TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONİ METRİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

İlker ŞAHİN

DOKTORA TEZİ

ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ
ANABİLİM DALI

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ

2009

EDİRNE

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmada, koni metrik uzaylarda belirli koşulları sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilmiş ve bazı genellemeler elde edilmiştir.

Birinci bölümde, fonksiyonların sabit noktaları ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, koni metrik uzay yapısı ve bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, koni metrik uzaylarda bir dönüşüm için sabit nokta teoremleri ve sonuçları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, koni metrik uzaylar üzerinde tanımlı dönüşümlerin ortak sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, koni normlu uzaylar tanımlanmış ve bu uzaylarda Ishikawa iterasyon yöntemi kullanılarak sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this study which consists of five chapters, the fixed point theorems for mappings satisfying certain conditions in cone metric spaces are given and some generalizations are obtained.

In the first chapter, the knowledge about the fixed points of functions are given.

In the second chapter, the structures of cone metric spaces and some fundamental properties of them are obtained.

In the third chapter, the fixed point theorems and their results for one mapping in cone metric spaces are given.

In the fourth chapter, the common fixed point theorems for mappings which are defined on cone metric spaces are studied.

In the fifth chapter, the cone normed spaces are defined and the fixed point theorem is obtained by using Ishikawa iteration method in cone normed spaces.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında matematiksel bakış açısını, bilgisini, öngörüsünü ve tecrübesini benimle paylaşan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa TELCİ'ye, en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bana her türlü desteği veren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET……..i
ABSTRACT……..ii
ÖNSÖZ…….iii
İÇİNDEKİLER…….iv

I. BÖLÜM / GİRİŞ……1

1.1 Fonksiyonların Sabit Noktaları……...……...……1
1.2 Sabit Nokta Teorisine Giriş……3

II. BÖLÜM / KONİ METRİK UZAYLAR……..6

2.1 Banach Uzaylarında Koniler……...……...6
2.2 Koni Metrik Uzaylar…….10
2.3 Koni Metrik Uzaylarda Tamlık……12
2.4 Koni Metrik Uzaylarda Fonksiyonların Sürekliliği……..17
2.5 Dizisel Kompakt Koni Metrik Uzaylar……18

III. BÖLÜM / KONİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ……21

3.1 Daraltan Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri……....……21
3.2 Tam Koni Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri…….23
3.3 Dizisel Kompakt Koni Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri……..38

IV. BÖLÜM / KONİ METRİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLERİN ORTAK SABİT NOKTALARI……..44

4.1 Daraltan Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri……...…....44
4.2 Genişleme Tipindeki Dönüşümler İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri……51

4.3 İki Koni Metrik Uzay Üzerinde Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri ……54
4.4 Zayıf Bağdaşık Dönüşüm Çiftleri İçin Ortak Sabit Nokta Teoremleri……59

V. BÖLÜM / KONİ NORMLU UZAYLAR VE DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI……..68

5.1 Koni Normlu Uzaylar……..68
5.2 Koni Normlu Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri……69

KAYNAKLAR……77

ÖZGEÇMİŞ……...…..81

I. BÖLÜM

GİRİŞ

1.1 FONKSİYONLARIN SABİT NOKTALARI

1.1.1 Tanım : X boş kümeden farklı herhangi bir küme, T de X den X e tanımlı bir fonksiyon olsun. $T(x)=x$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ noktasına T nin ***sabit noktası*** denir.

Diğer bir deyişle, T nin bir sabit noktası

$$T(x)=x \qquad (x \in X)$$

denkleminin bir çözümüdür.

T fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi F_T ile gösterilecektir.

1.1.2 Tanım : X boş kümeden farklı herhangi bir küme, S ve T X den X e tanımlı iki dönüşüm olsun. Eğer $S(x)=T(x)$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa x ' e, S ve T nin ***çakışık noktası*** denir. S ve T nin çakışık noktalarının kümesi $C_{S,T}$ ile gösterilecektir.

Eğer $S(x)=T(x)=x$ ise $x \in X$ noktasına S ve T nin ***ortak sabit noktası*** denir. S ve T nin ortak sabit noktalarının kümesi $F_{S,T}$ ile gösterilecektir.

1.1.3 Örnekler :

1) $T : IR \to IR,\ T(x)=x+a \quad (a \neq 0)$ ise $F_T = \emptyset$ dir.

2) $T : IR \to IR,\ T(x)=x^2+5x+4$ ise $F_T = \{-2\}$ dir.

3) $T : IR \to IR,\ T(x)=x^2-x$ ise $F_T = \{0,2\}$ dir.

4) $T : IR \to IR,\ T(x)=x$ ise $F_T = IR$ dir.

1.1.4 Tanım : $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için

$$T^0(x) = x \quad \text{ve} \quad n \geq 1 \quad \text{için} \quad T^{n+1}(x) = T\left(T^n(x)\right)$$

biçiminde tanımlanan $T^n(x)$' e x in T altındaki ***n. iterasyonu*** denir. Kolaylık açısından $T(x)$ yerine, Tx kullanılacaktır.

$n \geq 1$ için T^n dönüşümüne, T nin ***n. iterasyonu*** denir.

Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

biçiminde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine, x_0 başlangıç değeri ile oluşturulmuş ***Picard iterasyon dizisi*** denir.

1.1.5 Not : $T : X \to X$ dönüşümü verildiğinde,

(a) $F_T \subset F_{T^n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$ dir.

(b) Eğer $F_{T^n} = \{x\}$ ise (a) nın tersi doğru olur. Yani $F_T = \{x\}$ dir.

Gerçekten, $T^n x = x$ olsun. $T^n(Tx) = T\left(T^n x\right) = Tx$ dir. Yani Tx, T^n nin bir sabit noktasıdır. $F_{T^n} = \{x\}$ olduğundan $Tx = x$ olur.

F_{T^n} nin eleman sayısı birden fazla ise (a) nın tersi genelde doğru değildir.

1.1.6 Örnek : $T : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ dönüşümü $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ biçiminde tanımlansın. O zaman $F_{T^2} = \{1, 2, 3\}$ olmasına karşın $F_T = \{2\}$ dir.

Fonksiyonların sabit noktaları, analizdeki varlık teoremlerinde önemli bir rol oynar. Örneğin, P bir kompleks polinom olmak üzere, $P(z) = 0$ denkleminin çözümü $z \to z - P(z)$ dönüşümünün bir sabit noktasını bulmaya denktir. Daha genel olarak, eğer D bir vektör uzayının bir alt kümesi üzerinde herhangi bir operatör olduğunda $Du = 0$ $\left(u - \lambda Du = 0, \ \lambda \in IK\right)$ ın çözüme sahip olması $u \to u - Du$ $\left(u \to \lambda Du\right)$ dönüşümünün sabit noktaya sahip olmasıyla aynı anlama gelir.

Analizdeki varlık teoremlerindeki gibi, bir dönüşüm üzerindeki veya onun tanım kümesi üzerindeki koşullar, bir sabit noktanın varlığını garanti etmede rol

oynayabilirler. Yani sabit nokta teorisi, $T : X \to X$ dönüşümünün özelliklerinin yanı sıra X kümesinin yapısı üzerinde bulunan koşullarla da yakından ilgilidir.

Genel olarak bu çalışmada koni metrik uzaylarda;

(i) Verilen bir T dönüşümünün en az bir sabit noktasının var olması için T ne tür koşulları sağlamalı dır ?

(ii) T dönüşümünün sabit noktasının varlığını garanti etmek için X kümesi üzerine hangi ek koşullar yüklenebilir ?

(iii) T dönüşümü ile oluşturulan iterasyon dizisinin yakınsaklığı hakkında ne söylene bilir ?

soruları araştırılmıştır.

1.2 SABİT NOKTA TEORİSİNE GİRİŞ

Analize giriş derslerinden;

" $a,b \in IR$ *olmak üzere* $f : [a,b] \to [a,b]$ *tanımlı her sürekli fonksiyonun* $[a,b]$ *üzerinde daima en az bir sabit noktasının var olduğu* "

bilinmektedir.

1912 de Brouwer:

" IR^n *in kapalı birim yuvarından, yine aynı kapalı birim yuvar üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün bir sabit noktasının varlığını* "

göstermiştir.

1930 da Schauder:

" A, *bir Banach uzayının kapalı, konveks bir alt kümesi olmak üzere sürekli bir* $f : A \to A$ *dönüşümü için, eğer* $\overline{f(A)}$ *kompakt küme ise* f *nin bir sabit noktası vardır.* "

teoremini vererek, Banach uzayları üzerinde bir genelleme vermiştir.

Gerek Brouwer, gerekse Schauder'ın kanıtlarında sabit noktanın bulunması için ne yapılabileceği konusunda en ufak ipucu bile bulunmamaktadır. Buradaki kanıtlar yapısal bir yaklaşımdan çok var olma ile ilgili fikir yürütmeye dayanmaktadır.

1.2.1 Tanım : (X,d) bir metrik uzay ve T de X den X e herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le kd(x,y)$$

bağıntısını sağlayan bir $k \ge 0$ sayısı varsa T ye ***Lipschitz*** koşulunu sağlıyor denir. Burada $0 \le k < 1$ ise T ye ***daraltan***, $k = 1$ ise ***genişleme olmayan*** dönüşüm denir. Eğer her $x,y \in X$ için $(x \ne y)$

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

ise T ye ***kesin daraltan*** dönüşüm denir. Bu durumda aşağıdaki gerektirmelerin doğruluğu kolayca görülebilir.

$T - daraltan \Rightarrow T - kesin\ daraltan \Rightarrow T - genişleme\ olmayan \Rightarrow T - Lipschitz\ koşulunu\ sağlar.$

1922 de Banach, daraltan dönüşümleri kullanarak literatürde " *Banach sabit nokta teoremi* " yada " *Banach daralma ilkesi* " olarak bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir.

"(X,d) *tam metrik uzay ve* T *de* X *den* X *e daraltan bir dönüşüm olsun. O zaman* T *nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.*"

Bu teoremin önemli bir sonucu da, Brouwer ve Schauder'ın teoremlerinin aksine fonksiyonun sabit noktasının bulunması ile ilgili bir fikir vermesidir. Yani x_0, X de herhangi bir nokta olmak üzere $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi, T nin sabit noktasına yakınsar.

Banach'ın sabit nokta teoremi, genişleme olmayan dönüşümler için geçerli olmadığı gibi, bunlarla yapılan iterasyon dizileri de yakınsak olmayabilirler. Örneğin 1.1.3 Örnek 1 deki

$$T : IR \to IR, \quad Tx = x + a, \quad (a \ne 0)$$

dönüşümü, IR deki mutlak değer metriğine göre genişleme olmayan dönüşüm olup hiç bir sabit noktası yoktur ve bu dönüşüm ile oluşturulan iterasyon dizisi yakınsak değildir.

Dikkat edilirse, verilen bir T daraltan dönüşümü aynı zamanda sürekli bir dönüşümdür. O zaman T sürekli değilse kesinlikle daraltan dönüşüm de olamaz. Bryant (1968);

" *Bir* $n \ge 2$ *için* T^n, *bir* (X,d) *tam metrik uzayında daraltan dönüşüm ise* T *nin bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.* "

teoremini vermiştir. Şu halde T daraltan olmasa bile T^n nin daraltan olması, T nin sabit noktasının varlığını garanti etmektedir. Örneğin;

$$T:[0,2]\to[0,2] \quad \text{olmak üzere} \quad Tx=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in(1,2]\end{cases}$$

olarak tanımlansın. T nin $x=1$ de süreksiz olduğu açıktır ve dolayısıyla T bir daraltan dönüşüm olamaz. Diğer taraftan T^2, $[0,2]$ de bir daraltan dönüşümdür ve 0, T nin tek bir sabit noktasıdır.

Kannan (1969), Reich (1971), Bianchini (1972), Hardy ve Rogers (1973), Ciric (1974), Rhoades (1977) vs. yaptıkları çalışmalarda değişik türden sürekli olmayan daraltan dönüşümleri göz önüne alarak, genelleştirilmiş sabit nokta teoremleri vermişlerdir.

Diğer taraftan, değişik uzaklık fonksiyonları kullanılarak farklı daraltanlık koşulları altında, fonksiyonlar için sabit nokta teoremleri çalışılmıştır. Örneğin; Grabiec (1988) fuzzy metrik uzayları, Hicks ve Rhoades (1999) simetrik uzayları, Iseki (1975) iki metrik uzayları, Jachymski, Matkowski ve Swiatkowski (1995) yarı-metrik uzayları, Kada, Suzuki ve Takahashi (1996) w-uzaklık fonksiyonunu, Nadler (1969) Hausdorff metriği, Reilly, Subrahmanyam ve Vamanamurthy (1982) quasi-pseudo metrik uzayları, Sehgal ve Bharucha-Reid (1972) olasılık uzayları kullanarak çeşitli sabit nokta teoremleri ortaya koymuşlardır.

Bu tezde 2007 de Huang ve Zhang'in koni metrik uzaylarda yaptığı çalışma göz önüne alınarak, koni metrik uzaylarda değişik koşulları sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

II. BÖLÜM

KONİ METRİK UZAYLAR

Boştan farklı herhangi bir X kümesi üzerinde bir $d : X \times X \to IR$ fonksiyonu ;

(i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir.

Bu bölümde d nin değer kümesi olan negatif olmayan reel sayılar yerine, sıralı bir Banach uzayı alınarak, X üzerindeki metriğin vektör değerli genelleştirilmiş biçimi göz önüne alınacak ve onun bazı özellikleri incelenecektir.

Sıralı bir Banach uzayı elde etmek için onun üzerinde tanımlı konilerden faydalanılacaktır. Bu nedenle elde edilen metrik de koni değerli olacağından adına *koni metrik* denilecektir.

2.1 BANACH UZAYLARINDA KONİLER

2.1.1 Tanım : E bir reel Banach uzayı ve P de E nin bir alt kümesi olsun. Eğer,

(i) P boştan farklı, kapalı ve $P \neq \{0\}$

(ii) Her $x, y \in P$ ve $a, b \in IR$, $a, b \geq 0$ için $ax + by \in P$

(iii) $x \in P$ ve $-x \in P \Rightarrow x = 0$

koşulları gerçekleniyorsa P ye bir ***koni*** denir.

2.1.2 Örnek : $E = IR^2$ olmak üzere

$P = \{ (x, y) \in IR^2 : x, y \geq 0 \}$, E de bir konidir.

2.1.3 Tanım : E reel Banach uzayında $P \subseteq E$ konisi verilsin. E de P ye göre bir " $\leq$ " kısmi sıralama aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P .$$

Eğer $x \leq y$ fakat $x \neq y$ ise bu durum "$x < y$" ile, $y - x \in P^0$ ise "$x << y$" ile gösterilecektir.

2.1.4 Not : Yukarıda verilen " $\leq$ " tanımına göre E Banach uzayı, P konisine göre kısmi sıralı bir küme olup, tam sıralı bir küme değildir.

2.1.5 Önteorem : E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. O zaman, $x, y \in P$ ve $a, b \in IR$ için

$$x \leq y \text{ ve } 0 \leq a \leq b \text{ ise } ax \leq by \text{ dir.}$$

Kanıt : $x \leq y \Rightarrow y - x \in P$ ve $a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$ dır. 2.1.1 Tanım (ii) den $a(y-x) + (b-a)y \in P$ olduğundan

$$a(y-x) + (b-a)y = ay - ax + by - ay = by - ax \in P$$

olup $ax \leq by$ bulunur.

2.1.6 Önteorem : E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. O zaman,

(i) $x, y, u, v \in E$ için $x \leq y$ ve $u \leq v$ ise $x + u \leq y + v$ dir.

(ii) $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, E de iki dizi olmak üzere

her $n \in IN$ için $x_n \leq y_n$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \to \infty} y_n = y$ ise $x \leq y$ dir.

(*Zeidler, E. , 1993*)

2.1.7 Önteorem : E bir reel Banach uzayı, P E de bir koni, $x, y, z \in E$ ve $a \in IR$ olsun. O zaman;

(i) $x << y$ ve $y << z$ ise $x << z$ dir.

(ii) $x << y$ ve $y \leq z$ ise $x << z$ dir.

(iii) $x \leq y$ ve $y << z$ ise $x << z$ dir.

(iv) $x << y$ ve $a > 0$ ise $ax << ay$ dir.

(*Zeidler, E. , 1993*)

2.1.8 Önteorem : P bir koni olsun. $x \in P, \alpha \in IR$ ve $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere $x \le \alpha x$ ise o zaman $x = 0$ dır.

Kanıt : $x \le \alpha x$ ise $\alpha x - x = (\alpha - 1)x \in P$ dir. $x \in P$ ve $0 \le \alpha < 1$ olduğundan $1 - \alpha > 0$ olup 2.1.1 Tanım (ii) den $(1-\alpha)x \in P$ dir.

Bu durumda 2.1.1 Tanım (iii) den $(1-\alpha)x = 0$ dır. $1 - \alpha \neq 0$ olduğundan $x = 0$ bulunur.

2.1.9 Tanım : E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. Eğer

$$\inf \left\{ \|x + y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1 \right\} > 0$$

ise P ye ***normal koni*** denir.

Buna denk olarak, P nin E de normal koni olması için gerekli ve yeterli koşul; her $x, y \in E$ için

$$0 \le x \le y \Rightarrow \|x\| \le K\|y\|$$

olacak biçimde bir $K > 0$ sayısının varolmasıdır.

Yukarıdaki koşulu sağlayan en küçük pozitif K tamsayısına P nin ***normal sabiti*** denir.

(*Deimling, K. , 1985*)

2.1.10 Örnek : 2.1.2 Örnekte verilen P konisi, normal sabiti $K = 1$ olan, IR^2 de bir normal konidir.

2.1.11 Önteorem : Normal sabiti $K < 1$ olan normal bir koni yoktur.

(*Rezapour, Sh. & Hamlbarani, R. , 2008*)

2.1.12 Önerme : Her bir $k > 1$ için, $K > k$ olacak biçimde, normal sabiti K olan normal bir koni vardır.

(*Rezapour, Sh. & Hamlbarani, R. , 2008*)

2.1.13 Not : Normal olmayan koniler de vardır.

2.1.14 Önerme : E deki bir P konisinin normal olmaması için gerekli ve yeterli koşul

$$0 \le x_n \le x_n + y_n\,,\quad x_n + y_n \to 0 \text{ fakat } x_n \not\to 0$$

sağlayacak biçimde, P içinde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin var olmasıdır.

(*Janković, S. vd, 2009*)

2.1.15 Örnek: $E = C^1_{IR}([0,1])$ üzerinde, $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ olmak üzere $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ normu verilsin. $P = \{x \in E : x(t) \ge 0,\ t \in [0,1]\}$, E de normal olmayan bir konidir.

Çünkü $\forall n \in IN$ için $x_n(t) = \dfrac{1-\sin nt}{n+2}$, $y_n(t) = \dfrac{1+\sin nt}{n+2}$ olmak üzere, P içinde $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri alınsın. O zaman $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ olup $\|x_n + y_n\| = \dfrac{2}{n+2} \to 0$ olur.

(*Deimling, K. , 1985*)

2.1.16 Tanım : E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. Eğer E deki *artan* (*azalan*) ve *üstten sınırlı* (*alttan sınırlı*) her dizi yakınsak ise P ye ***düzenli koni*** denir.

Yani $\{x_n\} \subset E$ dizisi için, $y \in E$ olmak üzere

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots \le y$$

koşulu sağlanıyorsa, o zaman $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ olacak biçimde bir $x \in E$ vardır.

2.1.17 Örnek : $E = c_0 = \{(x_n) \subset IR : x_n \to 0,\ (n \to \infty)\}$ olmak üzere, $P = \{(x_n) \in E : \forall n \in IN \ \text{için}\ x_n \ge 0\}$, E de düzenli bir konidir.

(*Deimling, K. , 1985*)

2.1.18 Önteorem : Her düzenli koni normaldir.

