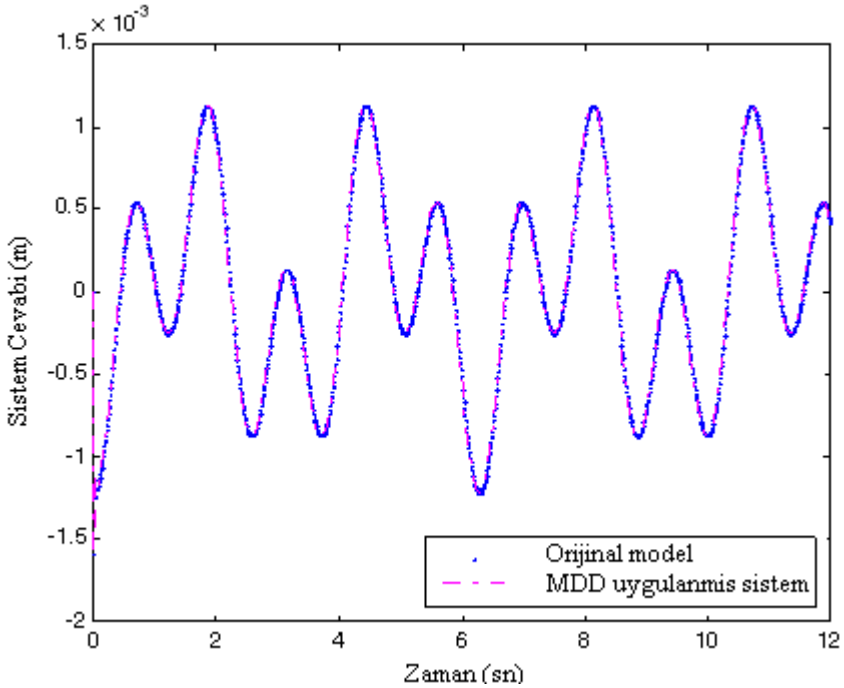


Şekil 5.76 : β=0.00008 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Şekil 5.77-5.78'de örnek sistemin ve β=0.001 için Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistemin sırasıyla impuls ve sinüs cevapları verilmektedir.

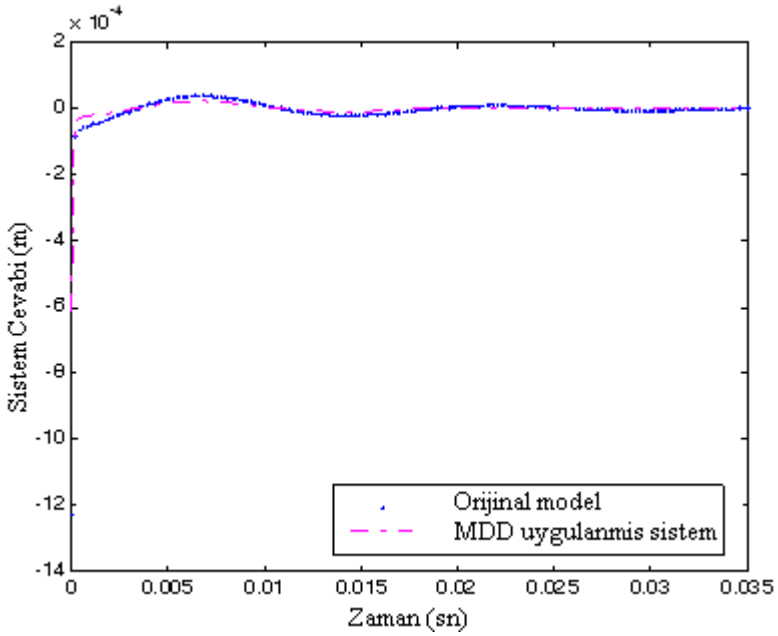


Şekil 5.77 : β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

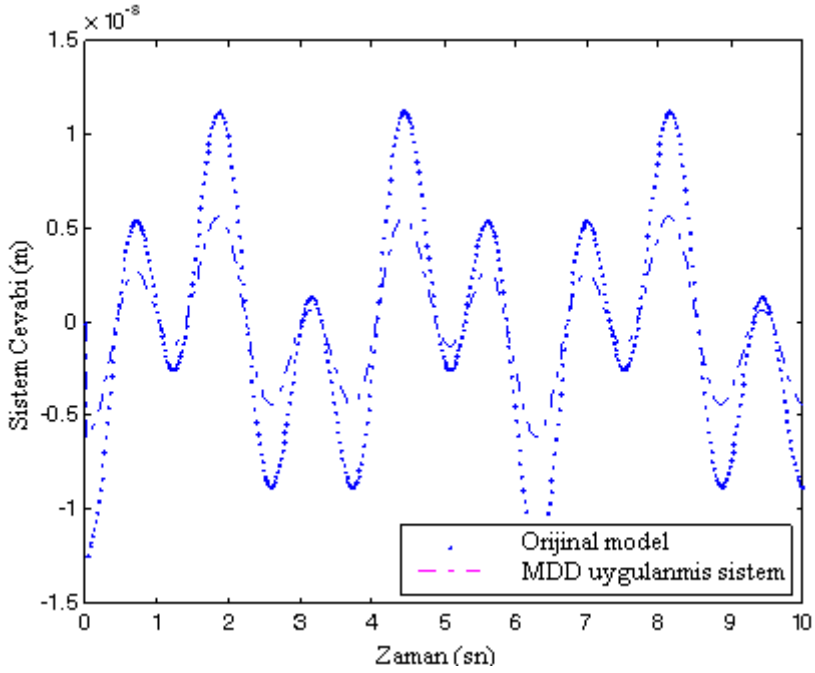


Şekil 5.78 : β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 10'a indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Şekil 5.79-5.80'de 100 elemanlı örnek sistemin ve β=0.001 için Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 148'e indirgenmiş sistemin sırasıyla impuls ve sinüs cevapları verilmektedir.

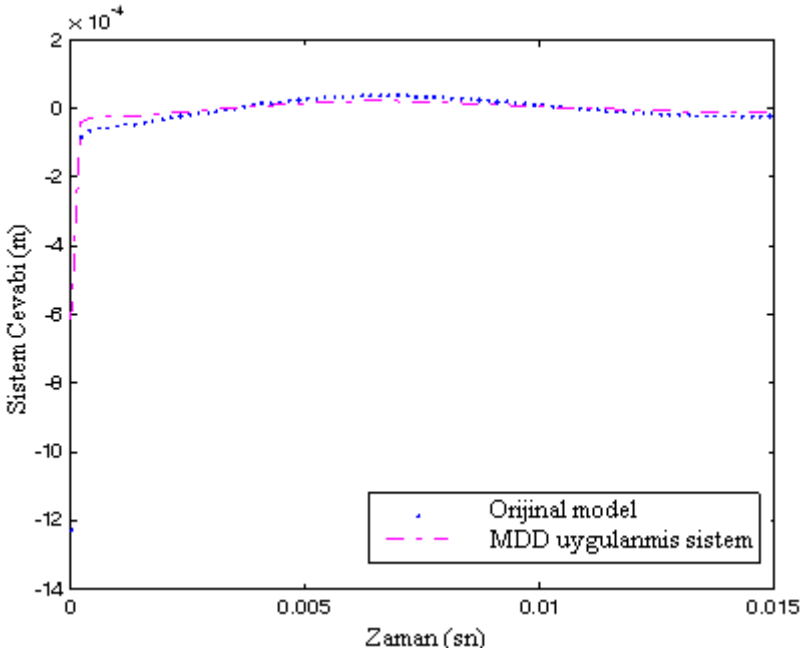


Şekil 5.79 : β=0.001 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 148'e indirgenmiş sistem için Impuls cevapları.

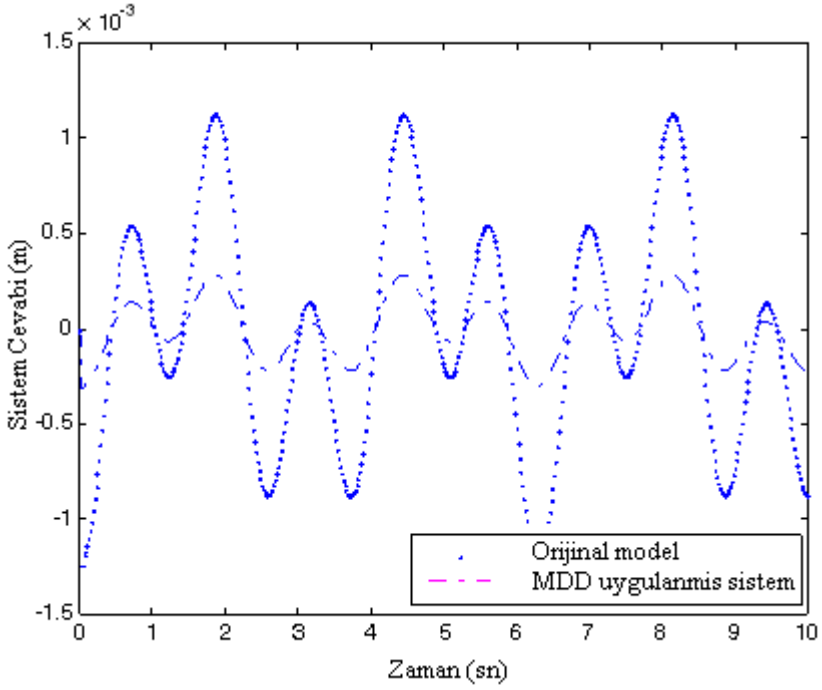


Şekil 5.80 : β=0.001 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 148'e indirgenmiş sistem için Sinüs cevapları.

Şekil 5.81-5.82'de 1000 elemanlı örnek sistemin ve β=0.001 için Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 1000'e indirgenmiş sistemin sırasıyla impuls ve sinüs cevapları verilmektedir.



Şekil 5.81 : β=0.001 için 1000 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 1000'e indirgenmiş sistem için Impuls cevapları.



Şekil 5.82 : β=0.001 için 1000 elemanlı düzlemsel kiriş sistemi ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 1000'e indirgenmiş sistem için Sinüs cevapları.

Grafiklerde verilen durumlar için hesaplama zamanları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi ve Newmark yöntemi kullanımında sönümlü ve sönümsüz sistemler için Çizelge 5.4'de verilmiştir.

Çizelge 5.4 : Düzlemsel Euler-Bernoulli kiriş sistemi analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları.

Eleman sayısı	**Orijinal model derecesi ve MDD sonrası Model derecesi**	**Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı**	**Toplam enerjilerin denkliği ile MDD işlemci zamanı [saniye]**	**İleri farklar ile MDD İilemci zamanı [saniye]**	**Newmark ile MDD işlemci zamanı [saniye]**	**MDDsiz işlemci zamanı [saniye]**
5	**15'den 10'a**	**0**	0.001	0.001	0.001	0.037
		0.001	0.001	0.001	0.001	0.031
		0.01	0.001	0.001	0.001	0.032
		0.1	0.001	0.001	0.001	0.032
15	**45'den 12'ye**	**0**	0.015	0.016	0.015	0.156
		0.001	0.015	0.032	0.016	0.141
		0.01	0.015	0.015	0.016	0.141
		0.1	0.015	0.015	0.016	0.141
100	**300'den 148'e**	**0**	0.175	0.527	0.175	1.531
		0.001	0.172	0.507	0.235	1.498
		0.01	0.172	0.515	0.235	1.525
		0.1	0.175	0.527	0.235	1.484
1000	**3000'den 1000'e**	**0**	2.579	16.515	3.906	1106.969
		0.001	2.578	15.671	3.813	1105.484
		0.01	2.515	16.375	4.093	1082.531
		0.1	2.408	16.453	3.906	1092.031

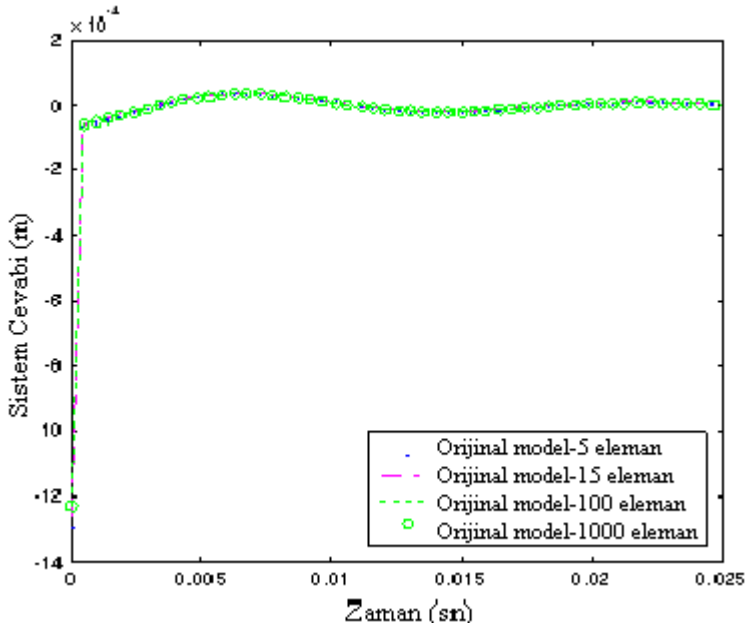
Yapılan bu uygulamada eleman sayısının aynı tutularak yapılan analizlerde sönümün hesaplama zamanında önemli bir etkisi olmadığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca model derecesindeki artışa bağlı olarak çözüm zamanın da artmakta olduğu görülmüştür. Düşük model derecelerinde yöntemler arasında ciddi bir hesaplama süresi farkına rastlanmamasına karşın, yüksek model derecelerinde, çalışmada geliştirilen Toplam enerjilerin denkliği yöntemi'nin üstünlüğü açık bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Aynı zamanda Toplam enerjilerin denkliği yönteminin kullanıldığı indirgenmiş sistemlerin impuls ve sinüs girişlere verdiği sistem cevaplarının orijinal model cevapları ile hemen hemen aynı olduğu görülmüştür. Sistem cevaplarının değerlendirilmesinde genel olarak tüm MDD yöntemlerinin yakın sonuçlar verdiği, sönüm artıkça orijinal model ile MDD uygulanmış sistemlerin cevaplarının uyum

düzeyinin arttığı görülmüştür. Düşük sönüm değerlerinde indirgenmiş sistem cevabı ile orijinal model cevabı arasında kazanç farkları oluştuğu görülmüştür.

Uygulanan yüklemelerin zaman adımlarının Çizelge 5.3'de verilen en küçük sistem periyodundan daha düşük seçilmiş olması nedeniyle özellikle impuls girişler için statik çökme değerlerinden daha az seviyelerde cevaplar alınmıştır. Bu tip zaman adımı mertebelerine sahip sistemlerde, sistem elemanlarının yüklemeyi karşılamaya başlamasına yeterli zaman olmaması nedeniyle sönüm katsayısına bağlı olarak bu tip sonuçlar ile karşılaşılmakta olduğu literatürde belirtilmektedir [35,79].

SEY analizlerinde sonuç hakkında ön fikir oluşturmak için sıklıkla kullanılan ve hesaplama zamanının görece kısa olduğu kaba elemanlar ile ağ yaratılması uygulaması da çalışmada incelenmiştir. Çalışmada bu amaçla farklı eleman sayıları ile orijinal model üzerinde kaba ve ince ağ oluşturması işlemi gerçekleştirilmiştir. Kaba ağ uygulanan az elemanlı SEY modellerinde tüm MDD ve AYB uygulamalarında az ve orijinal model hesaplama zamanına yakın bir mertebede hesaplama zamanları elde edilmiştir. Oluşturulan kaba ağ'ın kullanılmasının analiz hesaplama zamanı üzerine etkisinin en iyi görülebileceği örnek, Euler-Bernoulli kirişinin MDD uygulamasıdır. Şekil 5.83'de orijinal sistemin 5, 100 ve 1000 eleman için cevapları aynı grafiğe toplanmış olup, cevplar arasında %1~2 gibi ciddi olmayan mertebede fark bulunmaktadır.



Şekil 5.83 : Orijinal kiriş modelinin 5, 100 ve 1000 elemanlı durumlarında impuls giriş için verdiği sistem cevpaları.

Ancak bu dört farklı eleman sayısı için hesaplama zamanları arasında ciddi farklılık olduğu Çizelge 5.5'de görülmektedir.

Çizelge 5.5 : Orijinal kiriş sisteminin 5, 15, 100 ve 1000 eleman için hesaplama zamanlarının Toplam enerjilerin denkliği yöntemine göre MDD uygulanmış sistem için harcanan hesaplama zamanları ile karşılaştırılması.

Eleman sayısı	5	15	100	1000
Eleman sayısındaki artış		3	6.67	10
Orijinal model hesaplama zamanı [s]	0.033	0.145	1.510	1096.754
Orijinal model hesaplama zamanı artışı oranı[kat]		4.39	10.43	726.57
MDD uygulanmış sistem hesaplama zamanı [s]	0.001	0.015	0.174	2.520
MDD uygulanmış sistem hesaplama zamanı artışı oranı[kat]		15	11.57	14.52
MDD'nin orijinal modele göre üstünlüğü [kat]	33	9.65	8.70	435.22

Eleman sayısına bağlı olarak MDD uygulanmış sistem hesaplama zamanı, orijinal model hesaplama zamanından her zaman daha kısadır ve 1000 eleman için MDD'nin 435.22 kat daha hızlı sonuç verdiğini göstermektedir. Ayrıca yukarıdaki tabloda yapılan diğer bir karşılaştırmaya göre, orijinal sistemde 100 elemanlı bir model analizi için harcanan zaman içinde MDD uygulanarak en az 600 elemanlı sistemin analiz sonuçlarının alınmasının mümkün olacağı görülmektedir. Ayrıca aynı serbestlik derecesine sahip kaba ağ kullanılması halinde yüksek frekansların çözüme katkısı sınırlı olacağından yüksek frekanslı zorlamalara karşı sayısal çözümlerin hatası artmaktadır.

Öte yandan analiz sonuçları karşılaştırmaları incelendiğinde, kuvvet uygulama noktasının indirgenmiş sisteme dahil edilmediği durumlarda, orijinal model sonuçları ile indirgenmiş sistem cevapları arasında farklar olduğu görülmüştür. Bu durum, bir sistemi kuvvet uygulama noktasından ikiye ayırmadığınız zaman problem olmaktadır. Bunu önlemek için iç kuvvetleri, hayali dış kuvvet olarak kabul edip, alt yapılara bölme-AYB (substructuring) yöntemi uygulanmıştır.

Zaman uzayında alınan sonuçlar ile modal analiz sonuçları arasında bir paralellik olduğu, öncelikle orijinal model ve indirgenmiş sistem için yapılacak modal analizin

değerlendirilmesi ile sistem cevapları hakkında önemli bilgi elde edilmiş olacağı görülmüş ve yapılan tüm örnek uygulamalarda modal analizler gerçekleştirilmiştir.

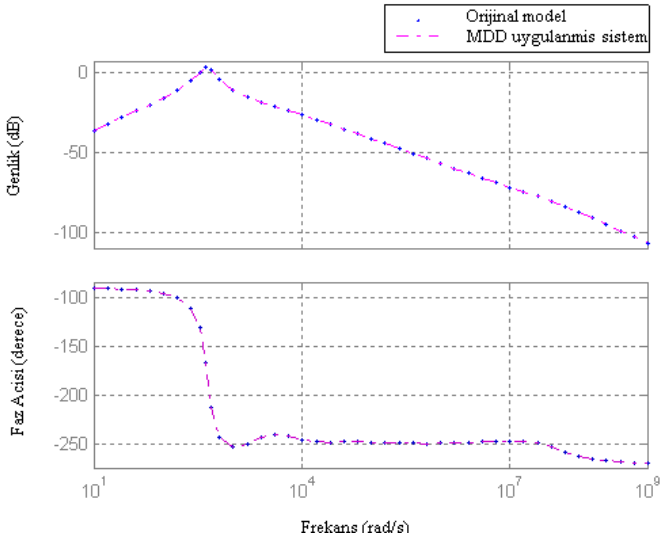
İndirgenmiş ve orijinal modellerin impuls cevaplarında yuvarlatma hataları nedeniyle mertebe farklılıkları ortaya çıkmakta olduğu tespit edildi. Bu durumu çözmek amacıyla kaynak [45]'de bahsedildiği şekilde sistem cevapları, 1e-8 ile çarpılarak ölçekleme uygulanmıştır.

5.4.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması

AYB uygulanmış sistemin serbestlik derecesi azaldığından genel olarak indirgenmiş bu sistemlerde enerji seviyesi de korunamıyor. Bu nedenle, aktif serbestlik derecelerinin zaman cevapları ve frekans cevaplarını veren Bode diyagramları esas alınarak karşılaştırma yapılmasının daha uygun olduğunu görülmüştür.

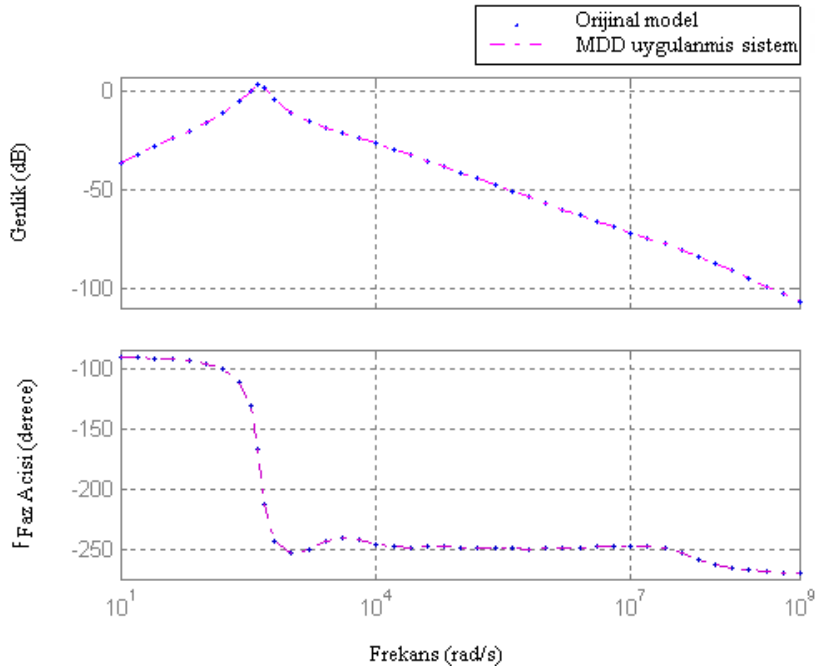
5.4.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi

Yapısal sistemlerin frekans cevapları sistem ile ilgili önemli bilgiler vermektedir. Frekans cevabının genlik-frekans ve faz açısı-frekans olarak incelendiği Bode diyagramlarından sistemin düşük ve yüksek frekanslardaki davranışları birlikte görülebilmektedir. β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemin ve MDD yöntemleri ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemlerin frekans cevapları, her üç MDD yöntemi için Şekil 5.84-5.86'da verilmiştir.

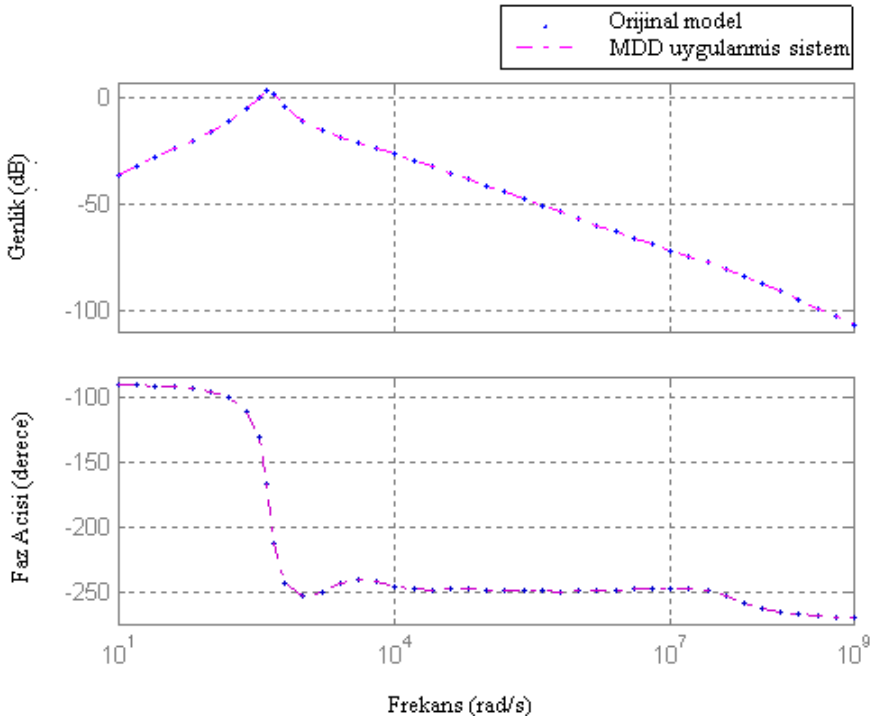


Şekil 5.84 : β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

Orijinal model ve MDD uygulanarak indirgenmiş sistemlerin zamana bağlı cevaplarının uyum içinde olduğu ve uygulanan "Toplam enerjilerin denkliği" yaklaşımının verdiği sonuçların doğruluğu bu kısımda incelenmektedir.

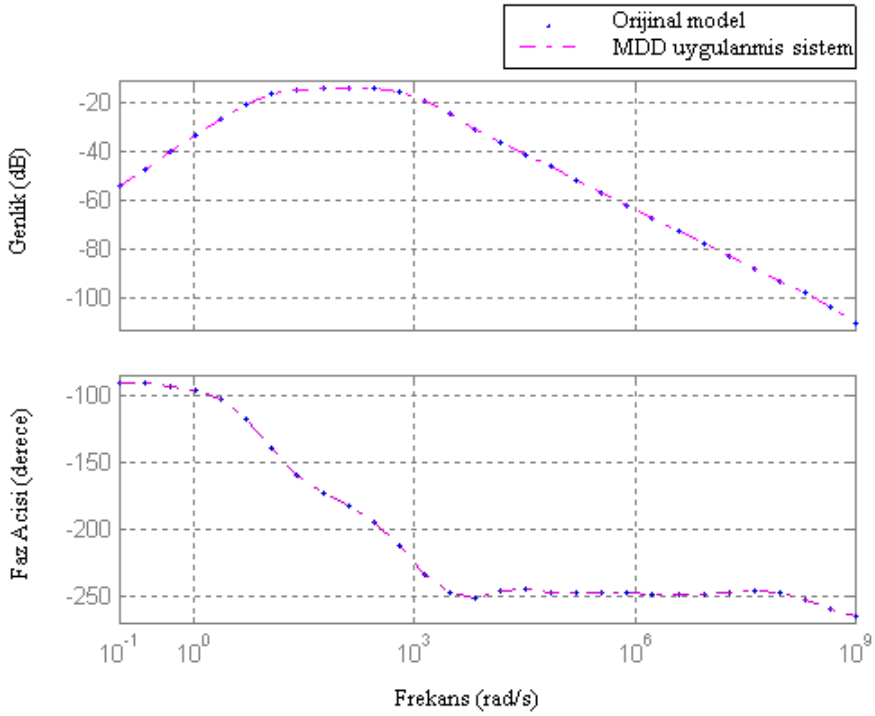


Şekil 5.85 : β=0.001 için5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

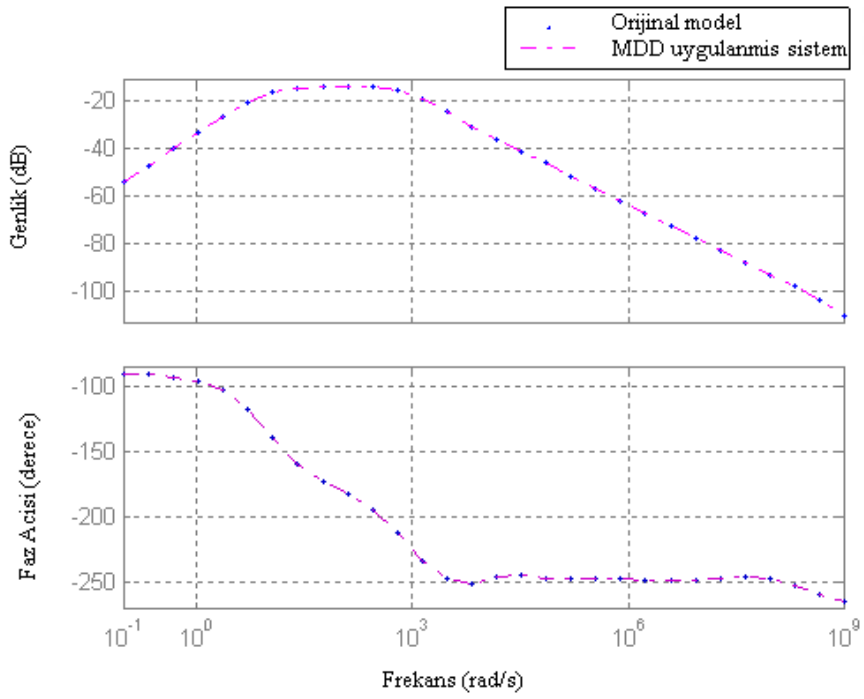


Şekil 5.86 : β=0.001 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

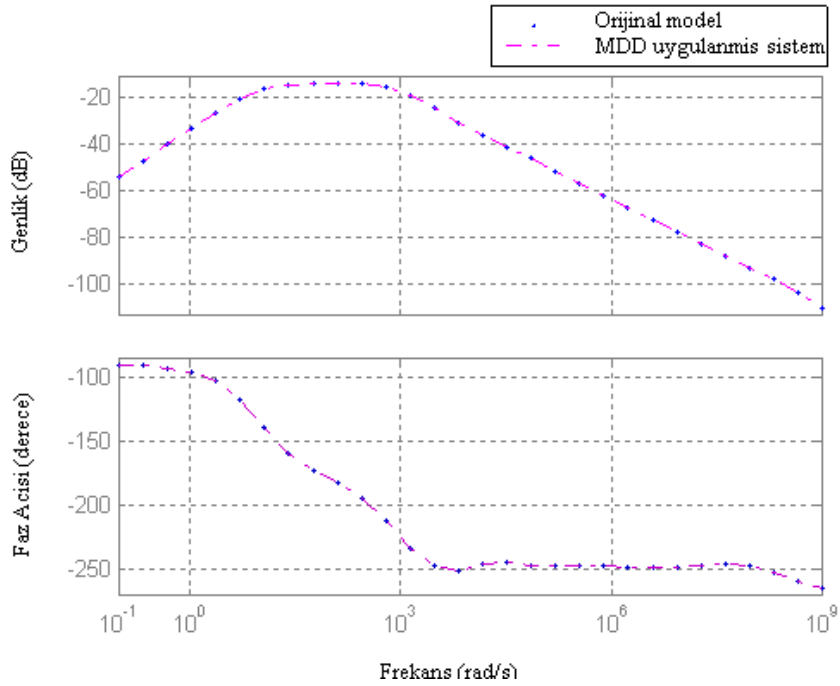
Benzer şekilde β=0.1 için yine aynı sistemler için sistem frekans cevapları da Şekil 5.87-5.89'da yer almaktadır.



Şekil 5.87 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

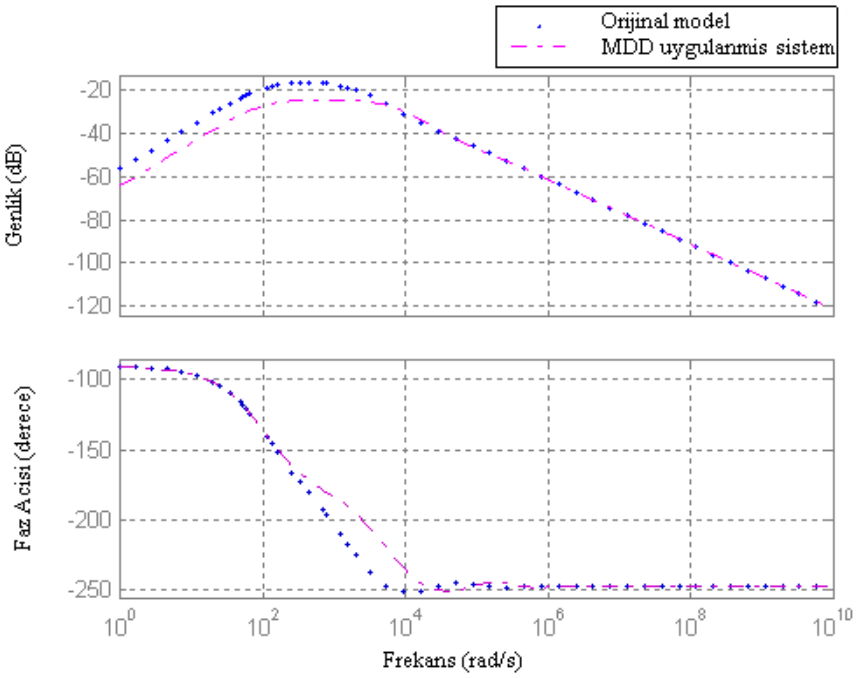


Şekil 5.88 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

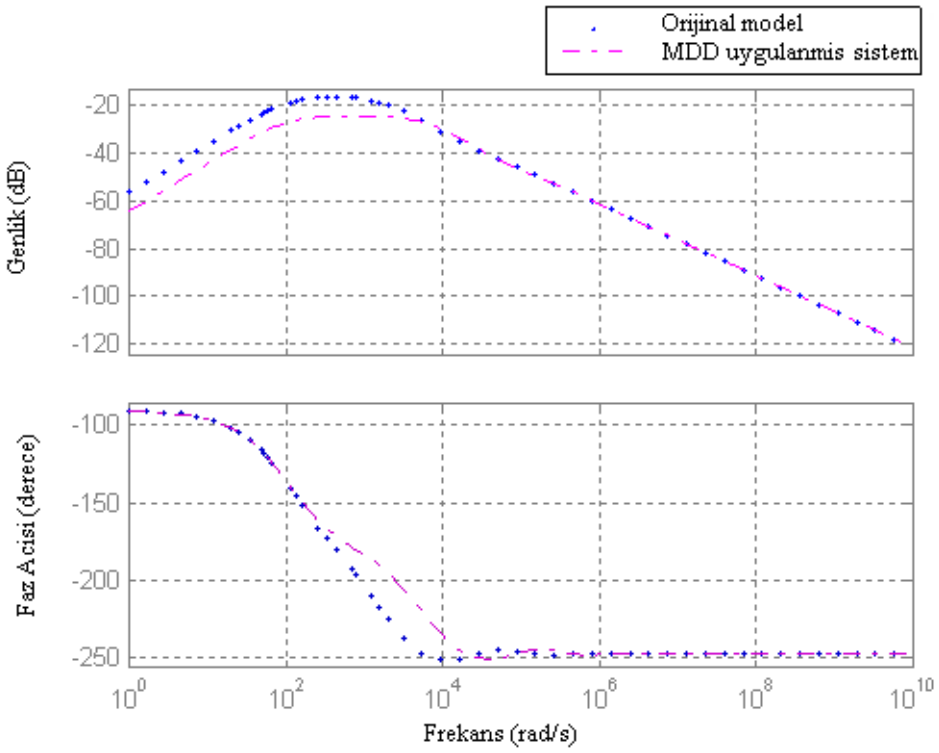


Şekil 5.89 : β=0.1 için 5 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 15'den 10'a indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

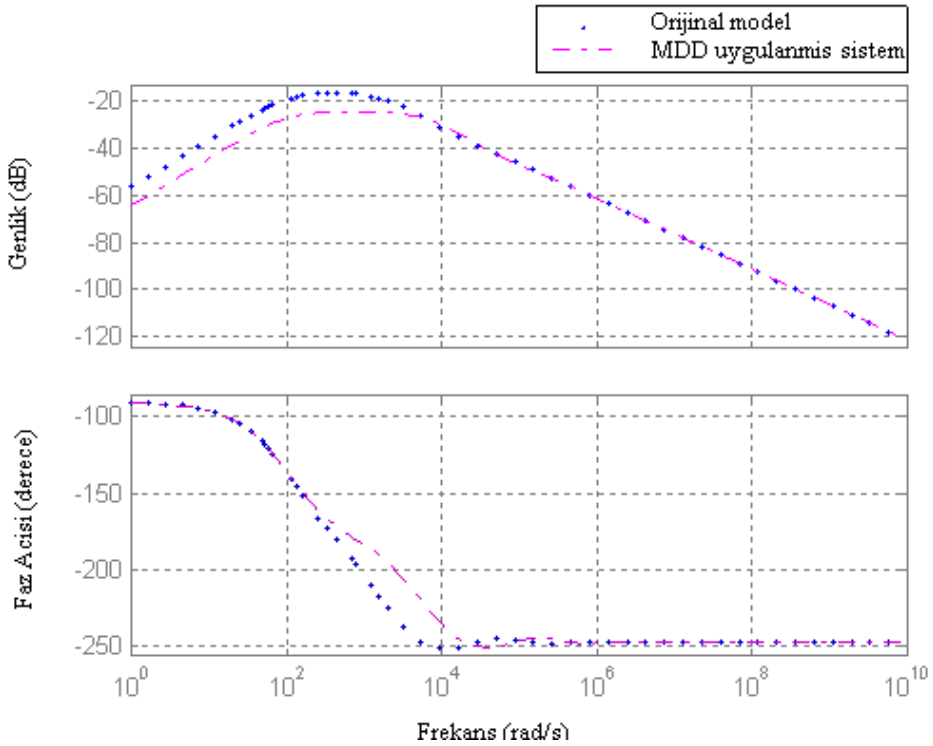
β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemin ve MDD yöntemleri ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemlerin frekans cevapları, her üç MDD yöntemi için Şekil 5.90-5.92'de verilmiştir.



