İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ROTOR-PALA SİSTEMLERİNİN TİTREŞİMLERİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Gökhan BULUT

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

Programı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ROTOR-PALA SİSTEMLERİNİN TİTREŞİMLERİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Gökhan BULUT
(503022018)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31 Aralık 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 2008

Tez Danışmanı :	Prof.Dr. Özgür TURHAN
Diğer Jüri Üyeleri	Prof.Dr. Alaeddin ARPACI (İ.T.Ü.)
	Prof.Dr. Zekai CELEP (İ.T.Ü.)
	Prof.Dr. Nevzat ÖZGÜVEN (O.D.T.Ü.)
	Prof.Dr. İsmail YÜKSEK (Y.T.Ü.)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Tezin hazırlanma aşamasında büyük katkılarını gördüğüm değerli hocam sayın Prof. Dr. Özgür Turhan'a teşekkür ederim.

Aralık 2007 Gökhan BULUT

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ v
ŞEKİL LİSTESİ vı
SEMBOL LİSTESİ vıı
ÖZET ıx
SUMMARY x

1. GİRİŞ 1
1.1. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı 1
1.2. Konuya İlişkin Çalışmalar ve Bu Çalışmanın Katkısı 3

2. İNCELENEN ROTOR-PALA SİSTEMLERİ VE MATEMATİK MODEL 10
2.1. İncelenen Rotor-Pala Sistemleri 10
2.2. Pala Eğilme Titreşimlerine İlişkin Matematik Model 10

3. ROTOR-PALA SİSTEMLERİNİN TİTREŞİMLERİNDE LİNEER BAĞLAŞIKLIK 15
3.1. Mil Burulma-Pala Eğilme Titreşimlerine İlişkin Matematik Model 15
3.2. Özdeğer Analizi 21
3.2.1. Mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları alt problemi 22
3.2.2. Rijid mil modları alt problemi 23
3.3. Sayısal Uygulamalar 24
3.3.1. Tek kademeli rotor-pala sistemlerinde bağlaşık titreşimler 25
3.3.1.1. Modelin doğrulanması 25
3.3.1.2. Parametrik incelemeler 27
3.3.2. Çok kademeli rotor-pala sistemlerinde bağlaşık titreşimler 36
3.3.3. Sistem parametrelerinin bağlaşıklığa etkisi 43

4. ROTOR-PALA SİSTEMLERİNDE LİNEER OLMAYAN TİTREŞİMLER 46
4.1. Kaotik Titreşimler 47
4.1.1. Lyapunov üssü hesabı 49
4.1.2. Sayısal uygulama 50
4.2. Frekans Analizi 52
4.2.1. Doğal frekans hesabı 54
4.2.2. Frekans cevabı 58
4.2.2.1. Esas rezonans 59
4.2.2.2. Harmonik üstü rezonans 63
4.2.2.3. Harmonik altı rezonans 67

5. SONUÇLAR 71

KAYNAKLAR 75

EK A 79

EK B **81**
EK C **82**
EK D **83**
EK E **85**
EK F **88**
ÖZGEÇMİŞ **89**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1 μ=0.0001 için hesaplanan frekansların, elastik mil-rijid pala frekansları ile karşılaştırması……. 26

Tablo 3.2 μ=10000 için hesaplanan frekansların rijid mil-elastik pala frekansları ile karşılaştırması……..…… 27

Tablo 3.3 Üzerinde k adet pala taşıyan rotor-pala modeline ilişkin frekanslar . 29

Tablo 3.4 Şekil 3.10b1,b2'de görülen 3 kademeli rotor-pala sistemi için bağsız ve bağlaşık frekansların karşılaştırması..…… 41

Tablo 3.5 Boyutsuz parametrelerin pratik uygulamalardaki mertebeleri…….... 43

Tablo F.1 Uzerinde k adet pala taşıyan rotor-pala sistemine ilişkin frekanslar (α=0.1, γ=0.5, Δ=20, μ=10, *: (k-1) katlı özdeğer)…….. 88

Tablo F.2 Uzerinde k adet pala taşıyan rotor-pala sistemine ilişkin frekanslar (α=2, γ=1, Δ=10, μ=10, *: (k-1) katlı özdeğer)……..……. 88

Tablo F.3 Uzerinde k adet pala taşıyan rotor-pala sistemine ilişkin frekanslar (α=5, γ=2, Δ=5, μ=5, *: (k-1) katlı özdeğer)…… 88

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 Rotor-pala modeli..... 11
Şekil 3.1 Çok kademeli rotor-pala sistemi a) genel görünüm, b) elemanlar……. 16
Şekil 3.2 Özfrekansların mil boyutsuz dönme hızı β ile değişimi..... 28
Şekil 3.3 Mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları…….... 30
Şekil 3.4 β=20 için rijid mil modları……. 31
Şekil 3.5 Özfrekansların boyutsuz disk yarıçapı α ile değişimi..…..... 32
Şekil 3.6 Özfrekansların a) boyutsuz disk eylemsizliği γ, b) palaların toplam boyutsuz eylemsizliği Δ ile değişimi..... 33
Şekil 3.7 Özfrekansların mil ve palaların frekans ölçekleri oranı μ ile değişimi . 34
Şekil 3.8 Özfrekansların diskin mil üzerindeki konumu ile değişimi…..... 35
Şekil 3.9 Özfrekansların boyutsuz hız β ile değişimi (özdeş kademeli sistem)… 37
Şekil 3.10 Özfrekansların boyutsuz hız β ile değişimi (farklı kademeli sistem)… 39
Şekil 3.11 Mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları ……... 42
Şekil 3.12 Bağlaşıklığa sistem parametrelerinin etkisi……... 44
Şekil 4.1 Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı …… 51
Şekil 4.2 Poincaré tasviri ……. 51
Şekil 4.3 Yumuşayan-Sertleşen yay ve burkulma sınırı …….. 57
Şekil 4.4 Doğal frekansın a) β ile, b) α ile, c) X_0 ile değişimi…….. 58
Şekil 4.5 Sistemin, esas rezonans civarındaki frekans cevabı (yumuşayan yay) . 61
Şekil 4.6 Sistemin, esas rezonans civarındaki frekans cevabı (sertleşen yay)….. 62
Şekil 4.7 Sistemin, esas rezonans civarındaki frekans cevabına f'nin etkisi.… 62
Şekil 4.8 Sistemin, harmonik üstü rezonans civarındaki frekans cevabı (yumuşayan yay)…… 65
Şekil 4.9 Sistemin, harmonik üstü rezonans civarındaki frekans cevabı (sertleşen yay) …….. 66
Şekil 4.10 Sistemin, harmonik üstü rezonans civarındaki frekans cevabına f'nin etkisi…….. 66
Şekil 4.11 Sistemin, harmonik altı rezonans civarındaki frekans cevabına f'nin etkisi ……..…… 69
Şekil 4.12 Sistemin, harmonik altı rezonans civarındaki frekans cevabına $\bar{\mu}$ 'nün etkisi……..…….. 69
Şekil A.1 $\mathbf{f}(s,t)$ yayılı kuvveti etkisindeki stasyoner kiriş…… 79