(*Deimling, K. , 1985*)

2.1.19 Not : Normal bir koni düzenli olmayabilir.

2.1.20 Örnek : $E = C([0,1])$ olmak üzere E üzerinde $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ normu verilsin ve $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ olsun. P, E de normal bir koni olup, düzenli bir koni değildir. Gerçekten $f, g \in E$ için

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$$

olduğu açıktır.

$\forall n \in IN$ ve $t \in [0,1]$ için $f_n(t) = 1 - t^n$ olmak üzere $\{f_n\}$ dizisi verilsin. $\{f_n\}$, artan ve üstten sınırlı olmasına rağmen E de yakınsak değildir.
(*Eduardo, L. , 1997*)

2.2 KONİ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde E bir reel Banach uzayı, P E de $P^0 \neq \emptyset$ olan bir koni ve "$\leq$" E üzerinde P ye göre bir kısmi sıra bağıntısı olarak alınacaktır.

2.2.1 Tanım : Boştan farklı herhangi bir X kümesi ve $d : X \times X \to E$ dönüşümü verilsin. Eğer d, her $x, y, z \in X$ için;

(d1) $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d2) $d(x,y) = d(y,x)$

(d3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X kümesi üzerinde bir ***koni metrik*** ve (X,d) ikilisine de bir ***koni metrik uzay*** denir.
(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.2.2 Not :

(a) $E = IR$ ve $P = [0,\infty)$ alınırsa, d nin bir metrik olduğu açıktır.
Böylece her metrik bir koni metriktir.

(b) E bir reel Banach uzayı ve P de E de normal sabiti $K = 1$ olan normal bir koni olsun.

Eğer d , X üzerinde bir koni metrik ise o zaman

$$\rho : X \times X \to IR \ , \ \rho(x,y) = \| d(x,y) \|$$

X üzerinde bir metrik olur.

2.2.3 Örnek : $E = IR^2$ de $P = \{ (x,y) \in E : \ x, y \geq 0 \}$ konisi verilsin. $X = IR^2$ olmak üzere, aşağıda (i), (ii), (iii) ile verilen $d_i : IR^2 \times IR^2 \to IR^2$, $(i = 1,2,3)$ fonksiyonları X üzerinde birer koni metriktir.

$(\ \alpha \in IR, \alpha \geq 0, \ x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in IR^2 \ )$

(i) $d_1(x,y) = d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \alpha \ \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \})$

(ii) $d_2(x,y) = d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (\max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \alpha \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\})$

(iii) $d_3(x,y) = d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (\alpha(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|), |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \ )$

2.2.4 Örnek : $E = \ell_1$ de, $P = \{ (x_n) \in E : \forall n \in IN \ için \ x_n \geq 0 \}$ konisi verilsin ve (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \left\{ \frac{\rho(x,y)}{2^n} \right\}_{n \geq 1}$$

biçiminde tanımlanan $d : X \times X \to \ell_1$ fonksiyonu bir koni metriktir.

(*Rezapour, Sh. & Hamlbarani, R. , 2008*)

2.2.5 Örnek : $E = IR^2$ de $P = \{ (x,y) \in IR^2 : \ x, y \geq 0 \}$ konisi verilsin ve $\alpha \geq 0$ olsun. $X = IR$ olmak üzere $d : IR \times IR \to IR^2$

$$d(x,y) = (\ |x - y|, \ \alpha \ |x - y| \ )$$

biçiminde tanımlansın. O zaman (X, d) bir koni metrik uzaydır.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.2.6 Örnek : $E = C^1_{IR}([0,1])$ de $P = \{ f \in E : f \geq 0 \}$ konisi verilsin. $X = IR$ ve $\varphi : [0,1] \to IR$, $\varphi(t) = e^t$ olsun. $f_{x,y}(t) = |x - y| . \varphi(t)$ olmak üzere

$$d : IR \times IR \to E \ , \ d(x,y) = f_{x,y}$$

biçiminde tanımlanan d, X üzerinde bir koni metriktir.

(*Jungck, G. vd, 2009*)

2.3 KONİ METRİK UZAYLARDA TAMLIK

2.3.1 Tanım : (X,d) bir koni metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $c \in E, 0 << c$ ye karşılık

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{için} \quad d(x_n, x) << c$$

olacak biçimde bir $n_0 \in IN$ varsa $\{x_n\}$ ***dizisi x noktasına yakınsıyor*** denir.

Bu durum

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{veya} \quad x_n \to x \ (n \to \infty)$$

biçiminde gösterilir.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.3.2 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ X de yakınsak bir dizi ise $\{x_n\}$ in limiti tektir.

(*Di Bari, C. & Vetro, P. , 2008*)

2.3.3 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay, P E de bir koni ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer bir $x \in X$ için

$$d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty) \quad \text{(normda)}$$

ise $\{x_n\}$, x ' e yakınsar.

(*Di Bari, C. & Vetro, P. , 2008*)

2.3.3 Önteoremin tersi, eğer P normal koni ise yine doğru olacaktır.

2.3.4 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay ve P de normal sabiti K olan E de normal bir koni olsun. Eğer, X deki bir $\{x_n\}$ dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsıyorsa

$$d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty) \quad \text{(normda)}$$

dir.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.3.5 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $n \in IN$ için

$$d(x_n, x) \le c_n \ \text{ ve } \ c_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

koşulunu sağlayan E de bir $\{c_n\}$ dizisi varsa, $\{x_n\}$ dizisi x'e yakınsar.

Kanıt : $c \in E, 0 << c$ için, $N_\varepsilon(0) = \{y \in E : \|y\| < \varepsilon\}$ olmak üzere, $c + N_\varepsilon(0) \subseteq P$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ seçilsin. $c_n \to 0 \ (n \to \infty)$ olduğundan

$$\forall n \ge n_0 \ \text{ için } \|c_n\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in IN$ vardır.

Böylece

$$\forall n \ge n_0 \quad \text{için} \quad c_n \in N_\varepsilon(0) \text{ ve } -c_n \in N_\varepsilon(0)$$

dır. Bu durumda

$$\forall n \ge n_0 \quad \text{için} \quad c - c_n \in c + N_\varepsilon(0)$$

olup, buradan

$$\forall n \ge n_0 \quad \text{için} \quad c - c_n \in P^0,$$

yani

$$\forall n \ge n_0 \quad \text{için} \quad c_n << c$$

bulunur.Böylece varsayımdan

$$\forall n \ge n_0 \quad \text{için} \quad d(x_n, x) << c$$

elde edilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin x'e yakınsadığını gösterir.

2.3.6 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi x ' e yakınsak ise $\{x_n\}$ in her alt dizisi de x ' e yakınsar.

Kanıt : $x_n \to x \ (n \to \infty)$ olsun.Yani $\forall\, c \in E,\ 0 << c$ için $\exists\, n_0 \in IN$ ∋

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \text{için} \quad d(x_n, x) << c$$

dir. $\{x_{n_k}\}$, $\{x_n\}$ in herhangi bir alt dizisi olsun. O zaman her bir $n \in IN$ için $n_k \geq n$ olacak biçimde bir $k \in IN$ vardır. Bu durumda

$$n \geq n_0 \Rightarrow\ n_k \geq n \geq n_0 \quad \text{için} \quad d(x_{n_k}, x) << c$$

olur. Bu ise $x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$ olduğunu verir.

2.3.7 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay , P normal sabiti K olan E de normal bir koni, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de iki dizi ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ ise

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y) \ \ (n \to \infty)$$

dir.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.3.8 Tanım : (X,d) bir koni metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $c \in E, 0 << c$ ye karşılık

$$\forall\, n, m \geq n_0 \quad \text{için} \quad d(x_n, x_m) << c$$

olacak biçimde bir $n_0 \in IN$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X de bir ***Cauchy dizisi*** denir.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.3.9 Tanım : (X,d) bir koni metrik uzay olsun. Eğer, X de ki her Cauchy dizisi X içindeki bir elemana yakınsıyorsa (X,d) ye ***tam koni metrik uzay*** denir.

2.3.10 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ X de yakınsak ise $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.3.11 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay, P E de bir koni ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer

$$d(x_n,x_m)\to 0 \ (n,m\to\infty) \quad \text{(normda)}$$

ise $\{x_n\}$ X de bir Cauchy dizisidir.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

Eğer P normal bir koni ise yukarıdaki önteoremin tersi de doğru olacaktır.

2.3.12 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay ve P de normal sabiti K olan E de normal bir koni olsun. Eğer $\{x_n\}$ X de bir Cauchy dizisi ise

$$d(x_n,x_m)\to 0 \ (n,m\to\infty) \quad \text{(normda)}$$

dır.

(*Huang, L. -G. & Zhang, X. , 2007*)

2.3.13 Önteorem : (X,d) bir koni metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $n\in IN$ için $a_n>0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$ olmak üzere, bir $M\in E, 0\le M$ ve her $n\in IN$ için

$$d(x_{n+1},x_n)\le a_nM$$

koşulunu sağlayan IR de bir $\{a_n\}$ dizisi varsa, o zaman $\{x_n\}$ X de bir Cauchy dizisidir.

Kanıt : $n>m$ olsun. (d3) koşulundan

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\le d(x_n,x_{n-1})+d(x_{n-1},x_{n-2})+\ldots+d(x_{m+1},x_m) \\ &\le a_{n-1}M+a_{n-2}M+\ldots+a_mM \\ &= (a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_m)M \qquad (2.3.1) \\ &= M\sum_{k=m}^{n-1}a_k \end{aligned}$$

olur. Bir $c\in E, 0<<c$ alındığında, $N_\varepsilon(0)=\{y\in E:\|y\|<\varepsilon\}$ olmak üzere, $c+N_\varepsilon(0)\subseteq P$ olacak biçimde bir $\varepsilon>0$ vardır.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ olduğundan $\exists n_0 \in IN$ ə $\forall n > m \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k \right| . \|M\| = \left\| M \sum_{k=m}^{n-1} a_k \right\| < \varepsilon$$

olur. Böylece,

$\forall n > m \geq n_0$ için

$$M \sum_{k=m}^{n-1} a_k \in N_\varepsilon(0) \quad \text{ve} \quad -M \sum_{k=m}^{n-1} a_k \in N_\varepsilon(0)$$

dir. Bu durumda

$$\forall n > m \geq n_0 \text{ için } \quad c - M \sum_{k=m}^{n-1} a_k \in c + N_\varepsilon(0)$$

olup,

$$\forall n > m \geq n_0 \text{ için } \quad c - M \sum_{k=m}^{n-1} a_k \in P^0$$

olacağından

$$\forall n > m \geq n_0 \text{ için } \quad M \sum_{k=m}^{n-1} a_k << c$$

bulunur. O zaman (2.3.1) eşitsizliğinden

$$\forall n > m \geq n_0 \text{ için } \quad d(x_n, x_m) << c$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olur.

2.3.14 Önteorem : (X, d) bir koni metrik uzay, $\{x_n\}$ X de bir Cauchy dizisi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin x'e yakınsayan bir alt dizisi varsa, $\{x_n\}$ de x'e yakınsar.

Kanıt : $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ ve $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$ olsun. O zaman $\forall c \in E, 0 \leq c$ için $\exists n_0 \in IN$ ə $\forall n_k \geq n_0$ için $d(x_{n_k}, x) << c$ dir. Ayrıca $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan n ve k yeteri kadar büyük alındığında

$$\forall n, n_k \geq n_0 \quad \text{için} \quad d(x_n, x_{n_k}) << c$$

olur.

Bu durumda

$$\forall n, n_k \geq n_0 \quad \text{için} \quad d\left(x_{n_k}, x\right) << \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad d\left(x_n, x_{n_k}\right) << \frac{c}{2}$$

dir. Buradan

$$\forall n \geq n_0 \text{ için} \quad d\left(x_n, x\right) \leq d\left(x_n, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x\right) << \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.Böylece $\{x_n\}$ dizisi x 'e yakınsar.

2.4 KONİ METRİK UZAYLARDA FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

2.4.1 Tanım : E ve F reel Banach uzayları, P ile Q sırasıyla E ve F de koniler ve $d: X \times X \to E$, $\rho: Y \times Y \to F$ olmak üzere (X,d) ve (Y,ρ) koni metrik uzaylar olsun. Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu ve $x_0 \in X$ verilsin. Eğer her $c \in F, 0 << c$ ye karşılık

$$d(x, x_0) << b \quad (\forall x \in X) \quad \text{için} \quad \rho(f(x), f(x_0)) << c$$

olacak biçimde bir $b \in E, 0 << b$ varsa f fonksiyonu x_0 ***noktasında süreklidir*** denir.

Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye X ***kümesi üzerinde süreklidir*** denir.

2.4.2 Teorem : (X,d) ve (Y,ρ), 2.4.1 Tanım' da ki gibi iki koni metrik uzay olsun. Bir $f: X \to Y$ fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, X de x_0 noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için Y de $\{f(x_n)\}$ dizisinin $f(x_0)$ noktasına yakınsamasıdır.

Kanıt :

$\Rightarrow$: f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli ve $\{x_n\}$ de x_0 noktasına yakınsayan X de bir dizi olsun. f fonksiyonu x_0 da sürekli olduğundan her bir $c \in F, 0 << c$ için

$$d(x, x_0) << b \quad (\forall x \in X) \;\Rightarrow\; \rho(f(x), f(x_0)) << c$$

olacak biçimde bir $b \in E, 0 << b$ vardır. $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsadığından $\exists n_0 \in IN$ ∍ $\forall n \geq n_0$ için $d(x_n, x_0) << b$

dir. Böylece

$$\forall n \geq n_0 \text{ için } \rho(f(x_n), f(x_0)) << c$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olmasını verir.

$\Leftarrow$: X de x_0 noktasına yakınsayan her bir $\{x_n\}$ dizisi için, Y de $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x_0)$ noktasına yakınsasın. f fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olmadığı varsayılsın. O zaman $\exists c \in E, 0 << c$ ∍ her bir $b \in E, 0 << b$ için $d(x, x_0) << b$ fakat $c - \rho(f(x), f(x_0)) \notin Q^0$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. Bir $0 << b$ alındığında, her $n \in IN$ için $0 << \frac{b}{n}$ dir. Böylece

$$d(x_n, x_0) << \frac{b}{n} \quad \text{fakat} \quad c - \rho(f(x_n), f(x_0)) \notin Q^0 \quad (n = 1,2,...)$$

olacak biçimde X içinde bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir. $n \to \infty$ için $\frac{b}{n} \to 0$ olduğundan 2.3.5 Önteorem'den $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsamasına karşın $c - \rho(f(x_n), f(x_0)) \notin Q^0$ olduğundan, $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x_0)$ noktasına yakınsamaz. Bu ise hipotez ile çelişir.

O halde f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir.

2.5 DİZİSEL KOMPAKT KONİ METRİK UZAYLAR

2.5.1 Tanım : (X, d) bir koni metrik uzay olsun. Eğer, X deki her bir $\{x_n\}$ dizisi için, $\{x_n\}$' in X de yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi varsa, (X, d) ye ***dizisel kompakt koni metrik uzay*** denir.

2.5.2 Önerme : (X,d) dizisel kompakt bir koni metrik uzay ise o zaman tam koni metrik uzaydır.

Kanıt : $\{x_n\}$, X de herhangi bir Cauchy dizisi olsun. X dizisel kompakt olduğundan, $\{x_n\}$ in X 'deki bir x noktasına yakınsayan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Bu durumda 2.3.14 Önteorem'den $x_n \to x \in X$ olur. O halde (X,d) tamdır.

2.5.3 Önerme : (X,d) ve (Y,ρ) iki koni metrik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer (X,d) dizisel kompakt bir uzay ise $f(X)$ de Y nin dizisel kompakt bir alt uzayı olur.

Kanıt : $\{y_n\}$, $f(X)$ de herhangi bir dizi olsun. Eğer $\{y_n\}$ yakınsak ise, alt dizi olarak $\{y_n\}$ in kendisi alınabileceğinden istenen elde edilmiş olur.

$\{y_n\}$ yakınsak olmasın. Her bir $n \in IN$ için $y_n \in f(X)$ olduğundan her bir $n \in IN$ için $y_n = f(x_n)$ olacak biçimde bir $x_n \in X$ vardır. (X,d) dizisel kompakt bir koni metrik uzay olduğundan $x_{n_k} \to x \in X$ olacak biçimde $\{x_n\}$ in bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. f sürekli olduğundan 2.4.2 Teorem'den $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$ olur. Böylece $\{y_n\}$ in yakınsak bir $\{y_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.. $\{y_n\}$, $f(X)$ de keyfi olduğundan, bu $f(X)$ deki her dizi için yapılabilir. O halde $f(X)$, Y nin dizisel kompakt bir alt uzayı olur.

2.5.4 Sonuç : (X,d) ve (Y,ρ) iki koni metrik uzay ve $f : X \to Y$ örten, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer (X,d) dizisel kompakt bir uzay ise (Y,ρ) uzayı da dizisel kompakt olur.

2.5.5 Tanım : (X,d) bir koni metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A da ki her bir yakınsak dizinin limiti A içinde kalıyorsa, A ya (X,d) de ***dizisel kapalıdır*** denir.

2.5.6 Önerme : (X,d) dizisel kompakt bir koni metrik uzay olsun. Bir $A \subseteq X$ in dizisel kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul A nın dizisel kapalı olmasıdır.

Kanıt : $\Rightarrow$: $A \subseteq X$ dizisel kompakt olsun. $x_n \to x$ olacak biçimde herhangi bir $\{x_n\} \subseteq A$ dizisi alınsın. A dizisel kompakt olduğundan $\{x_n\}$ in $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = y \in A$ olacak biçimde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. $x_n \to x$ olduğundan 2.3.6 Önteoremden $\{x_n\}$ in bütün alt dizileri de aynı noktaya yakınsayacağından $x = y \in A$ dır. Böylece A dizisel kapalıdır.

$\Leftarrow$: A dizisel kapalı olsun ve herhangi bir $\{x_n\} \subseteq A$ dizisi alınsın. $A \subseteq X$ olduğundan $\{x_n\}$, X de bir dizi olup, X dizisel kompakt olduğundan $\{x_n\}$ in X 'deki bir x noktasına yakınsayan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\} \subseteq A$, A dizisel kapalı ve $x_{n_k} \to x$ olduğundan $x \in A$ bulunur. Bu durumda A dizisel kompakt olur.

III. BÖLÜM

KONİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde, koni metrik uzaylar üzerinde tanımlı dönüşümlerin sabit noktaları incelenecektir.

3.1 DARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

L. -G. Huang ve X. Zhang 2007 de Banach'ın sabit nokta teoremini, P yi normal bir koni alarak, koni metrik uzaylara aşağıdaki gibi genişletmiştir.

3.1.1 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay, P normal sabiti K olan normal bir koni ve T de X 'ten X 'e $k \in [0,1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le k\, d(x,y) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm ise, o zaman T 'nin X 'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Herhangi bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

3.1.2 Not : Eğer T dönüşümü, (3.1.1) koşulunu sağlarsa sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten $c \in E, 0 << c$ verildiğinde $b = \frac{c}{k}$ seçilirse $k > 0$ olduğundan $\frac{c}{k} \in E$ olup $0 << \frac{c}{k}$ dır. O zaman $d(x,y) << b$ iken $d(Tx,Ty) \le k\, d(x,y) << k\frac{c}{k} = c$ bulunur.

Buna göre, (3.1.1) eşitsizliğini sağlayan her $T : X \to X$ dönüşümü sürekli olacağından, eğer T sürekli değilse, o zaman (3.1.1) eşitsizliğini de sağlamayacağı açıktır.

T sürekli olmasa bile, L. -G. Huang ve X. Zhang 2007 de Kannan'ın sabit nokta teoremlerini, koni metrik uzaylar üzerine aşağıdaki biçimde genişleterek, sürekli olmayan dönüşümler için de sabit nokta teoremleri vermiştir.