Şekil 5.90 : β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

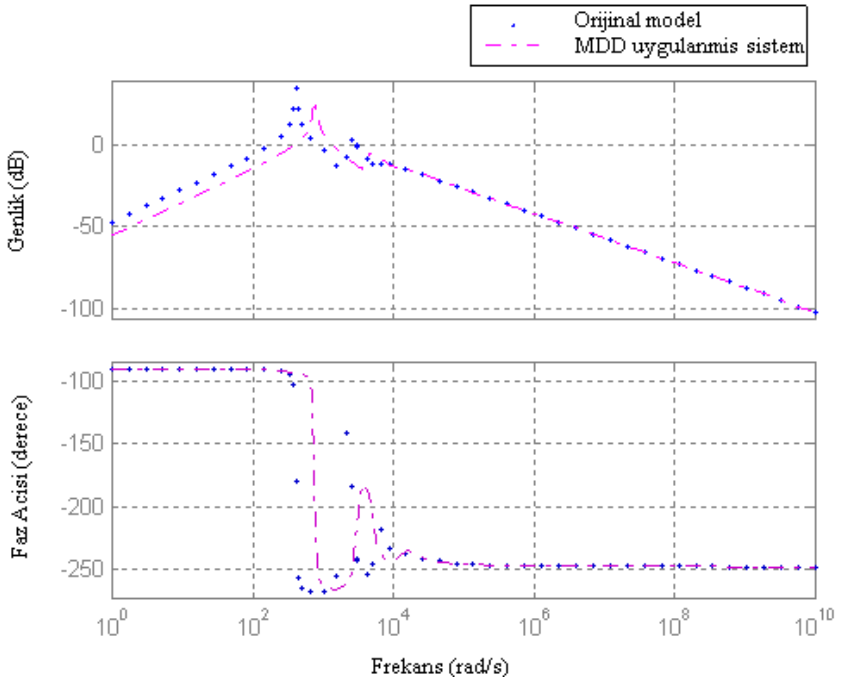


Şekil 5.91 : β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

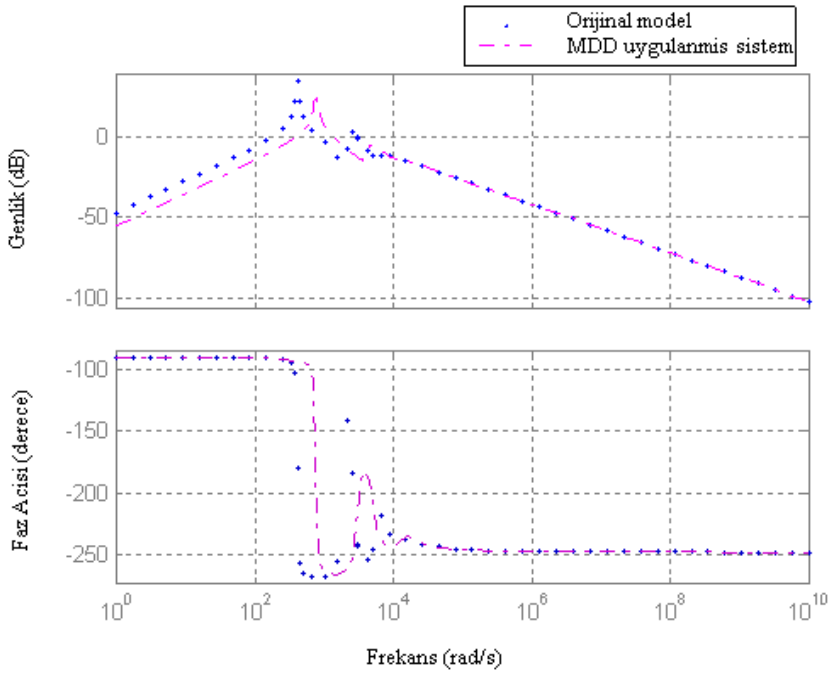


Şekil 5.92 : β=0.01 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

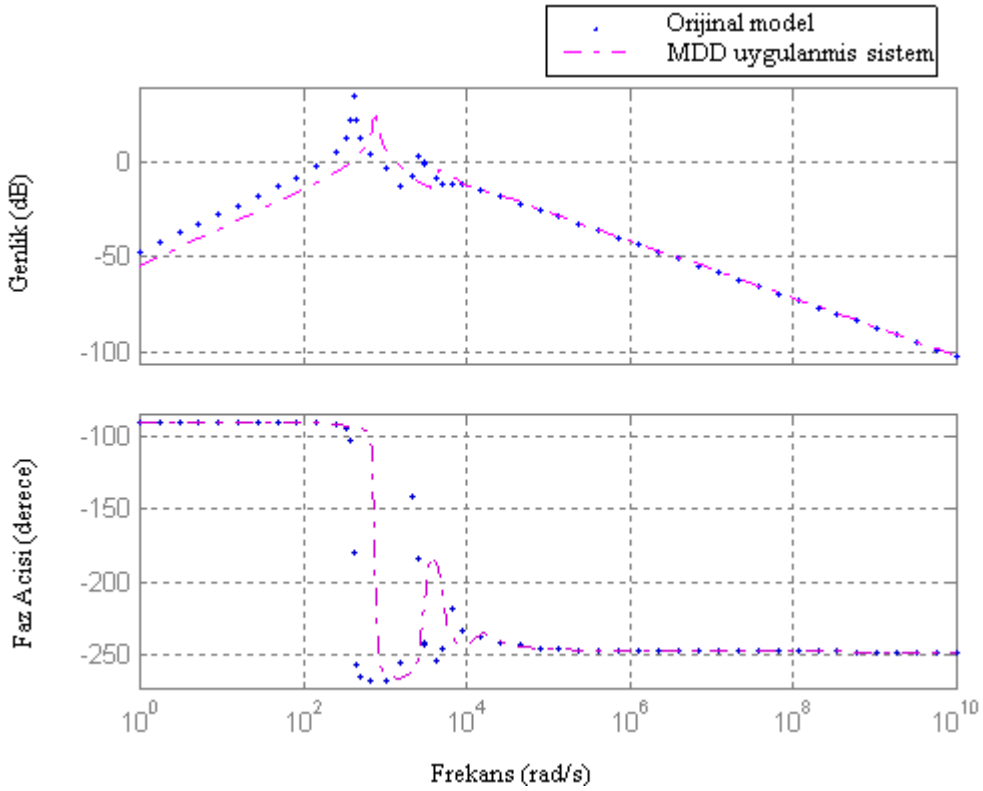
β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemin ve MDD yöntemleri ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemlerin frekans cevapları, her üç MDD yöntemi için Şekil 5.93-5.95'de verilmiştir.



Şekil 5.93 : β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.



Şekil 5.94 : β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.



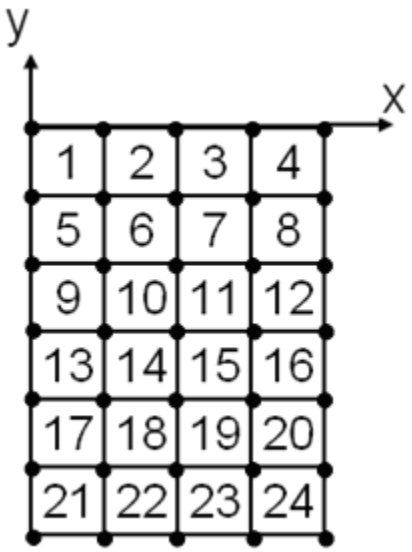
Şekil 5.95 : β=0.00008 için 100 elemanlı düzlemsel kiriş sisteminin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 300'den 148'e indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

5 elemanlı sistem üzerinde uygulanan MDD sonrasında elde edilen indirgenmiş sistemlerin hem düşük, hem de yüksek frekanslarda orijinal model ile aynı frekans cevabını verdiği görülmektedir. Bu durumda sistemin model derecesi düşürme sonrasında sistem karakterinin frekans uzayında değişmediği sonucuna varılmaktadır.

Ancak yüksek eleman sayısına sahip sistemde MDD derecesi sistem kararlılığını etkileyecek şekilde seçilmiş olması nedeniyle düşük ve orta frekans aralığında orijinal modelin frekans cevabına uygun bir frekans cevabı vermemektedir. Aşırı derecede MDD uygulanmasına rağmen yine de indirgenmiş sistem cevabının orijinal model frekans cevabına yakın sonuç verdiği gözlemlenmektedir ve grafiklerde – düşük sönüm değerlerinde daha fazla olmak üzere- yerel uyumsuzluklar gözlense de benzer karakterde frekans cevapları alındığı kabul edilebilir. Bu da orijinal model ve indirgenmiş sistemin aynı davranışları gösteren sistemler oldukları sonucunu getirmektedir.

5.5 Düzlemsel Plak Elemanı Sisteminde Model Derecesi Düşürme Uygulaması

Yeni yöntemlerin uygulanması için üçüncü örnek uygulama Şekil 5.96'da verilmekte olan düzlemsel plak eleman sistemi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Farklı eleman sayıları ve model düşürme dereceleri için sistemin Matlab'de hazırlanan ayrı bir kod ile yapılan analizlerinin sonuçları önceki MDD yöntemleri ile karşılaştırılmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir.



Şekil 5.96 : MDD uygulanacak 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli.

5.5.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar

Uygulamada yapının sönümlü ve sönümsüz davranışları farklı yükleme tiplerine göre incelenmiş ve farklı MDD yöntemleri uygulanmış sistem cevaplarının ve bu hesaplamalarda kullandığı işlem zamanları karşılaştırılmıştır.

Seçilen düzlemsel plak orijinal modeli, Şekil 5.96'da görüldüğü gibi, 24 eleman ve 35 düğüm noktasından oluşmaktadır. Düzlemsel plak elemanın her bir düğüm noktasında Bölüm 3'de tanımlandığı gibi 1 öteleme, 2 dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi bulunmaktadır. Seçilen ankastre bağlı plağın x yönündeki genişliği 120 mm, y yönündeki yüksekliği 240 mm olup, plak kalınlığı 2.4 mm'dir. Plak malzemesi olarak yoğunluğu 7850 kg/m^3, elastiklik modülü 210 GPa, kayma modülü 75 GPa ve Poisson oranı 0.3 olan çelik seçilmiştir. Yükleme 14, 15, 18 ve 19 nolu elemanların temasta olduğu 23 nolu düğüm noktasından ve z yönünde sayfa düzleminden içeri doğru -100 N olarak uygulanmıştır.

Örnek sistem üzerinde öncelikle, Bölüm 5.3'de belirtilen yaklaşımlar ile topoloji matrisi, indirgenmiş sistemin topoloji matrisi, orijinal modelin katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek montaj işlemleri yapılmıştır. Yine aynı bölümde belirtilen seçim yöntemleri ile MDD uygulaması için E dönüşüm matrisi oluşturulmuş, ardından indirgenmiş sistem katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek montaj işlemleri tamamlanmıştır. Sınır şartları ile impuls ve sinüs yüklemelerin uygulanması sonrasında orijinal model ve indirgenmiş sistem cevapları bulunmuştur. Seçilen örnek malzemelerin Çizelge 5.1'de verilen katılık orantılı sönüm katsayıları (β=0.00008, 0.001, 0.01, 0.1) ve sönümsüz (β=0) olma durumu için analizler tekrarlanmıştır.

Bu örnek uygulamadaki SEY modelinin seçilen her bir malzeme için ilk özdeğerine karşılık gelen ilk doğal frekans değeri, SEY ile, analitik olarak ve ANSYS ile ayrı ayrı hesaplanmıştır. Ayrıca her bir malzeme için kritik sönüm katsayısı değeri farklı olacağı için malzemeler için SEY modelinden elde edilen sönüm oranları bulunmuştur. Hesaplanan doğal frekanslar ve kritik sönüm oranları, Çizelge 5.6'da toplanmıştır.

Çizelge 5.6 : Düzlemsel plak sistemi SEY modelinin malzemelere göre ilk doğal frekansları, sönüm oranları, sönüm durumu, en küçük sistem periyotları ve sistem statik çökmeleri.

Özellik\Malzeme		**Saf alüminyum**	**Çelik**	**Dökme demir**	**Kurşun**
Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı		0.00008	0.001	0.01	0.1
Sönüm oranı		0.018	0.226	2.280	17.438
Sönüm durumu		Kritik altı	Kritik altı	Kritik üstü	Kritik üstü
İlk doğal frekans [rad/s]	**Analitik**	9298.6	9426.4	9608.3	2173.4
	SEY	9312.2	9435.1	9590.4	2169.7
	ANSYS	9308.9	9467.9	9584.7	2168.9
En küçük sistem periyodu [s]	**Analitik**	0.000675	0.000667	0.000654	0.002891
	SEY	0.000675	0.000666	0.000655	0.002891
	ANSYS	0.000675	0.000664	0.000655	0.002897
Statik çökme [m]	**Analitik**	-0.000441	-0.000153	-0.00013	-0.002053
	SEY	-0.000442	-0.000153	-0.00014	-0.002054
	ANSYS	-0.000442	-0.000152	-0.00014	-0.002054

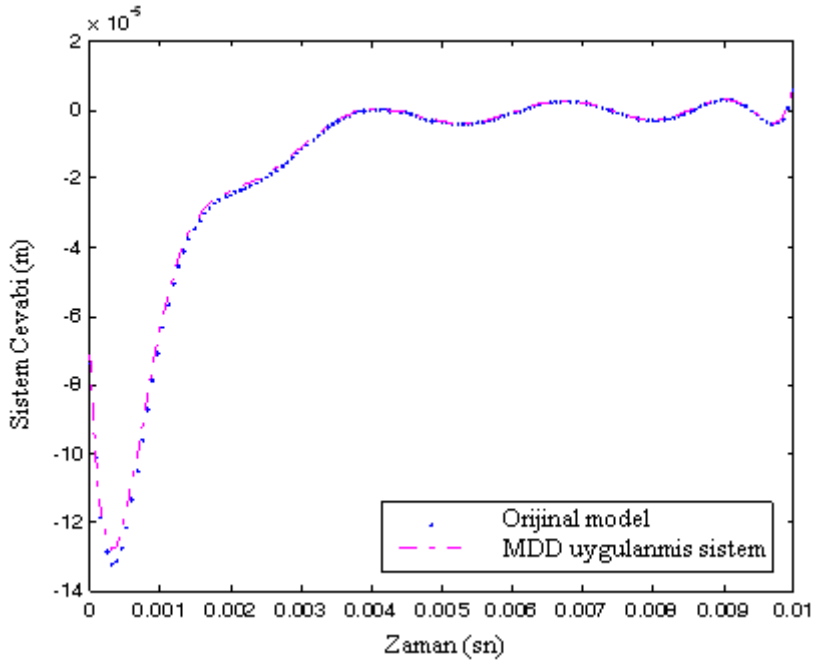
Kritik sönüm durumlarının incelenmesine yarayan sönüm oranının 1'in altında bir değere sahip olması durumunda sistemin yeterince sönümlenmediği için yüklemelere vereceği cevapta bir salınım oluşması beklenmektedir. Sönüm oranının kritik değeri

olan 1'in üzerindeki durumlarda ise sistemin aşırı sönümlendiği kritik üstü sönüm durumu ile karşılaşılır. Sistem cevaplarının kritik üstü ve kritik altı durumları da Çizelge 5.6'ya yansıtılmıştır. Çizelge 5.6'da verilen analitik, SEY ve ANSYS statik çökme değerlerinin birbirleri ile uyum içinde oldukları görülmektedir. Doğal frekansların karşılaştırmasında ise modal analizin sonucunda analitik, SEY ve ANSYS sonuçları arasında küçük de olsa farklar oluştuğu tespit edilmiştir.

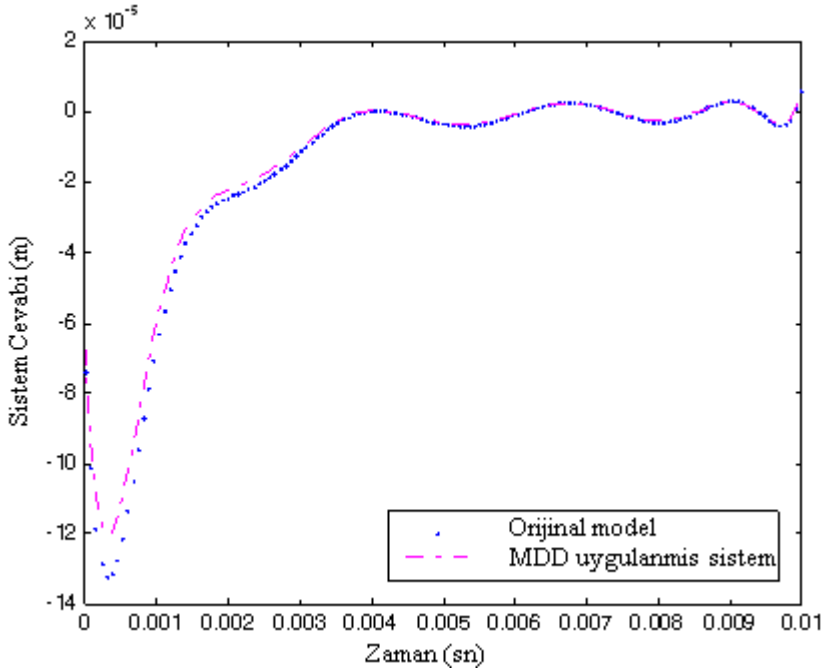
5.5.2 Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması

Çalışmanın devam eden aşamasında uygulanan impuls ve sinüs girişlerine karşılık orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği, İleri farklar ve Newmark yöntemleri ile model derecesi düşürülmüş sistemlerden alınan cevapların zaman uzayında ayrı ayrı karşılaştırılmaları yapılmıştır. İlk uygulama olan çubuk sistem örneğinde, İmpuls Cevabı İnvaryantı yönteminden alınan sonuçların diğerleri kadar yeterli olmadığı görüldüğü için plak uygulamasında bu yöntem kullanılmamıştır. Yapılan analiz uygulamalarının ilk kısmında eleman sayısı, sabit 24 olarak alınmıştır.

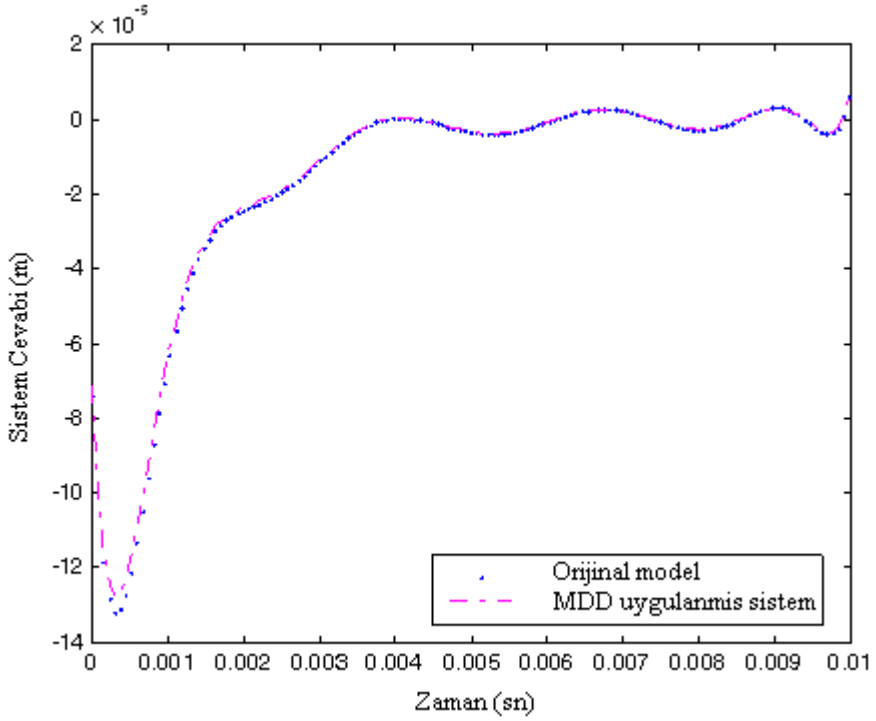
Plak sistemi analizleri için seçilmesi tavsiye edilen en küçük zaman adımı, kiriş sistem için verilen (5.24) bağıntısı kullanılmıştır. Şekil 5.97-5.99'da örnek sistemin β=0.001 için MDD yöntemlerine ait impuls cevapları verilmektedir.



Şekil 5.97 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

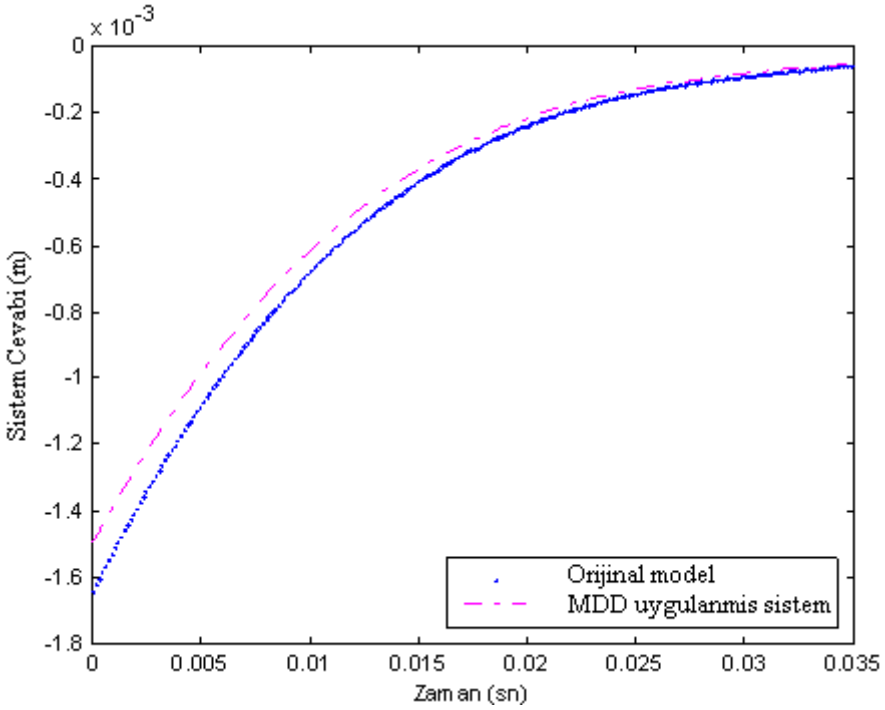


Şekil 5.98 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

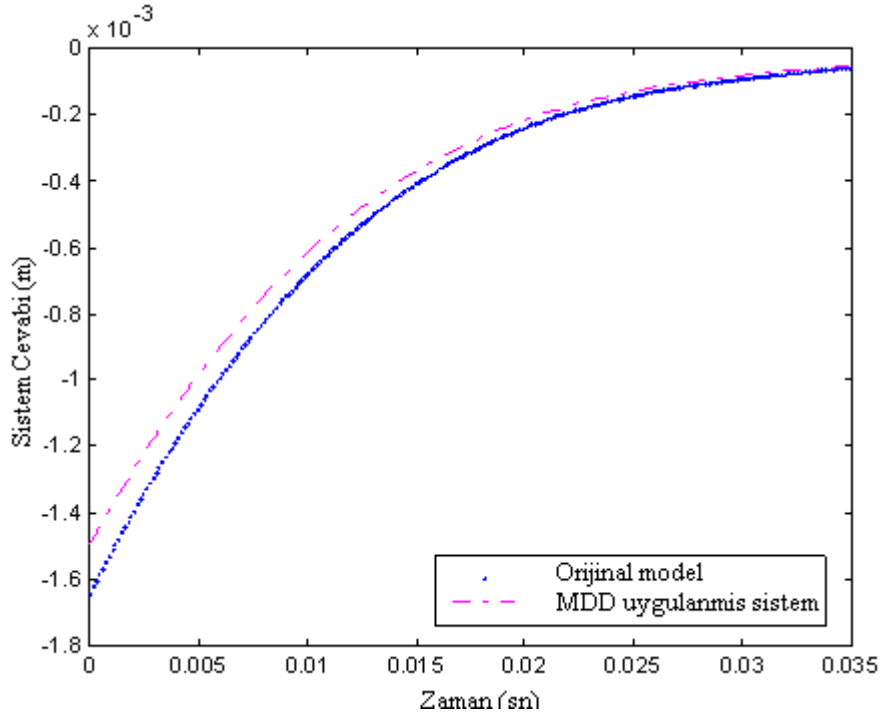


Şekil 5.99 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

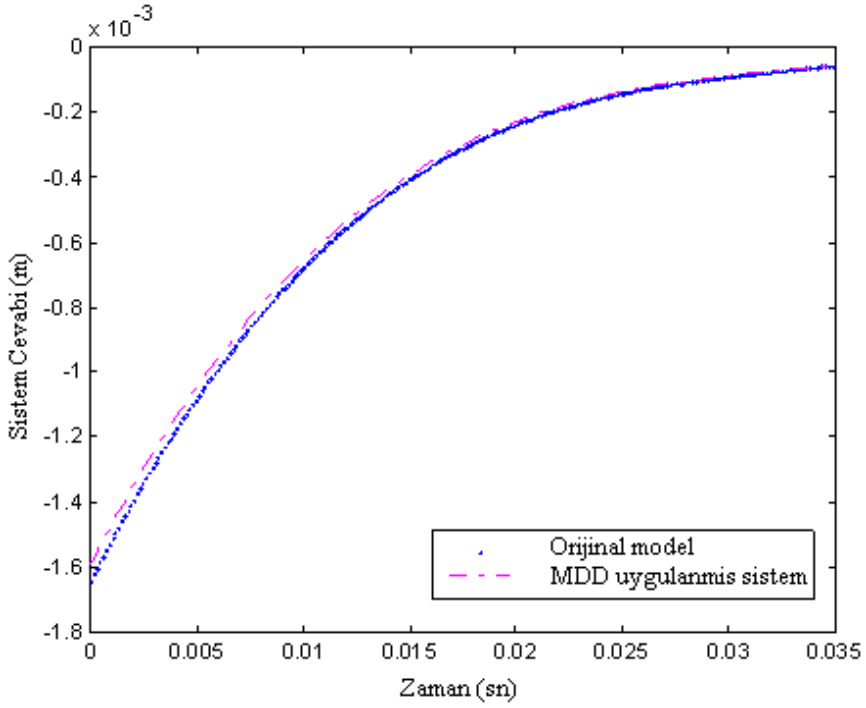
Şekil 5.100-5-102'de örnek sistemin β=0.1 için MDD yöntemlerine impuls cevapları verilmektedir.



Şekil 5.100 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

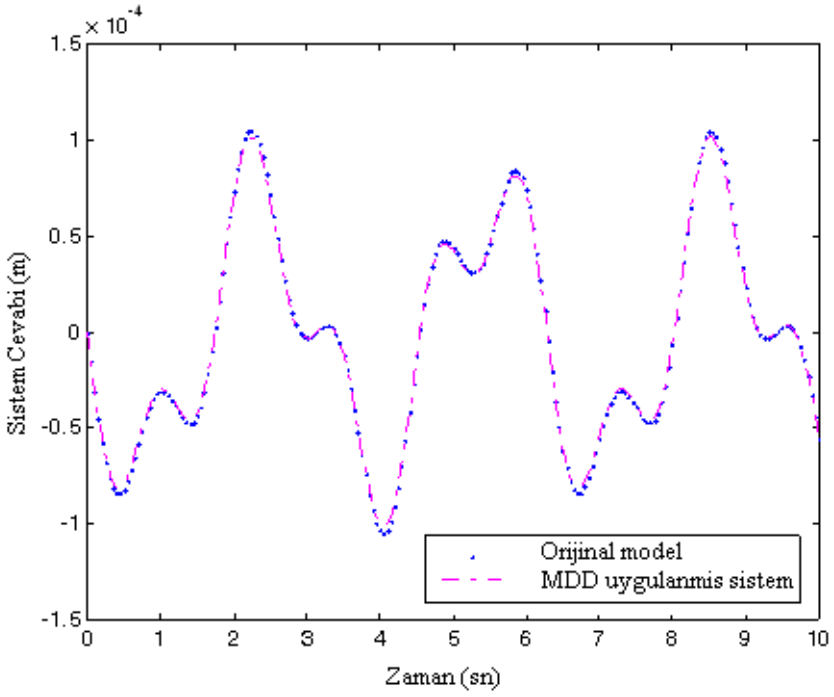


Şekil 5.101 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

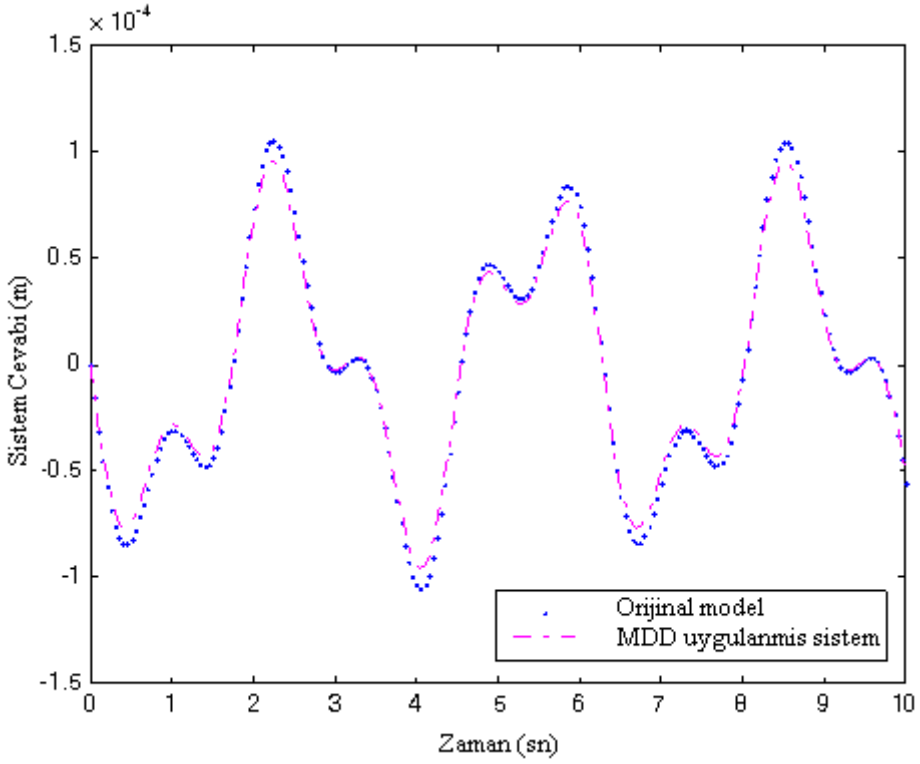


Şekil 5.102 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

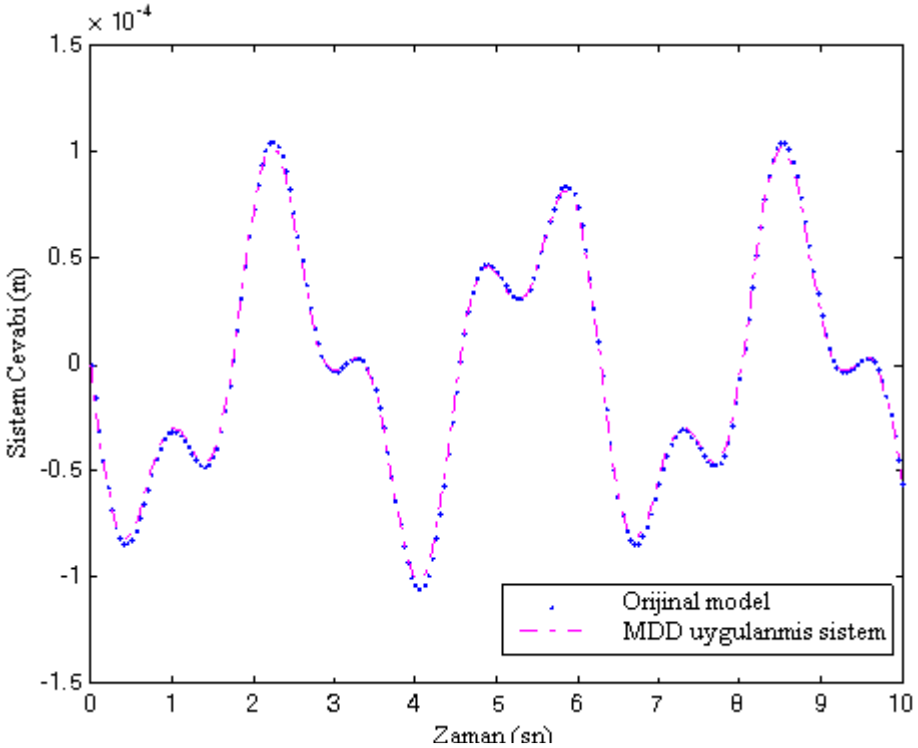
Şekil 5.103-5.105'de β=0.001 için MDD yöntemlerine ait sinüs cevapları verilmektedir.