SEMBOL LİSTESİ

A_i : i. kademedeki palaların kesit alanı
a_0 : Zorlanmış titreşim genliği
$(EI)_i$: i. kademedeki palaların eğilme rijidliği
f : Zorlayıcı kuvvet genliği
G : Mil kayma modülü
g_{ij} : i. kademedeki j. palaya ilişkin Galerkin koordinatları vektörü
I_p : Mil kesit eylemsizlik momenti
J_i : i. kademedeki rijid diskin kütlesel eylemsizlik momenti
k : $\overline{\Omega}$'nın, $c\overline{\Omega}_0$'dan farklılığını ölçen parametre
ℓ_i : i. kademedeki palaların boyu
ℓ_0 : Mil boyu
m : Galerkin açınımında alınan terim sayısı
n : Mil sonlu eleman modelindeki eleman sayısı
R_i : i. kademedeki rijid diskin yarıçapı
r : Milin üzerinde taşıdığı kademe (rijid disk) sayısı
s_i : i. diskin bağlandığı düğüm noktası
α_i : i. kademedeki rijid diskin boyutsuz yarıçapı
β : Mil boyutsuz dönme hızı
γ_i : i. kademedeki diskin boyutsuz kütlesel eylemsizlik momenti
δ : Rijid rotor dönme hızının dalgalanma genliğine ilişkin boyutsuz parametre
δ_i : i. Kademedeki bir palanın boyutsuz kütlesel eylemsizlik momenti
Δ_i : i. kademedeki palaların toplam boyutsuz kütlesel eylemsizlik momenti
ζ : Boyutsuz sönüm parametresi
η_i : i. kademedeki palaların frekans ölçeğinin 1. kademedeki palaların frekans ölçeğine oranı
$\overline{\eta}$: Diskin mil üzerindeki konumunu tanımlayan boyutsuz parametre
θ : Mil sonlu eleman modeline ilişkin düğüm koordinatları vektörü
λ_p : Stasyoner konsol kirişin p. doğal frekansı
μ : Mil frekans ölçeğinin 1. kademedeki palaların frekans ölçeğine oranı
$\overline{\mu}$: Boyutsuz sönüm parametresi
ν : Rijid rotor hız dalgalanma frekansı
ρ_0 : Mil malzemesi yoğunluğu
ρ_i : i. kademedeki palaların yoğunluğu
σ : Rotor-pala sistemi doğal frekansları
σ_0 : Faz açısı
$\overline{\sigma}$: En büyük Lyapunov üssü
φ_p : Stasyoner konsol kirişin p. özfonksiyonu

ω_0^* : Mil frekans ölçeği

ω_i^* : i. Kademedeki palaların frekans ölçeği

$\overline{\omega}$: Rijid rotor dönme hızının dalgalanma frekansına ilişkin boyutsuz parametre

Ω_0 : Mil dönme hızı

Ω_i : i. Kademedeki rijid diskin dönme hızı

$\overline{\Omega}$: Pala titreşimlerinin bir serbestlik dereceli lineer olmayan modeline ilişkin doğal frekans; Zorlayıcı kuvvet frekansı

$\overline{\Omega}_0$: Pala titreşimlerinin bir serbestlik dereceli lineer modeline ilişkin doğal frekans

ELASTİK ROTOR-PALA SİSTEMLERİNİN TİTREŞİMLERİ

ÖZET

Uçak ve helikopter pervaneleri, kompresörler, türbomakinalar gibi önemli uygulamalara sahip olmaları nedeniyle rotor-pala sistemlerinin dinamiği, özellikle de titreşimleri önemli bir araştırma konusudur. Anılan uygulama alanlarında prototip geliştirme ve test maliyetlerinin yüksek, hizmete alınma sonrasında ortaya çıkan hasarların sonucunun ise genellikle gerçek bir felaket olması nedeniyle bu sistemlerin çalışma koşullarında sahip olacakları titreşim karakteristiklerinin daha tasarım aşamasındayken gerçeğe uygun olarak öngörülebilmesi büyük önem taşır.

Bu çalışmada ilk olarak, her kademesinde birden çok özdeş pala taşıyan, tek ve çok kademeli rotor pala sistemleri ele alınmış ve mil burulma titreşimleriyle palaların dönme düzlemi içindeki eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığı incelenmiştir. Bu yapılırken, Euler-Bernouilli kirişi olarak göz önüne alınan palaların Galerkin yöntemi ile, burulma elastikliğine sahip milin ise sonlu elemanlar yöntemi ile modellendiği karma bir modelleme yöntemi önerilmiş ve uygulanmıştır. Sistem, önerilen bu yöntemle düşük serbestlik dereceli bir modelle modellenmiş ve ilgili özdeğer analizi problemi analitik olarak geliştirilerek, sistemin iki farklı mod şekli sınıfına karşılık gelen iki bağımsız alt probleme ayrılmıştır. *Mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları alt problemi* ve *rijid mil modları alt problemi* adı verilen bu alt problemlerin incelenmesiyle bağlaşıklığın, sistemin doğal frekansları ve titreşim biçimleri üzerindeki etkileri incelenmiş ve sistem parametrelerinin titreşim davranışı üzerindeki etkileri ortaya konmuştur.

İkinci olarak, rotor-pala sistemlerinin lineer olmayan titreşimleri, rijid rotora bağlı olarak dönen kirişin dönme düzlemi içindeki eğilme titreşimlerinin bir serbestlik dereceli lineer olmayan modeli üzerinden incelenmiştir. Lyapunov üssü hesabı aracılığıyla kaos analizi gerçekleştirilmiş ve bir sistem parametreleri bileşimi için kaos kartı verilmiştir. Daha sonra, rotorun sabit hızla dönmesi özel halinde, Lindstedt-Poincaré yöntemi yardımıyla frekans hesabı yapılmış ve sistem parametrelerinin temel frekans üzerindeki etkileri irdelenerek, frekans cevabı analizi sonuçları verilmiştir.

VIBRATIONS OF ELASTIC ROTOR-BLADE SYSTEMS

SUMMARY

Vibrations of rotor-blade systems is an important research topic, due to very important applications such as aeroplane and helicopter propellers, compressors, turbo-machines, etc. In those application areas, accurate prediction of vibration characteristics is crucial in the design stage of the system because prototyping and testing costs are exceptionally high and failure is generally disastrous.