3.1.3 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay, P normal sabiti K olan normal bir koni ve $T: X \to X$ dönüşümü, $k \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le k[d(Tx,x)+d(Ty,y)] \tag{3.1.2}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

3.1.4 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay, P normal sabiti K olan normal bir koni ve $T: X \to X$ dönüşümü, $k \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le k[d(Tx,y)+d(x,Ty)] \tag{3.1.3}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

3.1.5 Not : S.H.Rezapour ve R.Hamlbarani (2008) , 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4 Teoremlerinde geçen P konisinin normallik koşulunu kaldırarak, herhangi bir koni üzerinde de bu teoremlerin geçerli olduğunu kanıtlamıştır.

Ayrıca P. Vetro (2007), M. Abbas ve G. Jungck (2008), C. Di Bari ve P. Vetro (2008),(2009), P. Raja ve S.M. Vezapour (2008), D. Ilić, ve V. Rakočević (2008), (2009), M. Arshad vd. (2009), , S.Janković vd. (2009), M. Abbas ve B.E. Rhoades (2009) değişik daraltanlık koşulları altında, koni metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri vermişlerdir.

Aşağıdaki, L. -G. Huang ve X. Zhang tarafından verilen örnekte, X üzerindeki Euclid metriğine göre daraltma özelliğini sağlamayan, fakat X üzerinde tanımlı bir koni metrik için (3.1.1) daraltan özelliğini sağlayan bir $T: X \to X$ dönüşümüne örnek verilmiştir. Bu örnek aynı zamanda, 3.1.1, 3.1.3, 3.1.4 Teoremlerinin, metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremlerinden daha genel olduğunu verir.

3.1.6 Örnek : $E = IR^2$ de $P = \{(x,y) \in IR^2 : x, y \geq 0\}$ konisi verilsin ve $X = \{(x,0) \in IR^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,x) \in IR^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ olsun.

$d : X \times X \to E$,

$$d((x,0),(y,0)) = \left(\frac{4}{3}|x-y|, |x-y|\right),$$

$$d((0,x),(0,y)) = \left(|x-y|, \frac{2}{3}|x-y|\right),$$

$$d((x,0),(0,y)) = d((0,y),(x,0)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y\right)$$

biçiminde tanımlansın. d, X üzerinde bir koni metrik olup (X,d) tam koni metrik uzaydır.

$T : X \to X$ dönüşümü,

$$T((x,0)) = (0,x) \text{ ve } T((0,x)) = \left(\frac{1}{2}x, 0\right)$$

olarak tanımlansın. T dönüşümü, $k = \frac{3}{4} \in [0,1)$ olmak üzere her $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ için

$$d(T((x_1, x_2)), T((y_1, y_2))) \leq k\, d((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

daraltanlık koşulunu sağlar, fakat T dönüşümü, X üzerindeki Euclid metriğine göre daraltan bir dönüşüm değildir.

3.2 TAM KONİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. $a, b, c \in E$ için $a \leq b$ veya $a \leq c$ ise bu durum $a \leq b \vee c$ ile gösterilecektir. Eğer bir $r \in IR$ için yine $a \leq rb$ veya $a \leq rc$ ise bu $a \leq r(b \vee c)$ ile gösterilecektir.

Eğer b ile c, E de karşılaştırılabilir iki eleman ise o zaman $b \vee c = b \vee c = \max\{b, c\}$ olup, bu durumda yukarıdaki verilen notasyon $a \leq b \vee c = \max\{b, c\}$ olur.

Bu notasyonlar kullanılarak aşağıdaki teoremler verilecektir.

3.2.1 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü, $0\le k<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le k[d(Tx,x)\vee d(Ty,y)] \tag{3.2.1}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x\in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Kanıt : Herhangi bir $x\in X$ alınsın. Eğer bir $n\in IN$ için $T^{n+1}x=T^n x$ ise o zaman $T^n x$, T'nin bir sabit noktası olur. Her bir $n\in IN$ için $T^{n+1}x\neq T^n x$ olduğu varsayılsın. (3.2.1) eşitsizliği kullanıldığında,

$$d(T^{n+1}x,T^n x)\le k\ [\ d(T^{n+1}x,T^n x)\vee d(T^n x,T^{n-1}x)\ ]$$

olur. Eğer $d(T^{n+1}x,T^n x)\le kd(T^{n+1}x,T^n x)$ ise o zaman $k<1$ olduğu için 2.1.8 Önteoremden $d(T^{n+1}x,T^n x)=0$ elde edilir. Bu ise varsayımla çelişir. Bu nedenle

$$d(T^{n+1}x,T^n x)\le kd(T^n x,T^{n-1}x)$$

dir. Benzer biçimde devam edildiğinde, her $n\in IN$ için genelde

$$d(T^{n+1}x,T^n x)\le k^n d(Tx,x)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}k^n<\infty$ olduğu için, 2.3.13 Önteoremden $\{T^n x\},(X,d)$ tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $\lim_{n\to\infty}T^n x=z$ olacak biçimde bir $z\in X$ vardır.

2.3.6 Önteoremden, herhangi bir $c\in E,0<<c$ alındığında, $\forall n\ge N$ için $d(T^n x,z)<<c(1-k)$ ve $d(T^n x,T^{n-1}x)<<c$ olacak biçimde bir $N\in IN$ vardır.

(d3) koşulundan $\forall n\ge N$ için

$$d(Tz,z)\le d(Tz,T^n x)+d(T^n x,z) \tag{3.2.2}$$

olup, (3.2.1) eşitsizliğinden

$$d(Tz,T^n x)\le k[\,d(Tz,z)\vee d(T^n x,T^{n-1}x)\,]$$

bulunur. Burada, $\forall n\ge N$ için iki durum söz konusudur.

1.Durum : Eğer, $d(Tz,T^n x)\le kd(Tz,z)$ ise o zaman (3.2.2) eşitsizliğinden

$$d(Tz,z)\le\frac{1}{1-k}d(T^n x,z)<<c$$

elde edilir.

2.Durum : Eğer, $d(Tz,T^n x)\le kd(T^n x,T^{n-1}x)$ ise o zaman (3.2.2) eşitsizliğinden

$$d(Tz,z)\le d(T^n x,z)+kd(T^n x,T^{n-1}x)<<c(1-k)+ck=c$$

elde edilir.

Böylece 1. ve 2. durumlardan her $c\in E,\ 0<<c$ için $d(Tz,z)<<c$ olur.

Bir $0<<c$ alındığında, $\forall\ m\in IN$ için $0<<\frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m\in IN$ için $d(Tz,z)<<\frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m\in IN$ için $\frac{c}{m}-d(Tz,z)\in P$ dir. $m\to\infty$ için $\frac{c}{m}\to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d(Tz,z)\in P$ olur. $d(Tz,z)\in P$ olduğundan $d(Tz,z)=0$ dır. Bu durumda $Tz=z$ olur.

T dönüşümü'nün ikinci bir sabit noktası z' olsun. O zaman (3.2.1) eşitsizliğinden

$$d(z,z')=d(Tz,Tz')\le k\left[d(Tz,z)\vee d(Tz',z')\right]$$

olup, $d(Tz,z)=0=d(Tz',z')$ olduğundan

$$d(z,z')\le 0$$

olur. Bu durumda $-d(z,z')\in P$ dir. 2.1.1 Tanım (iii) den $d(z,z')=0$ olur. Buradan da $z=z'$ bulunur. O halde T ' nin sabit noktası tektir.

3.2.2 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü, $0\le k<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le k\left[d(Tx,y)\vee d(Ty,x)\right] \qquad (3.2.3)$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T 'nin X 'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x\in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Kanıt : Herhangi bir $x\in X$ alınsın. O zaman $d(T^{n+1}x,T^n x)$ için (3.2.3) eşitsizliği kullanılırsa, $d(T^n x,T^n x)=0$ olup $d(T^{n-1}x,T^{n+1}x)$ ile karşılaştırılabilir olduğundan

$$d(T^{n+1}x,T^n x)\le k\left[\ d(T^{n+1}x,T^{n-1}x)\vee d(T^n x,T^n x)\ \right]=kd(T^{n+1}x,T^{n-1}x)$$

dir. Yine (3.2.3) eşitsizliğinden,

$$d(T^{n+1}x,T^n x)\le k^2\left[\ d(T^{n+1}x,T^{n-2}x)\vee d(T^{n-1}x,T^n x)\ \right]$$

ve

$$d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)\le k^{3}\left[\ d\left(T^{n+1}x,T^{n-3}x\right)\vee d\left(T^{n-2}x,T^{n}x\right)\ \right]$$

olur.

Bu biçimde devam edildiğinde,

$$m=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & :n\ \ çift\\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & :n\ \ tek\end{cases}\qquad \text{ve}\quad a\le\bigvee\left\{a_i : i=1,2,...,n\right\}\Leftrightarrow \text{Bir } i \text{ için } a\le a_i$$

olmak üzere

$$d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)\le k^{n}\bigvee\left\{d\left(T^{n+1-s}x,T^{s}x\right): s=0,1,2,...,m\right\} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer biçimde işlem, $s>0$ için $d\left(T^{n+1-s}x,T^{s}x\right)$ terimlerine uygulandığında, (3.2.4) eşitsizliğinden

$$d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)\le k^{n}\bigvee\left\{k^{s}\ d\left(T^{n+1-s}x,x\right): s=0,1,2,...,n-1\right\} \tag{3.2.5}$$

olur. $n=1,2,...$ için (d3) koşulundan

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\le d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)+d\left(T^{n}x,x\right) \tag{3.2.6}$$

bulunur. Bu durumda $n=1,2,...$ için

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\le\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-k^{i}}\,d\left(Tx,x\right) \tag{3.2.7}$$

eşitsizliği doğrudur.

Gerçekten, tümevarım yöntemi kullanıldığında; $n=1$ için (3.2.7) eşitsizliğinin doğruluğu, (3.2.5) ve (3.2.6) eşitsizliklerinden kolayca görülür.

$j=1,2,...,n-1$ için

$$d\left(T^{j+1}x,x\right)\le\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1-k^{i}}\,d\left(Tx,x\right)$$

doğru olsun. (3.2.5) eşitsizliğinde $s=0$ alınırsa

$$d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)\le k^{n}d\left(T^{n+1}x,x\right)$$

dir. O zaman (3.2.6) eşitsizliğinden

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\le k^{n}d\left(T^{n+1}x,x\right)+d\left(T^{n}x,x\right)$$

olur. Yani,

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\le\frac{1}{1-k^{n}}\,d\left(T^{n}x,x\right)$$

olup, varsayımdan

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\leq\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-k^{i}}d\left(Tx,x\right)$$

elde edilir.

(3.2.5) eşitsizliğinde $s=m, 1\leq m\leq n-1$ alındığında,

$$d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)\leq k^{n+m}d\left(T^{n+1-m}x,x\right)$$

olup, (3.2.6) eşitsizliğinden ve varsayımdan,

$$\begin{aligned}d\left(T^{n+1}x,x\right)&\leq k^{n+m}d\left(T^{n+1-m}x,x\right)+d\left(T^{n}x,x\right)\\&\leq k^{n+m}\prod_{i=1}^{n-m}\frac{1}{1-k^{i}}d\left(Tx,x\right)+\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-k^{i}}d\left(Tx,x\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\leq\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-k^{i}}(k^{n+m}+1-k^{n})d\left(Tx,x\right)$$

olup, $k^{n+m}<k^{n}$ olduğundan

$$d\left(T^{n+1}x,x\right)\leq\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-k^{i}}d\left(Tx,x\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda (3.2.7) eşitsizliğinin her $n=1,2,...$ için doğru olduğu kanıtlanmış olur.

$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-k^{i}}=r$ olsun.

O zaman,

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-k^{i}}=e^{\sum_{i=1}^{\infty}\ln(\frac{1}{1-k^{i}})}$$

olup,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\ln(\frac{1}{1-k^{i}})<\infty$$

olduğundan,

$$r<\infty \text{ ve } \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-k^{i}}<r$$

dir.

(3.2.5) ve (3.2.7) eşitsizlikleri kullanılırsa, $k<1$ olduğundan $\forall n=1,2,...$ için

$$d\left(T^{n+1}x,T^{n}x\right)\le k^{n}rd\left(Tx,x\right)$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty}k^{n}<\infty$ olduğu için, 2.3.13 Önteoremden $\left\{T^{n}x\right\}$, $\left(X,d\right)$ tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $\lim_{n\to\infty}T^{n}x=z$ olacak biçimde bir $z\in X$ vardır.

2.3.6 Önteoremden, herhangi bir $c\in E, 0<<c$ alındığında, $\forall n\ge N$ için $d\left(T^{n}x,z\right)<<\frac{c(1-k)}{2}$ olacak biçimde bir $N\in IN$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n\ge N$ için

$$d\left(Tz,z\right)\le d\left(Tz,T^{n}x\right)+d\left(T^{n}x,z\right) \tag{3.2.8}$$

ve (3.2.3) eşitsizliğinden

$$d\left(Tz,T^{n}x\right)\le k\left[\ d\left(Tz,T^{n-1}x\right)\vee d\left(T^{n}x,z\right)\ \right]$$

bulunur. Burada $\forall n\ge N$ için iki durum söz konusudur.

1.Durum : Eğer, $d\left(Tz,T^{n}x\right)\le k\ d\left(Tz,T^{n-1}x\right)$ ise o zaman (3.2.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\left(Tz,z\right)&\le d\left(T^{n}x,z\right)+kd\left(Tz,T^{n-1}x\right)\\ &\le d\left(T^{n}x,z\right)+k\left[\ d\left(Tz,z\right)+d\left(z,T^{n-1}x\right)\ \right] \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} d\left(Tz,z\right)&\le\frac{1}{1-k}d\left(T^{n}x,z\right)+\frac{k}{1-k}d\left(z,T^{n-1}x\right)\\ &\le\frac{1}{1-k}\left[d\left(T^{n}x,z\right)+d\left(z,T^{n-1}x\right)\right]\\ &<<\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c \end{aligned}$$

bulunur.

2.Durum : Eğer, $d\left(Tz,T^{n}x\right)\le kd\left(T^{n}x,z\right)$ ise o zaman (3.2.8) eşitsizliğinden

$$d\left(Tz,z\right)\le d\left(T^{n}x,z\right)+kd\left(T^{n}x,z\right)<<\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c$$

elde edilir.

Böylece 1. ve 2. durumlardan her $c\in E,\ 0<<c$ için $d\left(Tz,z\right)<<c$ olur.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $d(Tz, z) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - d(Tz, z) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d(Tz, z) \in P$ olur. $d(Tz, z) \in P$ olduğundan $d(Tz, z) = 0$ dır. Bu durumda $Tz = z$ olur.

T dönüşümü'nün ikinci bir sabit noktası z' olsun. O zaman (3.2.3) eşitsizliğinden

$$d(z, z') = d(Tz, Tz') \leq k\ [d(Tz, z') \vee d(Tz', z)]$$

olur. Bu,

$$d(z, z') \leq k\ [d(z, z') \vee d(z', z)]$$

eşitsizliği ile denktir. $d(z, z') = d(z', z)$ karşılaştırılabilir olduğundan

$$d(z, z') \leq k\ [d(z, z') \vee d(z', z)] = kd(z, z')$$

olur. O zaman, $k < 1$ olduğu için 2.1.8 Önteoremden $d(z, z') = 0$ bulunur. Bu ise $z = z'$ olmasını verir. O halde T ' nin sabit noktası tektir.

3.2.3 Not : (X, d) koni metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her bir $x, y \in X$ için $d(Tx, x)$ ile $d(Ty, y)$ karşılaştırılabilir ise o zaman

$$d(Tx, x) + d(Ty, y) \leq 2[d(Tx, x) \vee d(Ty, y)]$$

dir.

Benzer biçimde her bir $x, y \in X$ için $d(Tx, y)$ ile $d(Ty, x)$ karşılaştırılabilir ise o zaman

$$d(Tx, y) + d(Ty, x) \leq 2[d(Tx, y) \vee d(Ty, x)]$$

dir.

Bu durumda, eğer 3.1.3 ve 3.1.4 Teoremlerdeki (3.1.2) ve (3.1.3) eşitsizlikleri doğru ise sırasıyla, $k \in [0,1)$ olmak üzere 3.2.1 ve 3.2.2 Teoremlerdeki (3.2.1) ve (3.2.3) eşitsizlikleri elde edilir.

Aşağıdaki örneklerde, eğer her bir $x, y \in X$ için, sırasıyla $d(Tx, x)$ ile $d(Ty, y)$ ve $d(Tx, y)$ ile $d(Ty, x)$ karşılaştırılabilir ise, o zaman 3.2.1 ve 3.2.2 Teoremlerinin, 3.1.3 ve 3.1.4 Teoremlerinden daha genel olduğu gösterilecektir.

3.2.4 Örnek : $E = IR^2$ de $P = \{(x,y) \in IR^2 : x, y \geq 0\}$ konisi verilsin ve $X = [0,1]$ olsun. $d : X \times X \to E$, $d(x,y) = (|x-y|, |x-y|)$ biçiminde tanımlansın. d, X üzerinde bir koni metrik olup (X,d) tam koni metrik uzaydır.

$T : X \to X$, $Tx = \frac{x}{3}$ dönüşümü tanımlansın. O zaman,

$$d(Tx,Ty) = \left(\left|\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right|, \left|\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right| \right),$$

$$d(Tx,x) = \left(\left|\frac{x}{3} - x\right|, \left|\frac{x}{3} - x\right| \right) = \left(\frac{2x}{3}, \frac{2x}{3} \right),$$

$$d(Ty,y) = \left(\left|\frac{y}{3} - y\right|, \left|\frac{y}{3} - y\right| \right) = \left(\frac{2y}{3}, \frac{2y}{3} \right)$$

olur. Her bir $x, y \in X$ için ya $d(Tx,x) - d(Ty,y) \in P$ yada $d(Ty,y) - d(Tx,x) \in P$ dir. Bu durumda $d(Tx,x)$ ve $d(Ty,y)$ karşılaştırılabilir olduğundan

$$d(Tx,x) \vee d(Ty,y) = \left(\frac{2x}{3}, \frac{2x}{3} \right) \vee \left(\frac{2y}{3}, \frac{2y}{3} \right)$$

ve

$$d(Tx,x) + d(Ty,y) = \left(\frac{2}{3}(x+y), \frac{2}{3}(x+y) \right)$$

olur. (3.2.1) eşitsizliğinin $\frac{1}{2} \leq k < 1$ için sağlandığı açıktır. Buna karşın (3.1.2) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ yoktur.

3.2.5 Örnek : $E = IR^2$ de $P = \{(x,y) \in IR^2 : x, y \geq 0\}$ konisi verilsin ve $X = [0,1]$ olsun. $d : X \times X \to E$, $d(x,y) = (|x-y|, |x-y|)$ biçiminde tanımlansın.

$T : X \to X$,

$$Tx = \begin{cases} 0 & : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & : \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

O zaman,

$$0 \le x, y \le \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad d(Tx,Ty) = (0,0),\ d(Tx,y) = (y,y) \ \text{ve} \ d(Ty,x) = (x,x)$$

ve

$$\frac{1}{2} < x, y \le 1 \quad \text{için} \quad d(Tx,Ty) = (0,0),\ d(Tx,y) = \left(\frac{3}{7}, y\right) \text{ve} \ d(Ty,x) = \left(\frac{3}{7}, x\right)$$

olur.

Böylece $d(Tx,y)$ ve $d(Ty,x)$ karşılaştırılabilir olduğundan, $0 \le x, y \le \frac{1}{2}$ veya $\frac{1}{2} < x, y \le 1$ için (3.2.3) eşitsizliği sağlanır.

$0 \le x \le \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} < y \le 1$ olsun. O zaman,

$$d(Tx,Ty) = d\left(0, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

$$d(Tx,y) = d(0,y) = (y,y),$$

$$d(Ty,x) = d\left(\frac{3}{7}, x\right) = \left(\left|\frac{3}{7} - x\right|, \left|\frac{3}{7} - x\right|\right)$$

olur.