Şekil 5.103 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

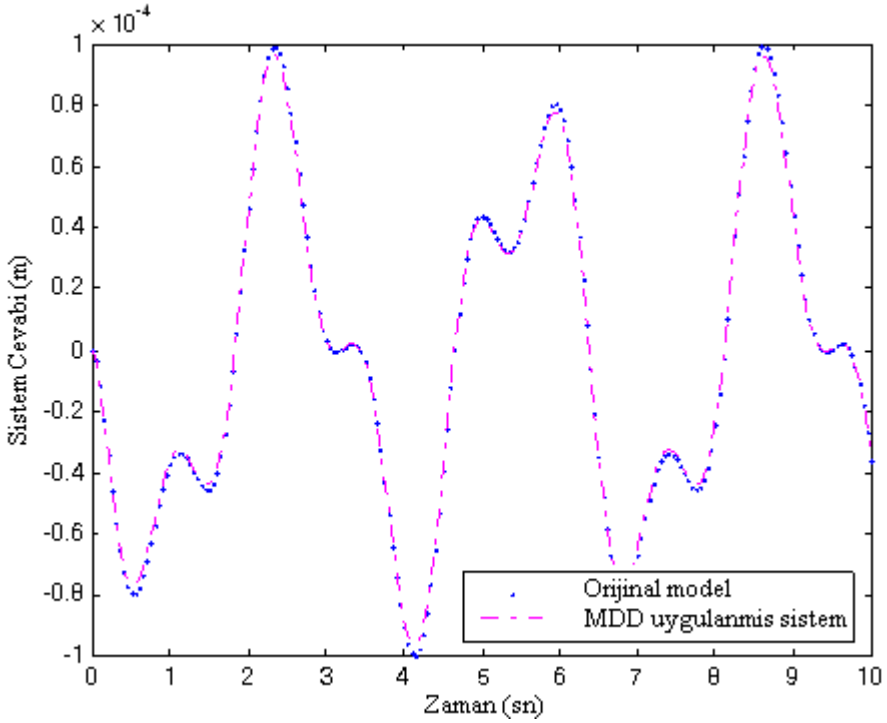


Şekil 5.104 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

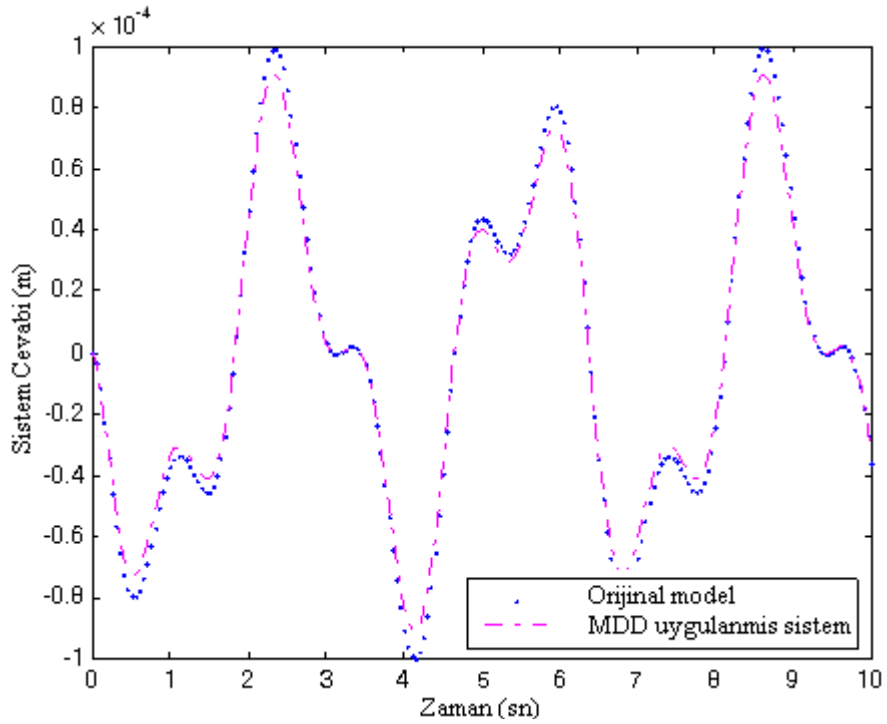


Şekil 5.105 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

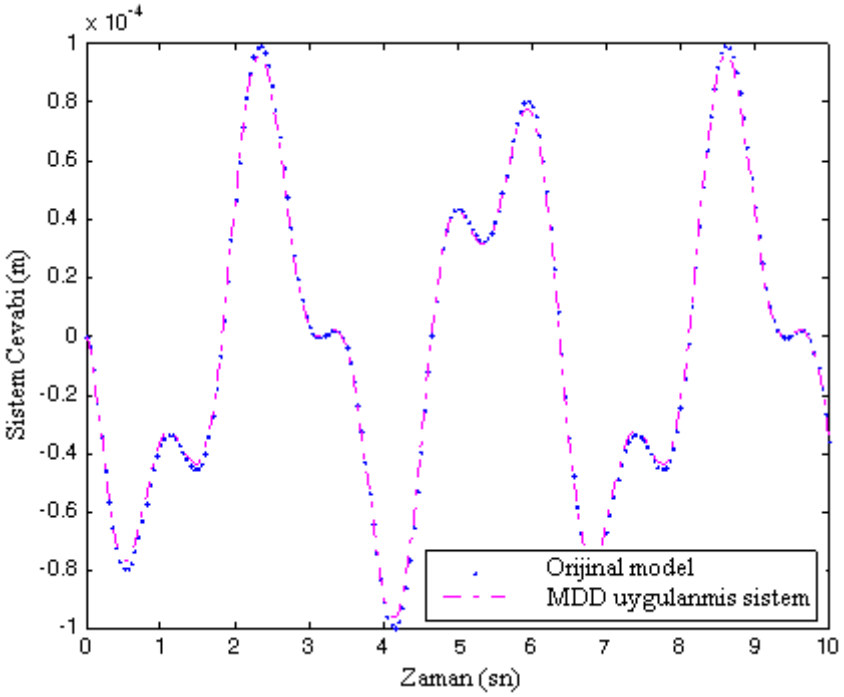
Şekil 5.106-5.108'de β=0.1 için MDD yöntemlerine ait sinüs cevapları verilmektedir.



Şekil 5.106 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

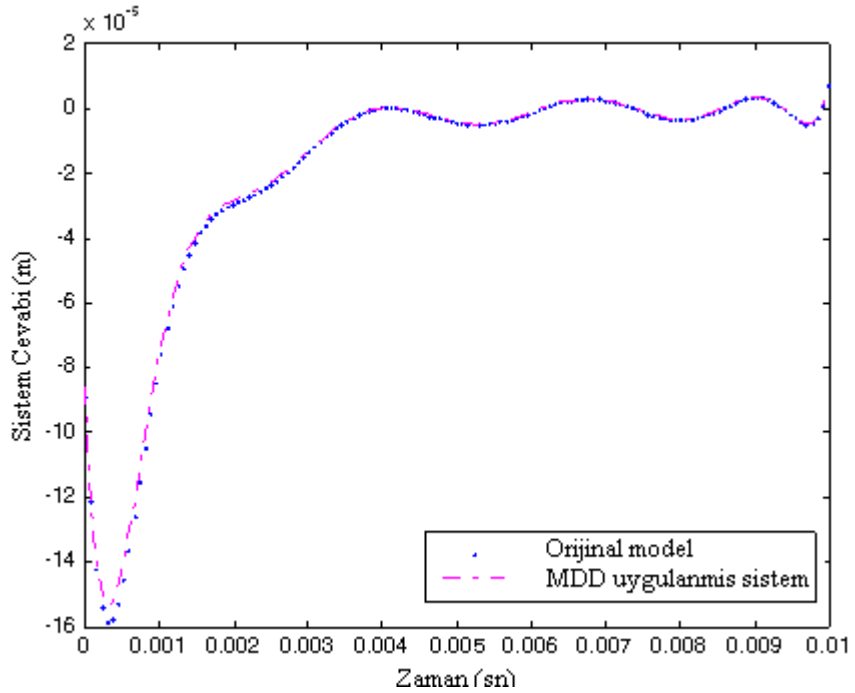


Şekil 5.107 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

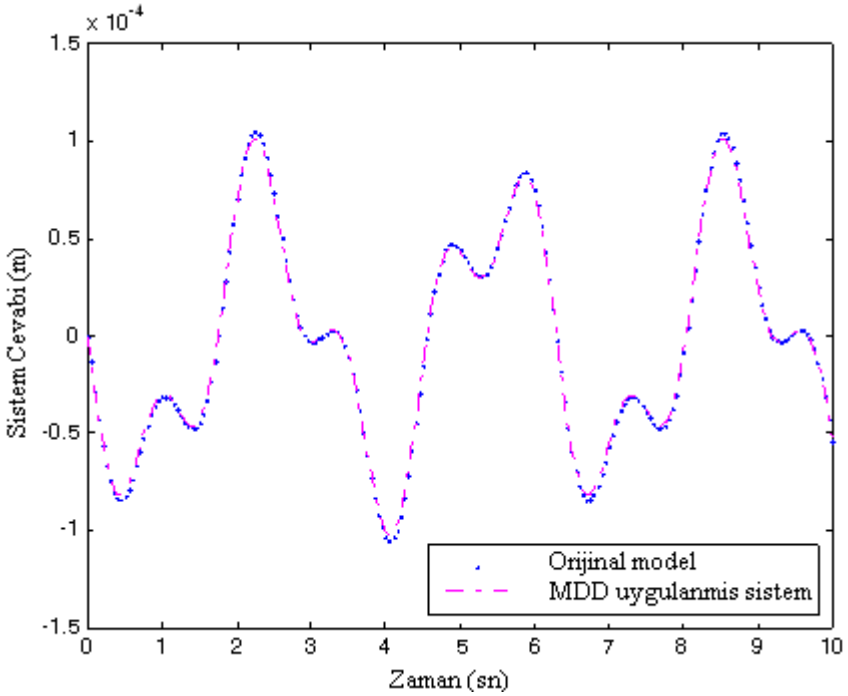


Şekil 5.108 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Şekil 5.109-5.110'da β=0.01 için Toplam enerjilerin denkliği yöntemi alınan sırasıyla impuls ve sinüs cevapları verilmektedir.

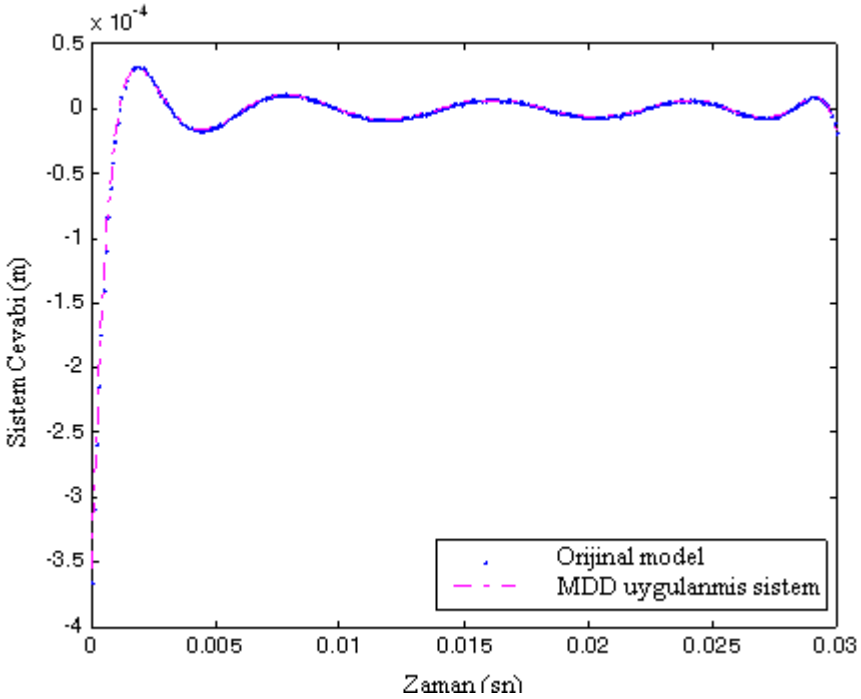


Şekil 5.109 : β=0.01 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.

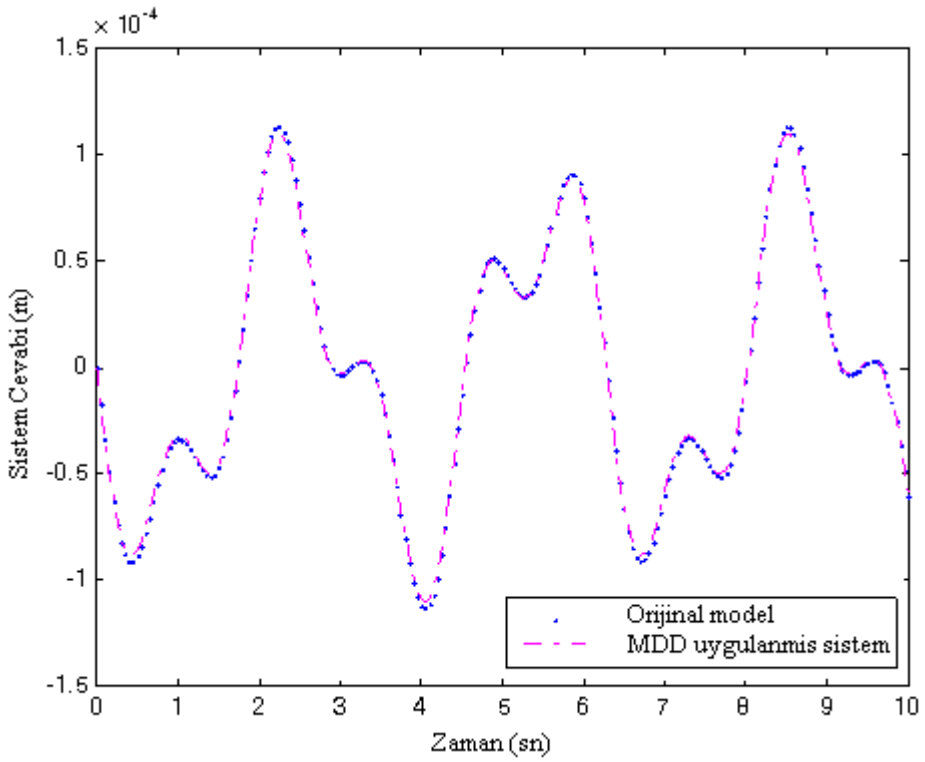


Şekil 5.110 : β=0.01 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Şekil 5.111-5.112'de β=0.00008 için Toplam enerjilerin denkliği yöntemi alınan sırasıyla impuls ve sinüs cevapları verilmektedir.



Şekil 5.111 : β=0.00008 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için impuls cevapları.



Şekil 5.112 : β=0.00008 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modeli ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistem için sinüs cevapları.

Uygulanan sinüs kuvvet giriş fonksiyonu f=100*sin(2*tzaman)+50*sin(5*tzaman) Şekil 5.30'da verilmektedir. Burada girilen 2 ve 5 açısal frekans değerleri, seçilen kiriş sistemi malzemelerinin Çizelge 5.1'de verilen özellikleri dikkate alınarak ve Çizelge 5.6'da verilen sistem doğal frekanslardan düşük olacak şekilde seçilmiştir.

Grafiklerde verilen durumlar için hesaplama zamanları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi ve Newmark yöntemi kullanımında sönümlü ve sönümsüz sistemler için Çizelge 5.7'de verilmiştir.

Yapılan bu uygulamada eleman sayısının aynı tutularak yapılan analizlerde sönüm değerinin –özellikle Toplam enerjilerin denkliği yöntemi'nde- hesaplama zamanı üzerinde önemli bir etkisinin olmadığı sonucuna varılmıştır.

Düşük model derecelerinde yöntemler arasında ciddi bir hesaplama süresi farkına rastlanmamıştır. Buna karşılık, yüksek model derecelerinde, çalışmada geliştirilen Toplam enerjilerin denkliği yöntemi'nin üstünlüğü açık bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Çizelge 5.7 : Düzlemsel plak sistemi analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları.

Eleman sayısı	Orijinal model derecesi ve MDD sonrası Model derecesi	Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı	Toplam enerjilerin denkliği ile MDD işlemci zamanı [saniye]	İleri farklar ile MDD işlemci zamanı [saniye]	Newmark ile MDD işlemci zamanı [saniye]	MDDsiz işlemci zamanı [saniye]
24	**90'dan 66'ya**	**0**	0.043	0.057	0.047	0.156
		0.001	0.043	0.062	0.046	0.168
		0.01	0.043	0.058	0.047	0.158
		0.1	0.043	0.062	0.045	0.161
60	**210'dan 120'ye**	**0**	0.134	0.178	0.146	0.748
		0.001	0.134	0.193	0.143	0.761
		0.01	0.134	0.181	0.147	0.759
		0.1	0.134	0.193	0.141	0.765
96	**324'den 174'e**	**0**	0.567	0.752	0.62	2.124
		0.001	0.562	0.81	0.601	2.096
		0.01	0.571	0.77	0.624	2.112
		0.1	0.566	0.816	0.592	2.105

Aynı zamanda Toplam enerjilerin denkliği yönteminin kullanıldığı indirgenmiş sistemlerin impuls ve sinüs girişlere verdiği sistem cevaplarının orijinal model cevapları ile hemen hemen aynı olduğu görülmüştür. Sistem cevaplarının değerlendirilmesinde genel olarak tüm MDD yöntemlerinin yakın sonuçlar verdiği, sönüm artıkça orijinal model ile MDD uygulanmış sistemlerin cevaplarının uyum düzeyinin arttığı görülmüştür. Düşük sönüm değerlerinde indirgenmiş sistem cevabı ile orijinal model cevabı arasında kazanç farklarının oluştuğu görülmüştür.

5.5.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması

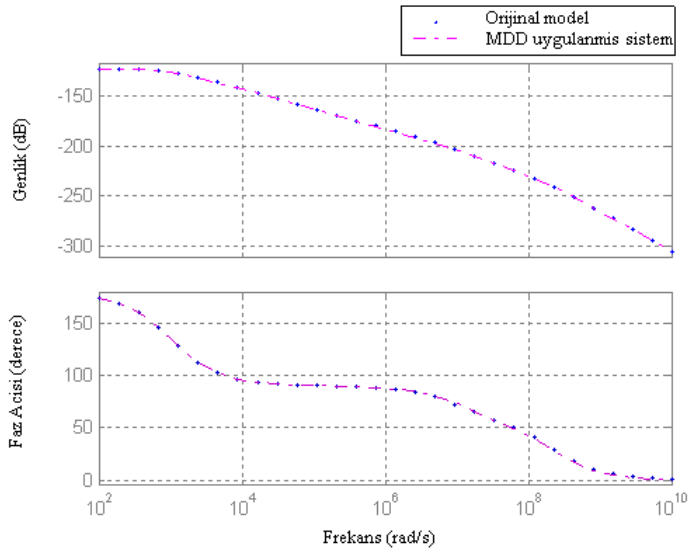
MDD uygulanmış sistemin serbestlik derecesi azaldığından genel olarak indirgenmiş bu sistemlerde enerji seviyesi de korunamıyor. Bu nedenle, aktif serbestlik derecelerinin zaman cevapları ve frekans cevaplarını veren Bode diyagramları esas alınarak karşılaştırma yapılmasının daha uygun olduğunu görülmüştür.

5.5.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi

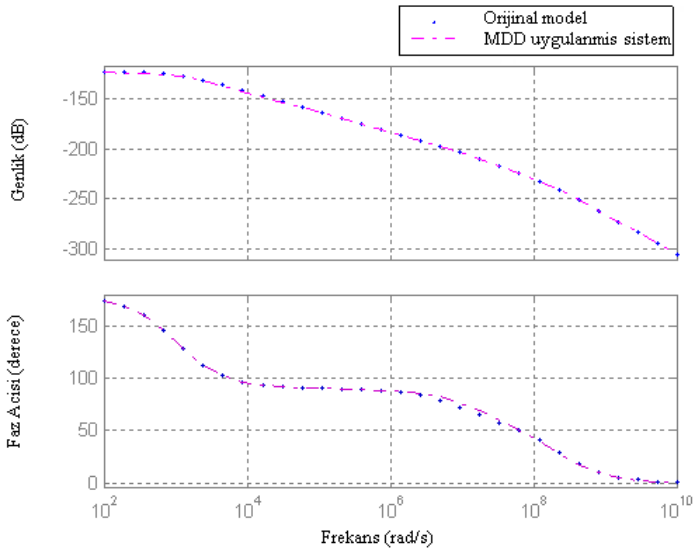
Yapısal sistemlerin frekans cevapları sistem ile ilgili önemli bilgiler vermektedir. Frekans cevabının Genlik-Frekans ve Faz açısı-Frekans olarak incelendiği Bode

diyagramlarından sistemin düşük ve yüksek frekanslardaki davranışları birlikte görülebilmektedir. Orijinal model ve MDD uygulanarak indirgenmiş sistemlerin zamana bağlı cevaplarının uyum içinde olduğu ve uygulanan "Toplam enerjilerin denkliği" yaklaşımının verdiği sonuçların doğruluğu bu kısımda incelenmektedir.

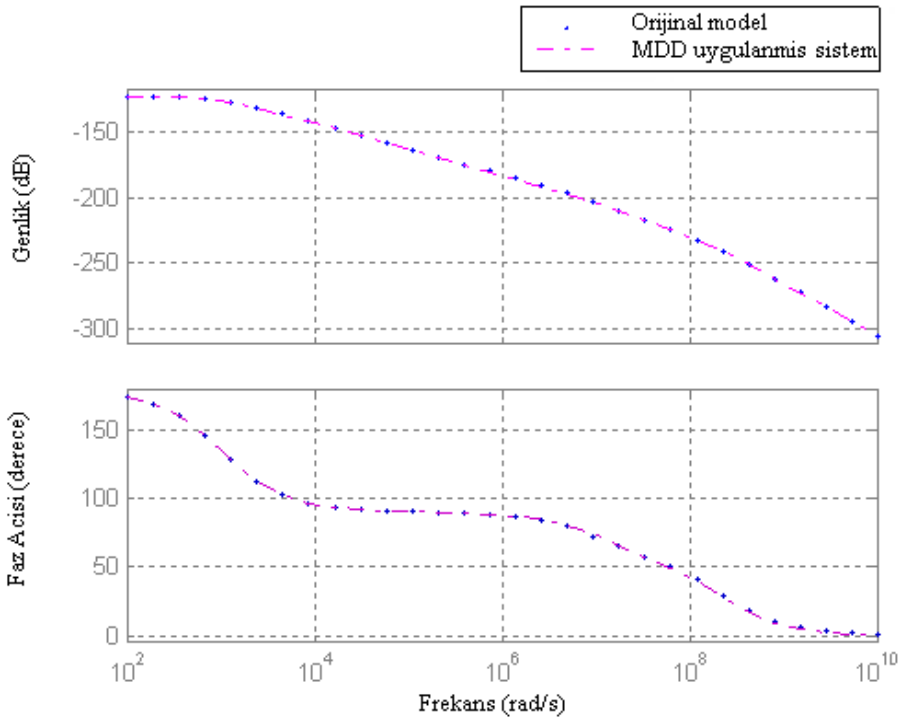
Aşağıda bu çalışmada incelenen yöntemleri ile model derecesi düşürme uygulanmış sistemlerin davranışları ve orijinal modelin davranışı Bode diyagramları ile gösterilmiştir. Düzlemsel plak orijinal modelinin β=0.001 için sistem frekans cevapları, her üç MDD yöntemi için Şekil 5.113-5.115'de verilmiştir.



Şekil 5.113 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

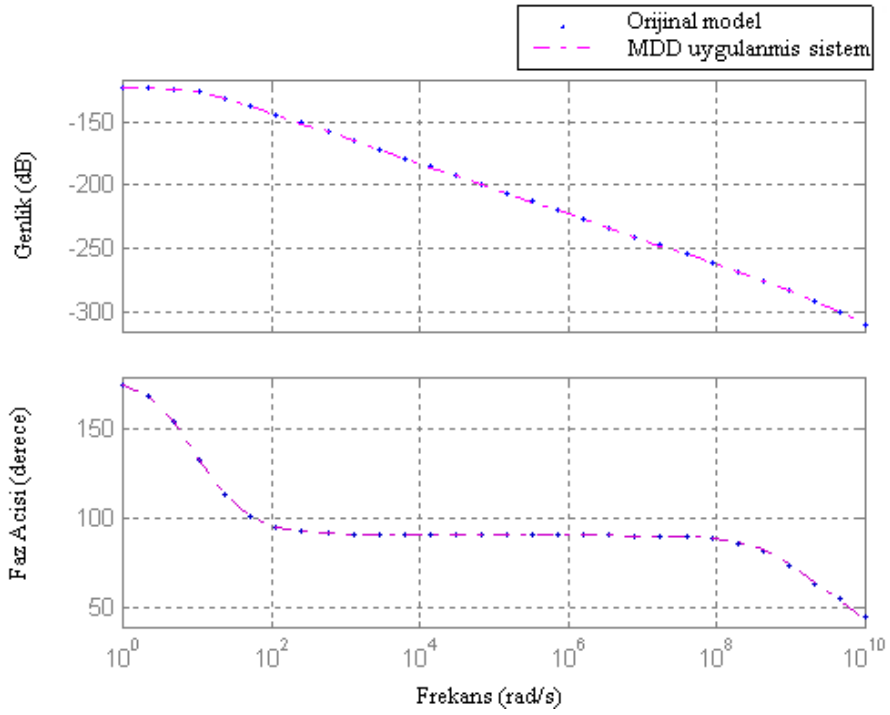


Şekil 5.114 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

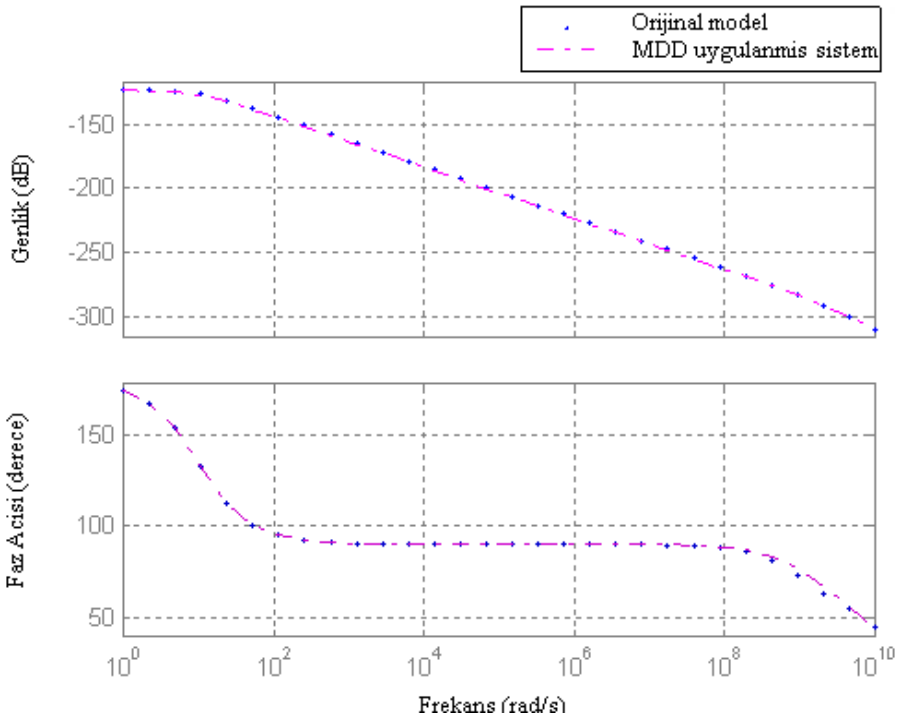


Şekil 5.115 : β=0.001 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

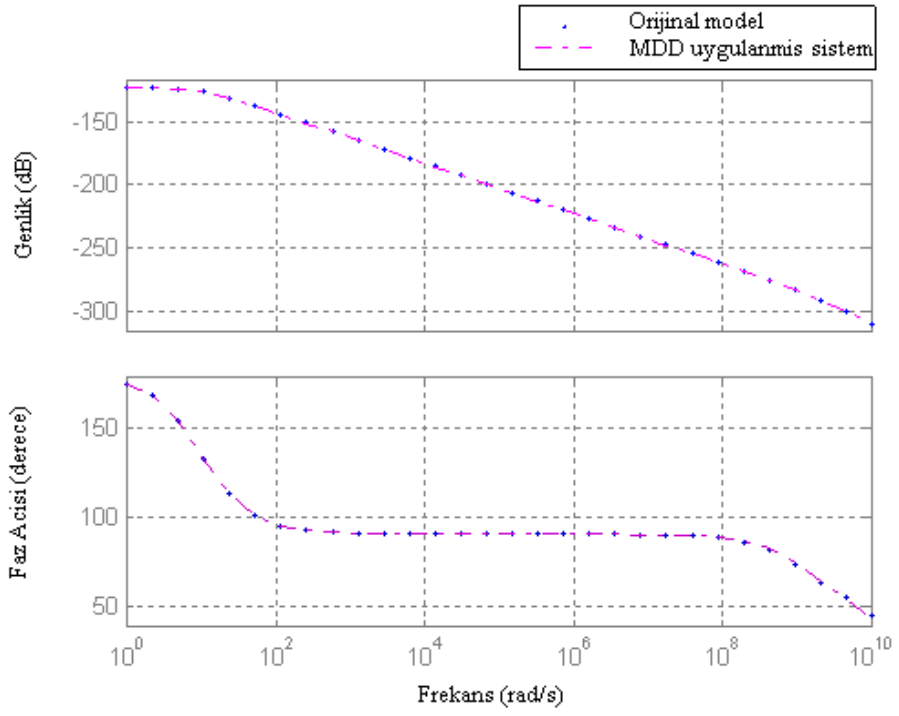
Benzer şekilde β=0.1 için sistem frekans cevapları da Şekil 5.116-5.118'de yer almaktadır.



Şekil 5.116 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

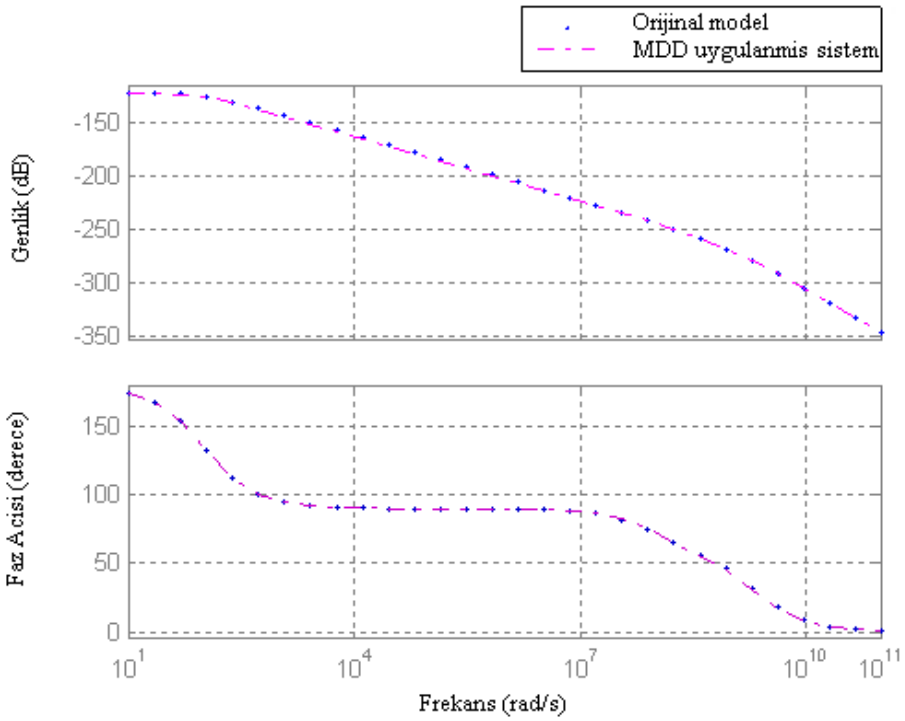


Şekil 5.117 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve İleri farklar yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.



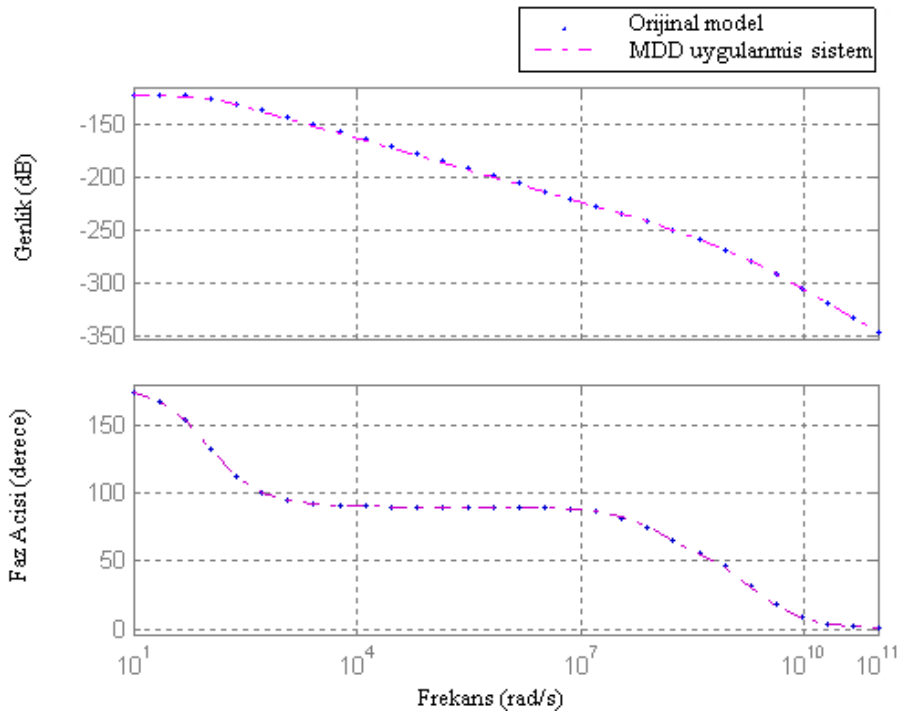
Şekil 5.118 : β=0.1 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Newmark yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

Düzlemsel plak orijinal modelinin β=0.01 için sistem frekans cevapları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi için Şekil 5.119'da verilmiştir.