In this study, first, single and multi stage rotor-blade systems, carriying a number of identical blades in each stage, are considered and coupling of shaft-torsional and blade-(in-plane) bending vibrations are studied. To do this, a mixed modeling technique is proposed where the blades, considered as Euler-Bernouilli beams, are modelled by Galerkin method and the shaft, having torsional flexibility, is modeled by finite element method. The system is modelled as a lower degree of freedom model by this mixed technique and the related eigenanalysis problem is analytically developed and splitted into two independent sub-problems corresponding to two kinds of possible normal mode motions of the system. These sub-problems are referred to as *shaft torsion-blade bending modes sub-problem* and *rigid shaft modes sub-problem.* The variation of the natural frequencies with certain system parameters is examined and *e*ffects of coupling on the eigen-characteristics of the system are studied.

Second, non-linear vibrations of rotor-blade systems are studied through a unimodal nonlinear model of in-plane, transverse vibrations of a rotating beam attached to a rigid rotor. Chaos analysis is performed via Lyapunov exponent calculations and a chaos chart is obtained on a two dimensional parameter space for a special combination of the remaining system parameters. Later, Lindstedt-Poincaré method is used to perform a frequency analysis for the special case of a rotor with constant rotation speed. Effects of the system parameters on the fundamental frequency are discussed and results of frequency response analysis are given.

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Günümüzde, üretimden ulaşıma kadar hemen her alanda karşımıza çıkmaları ve türbomakinalar, kompresörler, fanlar, uçak ve helikopter pervaneleri gibi çok önemli uygulama alanlarına sahip olmaları nedeni ile rotor-pala sistemlerinin dinamiği, özel olarak da titreşimleri önemli bir araştırma konusudur.

Anılan uygulama alanlarında prototip geliştirme ve test maliyetleri özellikle yüksek, hizmete alınma sonrasında ortaya çıkan hasarların sonucu ise genellikle gerçek bir felaket olduğundan bu sistemlerin çalışma koşullarında sahip olacakları titreşim karakteristiklerinin daha tasarım aşamasındayken gerçeğe uygun biçimde öngörülebilmesi büyük önem taşır.

Makinaların tasarımındaki genel eğilime paralel olarak, bu makinaların da daha büyük güç/ağırlık oranına sahip olmaları, dolayısıyla daha hızlı ve daha hafif olmaları eğiliminin her geçen gün artması, daha narin hale gelen bu makinalarda titreşim nedeniyle ortaya çıkan problemlerin de artmasına sebep olmakta ve bu da, gerek verimlilik gerekse çalışma ömrü açısından, titreşim karakteristiklerinin yani sistem doğal frekanslarının ve titreşim biçimlerinin önceden doğru olarak kestirilebilmesini gerekli kılmaktadır.

Rotor-pala sistemleri, mil, disk, pala ve bazı makinalarda palaları birbirine bağlayan kuşaklar gibi temel elemanlardan meydana gelir. Mil ve disklerin basit yapılarına karşın palalar, genellikle karmaşık bir profile sahip ve bazen kuşaklar gibi çembersel elemanlarla birbirine bağlı olan narin yapılardır. Bu narin yapılarından dolayı, uygulamada titreşim problemlerinden kaynaklanan hasarlar genellikle palalarda ortaya çıkmakta ve bu nedenle mevcut araştırmaların çoğu da pala titreşimleri üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Rotor-pala sistemlerinde titreşim problemleri incelenirken, genellikle sistemi oluşturan elemanların titreşimleri birbirlerinden bağımsız olarak ele alınır ve hangi elemanın titreşimleriyle ilgileniliyorsa, onun dışındaki elemanlar rijid kabul edilir. Örneğin, mil, disk ve palalardan oluşan ve disklerin, mil ve palalar yanında rijid kabul edilebileceği bir sistemde, pala titreşimleri incelenirken mil, mil titreşimleri incelenirken de palalar rijid kabul edilir. Oysa mil eğilme titreşimlerinin dönme düzlemi dışındaki pala eğilme titreşimleriyle, mil burulma titreşimlerinin ise dönme düzlemi içindeki pala eğilme titreşimleriyle bağlaşacağı bilinmektir. Bu bağlaşıklık etkilerini dikkate alan az sayıda çalışmadan, bağlaşıklığın, sistemin titreşim davranışı üzerinde ciddi etkilere sebep olacağı anlaşılmakta ve bu da, rotor-pala sistemlerinin titreşim karakteristiklerinin doğru olarak öngörülebilmesi için bu bağlaşıklık etkilerinin mutlaka göz önüne alınmasını gerekli kılmaktadır.

Bu çalışmada, rotor-pala sistemleri, sistemi oluşturan elemanların titreşimleri arasındaki bağlaşıklık etkilerini de göz önüne alan modeller yardımıyla, belli bir soyutlama düzeyinde ele alınmış ve titreşim davranışına ilişkin, modelleme aşamasındayken kullanılabilecek, bazı nitel sonuçlara analitik yaklaşımlarla ulaşılması amaçlanmıştır.

Bu amaçla ilk olarak, Bölüm 2'de, bu tez kapsamında ele alınan rotor-pala sistemlerinde, pala titreşimlerinin rotorun hareketiyle olan etkileşimi inceleme konusu olduğundan, pala titreşimlerine ilişkin genel bir formülasyon ortaya konulmuştur. Değişken hızla dönen rijid rotora bağlı paladan oluşan bir rotor-pala sistemi ele alınarak palanın, kayma ve ağırlık merkezlerinin çakıştığı, düzgün kesitli, homojen bir Euler-Bernouilli çubuğu olması kabulleri altında, dönme düzlemi içerisindeki titreşimlerine ilişkin lineer olmayan hareket denklemi elde edilmiştir. Konsol kiriş sınır şartlarına sahip palanın hareketine ilişkin elde edilen bu kısmi türevli integro-diferansiyel denklem, Galerkin yöntemi yardımıyla ayrıklaştırılarak, pala titreşimlerini temsilen sonlu sayıda, lineer olmayan adi diferansiyel denklemden oluşan denklem takımına ulaşılmıştır.

Pala titreşimlerine ilişkin genel bir formülasyon böylece ortaya konulduktan sonra Bölüm 3'de, lineer bir model çerçevesinde, üzerinde birden çok kademe (her bir kademe, rijid bir disk ve bu diskin üzerinde taşıdığı birden çok paladan ibaret) taşıyan burulma esnekliğine sahip milden ibaret bir rotor-pala sistemi ele alınmıştır.