Eğer, $d(Tx,y) = (y,y) \le \left(\left|\frac{3}{7} - x\right|, \left|\frac{3}{7} - x\right|\right) = d(Ty,x)$ ise, $\left|\frac{3}{7} - x\right| - y \ge 0$ olup, $\left|\frac{3}{7} - x\right| > y > \frac{1}{2}$ olur. $0 \le x \le \frac{1}{2}$ için $\left|\frac{3}{7} - x\right| \le \frac{3}{7}$ dir. Bu ise bir çelişkidir.

Buna karşın $d(Tx,y) \ge d(Ty,x)$ doğrudur. Böylece, $\frac{6}{7} \le k < 1$ olmak üzere $0 \le x \le \frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2} < y \le 1$ için

$$d(Tx,Ty) = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) \le k(y,y) = kd(Tx,y) = k[d(Tx,y) \vee d(Ty,x)]$$

olur. Benzer biçimde, $\frac{6}{7} \le k < 1$ olmak üzere $\frac{1}{2} < x \le 1$ ve $0 \le y \le \frac{1}{2}$ için de (3.2.3) eşitsizliği doğrudur.

O halde her $x, y \in [0,1]$ için $d(Tx, y)$ ve $d(Ty, x)$ karşılaştırılabilir olduğundan (3.2.3) koşulu doğru olur.

Eğer $x = \frac{3}{7}$ ve $y = \frac{6}{7}$ olarak alınırsa, o zaman (3.1.3) eşitsizliğini sağlayacak $0 \le k < \frac{1}{2}$ yoktur. Gerçekten, eğer $0 \le k < \frac{1}{2}$ olmak üzere $x = \frac{3}{7}$ ve $y = \frac{6}{7}$ için (3.1.3) eşitsizliği sağlanırsa, o zaman

$$d(Tx, Ty) = d\left(0, \frac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

$$d(Tx, y) = d\left(0, \frac{6}{7}\right) = \left(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

$$d(Ty, x) = d\left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) = (0,0)$$

ve,

$$\left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right) \le k\left(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

olup, $k \ge \frac{1}{2}$ bulunur. Bu ise $0 \le k < \frac{1}{2}$ olduğundan bir çelişkidir.

3.2.6 Teorem : (X, d) tam koni metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü, $0 \le k < \frac{1}{2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T^2 x, Ty) \le k[d(T^2 x, Tx) + d(Ty, y)] \tag{3.2.9}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Kanıt : Herhangi bir $x \in X$ alınsın. Her bir $n \in IN$ için (3.2.9) eşitsizliği kullanıldığında

$$d(T^{n+1} x, T^n x) \le k[\, d(T^{n+1} x, T^n x) + d(T^n x, T^{n-1} x)\,]$$

olur. Buradan,

$$d(T^{n+1} x, T^n x) \le \frac{k}{1-k} d(T^n x, T^{n-1} x)$$

bulunur.

$a = \frac{k}{1-k}$ alındığında, $0 \le k < \frac{1}{2}$ olduğundan $0 \le a < 1$ olup,

$$d\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \le a d\left(T^n x, T^{n-1}x\right)$$

dir. Benzer biçimde devam edildiğinde, her $n \in IN$ için genelde

$$d\left(T^{n+1}x, T^n x\right) \le a^n d\left(Tx, x\right)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n < \infty$ olduğu için, 2.3.13 Önteoremden $\left\{T^n x\right\}, \left(X, d\right)$ tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

2.3.6 Önteoremden, herhangi bir $c \in E, 0 << c$ alındığında, $\forall n \ge N$ için $d\left(z, T^n x\right) << \frac{c(1-k)}{2}$ ve $d\left(T^n x, T^{n-1}x\right) << \frac{c(1-k)}{2k}$ olacak biçimde bir $N \in IN$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n \ge N$ için

$$d\left(z, Tz\right) \le d\left(z, T^n x\right) + d\left(T^n x, Tz\right)$$

olup, (3.2.9) eşitsizliği kullanıldığında

$$d\left(Tz, z\right) \le d\left(z, T^n x\right) + k\ [\ d\left(T^n x, T^{n-1}x\right) + d\left(Tz, z\right)\ ]$$

bulunur. Bu durumda, $\forall n \ge N$ için

$$d\left(Tz, z\right) \le \frac{1}{1-k} d\left(z, T^n x\right) + \frac{k}{1-k} d\left(T^n x, T^{n-1}x\right)$$

$$<< \frac{1}{1-k}\frac{c(1-k)}{2} + \frac{k}{1-k}\frac{c(1-k)}{2k} = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $d\left(Tz, z\right) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - d\left(Tz, z\right) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d\left(Tz, z\right) \in P$ olur. $d\left(Tz, z\right) \in P$ olduğundan $d\left(Tz, z\right) = 0$ dır. Bu durumda $Tz = z$ olur.

T dönüşümü'nün ikinci bir sabit noktası z' olsun. O zaman (3.2.9) eşitsizliğinden

$$d\left(z, z'\right) = d\left(T^2 z, Tz'\right) \le k\ [\ d\left(T^2 z, Tz\right) + d\left(Tz', z'\right)\ ]$$

olup

$d(T^2z, Tz) = 0 = d(Tz', z')$ olduğundan

$$d(z, z') \leq 0$$

olur. Bu durumda $-d(z, z') \in P$ dir. 2.1.1 Tanım (iii) den $d(z, z') = 0$ olur. Buradan da $z = z'$ bulunur. O halde T ' nin sabit noktası tektir.

3.2.7 Teorem : (X, d) tam koni metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü, $0 \leq k < \frac{1}{2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T^2x, Ty) \leq k[\ d(Tx, Ty) + d(T^2x, y)\ ] \qquad (3.2.10)$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T 'nin X 'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Kanıt : Herhangi bir $x \in X$ alınsın. Her bir $n \in IN$ için (3.2.10) eşitsizliği kullanılırsa, $d(T^n x, T^n x) = 0$ olduğundan

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq k[\ d(T^n x, T^n x) + d(T^{n+1}x, T^{n-1}x)\ ] = kd(T^{n+1}x, T^{n-1}x)$$

olup, (d3) koşulundan

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq k[\ d(T^{n+1}x, T^n x) + d(T^n x, T^{n-1}x)\ ]$$

olur. Buradan,

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq \frac{k}{1-k} d(T^n x, T^{n-1}x)$$

bulunur.

$a = \frac{k}{1-k}$ alındığında, $0 \leq k < \frac{1}{2}$ olduğundan $0 \leq a < 1$ olup,

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq ad(T^n x, T^{n-1}x)$$

dir. Benzer biçimde devam edildiğinde, her $n \in IN$ için genelde

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \leq a^n d(Tx, x)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n < \infty$ olduğu için, 2.3.13 Önteoremden $\{T^n x\}, (X, d)$ tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

2.3.6 Önteoremden, herhangi bir $c \in E, 0 << c$ alındığında, $\forall n \geq N$ için $d(T^n x, z) << \frac{c(1-k)}{3}$ olacak biçimde bir $N \in IN$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n \geq N$ için

$$d(z,Tz) \leq d(z,T^n x) + d(T^n x, Tz)$$

olup, (3.2.10) eşitsizliği kullanıldığında

$$d(z,Tz) \leq d(z,T^n x) + k[\ d(T^{n-1}x,Tz) + d(T^n x,z)\ ] \qquad (3.2.11)$$

bulunur. (3.2.11) eşitsizliğinde (d3) koşulu kullanılırsa, $\forall n \geq N$ için

$$d(z,Tz) \leq d(z,T^n x) + k[\ d(T^{n-1}x,z) + d(z,Tz) + d(T^n x,z)\ ]$$

olur. Bu durumda, $\forall n \geq N$ için

$$d(Tz,z) \leq \frac{1}{1-k}\left[d(z,T^n x) + kd(T^{n-1}x,z) + kd(T^n x,z)\right]$$

$$<< \frac{1}{1-k}\left[\frac{c(1-k)}{3} + k\frac{c(1-k)}{3} + k\frac{c(1-k)}{3}\right] \leq \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c$$

elde edilir.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $d(Tz,z) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - d(Tz,z) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d(Tz,z) \in P$ olur. $d(Tz,z) \in P$ olduğundan $d(Tz,z) = 0$ dır. Bu durumda $Tz = z$ olur.

T dönüşümü'nün ikinci bir sabit noktası z' ise, o zaman (3.2.10) eşitsizliğinden

$$d(z,z') = d(T^2 z, Tz') \leq k[\ d(Tz,Tz') + d(T^2 z,z')\ ]$$

olup, $d(Tz,Tz') = d(T^2 z,z')$ olduğundan

$$d(z,z') \leq 2k\, d(z,z')$$

olur. O zaman, $2k < 1$ olduğu için 2.1.8 Önteoremden $d(z,z') = 0$ bulunur. Bu ise $z = z'$ olmasını verir. O halde T ' nin sabit noktası tektir.

3.2.8 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü, $0\le k<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(T^2x,Ty)\le k[d(T^2x,Tx)\vee d(Ty,y)] \tag{3.2.12}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x\in X$ için $\{T^nx\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Kanıt : 3.2.1 Teoremin kanıtına benzer biçimde yapılır.

3.2.9 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü, $0\le k<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(T^2x,Ty)\le k[\ d(Tx,Ty)\vee d(T^2x,y)\ ] \tag{3.2.13}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x\in X$ için $\{T^nx\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Kanıt : 3.2.2 Teoremin kanıtına benzer biçimde yapılır.

3.2.10 Not : (X,d) koni metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her bir $x,y\in X$ için $d(T^2x,Tx)$ ile $d(Ty,y)$ karşılaştırılabilir ise o zaman

$$d(T^2x,Tx)+d(Ty,y)\le 2[\ d(T^2x,Tx)\vee d(Ty,y)\ ]$$

dir.

Benzer biçimde her bir $x,y\in X$ için $d(Tx,Ty)$ ile $d(T^2x,y)$ karşılaştırılabilir ise o zaman

$$d(Tx,Ty)+d(T^2x,y)\le 2[\ d(Tx,Ty)\vee d(T^2x,y)\ ]$$

dir.

Bu durumda, eğer 3.2.6 ve 3.2.7 Teoremlerdeki (3.2.9) ve (3.2.10) eşitsizlikleri doğru ise sırasıyla, $k\in[0,1)$ olmak üzere 3.2.8 ve 3.2.9 Teoremlerdeki (3.2.12) ve (3.2.13) eşitsizlikleri elde edilir.

Böylece, eğer her bir $x, y \in X$ için, sırasıyla $d(T^2x, Tx)$ ile $d(Ty, y)$ ve $d(Tx, Ty)$ ile $d(T^2x, y)$ karşılaştırılabilir ise, o zaman 3.2.8 ve 3.2.9 Teoremleri, 3.2.6 ve 3.2.7 Teoremlerinden daha genel olacaktır.

Eğer 3.2.8 ve 3.2.9 Teoremlerinde $E = IR$, $P = \{x \in IR : x \geq 0\}$ ve $d : X \times X \to IR$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.2.11 Sonuç : (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü, $0 \leq k < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T^2x, Ty) \leq k \max\{d(T^2x, Tx), d(Ty, y)\}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

(*Fisher, B. , 1977*)

3.2.12 Sonuç : (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü, $0 \leq k < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(T^2x, Ty) \leq k \max\{d(Tx, Ty), d(T^2x, y)\}$$

daraltanlık koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T'nin X'te bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

(*Fisher, B. , 1977*)

3.3 DİZİSEL KOMPAKT KONİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu kesimde dizisel kompakt koni metrik uzaylarda, dönüşümlerin sabit noktaları verilecektir.

Dizisel kompakt koni metrik uzaylarda, L. -G. Huang ve X. Zhang aşağıdaki teoremi vermiştir.

3.3.1 Teorem : (X,d) dizisel kompakt bir koni metrik uzay, P de E de düzenli bir koni olsun. Eğer $T: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \tag{3.3.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, T nin X de bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

3.3.2 Not : (3.3.1) eşitsizliğini sağlayan her $T: X \to X$ dönüşümü süreklidir.

3.3.3 Tanım : E bir reel Banach uzayı, P de E de bir koni ve $x, y \in P - \{0\}$ olsun. Eğer $\mu y \leq x \leq \lambda y$ olacak biçimde $0 < \mu, \lambda$ reel sayıları varsa x, y ile karşılaştırılabilir denir.

3.3.3 Tanım kullanılarak 3.3.1 Teoremi, normal bir koniye sahip dizisel kompakt koni metrik uzaylarda aşağıdaki biçimde verilir.

3.3.4 Teorem : (X,d) dizisel kompakt bir koni metrik uzay, P de E de normal bir koni ve $T: X \to X$, her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için (3.3.1) eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer her bir $x, y \in X$ $(x \neq y)$ çifti için $d(Tx,Ty)$, $d(x,y)$ ile karşılaştırılabilirse, T nin X de bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

Kanıt : Eğer (3.1.1) eşitsizliğini sağlayan $0 \leq k < 1$ sayısı varsa, o zaman 3.1.1 Teoremden T nin bir sabit noktası vardır.

Şimdi böyle bir k sayısı var olmasın. O zaman her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için $d(Tx,Ty)$, $d(x,y)$ ile karşılaştırılabilir olduğundan,

$$d(Tx_n, Ty_n) > k_n d(x_n, y_n) \tag{3.3.2}$$

olacak biçimde X de $n=1,2,...$ için $\{x_n\},\{y_n\}$dizileri ve artan, 1'e yakınsayan reel sayıların bir $\{k_n\}$ dizisi vardır. X dizisel kompakt olduğundan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ in, x ve y gibi X deki iki elemana yakınsayan $\{x_{n_k}\}$ ve $\{y_{n_k}\}$ alt dizileri vardır. 2.1.6, 2.3.7 Önteoremleri ve 2.4.2 Teoremi kullanıldığında, (3.3.2) eşitsizliğinde limite geçilirse

$$d(Tx,Ty)\geq d(x,y)$$

bulunur. Bu ise ancak $Tx=Ty=x=y$ durumunda geçerli olur.

T nin sabit noktasının tekliği (3.3.1) eşitsizliğinden kolayca görülür.

E bir reel Banach uzayı ve P de E de bir koni olsun. $a,a_1,a_2,a_3,a_4\in E$ olmak üzere bir $a_i\in\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $(i=1,2,3,4)$ için $a<a_i$ ise, bu durum $a<\vee\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ile gösterilecektir.

Düzenli bir koniye sahip koni metrik uzaylarda 3.3.1 Teoremin genişlemesi, aşağıdaki biçimde verilecektir.

3.3.5 Teorem : (X,d) bir koni metrik uzay, P de E de düzenli bir koni, $T:X\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun ve her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için

$$d(Tx,Ty)<\vee\left\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),\frac{1}{2}\left(d(x,Ty)+d(y,Tx)\right)\right\} \qquad (3.3.3)$$

koşulunu sağlasın. Eğer bir $x\in X$ için $\{T^nx\}$ dizisinin bir $a\in X$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi varsa, o zaman a, T nin bir sabit noktasıdır ve bu sabit nokta tektir.

Kanıt : Herhangi bir $x\in X$ için $\{T^nx\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi alınsın. Bir $n\in IN$ için $T^{n+1}x=T^nx$ ise, T^nx, T nin bir sabit noktası olur. Her $n\in IN$ için $T^{n+1}x\neq T^nx$ olsun.
(3.3.3) eşitsizliğinden,

$$d(T^nx,T^{n+1}x)<\vee\left\{d(T^{n-1}x,T^nx),d(T^nx,T^{n+1}x),\frac{1}{2}\left(d(T^{n-1}x,T^{n+1}x)+d(T^nx,T^nx)\right)\right\}$$

dir. $d(T^nx,T^{n+1}x)<d(T^nx,T^{n+1}x)$ olamayacağından

$$d(T^nx,T^{n+1}x)<\vee\left\{d(T^{n-1}x,T^nx),\frac{1}{2}d(T^{n-1}x,T^{n+1}x)\right\}$$

olur. Burada iki durum söz konusudur.

1. Durum : $d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < d\left(T^{n-1}x, T^n x\right)$ veya

2. Durum : $d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < \frac{1}{2} d\left(T^{n-1}x, T^{n+1}x\right)$ ise (d3) koşulundan

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < \frac{1}{2} d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \frac{1}{2} d\left(T^n x, T^{n+1}x\right)$$

olup, buradan

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < d\left(T^{n-1}x, T^n x\right)$$

bulunur.

Böylece 1. ve 2. durumlardan $\forall n \in IN$ için,

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < d\left(T^{n-1}x, T^n x\right)$$

olur. $n \in IN$ için $d_n = d\left(T^n x, T^{n+1}x\right)$ olarak alınırsa $\forall n \in IN$ için $d_n < d_{n-1}$ olup $\{d_n\}$, 0 ile alttan sınırlı ve azalan bir dizi olur. P düzenli bir koni olduğundan $d_n \to d^* \ (n \to \infty)$ olacak biçimde bir $d^* \in E$ vardır. Varsayımdan $\left\{T^n x\right\}$ dizisinin bir $a \in X$ noktasına yakınsayan bir $\left\{T^{n_k} x\right\}$ alt dizisi vardır. 2.4.2 Teoremden $T\left(T^{n_k} x\right) \to Ta \ (k \to \infty)$ olup $T^2\left(T^{n_k} x\right) \to T^2 a \ (k \to \infty)$ olur. 2.3.7 Önteoremden

$$d\left(T\left(T^{n_k} x\right), T^{n_k} x\right) \to d(Ta, a) \quad (k \to \infty)$$

ve

$$d\left(T^2\left(T^{n_k} x\right), T\left(T^{n_k} x\right)\right) \to d\left(T^2 a, Ta\right) \quad (k \to \infty)$$

dir. Böylece

$$d_{n_k} = d\left(T^{n_k} x, T^{n_k+1} x\right) \to d(a, Ta) = d^*$$

bulunur.

Bu durumda $Ta = a$ dır.

Gerçekten,

$Ta \neq a$ ise $d^* = d(a, Ta) \neq 0$ olup

$$d^* = \lim_{k\to\infty} d_{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} d\left(T^{n_k+1} x, T\left(T^{n_k+1} x\right)\right)$$

$$= d\left(Ta, T^2 a\right) < \vee\left\{d(a, Ta),\ d\left(Ta, T^2 a\right), \frac{1}{2} d\left(a, T^2 a\right)\right\}$$

dir. $d\left(Ta, T^2 a\right) < d\left(Ta, T^2 a\right)$ olamayacağından iki durum söz konusudur.

1.Durum : $d(Ta,T^2a)<d(a,Ta)$ ise,

$$d^* = d(Ta,T^2a)<d(a,Ta)=d^*$$

olup çelişki elde edilir.

2. Durum : $d(Ta,T^2a)<\frac{1}{2}d(a,T^2a)$ ise (d3) den

$$d(Ta,T^2a)<\frac{1}{2}d(a,Ta)+\frac{1}{2}d(Ta,T^2a)$$

olup $d(Ta,T^2a)<d(a,Ta)$, yani $d^* < d^*$ bulunur ki bu da bir çelişkidir.

Böylece her iki durumdan $Ta=a$ dır.

$a \neq a'$ olmak üzere a', T nin başka bir sabit noktası olsun. O zaman (3.3.3) eşitsizliğinden,

$$d(a,a')=d(Ta,Ta')<\vee\left\{d(a,a'),d(a,Ta),d(a',Ta'),\frac{1}{2}(d(a,Ta')+d(a',Ta))\right\}$$

$$=\vee\{0,\ d(a,a')\}$$

bulunur. Eğer $d(a,a')<0$ ise $d(a,a')=0$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Eğer $d(a,a')<d(a,a')$ ise bu da bir çelişkidir. Şu halde $a=a'$ olmak zorundadır.