Şekil 5.119 : β=0.01 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

Düzlemsel plak orijinal modelinin β=0.00008 için sistem frekans cevapları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi için Şekil 5.120'de verilmiştir.



Şekil 5.120 : β=0.00008 için 24 elemanlı düzlemsel plak orijinal modelinin ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi ile model derecesi 90'dan 66'ya indirgenmiş sistemin Bode Diyagramları.

Burada model derecesi düşürme sonrasında elde edilen sönümlü sistemlerin hem düşük, hem de yüksek frekanslarda orijinal model ile aynı frekans cevabını verdiği görülmektedir. Bu durumda sistemin model derecesi düşürme sonrasında sistem karakterinin frekans uzayında değişmediği sonucuna varılmaktadır. Grafiklerde yerel küçük uyumsuzluklar gözlense de benzer karakterde frekans cevapları alındığı kabul edilebilir. Bu da orijinal model ve indirgenmiş sistemin aynı davranışları gösteren sistemler olduklarını göstermektedir.

5.6 MDD Uygulamalarının Değerlendirilmesi

Çalışmanın bu bölümünde önceki kısımlarda gerçekleştirilen MDD uygulamalarının sonuçları yorumlanacaktır.

Genel olarak indirgenme yapılacak sistemde tutulacak aktif serbestlik derecelerinin kuvvet uygulama noktasının yakınında seçilmesi ile alınan sistem cevaplarının orijinal model cevaplarına yakınlığının arttığı gözlemlenmiştir.

MDD uygulanmış sistem örneklerinde zaman adımı değişiminden en çok etkilenen MDD yönteminin IRI olduğu ve zaman adımı azaldıkça IRI uygulanmış sistemlerin zaman cevaplarının, orijinal model zaman cevabının daha fazla saptığı görülmüştür. Ayrıca, bu durumda orijinal model ve MDD uygulanmış sistemin enerji seviyeleri farkları artmış olduğu ve Bode diyagramlarındaki uyumun özellikle yüksek frekanslarda bozulduğu görülmüştür.

Çubuk sistem uygulamalarında hem zaman hem de frekans cevapları ile enerji seviyesi karşılaştırmalarında mükemmel sonuçlar alınmıştır. Aynı zamanda çubuk sistemin MDD derecesi, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi kullanılarak şimdiye kadar literatürde karşılaşılan seviyelerin altına indirilmiştir.

MDD ile elde edilen sistemlerin özdeğerleri ve özvektörlerinin orijinal model ile aynı olmadığı durumlarda bile aynı sistem cevapları elde edilebilmektedir. Bu nedenle, yeterli mertebede bir sistem cevap doğruluğu alınabilmesi için farklı denemelerin yapılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Çalışmada çok sayıda deneme yapılmış ve orijinal modelim özdeğerleri ile uyumlu özdeğer sonuçları veren indirgenmiş sistemlerin cevaplarında da orijinal model ile uyum olduğu görülmüştür. Buna göre, sistem indirgemesi yapılmasından hemen sonra uygulanacak özdeğer karşılaştırmasının indirgenmiş sistem cevapları hakkında önemli fikir vereceği tespit

edilmiştir. Böylece uygun olmayan indirgenmiş sistemlerin analizleri için harcanacak zamandan tasarruf sağlanmış olacaktır. Ancak, bu yapılırken indirgenmiş sistem SD seçimleri, model derecesinin daha fazla düşürülmesine imkan sağlaması şartı ile deneme-yanılma yaklaşımı ile herhangi bir genel kriter kullanılmadan gerçekleştirilebileceği sonucuna varılmıştır.

Kiriş elemanda her bir düğüm noktasındaki ilk serbestlik derecelerinin yok edilmesi sonrasında elde edilen indirgenmiş sistemlerin cevabının orijinal model cevabı ile aynı olduğu görülmüştür. Bu durumun temel nedeni olarak, kiriş örnek uygulamasında kuvvetin ikinci serbestlik derecesi olan düşey yönde olmasının etkili olduğu tespit edilmiştir.

Kiriş uygulamasında ankastre bağlı uca yakın yerlerdeki ikinci serbestlik derecelerinin MDD uygulanmış sisteme dahil edilmediği durumlarda da yeterli yaklaşıklıklarda sistem cevapları alınmıştır. Bu durum çok sayıda eleman içeren sistemlerde ilave bir indirgenme imkanı ortaya çıkarmaktadır. Bu durumun kiriş sistemin serbest ucuna uygulanan kuvvetin yarattığı eğim etkisinin nispeten az olmasından kaynaklandığı sonucuna varılmıştır. Aynı şekilde her bir düğüm noktasının üçüncü serbestlik dereceleri incelendiğinde bu eğim etkisinin ankastre bağlı kirişin serbest ucundan uzaklaştıkça bu serbestlik derecelerinde de indirgenme uygulama imkanının arttığı tespit edilmiştir. Hatta belirtilen bölgelerde üçüncü serbestlik derecelerinin ikincilerden daha az sapma ile ihmal edileceği görülmüştür.

Analizi yapılan sistemde kullanılan eleman tipinin içerdiği serbestlik derecesi miktarı azaldıkça beklenen doğruluk mertebesi bozulmadan MDD uygulanırken ihmal edilebilecek serbestlik derecelerinin sayısı artmakta ve dolayısıyla indirgenmiş sistem mertebesi de azalmaktadır. Bu durum her bir düğüm noktasında 2 serbestlik derecesi içeren çubuk elemanda elde edilen 1000'den 20'ye düşürme imkanı varken her bir düğüm noktasında 3 serbestlik derecesi içeren kiriş eleman için bu imkan 300'den 148'e düşürme ile sınırlı kalmaktadır. Dolayısıyla eleman başına içerdiği serbestlik derecesinin az olan yani karmaşık olmayan sistemlerin indirgenmesi, eleman başına çok sayıda serbestlik derecesine sahip sistemlerden daha kolay olmaktadır. Bunun sonucu olarak indirgenebilecek model derecesini belirleyen temel etkenlerden birisi olarak sistem eleman tipinin sayılması gerekmektedir.

Plak uygulamasında hem zaman hem de frekans cevapları ile enerji seviyesi karşılaştırmalarında çok iyi sonuçlar alınmıştır.

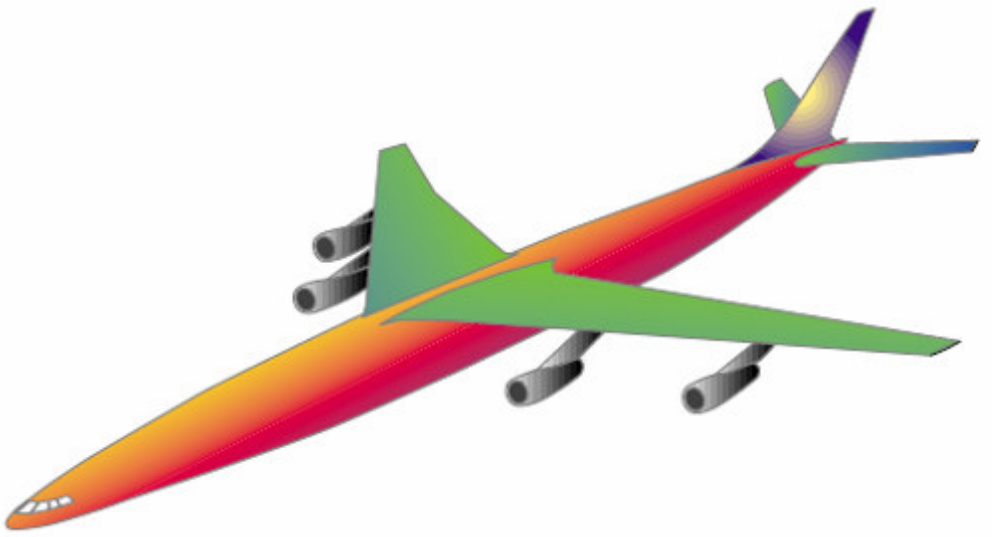
Uygulamalarda incelenen yapıların sönümlü ve sönümsüz davranışlarının seçilen eleman sayısından etkilenmediği sonucuna varılmaktadır. Ayrıca diğer MDD yöntemlerinde artan eleman sayısına bağlı olarak hızla artan gerekli hesaplama zamanına, çalışmada geliştirilen Toplam enerjilerin denkliği yönteminde daha az ihtiyaç duyulmaktadır.

Bode diyagramları tüm örnek MDD uygulamaları için başarılı sonuçlar vermiştir. Çubuk sistem örneği sonrasındaki uygulamalarda Bode diyagramları indirgenmiş sistemlerin davranışlarının orijinal model davranışları ile karşılaştırılması amacıyla temel ölçüt olarak alınmıştır. Tüm örnek MDD uygulamaları için sistem cevaplarında uyumlu sonuçlar alındığında Bode diyagramlarında da uyumlu sonuçlar alınmıştır. Bu sonuç, çalışmada geliştirilen Toplam enerjilerin denkliği MDD yönteminin ne kadar doğru çalıştığının temel göstergesi durumundadır.

6. AYB (SUBSTRUCTURING) SÜPER ELEMAN YAKLAŞIMI VE UYGULAMALARI

Karmaşık statik ve dinamik analizlerde genel olarak en çok sıkıntı duyulan konular olan gerçekleştirilecek analizdeki yapının karmaşıklığı ve büyüklüğü ile analizi etkileyecek detayların fazla oluşu, büyük boyuttaki kütle, katılık ve (varsa) sönüm matrisleri ile hesaplama yapılmasını zorunlu kılmaktadır. Hesaplama zamanının ve hesaplama kapasitesi ihtiyacının kaçınılmaz olarak arttığı bu tip analizlerde hesaplama zamanın azaltılması yanında yeterli mertebede doğrulukta sonuç alınabilmesi için özel ve etkili SEY yöntemleri uygulanması zorunluluğu ile karşılaşılmaktadır. Bu yapıların uygun özelliklerdeki alt parça (substructure)'larının bir araya getirilmesi ile gerçekleştirilen analizlerle sonuç alınması yaklaşımı olan AYB "Substructuring", analizcilerin en çok tercih ettiği hızlı bir yöntemdir.

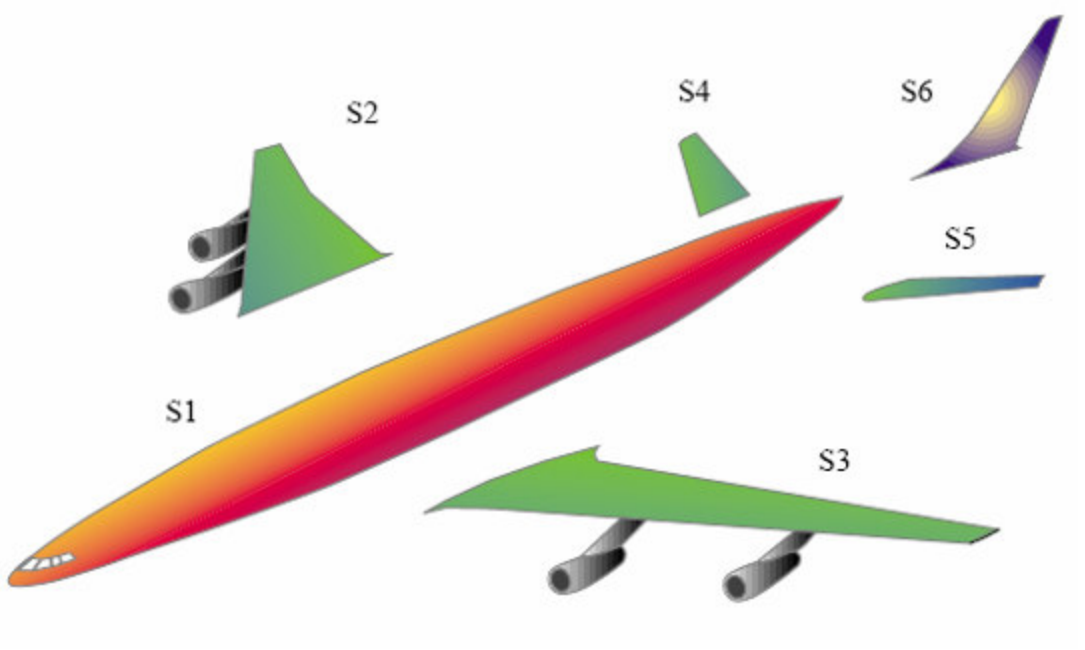
AYB yöntemleri, karmaşık bir sistem olan bir uçağın tümünü modellemeyi ve analizini gerçekleştirmeyi hedefleyen uçak mühendisleri tarafından ilk kez 1960'ların başında kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde yapısal dinamik problemlerinin analizinde AYB konusunda yeni yöntemler geliştirilmeye devam edilmektedir [37,38,83].



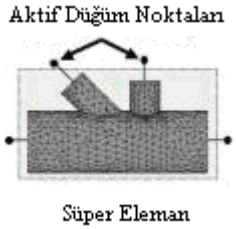
Şekil 6.1 : Bir uçağın modeli.

Modüler tasarım yaklaşımına uygun ürünlerin söz konusu olduğu gemi yapımı ve havacılık sanayilerinde (Şekil 6.1), tekrar eden yapılara sahip sistemlerin dinamik analizlerinde ve doğrusal olmayan problemlerin incelenmesinde AYB yöntemleri yoğun olarak kullanılmaktadır [37,38,83].

Analizlerde parçalara ayrılan yapının özel olarak seçilmiş alt parçalarını temsil eden eleman grubunun her birine "süper eleman" adı verilmekte olup, bunlar analizde kullanılacak aktif düğüm noktalarından birleştirilerek oluşturulurlar (Şekil 6.2, 6.3).



Şekil 6.2 : Uçak modelinin ilk seviye alt yapıları.

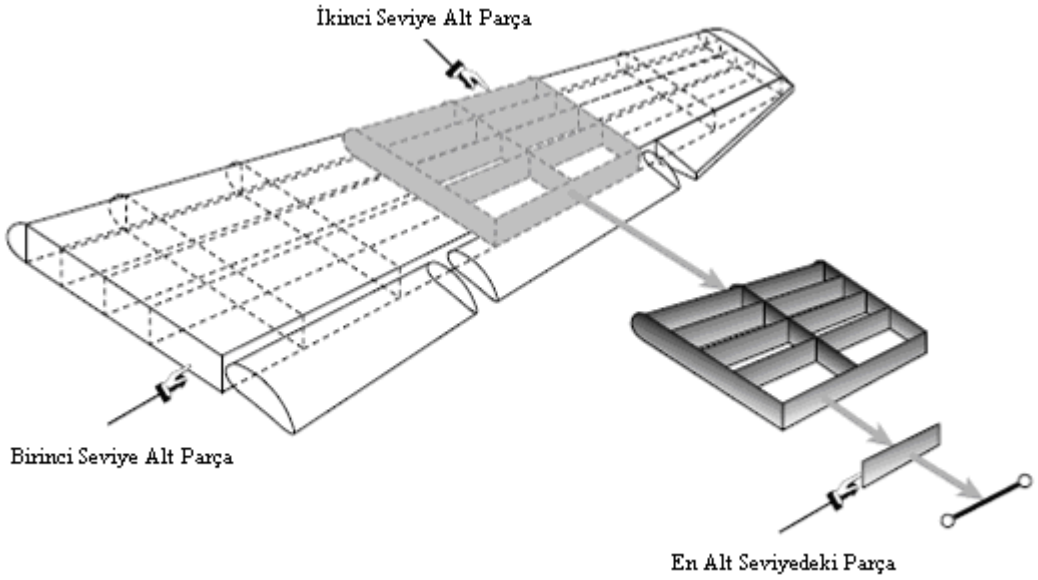


Şekil 6.3 : Boru elemanlardan oluşturulan bir süper elemanda yer almaya devam eden düğüm noktaları.

Analizlerde her bir süper elemanın özellikleri, ayrı ayrı yapılan analizler ile bağımsız olarak hesaplanır ve birleştirilmiş analizlerde SEY modelinin durumuna bağlı olarak ya birbirlerine ya da diğer elemanlara bağlanarak ilgili analizin içine taşınmış olurlar [37,38,85].

Süper eleman oluşturulması, literatürdeki adıyla alt parça oluşturulması, bir özel elemanın içine belli bir grup sonlu elemanın yoğunlaştırılması yaklaşımına dayanmaktadır. Süper eleman olarak adlandırılan bu özel eleman oluşturulduktan sonra takip eden analizlerde kullanılabilmektedir. Bu yolla karmaşık yapıların gerek görülen kısımlarının veya tamamının süper elemanlara dönüştürülmesi sağlanabileceği gibi çoğu kez bölünen karmaşık yapıdan daha büyük yapıların analizlerin modellerinde de bu süper elemanların kullanılması mümkün olmaktadır [37].

Alt parça oluşturulmasında hiyerarşik olarak seviyelendirme yapılarak analizin öngördüğü detaylandırma yapı üzerinde uygulanabilmektedir. Şekil 6.1'de verilmekte olan uçağın Şekil 6.2'deki ilk seviye alt parçalarından S2 ve S3 olarak belirtilen kanat kısımlarının içerdiği diğer alt parça seviyeleri Şekil 6.4'de verilmektedir. Alt parça seviyelendirmede yapının modüler olma özelliği, tekrarlı geometri içermesi ve analiz sonucundan beklenen detayların çokluğu büyük önem taşımaktadır [38].



Şekil 6.4 : İlk seviye uçak kanat alt parçasının diğer alt seviyeleri.

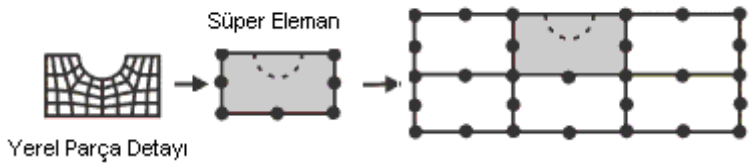
AYB yöntemi ile analiz seçeneği çoğu ticari SEY paketinde yer almaktadır. Önceki bölümlerde bahsedilen model derecesi düşürme yöntemleri kuvvet uygulama noktasını aktif serbestlik derecelerinin içinde seçilmiş olmayı gerektirmektedir. Kuvvetin aktif serbestlik derecesine uygulanmadığı durumlarda AYB kullanılması zorunludur. Sistemin hayali iç kuvvetlerle birbirine bağlı alt parçalara bölerek

oluşturulan süper elemanların kullanılması ile yapı üzerindeki herhangi bir nokta kuvvet uygulaması için seçilebilmektedir. Bu nedenle model derecesi düşürme yanında dinamik analizlerde bu tip avantajları olan AYB'nin kullanımına da bu çalışmada yer verilmiştir.

6.1 AYB'in Faydaları

Süper elemanların oluşturulmasından sonra, karmaşık yapıların analizlerinde yüksek verimlilik sağlanmaktadırlar. Hatta bir kaç dış temas düğüm noktası olan süper elemanların neredeyse tek boyutlu eleman verimliliğinde olabileceği görünmekte olup, SEY analizcilerinin süper eleman kullanmalarındaki en önemli sebepler aşağıdaki gibi ele alınabilinir.

- Tekrarlanan yapı parçalarının modellenmesi: Uçak gövdeleri gibi yapılar, belli tipteki bağlantıların tekrarlı olarak kullanıldığı karmaşık yapılardır. Bu nedenle karmaşıklığı yüksek olsa da bu tip yapılar süper eleman kullanımı için oldukça uygundurlar. Her bir bağlantı tipinin oluşturulacak süper elemanlar ile temsil edilmesinden sonra analizi yapılması düşünülen tüm yapının oluşturulmasını sağlayacak şekilde gerekli sayıda süper eleman değişik konumlarda modele dahil edilir (Şekil 6.5). Her bir süper elemanın sadece ilk kullanılan kopyasının katılık matrisi için analiz yapılmasının yeterli olması ve takip eden kullanımlarında bu analizde oluşturulan özellikler dosyasından yararlanılmakta olması, analiz süresinin azalmasında etkili olmaktadır. Analizi yapılacak karmaşık yapının geometrisinde karşılaşılacak değişiklik ihtiyaçlarında, süper elemanın SEY modeli üzerinde değişikliğinin üzerine uygulanması ve ardından süper elemanın yeni hali ile ele alınmasının düşünüldüğü analizlerin kısa sürede yeniden çalıştırılması yeterli olmaktadır.



Şekil 6.5 : Çentikli plak üzerinde alt parça oluşturma uygulaması.

- Kısa zamanda ve düşük maliyet ile yeni bir yapısal parçanın özelliğinin analize dahil edilmesi: Analizi yapılacak yapı ile ilişkide olup daha önce

analizi yapılan parçaların etkilerinin analize dahil edilmesi düşünüldüğünde, uygulanılacak süper eleman yöntemi ve sonrasında bunun analize çağrılması yeterli ve düşük maliyetli bir yaklaşım sunmaktadır. Dişli çarkların davranışlarının süper elemanlar olarak bir 3 boyutlu şaft analizinde dikkate alınması örneğinde olduğu gibi süper eleman kullanımı ile analiz sonuçlarında tatmin edicilik arttırılmaktadır. Böylece istenilen tüm girdilere uyumlu olarak yapılmış analizde hesaplama zamanı aşırı olmadan sonuç alınmış olmaktadır.

- Seçilen sonlu eleman modelinin hareket ettirilmesinin mümkün olması: Süper eleman oluşturulan sonlu eleman modelinin analizde her eklenişinde süper eleman ile de temsil edilebilmektedir. Süper elemanın analiz içinde 3 dönme ve 3 öteleme hareketini ağırlık merkezinde yapmakta olduğu kabul edilir.
- Sınırlı hesaplama kaynakları ile çok geniş kapsamlı problemlerin çözümüne imkan sağlaması: Her bir süper elemanın katılık özelliklerinin kullanımları öncesinde hazır olması nedeniyle, takip eden büyük analizlerde yeniden oluşturulmalarına gerek yoktur. Bu nedenle bir analiz içinde süper elemanın kullanımı, çok az bir ilave bilgisayar kapasitesi ile mümkün olabilmektedir. Uçak gibi karmaşık bir yapının süper elemanların bir araya toplanması ile modellendiği durumda tüm yapının birlikte modellendiği duruma kıyasla çok daha sınırlı özellikleri olan bir bilgisayar yeterli olmaktadır. Mevcut bilgisayar kapasitesine uygun çok sayıda küçük süper elemanın oluşturulmasının ardından yapılacak birleştirilmiş analiz ile sonuç alınması mümkün olmaktadır
- Süper elemanlara ön yükleme uygulanabilmesi: Süper eleman uygulanan yüklemenin belli bölgelerde doğurduğu gerilme özellikleri dikkate alınarak ön yükleme belirlenir. Yükleme süper elemanın katılık matrisi oluşturulurken dikkate alınır ve ön yükleme yapıldığı durumda süper eleman yükleme vektörünü tanımlayacak şekilde ilave bir matris daha kullanılır. Süper elemanın bu özelliği parçanın - örneğin bir dövme parçanın ya da şekil verilmiş bir sacın- analizi yapıldığı durumdan önceki imalat ve kullanım safhalarından kaynaklanan durumlarını analize yansıtmak bakımından oldukça yararlıdır.

- Doğrusal olmayan analizlerde çözüm zamanını kısaltması: Sonlu elemanlar modelinin doğrusal kısmının her bir durum için tekrar tekrar hesaplanmasını önlemek amacıyla süper eleman kullanımı da oldukça yaygındır.

6.2 Süper Eleman Kullanımındaki Sınırlamalar

Genelde her yöntemde olduğu gibi süper elemanlar ile ilgili olarak bazı sınırlamalar bulunmaktadır.

- Süper elemanın verimliliği seçilen aktif düğüm noktalarının sayısına doğrudan bağlıdır. Süper eleman oluşturulurken seçilen aktif düğüm noktalarının sayısı arttırıldıkça süper elemanın verimi azalmaktadır. Bunun nedeni dış temas serbestlik derecelerinin yeterince elenmemesinden dolayı süper elemanın katılık matrisinin yeterince küçük olamamasıdır. Bu yüzden orijinal yapının tüm özelliklerini taşıyacak şekilde tanımlanmış süper eleman kullanımları çok sayıda dış serbestlik derecesi içerdiği için yeterli verimliliğe ulaşamamaktadır.
- Süper eleman ile çalışılması durumunda gerilme durumu görülememektedir. Ticari SEY paketleri temelde süper elemanın sadece katılık matrisini kullanması nedeniyle gerilme dağılımı hiç bir süper eleman için dikkate alınmamaktadır. Bazı ticari SEY kodlarında gerilme görüntülenmesi seçenek olarak sunulmakta olmasına rağmen, bu durumlarda süper eleman oluşturmanın tüm faydasının yok edildiği bilinmelidir.
- Katılık matrisinin önceden tanımlanmış olması. Süper elemanın katılık matrisi tanımlanırken bir kere oluşturulmakta olup, kullanıldığı analiz içinde katılık matrisinin yeniden oluşturulması mümkün değildir. Bu yüzden doğrusal olmayan yapısal etkilerin bulunduğu bölgelerde (doğrusal olmayan malzemeler, sınır şartları veya yüklemeler gibi) süper eleman kullanılamamaktadır. Aynı sebeple süper elemanların elastik yapılar ile temas (contact) halinde kullanımı da yeterli verimlilikte olamamaktadır.

Özetle AYB, geniş kapsamlı doğrusal sonlu eleman sistemlerinin statik veya dinamik analizlerinde bilinmeyenlerin sayısını eleman yoğunlaştırarak azaltan alt parça oluşturma yöntemi analizin verimli bir şekilde yapılmasına imkan sağlar.

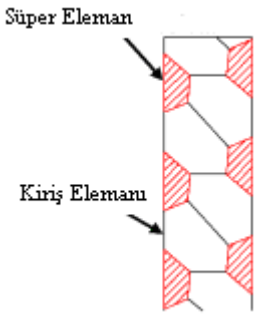
Süper elemanların katılık matrisi bir analizde kullanılmadan önce oluşturulduğu için çok büyük kapsamı olan analizlerde kullanımları doğal bir seçenek olarak karşımıza çıkmaktadır.

Dinamik analizlerde süper elemanlara ön yükleme uygulanması, statik analizlerde olduğu gibi çok fazla uygulanamamaktadır.

Dinamik süper elemanların oluşturulmasında dinamik modların yeterince temsil edilmelerini sağlamak amacıyla ilave aktif serbestlik derecelerinin kullanılması nedeniyle yapılan ve devam etmekte olan çok sayıda araştırmaya rağmen dinamik analizler için alt parça oluşturma hala geliştirilmesi gereken bir konu olarak varlığını sürdürmektedir.

6.3 Alt Parça Oluşturma ve Kullanımı

Ayrılmış parça üzerinde, "alt parça oluşturma" analizi yapılması sonuçlandığında süper elemanın kullanıma hazır hale geldiği söylenilebilir. Aslında yapılan bu analizin temel amacı süper eleman oluşturulmasını sağlamak olduğu için sonrasında sonuçlarının incelenmesi beklenilmemektedir.



Şekil 6.6 : Süper elemanın bir kiriş elemanı ile bir arada kullanılması.

Süper eleman oluşturmak için takip edilecek yol, genel olarak doğrusal statik analize benzemekte olup geometri oluşturulması, malzeme özelliklerinin dikkate alınarak elemanların oluşturulması gibi temel adımlar geçildikten sonra kullanılacak çözüm yöntemi olarak AYB seçilmelidir.

Süper eleman oluşturulacak yapının üzerinde öncelikle diğer elemanlar ile temasta olacak dış düğüm noktaları ve dolayısıyla ilişkili süper eleman oluşturulması sonrasında varlığını sürdürecek serbestlikler belirlenmelidir (Şekil 6.6). Süper eleman oluşturulması sonrasında elemanın içinde kalacak düğüm noktaları, genel

olarak yoğunlaştırılan serbestlikler olarak anılmaktadır. Oluşturulma fazı sonrasında süper eleman kullanımlarında dış temas düğüm noktaları, analiz modelinde diğer elemanların bağlanmasında kullanılmaktadır.

Ticari SEY paketlerinde, süper eleman oluşturulması sonrasında alt parçanın katılık matrisi ve dış temas düğüm noktalarına ait sonuç bilgileri bir dosya içerisinde saklanır.

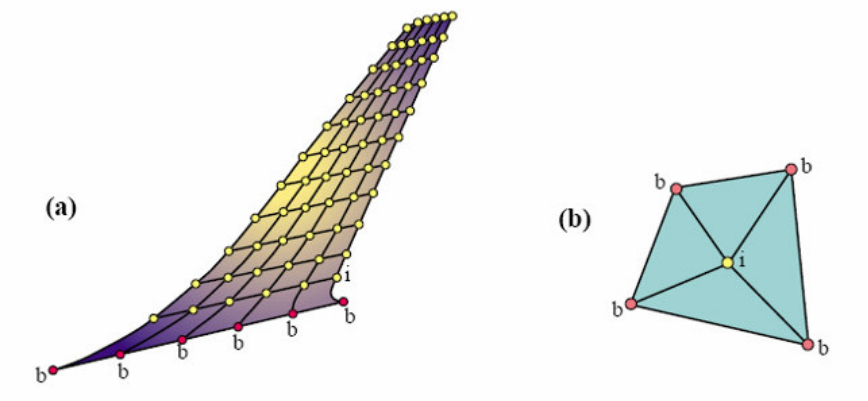
Süper eleman bir analizde kullanıldığında, sadece ayrı bir eleman tipi olarak uygulanır ve diğer elemanlara önceden belirlenen dış temas düğüm noktalarından bağlanacağı kabul edilir. Böylece süper eleman oluşturulurken tanımlanan özellikleri ile takip eden analize dahil edilmiş olur. Süper eleman yerleştirildiği analiz içinde çoğaltılarak, döndürülerek, ötelenerek veya simetriği oluşturularak çok sayıda olmak üzere analizin gerektirdiği şekilde kullanılabilmektedir.

Süper eleman içeren bir analiz yapılırken, daha önce oluşturulan özellikler arasından analizin gerek duyduğu özellikleri SEY kodu tarafından dosyadan alınır. Bu kullanım özelliği ile süper elemanın eleman kütüphanesinde yer alan diğer elemanlardan bir farkı olmadığı söylenebilir.

6.4 AYB'de Statik Yoğunlaştırma

Bir önceki bölümde de belirtildiği gibi bir süper eleman, dış temas ve yoğunlaştırılmış olmak üzere iki tip düğüm noktasından oluşmaktadır. Dış temasta olan düğüm noktaları, süper elemanın diğer elemanlar ile teması için kullanılan ve aktif düğüm noktaları olarak analizde dikkate alınan serbestlik derecelerinden oluşmaktadır (Şekil 6.7a). Yoğunlaştırılmış düğüm noktaları ise süper eleman iç kısmında yer alan düğüm noktalarıdır (Şekil 6.7b).

İç kısımda yer alan yoğunlaştırılmış düğüm noktaları ile ilişkili olan tüm serbestlik derecelerinden arındırılmış bir analiz modeli elde etmek için yapılanlara yoğunlaştırma denilmektedir. Yoğunlaştırma, kısım 6.6'da verilmekte olan "explicit" açık matris işlemleri ile tarif edilebildiği gibi karmaşık olmayan yapılar için Gauss eliminasyon yöntemi de uygulanabilmektedir.



Şekil 6.7 : a) Uçak kuyruk dikmesi alt parçasının dış temas ve yoğunlaştırılmış düğüm noktaları, b) Bir süper elemanın dış temeas ve iç düğüm noktaları.

6.5 Dinamik Analizlerde Süper Eleman

Dinamik analizlerde kullanılmakta olan süper elemanların oluşturulmasının statik analizlerdekilerden temel farklılığı atalet etkisinin dikkate alınmasıdır. Bu nedenle oluşturulması safhasında farklı yaklaşımların dikkate alınması ve dinamik etkilerin dahil edilmesi gerekmektedir. Atalet etkilerinin şekil değiştirmiş yapıda farklılık göstermesinden dolayı, dinamik analizlerde uygulanmakta olan tüm yoğunlaştırma yöntemleri yaklaşık sonuç vermekle sınırlı kalmaktadır.

Dinamik analizlerde kullanılmakta olan süper elemanların yapının dinamik modlarını yeterince temsil edebilmesi için ilave aktif serbestlik derecelerinin dikkate alınması gerekmektedir. Ayrıca, hem katılık hem de kütle matrislerinin yoğunlaştırması için harcanacak zaman ve hesaplama kapasitesi süper eleman kullanımı tercihinde önemli problem oluşturmaktadır. Bu arada statik süper eleman tipinde söz edilen ön yükleme dinamik analizlerdeki kullanımlarda -ilave yükleme vektörünün depolanmasından kaynaklanacak hesap yükünden dolayı- seçenek olarak sunulmamaktadır.

Sadece seçilmiş aktif serbestlik derecelerinin düğüm noktalarını kullanarak sonlu elemanlar modelinin ikinci dereceden katılık ve kütle matrislerinin yeterli doğrulukta olan bir yol ile derecelerinin düşürülmesi, dinamik analizlerde süper eleman kullanmanın en zor yanıdır ve başarılması güç bir hedeftir. Dinamik analiz uygulamaları için süper eleman oluşturmanın iki temel yolu bulunmaktadır. Bunların ilki, orijinal süper eleman yöntemi ile birlikte uygulanan Guyan yoğunlaştırması yöntemini kullanması [2], diğeri ise çok iyi bilinen bir yöntem olan statik katılık

yoğunlaştırması yöntemi ile kullanılan parça modları sentezi (CMS) yönteminin (Bölüm 4.4.1'de verildiği şekilde) uygulanmasıdır.

Guyan MDD yöntemi, hala çok sıklıkla kullanılmakta olup, yaygın olarak normal modlar yöntemi olarak anılmaktadır. Temelde serbestlik derecelerinin önemli bir kısmının seçim dışında bırakılmasına dayanmakta olup, bunların kütle etkileri seçilmiş düğüm noktalarına yoğunlaştırılmış şekilde yansıtılmaktadır. Bu yöntemin en büyük dezavantajı, kabul edilebilir sonuçlar alınabilmesi için aktif serbestlik derecelerinin konumlarının kullanıcı tarafından seçilerek belirginleştirilmesi gerekliliğidir. Bu nedenle, yöntemden doğru sonuç alınabilmesi için aktif düğüm noktalarının seçimi de büyük önem taşımaktadır.