Matematiksel modelin kurulması aşamasında mil, sonlu elemanlar yöntemiyle modellenmiş, palalar ise daha önce Galerkin yöntemine dayalı olarak elde edilen genel formülasyonda, lineer olmayan terimler göz ardı edilerek ele alınmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ve Galerkin yöntemi gibi iki farklı yöntemin bir arada kullanıldığı karma bir yöntem önerilip kullanılarak, tek ve çok kademeli rotor-pala sistemlerinde, mil burulma titreşimleri ile palaların dönme düzlemi içerisindeki eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin bir inceleme gerçekleştirilmiştir. Böylece, bağlaşıklığın, bu tür sistemlerin doğal frekans ve titreşim biçimleri üzerindeki etkileri ortaya konulmuş, ve ayrıca, sistem parametrelerinin titreşim davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Son olarak, Bölüm 4'de, rotor-pala sistemlerinin lineer olmayan dinamiğinin, bu tür sistemlerin titreşim davranışı üzerindeki etkilerini incelemek amacıyla, rotorun rijid olarak göz önüne alındığı, üzerinde tek pala taşıyan tek kademeli bir rotor-pala sisteminin bir serbestlik dereceli modeli ele alınmıştır. Önce, milin burulma elastikliğinden kaynaklanan burulma titreşimlerini bir soyutlama düzeyinde probleme yansıtmak amacıyla, rijid rotorun, belirli bir frekansla dalgalanarak dönmesi kabulü yapılmış ve pala titreşimlerinin kaotik davranışına ilişkin Lyapunov üssü hesabına dayalı bir inceleme gerçekleştirilmiştir. Daha sonra, sabit hızla dönen rijid rotora bağlı palanın, bir pertürbasyon yöntemi olan Lindstedt-Poincaré yöntemi ile doğal frekansı hesaplanarak zorlanmış titreşimlerine ilişkin frekans cevabı analizi verilmiştir.

1.2 Konuya İlişkin Çalışmalar ve Bu Çalışmanın Katkısı

Rotor-pala sistemlerinin dinamiği, bu konudaki çalışmaların ilki sayılabilecek Southwell ve Gough'un [1] çalışmasından bu yana, birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Uygulamada bu tür sistemlerin titreşim problemlerinden kaynaklanan hasarlar genellikle palalarda ortaya çıktığından, mevcut araştırmaların çoğu pala titreşimleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Rotor-pala sistemlerinde, palalarda karşılaşılan titreşim problemlerinin ayrıntılı olarak ele alındığı bir çalışma Srinivasan [2] tarafından ortaya konulmuştur. Bu çalışmada, bu titreşim problemlerinin kuramsal ve pratik yönlerine ve gelecekteki araştırmalara yön verebilecek sorunlara ilişkin bir derleme ile bu konudaki çalışmaların bir listesi verilmiştir.

Yakın geçmişe kadar analitik yaklaşımlarla, belli bir soyutlama düzeyinde nispeten basit modeller kurularak incelenmeye çalışılan bu sistemler, bilgisayar teknolojisindeki ilerlemeler sayesinde ve üretimin acil ihtiyaçlarının yönlendirmesinin geometrik olarak bire-bir modellemeyi gerektirmesi nedeni ile sayısal hesaba dayalı yaklaşımlar (özellikle sonlu elemanlar yöntemi) kullanılarak da incelenmeye çalışılmaktadır.

Analitik yaklaşımlarla ele alınan çalışmaların çoğu, yakın zamana kadar, rijid rotora bağlı olarak dönen, merkezkaç kuvvetin çeki veya bası etkisi altındaki çubukların titreşimleri üzerinde yoğunlaşmıştır ve bu çalışmaların da büyük bir kısmı, ankastre-serbest sınır koşullarına sahip çubuklar üzerinedir. Bu çalışmalarda, dönme düzlemi içerisindeki eğilme titreşimleri ve merkezkaç kuvvetin bası etkisi altında oluşan burkulma problemi [3-10]; düzlem dışı eğilme titreşimleri, burkulma ve frekans çakışması problemleri [11]; hem düzlem içi hem düzlem dışı titreşimler ile ilgili problemler [12-15] ve çubuk üzerindeki tekil kütlelerin etkisi [16,17] incelenmiştir. Bu çalışmalardan farklı olarak Naguleswaran, ankastre-serbest sınır koşulları dışındaki çeşitli klasik sınır koşullarını da kapsayan çalışmalarında, Frobenius serilerine dayalı bir yaklaşık yöntem ile merkezkaç kuvvetin çeki etkisindeki çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerinde özdeğer analizi problemlerini [18] ve merkezkaç kuvvetin bası etkisindeki çubukların düzlem dışı titreşimlerinde özdeğer analizi, burkulma ve frekans çakışması problemlerini [19] incelemiştir.

Yukarıda bahsi geçen rijid bir rotora bağlı tek bir çubuğun titreşimleri üzerinde yoğunlaşan çalışmalardan farklı olarak, rotor-pala sistemleri, belli soyutlamalar altında, tek ve çok kademeli ve her kademede çok sayıda pala taşıyan elastik mil-disk-pala sistemleri olarak modellenmeye de çalışılmıştır. Ancak, yapılan çok az sayıda çalışmada, bu sistemleri oluşturan elemanların titreşimleri arasında karşılıklı bağlaşıklık etkileşimlerinin olabileceğine işaret edilmiştir.

Bu çerçevede yapılmış ve lineer modeller üzerinden analitik yaklaşımlarla problemi ele alan çalışmalara örnek olarak şunlar verilebilir.

Chun ve Lee [20], tek kademeli bir rotor-pala sisteminde mil eğilme-pala bağlaşık titreşimlerini dikkate alarak rotor dinamiği (millerin dolanımı) problemini incelemişler ve anılan bağlaşıklığın kimi sistem frekansları üzerinde ciddi etkisi bulunduğu sonucuna varmışlardır.

Okabe ve ark. [21], mili sonlu elemanlar yöntemiyle, palaları ise basit birer tek serbestlik dereceli sistem olarak modelledikleri çalışmalarında, bir enerji üretim tesisindeki türbin-jeneratör grubunda mil burulma-pala eğilme bağlaşık titreşimlerini incelemişler ve teorik ve deneysel sonuçları karşılaştırarak, bağlaşık modelin gerçek sistemin kimi doğal frekanslarını doğru olarak öngördüğünü rapor etmişlerdir.

Bu tezle kısmen örtüşen bir çalışmayı ortaya koyan Huang ve Ho [22], mili ve palaları sürekli ortam olarak modelledikleri, tek kademeli bir mil-disk-pala sistemi ele alarak mil burulma titreşimleriyle palaların dönme düzlemi içerisindeki eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığı üzerine bir inceleme gerçekleştirmişlerdir. Yaptıkları inceleme sonunda sistemin titreşim davranışının iki farklı mod şekli sınıfına ayrıştığı sonucuna ulaşmışlar ve mil burulma titreşimleri ile pala eğilme titreşimlerinin bağlaştığı modlara, burulma eğilme-bağlaşık modları, milin rijid davrandığı modlara ise pala bağlaşık modları adını vermişlerdir. Örnek bir rotor pala modeli ele alıp, mil dönmezken, bu mod biçimlerine ilişkin sistem doğal frekansları ve mod biçimlerini vererek titreşim davranışını ortaya koymaya çalışmışlardır. Milin belli bir devir sayısı ile dönmesi halinde ise, sistem doğal frekanslarının mil dönme hızı ile değişimi vermişler ve bağlaşıklığın pala titreşimlerinde kararlılık yitimine neden olacağı çarpıcı fakat hatalı sonucuna varmışlardır.