3.3.6 Teorem: (X,d) bir koni metrik uzay, P E de düzenli bir koni ve $T:X\to X$ $\alpha,\beta,\mu,\delta\geq 0$, $\alpha+\beta>0$ ve $\alpha+\beta+\mu+2\delta=1$ olmak üzere her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için

$$d(Tx,Ty)<\alpha d(x,y)+\beta d(x,Tx)+\mu d(y,Ty)+\delta(d(x,Ty)+d(y,Tx)) \qquad (3.3.4)$$

koşulunu sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer bir $x\in X$ için $\{T^nx\}$ dizisinin bir $a\in X$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi varsa, o zaman a, T nin bir sabit noktasıdır ve bu sabit nokta tektir.

Kanıt : Herhangi bir $x\in X$ için $\{T^nx\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi alınsın. Bir $n\in IN$ için $T^{n+1}x=T^nx$ ise, T^nx, T nin bir sabit noktası olur. Her $n\in IN$ için $T^{n+1}x\neq T^nx$ olsun. (3.3.4) eşitsizliğinden

$$d(T^nx,T^{n+1}x)<\alpha d(T^{n-1}x,T^nx)+\beta d(T^{n-1}x,T^nx)+\mu d(T^nx,T^{n+1}x)+\delta d(T^{n-1}x,T^{n+1}x)$$

olup, (d3) koşulu kullanıldığında

$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < (\alpha+\beta)d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \mu\, d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) + \delta\, d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \delta\, d\left(T^n x, T^{n+1}x\right)$
bulunur. Buradan

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) < \frac{\alpha+\beta+\delta}{1-\mu-\delta} d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) = d\left(T^{n-1}x, T^n x\right)$$

elde edilir. $n \in IN$ için $d_n = d\left(T^n x, T^{n+1}x\right)$ olarak alınırsa $\forall n \in IN$ için $d_n < d_{n-1}$ olup $\{d_n\}$, 0 ile alttan sınırlı ve azalan bir dizi olur. P düzenli bir koni olduğundan $d_n \to d^*$ $(n \to \infty)$ olacak biçimde bir $d^* \in E$ vardır. Varsayımdan $\left\{T^n x\right\}$ dizisinin bir $a \in X$ noktasına yakınsayan bir $\left\{T^{n_k} x\right\}$ alt dizisi vardır. 2.4.2 Teoremden $T\left(T^{n_k} x\right) \to Ta$ $(k \to \infty)$ olup $T^2\left(T^{n_k} x\right) \to T^2 a$ $(k \to \infty)$ olur. 2.3.7 Önteoremden

$$d\left(T\left(T^{n_k} x\right), T^{n_k} x\right) \to d(Ta, a) \quad (k \to \infty)$$

ve

$$d\left(T^2\left(T^{n_k} x\right), T\left(T^{n_k} x\right)\right) \to d\left(T^2 a, Ta\right) \quad (k \to \infty)$$

dir. Böylece

$$d_{n_k} = d\left(T^{n_k} x, T^{n_k+1}x\right) \to d(a, Ta) = d^*$$

bulunur.

Bu durumda $Ta = a$ dır.

Gerçekten,

$Ta \neq a$ ise $d^* = d(a, Ta) \neq 0$ olup,

$$d^* = \lim_{k\to\infty} d_{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} d\left(T^{n_k+1}x, T\left(T^{n_k+1}x\right)\right) = d\left(Ta, T^2 a\right)$$

olur. (3.3.4) eşitsizliği ve (d3) koşulu kullanıldığında,

$$d\left(Ta, T^2 a\right) < \alpha\, d(a, Ta) + \beta\, d(a, Ta) + \mu\, d\left(Ta, T^2 a\right) + \delta\, d(a, Ta) + \delta\, d\left(Ta, T^2 a\right)$$

elde edilir. Buradan

$$d\left(Ta, T^2 a\right) < \frac{\alpha+\beta+\delta}{1-\mu-\delta} d(a, Ta) = d(a, Ta)$$

yani, $d^* < d^*$ bulunur ki bu da bir çelişkidir. Böylece $Ta = a$ dır.

$a \neq a'$ olmak üzere a', T nin başka bir sabit noktası olsun. O zaman (3.3.4) eşitsizliğinden,

$$d(a, a') = d(Ta, Ta') < \alpha\, d(a, a') + \beta\, d(a, Ta) + \mu\, d(a', Ta') + \delta\left(d(a, Ta') + d(a', Ta)\right)$$

olup,

$$d(a,a') < (\alpha + 2\delta) d(a,a')$$

dir. $\alpha + 2\delta \leq 1$ olduğundan

$$d(a,a') < d(a,a')$$

bulunur. Şu halde $a = a'$ olmak zorundadır.

IV. BÖLÜM

KONİ METRİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLERİN ORTAK SABİT NOKTALARI

M. Abbas ve G. Jungck (2008), C. Di Bari ve P. Vetro (2008), A. Azam vd. (2008), M. Abbas ve B. E. Rhoades (2009), S. Janković vd. (2009), G. Jungck vd. (2009), dönüşüm çiftlerini göz önüne alarak, değişik koşullar altında onların sabit noktaları ile ilgili bir çok teorem vermişlerdir.

Bu bölümde, değişik koşulları sağlayan dönüşümlerin ortak sabit noktalarının varlığı ve tekliği incelenecektir.

4.1 DARALTAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.1.1 Teorem : (X,d) bir tam koni metrik uzay, $f,g:X\to X$, $a,b<1$ olmak üzere her $x\in X$ için

$$d(fgx,gx)\le ad(x,gx) \tag{4.1.1}$$

ve

$$d(gfx,fx)\le bd(x,fx) \tag{4.1.2}$$

koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer, f ya da g sürekli ise, o zaman f ve g nin ortak bir sabit noktası vardır.

Kanıt : $x_0\in X$ alınsın. $x_1=fx_0$, $gx_1=x_2$ olmak üzere $n=0,1,2,...$ için $x_{2n+1}=fx_{2n}$, $x_{2n+2}=gx_{2n+1}$ olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın.

Eğer bir $n\in IN$ için $x_n=x_{n+1}$ ise, o zaman x_n, f ve g nin bir sabit noktasıdır. Gerçekten, eğer bir $n\ge 0$ için $x_{2n}=x_{2n+1}$ ise x_{2n}, f nin bir sabit noktası olur. (4.1.2) eşitsizliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) &= d(gx_{2n+1}, fx_{2n}) \\ &= d(gfx_{2n}, fx_{2n}) \\ &\le bd(x_{2n}, fx_{2n}) \\ &= bd(x_{2n}, x_{2n+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup, buradan $-d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \in P$ bulunur. $d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) \in P$ olduğundan $d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) = 0$ olur. Bu ise $x_{2n+1} = x_{2n+2}$ olmasını verir.

Böylece x_{2n}, f ve g nin ortak bir sabit noktasıdır.

Eğer, bir $n \ge 0$ için $x_{2n+1} = x_{2n+2}$ ise, benzer olarak (4.1.1) eşitsizliği kullanıldığında x_{2n+1}, f ve g nin ortak bir sabit noktası olur.

Her $n \ge 0$ için $x_n \ne x_{n+1}$ olduğu varsayılsın. (4.1.2) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_{2n+2}, x_{2n+1}) &= d(gx_{2n+1}, fx_{2n}) \\ &= d(gfx_{2n}, fx_{2n}) \\ &\le bd(x_{2n}, fx_{2n}) \\ &= bd(x_{2n}, x_{2n+1}) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

bulunur. Benzer biçimde (4.1.1) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n-1}) \\ &= d(fgx_{2n-1}, gx_{2n-1}) \\ &\le ad(x_{2n-1}, gx_{2n-1}) \\ &= ad(x_{2n-1}, x_{2n}) \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olur. $\max\{a,b\} = k$ alındığında, $k < 1$ olup, (4.1.3) ve (4.1.4) eşitsizliklerinden her $n = 0,1,2,...$ için

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n}, x_{2n+1})$$

ve

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \le kd(x_{2n-1}, x_{2n})$$

dir. Böylece her $n = 0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\le kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\le k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\le k^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ olduğu için, 2.3.13 Önteoremden $\{x_n\}$, (X,d) tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $x_n \to z \ (n \to \infty)$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

f sürekli ve $x_{2n+1} = fx_{2n}$ olduğundan, 2.4.2 Teoremden

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} fx_{2n} = fz$$

olur. Yani z, f nin bir sabit noktasıdır. (4.1.2) eşitsizliğinden,

$$d(gz,z) = d(gfz,\ fz) \le bd(z,\ fz) = bd(z,z) = 0$$

yani $-d(gz,z) \in P$ bulunur. $d(gz,z) \in P$ olduğundan $d(gz,z) = 0$ olur. Bu ise $gz = z$ olmasını verir.

O halde z, f ve g nin ortak bir sabit noktası olur.

Benzer olarak, g sürekli olduğunda da f ve g nin ortak bir sabit noktasının var olduğu kolayca görülür.

Eğer 4.1.1 Teoremde $E = IR$ ve $P = [0,\infty)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.2 Sonuç : (X,d) bir tam metrik uzay, $f,g : X \to X$, $a,b < 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(fgx, gx) \le ad(x, gx) \qquad \text{ve} \qquad d(gfx,\ fx) \le bd(x,\ fx)$$

koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer, f ya da g sürekli ise, o zaman f ve g nin ortak bir sabit noktası vardır.

4.1.3 Teorem : (X,d) tam metrik uzay ve $f,g : X \to X$, $a,b < 1$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d(fgx, gy) \le ad(x, gy) \qquad \text{ve} \qquad d(gfx,\ fy) \le bd(x,\ fy)$$

koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer, f ve g sürekli ise, o zaman f ve g nin ortak bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

(*Iseki, K. , 1974*)

Yukarıdaki teoremde $y = x$ alınırsa, 4.1.2 Sonucundaki eşitsizlikler elde edilir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten, $X = IR$, $d(x,y) = |x-y|$, $fx = \frac{x}{3}, gx = \frac{x}{2}$ alınırsa, 4.1.2 Sonuçtaki eşitsizlikler sağlanmasına rağmen, 4.1.3 Teoremdeki eşitsizlikler sağlanmaz.

4.1.1 Teoremde $f = g$ ve $k = \max\{a,b\}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.4 Sonuç : (X,d) bir tam koni metrik uzay ve $f : X \to X$, $k < 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(f^2x, fx) \le kd(x, fx)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer f sürekli ise, o zaman f nin bir sabit noktası vardır.

4.1.5 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzayı ve $T,S : X \to X$ dönüşümleri verilsin. Her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Sy) \le k \vee \left\{ d(x,y), \frac{1}{2}\left(d(x,Tx)+d(y,Sy)\right), \frac{1}{2}\left(d(x,Sy)+d(y,Tx)\right)\right\} \qquad (4.1.5)$$

olacak biçimde bir $0 \le k < 1$ var ise, o zaman T ve S, X içinde ortak bir sabit noktaya sahiptir ve bu nokta tektir.

Kanıt : $x_0 \in X$ alınsın. $x_1 = Tx_0$, $Sx_1 = x_2$ olmak üzere $n = 0,1,2,...$ için $x_{2n+1} = Tx_{2n}$, $x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$ olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. (4.1.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1})$$

$$\le k \vee \left\{ d(x_{2n}, x_{2n+1}), \frac{1}{2}\left(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right), \frac{1}{2} d(x_{2n}, x_{2n+2})\right\}$$

bulunur. Burada üç durum söz konusudur.

<u>1. Durum</u> : $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n}, x_{2n+1})$.

<u>2. Durum</u> : $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le k\frac{1}{2}\left(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right)$ ise

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le \frac{k}{2-k} d(x_{2n}, x_{2n+1})$$

ve $0 \le k < 1$ olduğundan $\frac{k}{2-k} < k$ olup,

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n}, x_{2n+1})$$

bulunur.

3. Durum : $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le k\frac{1}{2}d(x_{2n}, x_{2n+2})$ ise (d3) koşulundan,

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le k\frac{1}{2}(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2}))$$

bulunur. 2. Durumdaki gibi benzer biçimde

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n}, x_{2n+1})$$

elde edilir.

Böylece üç durumda da, her $n = 0,1,2,...$ için

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n}, x_{2n+1})$$

olur. Benzer olarak, yine (4.1.5) eşitsizliğinden,

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) = d(Tx_{2n+2}, Sx_{2n+1})$$

$$\le k \vee \left\{ d(x_{2n+2}, x_{2n+1}), \frac{1}{2}(d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \frac{1}{2}d(x_{2n+1}, x_{2n+3}) \right\}$$

olup, burada da üç durum vardır.

1. Durum : $d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n+2}, x_{2n+1})$.

2. Durum : $d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le k\frac{1}{2}(d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2}))$ ise

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le \frac{k}{2-k}d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

ve $0 \le k < 1$ olduğundan $\frac{k}{2-k} < k$ olup,

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

bulunur.

3. Durum : $d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le k\frac{1}{2}d(x_{2n+1}, x_{2n+3})$ ise (d3) koşulundan,

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le k\frac{1}{2}(d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + d(x_{2n+2}, x_{2n+3}))$$

bulunur. 2. Durumdaki gibi benzer biçimde

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \le kd(x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

elde edilir.

Böylece üç durumda da, her $n = 0,1,2,...$ için

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \leq kd(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

olur. Böylece $n = 0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ olduğundan, 2.3.13 Önteoremden $\{x_n\}$, (X,d) tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $x_n \to z$ $(n \to \infty)$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

2.3.6 Önteoremden, herhangi bir $c \in E, 0 << c$ alındığında, $\forall n \geq N$ için $d(x_{2n}, z) << \frac{c}{4}$, $d(x_{2n}, x_{2n+1}) << \frac{c}{4}$ ve $d(x_{2n+1}, z) << \frac{c}{4}$ olacak biçimde bir $N \in IN$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n \geq N$ için

$$d(z, Sz) \leq d(z, Tx_{2n}) + d(Tx_{2n}, Sz) \tag{4.1.6}$$

olup, (4.1.5) eşitsizliğinden

$$d(Tx_{2n}, Sz) \leq k \vee \left\{ d(x_{2n}, z), \frac{1}{2}\left(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(z, Sz) \right), \frac{1}{2}\left(d(x_{2n}, Sz) + d(z, x_{2n+1}) \right) \right\}$$

bulunur. Burada, $\forall n \geq N$ için üç durum söz konusudur.

<u>1. Durum</u> : Eğer, $d(Tx_{2n}, Sz) \leq kd(x_{2n}, z)$ ise o zaman (4.1.6) eşitsizliğinden

$$d(z, Sz) \leq d(z, x_{2n+1}) + kd(x_{2n}, z) << \frac{c}{4} + \frac{c}{4} \leq c$$

elde edilir.

<u>2. Durum</u> : Eğer, $d(Tx_{2n}, Sz) \leq k\frac{1}{2}\left(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(z, Sz) \right)$ ise o zaman (4.1.6) eşitsizliğinden

$$d(z, Sz) \leq \frac{2}{2-k}\left(d(z, x_{2n+1}) + \frac{k}{2} d(x_{2n}, x_{2n+1}) \right) << 2\left(\frac{c}{4} + \frac{c}{4} \right) = c$$

elde edilir.

3. Durum : Eğer, $d(Tx_{2n}, Sz) \le k\frac{1}{2}\left(d(x_{2n}, Sz) + d(z, x_{2n+1})\right)$ ise o zaman (4.1.6) eşitsizliğinden

$$d(z, Sz) \le d(z, x_{2n+1}) + \frac{k}{2}d(x_{2n}, Sz) + \frac{k}{2}d(z, x_{2n+1})$$

olur. (d3) koşulu kullanılırsa

$$d(z, Sz) \le d(z, x_{2n+1}) + \frac{k}{2}d(x_{2n}, z) + \frac{k}{2}d(z, Sz) + \frac{k}{2}d(z, x_{2n+1})$$

olup

$$d(z, Sz) \le \frac{2+k}{2-k}d(z, x_{2n+1}) + \frac{k}{2-k}d(x_{2n}, z) << 3\frac{c}{4} + \frac{c}{4} = c$$

elde edilir.

Böylece 1. , 2. ve 3. durumlardan her $c \in E,\ 0 << c$ için $d(z, Sz) << c$ olur.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $d(z, Sz) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - d(z, Sz) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d(z, Sz) \in P$ olur. $d(z, Sz) \in P$ olduğundan $d(z, Sz) = 0$ dır. Bu durumda $Sz = z$ olur.

(4.1.5) eşitsizliğinden

$$d(Tz, z) = d(Tz, Sz) \le k \vee \left\{ d(z, z), \frac{1}{2}\left(d(z, Tz) + d(z, Sz)\right), \frac{1}{2}\left(d(z, Sz) + d(z, Tz)\right) \right\}$$

$$= k \vee \left\{ 0, \frac{1}{2}d(z, Tz) \right\}$$

olur. Eğer $d(Tz, z) \le k.0$ ise $z = Tz$ olduğu açıktır. Eğer $d(z, Tz) \le \frac{k}{2}d(z, Tz)$ ise $k < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(z, Tz) = 0$ bulunur. Bu ise $z = Tz$ olmasını verir.

Böylece z, T ve S nin ortak bir sabit noktasıdır.

T ve S dönüşümlerinin z den başka bir ortak sabit noktası z' olsun. O zaman (4.1.5) eşitsizliğinden

$$d(z,z') = d(Tz,Sz') \le k \vee \left\{ d(z,z'), \frac{1}{2}\left(d(z,Tz)+d(z',Sz')\right), \frac{1}{2}\left(d(z,Sz')+d(z',Tz)\right) \right\}$$

$$= k \vee \{0,\ d(z,z')\ \}$$

olur. Eğer $d(z',z) \le k.0$ ise $z = z'$ olduğu açıktır. Eğer $d(z,z') \le kd(z,z')$ ise $k < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(z,z') = 0$ bulunur. Bu ise $z = z'$ olmasını verir. Şu halde T ve S nin ortak sabit noktası tektir.

4.1.5 Teoremde $T = S$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.6 Sonuç : (X,d) tam koni metrik uzayı ve $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le k \vee \left\{ d(x,y), \frac{1}{2}\left(d(x,Tx)+d(y,Ty)\right), \frac{1}{2}\left(d(x,Ty)+d(y,Tx)\right) \right\}$$

olacak biçimde bir $0 \le k < 1$ var ise, o zaman T, X içinde bir sabit noktaya sahiptir ve bu nokta tektir.

4.2 GENİŞLEME TİPİNDEKİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.2.1 Teorem : (X,d) tam koni metrik uzay, P, E de bir koni ve $f, g : X \to X$, örten ve $a, b > 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(gfx,\ fx) \ge ad(fx,x) \tag{4.2.1}$$

$$d(fgx,gx) \ge bd(gx,x) \tag{4.2.2}$$

koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. Eğer, f ya da g sürekli ise, o zaman f ve g nin ortak bir sabit noktası vardır.

Kanıt : $x_0 \in X$ alınsın. f ve g örten olduğundan, $x_1 \in f^{-1}(x_0)$ ve $x_2 \in g^{-1}(x_1)$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır. Benzer biçimde devam edildiğinde, $n \ge 0$ için $x_{2n+1} \in f^{-1}(x_{2n})$ ve $x_{2n+2} \in g^{-1}(x_{2n+1})$ biçiminde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir.

Eğer bir $n \in IN$ için $x_n = x_{n+1}$ ise, o zaman x_n, f ve g nin bir sabit noktasıdır. Gerçekten, eğer bir $n \geq 0$ için $x_{2n} = x_{2n+1}$ ise x_{2n}, f nin bir sabit noktası olur. (4.2.2) eşitsizliği kullanıldığında,

$$0 = d(x_{2n}, x_{2n+1}) = d(fx_{2n+1}, gx_{2n+2}) = d(fgx_{2n+2}, gx_{2n+2}) \geq bd(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

olup, buradan $-bd(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \in P$ bulunur. $b > 1$ ve $d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \in P$ olduğundan 2.1.1 Tanım (ii) den $bd(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \in P$ dir. Bu durumda $bd(x_{2n+1}, x_{2n+2}) = 0$ olup, $b > 1$ olduğundan $x_{2n+1} = x_{2n+2}$ bulunur.