Parça modları yöntemi (CMS), genelleştirilmiş dinamik model derecesi düşürme yöntemi olarak bilinmekte olup, dinamik analizler için süper eleman oluşturmak için daha başarılı kabul edilen bir yaklaşım sunmaktadır. Her bir alt parçanın davranışı, sınırlandırılmış modlar (statik şekil değiştirme) ve alt parçaların normal titreşim modları (dinamik şekil değiştirme) olmak üzere iki çeşit parça modunun birleşimi ile tarif edilmektedir. Bu parça modları, serbest durumdaki alt parçanın sönümlenmemiş dinamik denklemi kullanılarak belirlenmektedir. Parça Modları yöntemi, kullanıcının yapının düşük frekanslardaki davranışına dayanan serbestlik derecelerini seçme zorunluluğunu içermemekte ve Guyan model derecesi düşürme yöntemine göre önemli bir avantaja sahiptir.

Parça modları yönteminde (CMS) temel yaklaşım, yapının ayrı olarak analiz edilmekte olan alt parçaların montajı olarak ele alınmasıdır. Her bir alt parçanın fiziksel serbestlik derecelerinin uzayı, seçilmiş az sayıdaki alt mod şekilleri ve orijinal sonlu eleman modelinden daha küçük boyuttaki indirgenmiş bir sistemden oluşmakta olan bir mod alt uzayına dönüştürülür. Kesişim bölgelerindeki sınır şartları tiplerine bağlı olarak kullanılmakta olan üç tip parça mod yöntemi, sabitlenmiş kesişim bölgesi yöntemi, serbest kesişim bölgesi yöntemi ve karma yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır.

6.6 Statik "Explicit" Açık Matris İşlemleri ile Yoğunlaştırma

Yoğunlaştırma uygulanacak süper elemanın birleştirilmiş katılık matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ao} \\ \boldsymbol{K}_{oa} & \boldsymbol{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_a \\ \boldsymbol{u}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{f}_o \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Bu ifadede "a" indisi, aktif düğüm noktalarını, "o" indisi yoğunlaştırılmış iç düğüm noktalarını temsil etmektedir. Buna göre $\boldsymbol{K}_{aa}$, (6.1) ifadesindeki ikinci matris eşitliğini yazarsak,

$$\boldsymbol{K}_{oa}\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{K}_{oo}\boldsymbol{u}_o = \boldsymbol{f}_o \tag{6.2}$$

elde edilir. $\boldsymbol{K}_{oo}$, tekil değil ise, yoğunlaştırılmış serbestlik derecelerinin çözümü aşağıdaki şekilde mümkün olmaktadır.

$$\boldsymbol{u}_o = \boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\left(\boldsymbol{f}_o - \boldsymbol{K}_{oa}\boldsymbol{u}_a\right) \tag{6.3}$$

$\hat{\boldsymbol{K}}_{aa}$, yoğunlaştırma sonrası katılık matrisi ve $\hat{\boldsymbol{f}}_a$, yoğunlaştırma sonrası kuvvet vektörü olmak üzere aşağıdaki katılık matrisi ifadesi şu şekilde ifade edilir.

$$\hat{\boldsymbol{K}}_{aa}\boldsymbol{u}_a = \hat{\boldsymbol{f}}_a \tag{6.4}$$

(6.4) ifadesi (6.2)'ye taşınırsa,

$$\hat{\boldsymbol{K}}_{aa} = \boldsymbol{K}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ao}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{K}_{oa} \tag{6.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_a = \boldsymbol{f}_a - \boldsymbol{K}_{ao}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{f}_o \tag{6.6}$$

şeklinde yoğunlaştırma uygulaması sonrası süper elemanın katılık matris ve sisteme uygulanan kuvvet vektörü elde edilir.

6.7 Dinamik Explicit Matris İşlemleri ile Yoğunlaştırma

Kütle etkilerinin dikkate alındığı yoğunlaştırma yöntemi olup yapının dinamik davranışının genel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{6.7}$$

$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K},\boldsymbol{F}$ sırasıyla kütle, sönüm, katılık ve kuvvet vektörü matrislerinin içerdiği dış temas ve yoğunlaştırılacak serbestlik derecelerini dikkate alarak matrisleri yeniden yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{aa} & \boldsymbol{M}_{ao} \\ \boldsymbol{M}_{oa} & \boldsymbol{M}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_a \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{aa} & \boldsymbol{C}_{ao} \\ \boldsymbol{C}_{oa} & \boldsymbol{C}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_a \\ \dot{\boldsymbol{u}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ao} \\ \boldsymbol{K}_{oa} & \boldsymbol{K}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_a \\ \boldsymbol{u}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_a \\ \boldsymbol{f}_o \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

elde edilir.

Yoğunlaştırma sonrası elde edilecek denklem de şu şekilde belirtilebilir.

$$\hat{\boldsymbol{M}}\ddot{\hat{\boldsymbol{u}}} + \hat{\boldsymbol{C}}\dot{\hat{\boldsymbol{u}}} + \hat{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{F}} \tag{6.9}$$

Burada $\hat{\boldsymbol{M}}$ yoğunlaştırma sonrası elde edilen kütle matrisini, $\hat{\boldsymbol{C}}$ yoğunlaştırma sonrası elde edilen sönüm matrisini, $\hat{\boldsymbol{K}}$ yoğunlaştırma sonrası elde edilen katılık matrisini, $\hat{\boldsymbol{u}}$ indirgenmiş yerdeğiştirme vektörünü ve $\hat{\boldsymbol{F}}$ yoğunlaştırma sonrası elde edilen kuvvet vektörünü temsil etmektedir.

Statik durum için bulunan (6.5) ve (6.6) denklemleri, (6.9) içine taşındıktan sonra yapılan işlemler ile öncelikle $\hat{\boldsymbol{M}}$ matrisi, $\hat{\boldsymbol{C}}$ ihmal edilerek, aşağıdaki şekilde elde edilir [1].

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M}_{aa} - \boldsymbol{K}_{ao}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{M}_{oa} - \boldsymbol{M}_{ao}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{K}_{oa} + \boldsymbol{K}_{ao}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{M}_{oo}\boldsymbol{K}_{oo}^{-1}\boldsymbol{K}_{oa} \tag{6.10}$$

6.8 Gauss Eliminasyon Yöntemi ile Yoğunlaştırma

Yukarıda tanımlanan yoğunlaştırma yöntemi, süper elemanların denkleminin yeniden oluşturulamaması ve $\boldsymbol{K}_{oo}$ matrisinin tersinin kullanılamaması nedenleri ile bilgisayar uygulamalarında her zaman çözülememektedir. Yöntemin kullanımı ancak bir çeşit simetrik Gauss Eliminasyon yöntemi ile mümkün olmaktadır.

Buna göre yoğunlaştırılması düşünülen serbestlik derecesine ait satır ve sütunların etkileri diğer serbestlik derecelerine (6.5) ve (6.6)'da verilen ifadelere uyumlu olacak şekilde yansıtılarak yok edilir. Bu şekilde $\hat{\boldsymbol{K}}_{aa}$, yoğunlaştırma sonrası katılık matrisi ve $\hat{\boldsymbol{F}}$, yoğunlaştırma sonrası kuvvet vektörü elde edilir.

Gauss eliminasyon yönteminde tam matris depolaması dikkate alınmakta olup uçak gibi milyonlarca serbestlik derecesi içeren yapılara bu yöntem uygulanırken "sparse" seyrek matris algoritmalarından da yararlanılır.

6.9 AYB'de Mod Seçim Kriterleri

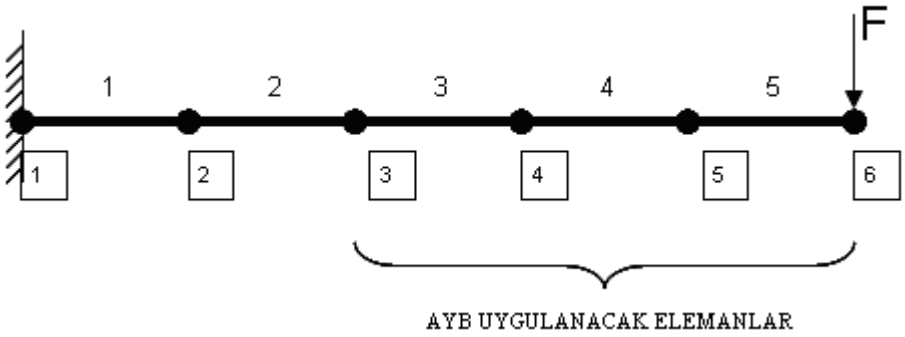
AYB yönteminde uygun çözüm sağlayacak aktif düğüm noktalarının seçiminde genellikle deneme-yanılma (heuristic) yaklaşımı kullanılmakta olmasına karşın sistematik yaklaşımlar geliştirilmesi konusunda çalışmalar, günümüzde yoğun bir şekilde devam etmektedir [86]. Mod seçimi için Liao ve arkadaşlarının temel yaklaşımı, AYB uygulanmış yapılardaki alt yapıların en düşük frekanslarını temsil eden modlarının aktif düğüm noktalarının seçiminde dikkate alınmasına dayanmaktadır. Bu çalışma, CMS'ye alternatif olabilecek bir yöntem içermektedir [87,88,89].

6.10 Kiriş Sisteminde Süper Eleman Uygulamaları

AYB uygulamasının ilk örneği olarak düzlemsel kiriş elemanlardan oluşan bir yapısal sistem seçilmiştir. Şekil 6.8'de görülmekte olan yapısal sistem, 5 eleman ve 6 düğüm noktasından oluşmaktadır.

6.10.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar

Seçilen ankastre kirişin impuls ve sinüs girişlerine karşılık verdiği cevaplar incelenmiş ve MATLAB'de geliştirilen kod ile sonuçları karşılaştırılmaktadır.



Şekil 6.8 : AYB uygulanacak kiriş ve süper eleman oluşturmada kullanılacak elemanlar.

Düzlemsel kiriş elemanın her bir düğüm noktasında Bölüm 3'de tanımlandığı gibi 2 öteleme, 1 dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi bulunmaktadır. Seçilen ankastre

bağlı kare kesitli kirişin toplam uzunluğu 0.5 m, kesit alanı 4.10^{-4} m^2, kesit yüksekliği 2.10^{-2} m, kesit atalet momenti $1{,}33.10^{-8}$ m^4 dir. Kiriş malzemesi olarak yoğunluğu 7850 kg/m^3 ve elastiklik modülü 210 GPa olan çelik seçilmiştir. Yükleme 6 nolu düğüm noktasında düşey aşağıya doğru -100 N olarak alınmıştır.

AYB uygulanacak eleman sayısı 3 olarak seçilmiş olup kiriş serbest ucundaki ardışık 3 eleman bu işlem için seçilmiştir.

5 elemanlı kirişin ankastre tarafındaki 1 ve 2 nolu elemanı dışındaki 3, 4 ve 5 nolu elemanları birleştirilerek, 3, 4, 5, 6 nolu düğüm noktaları 3 ve 6 nolu aktif düğüm noktalarına indirgenmiştir. Böylece 3 eleman yerine 1 süper eleman oluşturulup, kullanılacağı analizlerin içinde bu 2 adet aktif düğüm noktası dikkate alınmıştır. Böylece indirgenmiş sistem, 2 adet mevcut eleman ve 1 adet süper eleman olmak üzere toplam 3 elemandan oluşmuş duruma gelmiş ve model derecesi, 18'den 12'ye indirgenmiştir.

6.10.2 AYB uygulanmış sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması

Hazırlanılan Matlab kodunda öncelikle orijinal modelin topoloji matrisi, indirgenmiş sistemin topoloji matrisine dönüştürülmektedir. Ardından indirgenmiş sistemin katılık ve kütle matrisleri bulunmaktadır. Bulunan bu matrisler orijinal yapısal sistemin süper eleman haricindeki elemanlarının katılık ve kütle matrisleri ile montajı yapılmıştır. Sınır şartları ile impuls ve sinüs yüklemelerin uygulanması sonrasında sistem cevapları bulunmuştur. Bulunan sistem cevapları aynı yüklemelerin yapıldığı orijinal model cevapları ile sönümlü ve sönümsüz olma durumları da dikkate alınarak karşılaştırılmıştır. Seçilen örnek malzemelerin Çizelge 5.1'de verilen katılık orantılı sönüm katsayıları (β=0.00008, 0.001, 0.01, 0.1) ve sönümsüz (β=0) olma durumu için analizler tekrarlanmıştır.

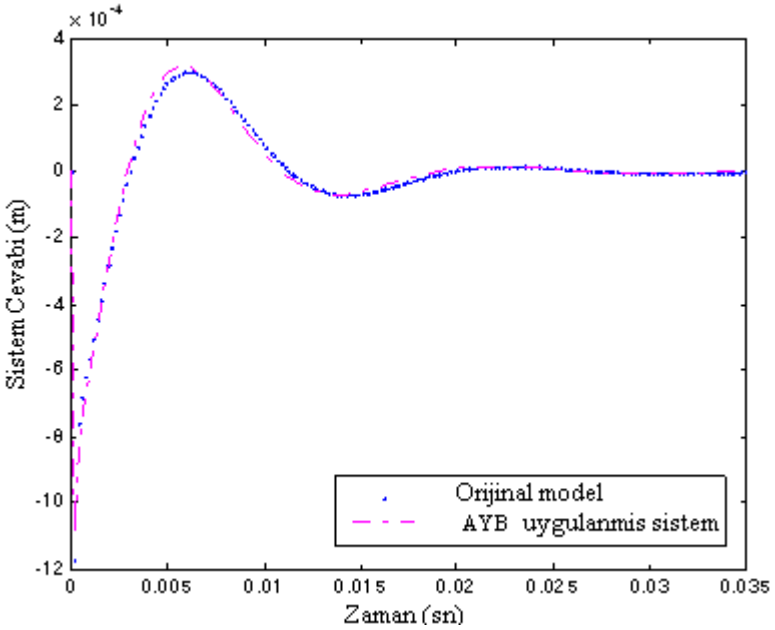
Örnek uygulamanın ikinci kısmında dikkate alınan kiriş sisteminin eleman sayısının 5'den 100'e çıkartılması durumunda hazırlanan Matlab kodunun uyum sağlaması için küçük değişiklikler yapılmıştır. Kod içerisinde 5 elemanlı sistem örneğine benzer şekilde öncelikle kirişin sadece 2 elemanı AYB'nin dışında tutulmuş diğer 98 elemandan bir adet AYB uygulanmış süper eleman oluşturulmuş ve toplam sistem eleman sayısı yine 3'de tutulmuştur. Böylece tam modelde 303 olan serbestlik derecesi, 12'ye indirgenmiştir. 100 elemanlı kiriş sistemi uygulamasının daha sonraki adımında AYB'ye dahil edilen eleman sayısı 90'a indirilerek, oluşturulan süper

eleman ile birlikte indirgenmiş sistem eleman sayısı 11'e; model derecesi de 303'den 33'e düşürülmüştür.

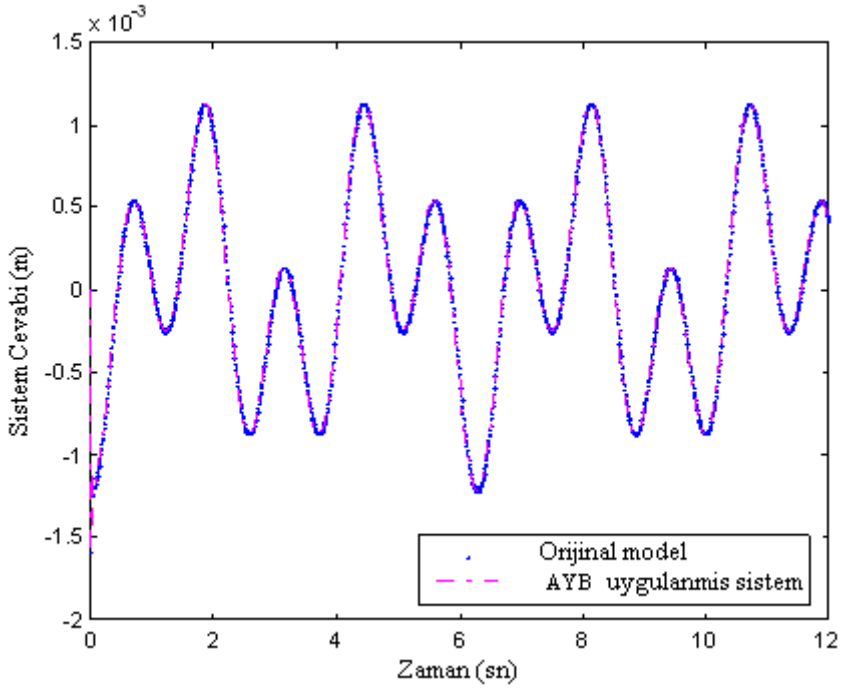
Hazırlanan Matlab kodu, değişik kiriş sistemlerdeki farklı eleman sayıları için sadece topoloji matrisinin değiştirilmesi ile sonuç almak üzere parametrik hale getirilmiştir. AYB uygulanmış 100 elemanlı kiriş eleman sisteminin AYB uygulanmış sistem ile karşılaştırmalarına bu bölüm içinde yer verilmiştir.

Kiriş sistemi analizi için seçilmesi tavsiye edilen en küçük Δt zaman adımı değeri (5.24) bağıntısında verildiği şekilde seçilmiştir.

β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal modelin impuls cevapları Şekil 6.9'da ve sinüs girişe karşılık cevapları Şekil 6.10'da verilmektedir. Uygulanan f=100*sin(2*tzaman)+50*sin(5*tzaman) sinüzoidal giriş, Şekil 5.30'da sunulmaktadır.

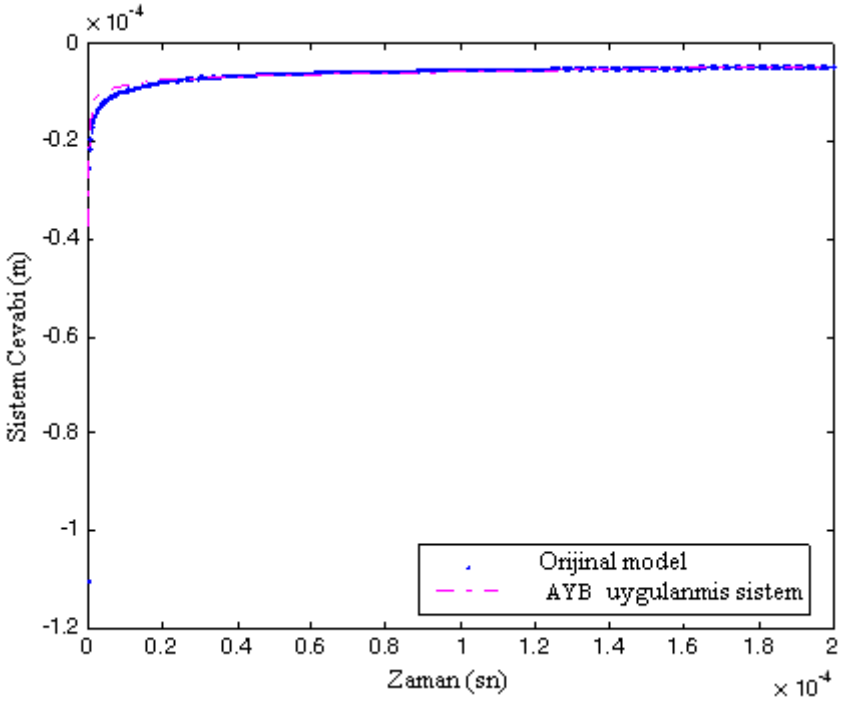


Şekil 6.9 : β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

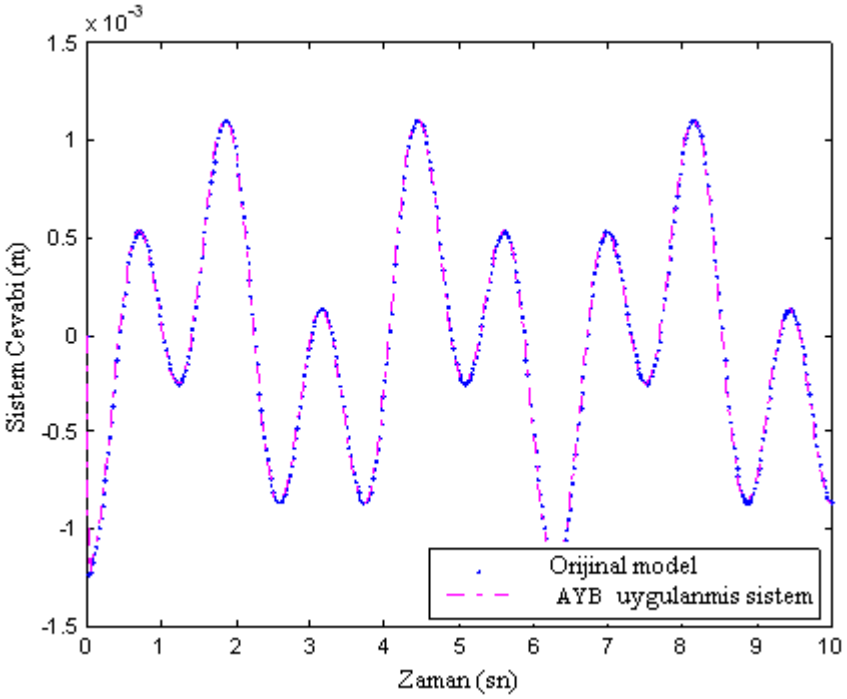


Şekil 6.10 : β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.010 için orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.11'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.12'de verilmektedir.

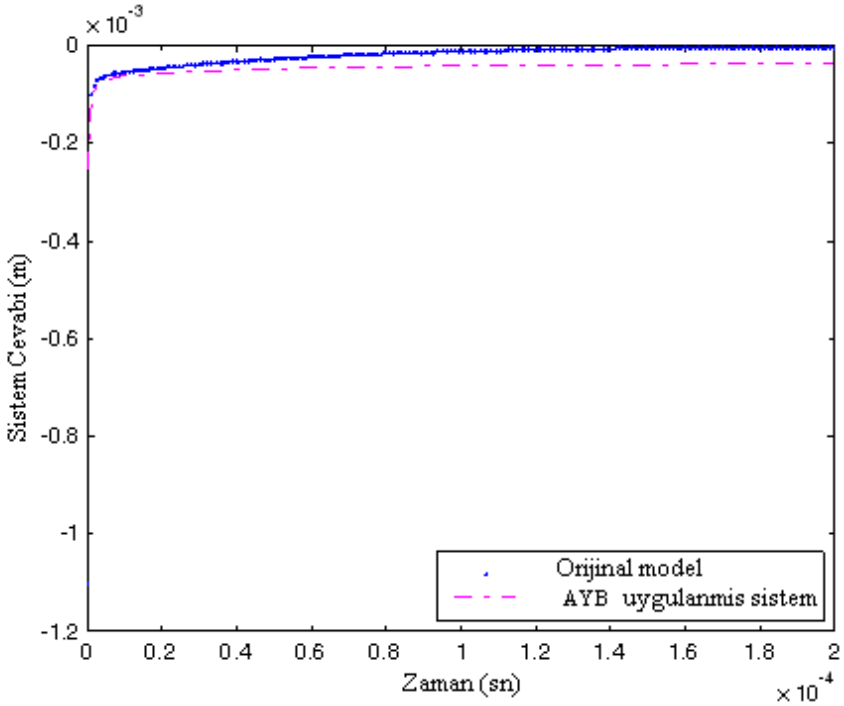


Şekil 6.11 : β=0.010 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

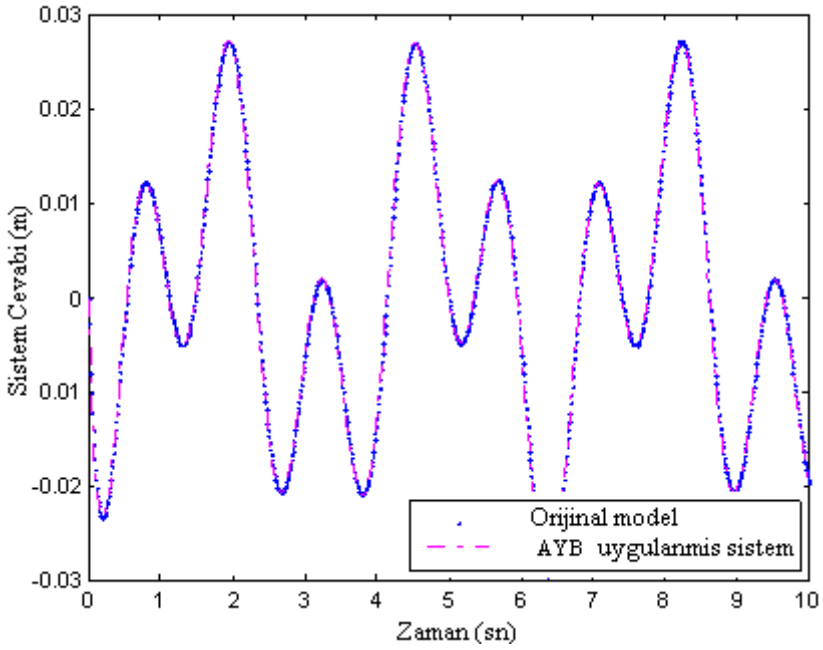


Şekil 6.12 : β=0.010 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.100 için orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.13'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.14'de verilmektedir.

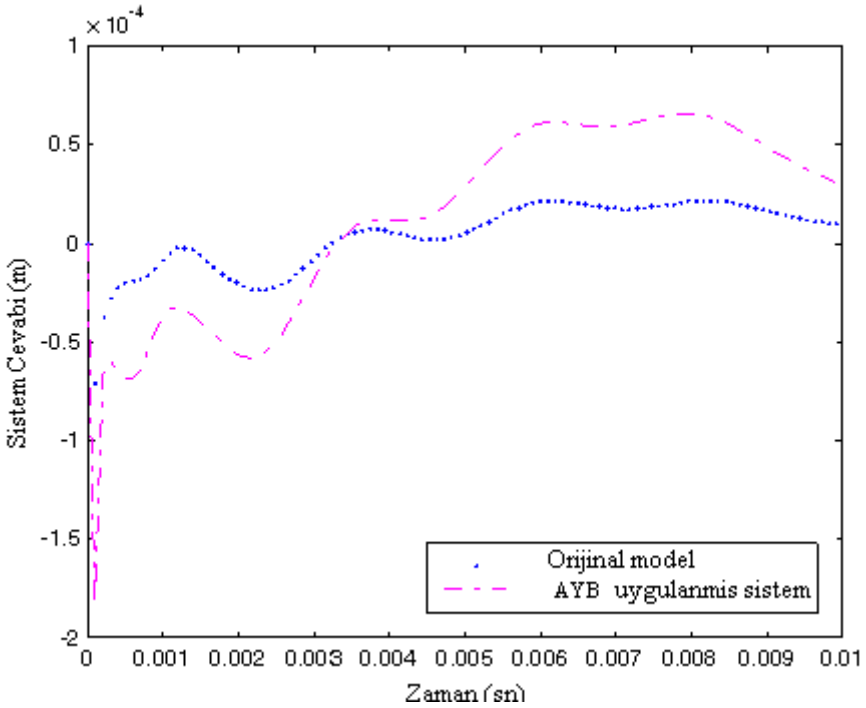


Şekil 6.13 : β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

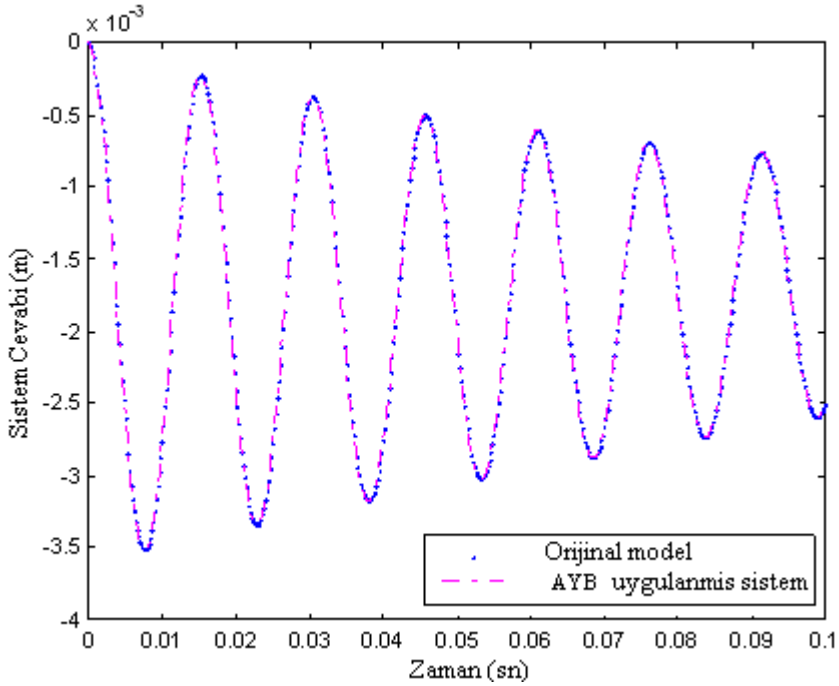


Şekil 6.14 : β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.00008 için orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.15'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.16'da verilmektedir.

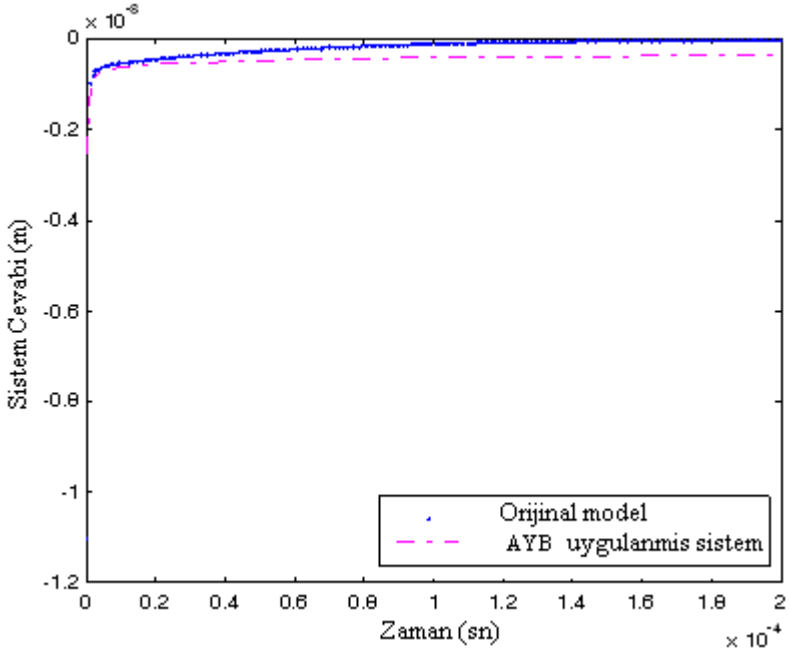


Şekil 6.15 : β=0.00008 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemanlı sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

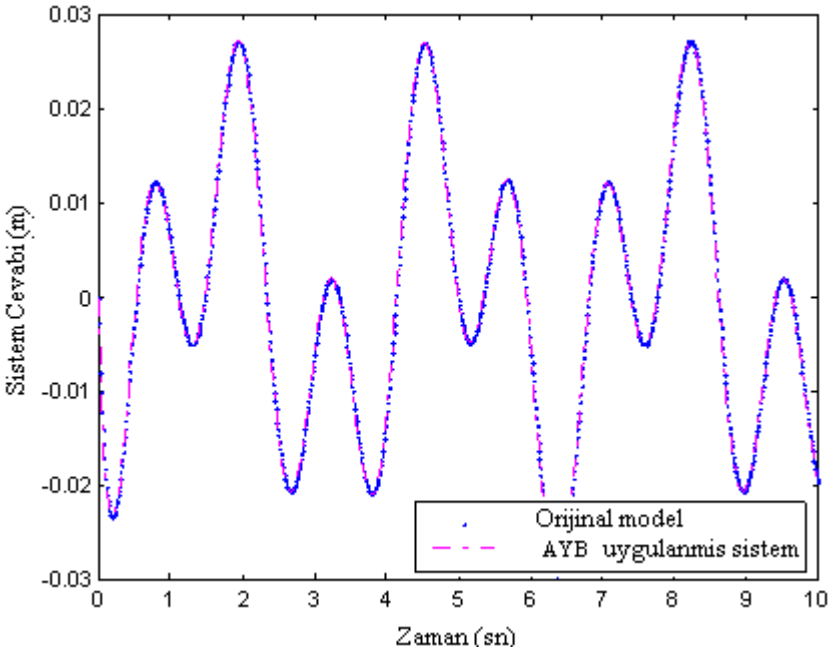


Şekil 6.16 : β=0.00008 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 11 elemana indirgenmiş sistemin ile orijinal kiriş modelinin impuls cevapları Şekil 6.17'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.18'de verilmektedir.



Şekil 6.17 : β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 11 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin impuls cevaplarının karşılaştırılması.



Şekil 6.18 : β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 11 elemana indirgenmiş sistem ile orijinal kiriş modelinin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

Eleman sayılarının 5, 100 ve 200 olduğu kiriş sistemlerine AYB uygulanması sonucu elde edilen analiz sürelerinin, AYB uygulamadan yapılan analizlerin süreleri ile karşılaştırılması farklı sönüm değerleri için Çizelge 6.1'de toplanmıştır.

Bu karşılaştırma çizelgesinden de görüldüğü gibi kiriş sistemi için AYB ile oluşturulmuş süper eleman kullanımının hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmakta olduğu görülmektedir. Bu durum, AYB'nin avantajı açık bir şekilde göstermektedir. Diğer önemli nokta da süper eleman oluşturmak için harcanan zamanın herhangi bir MDD uygulanmamış kiriş sistemi analizinden daha uzun sürmesidir. Bu nedenle, sistem üzerinde oluşturulacak AYB uygulamalarında eleman seçimlerinin tekrarlanacak analiz iterasyonlarında düzeltme yapılmadan kullanımını sağlayacak şekilde seçilmesi ile kaçınılmaz olarak harcanacak AYB oluşturma süresinin toplam çalışma zamanı içindeki payının en aza indirilmesi hedeflenmelidir. Bunların yanında sistemin eleman sayısındaki artışın ve indirgenmiş sistemin indirgenmiş model derecesinde artışın AYB oluşturma süresini uzatmakta olduğu gözlenmiştir. Ayrıca sistemin Rayleigh katılık orantılı sönümünün artması ile AYB oluşturma zamanının az olsa da bir miktar arttığı görülmektedir.