Diğer taraftan, mil burulma-pala eğilme titreşimleri arasındaki lineer olmayan bağlaşıklığın dikkate alınması halinde Turhan ve Bulut [23], Al-Bedoor ve Al-Qaisia [24], Al-Nassar ve Al-Bedoor [25]'un çalışmalarında da ortaya konulduğu gibi kararlılık yitimi beklenebilecek bir sonuç olmakla birlikte, Huang ve Ho [22]'nun çalışmasındaki gibi lineer bir mil burulma-pala eğilme bağlaşık modelinde kararlılık yitimi ortaya çıkması ne fiziksel ne de kuramsal beklentilerle bağdaşmaktadır.

Çoğu çalışmada da, daha önce de bahsedildiği gibi, üretimin acil ihtiyaçlarının yönlendirmesi ile, palaların ve yerine göre onları taşıyan disk, onları birbirine bağlayan kuşaklar gibi sistem unsurlarının, bir sayısal yöntem olan sonlu elemanlar yöntemi kullanarak, ayrıntılı modellenmesine çalışılmakta, ancak, yöntemin dezavantajları (serbestliklerin çok yüksek olması ve yakınsama problemleri) nedeni ile bu kısmen başarılabilmektedir. Bu tip çalışmalara da şunlar örnek olarak verilebilir.

Ewins [26], disk-pala sistemlerinin titreşim karakteristiği üzerine olan çalışmasında, bütününü sürekli ortam olarak modellediği, farklı sayıda palalar taşıyan disk-pala sistemleri ele alarak, bazı sistem parametrelerinin, özdeş olmayan palaların ve palaları birbirine bağlayan kuşakların sistemin titreşim karakteristiğine olan etkisini incelemiş ve bu tür sistemlerin zorlanmış titreşim cevabına da değinerek, teorik ve deneysel sonuçları karşılaştırmalı olarak vermiştir.

Loewy ve Khader [27], pratikte kullanılan bir türbomakinanın bir kademesine ilişkin mil-pala bağlaşık titreşimlerini dikkate alarak rotor dinamiği problemini incelemişler ve mil eğilme rijidliğiyle sistem doğal frekanslarının değişimini grafik olarak vermişlerdir. Bağlaşıklığı dikkate alan ve almayan modellere ilişkin sonuçların birarada verildiği bu çalışmada, mil eğilme titreşimleriyle pala titreşimleri arasında güçlü bağlaşıklık etkileri olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Tsai [28], bir disk–pala sistemi ele almış ve sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla önce tek bir palanın ve ele aldığı disk-pala sisteminde bütün palaların tek bir kuşakla birbirlerine bağlı olması halinde sistemin bütününün, titreşim davranışına ilişkin sonuçlarını deneysel sonuçlarla karşılaştırmalı olarak vermiştir. Ardından, disk-pala sistemindeki palaların, birbirlerine kuşakla bağlı, belli sayıda pala içeren gruplar oluşturması durumunda, grup sayısının sistemin titreşim davranışına olan etkisini incelemiştir. Ayrıca, Disk-pala sistemine ilişkin Campbell diyagramını ve sistemin zorlanmış titreşim cevabına ilişkin sonuçları vermiştir.

Crawley ve ark. [29], eğilme esnekliğine sahip bir mil ve milin ucunda tek bir taşıyıcı disk-pala sisteminin bulunduğu bir rotor-pala modelini ele alıp rotor dinamiği problemini inceleyerek, sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırmalı olarak vermişler ve mil titreşimleri ile pala titreşimleri arasındaki bağlaşıklığın sistem doğal frekansları ve rotor kritik hızları üzerinde ciddi etkisi olduğunu ortaya koymuşlardır.

Rotor-pala sistemlerinin bütününün, hatta yalnızca bir kademesinin sonlu elemanlar yöntemi ile modellenmesi durumunda çok büyük model serbestlik dereceleri söz konusu olmakta ve bu da, yöntemin pratik olarak uygulanabilirliğini ortadan kaldırmaktadır. Bu, yöntemin en önemli dezavantajlarından biridir. Bunu aşmak için bu tür sistemlerin dönel simetrisinden faydalanarak, sistemin bir sektörünün incelenmesiyle elde edilen sonuçların, sistemin bütününe genelleştirilmesi esasına

dayanan model indirgeme yöntemleri geliştirilmiştir. Ancak bu yöntemlerin de bir dezavantajı, ulaşılan sonuçların, sistemin bütününün sonlu elemanlar modelinden elde edilen sonuçlara yakınsamasında ortaya çıkan sorunlardır. Buna karşın bu yöntemler, incelenen sistemin nispeten düşük serbestlik derecesiyle modellenmesine olanak sağladığı için gelecek vaadeden ancak geliştirilmeye muhtaç yöntemlerdir. Bu yöntemlerle yapılan önemli çalışmalardan ikisine aşağıda değinilmiştir.

Bladh ve ark. [30], endüstriyel bir türbomakinanın bir kademesine ait, birbirleriyle özdeş olmayan palalar içeren bir disk-pala sistemini, bir model indirgeme tekniği kullanarak, sonlu elemanlar yöntemi ile modellemişler ve nispeten düşük serbestlik dereceli bir model üzerinden, sistemin serbest ve zorlanmış titreşim davranışına ilişkin bir inceleme gerçekleştirerek pala titreşimleri arasındaki bağlaşıklık etkilerine dikkat çekmişlerdir.

Chatalet ve ark. [31], sonlu elemanlar yöntemine dayalı iki model indirgeme tekniği önerip kullanarak çok kademeli bir mil-disk-pala sisteminin titreşim davranışına ilişkin bir inceleme gerçekleştirmişlerdir. Palaları elastik ve rijid olarak göz önüne aldıkları iki farklı durum için Campbell diyagramlarını vermişler ve bu diyagramları karşılaştırarak, sistemi oluşturan elastik uzuvların titreşimleri arasındaki bağlaşıklığa dikkat çekmişlerdir.

Lineer modeller üzerinden yapılan bu çalışmalardan farklı olarak, az sayıda da olsa, konuyu lineer olmayan modeller yardımıyla ele alan çalışmalar da vardır. Bu çerçevede, Rao ve Carnegie [32] bir harmonik denge yöntemi yardımıyla dönen çubukların lineer olmayan doğal frekans hesabı ve frekans cevabı problemlerini incelemişlerdir. Hamdan ve Al-Bedoor [33], rijid rotora bağlı olarak dönen bir Euler-Bernouilli kirişini ele alarak eğilme titreşimlerine ilişkin lineer olmayan bir model ortaya koymuşlardır. Ardından bir zaman dönüşümü yöntemi ile doğal frekans hesabı problemini ele almışlar ve palaların titreşim davranışına ilişkin bir inceleme gerçekleştirmişlerdir. Pala eğilme modları arasındaki bağlaşıklığı göz ardı ederek yaptıkları bu inceleme sonunda, titreşim davranışına ilişkin yumuşayan yay sertleşen yay karakterinin pala modlarıyla ilişkili olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Larsen ve Nielsen, Euler-Bernouilli çubuğu olarak ele aldıkları rüzgâr türbini palalarının dönme düzlemi dışındaki titreşimlerinin lineer olmayan modeline ilişkin bir inceleme gerçekleştirmişler [34] ve rüzgâr türbininin bağlandığı dayanağın salınımlarının,

türbin palalarının dönme düzlemi dışındaki titreşimlerinde kararsızlık ve kaosa neden olduğunu Lyapunov üssü hesabına dayalı bir incelemeyle ortaya koymuşlardır [35].