Böylece x_{2n}, f ve g nin ortak bir sabit noktasıdır.

Eğer, bir $n \geq 0$ için $x_{2n+1} = x_{2n+2}$ ise, benzer olarak (4.2.1) eşitsizliği kullanıldığında x_{2n+1}, f ve g nin ortak bir sabit noktası olur.

Her $n \in IN$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğu varsayılsın. (4.2.1) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(gx_{2n+2}, fx_{2n+3}) \\ &= d(gfx_{2n+3}, fx_{2n+3}) \\ &\geq ad(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

ve benzer biçimde (4.2.2) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(fx_{2n+1}, gx_{2n+2}) \\ &= d(fgx_{2n+2}, gx_{2n+2}) \\ &\geq bd(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

bulunur. $\alpha = \min\{a, b\}$ alındığında (4.2.3) ve (4.2.4) eşitsizliklerinden, sırasıyla

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \leq \alpha^{-1} d(x_{2n+1}, x_{2n+2})$$

ve

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \alpha^{-1} d(x_{2n}, x_{2n+1})$$

olur.

Böylece $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha^{-1} d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{-2} d(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq \alpha^{-n} d(x_1, x_2)$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} < \infty$ olduğundan, 2.3.13 Önteoremden $\{x_n\}$, (X, d) tam koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olacağından, $x_n \to z$ $(n \to \infty)$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

f sürekli ve $x_{2n} = fx_{2n+1}$ olduğundan, 2.4.2 Teoremden

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} fx_{2n+1} = fz$$

olur. Yani z, f nin bir sabit noktasıdır.

g örten olduğundan $gy = z$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır. Böylece (4.2.2) eşitsizliğinden

$$0 = d(fz, gy) = d(fgy, gy) \geq bd(gy, y) = bd(z, y)$$

yani, $-bd(z,y) \in P$ bulunur. $bd(z,y) \in P$ olduğundan $bd(z,y) = 0$ olup, $b > 1$ olduğu için $d(z,y) = 0$ olur. Bu ise $z = y$ olmasını verir. Böylece z, g nin de bir sabit noktasıdır.

O halde z, f ve g nin ortak bir sabit noktası olur.

Benzer olarak, g sürekli olduğunda da f ve g nin ortak bir sabit noktasının var olduğu kolayca görülür.

4.2.1 Teoremde $f = g$ ve $k = \min\{a,b\}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.2 Sonuç : (X,d) tam koni metrik uzay, P E de bir koni ve $f : X \to X$ örten ve $k > 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(f^2x, fx) \geq kd(fx, x)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer f sürekli ise, o zaman f nin bir sabit noktası vardır.

Eğer, 4.2.2 Sonuçta $E = IR$, $P = \{x \in IR : x \geq 0\}$ ve $d : X \times X \to IR$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.3 Sonuç : (X,d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$, örten ve $k > 1$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$d(f^2x, fx) \geq kd(fx, x)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer f sürekli ise, o zaman f nin bir sabit noktası vardır.

(*Wang, S.Z. , vd, 1984*)

4.3 İKİ KONİ METRİK UZAY ÜZERİNDE DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu kesimde E reel Banach uzayı, P E de bir koni, X ve Y boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere, X üzerinde $d: X \times X \to E$ ve Y üzerinde $\rho: Y \times Y \to E$ koni metrikleri göz önüne alınacaktır.

4.3.1 Teorem : $(X,d),(Y,\rho)$ tam koni metrik uzaylar, $T: X \to Y$ ve $S: Y \to X$, $0 \le k < 1$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\rho(Tx,TSy) \le k \vee \{ d(x,Sy),\ \rho(y,Tx),\ \rho(y,TSy) \} \tag{4.3.1}$$

$$d(Sy,STx) \le k \vee \{ \rho(y,Tx),\ d(x,Sy),\ d(x,STx) \} \tag{4.3.2}$$

koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. O zaman, ST nin bir $z \in X$ sabit noktası ve TS nin bir $w \in Y$ sabit noktası vardır ve bu sabit noktalar tektir. Ayrıca $Tz = w$ ve $Sw = z$ dir.

Kanıt : Herhangi bir $x \in X$ alınsın. $n = 1,2,...$ için $(ST)^n x = x_n$, $T(ST)^{n-1} x = y_n$ olacak biçimde $\{x_n\} \subset X$ ve $\{y_n\} \subset Y$ dizileri tanımlansın.

Eğer, bir $n \in IN$ için $x_n = x_{n+1}$ ve $y_n = y_{n+1}$ ise $(ST)^n x$, ST nin ve $T(ST)^{n-1} x$, TS nin sabit noktası olur. Her bir $n \in IN$ için $x_n \neq x_{n+1}$ ve $y_n \neq y_{n+1}$ olduğu varsayılsın. (4.3.2) eşitsizliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d\left(S\left(T(ST)^{n-1} x\right), ST(ST)^n x \right) \\ &\le k \vee \left\{ \rho\left(T(ST)^{n-1} x, T(ST)^n x\right),\ d\left((ST)^n x, (ST)^n x\right),\ d\left((ST)^n x, (ST)^{n+1} x\right) \right\} \\ &= k \vee \{ \rho(y_n, y_{n+1}), 0,\ d(x_n, x_{n+1}) \} \end{aligned}$$

olur. Eğer $d(x_n, x_{n+1}) \le k.0$ ise $d(x_n, x_{n+1}) = 0$ olacağından bu varsayımla çelişir. Eğer $d(x_n, x_{n+1}) \le k d(x_n, x_{n+1})$ ise o zaman $k < 1$ olduğu için 2.1.8 Önteoremden $d(x_n, x_{n+1}) = 0$ elde edilir. Bu ise varsayımla çelişir. Bu nedenle

$$d(x_n, x_{n+1}) \le k\rho(y_n, y_{n+1}) \tag{4.3.3}$$

dir. (4.3.1) eşitsizliği kullanıldığında,

$$\rho(y_n, y_{n+1}) = \rho\left(T(ST)^{n-1} x, TS\left(T(ST)^{n-1} x\right)\right)$$

$$\leq k \vee \left\{ d\left((ST)^{n-1}x, (ST)^{n}x \right),\ \rho\left(T(ST)^{n-1}x, T(ST)^{n-1}x \right),\ \rho\left(T(ST)^{n-1}x, T(ST)^{n}x \right) \right\}$$

$$= k \vee \left\{ d(x_{n-1}, x_n), 0,\ \rho(y_n, y_{n+1}) \right\}$$

olur. Eğer $\rho(y_n, y_{n+1}) \leq k.0$ ise $\rho(y_n, y_{n+1}) = 0$ olup, varsayımla çelişir. Eğer $\rho(y_n, y_{n+1}) \leq k\rho(y_n, y_{n+1})$ ise o zaman $k < 1$ olduğu için 2.1.8 Önteoremden $\rho(y_n, y_{n+1}) = 0$ elde edilir. Bu ise varsayımla çelişir. Bu nedenle

$$\rho(y_n, y_{n+1}) \leq k d(x_{n-1}, x_n) \tag{4.3.4}$$

dir. Böylece (4.3.3) ve (4.3.4) eşitsizliklerinden

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k\rho(y_n, y_{n+1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Benzer biçimde devam edildiğinde $n = 1, 2, \ldots$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{2n} d(x, x_1)$$

ve

$$\rho(y_n, y_{n+1}) \leq k^{2n-1} d(x, x_1)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} k^n < \infty$ olduğundan, 2.3.13 Önteoremden $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ sırasıyla (X, d) ve (Y, ρ) tam koni metrik uzaylarında birer Cauchy dizisi olacağından, $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = w$ olacak biçimde bir $z \in X$ ve bir $w \in Y$ vardır.

2.3.6 Önteoremden, herhangi bir $c \in E, 0 << c$ alındığında, $\forall n \geq N$ için $d(z, x_{n-1}) << \frac{c}{2}$, $\rho(y_n, w) << \frac{c(1-k)}{2}$, $\rho(y_{n-1}, w) << \frac{c(1-k)}{2}$ ve $\rho(y_{n-1}, y_n) << \frac{c}{2}$ olacak biçimde bir $N \in IN$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n \geq N$ için

$$\rho(Tz, w) \leq \rho(Tz, y_n) + \rho(y_n, w) \tag{4.3.5}$$

olup, (4.3.1) eşitsizliğinden

$$\rho(Tz, y_n) = \rho\left(Tz, T(ST)^{n-1}x\right) = \rho(Tz, TSy_{n-1})$$

$$\leq k \vee \left\{ d(z, x_{n-1}),\ \rho(y_{n-1}, Tz),\ \rho(y_{n-1}, y_n) \right\}$$

bulunur. Burada, $\forall n \geq N$ için üç durum söz konusudur.

1. Durum : Eğer, $\rho(Tz, y_n) \leq k d(z, x_{n-1})$ ise o zaman (4.3.5) eşitsizliğinden

$$\rho(Tz, w) \leq k d(z, x_{n-1}) + \rho(y_n, w) << \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.

2. Durum : Eğer, $\rho(Tz, y_n) \leq k\rho(y_{n-1}, Tz)$ ise o zaman (4.3.5) eşitsizliğinden ve (d3) koşulundan,

$$\rho(Tz, w) \leq k\rho(y_{n-1}, w) + k\rho(w, Tz) + \rho(y_n, w)$$

olup, buradan

$$\rho(Tz, w) \leq \frac{k}{1-k}\rho(y_{n-1}, w) + \frac{1}{1-k}\rho(y_n, w) << \frac{k}{1-k}\frac{c(1-k)}{2} + \frac{1}{1-k}\frac{c(1-k)}{2} \leq c$$

elde edilir.

3. Durum : Eğer, $\rho(Tz, y_n) \leq k\rho(y_{n-1}, y_n)$ ise o zaman (4.3.5) eşitsizliğinden

$$\rho(Tz, w) \leq k\rho(y_{n-1}, y_n) + \rho(y_n, w) << k\frac{c}{2} + \frac{c(1-k)}{2} \leq c$$

elde edilir.

Böylece üç durumdan da her $c \in E,\ 0 << c$ için $\rho(Tz, w) << c$ olur.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $\rho(Tz, w) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - \rho(Tz, w) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-\rho(Tz, w) \in P$ olur. $\rho(Tz, w) \in P$ olduğundan $\rho(Tz, w) = 0$ dır. Bu durumda $Tz = w$ olur.

Benzer biçimde $Sw = z$ olur. Böylece

$$STz = Sw = z,\ TSw = Tz = w$$

bulunur. Yani, z ST nin ve w TS nin birer sabit noktası olurlar.

ST dönüşümünün ikinci bir sabit noktası z' olsun.O zaman (4.3.2) eşitsizliğinden

$$d(z', z) = d(STz', STz) \leq k \vee \{\rho(Tz', Tz),\ d(z, STz'),\ d(z, STz)\}$$
$$= k \vee \{\rho(Tz', Tz), d(z, z'), 0\} \qquad (4.3.6)$$

olur. Eğer (4.3.6) eşitsizliğinde, $d(z', z) \leq k.0$ ise $z = z'$ olduğu açıktır. Eğer (4.3.6) eşitsizliğinde $d(z', z) \leq kd(z, z')$ ise o zaman $k < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(z', z) = 0$ bulunur. Bu ise $z = z'$ olmasını verir.

Eğer (4.3.6) eşitsizliğinde $d(z', z) \leq k\rho(Tz', Tz)$ ise (4.3.1) eşitsizliğinden

$$\rho(Tz', Tz) = \rho(Tz', TSTz) \leq k \vee \{d(z', STz),\ \rho(Tz, Tz'),\ \rho(Tz, TSTz)\}$$
$$= k \vee \{d(z', z), \rho(Tz, Tz'), 0\}$$

olup, burada üç durum söz konusudur.

1. Durum: Eğer $\rho(Tz', Tz) \le kd(z', z)$ ise o zaman,

$$d(z', z) \le k\rho(Tz', Tz) \le k^2 d(z', z)$$

olup, $k^2 < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(z', z) = 0$ bulunur. Bu ise $z = z'$ olmasını verir.

2.Durum: Eğer $\rho(Tz', Tz) \le k\rho(Tz', Tz)$ ise o zaman $k < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $\rho(Tz', Tz) = 0$ bulunur. Bu ise $Tz' = Tz$ olmasını verir. Böylece

$$d(z', z) \le k\rho(Tz', Tz) = 0$$

bulunur. Bu ise $-d(z', z) \in P$ olmasını verir. $d(z', z) \in P$ olduğundan $d(z', z) = 0$, yani $z' = z$ olur.

3. Durum : Eğer $\rho(Tz', Tz) \le k.0$ ise $\rho(Tz', Tz) = 0$ olacağından 2. Durumdaki gibi benzer biçimde $z' = z$ olur.

O halde ST dönüşümünün sabit noktası tektir.

Benzer biçimde, TS dönüşümünün sabit noktasının tekliği de gösterilir.

4.3.1 Teoremde $X = Y$ ve $d = \rho$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.3.2 Sonuç : (X, d) tam koni metrik uzay, $S, T : X \to X$, $0 \le k < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, TSy) \le k \vee \{d(x, Sy), d(y, Tx), d(y, TSy)\} \qquad (4.3.7)$$
$$d(Sy, STx) \le k \vee \{d(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)\}$$

koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. O zaman, ST nin bir $z \in X$ sabit noktası ve TS nin bir $w \in X$ sabit noktası vardır ve bu sabit noktalar tektir. Ayrıca $Tz = w$, $Sw = z$ dir. Eğer $z = w$ ise z, S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır ve bu sabit nokta tektir.

Kanıt : 4.3.1 Teoremden, $STz = z$ ve $TSw = w$ olacak biçimde $z, w \in X$ vardır. Eğer $z = w$ ise $Sz = Tz = z$ olacağından, z S ve T nin ortak bir sabit noktası olur.

T ve S dönüşümlerinin z den başka bir ortak sabit noktası z' olsun. O zaman (4.3.7) eşitsizliğinden,

$$d(z',z) = d(Tz',TSz) \le k \vee \{d(z',Sz),\ d(z,Tz'),\ d(z,TSz)\}$$
$$= k \vee \{d(z',z),\ 0\ \}$$

olur. Eğer $d(z,z') \le kd(z,z')$ ise o zaman $k<1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(z',z)=0$ bulunur. Bu ise $z=z'$ olmasını verir. Eğer $d(z,z') \le k.0$ ise $z=z'$ olduğu açıktır.

Eğer, 4.3.1 Teorem ve 4.3.2 Sonuçta $E=IR,\ P=\{x \in IR : x \ge 0\}$ ve $d : X \times X \to IR$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.3.3 Sonuç : $(X,d),(Y,\rho)$ tam metrik uzaylar, $T : X \to Y$ ve $S : Y \to X$, $0 \le k < 1$ olmak üzere her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$\rho(Tx,TSy) \le k\ \max\{d(x,Sy),\ \rho(y,Tx),\ \rho(y,TSy)\}$$
$$d(Sy,STx) \le k\ \max\{\rho(y,Tx),\ d(x,Sy),\ d(x,STx)\}$$

koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. O zaman, ST nin bir $z \in X$ sabit noktası ve TS nin bir $w \in Y$ sabit noktası vardır ve bu sabit noktalar tektir. Ayrıca $Tz=w$ ve $Sw=z$ dir.

(*Fisher, B. , 1981*)

4.3.4 Sonuç : (X,d) tam metrik uzay, $S,T : X \to X$, $0 \le k < 1$ olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,TSy) \le k\ \max\{d(x,Sy),\ d(y,Tx),\ d(y,TSy)\}$$
$$d(Sy,STx) \le k\ \max\{d(y,Tx),\ d(x,Sy),\ d(x,STx)\}$$

koşullarını sağlayan iki dönüşüm olsun. O zaman, ST nin bir $z \in X$ sabit noktası ve TS nin bir $w \in X$ sabit noktası vardır ve bu sabit noktalar tektir. Ayrıca $Tz=w$, $Sw=z$ dir. Eğer $z=w$ ise z, S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır ve bu sabit nokta tektir.

(*Fisher, B. , 1981*)

4.4 ZAYIF BAĞDAŞIK DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ İÇİN ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

4.4.1 Tanım : Boştan farklı bir X kümesi ve $f, g : X \to X$ dönüşümleri verilsin. Eğer f ve g çakışık noktalarında değişmeli ise, yani $fx = gx$ koşulunu sağlayan $x \in X$ için $fgx = gfx$ oluyorsa f ve g ye ***zayıf bağdaşık dönüşümler*** denir.
(*Jungck, G. , 1996 ; Jungck, G. & Rhoades, B.E. , 1998*)

(X, d) bir koni metrik uzay olsun ve aşağıdaki koşulları sağlayan $A, B, S, T : X \to X$ dönüşümleri verilsin.

(a) $A(X) \subseteq T(X)$ ve $B(X) \subseteq S(X)$

(b) $r \in (0,1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Ax, By) \leq r \vee \left\{ d(Ax, Sx),\ d(By, Ty),\ d(Sx, Ty),\ \frac{1}{2}\left(d(Ax, Ty) + d(By, Sx) \right) \right\} \quad (4.4.1)$$

x_0 , X de herhangi bir nokta olmak üzere, (a) dan $Tx_1 = Ax_0$ ve $Bx_1 = Sx_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ noktaları vardır. $y_1 = Tx_1 = Ax_0$ ve $y_2 = Bx_1 = Sx_2$ olsun. Benzer biçimde devam edildiğinde $n = 1, 2, \ldots$ için

$$y_{2n-1} = Tx_{2n-1} = Ax_{2n-2} \ , \ y_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n-1} \quad (4.4.2)$$

olacak biçimde X içinde bir $\{y_n\}$ dizisi tanımlanır.

4.4.2 Önteorem : (X, d) bir koni metrik uzay ve $A, B, S, T : X \to X$, (a) ve (b) koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. O zaman (4.4.2) ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

Kanıt : Önce her bir $n = 1, 2, \ldots$ için

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq r d(y_{2n}, y_{2n+1}) \quad (4.4.3)$$

eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilecektir. (4.4.1) eşitsizliğinden,

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) = d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1})$$

$$\leq r \vee \{ d(Ax_{2n}, Sx_{2n}), d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}),$$

$$\frac{1}{2}(d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}) + d(Bx_{2n+1}, Sx_{2n}))\}$$

$$\leq r \vee \left\{ d(y_{2n+1,} y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n+2}), \frac{1}{2} d(y_{2n}, y_{2n+2}) \right\}$$

olup, burada üç durum söz konusudur.

1. Durum : Eğer $d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq r d(y_{2n}, y_{2n+1})$ ise, (4.4.3) eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır.

2. Durum : Eğer $d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq r d(y_{2n+1}, y_{2n+2})$ ise, $r < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) = 0$ olur. Bu durumda (4.4.3) eşitsizliği doğrudur.

3. Durum : Eğer $d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq r \frac{1}{2} d(y_{2n}, y_{2n+2})$ ise, (d3) koşulundan

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq \frac{r}{2} d(y_{2n}, y_{2n+1}) + \frac{r}{2} d(y_{2n+1}, y_{2n+2})$$

ve $0 < r < 1$ olduğundan $\frac{r}{2-r} < r$ olup,

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq r d(y_{2n}, y_{2n+1})$$

bulunur. Bu durumda (4.4.3) eşitsizliği doğrudur.

Benzer biçimde her bir $n = 1, 2, \ldots$ için

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq r d(y_{2n-1}, y_{2n}) \qquad (4.4.4)$$

eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilecektir. (4.4.1) eşitsizliğinden,

$$d(y_{2n+1}, y_{2n}) = d(Ax_{2n}, Bx_{2n-1})$$

$$\leq r \vee \{ d(Ax_{2n}, Sx_{2n}), d(Bx_{2n-1}, Tx_{2n-1}), d(Sx_{2n}, Tx_{2n-1}),$$

$$\frac{1}{2}(d(Ax_{2n}, Tx_{2n-1}) + d(Bx_{2n-1}, Sx_{2n}))\}$$

$$\leq r \vee \left\{ d(y_{2n+1,} y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n-1}), \frac{1}{2} d(y_{2n+1}, y_{2n-1}) \right\}$$

olup, burada da üç durum söz konusudur.