Çizelge 6.1 : 5, 100 ve 200 elemanlı kiriş sistemlerinde AYB kullanarak ve AYB kullanmadan yapılan analizlerin hesaplama zamanları karşılaştırması.

Eleman sayısı	Orijinal model derecesi ve AYB sonrası model derecesi	Süper elemanın içerdiği eleman sayısı	Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı	AYB oluşturma işlemci zamanı [saniye]	AYB kullanımı işlemci zamanı [saniye]	AYB'siz işlemci zamanı [saniye]
5	**18'den 12'ye**	**3**	**0**	0.015	0.001	0.016
			0.001	0.031	0.001	0.016
			0.01	0.031	0.001	0.016
			0.1	0.032	0.001	0.016
100	**303'den 12'ye**	**98**	**0**	7.89	0.001	1.469
			0.001	7.719	0.015	1.422
			0.01	8.875	0.016	1.453
			0.1	7.734	0.016	1.422
100	**303'den 33'e**	**90**	**0**	29.609	0.016	1.468
			0.001	31.063	0.016	1.484
			0.01	29.609	0.032	1.453
			0.1	36.391	0.015	1.563
200	**603'den 33'e**	**190**	**0**	142.3	0.015	9.875
			0.001	147.7	0.015	9.922
			0.01	142.08	0.016	9.875
			0.1	149.19	0.016	9.922

AYB sonuçlarını içeren tüm grafikler incelendiğinde sönümlü sistemlerde AYB ile indirgenmiş sistemlerin cevaplarının orijinal model cevapları ile uyumlu oldukları görülmüştür. AYB uygulaması sonrasında elde edilen tüm indirgenmiş sistem cevapları ve orijinal model cevapları dikkate alındığında sönüm değerindeki artışın sistem cevaplarındaki uyuma olumlu etkisi olduğu sonucuna varılmaktadır.

6.10.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması

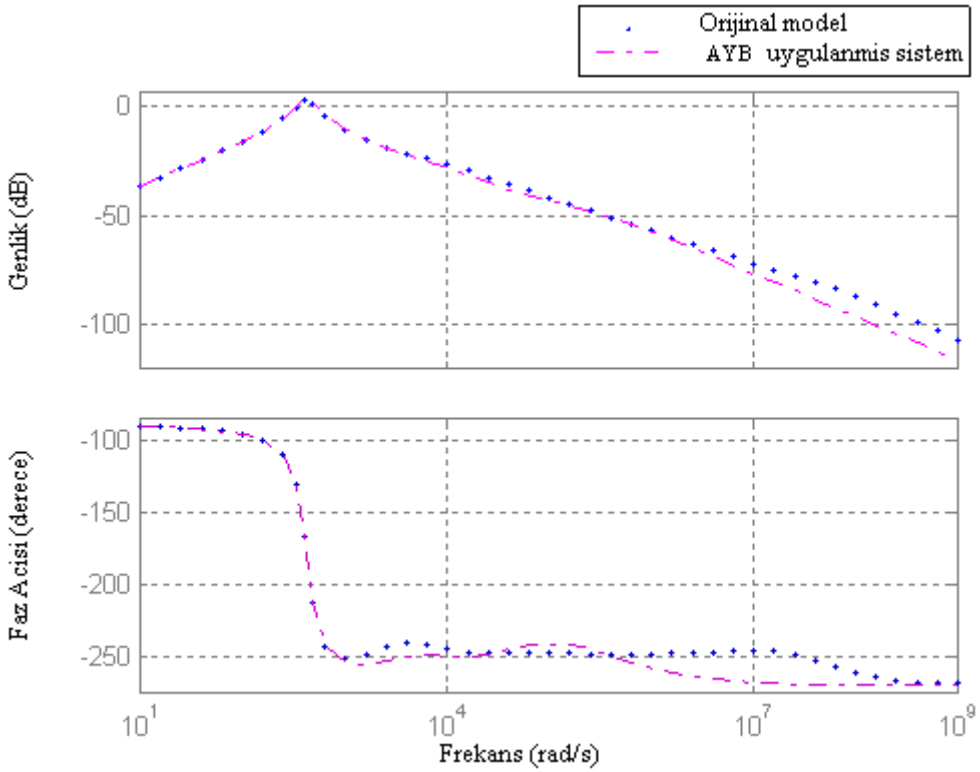
AYB uygulanmış sistemin serbestlik derecesi azaldığından genel olarak indirgenmiş bu sistemlerde enerji seviyesi de korunamıyor. Bu nedenle, aktif serbestlik derecelerinin zaman cevapları ve frekans cevaplarını veren Bode diyagramları esas alınarak karşılaştırma yapılmasının daha uygun olduğunu görülmüştür.

6.10.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi

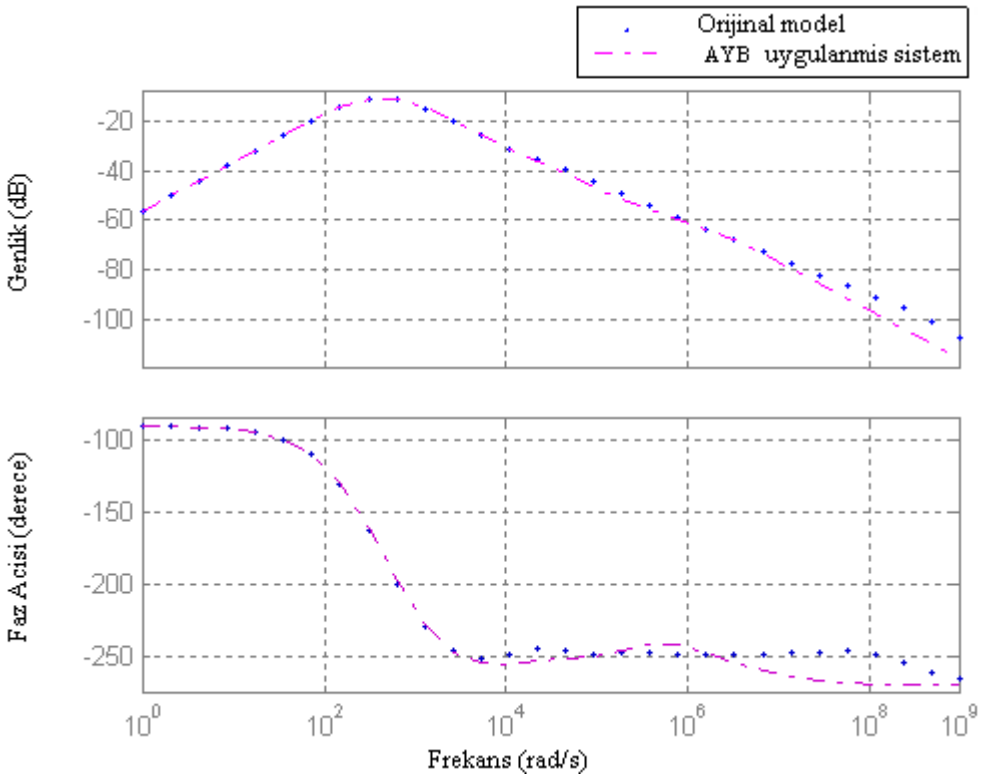
Yapısal sistemlerin frekans cevapları sistem ile ilgili önemli bilgiler vermektedir. Frekans cevabının genlik-frekans ve faz açısı-frekans olarak incelendiği Bode

diyagramlarından sistemin düşük ve yüksek frekanslardaki davranışları birlikte görülebilmektedir. Orijinal model ve AYB uygulanarak indirgenmiş sistemlerin zamana bağlı cevaplarının uyum içinde olduğu ve oluşturulan süper elemanların verdiği sonuçların doğruluğu bu kısımda incelenmektedir.

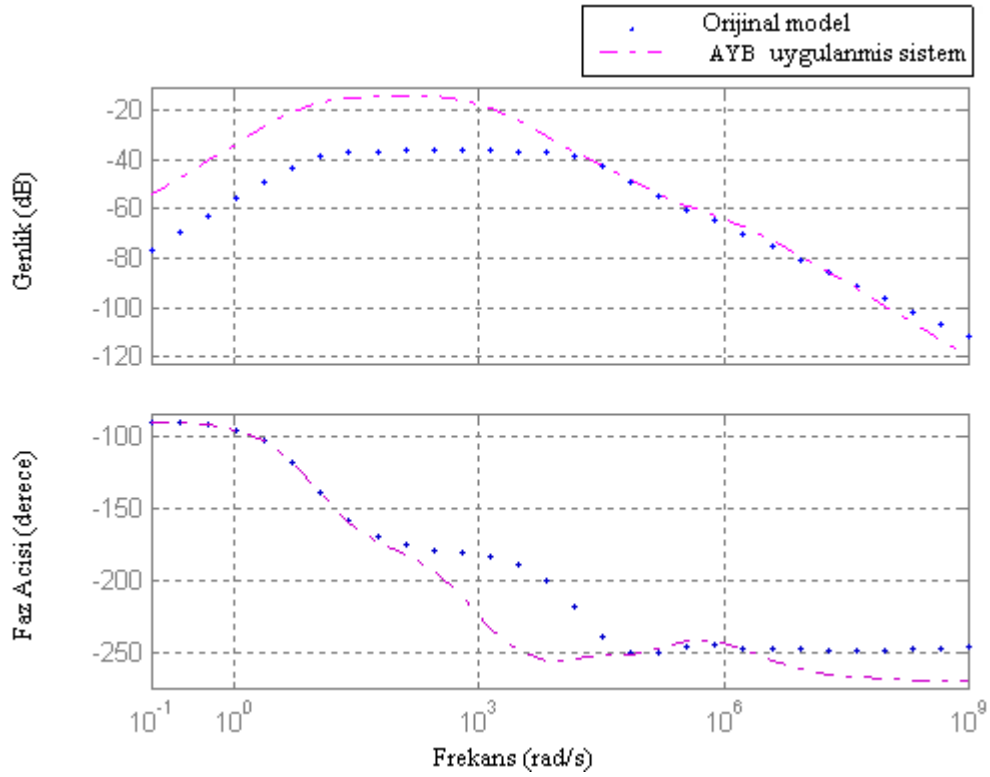
Aşağıda bu çalışmada incelenen AYB uygulanarak elde edilmiş sistemin ve orijinal modelin davranışları Bode diyagramları ile gösterilmiştir. β=0.001, 0.010, 0.100, 0.00008 için sistem frekans cevapları, 5 elemanlı düzlemsel kiriş sistemleri için sırasıyla Şekil 6.19-6.22'de verilmiştir.



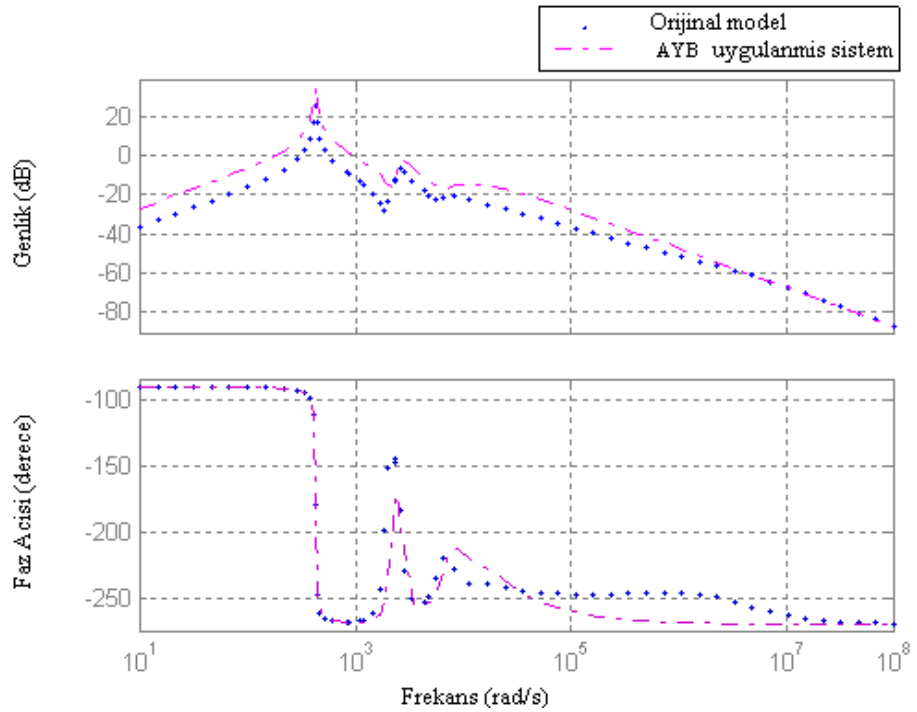
Şekil 6.19 : β=0.001 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.



Şekil 6.20 : β=0.010 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.

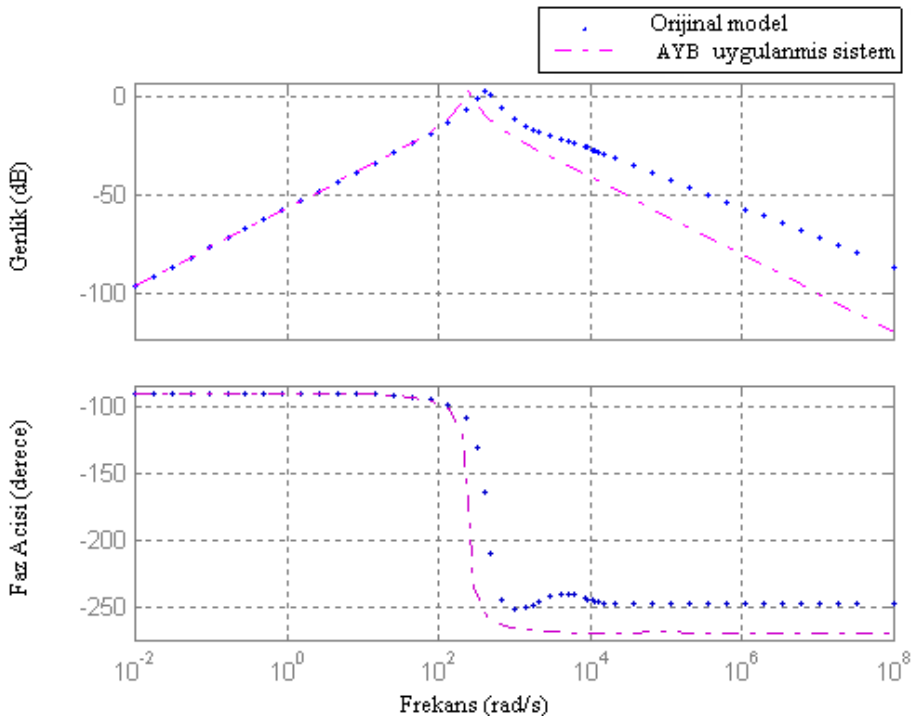


Şekil 6.21 : β=0.100 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.

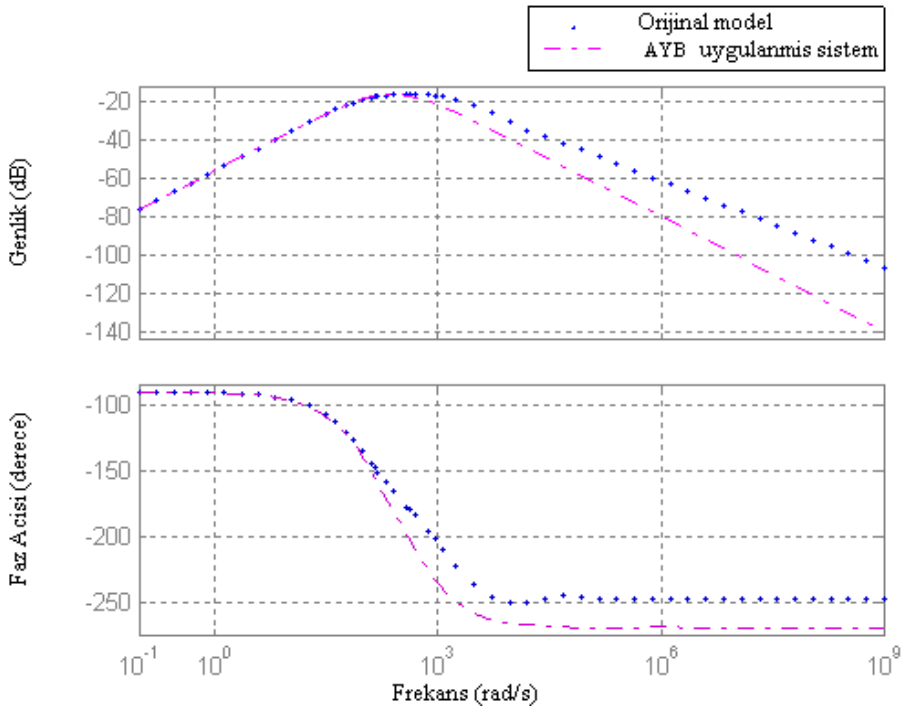


Şekil 6.22 : β=0.00008 için 5 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 3 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.

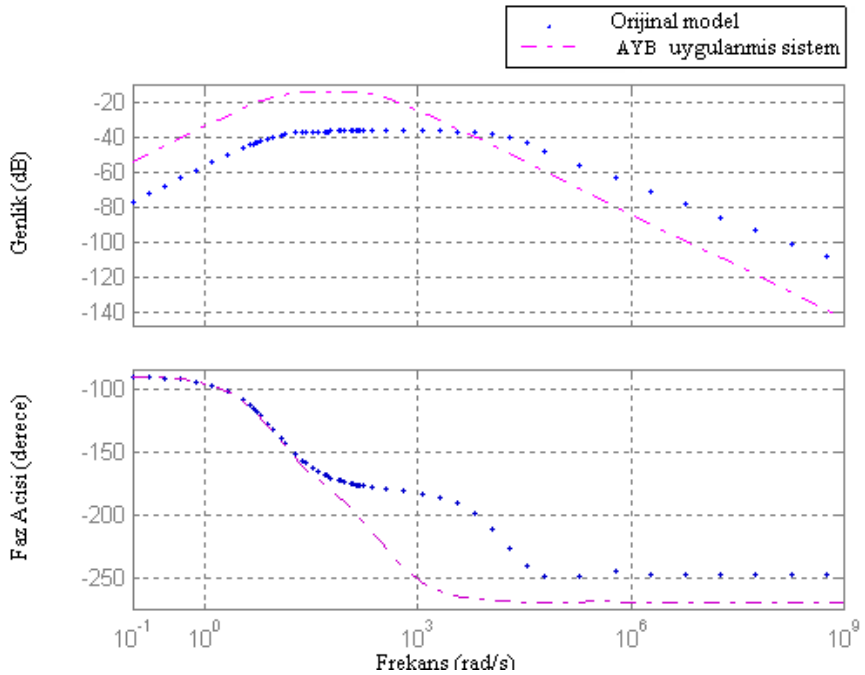
β=0.001, 0.010, 0.100 için sistem frekans cevapları, 100 elemanlı düzlemsel kiriş sistemleri için sırasıyla Şekil 6.23-6.25'de verilmiştir.



Şekil 6.23 : β=0.001 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 90 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.



Şekil 6.24 : β=0.010 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 90 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.



Şekil 6.25 : β=0.100 için 100 elemanlı kirişe uygulanan AYB ile bulunan 90 elemana indirgenmiş sistemin ve orijinal kiriş modelinin Bode Diyagramları.

Düşük eleman sayısına sahip sistemlere uygulanan AYB sonrasında elde edilen indirgenmiş sistemlerin hem düşük, hem de yüksek frekanslarda orijinal model ile aynı frekans cevabını verdiği görülmektedir. Bu durumda sistemin model derecesi

düşürme sonrasında sistem karakterinin frekans uzayında değişmediği sonucuna varılmaktadır. Grafiklerde yerel küçük uyumsuzluklar gözlense de benzer karakterde frekans cevapları alındığı kabul edilebilir. Bu da orijinal model ve indirgenmiş sistemin aynı davranışları gösteren sistemler olduklarını göstermektedir.

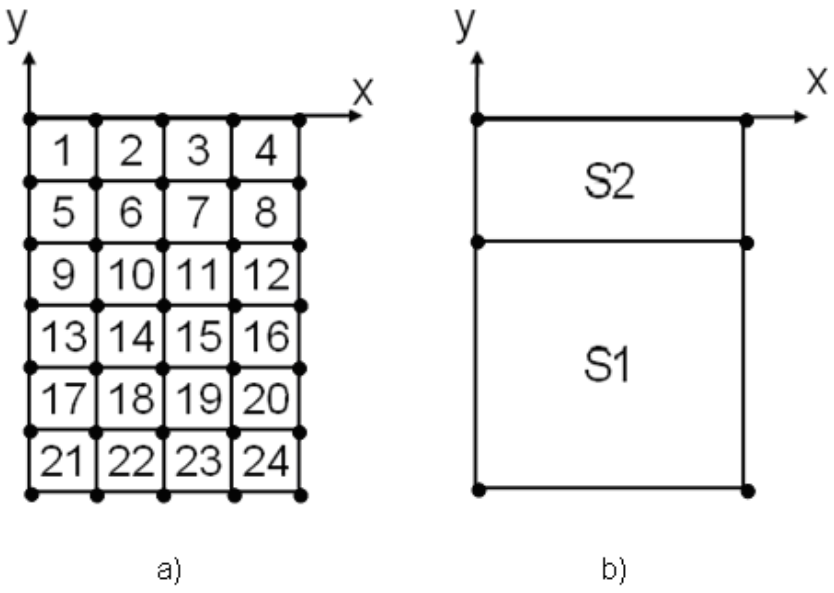
Ancak yüksek eleman sayılarına sahip sistemlerden AYB uygulanarak indirgenmiş sistemlerin düşük frekanslarda cevaplarının çok iyi olmasına karşılık yüksek frekans değerlerinde aynı başarıyı gösteremediği tespit edilmiştir.

6.11 Plak'da Süper Eleman Uygulamaları

AYB yöntemi ile süper eleman oluşturulmasına ikinci örnek uygulama olarak Şekil 6.26a)'da verilen plak seçilmiştir.

6.11.1 Sistemin özellikleri ve tanımlar

Seçilen düzlemsel plak orijinal modeli, Şekil 6.26a)'da görüldüğü gibi, 24 eleman ve 35 düğüm noktasından oluşmaktadır. Düzlemsel plak elemanın her bir düğüm noktasında Bölüm 3'de tanımlandığı gibi 1 öteleme, 2 dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi bulunmaktadır.



Şekil 6.26 : AYB uygulanacak sistemler: a) 24 elemanlı plak sistemi, b) Süper elemanlardan oluşturulan indirgenmiş sistem.

Seçilen ankastre bağlı plağın x yönündeki genişliği 120 mm, y yönündeki yüksekliği 240 mm olup, plak kalınlığı 2.4 mm'dir. Plak malzemesi olarak yoğunluğu 7850

kg/m^3, elastiklik modülü 210 GPa, kayma modülü 75 GPa ve Poisson oranı 0.3 olan çelik seçilmiştir. Yükleme 15 nolu elemanın sol alt köşesindeki düğüm noktasından ve z yönünde sayfa düzleminden içeri doğru -100 N olarak uygulanmıştır.

6.11.2 AYB uygulanmış sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması

Örnek sistem üzerinde öncelikle, Bölüm 5.3'de belirtilen yaklaşımlar ile topoloji matrisi, indirgenmiş sistemin topoloji matrisi, orijinal modelin katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek montaj işlemleri yapılmıştır. Yine aynı bölümde belirtilen şekilde orijinal model için hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Ardından AYB uygulanmış sistem katılık, kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek montaj işlemleri tamamlanmıştır. Sınır şartları ile impuls ve sinüs yüklemelerin uygulanması sonrasında orijinal model ve indirgenmiş sistem cevapları bulunmuştur. Aynı yüklemelerin sonuçları olarak bulunan orijinal model ve indirgenmiş sistem cevapları seçilen örnek malzemelerin Çizelge 5.1'de verilen katılık orantılı sönüm katsayıları (β=0.00008, 0.001, 0.01, 0.1) ve sönümsüz (β=0) olma durumları dikkate alınarak karşılaştırılmıştır.

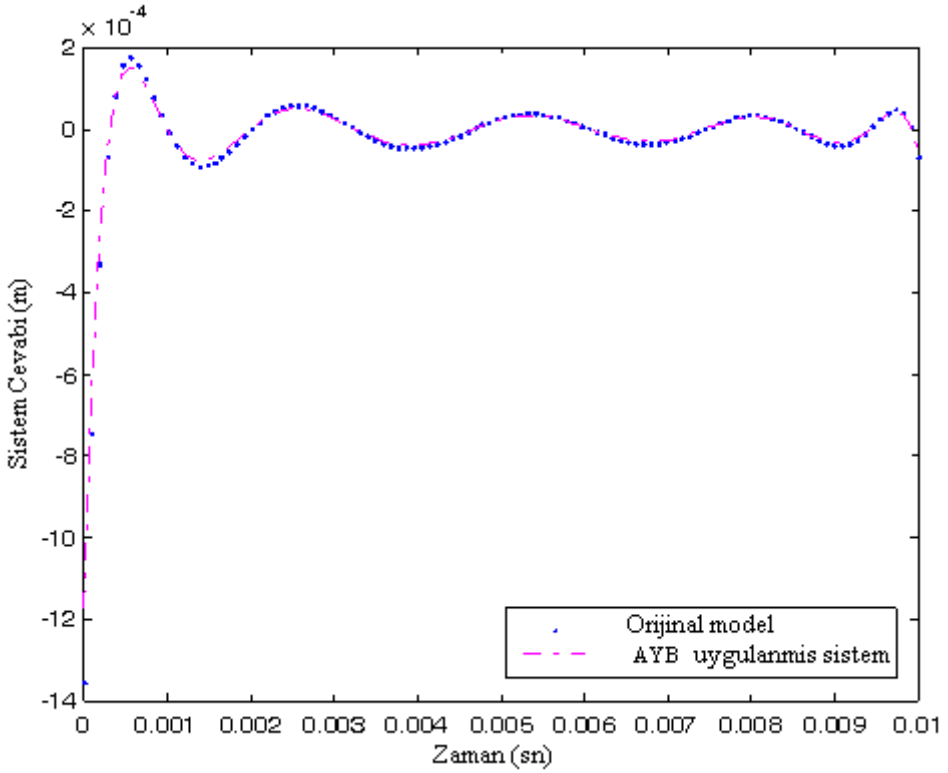
Plağa AYB uygulanması için plak iki ayrı süper eleman oluşturacak şekilde bölünmüştür. Her iki plak parçası içindeki elemanlar önce süper elemana dönüştürülmüş, sonrasında iki süper elemanın birbirine montajı ve analizi ile AYB uygulanmış sistem için sistem cevabı elde edilmiştir. AYB uygulanmış eleman sayıları, ilk örnek uygulama için yine aynı şekilde belirtildiği gibi ilk süper eleman için 16, ikinci süper eleman için 8 olarak seçilmiştir. Bu şekilde orijinal model model derecesi 105 iken, AYB ile indirgenmiş sistemin model derecesi 12'ye düşürülmüştür.

Diğer plak uygulaması olarak süper elemanlardaki eleman sayıları sırasıyla 36 ve 24 alınarak 60 elemanlı sistem incelenmiştir. Ardından süper elemanlardaki eleman sayıları, 64 ve 32 seçilerek 96 elemanlı plak sistemi analiz edilmiştir. Her iki sistemde model dereceleri sırasıyla, 231'den ve 351'den 12'ye düşürülmüştür.

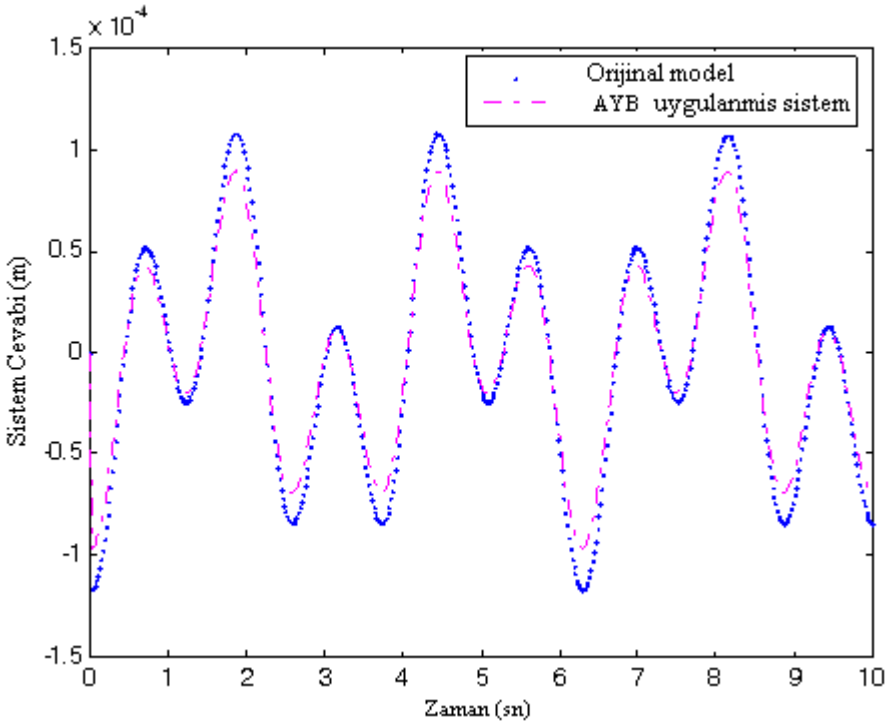
Plak sistemi analizi için seçilmesi tavsiye edilen en küçük Δt zaman adımı değeri (5.24) bağıntısında verildiği şekilde seçilmiştir.

İndirgenmiş ve orijinal modellerin impuls cevaplarında yuvarlatma hataları nedeniyle mertebe farklılıkları ortaya çıkmakta olduğu tespit edildi. Bu durumu çözmek amacıyla kaynak [45]'da bahsedildiği şekilde sistem cevapları, 1e-8 ile çarpılarak ölçekleme uygulanmıştır.

β=0.001 için orijinal model ve indirgenmiş sistemin impuls cevapları Şekil 6.27'de ve sinüs girişe karşılık cevapları Şekil 6.28'de verilmektedir. Uygulanan f=100*(sin(2*tzaman)+50*sin(5*tzaman) sinüzoidal girişi, Şekil 5.30'da sunulmaktadır.

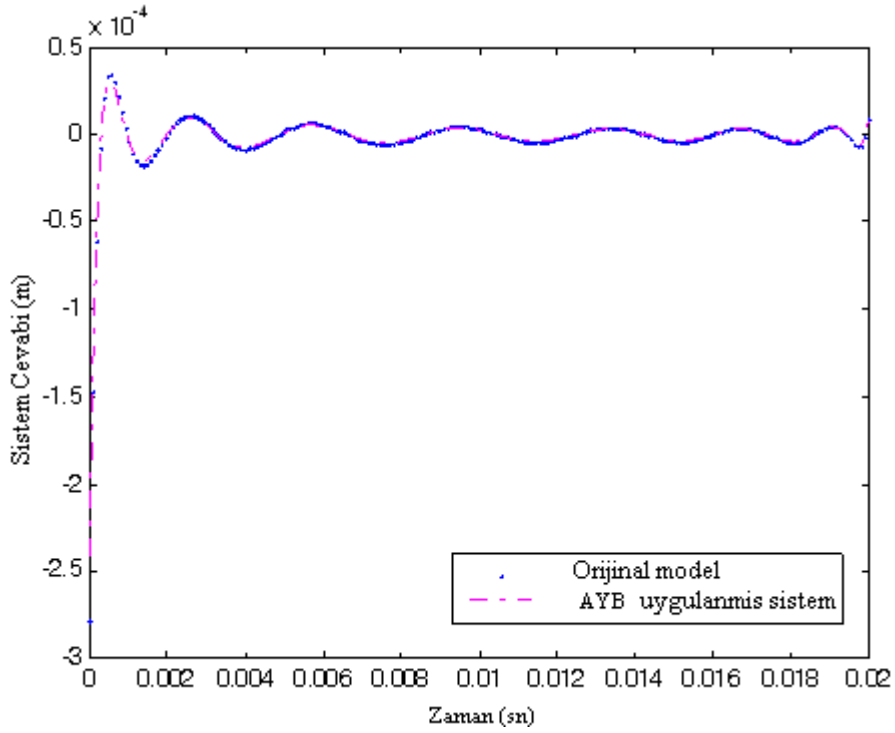


Şekil 6.27 : β=0.001 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

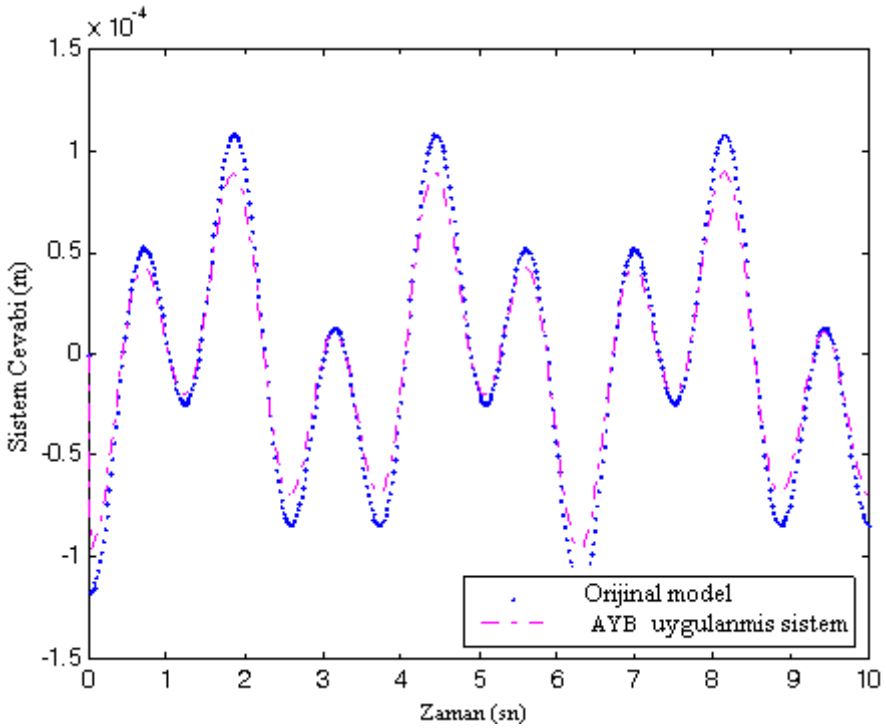


Şekil 6.28 : β=0.001 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.00008 için orijinal model ve indirgenmiş sistem sönümsüz impuls cevapları Şekil 6.29'da ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.30'da verilmektedir.