Yukarıda, analitik ve sayısal (sonlu elemanlar yöntemi) yöntemlerle modellenen rotor-pala sistemlerinde, sistemi oluşturan elemanların titreşimleri arasındaki bağlaşıklığa da dikkat çeken bir grup çalışmaya değinildi. Sonlu elemanlar yöntemine dayalı çalışmalarda, incelenen rotor-pala sistemlerinin birebir olarak modellenebilmesine karşın, yöntemin kendine özgü dezavantajları nedeniyle bu kısmen başarılabilmektedir ve özellikle yüksek serbestlik derecesinden kaynaklanan dezavantajı aşmak amacıyla önerilip uygulanan model indirgeme teknikleri de henüz gelişme aşamasındadır. Analitik yöntemlere dayalı çalışmalarda ise bu tür sistemler, bire-bir modellemenin mümkün olamamasından dolayı, çeşitli soyutlamalar ve kabullerle, nispeten basit modeller kurularak incelenmeye çalışılmaktadır. Ancak, analitik yöntemlerin bu dezavantajına karşın bu tür sistemlerin dinamiğine ilişkin ortaya koydukları nitel sonuçlar, mevcut sayısal yaklaşımların iyileştirilmesi, olası yeni ve daha iyi sayısal yaklaşımların geliştirilebilmesi ve bu yaklaşımlardan elde edilen sonuçların doğrulanması ve yorumlanmasında da önemli rol oynamaktadır.

Bu tez çalışması kapsamında, ilk olarak, analitik yaklaşımlarla lineer bir model üzerinden, mil ve palaların sürekli ortam olarak modellendiği, çok kademeli rotor-pala sistemlerinde mil burulma titreşimleri ile palaların düzlem içi eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin bir inceleme gerçekleştirilmiştir. Bu yapılırken modellemede, farklı yöntemlerin bir arada yer aldığı karma bir yöntem önerilip kullanılmış ve çok etkili olmuştur. Anılan bağlaşıklığı lineer, analitik bir model çerçevesinde inceleme konusu yapan, Huang ve Ho [22]'nun çalışması dışında bir çalışma literatürde yer almamaktadır. Ancak bu çalışma da, bağlaşıklık etkilerini ortaya koymakta oldukça zayıftır ve beklentilerle uyuşmayan, hatalı sonuçlar içermektedir.

Literatürde, yukarıda anılan bağlaşıklık üzerine, etkili bir yöntemle ayrıntılı inceleme yapan bir çalışmanın olmaması, bu tez çalışması kapsamında Bölüm 3'de ortaya konulan incelemelerin yapılması için motive edici olmuştur.

İkinci olarak, rijid rotor-elastik pala sisteminde kaos ve frekans analizi üzerine bir inceleme gerçekleştirilmiştir. Literatürde, rotor-pala sistemlerinde rotor hızındaki

dalgalanmaların pala titreşimlerinde kaosa neden olup olmayacağı üzerine bir çalışma yer almamaktadır. Diğer taraftan, bu tür sistemlerin frekans analizine ilişkin az sayıda da olsa bir grup çalışma mevcuttur. Ancak, bu çalışmalar bu sistemlerin lineer olmayan dinamiğine ilişkin özelliklerini ortaya koymaktan uzaktır. Bu nedenler, Bölüm 4'de yapılan incelemelerin çıkış noktasıdır.

2. İNCELENEN ROTOR-PALA SİSTEMLERİ VE MATEMATİK MODEL

2.1 İncelenen Rotor-Pala Sistemleri

Bu tez çalışması kapsamında yapılan incelemeler için farklı rotor-pala sistemleri ele alınmıştır. İlk olarak, Bölüm 2'de, lineer bir model üzerinden mil burulma-pala eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin bir inceleme kapsamında, üzerinde birden çok kademe (her biri, üzerinde birden çok pala taşıyan rijid disklerden ibaret) taşıyan burulma esnekliğine sahip bir milden ibaret, çok kademeli bir rotor-pala sistemi ele alınmıştır.

İkinci olarak, Bölüm 3'de, rotor-pala sistemlerinin lineer olmayan dinamiğinin bu sistemlerin titreşim davranışı üzerindeki etkileri inceleme konusu yapılmış ve kaotik titreşimlere ilişkin bir inceleme kapsamında, rotorun belirli bir frekans ile dalgalanarak döndüğü, üzerinde tek pala taşıyan tek kademeli bir rijid rotor-elastik pala sisteminin lineer olmayan modeli ele alınmıştır. Lineer olmayan bu modelde, doğal frekans hesabı ve frekans cevabı analizi yapabilmek amacıyla da, rijid rotorun sabit hızla dönmesi özel hali göz önüne alınmıştır.

Ele alınan bu rotor-pala sistemlerinde, pala titreşimleri ve bu titreşimlerin rotorun hareketiyle olan etkileşimi inceleme konusu yapılmıştır. Bu nedenle, tüm bu incelemelere esas oluşturmak üzere, ilk olarak, Bölüm 2.2'de, pala eğilme titreşimlerine ilişkin genel bir formülasyon ortaya konulmuştur.

2.2 Pala Eğilme Titreşimlerine İlişkin Matematik Model

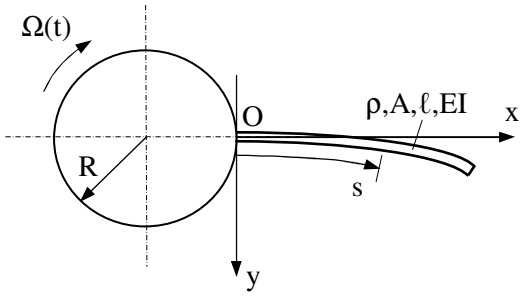
Ek A'da, düzgün kesitli, homojen bir Euler-Bernouilli çubuğu olarak ele alınan ve hareketinin incelendiği O;xy eksen takımında $\mathbf{f}(s,t)=f_x(s,t)\mathbf{i}+f_y(s,t)\mathbf{j}$ yayılı kuvveti etkisindeki visko-elastik, stasyoner kirişin enine titreşimlerine ilişkin, lineer olmayan, kısmi türevli integro-diferansiyel denklemi verilmiştir. Bu denklem, σ ve