1. Durum : Eğer $d(y_{2n+1}, y_{2n}) \leq r d(y_{2n+1}, y_{2n})$ ise, $r < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteorem den $d(y_{2n+1}, y_{2n}) = 0$ olur. Bu durumda (4.4.4) eşitsizliği doğrudur.

2. Durum : Eğer $d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq rd(y_{2n-1}, y_{2n})$ ise, (4.4.4) eşitsizliğinin doğru olduğu açıktır.

3. Durum : Eğer $d(y_{2n+1}, y_{2n}) \leq r\frac{1}{2}d(y_{2n+1}, y_{2n-1})$ ise, (d3) koşulundan

$$d(y_{2n+1}, y_{2n}) \leq \frac{r}{2}d(y_{2n+1}, y_{2n}) + \frac{r}{2}d(y_{2n}, y_{2n-1})$$

ve $0 < r < 1$ olduğundan $\frac{r}{2-r} < r$ olup,

$$d(y_{2n+1}, y_{2n}) \leq rd(y_{2n}, y_{2n-1})$$

bulunur. Bu durumda (4.4.4) eşitsizliği doğrudur.

Böylece, $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &\leq rd(y_{n-1}, y_n) \\ &\leq r^2 d(y_{n-2}, y_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq r^{n-1} d(y_1, y_2) \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty$ olduğundan, 2.3.13 Önteoremden $\{y_n\}$, (X, d) koni metrik uzayı içinde bir Cauchy dizisi olur.

4.4.3 Teorem : (X, d) bir koni metrik uzay ve $A, B, S, T : X \to X$, (a) ve (b) koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer $A(X)$, $T(X)$, $B(X)$ ve $S(X)$ kümelerinden herhangi biri X in tam alt uzayı ise A ile S nin ve B ile T nin çakışık noktaları vardır.

Ayrıca, (A, S) ve (B, T) dönüşüm çiftleri zayıf bağdaşık iseler, A, S, B ve T dönüşümlerinin ortak bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

Kanıt : 4.4.2 Önteoremden, (4.4.2) ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

$T(X)$' in tam olduğu varsayılsın. Her bir $n = 1, 2, \ldots$ için $y_{2n-1} = Tx_{2n-1}$ biçiminde tanımlı $\{y_{2n-1}\}$ dizisi $T(X)$ de bir Cauchy dizisidir. Bu durumda

$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = u$ olacak biçimde bir $u \in T(X)$ vardır. Böylece $Tv = u$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. $\{y_n\}$ bir Cauchy dizisi ve $\{y_{2n-1}\}, \{y_n\}$ in yakınsak bir alt dizisi olduğundan, 2.3.14 Önteoremden $y_n \to u \ (n \to \infty)$ olur. 2.3.6 Önteoremden, $\{y_n\}$ in bütün alt dizileri de u noktasına yakınsar.

O halde herhangi bir $c \in E, 0 << c$ alındığında, $\forall n \geq N$ için

$$d(u, y_{2n-1}) << \frac{c(1-r)}{4},\ d(u, y_{2n-2}) << \frac{c}{4}\ ,\ d(u, y_{2n}) << \frac{c(1-r)}{4}$$

ve

$$d(y_{2n-1}, y_{2n-2}) << \frac{c}{4} \text{ ve } d(y_{2n}, y_{2n-1}) << \frac{c}{4}$$

olacak biçimde bir $N \in IN$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n \geq N$ için

$$\begin{aligned} d(u, Bv) &\leq d(u, y_{2n-1}) + d(y_{2n-1}, Bv) \\ &= d(u, y_{2n-1}) + d(Ax_{2n-2}, Bv) \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

olur. (4.4.1) eşitsizliğinden

$$d(Ax_{2n-2}, Bv) \leq r \vee \{d(Ax_{2n-2}, Sx_{2n-2}), d(Bv, Tv), d(Sx_{2n-2}, Tv), \frac{1}{2}(d(Ax_{2n-2}, Tv) + d(Bv, Sx_{2n-2}))\}$$

$$= r \vee \left\{d(y_{2n-1}, y_{2n-2}), d(Bv, u), d(y_{2n-2}, u), \frac{1}{2}(d(y_{2n-1}, u) + d(Bv, y_{2n-2}))\right\}$$

bulunur. Burada, $\forall n \geq N$ için dört durum söz konusudur.

<u>1. Durum</u> : Eğer, $d(Ax_{2n-2}, Bv) \leq r d(y_{2n-1}, y_{2n-2})$ ise o zaman (4.4.5) eşitsizliğinden,

$$d(u, Bv) \leq d(u, y_{2n-1}) + r d(y_{2n-1}, y_{2n-2}) << \frac{c(1-r)}{4} + r\frac{c}{4} \leq \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.

<u>2. Durum</u> : Eğer, $d(Ax_{2n-2}, Bv) \leq r d(Bv, u)$ ise o zaman (4.4.5) eşitsizliğinden

$$d(u, Bv) \leq d(u, y_{2n-1}) + r d(Bv, u)$$

olup,

$$d(u, Bv) \leq \frac{1}{1-r} d(u, y_{2n-1}) << \frac{1}{1-r}\frac{c(1-r)}{4} \leq c$$

elde edilir.

3. Durum : Eğer, $d(Ax_{2n-2}, Bv) \le rd(y_{2n-2}, u)$ ise o zaman (4.4.5) eşitsizliğinden,

$$d(u, Bv) \le d(u, y_{2n-1}) + rd(y_{2n-2}, u) << \frac{c(1-r)}{4} + r\frac{c}{4} \le \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.

4. Durum : Eğer, $d(Ax_{2n-2}, Bv) \le r\frac{1}{2}(d(y_{2n-1}, u) + d(Bv, y_{2n-2}))$ ise o zaman (4.4.5) eşitsizliğinden

$$d(u, Bv) \le d(u, y_{2n-1}) + \frac{r}{2}d(y_{2n-1}, u) + \frac{r}{2}d(Bv, y_{2n-2})$$

olur. (d3) koşulu kullanılırsa

$$d(u, Bv) \le \frac{2+r}{2}d(y_{2n-1}, u) + \frac{r}{2}d(Bv, u) + \frac{r}{2}d(u, y_{2n-2})$$

olup, $0 < r < 1$ olduğundan

$$d(u, Bv) \le \frac{2+r}{2-r}d(u, y_{2n-1}) + \frac{r}{2-r}d(u, y_{2n-2})$$

$$<< \frac{2+r}{2-r}\frac{c(1-r)}{4} + \frac{r}{2-r}\frac{c}{4} \le 3\frac{c}{4} + \frac{c}{4} = c$$

elde edilir.

Böylece 1. , 2. , 3. ve 4. durumlardan her $c \in E,\ 0 << c$ için $d(u, Bv) << c$ olur.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $d(u, Bv) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - d(u, Bv) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d(u, Bv) \in P$ olur. $d(u, Bv) \in P$ olduğundan $d(u, Bv) = 0$ dır. Bu durumda $Bv = u$ olur.

Böylece $Tv = Bv = u$, yani v, B ile T nin çakışık noktasıdır.

$Bv = u \in B(X)$ ve $B(X) \subseteq S(X)$ olduğundan $u = Sw$ olacak biçimde bir $w \in X$ vardır. (d3) koşulundan $\forall n \ge N$ için

$$d(Aw, u) \le d(Aw, y_{2n}) + d(y_{2n}, u)$$

$$= d(Aw, Bx_{2n-1}) + d(y_{2n}, u) \qquad (4.4.6)$$

olur. (4.4.1) eşitsizliğinden

$$d(Aw, Bx_{2n-1}) \le r \vee \{ d(Aw, Sw),\ d(Bx_{2n-1}, Tx_{2n-1}),\ d(Sw, Tx_{2n-1}),$$
$$\frac{1}{2}\left(d(Aw, Tx_{2n-1}) + d(Bx_{2n-1}, Sw)\right) \Big\}$$
$$= r \vee \left\{ d(Aw,u), d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(u, y_{2n-1}), \frac{1}{2}\left(d(Aw, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u)\right) \right\}$$

bulunur. Burada da, $\forall n \ge N$ için dört durum söz konusudur.

1. Durum : Eğer, $d(Aw, Bx_{2n-1}) \le r d(Aw,u)$ ise o zaman (4.4.6) eşitsizliğinden

$$d(Aw,u) \le r d(Aw,u) + d(y_{2n}, u)$$

olup,

$$d(Aw,u) \le \frac{1}{1-r} d(y_{2n}, u) << \frac{1}{1-r} \frac{c(1-r)}{4} \le c$$

elde edilir.

2. Durum : Eğer, $d(Aw, Bx_{2n-1}) \le r d(y_{2n}, y_{2n-1})$ ise o zaman (4.4.6) eşitsizliğinden,

$$d(Aw,u) \le r d(y_{2n}, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u) << r\frac{c}{4} + \frac{c(1-r)}{4} \le \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.

3. Durum : Eğer, $d(Aw, Bx_{2n-1}) \le r d(u, y_{2n-1})$ ise o zaman (4.4.6) eşitsizliğinden,

$$d(Aw,u) \le r d(u, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u) << r\frac{c(1-r)}{4} + \frac{c(1-r)}{4} \le \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir.

4. Durum : Eğer, $d(Aw, Bx_{2n-1}) \le r\frac{1}{2}\left(d(Aw, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u)\right)$ ise o zaman (4.4.6) eşitsizliğinden

$$d(Aw,u) \le \frac{r}{2} d(Aw, y_{2n-1}) + \frac{r}{2} d(y_{2n}, u) + d(y_{2n}, u)$$

olur. (d3) koşulu kullanıldığında

$$d(Aw,u) \le \frac{r}{2} d(Aw,u) + \frac{r}{2} d(u, y_{2n-1}) + \frac{2+r}{2} d(y_{2n}, u)$$

olup, $0 < r < 1$ olduğundan

$$d(Aw,u) \le \frac{r}{2-r} d(u, y_{2n-1}) + \frac{2+r}{2-r} d(y_{2n}, u)$$

$$<< \frac{r}{2-r} \frac{c(1-r)}{4} + \frac{2+r}{2-r} \frac{c(1-r)}{4} \le \frac{c}{4} + 3\frac{c}{4} = c$$

elde edilir.

Böylece 1. , 2. , 3. ve 4. durumlardan her $c \in E$, $0 << c$ için $d(Aw,u) << c$ olur.

Bir $0 << c$ alındığında, $\forall\ m \in IN$ için $0 << \frac{c}{m}$ dir. Böylece $\forall\ m \in IN$ için $d(Aw,u) << \frac{c}{m}$ olup, $\forall\ m \in IN$ için $\frac{c}{m} - d(Aw,u) \in P$ dir. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to 0$ ve P kapalı olduğundan $-d(Aw,u) \in P$ olur. $d(Aw,u) \in P$ olduğundan $d(Aw,u) = 0$ dır. Bu durumda $Aw = u$ olur.

Böylece $Sw = Aw = u$ olur. Yani w, A ile S nin çakışık noktasıdır.

Eğer $S(X)$ tam olursa, benzer biçimde A ile S nin ve B ile T nin çakışık noktalarının var olduğu görülür.

$A(X)$ in tam olduğu varsayılsın. Her bir $n = 1, 2, ...$ için $y_{2n-1} = Ax_{2n-2}$ biçiminde tanımlı $\{y_{2n-1}\}$ dizisi $A(X)$ de bir Cauchy dizisidir. Böylece $\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = u$ olacak biçimde bir $u \in A(X)$ vardır. $A(X) \subseteq T(X)$ olduğundan $u \in T(X)$ dir. Bu durumda $T(X)$ in tam olduğu durumdaki gibi devam edildiğinde, A ile S nin ve B ile T nin çakışık noktalarının var olduğu görülür.

Eğer $B(X)$ tam olursa da benzer biçimde, A ile S nin ve B ile T nin çakışık noktaları vardır.

(A,S) ve (B,T) dönüşüm çiftleri zayıf bağdaşık olsunlar. $Tv = Bv = u$ ve (B,T) çifti zayıf bağdaşık olduğundan

$$Bu = BTv = TBv = Tu$$

olur. $Sw = Aw = u$ ve (S,A) çifti zayıf bağdaşık olduğundan

$$Au = ASw = SAw = Su$$

olur. (4.4.1) eşitsizliğinden,

$$d(u,Tu)=d(Aw,Bu)\le r\vee\left\{d(Aw,Sw),d(Bu,Tu),d(Sw,Tu),\frac{1}{2}(d(Aw,Tu)+d(Bu,Sw))\right\}$$

$$=r\vee\left\{d(u,u),d(Tu,Tu),d(u,Tu),\frac{1}{2}(d(u,Tu)+d(Tu,u))\right\}$$

$$=r\vee\{0,\ d(u,Tu)\}$$

olur. Eğer $d(u,Tu)\le r.0$ ise $Tu=u$ olduğu açıktır. Eğer $d(u,Tu)\le rd(u,Tu)$ ise $r<1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(u,Tu)=0$ olur. Bu ise $Tu=u$ olmasını verir. Böylece $Bu=Tu=u$ olur.

(4.4.1) eşitsizliğinden,

$$d(Au,u)=d(Au,Bv)\le r\vee\left\{d(Au,Su),d(Bv,Tv),d(Su,Tv),\frac{1}{2}(d(Au,Tv)+d(Bv,Su))\right\}$$

$$=r\vee\left\{d(Su,Su),d(u,u),d(Au,u),\frac{1}{2}(d(Au,u)+d(u,Au))\right\}$$

$$=r\vee\{0,\ d(Au,u)\}$$

olur. Eğer $d(Au,u)\le r.0$ ise $Au=u$ olduğu açıktır. Eğer $d(Au,u)\le rd(Au,u)$ ise $r<1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(Au,u)=0$ olur. Bu ise $Au=u$ olmasını verir. Böylece $Au=Su=u$ olur.

Sonuç olarak u, A,B,S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır.

A,B,S ve T dönüşümlerinin ikinci bir ortak sabit noktası u' olsun. O zaman (4.4.1) eşitsizliğinden,

$$d(u',u)=d(Au',Bu)$$

$$\le r\vee\{d(Au',Su'),\ d(Bu,Tu),\ d(Su',Tu),$$

$$\frac{1}{2}(d(Au',Tu)+d(Bu,Su'))\Big\}$$

$$=r\ \vee\left\{d(u',u'),d(u,u),d(u',u),\frac{1}{2}(d(u',u)+d(u,u'))\right\}$$

$$=r\ \vee\{0,\ d(u',u)\ \}$$

olur. Eğer $d(u',u)\le r.0$ ise $u'=u$ olduğu açıktır. Eğer $d(u',u)\le rd(u',u)$ ise $r<1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $d(u',u)=0$ olur. Bu ise $u'=u$ olmasını verir.

Eğer, 4.4.3 Teoremde $E = IR$, $P = \{x \in IR : x \geq 0\}$ ve $d : X \times X \to IR$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.4 Sonuç : (X, d) bir metrik uzay ve $A, B, S, T : X \to X$, (a) ve (b) koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer $A(X), T(X), B(X)$ ve $S(X)$ kümelerinden herhangi biri X in tam alt uzayı ise A ile S nin ve B ile T nin çakışık noktaları vardır.

Ayrıca, (A, S) ve (B, T) dönüşüm çiftleri zayıf bağdaşık iseler, A, S, B ve T dönüşümlerinin ortak bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir.

V. BÖLÜM

KONİ NORMLU UZAYLAR VE FONKSİYONLARIN SABİT NOKTALARI

Bu bölümde koni normlu uzaylara kısa bir giriş yapılacak ve onlar üzerinde tanımlı dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilecektir.

5.1 KONİ NORMLU UZAYLAR

Bu kesimde E bir reel Banach uzayı, P E de $P^0 \neq \emptyset$ olan bir koni ve"$\leq$" E üzerinde P ye göre bir kısmi sıra bağıntısı olarak alınacaktır.

5.1.1 Tanım : Bir X vektör uzayı ve $\|.\|_C : X \to E$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\|.\|_C$, her $x, y \in X$ ve $\lambda \in IR$ için

(n1) $0 \leq \|x\|_C$

(n2) $\|x\|_C = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(n3) $\|\lambda x\|_C = |\lambda| \, \|x\|_C$

(n4) $\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$

koşullarını sağlıyorsa $\|.\|_C$ ye X kümesi üzerinde bir ***koni norm*** ve (X, d) ikilisine de bir ***koni normlu uzay*** denir.
(*Zabrejko , P. P. , 1997*)

5.1.2 Örnek : $E = \ell_1$ de $P = \{(x_n) \in E : \forall n \in IN \text{ için } x_n \geq 0\}$ konisi verilsin ve $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Her $x \in X$ için

$$\|x\|_C = \left\{ \frac{\|x\|}{2^n} \right\}_{n \geq 1}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_C : X \to E$ fonksiyonu bir koni normdur.

5.1.3 Önerme : X bir vektör uzayı ve $\|.\|_C : X \to E$ bir koni norm olsun. O zaman

$$d : X \times X \to E$$
$$d(x,y) = \|x - y\|_C \qquad (x, y \in X)$$

biçiminde tanımlanan d, X üzerinde bir koni metriktir.

Bu durumda d , her $x, y, z \in X$ ve $\lambda \in IR$ için

(i) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$

özelliklerini sağlar.

Kanıt : Önce d nin bir koni metrik olduğu gösterilecektir. $\forall x, y, z \in X$ alındığında

(d1) $d(x,y) = \|x - y\|_C \geq 0$ olduğu açıktır.

$d(x,y) = \|x - y\|_C = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir.

(d2) $d(x,y) = \|x - y\|_C = \|(-1)(y - x)\|_C = |-1| \, \|y - x\|_C = \|y - x\|_C = d(y,x)$ olur.

(d3) $d(x,y) = \|x - y\|_C = \|x - z + z - y\|_C \leq \|x - z\|_C + \|z - y\|_C = d(x,z) + d(y,z)$ dir.

koşulları sağlandığından d X üzerinde bir koni metriktir.

Ayrıca her $x, y, z \in X$ ve $\lambda \in IR$ için

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\|_C = \|x - y\|_C = d(x,y)$$

ve

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\|_C = \|\lambda(x - y)\|_C = |\lambda| \, \|x - y\|_C = |\lambda| \, d(x,y)$$

olduğundan d , (i) ve (ii) özelliklerini sağlar.

5.2 KONİ NORMLU UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

5.2.1 Tanım : $(X, \|.\|_C)$ bir koni normlu uzay, C X in konveks bir alt kümesi ve $S, T : C \to C$ iki dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$;

(i) $n \geq 0$ için $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $0 \leq \beta_n \leq 1$,

(ii) $\liminf_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha > 0$

koşullarını sağlayan IR de iki dizi olmak üzere, $\{x_n\} \subset X$ dizisi aşağıdaki biçimde tanımlansın.

(i) $x_0 \in C$

(ii) $n \geq 0$ için $y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n$ (5.2.1)

(iii) $n \geq 0$ için $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n$. (5.2.2)

Bu biçimde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine, S ve T ile oluşturulmuş ***Ishikawa iterasyon dizisi*** denir.

(*Ishikawa, S. , 1974*)

5.2.2 Teorem : $(X, \|.\|_C)$ bir koni normlu uzay, C X in dizisel kapalı ve konveks bir alt kümesi , $S,T : C \to C$, $0 \leq q < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\| Sx - Ty \|_C \leq q \vee \{ \| x - y \|_C, \| x - Sx \|_C, \| y - Ty \|_C, \| x - Ty \|_C, \| y - Sx \|_C \} \quad (5.2.3)$$

koşulunu sağlayan dönüşümler ve $\{x_n\}$ de 5.2.1 Tanım ile verilen Ishikawa iterasyon dizisi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir z noktasına yakınsıyorsa, o zaman z S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır ve bu nokta tektir.