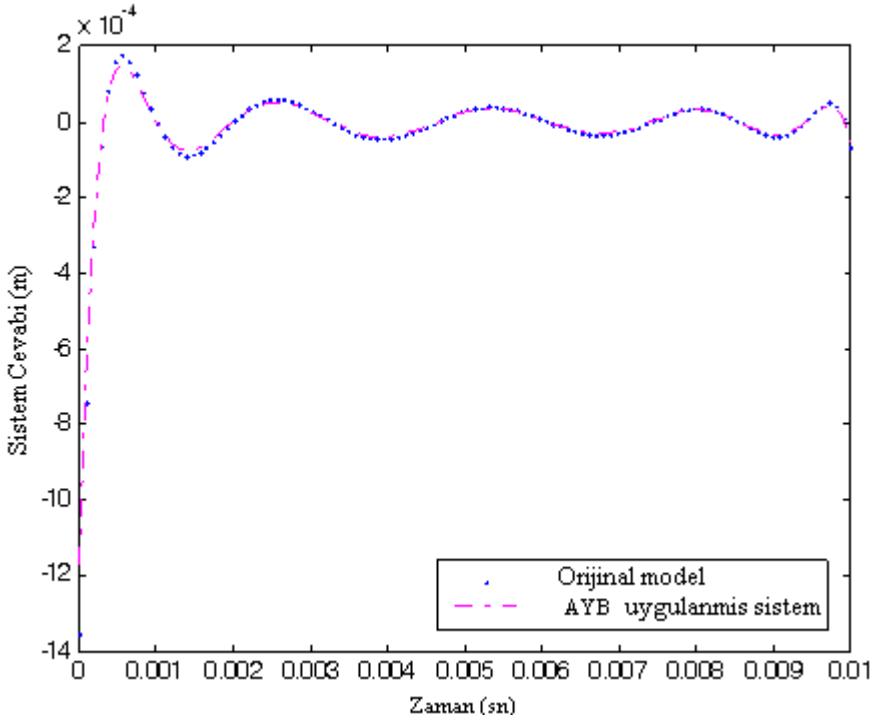


Şekil 6.29 : β=0.00008 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

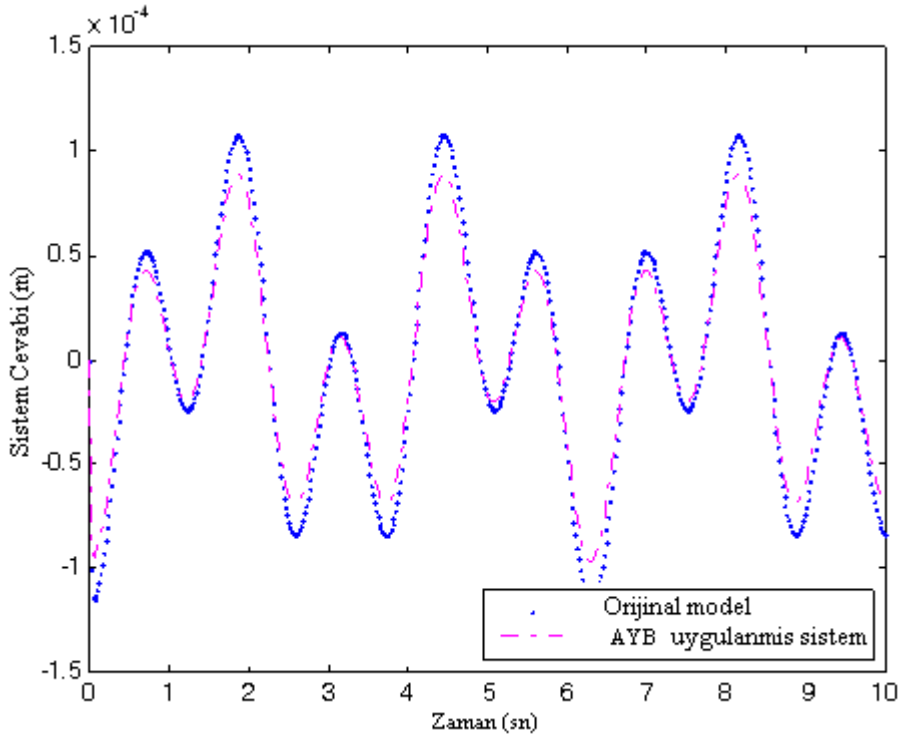


Şekil 6.30 : Şekil 6.15: β=0.00008 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.010 için orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.31'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.32'de verilmektedir.

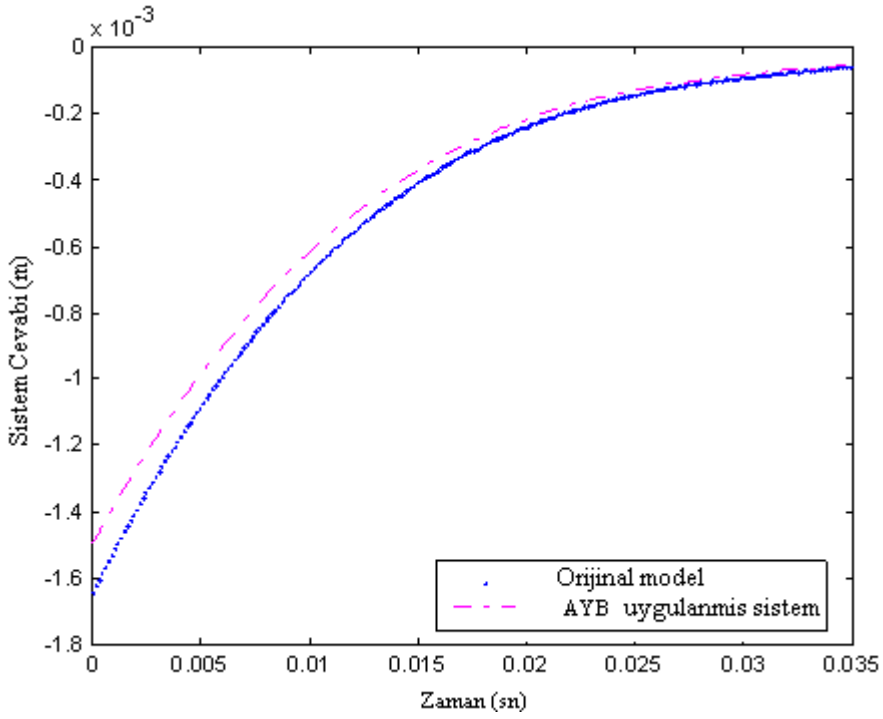


Şekil 6.31 : β=0.010 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

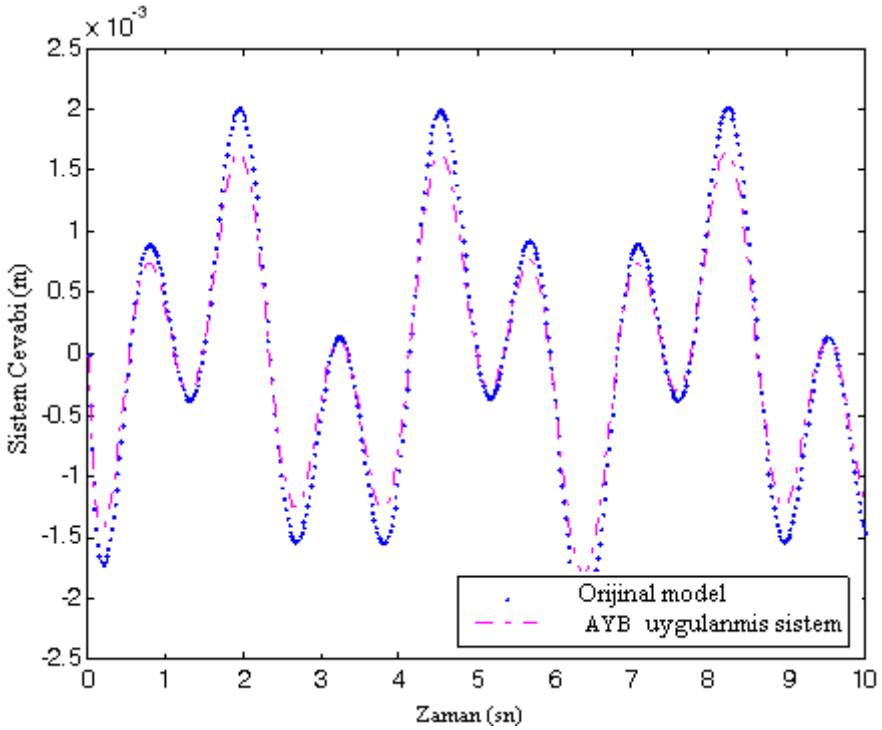


Şekil 6.32 : β=0.010 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.1 için orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.33'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.34'de verilmektedir.

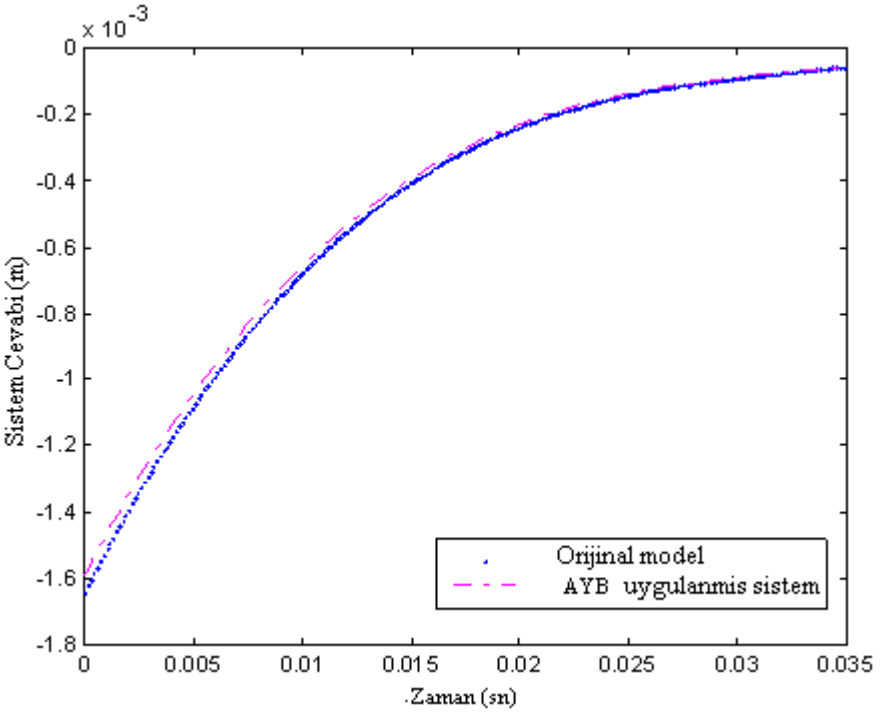


Şekil 6.33 : β=0.1 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

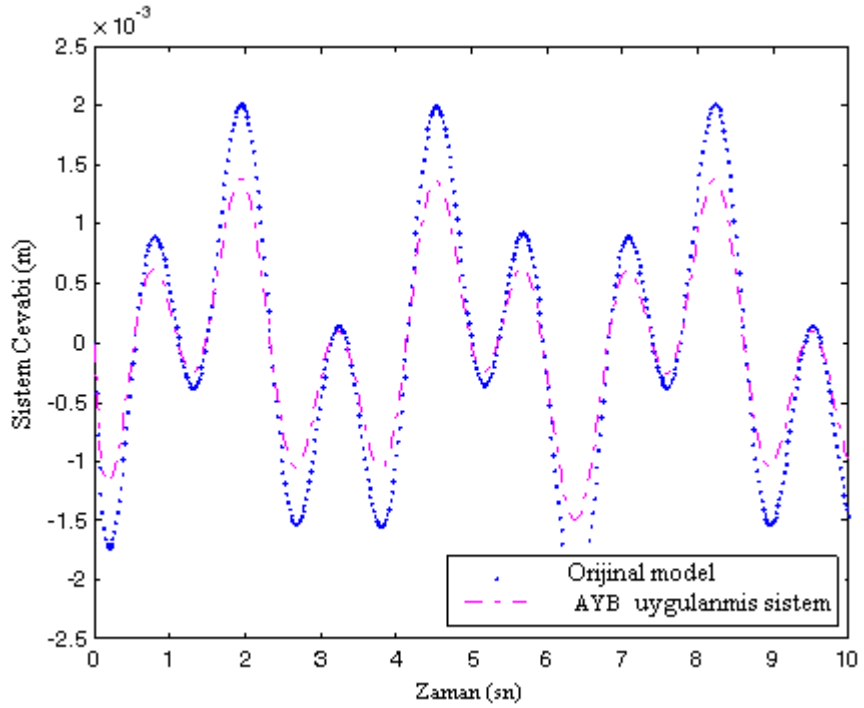


Şekil 6.34 : β=0.1 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sönümlü halde sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.1 için 60 elemanlı orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.35'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.36'da verilmektedir.

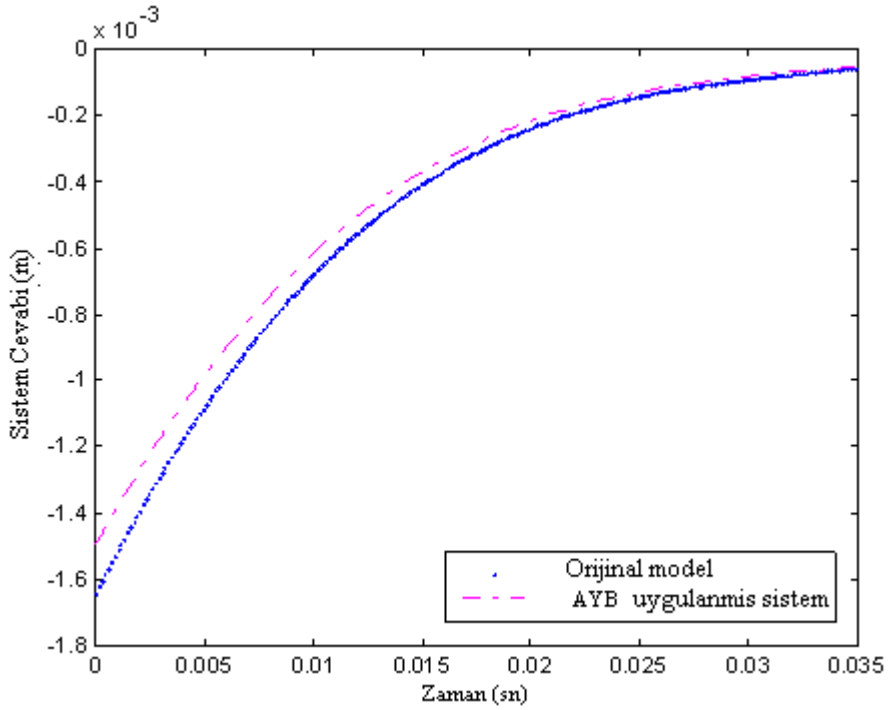


Şekil 6.35 : β=0.1 için 60 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması.

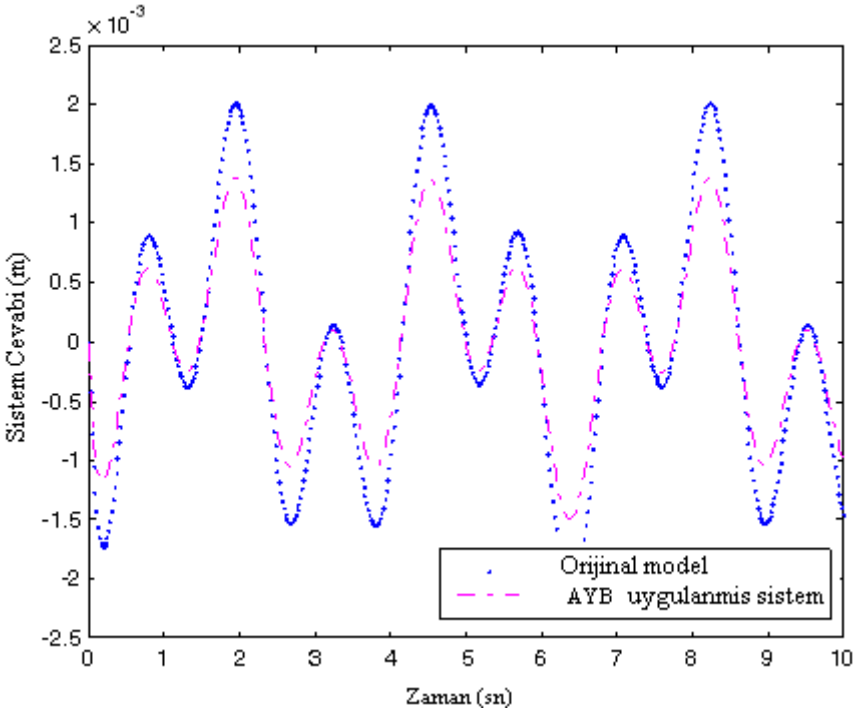


Şekil 6.36 : β=0.1 için 60 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

β=0.1 için 96 elemanlı orijinal model ve indirgenmiş sistemin sönümlü impuls cevapları Şekil 6.37'de ve sinüs girişe cevapları Şekil 6.38'de verilmektedir.



Şekil 6.37 : β=0.1 için 96 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması.



Şekil 6.38 : β=0.1 için 96 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin sinüs cevaplarının karşılaştırılması.

Eleman sayılarının 24, 60 ve 96 olduğu plak sistemlerine AYB uygulanması sonucu elde edilen analiz sürelerinin, AYB uygulamadan yapılan analizlerin süreleri ile karşılaştırılması farklı sönüm değerleri için Çizelge 6.2'de toplanmıştır.

Çizelge 6.2 : 24, 60, 96 elemanlı plak sistemlerinde AYB kullanarak ve AYB kullanmadan yapılan analizlerin hesaplama zamanları karşılaştırması.

Eleman Sayısı	Orijinal Model derecesi ve AYB sonrası Model derecesi	Süper Elemanın içerdiği eleman sayısı	Rayleigh Katılık Orantılı Sönüm Katsayısı	AYB Oluşturma İşlemci Zamanı [saniye]	AYB Kullanımı İşlemci Zamanı [saniye]	AYB'siz İşlemci Zamanı [saniye]	AYB'siz İşlemci Zamanı [saniye]
24	**105'den 12'e**	**16 ve 8**	**0.00008**	3.781	4.578	0.015	0.125
			0.001	4.422	5.516	0.015	0.188
			0.01	3.797	4.594	0.016	0.125
			0.1	3.938	4.766	0.016	0.125
60	**231'den 12'e**	**36 ve 24**	**0.00008**	28.375	38.625	0.015	0.641
			0.001	28.312	38.547	0.015	0.641
			0.01	29.391	40.250	0.016	0.656
			0.1	29.203	39.688	0.015	0.657
96	**351'den 12'e**	**64 ve 32**	**0.00008**	128.313	150.110	0.015	2.063
			0.001	130.828	153.453	0.016	2.094
			0.01	128.062	149.859	0.016	2.062
			0.1	128.078	149.937	0.010	2.062

Bu karşılaştırma çizelgesinden de görüldüğü gibi plak sistemi için AYB ile oluşturulmuş süper elemanların kullanımının hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmakta olduğu görülmektedir.

AYB sonuçlarını içeren tüm grafikler incelendiğinde sönümlü sistemlerde AYB ile indirgenmiş sistemlerin cevaplarının orijinal model cevapları ile uyumlu oldukları görülmüştür. AYB uygulaması sonrasında elde edilen tüm indirgenmiş sistem cevapları ve orijinal model cevapları dikkate alındığında sönüm değerindeki artışın sistem cevaplarındaki uyuma olumlu etkisi olduğu sonucuna varılmaktadır.

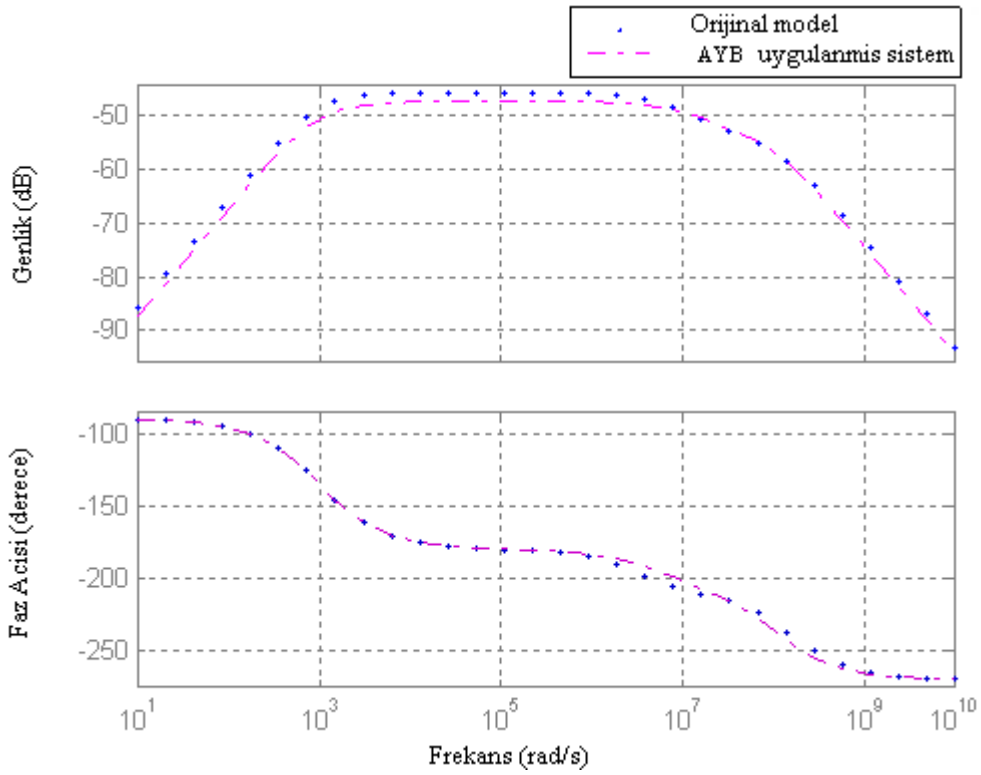
6.11.3 Enerji düzeylerinin karşılaştırılması

AYB uygulanmış sistemin serbestlik derecesi azaldığından genel olarak indirgenmiş bu sistemlerde enerji seviyesi de korunamıyor. Bu nedenle, aktif serbestlik derecelerinin zaman cevapları ve frekans cevaplarını veren Bode diyagramları esas alınarak karşılaştırma yapılmasının daha uygun olduğunu görülmüştür.

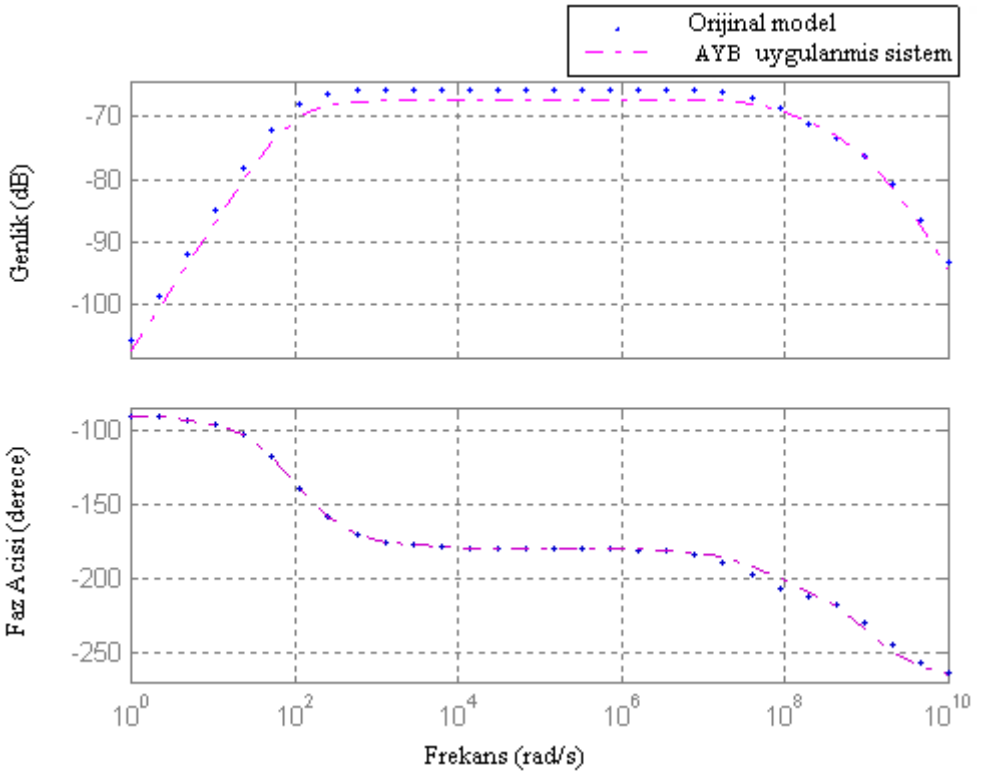
6.11.4 Frekans cevaplarının oluşturulması: Bode Diyagramı ile genlik ve faz açısının frekansa bağlı olarak incelenmesi

Yapısal sistemlerin frekans cevapları sistem ile ilgili önemli bilgiler vermektedir. Frekans cevabının Genlik-Frekans ve Faz açısı-Frekans olarak incelendiği Bode diyagramlarından sistemin düşük ve yüksek frekanslardaki davranışları birlikte görülebilmektedir. Orijinal model ve AYB uygulanarak indirgenmiş sistemlerin zamana bağlı cevaplarının uyum içinde olduğu ve oluşturulan süper elemanların verdiği sonuçların doğruluğu bu kısımda incelenmektedir.

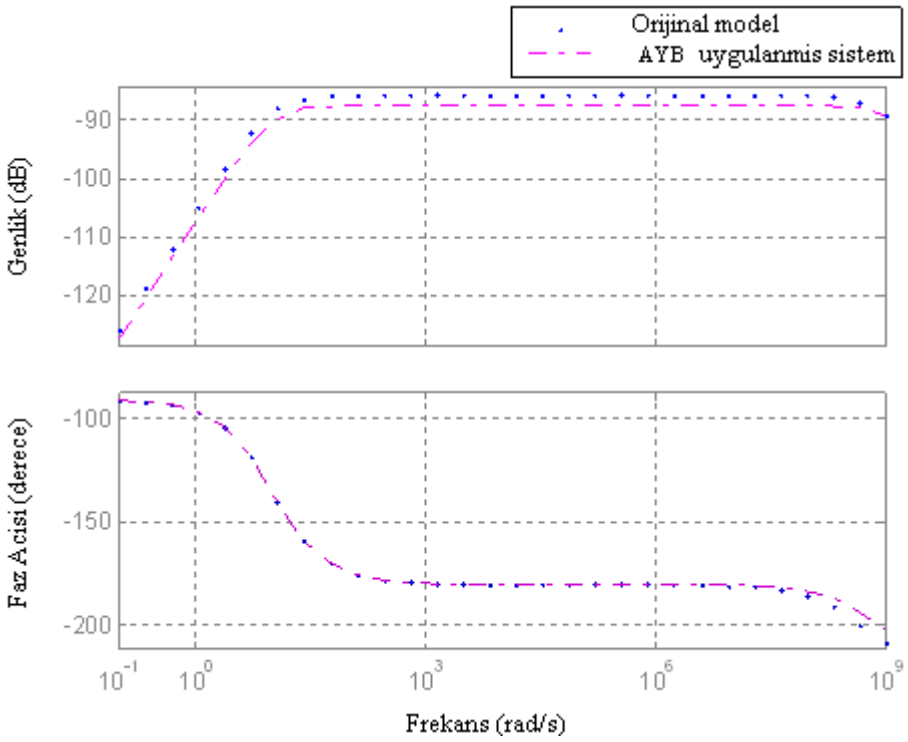
Aşağıda bu çalışmada incelenen AYB uygulanarak elde edilmiş sistemin ve orijinal modelin davranışları Bode diyagramları ile gösterilmiştir. β=0.001, 0.010. 0.100 ve 0.00008 için sistem frekans cevapları, 24 elemanlı düzlemsel plak sistemleri için sırasıyla Şekil 6.39-6.42'de verilmiştir.



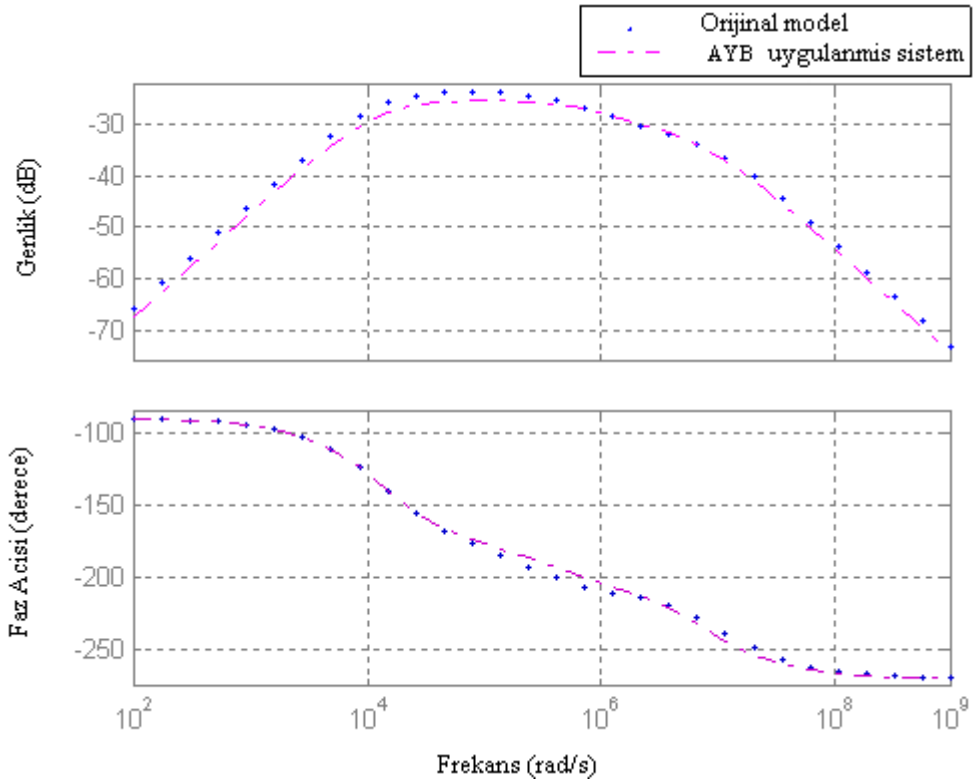
Şekil 6.39 : β=0.001 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması.



Şekil 6.40 : β=0.010 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması.

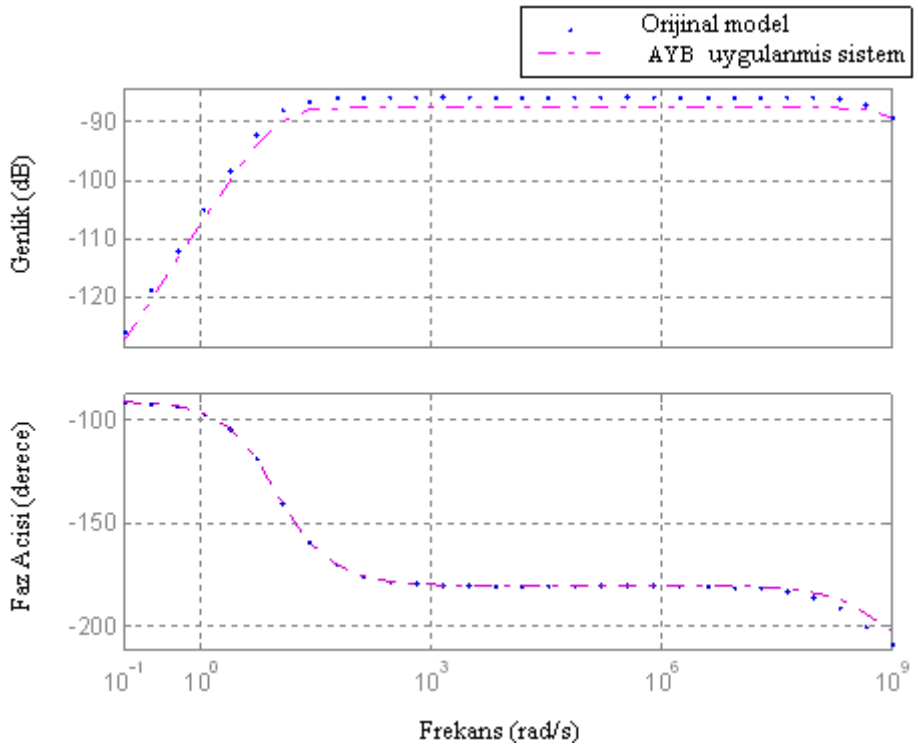


Şekil 6.41 : β=0.100 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması.

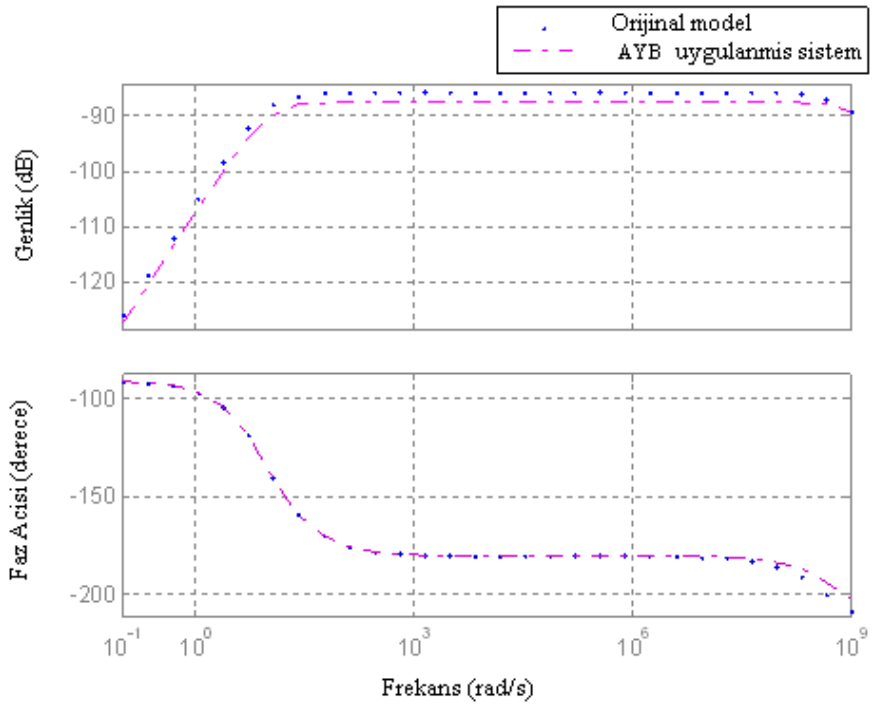


Şekil 6.42 : β=0.00008 için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması.

β=0.100 için sistem frekans cevapları, 60 ve 96 elemanlı düzlemsel plak sistemleri için yine sırasıyla Şekil 6.43 ve 6.44'de verilmiştir.