η, s için kukla değişkenleri, üsler s'ye, noktalar da zamana göre türevi göstermek ve EI eğilme rijidliği, A kesit alanı, ρ yoğunluk, ℓ kiriş boyu olmak üzere

$$\begin{aligned} &EI\left(y^{IV}+\tfrac{1}{2}y^{IV}y'^{2}+3y'y''y'''+y''^{3}\right)+EI\bar{\zeta}\dot{y}^{IV}+\rho A\left\{\ddot{y}-\tfrac{1}{2}\ddot{y}y'^{2}+y'y''\int_s^{\ell}\ddot{y}\,d\sigma\right.\\ &\left.-y''\int_s^{\ell}\int_0^{\sigma}\left(\dot{y}'^{2}+y'\ddot{y}'\right)d\eta\,d\sigma+y'\int_0^{s}\left(\dot{y}'^{2}+y'\ddot{y}'\right)d\eta\right\}-y''\int_s^{\ell}f_x(\sigma,t)\,d\sigma \qquad \textbf{(2.1)}\\ &-y'y''\int_s^{\ell}f_y(\sigma,t)\,d\sigma+f_x(s,t)\,y'-f_y(s,t)\left(1-\tfrac{1}{2}y'^{2}\right)=0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu tez kapsamındaki incelemelere esas oluşturan, $\Omega(t)$ değişken hızı ile dönen R yarıçaplı rijid bir disk ve ona bağlı visko-elastik, sürekli ortam olarak göz önüne alınan paladan ibaret rotor-pala modeli Şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1: Rotor-Pala Modeli

Bu modeldeki palanın hareket denklemi, O;xy eksen takımının hareketinden kaynaklanan ve palanın kendi eylemsizliğini temsilen yazılabilecek olan $\mathbf{f}(s,t)=f_x(s,t)\mathbf{i},+f_x(s,t)\mathbf{j}$ yayılı kuvvetinin Denk (2.1)'de yerine yazılmasıyla elde edilebilir. $\mathbf{f}(s,t)$ yayılı kuvvetinin bileşenleri ise modelden hareketle kolayca,

$$f_x(s,t)=\rho A\left\{\Omega^2\left[R+\int_0^{s}[1-\tfrac{1}{2}[y'(\sigma,t)]^2]d\sigma\right]+\dot{\Omega}y(s,t)+2\Omega\dot{y}(s,t)\right\} \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$f_y(s,t)=\rho A\left\{-\dot{\Omega}\left[R+\int_0^{s}[1-\tfrac{1}{2}[y'(\sigma,t)]^2]d\sigma\right]+\Omega^2y(s,t)+2\Omega\int_0^{s}y'(\sigma,t)\dot{y}'(\sigma,t)d\sigma\right\} \qquad \textbf{(2.3)}$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) ve (2.3) ile tanımlı denklemlerin (2.1)'de yerlerine yazılmasıyla ve modelin dinamiğinden gelen lineer olmayan terimler nedeniyle ortaya çıkan, üçten daha yüksek dereceli terimlerin ihmal edilmesiyle

$$
\begin{aligned}
&EI(y^{IV} + \tfrac{1}{2}y^{IV}y'^2 + 3y'y''y''' + y''^3) + EI\,\bar{\zeta}\dot{y}^{IV} + \rho A\Big[(1-\tfrac{1}{2}y'^2)\ddot{y} + y'y''\int_s^{\ell}\ddot{y}\,d\sigma \\
&+ y'\int_0^s(\dot{y}'^2 + y'\ddot{y}')\,d\eta - y''\int_s^{\ell}\int_0^{\sigma}(\dot{y}'^2 + y'\ddot{y}')\,d\eta d\sigma\Big] + \rho A\Omega^2\Big[-y''[R(\ell-s) + \tfrac{1}{2}(\ell^2 - s^2)] \\
&+ y'(R+s) - y(1-\tfrac{1}{2}y'^2) - \tfrac{1}{2}y'\int_0^s y'^2 d\eta - y'y''\int_s^{\ell} y\,d\sigma + \tfrac{1}{2}y''\int_s^{\ell}\int_0^{\sigma} y'^2 d\eta\,d\sigma\Big] \\
&+ \rho A\dot{\Omega}\Big[yy' + (R+s)(1-\tfrac{1}{2}y'^2) + y'y''[R(\ell-s) + \tfrac{1}{2}(\ell^2 - s^2)] - \tfrac{1}{2}\int_0^s y'^2 d\bar{\eta} - y''\int_s^{\ell} y d\sigma\Big] \\
&+ 2\rho A\Omega\Big[\dot{y}y' - \int_0^s y'\dot{y}'\,d\eta - y''\int_s^{\ell}\dot{y}\,d\sigma\Big] = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.4)}
$$

ifadesi elde edilir. (2.4) ile tanımlı denklem, Şekil 1'de verilen modelde palanın dönme düzlemi içindeki, enine titreşimlerinin hareketine ait lineer olmayan integro-diferansiyel denklemdir.

(2.4) denkleminde yer alan terimlere yakından bakılırsa; bu terimlerden ilki, palanın elastikliğinden kaynaklanan geri getirici kuvvete; ikincisi, malzeme sönümünden kaynaklanan kuvvete; üçüncüsü ise, eylemsizlik kuvvetine karşılık gelen terimlerdir. Diğer terimler ise, rotorun dönmesi ile birlikte açığa çıkan ve ilki, merkezcil ivmeden kaynaklanan merkezkaç kuvvete; ikincisi, teğetsel ivmeden kaynaklanan kuvvete; üçüncüsü ise, Coriolis ivmesinden kaynaklanan kuvvete ilişkin terimlerdir.

(2.4) denklemi,

$$
u = \frac{s}{\ell},\ v = \frac{y}{\ell},\ \tau = \omega^* t,\ \alpha = \frac{R}{\ell},\ \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\ell},\ \bar{\eta} = \frac{\eta}{\ell},\ \beta = \frac{\Omega}{\omega^*},\ \zeta = \bar{\zeta}\omega^*,\ \omega^* = \sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}} \qquad \textbf{(2.5)}
$$

tanımları ışığında boyutsuzlaştırılır ve $\bar{\eta} \to \eta$, $\bar{\sigma} \to \sigma$ gösterilimine yeniden dönülürse