Kanıt : $\{x_n\}$ dizisi z noktasına yakınsadığından 2.3.10 Önteoremden $\{x_n\}$, C de bir Cauchy dizisidir. Ayrıca $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0$ olduğundan bir $c \in E$, $0 << c$ alındığında,

$\forall n \geq N$ için $\frac{\alpha}{2} \leq \alpha_n$, $\| x_{n+1} - x_n \|_C << \frac{(1-q)^2 c\alpha}{4}$ ve $\| x_n - z \|_C << \frac{(1-q)c}{2}$ olacak biçimde yeteri kadar büyük bir $N \in IN$ vardır. (5.2.2) eşitliğinden $(x_{n+1} - x_n) = \alpha_n (T y_n - x_n)$ dir. Bu durumda 2.1.5 Önteoremden her $n \geq N$ için

$$\| x_{n+1} - x_n \|_C = \alpha_n \| T y_n - x_n \|_C \geq \frac{\alpha}{2} \| T y_n - x_n \|_C$$

olup,

$$\| T y_n - x_n \|_C \leq \frac{2}{\alpha} \| x_{n+1} - x_n \|_C << \frac{2}{\alpha} \frac{(1-q)^2 c\alpha}{4} = \frac{(1-q)^2 c}{2} \quad (5.2.4)$$

elde edilir. (5.2.3) eşitsizliğinden

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq q \vee \{ \| x_n - y_n \|_C, \| x_n - Sx_n \|_C, \| y_n - Ty_n \|_C, \| x_n - Ty_n \|_C, \| y_n - Sx_n \|_C \}$$

dir. Burada beş durum söz konusudur.

1. Durum : Eğer $\| Sx_n - Ty_n \|_C \le q \| x_n - y_n \|_C$ ise, (5.2.1) eşitliğinden, $0 \le \beta_n \le 1$ olduğundan ve (n4) koşulundan

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Ty_n \|_C \le q \| x_n - y_n \|_C &= q \| y_n - x_n \|_C \\ &= q \| x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - x_n \|_C \\ &= q \| \beta_n (Sx_n - x_n) \|_C \\ &= q\beta_n \| Sx_n - x_n \|_C \\ &\le q \| Sx_n - x_n \|_C \\ &\le q \| Sx_n - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - x_n \|_C \end{aligned}$$

olup,

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \le \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C$$

elde edilir.

2. Durum : Eğer $\| Sx_n - Ty_n \|_C \le q \| x_n - Sx_n \|_C$ ise, (n4) koşulundan

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \le q \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - Sx_n \|_C$$

olup,

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \le \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C$$

elde edilir.

3. Durum : Eğer $\| Sx_n - Ty_n \|_C \le q \| y_n - Ty_n \|_C$ ise (5.2.1) eşitliğinden, (n4) koşulundan ve $0 \le \beta_n \le 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Ty_n \|_C \le q \| y_n - Ty_n \|_C &= q \| x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - Ty_n \|_C \\ &= q \| x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - Ty_n + \beta_n Ty_n - \beta_n Ty_n \|_C \\ &= q \| \beta_n (Sx_n - Ty_n) + (1-\beta_n)(x_n - Ty_n) \|_C \\ &= q \| \beta_n (Sx_n - Ty_n) \|_C + q \| (1-\beta_n)(x_n - Ty_n) \|_C \\ &\le q\beta_n \| Sx_n - Ty_n \|_C + q(1-\beta_n) \| x_n - Ty_n \|_C \\ &\le q \| Sx_n - Ty_n \|_C + q \| x_n - Ty_n \|_C \end{aligned}$$

olup,

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \le \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C$$

elde edilir.

4. Durum : Eğer $\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq q \| x_n - Ty_n \|_C$ ise,

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq q \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Sx_n - Ty_n \|_C$$

olup,

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C$$

elde edilir.

5. Durum : Eğer $\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq q \| y_n - Sx_n \|_C$ ise (5.2.1) eşitliğinden, $0 \leq \beta_n \leq 1$ olduğundan ve (n4) koşulundan

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Ty_n \|_C \leq q \| y_n - Sx_n \|_C &= q \| x_n - \beta_n x_n + \beta_n Sx_n - Sx_n \|_C \\ &= q \| (1-\beta_n) x_n - (1-\beta_n) Sx_n \|_C \\ &= q \| (1-\beta_n)(x_n - Sx_n) \|_C \\ &= q(1-\beta_n) \| x_n - Sx_n \|_C \\ &\leq q \| x_n - Sx_n \|_C \\ &\leq q \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - Sx_n \|_C \end{aligned}$$

olup,

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C$$

elde edilir.

Beş durum içinde

$$\| Sx_n - Ty_n \|_C \leq \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C \qquad (5.2.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\lim_{n\to\infty} Sx_n = Tz$ dir. Gerçekten, (5.2.3) eşitsizliği kullanıldığında

$$\| Sx_n - Tz \|_C \leq q \vee \left\{ \| x_n - z \|_C, \| x_n - Sx_n \|_C, \| z - Tz \|_C, \| x_n - Tz \|_C, \| z - Sx_n \|_C \right\}$$

bulunur. Burada $\forall n \geq N$ için beş durum vardır.

1. Durum : Eğer $\| Sx_n - Tz \|_C \leq q \| x_n - z \|_C$ ise,

$$\| Sx_n - Tz \|_C \leq q \| x_n - z \|_C << q \frac{(1-q)c}{2} \leq \frac{c}{2} \leq c$$

elde edilir.

2. Durum : Eğer $\| Sx_n - Tz \|_C \leq q \| x_n - Sx_n \|_C$ ise, (n4) koşulu ve (5.2.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Tz \|_C &\leq q \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - Sx_n \|_C \\ &\leq q \| x_n - Ty_n \|_C + q \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C \\ &= \left(q + \frac{q^2}{1-q} \right) \| Ty_n - x_n \|_C \\ &= \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C \end{aligned}$$

olup, (5.2.4) eşitsizliği kullanıldığında

$$\| Sx_n - Tz \|_C \leq \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C << \frac{q}{1-q} \frac{(1-q)^2 c}{2} = \frac{q(1-q)c}{2} \leq \frac{c}{2} \leq c$$

elde edilir.

3. Durum : Eğer $\| Sx_n - Tz \|_C \leq q \| z - Tz \|_C$ ise, (n4) koşulu ve (5.2.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Tz \|_C &\leq q \| z - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - Sx_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &\leq q \| z - Ty_n \|_C + q \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &\leq q \| z - x_n \|_C + q \| x_n - Ty_n \|_C + \frac{q^2}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &= q \| z - x_n \|_C + \left(q + \frac{q^2}{1-q} \right) \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &= q \| z - x_n \|_C + \frac{q}{1-q} \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \end{aligned}$$

olup, (5.2.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Tz \|_C &\leq \frac{q}{1-q} \| z - x_n \|_C + \frac{q}{(1-q)^2} \| Ty_n - x_n \|_C \\ &<< \frac{q}{1-q} \frac{(1-q)c}{2} + \frac{q}{(1-q)^2} \frac{(1-q)^2 c}{2} = \frac{qc}{2} + \frac{qc}{2} = qc \leq c \end{aligned}$$

elde edilir.

4. Durum : Eğer $\| Sx_n - Tz \|_C \le q \| x_n - Tz \|_C$ ise, (n4) koşulu ve (5.2.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Tz \|_C &\le q \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - Sx_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &\le q \| x_n - Ty_n \|_C + q \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \| + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &= \left(q + \frac{q^2}{1-q} \right) \| Ty_n - x_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \\ &= \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C + q \| Sx_n - Tz \|_C \end{aligned}$$

olup, (5.2.4) eşitsizliğinden

$$\| Sx_n - Tz \|_C \le \frac{q}{(1-q)^2} \| Ty_n - x_n \|_C << \frac{q}{(1-q)^2} \frac{(1-q)^2 c}{2} = \frac{qc}{2} \le c$$

elde edilir.

5. Durum : Eğer $\| Sx_n - Tz \|_C \le q \| z - Sx_n \|_C$ ise, (n4) koşulu ve (5.2.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Tz \|_C &\le q \| z - x_n \|_C + q \| x_n - Ty_n \|_C + q \| Ty_n - Sx_n \|_C \\ &\le q \| z - x_n \|_C + q \| x_n - Ty_n \|_C + q \frac{q}{1-q} \| Ty_n - x_n \|_C \\ &= q \| z - x_n \|_C + \left(q + \frac{q^2}{1-q} \right) \| x_n - Ty_n \|_C \\ &= q \| z - x_n \|_C + \frac{q}{1-q} \| x_n - Ty_n \|_C \end{aligned}$$

olup, (5.2.5) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \| Sx_n - Tz \|_C &\le q \| z - x_n \|_C + \frac{q}{1-q} \| x_n - Ty_n \|_C \\ &<< q \frac{(1-q)c}{2} + \frac{q}{1-q} \frac{(1-q)^2 c}{2} = \frac{q(1-q)c}{2} + \frac{q(1-q)c}{2} = q(1-q)c \le c \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece beş durumda da $\forall n \ge N$ için

$$\| Sx_n - Tz \|_C << c$$

olur. Bu ise $Sx_n \to Tz \quad (n \to \infty)$ olmasını verir.

Ayrıca, (n4) koşulu ve (5.2.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\| z - Sx_n \|_C &\le \| z - x_n \|_C + \| x_n - Ty_n \|_C + \| Ty_n - Sx_n \|_C \\ &\le \| z - x_n \|_C + \| x_n - Ty_n \|_C + \frac{q}{1-q} \| x_n - Ty_n \|_C \\ &\le \| z - x_n \|_C + \left(1 + \frac{q}{1-q} \right) \| x_n - Ty_n \|_C \\ &= \| z - x_n \|_C + \frac{1}{1-q} \| x_n - Ty_n \|_C\end{aligned}$$

olup, (5.2.4) eşitsizliği kullanıldığında $\forall n \ge N$ için

$$\begin{aligned}\| z - Sx_n \|_C &\le \| z - x_n \|_C + \frac{1}{1-q} \| x_n - Ty_n \|_C \\ &<< \frac{(1-q)c}{2} + \frac{1}{1-q} \frac{(1-q)^2 c}{2} \\ &= \frac{(1-q)c}{2} + \frac{(1-q)c}{2} = (1-q)c \le c\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $Sx_n \to z \quad (n \to \infty)$ olmasını verir. Bu durumda, $Sx_n \to Tz \quad (n \to \infty)$ olduğundan 2.3.2 Önteoremden $Tz = z$ olup z, T nin bir sabit noktası olur.

(5.2.3) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}\| Sz - z \|_C = \| Sz - Tz \|_C &\le q \vee \{ \| z - z \|_C, \| z - Sz \|_C, \| z - Tz \|_C \} \\ &= q \vee \{ 0, \| z - Sz \|_C \}\end{aligned}$$

bulunur. Burada iki durum söz konusudur. Eğer $\| Sz - z \|_C \le q.0$ ise $Sz = z$ olduğu açıktır. Eğer $\| Sz - z \|_C \le q \| Sz - z \|_C$ ise, $q < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $\| Sz - z \|_C = 0$ olur. Bu ise $Sz = z$ olmasını verir.

Böylece z, S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır.

T ve S dönüşümlerinin z den başka bir ortak sabit noktası z' olsun. O zaman (5.2.3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\| z - z' \|_C &= \| Sz - Tz' \|_C \\ &\le q \vee \{ \| z - z' \|_C, \| z - Sz \|_C, \| z' - Tz' \|_C, \| z - Tz' \|_C, \| z' - Sz \|_C \} \\ &\le q \vee \{ \| z - z' \|_C, 0 \}\end{aligned}$$

olur.

Eğer $\| z - z' \|_C \leq q \| z - z' \|_C$ ise, $q < 1$ olduğundan 2.1.8 Önteoremden $\| z - z' \| = 0$ olur. Bu ise $z = z'$ olmasını verir. Eğer $\| z - z' \|_C \leq q.0$ ise $z = z'$ olduğu açıktır. Şu halde S ve T nin ortak sabit noktası tektir.

Eğer, 5.2.2 Teoremde $E = IR$, $P = \{x \in IR : x \geq 0\}$ ve $\|.\| : X \to IR$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

5.2.3 Teorem : $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, C X in kapalı ve konveks bir alt kümesi , $S, T : C \to C$, $0 \leq q < 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\| Sx - Ty \| \leq q \max \{ \| x - y \|, \| x - Sx \|, \| y - Ty \|, \| x - Ty \|, \| y - Sx \| \}$$

koşulunu sağlayan dönüşümler ve $\{x_n\}$ de 5.2.1 Tanım ile verilen Ishikawa iterasyon dizisi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir z noktasına yakınsıyorsa, o zaman z S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır ve bu nokta tektir.

(*Rashwan, R.A. , 1995*)

KAYNAKLAR

[1] Abbas, M. and Jungck, G. , 2008, *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces* , J. Math. Anal. Appl. , 341(1), 416-420.

[2] Abbas, M. and Rhoades, B.E. , 2009, *Fixed and periodic point results in cone metric spaces*, Appl. Math. Lett. , 22(4), 511-515.

[3] Arshad, M. , Azam, A. and Vetro, P. , 2009, *Some Common Fixed Point Results in Cone Metric Spaces*, Fixed Point Theory A. , Article ID 493965,11 pages

[4] Azam, A. , Arshad, M. and Beg, I. , 2008, *Common fixed points of two maps in cone metric spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 57(3), 433-441.

[5] Banach, S. , 1922, *Sur les operations dans les ensembles abstraites et leurs applications*, Fund. Math. , 3, 133-181.

[6] Berinde, V. , 2007, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer-Verlag.

[7] Bianchini, R.M.T. , 1972, *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, Boll. Un. Math. Ital. , 5, 103-108.

[8] Brouwer, L. , 1912, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. ,71, 97-115.

[9] Bryant, V.W. , 1968, *A remark on a fixed-point for iterated mappings*, Amer. Math. Monthly, 75, 399-400.

[10] Ciric, L.B. , 1974, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. , 45, 267-273.

[11] Deimling, K. , 1985, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag.

[12] Di Bari, C. and Vetro, P. , 2008, *φ – pairs and common fixed points in cone metric spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 57(2), 279-285.

[13] Di Bari, C. and Vetro, P. , 2009, *Weakly φ -pairs and common fixed points in cone metric spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 58(1), 125 – 132.

[14] Eduardo, L. , 1997, *Monotone iterative techniques in ordered Banach spaces*, Nonlinear Anal.-Theor. , 30(8), 5179-5190.

[15] Fisher, B. , 1977, *Results on Fixed Points*, Bulletin De L'academie Polonaise Des Sciences, XXV(12), 1253-1256.

[16] Fisher, B. , 1981, *Fixed points on two metric spaces*, Glasnik Matematićki, 16(36), 333-337.

[17] Grabiec, M. , 1988, *Fixed points in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Set Syst. , 27, 385-389.

[18] Granas, A. and Dugundji, J. , 2003, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag.

[19] Hardy, G.E. and Rogers, T.D. , 1973, *A generalization of a fixed theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. , 16, 201-206.

[20] Hicks, T.L. and Rhoades, B.E. , 1999, *Fixed point theory in symmetric spaces with applications to probabilistic spaces*, Nonlinear Anal.-Theor. , 36, 331-344.

[21] Huang, L.-G. and Zhang, X. , 2007, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. , 332(2), 1468–1476.

[22] Ilić, D. and Rakočević, V. , 2008, *Common fixed points for maps on cone metric space*, J. Math. Anal. Appl., 341(2), 876–882.

[23] Ilić, D. and Rakočević, V. , 2009, *Quasi-contraction on a cone metric space*, Appl. Math. Lett. , 22(5), 728–731.

[24] Iseki, K. , 1974, *Common fixed point theorem of contraction mappings*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. , 2, 7-10.

[25] Iseki, K. , 1975, *Fixed point theorems in 2-metric spaces*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. , 3, 133-136.

[26] Ishikawa, S. , 1974, *Fixed Point by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc. 44, 147-150.

[27] Jachymski, J. , Matkowski, J. and Swiatkowski, T. ,1995, *Nonlinear contractions on semimetric spaces*, J. Appl. Anal. , 1, 125-134.

[28] Janković, S. , Kadelburg, Z. , Radenović, S. and Rhoades, B.E. , 2009, *Assad-Kirk type fixed point theorems for a pair of non-self mappings on cone metric spaces*, Fixed Point Theory A. , Article in press.

[29] Jungck, G. , 1996, *Common fixed points for noncontinious nonself maps on non-metric spaces*, Far East. J. Math. Sci. , 4, 199-215.

[30] Jungck, G. and Rhoades, B.E. , 1998, *Fixed point for set valued functions without continuity*, Indian J. Pure Appl. Math. , 29(3), 227-238.

[31] Jungck, G. , Radenović, S. , Radojević, S. and Rakočević, V. , 2009, *Common Fixed Point Theorems for Weakly Compatible Pairs on Cone Metric Spaces*, Fixed Point Theory A. , Article ID 643840, 13 pages.

[32] Kada, O. , Suzuki, T. and Takahashi, W. , 1996, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon. , 44, 381-391.

[33] Kannan, R. , 1969, *Some results on fixed points. II*, Amer. Math. Monthly, 76, 405-408.

[34] Nadler, S.B. , 1969, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math. , 30, 475-488.

[35] Raja, P. and Vaezpour, S.M. , 2008, *Some extensions of Banach's contraction principle in complete cone metric spaces*, Fixed Point Theory A. , Article ID 768294, 11 pages.

[36] Rashwan, R.A. ,1995, *On the convergence of the Ishikawa iterates to a common fixed point for a pair of mappings*, Demonstratio Mathematica, XXVIII(2), 271-274.

[37] Reich, S. , 1971, *Some remarks concercing contraction mappings*, Canad. Math. Bull. , 14, 121-124.

[38] Reilly, I.L. , Subrahmanyam, P.V. and Vamanamurthy, M.K. , 1982, *Cauchy sequences in quasi-pseudo metric spaces*, Monatsh. Math. , 93, 127-140.

[39] Rezapour, Sh. , 2007, *Best Approximations in Cone Metric Spaces*, Mathematica Moravica, 11, 85-88.

[40] Rezapour, Sh. and Hamlbarani, R. , 2008, *Some notes on the paper: "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings"*, J. Math. Anal. Appl. , 345(2), 719–724.

[41] Rhoades, B.E. , 1977, *A comprasion of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. , 226, 257-290.

[42] Sahin, I. and Telci, M. ,2009, *Fixed points of contractive mappings on complete cone metric spaces*, Hacet. J. Math. Stat. , 38(1), 59-67.

[43] Schauder, J. , 1930, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. , 2, 171-180.

[44] Sehgal, V.M. and Bharucha-Reid, A.T. , 1972, *Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces*, Math. Systems Theory, 6, 97-102.

[45] Vetro, P. , 2007, *Common fixed points in cone metric spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 56(3), 464–468.

[46] Wang, S.Z. , Li, B.Y. , Gao, Z.M. and Iseki, K. ,1984, *Some fixed point theorems on expansion mappings*, Math. Japon. , 29, 631-636.

[47] Zabrejko, P.P. , 1997, *K-metric and K-normed linear spaces*: survey, Collect. Math. 48, 4-6 , 825–859.

[48] Zeidler, E. , 1993, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Volume I, Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İlker ŞAHİN

Doğum Yeri : Edirne

Doğum Tarihi : 01.06.1975

EĞİTİM VE AKADEMİK DURUMU :

İlkokul : Şükrü Paşa İlkokulu

Ortaokul : Atatürk Ortaokulu

Lise : Edirne Lisesi

Lisans : Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İŞ TECRÜBESİ :

Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.