Şekil 6.43 : β=0.100 için 60 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması.



Şekil 6.44 : β=0.100 için 96 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin Bode diyagramlarının karşılaştırılması.

Genel olarak düşük ve orta frekans değerlerinde uygulanan AYB sonrasında elde edilen indirgenmiş sistemlerin, orijinal model ile benzer frekans cevabını verdiği görülmektedir. Ancak tüm bu sistemlerin genlik değerlerinde bir kazanç hatası

olduğu görülmüştür. Diğer taraftan, AYB uygulanarak indirgenmiş sistemlerin düşük ve orta frekanslarda cevaplarının sadece bu hatayı içermesine rağmen, yüksek frekans değerlerinde aynı başarıyı gösteremediği tespit edilmiştir.

Bu durumda sistemin model derecesi düşürme sonrasında sistem karakterinin frekans uzayında çok değişmediği sonucuna varılmaktadır. Grafiklerde yerel uyumsuzluklar gözlense de benzer karakterde frekans cevapları alındığı kabul edilebilir. Bu da orijinal model ve indirgenmiş sistemin aynı davranışları gösteren sistemler olduklarını göstermektedir.

6.12 AYB Uygulamalarının Değerlendirilmesi

Karşılaştırma çizelgesinden de görüldüğü gibi kiriş ve plak sistemleri için AYB ile oluşturulmuş süper eleman kullanımının hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmakta olduğu görülmektedir. Bu durum, AYB'nin avantajını açık bir şekilde göstermektedir. Diğer önemli nokta da süper eleman oluşturmak için harcanan zamanın herhangi bir MDD uygulanmamış kiriş veya plak sistemi analizinden daha uzun sürmesidir. Bu nedenle, sistem üzerinde oluşturulacak AYB uygulamalarında eleman seçimlerinin tekrarlanacak analiz iterasyonlarında düzeltme yapılmadan kullanımını sağlayacak şekilde seçilmesi ile kaçınılmaz olarak harcanacak AYB oluşturma süresinin toplam çalışma zamanı içindeki payının en aza indirilmesi hedeflenmelidir. Bunların yanında sistemin eleman sayısındaki artışın ve indirgenmiş sistemin indirgenmiş model derecesinde artışın AYB oluşturma süresini uzatmakta olduğu gözlenmiştir. Ayrıca sistemin Rayleigh katılık orantılı sönümünün artması ile AYB oluşturma zamanının az olsa da bir miktar arttığı görülmektedir.

AYB sonuçlarını içeren tüm grafikler incelendiğinde sönümlü sistemlerde AYB ile indirgenmiş sistemlerin cevaplarının orijinal model cevapları ile uyumlu oldukları görülmüştür. AYB uygulaması sonrasında elde edilen tüm indirgenmiş sistem cevapları ve orijinal model cevapları dikkate alındığında sönüm değerindeki artışın sistem cevaplarındaki uyuma olumlu etkisi olduğu sonucuna varılmaktadır.

7. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Yapısal dinamik analiz problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen cevaplarının iyileştirilmesi amacıyla geliştirilen model derecesi düşürme yönteminin sonuçları yapılan örnek analizlerde orijinal modele göre kıyaslanmış ve sonuçların model derecesine bağlı olmadan olumlu neticeler verdiği tespit edilmiştir.

Hazırlanan Matlab kodları ile geliştirilen model derecesi düşürme yöntemi düzlemsel çubuk, kriş ve plak yapılar üzerinde uygulanmış ve alınan sonuçlar, orijinal model ile karşılaştırılmıştır. Yine aynı kod içinde yer alan diğer model derecesi düşürme yöntemlerine –İleri farklar, Newmark integrasyonu ve İmpuls Cevabı İnvaryantı- göre elde edilen sistem cevapları orijinal model cevabı ile karşılaştırılmıştır. Tüm bu karşılaştırmalarda sönüm durumları dikkate alınmış ve farklı model dereceleri için hesaplama zamanları açısından sonuçlar değerlendirilmiştir.

Çalışmada aktif olarak model derecesi düşürülmüş sistemin içine taşınacak serbestlik derecelerinin seçimi için de modal analiz ile elde edilen özdeğerlerin yakın değerlerde olanlarının dikkate alınması temel ölçüt olarak seçilmesi hedeflense de deneme-yanılma yöntemi ile model derecesinin daha çok düşürülebileceği görülmüş ve bu ölçüt çalışmada kullanılmamıştır.

Sistem cevaplarının değerlendirilmesinde tüm MDD yöntemlerinin yakın sonuçlar verdiği, sönüm artıkça orijinal model ile MDD uygulanmış sistemlerin cevaplarının uyum düzeyinin arttığı görülmüştür. Sönümsüz analizlerde tüm MDD yöntemlerinin yeterli hassasiyette cevap vermediği gözlendiği için az sönümlü durumu temsil eden β=0.00008 değeri, sönümsüz durumu temsil etmesi için seçilmiştir.

Öte yandan analiz sonuçları karşılaştırmaları incelendiğinde, kuvvet uygulama noktasının indirgenmiş sisteme dahil edilmediği durumlarda, orijinal model sonuçları ile indirgenmiş sistem cevapları arasında uyumsuzluk olduğu görülmüştür.

Harcanan hesaplama zamanları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve İmpuls Cevabı İnvaryantı yöntemi ile model derecesi düşürülmesi durumunda sönümlü ve sönümsüz halleri dikkate alındığında, eleman

sayısının aynı tutulduğunda sönümün hesaplama zamanında önemli bir etkisi olmadığı görülmüştür. Hesaplama süresi açısından düşük model derecelerinde yöntemler arasında önemli bir farklılık olmadığı ancak model derecesindeki artış ile Toplam Enerjinin Denkliği yönteminin açık bir üstünlük sağladığı gözlemlenmiştir. Ancak IRI yönteminin diğer yöntemlere göre daha fazla hesaplama zamanı kullandığı bu durumun eleman sayısındaki artış ile bir dezavantaja dönüşeceği değerlendirilmiştir.

Ayrıca, IRI yönteminin MDD uygulanmış sistem örneklerinde zaman adımı değişiminden en çok etkilenen MDD yöntemi olduğu ve zaman adımı azaldıkça IRI uygulanmış sistemlerin zaman cevaplarının, orijinal model zaman cevabının daha fazla saptığı görülmüştür. Ayrıca, bu durumda orijinal model ve MDD uygulanmış sistemin enerji seviyeleri farkları artmış olduğu ve Bode diyagramlarındaki uyumun özellikle yüksek frekanslarda bozulduğu görülmüştür.

Çalışmada Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve son olarak IRI yöntemi ile model derecesi düşürme uygulanmış sistemin Orijinal model ve model derecesi düşürülmesi ile elde edilen sistemlerin enerji seviyelerinin karşılaştırmaları yapılarak eşdeğer sistemin uyumu da ayrıca kontrol edilmiştir Yapılan hesaplamaların sağlaması amacıyla da kullanılması düşünülen bu karşılaştırmalar, sönümlü sistemler için tam uyum halinde cevaplar vermektedir. Sönüm azaldıkça uyum seviyesinde azalma görülmektedir. Sönüm azalmasının en çok IRI yöntemi üzerinde etkili olduğu ve IRI ile oluşturulan indirgenmiş sistem cevabının sönümsüz ve az sönümlü analizlerde önemli saplamalar içerdiği gözlenmiştir.

Orijinal model ile farklı yöntemlere göre model derecesi düşürülmüş sistemlerin frekans cevaplarının Bode diyagramları üzerinde karşılaştırmaları sönüm durumu dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Burada model derecesi düşürme sonrasında elde edilen sönümlü sistemlerin hem düşük ve hem de yüksek frekanslarda orijinal model ile aynı frekans cevabını verdiği görülmektedir. Bu durumda sistemin model derecesi düşürme sonrasında sistem karakterinin değişmediği sonucuna varılmaktadır. Sönümsüz sistemlerde alınan cevapların karşılaştırılmasında yerel olarak uyumsuzluk gözlemlense de benzer karakterde frekans cevapları alındığı kabul edilmiştir.

Çalışmada geliştirilen MDD yöntemleri, çubuk, kiriş ve plak elemanlardan oluşturulan farklı sistemler üzerinde uygulanmıştır. Hazırlanan Matlab kodu ile yeni yaklaşımların cevabının orijinal sistem cevabından ve literatürde bulunan MDD yöntemlerinden üstünlüğü incelenmiştir. Yapılan karşılaştırmalarda karşılaştırma ölçütleri olarak, farklı sönüm değerleri için sistem cevapları, sistem enerji seviyeleri, hesaplama süreleri ve Bode diyagramları kullanılmıştır. Tüm karşılaştırma ölçütlerine göre bu çalışmada geliştirilmiş MDD yönteminin başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür. Yapılan analizleri doğrulamak için, uygulamalardaki sistemlerin yapısal dinamik analizlerin çözümünde oldukça yaygın olarak kullanılmakta olan ticari kodlardan ANSYS'de analizi yapılması amaçlanmıştır. Ancak ANSYS'den alınan sonuçların sönüm değişimlerinden çok etkilenmesi ve nispeten daha basit yöntemlerden biri olan Guyan/Irons metodu ile dinamik analiz yapması nedeniyle güvenilir olmayan sonuçlar alınması dolayısıyla çubuk sistem dışında ANSYS sonuçlarına çalışma içinde yer verilmemiştir. Farklı yöntemlerden elde edilen sistem cevaplarının doğrulamak için Bode diyagramlarının uyumu temel ölçüt olarak alınmıştır.

Genel olarak indirgenme yapılacak sistemde tutulacak serbestlik derecelerinin kuvvet uygulama noktasının yakınında seçilmesi ile alınan sistem cevaplarının orijinal model cevaplarına yakınlığı arttığı gözlemlenmiştir.

Çubuk sistem uygulamalarında hem zaman hem de frekans cevapları ile enerji seviyesi karşılaştırmalarında mükemmel sonuçlar alınmıştır. Aynı zamanda çubuk sistemin MDD derecesi, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi kullanılarak şimdiye kadar literatürde karşılaşılan seviyelerin altına indirilmiştir.

MDD ile elde edilen sistemlerin özdeğerleri ve özvektörlerinin orijinal model ile aynı olmadığı durumlarda bile aynı sistem cevapları elde edilebilmektedir. Bu nedenle, yeterli mertebede bir sistem cevap doğruluğu alınabilmesi için farklı denemelerin yapılması ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Çalışmada çok sayıda deneme yapılmış ve orijinal modelin özdeğerleri ile uyumlu özdeğer sonuçları veren indirgenmiş sistemlerin cevaplarında da orijinal model ile uyum olduğu görülmüştür. Buna göre, sistem indirgemesi yapılmasından hemen sonra uygulanacak özdeğer karşılaştırmasının indirgenmiş sistem cevapları hakkında önemli fikir vereceği tespit edilmiştir. Böylece uygun olmayan indirgenmiş sistemlerin analizleri için harcanacak zamandan tasarruf sağlanmış olacaktır. Ancak, bu yapılırken indirgenmiş sistem SD

seçimleri, model derecesinin daha fazla düşürülmesine imkan sağlaması şartı ile deneme-yanılma yaklaşımı ile herhangi bir genel kriter kullanılmadan gerçekleştirilebileceği sonucuna varılmıştır.

Kiriş elemanda her bir düğüm noktasındaki ilk serbestlik derecelerinin yok edilmesi sonrasında elde edilen indirgenmiş sistemlerin cevabının orijinal model cevabı ile aynı olduğu görülmüştür. Bu durumun temel nedeni olarak, kiriş örnek uygulamasında kuvvetin ikinci serbestlik derecesi olan düşey yönde olmasının etkili olduğu tespit edilmiştir.

Kiriş uygulamasında ankastre bağlı uca yakın yerlerdeki ikinci serbestlik derecelerinin MDD uygulanmış sisteme dahil edilmediği durumlarda da yeterli yaklaşıklıklarda sistem cevapları alınmıştır. Bu durum çok sayıda eleman içeren sistemlerde ilave bir indirgenme imkanı ortaya çıkarmaktadır. Bu durumun kiriş sistemin serbest ucuna uygulanan kuvvetin yarattığı eğim etkisinin nispeten az olmasından kaynaklandığı sonucuna varılmıştır. Aynı şekilde her bir düğüm noktasının üçüncü serbestlik dereceleri incelendiğinde bu eğim etkisinin ankastre bağlı kirişin serbest ucundan uzaklaştıkça bu serbestlik derecelerinde de indirgenme uygulama imkanının arttığı tespit edilmiştir. Hatta belirtilen bölgelerde üçüncü serbestlik derecelerinin ikincilerden daha az sapma ile ihmal edileceği görülmüştür.

Analizi yapılan sistemde kullanılan eleman tipinin içerdiği serbestlik derecesi miktarı azaldıkça beklenen doğruluk mertebesi bozulmadan MDD uygulanırken ihmal edilebilecek serbestlik derecelerinin sayısını artmakta ve dolayısıyla indirgenmiş sistem mertebesi de azalmaktadır. Bu durum her bir düğüm noktasında 2 serbestlik derecesi içeren çubuk eleman'da elde edilen 1000'den 20'ye düşürme imkanı varken her bir düğüm noktasında 3 serbestlik derecesi içeren kiriş eleman için bu imkan 300'den 148'e düşürme ile sınırlı kalmaktadır. Dolayısıyla eleman başına içerdiği serbestlik derecesinin az olan yani karmaşık olmayan sistemlerin indirgenmesi, eleman başına çok sayıda serbestlik derecesine sahip sistemlerden daha kolay olmaktadır. Bunun sonucu olarak indirgenebilecek model derecesi belirleyen etkenlerden birisi olarak sistem eleman tipinin sayılması gerekmektedir.

Plak uygulamasında hem zaman hem de frekans cevapları ile enerji seviyesi karşılaştırmalarında çok iyi sonuçlar alınmıştır.

Uygulamalarda incelenen yapıların sönümlü ve sönümsüz davranışlarının seçilen eleman sayısından etkilenmediği sonucuna varılmaktadır. Ayrıca diğer MDD yöntemlerinde artan eleman sayısına bağlı olarak hızla artan gerekli hesaplama zamanına, çalışmada geliştirilen Toplam enerjilerin denkliği yönteminde daha az ihtiyaç duyulmaktadır.

Bode diyagramları tüm örnek MDD uygulamaları için başarılı sonuçlar vermiştir. Çubuk sistem örneği sonrasındaki uygulamalarda Bode diyagramları indirgenmiş sistemlerin davranışlarının orijinal model davranışları ile karşılaştırılması amacıyla temel ölçüt olarak alınmıştır. Tüm örnek MDD uygulamaları için sistem cevaplarında uyumlu sonuçlar alındığında Bode diyagramlarında da uyumlu sonuçlar alınmıştır. Bu sonuç, çalışmada geliştirilen Toplam enerjilerin denkliği MDD yönteminin ne kadar doğru çalıştığının temel göstergesi durumundadır.

MDD yöntemlerinin en ciddi alternatifi olan AYB yöntemi de çalışma içinde incelenmiş, farklı eleman sayısında ve farklı sönüm durumları için kiriş ve plaka sistemleri için uygulamalar gerçekleştirilmiş, sonuçlar orijinal modeller ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalarda dikkat çeken ilk husus, kiriş sistemi için AYB ile oluşturulmuş süper eleman kullanımının hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmasıdır. Bu durum AYB'nin avantajlı noktasını açık bir şekilde göstermektedir. Ancak, süper eleman oluşturmak için harcanan zamanın herhangi bir MDD uygulanmamış kiriş sistemi analizinden daha uzun olması nedeniyle, AYB uygulamalarında eleman seçimlerinin tekrarlanacak analiz iterasyonlarında düzeltme yapılmadan kullanımını sağlayacak şekilde seçilmesi kaçınılmaz bir gereklilik olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmanın özgün katkıları şu şekilde özetlenebilir: Geliştirilen toplam enerjilerin denkliği ve özdeğer probleminin çözümü MDD yöntemlerinin performanslarının sönüm ve zamana bağlı değişimleri farklı şekillerde olan (örneğin, impuls, basamak ve sinüs bileşenleri) yüklemelere göre incelenmiştir. Tüm bu incelemelerde geliştirilen yöntemler, literatürde var olan İleri farklar, Newmark ve IRI yöntemleri ile elde edilen indirgenmiş sistem cevapları ile ve orijinal model cevapları ile karşılaştırılmış, uyumluluğu araştırılmıştır. Bunu sonucunda şu sonuçlara varılmıştır: Özdeğer probleminin çözümü yöntemi Toplam Enerjilerin denkliği yöntemi ile aynı sonuçları vermektedir. Sönüm azaldıkça ve kuvvetin zamanla değişimi hızlandıkça doğruluk azalmaktadır. Ayrıca, toplam enerjilerin denkliği yönteminin uygulanan

tüm eleman tiplerinde orijinal model cevaplarına uyumlu sistem cevabı verdiği görülmüştür. Ayrıca, incelenen MDD yöntemlerinin alt yapılara bölme-AYB algoritmalarına göre daha uygun zamanda hesaplama sonucu verdikleri gözlemlenmiştir. Ancak, AYB ile oluşturulan süper elemanların analizler içinde kullanılmasının MDD'den daha kısa sürede sonuç alınmasını sağladığı tespit edilmiştir. Sonuçların doğruluğunun eleman sayısındaki çoğalma ile arttığı görülmüştür. Ayrıca, frekans cevaplarının karşılaştırılması sonucu çalışma içinde geliştirilen MDD yöntemlerinin en uyumlu sonuçları verdiği görülmüştür. Sonuç olarak, incelenen yaklaşımların başarılı oldukları görülmüştür.

Çalışmada incelenen MDD yönteminin geliştirilmesi amacıyla gelecekte yapılmasının yararlı olacağı bazı noktalar da mevcuttur. Öncelikle, her bir eleman tipi için orijinal model ile uyumlu sonuçlar veren en düşük model derecelerinin bulunması yolu ile MDD uygulamalarının başarılı olduğu sınırların tespit edilmesi mümkündür. Çalışmada ele alınan örnek uygulamalardaki eleman tipleri haricinde 3 boyutlu katı eleman için de Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, orijinal model ve diğer MDD yöntemleri ile karşılaştırılabilir. Örnek uygulamalarda verilen sistemlerin gerçek modelleri üzerinde deneysel sonuçlar toplanarak analizler için doğrulama ve korelasyon çalışmaları da yapılabilir. Geliştirilen MDD yönteminin Mekatronik bilim dalında incelenen sistemlerde de kullanılması mümkündür.

Ayrıca geliştirilen MDD yönteminin uzun hesaplama zamanı isteyebilecek çok elemanlı ve/veya karmaşık modeller üzerinde de başarılı olduğunun ispat edilmesinde yöntem güvenilirliği açısından fayda görülmektedir. İlave olarak, Toplam enerjilerin denkliği yönteminin düşük sönüm katsayısı değerlerinde orijinal sistem cevaplarına daha uyumlu cevaplar verebilmesinin yolları araştırılabilir. Yöntemin model derecesi düşürmedeki başarısının daha iyi görüldüğü az sayıda düğüm noktası içeren eleman tiplerinin karmaşık sistemlerin modellenmesinde kullanılması imkanları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Petyt, M.,** 1998. Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, UK.

[2] **Gu, J.,** 2000. Efficient Model Reduction Methods for Structural Dynamics Analyses, *PhD Thesis*, Michigan University, USA.

[3] **Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov**, **V.,** 1986. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA.

[4] **Hughes, T. J. R.,** 1987. The Finite Element Method, Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

[5] **Heidari, M. A., Carlson D. L. and Yantis, T.,** 2001. Rotor-dynamics analysis process, *MSC Conf., 2002*, USA.

[6] **Willcox, K., and Peraire, J.,** 2002. Application of reduced-order aerodynamic modelling to the analysis of structural uncertainty in bladed disks, *Proc. ASME TURBO EXPO 2002*, Amsterdam, The Netherlands.

[7] **Blair, M. A., Camino, T. S. and Dickens, J. M.,** 1991. An Iterative Approach to a Reduced Mass Matrix, *Proc. 9th International Modal Analysis Conference, Floransa,Italy,* 621-626.

[8] **Bouhaddi, N. and Fillod, R.,** 1992. Substructuring Using a Linearized Dynamic Condensation Method, *Computers and Structures,* **45**, 679-683.

[9] **Frishwell, M. I., Garvey, S. D. and Penny, J. E. T.,** 1995. Model Reduction Using Dynamic and Iterated IRS Techniques, *Journal of Sound and Vibration,* **186**, 311-323.

[10] **Guyan, R. J.,** 1965. Reduction Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal,* **3**, 380.

[11] **Irons, B. M.,** 1965. Structural Eigenvalue Problems: Elimination of Unwanted Variables, *AIAA Journal,* **3**, 961-962.

[12] **Kidder, R. L.,** 1973. Reduction of Structural Frequency Equations, *AIAA Journal,* **11**, 892.

[13] **Leung, A. Y. T.,** 1988. A Simple Dynamic Substructure Method, *Earthquake Engineering and Stuctural Dynamics,* **16**, 827-837.

[14] **O'Callahan, J.,** 1989. A Procedure for an Improved Reduced System (IRS) Model, *Proc. 7th International Modal Analysis Conference*, Las Vegas, USA, 17-21.

[15] **Bislinghoff, R. L. and Ashley, H.,** 1995. Aeroelasticity, Addison-Wesley, USA.

[16] **Maddox, N. R.,** 1975. On the number of Modes Necessary for Accurate Response and Resulting Forces in Dynamic Analysis, *ASME Journal of Applied Mechanics,* **42**, 516-517.

[17] **Ma, Z. D. and Hagiwara, I.,** 1991. Sensitivity Analysis Method for Coupled Acoustic-structural System Part I: Modal Sensitivities, AIAA Journal, **29**, 1787-1795.

[18] **Ma, Z. D. and Hagiwara, I.,** 1991. Sensitivity Analysis Method for Coupled Acoustic-structural System Part II: Direct Frequency Response and its Sensitivities, *AIAA Journal,* **29**, 1796-1801.

[19] **Ma, Z. D. and I. Hagiwara**, 1991. Improved Mode-superposition Technique for Modal Frequency Response Analysis of Coupled Acoustic-structural Systems, *AIAA Journal,* **29**, 1720-1726.

[20] **Shyu, W. H., Gu, J., Ma, Z. D. and Hulbert, G. M.,** 2000. On the Use of Multiple Quasi-static Mode Compensation Sets for Component Mode Synthesis of Complex Structures, *Finite Elements in Analysis and Design,* **35**, 119-140.

[21] **Shyu, W. H., Ma, Z. D. and Hulbert, G. M.,** 1997. A New Component Mode Synthesis Method: Quasi-static Model Compensation, *Finite Elements in Analysis and Design,* **24**, 271-281.

[22] **Balmes, E.,** 1998. Efficient sensitivity analysis based on finite element model reduction, *Proc. IMAC 1998*, Santa Barbara, USA.

[23] **Gu, J., Ma, Z. D. and Hulbert, G. M.,** 2000. A New Load Dependant Ritz Vector Method for Structural Dynamic Analyses: Quasi-static Ritz Vector Method, *Finite Element in Analysis and Design,* **36**, 261-278.

[24] **Joo, K. J., Wilson, E. L. and Leger, P.**,1989. Ritz Vectors and Generation Criteria for Mode Superposition Analysis, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **18**, 149-167.

[25] **Lanczos, C.**, 1950. An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue problem of Linerar Differential and Integral Operators, *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* **45**, 252-282.

[26] **Leger, P.,** 1988. Load Dependent Subspace Reduction Methods for Structural Dynamic Computations, *Computers and Structures,* **29**, 993-999.

[27] **Leger, P.,** 1989. Application of Load-dependent Vectors Bases for Dynamic Substructure Analysis, *AIAA Journal,* **28**, 177-179.

[28] **Leger, P., Wilson, E. L. and Clough, R. W.,** 1986. The Use of Load Dependent Vectors for Dynamic and Earthquake Analyses, *Earthquake Engineering Research Center Report*, **UCB/EERC-86/04**, University of California, Berkeley, USA.

[29] **Corus, M. and Balmes, E.,** 2004. A priori verification of local FE model based force identification, *Proc. ISMA 2004*, Leuven, Belgium.

[30] **Nour-Omid, B. and Cough, R. W.,** 1984. Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates, *Earthquake Engineering and Strutural Dynamics,* **12**, 565-577.

[31] **Nour-Omid, B. and Cough, R. W.,** 1985. Block Lanczos Method for Dynamic Analyses of Structures, *Earthquake Engineering and Strutural Dynamics,* **13**, 271-275.

[32] **Wilson E. L. and Bayo, E. P.** 1986. Use of Special Ritz Vectors in Dynamic Structure Analysis, *Journal of Structural Engineering,* **112**, 144-153.

[33] **Wilson, E. L., Yuan, M. W. and Dickens, J. M.**, 1982. Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **10**, 813-821.

[34] **Balmes, E.,** 1996. Superelement representation of a model with frequency dependant properties, *Proc. ISMA 1996*, Leuven, Belgium.

[35] **Beards, F.,** 1996. Structural vibration: analysis and damping, Arnold, London, England.

[36] **Corus, M., Sauvage, O., and Balmes, E.,** 2008. Estimation of transmitted loads using experimental substructuring, *Proc. IMAC 2008*, Orlando, USA.

[37] **Craig, R. R.,** 2000. A brief tutorial on substucture analysis and testing, *IMAC-XVIII 2000,* San Antonio, USA.

[38] **Craig, R. R.,** 2000. Coupling of substructures for dynamic analyses: an overview, *AIAA Dynamics Specialists Conference*, Paper No. 2000-1573.

[39] **De Gersem, H., Mones, D., Desmet, D. and Vandepitte, D.,** 2006. Dynamic interval analysis of FE models with uncertian substructures, *Proc. ISMA 2006*, Leuven, Belgium, 4077-4089.

[40] **Giuseppina, A.,** 2004. Modelling and active vibration control of aeronautical flexible structure, *PhD Thesis,* Seconda Univertsita Degli Studi di Napoli, Italia.

[41] **Kyrychko, Y. N., Hogan, S.J., Gonzalez-Buelga, A. and Wagg, D. J.,** 2007. Modeling real-time dynamic substructuring using delay differential equations, *Proc. The Royal Society A,* London, UK.

[42] **Rixen, D.,** 2005. Domain decomposition and dynamic substructuring, *DCSE Symposium*, Delft, The Netherlands.

[43] **Wallace, M.I., Sieber, J., Neild, S.A., Wagg, D. J. and Krauskopf, B.**, 2004. Stability analysis of real-time dynamic substructuring using delay differential equation models, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.

[44] **Wang, X. and Mills, J.,** 2004. Substructuring dynamic modelling and active vibration control of a smart parallel platform, *Proc. IMECE 2004*, California, USA.

[45] **Cunedioğlu, Y.,** 2005. Yapıların Dinamik İndirgenmiş Modellerinin ve Süpereleman Tekniklerinin Frekans ve Zaman Uzaylarında Analizi, *Doktora Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[46] **Feriani, A., Perotti, F. and Simoncini, V.,** 2000. Iterative system solvers for the frequency analysis of linear mechanical systems, *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, **13-14**, 1719-1739.

[47] **Balmes, E.,** 1996. Use of generalized interface degress freedom in component mode synthesis, *Proc. IMAC 1996*, Dearborn-Michigan, USA.

[48] **Balmes, E., Ravary, F., and Langlais, D.,** 2004. Uncertainty propagation in modal analysis, *Proc. IMAC 2004*, Detroit-Michigan, USA.

[49] **Kergourlay, G., Balmes, E. and Clouteau, D.,** 2000. Model reduction for efficient FEM/BEM coupling, *Proc. ISMA 2000*, Leuven, Belgium.

[50] **Balmes, E.,** 2008. Modes and regular shapes- a perspective on CMS theory, *Proc. IMAC 2008*, Orlando, USA.

[51] **Germes, S. and Van Herpe, F.,** 2002. Model reduction and substructuring for computing responses of structures containing frequency-dependent viscoelastic materials, *SPIE's 9th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials,* San Diego, USA.

[52] **Plouin, A-S., and Balmes, E.,** 2000. Steel/viscoelastic/steel sandwich shells computational methods and experimental validations, *Proc. IMAC 2000*, San Antonio-Texas, USA.

[53] **Balmes, E., Corus, M., and Siegert, D.,** 2006. Modeling thermal effects on bridge dynamic responses, *Proc. IMAC 2006*, St. Louis Missouri, USA.

[54] **Greiner, A., Lienemann, J., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G.,** 2004. Automatic order reduction for finite element models, *Proc. AISEM 2004,* Ferrara, Italy.

[55] **Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G.,** 2004. Generating compact models directly from ANSYS models, *Proc. Nanotechnology Conference*, Boston, USA.
[56] **Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G.,** 2006. Model order reduction for large scale engineering models developed in ANSYS, *Computer Science,* **3732,** *349-356.*
[57] **Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G.,** 2006. Model order reduction for large scale finite element engineering models, *Proc. ECCOMAS CDF 2006,* Delft, The Netherlands.
[58] **Balmes, E. and Laurent, B.,** 2001. Using expansion and interface reduction to enhance structural modification methods, *Proc. IMAC 2001*, Kissimmee-Florida, USA.
[59] **Balmes, E.,** 1998. Predicted variability and differences between tests of a single structure, *Proc. IMAC 1998*, Santa Barbara, USA.
[60] **Sternchuss, A. and Balmes, E.,** 2006. On the reduction of quasi-cyclic disk models with variable rotation speeds, *Proc. ISMA 2006*, Leuven, Belgium.
[61] **Corus, M. and Balmes, E.,** 2003. Improvement of a structural modification method using data expansion and model reduction techniques, *Proc. IMAC 2003*, Orlando, USA.
[62] **Brüls, O.,** 2005. Integrated simulation and reduced-order modeling of controlled flexible multibody systems, *PhD Thesis,* Universite de Liege, France.
[63] **Bobillot, A. and Balmes, E.,** 2001. Solving minimum dynamic residual expansion and results for error localization, *Proc. IMAC 2001*, Kissimmee-Florida, USA.
[64] **Han, J. S., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G.,** 2004. Efficient optimization of transient dynamic problems for a micro accelerometer using model order reduction, *Proc. 47 ICTAM 15-21 August 2004,* Warsow, Poland.
[65] **Balmes, E.,** 2007. Methods for vibration design and validation, Ecole Centrale Paris, Paris, France.
[66] **Park, J. G.,** 2003. Vibration Simulation Using Matlab, Kyoto University, Japan.
[67] **Burns, R. S.,** 2001, Advanced Control Engineering, Butterworth-Heinemann.
[68] **Cook**, **R. D.,** 1995. Finite Element Modeling for Stress Analysis, John Wiley& Sons Inc., USA.
[69] **Gildin, E.,** 2006. Model and controller reduction of large-scale structures based on projection methods, *PhD Thesis,* The University of Texas at Austin, USA.
[70] **Franklin, G. F., Powell, J. D. and Emami-Naeini**, **A.,** 1986. Feedback Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
[71] **Reddy, J. N.,** 1993. An introduction to the finite element method, McGraw-Hill Inc., Singapore.
[72] **Schiff, D.,** 1990. Dynamical Analysis and Failure Modes of Simple Structures, John Wiley& Sons Inc., USA.
[73] **Balmes, E. and Germes, S.,** 2000. Tools for viscoelastic damping treatment design-application to an automotive floor panel, *Proc. ISMA 2000*, Leuven, Belgium.
[74] **Lazan, B.,** 1968. Damping of materials and members in structural mechanics, Pergamon, New York, USA.

[75] **Roy, N., Germes, S., Lefebvre, B. and Balmes, E.,** 2006. Damping allocation in automotive structures using reduced models, *Proc. ISMA 2006*, Leuven, Belgium.

[76] **Balmes, E.,** 2003. Damping and complex modes, *Proc. IMAC 2003*, Kissimmee-Florida, USA.

[77] **Balmes, E., and Bobillot, A.,** 2002. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials, *Proc. IMAC 2002*, Los Angeles, USA.

[78] **Balmes, E. and Leclere, J.,** 2006. Viscoelastic Vibration Toolbox, SDTools, Paris, France.

[79] **Bert, C. W.,** 1973. Material damping: an introductory review of mathematical models, measures and experimental techniques, *J. Sound and Vibration,* **29,** *129-53.*

[80] **Ungar, E. E.,** 1973. The status of engineering knowledge concerning the damping of built-up structures, *J. Sound and Vibration,* **26,** *141-54.*

[81] **Balmes, E.,** 1997. Model reduction for systems with frequency dependant damping properties, *Proc. IMAC 1997*, Orlando, USA.

[82] **Moaveni, S.,** 2003. Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS, Pearson Education Inc, New Jersey, USA.

[83] **Felippa, C. A.,** 2001. Introduction to Finite Element Methods, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, USA.

[84] **Muğan, A.,** 2003. Discrete equivalent time integration methods, for transient analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **57**, 2043-2075.

[85] **Url-1** <*http://www.dermotmonaghan.com/feInformation/fasterAnalyses/ subStructuring.php mohid.com*> alındığı tarih 25.06.2007.

[86] **Liao, B.-S. , Bai, Z. and Gao, W.,** 2006. The important modes of subsystems: a moment-matching approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

[87] **Liao, B.-S. and Bai, Z.,** 2006. Towards an Optimal Substructuring Method for Model Reduction, *Springer Lecture Notes in Computer Science,* **3732**, 276-285.

[88] **Liao, B.-S., Bai, Z. and Gao, W.,** 2005. (Sub)optimal mode selection for modal reduction of subsystems, SIAM Annual Meeting.

[89] **Liao, B.-S., Bai, Z. and Gao**, **W.,** 2005. Optimal Mode Selection for Substructuring Method, Poster presentation, 2005 Bay Area Scientific Computing Day.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	**: Fikret Kamil ÇORBACI**
Doğum Yeri ve Tarihi	**: Bakırköy – 1971**
Lisans Öğrenimi	**: İTÜ Makina Fakültesi Makina Müh. Böl. - 1992.**
Yüksek Lisans Öğrenimi	**: İTÜ Fen Bil. Enst. Makina A.B.D. Konstrüksiyon Programı – 1995.**
Görevleri	**: 1994-1995 yıllarında İ.T.Ü. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü Konstrüksiyon A.B.D'de ve 1995-1999 yılları arasında İ.T.Ü. Mimarlık Fakültesi Endüstri Ürünleri Tasarımı Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak hizmet vermiştir. 1999-2002 yıları arasında Uzel Makina San. A.Ş.'de ürün geliştirme mühendisi olarak çalışmıştır. 2002 yılında katıldığı TEI-TUSAŞ Motor San. A.Ş.'nde halen tasarım mühendisi olarak TP400 turboprop motor tasarımı projesinde çalışmaktadır.**