$$V(v)=\ddot{v}+\zeta\dot{v}^{IV}+v^{IV}+\tfrac{1}{2}v^{IV}v'^{2}+3v'v''v'''+v''^{3}-\tfrac{1}{2}v'^{2}\ddot{v}+v'v''\int_u^1\ddot{v}d\sigma+v'\int_0^u(\dot{v}'^{2}+v'\ddot{v}')d\eta$$
$$-v''\int_u^1\int_0^\sigma(\dot{v}'^{2}+v'\ddot{v}')d\eta d\sigma+\beta^2\Big[-v''[\alpha(1-u)+\tfrac{1}{2}(1-u^2)]+v'(\alpha+u)-v(1-\tfrac{1}{2}v'^{2})$$
$$-\tfrac{1}{2}v'\int_0^u v'^{2}d\eta-v'v''\int_u^1 vd\sigma+\tfrac{1}{2}v''\int_u^1\int_0^\sigma v'^{2}d\eta d\sigma\Big]+\dot{\beta}\Big[vv'+(\alpha+u)(1-\tfrac{1}{2}v'^{2})$$
$$+v'v''[\alpha(1-u)+\tfrac{1}{2}(1-u^2)]-\tfrac{1}{2}\int_0^u v'^{2}d\eta-v''\int_u^1 vd\sigma\Big]+2\beta\Big[\dot{v}v'-\int_0^u v'\dot{v}'d\eta-v''\int_u^1\dot{v}d\sigma\Big]=0 \qquad \textbf{(2.6)}$$

elde edilir. Boyutsuzlaştırma sonunda üsler u'ya göre, noktalar ise τ'ya göre türevi göstermektedir. Ayrıca, hareketin incelendiği eksen takımı seçiminin bir sonucu olarak sınır şartları,

$$v(0,\tau)=0,\quad v'(0,\tau)=0,\quad v''(1,\tau)=0,\quad v'''(1,\tau)=0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

şeklinde konsol kiriş sınır şartlarıdır. (2.6) ve (2.7)'nin tanımladığı sınır değer probleminin yerine Galerkin yöntemi [36] yardımı ile, onu belli bir yaklaşıklıkla temsil edecek, sonlu sayıda denklemden oluşan bir adi diferansiyel denklem takımı konulabilir. Bu amaçla $g_p(\tau)$'lar bilinmeyen ağırlık fonksiyonları,

$$\varphi_p(u)=\cosh\lambda_p u-\cos\lambda_p u-\kappa_p\cdot(\sinh\lambda_p u-\sin\lambda_p u);\quad \kappa_p=\frac{\cosh\lambda_p+\cos\lambda_p}{\sinh\lambda_p+\sin\lambda_p} \qquad \textbf{(2.8)}$$

fonksiyonları ise (2.7) sınır şartlarını sağlayan stasyoner kirişin öz fonksiyonları olan bir ortogonal fonksiyonlar takımı olmak üzere (2.6,7) sınır değer probleminin çözümü,

$$\tilde{v}(u,\tau)=\sum_{p=1}^{m}g_p(\tau)\cdot\varphi_p(u) \qquad \textbf{(2.9)}$$

sonlu serisi ile yaklaşık olarak temsil edilebilir. (2.8) ifadesinde yer alan λ_p'ler, (2.7) sınır şartlarına sahip stasyoner kirişin boyutsuz öz frekanslarıdır ve ilk beş frekans değeri Ek B'de verilmiştir.

(2.9) çözümü (2.6)'da yerine konulup

$$\int_0^1 V(\tilde{v})\varphi_q(u)du = 0; \qquad q=1,2,...,m \tag{2.10}$$

şeklinde m adet ortogonalizasyon şartı yazılırsa,

$$\ddot{g}_p + \zeta\lambda_p^4\dot{g}_p + \lambda_p^4 g_p - \beta^2\sum_{q=1}^{m}(\alpha A_{pq} + B_{pq} + \delta_{pq})\,g_q + \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} C_{pqrs}\,g_q g_r \ddot{g}_s + \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} D_{pqrs}\,g_q \dot{g}_r \dot{g}_s$$
$$+ \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left[E_{pqrs} - \beta^2 F_{pqrs}\right] g_q g_r g_s + 2\beta\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} G_{pqr}\,g_q \dot{g}_r + \dot{\beta}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\left[\alpha H_{pqr} + K_{pqr}\right] g_q g_r$$
$$= -\dot{\beta}(\alpha c_p + d_p)\;; \qquad p = 1,2,...,m$$

(**2.11**)

$$A_{pq} = \int_0^1 [(1-u)\varphi_q'' - \varphi_q']\,\varphi_p du\,, \quad B_{pq} = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}(1-u^2)\varphi_q'' - u\varphi_q']\,\varphi_p du\,,$$
$$c_p = \int_0^1 \varphi_p du\,, \quad d_p = \int_0^1 u\varphi_p du\,,$$
$$C_{pqrs} = \int_0^1 [-\tfrac{1}{2}\varphi_q'\varphi_r'\varphi_s + \varphi_q''\varphi_r''\int_u^1 \varphi_s d\sigma + \varphi_q'\int_0^u \varphi_r'\varphi_s' d\eta - \varphi_q''\int_u^1\int_0^\sigma \varphi_r'\varphi_s' d\eta d\sigma]\varphi_p du\,,$$
$$D_{pqrs} = \int_0^1 [\varphi_q'\int_0^u \varphi_r'\varphi_s' d\eta - \varphi_q''\int_u^1\int_0^\sigma \varphi_r'\varphi_s' d\eta d\sigma]\varphi_p du\,,$$
$$E_{pqrs} = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}\varphi_q^{IV}\varphi_r'\varphi_s' + \varphi_q''\varphi_r''\varphi_s'' + 3\varphi_q'\varphi_r''\varphi_s''']\varphi_p du\,,$$
$$F_{pqrs} = \int_0^1 [-\tfrac{1}{2}\varphi_q\varphi_r'\varphi_s' + \tfrac{1}{2}\varphi_q'\int_0^u \varphi_r'\varphi_s' d\eta d\sigma + \varphi_q'\varphi_r''\int_u^1 \varphi_s - \tfrac{1}{2}\varphi_q''\int_u^1\int_0^\sigma \varphi_r'\varphi_s' d\eta d\sigma]\varphi_p du\,,$$
$$G_{pqr} = \int_0^1 [\varphi_q'\varphi_r - \varphi_q''\int_u^1 \varphi_r d\sigma - \int_0^u \varphi_q'\varphi_r' d\eta]\varphi_p du\,,$$
$$H_{pqr} = \int_0^1 [(1-u)\varphi_q'\varphi_r'' - \tfrac{1}{2}\varphi_q'\varphi_r']\varphi_p du\,,$$
$$K_{pqr} = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}(1-u^2)\varphi_q'\varphi_r'' - \tfrac{1}{2}u\varphi_q'\varphi_r' + \varphi_q\varphi_r' - \varphi_q''\int_u^1 \varphi_r d\sigma - \tfrac{1}{2}\int_0^u \varphi_q'\varphi_r' d\eta]\varphi_p du$$

(**2.12**)

denklemlerine ulaşılır. (2.11,12) ile tanımlı denklem, bu tez kapsamındaki incelemelere esas oluşturan ve Şekil 2.1 ile gösterilen rotor-pala modelinde, palanın dönme düzlemi içerisindeki enine titreşimlerinin lineer olmayan, ayrıklaştırılmış hareket denklemidir.

3. ROTOR-PALA SİSTEMLERİNİN TİTREŞİMLERİNDE LİNEER BAĞLAŞIKLIK

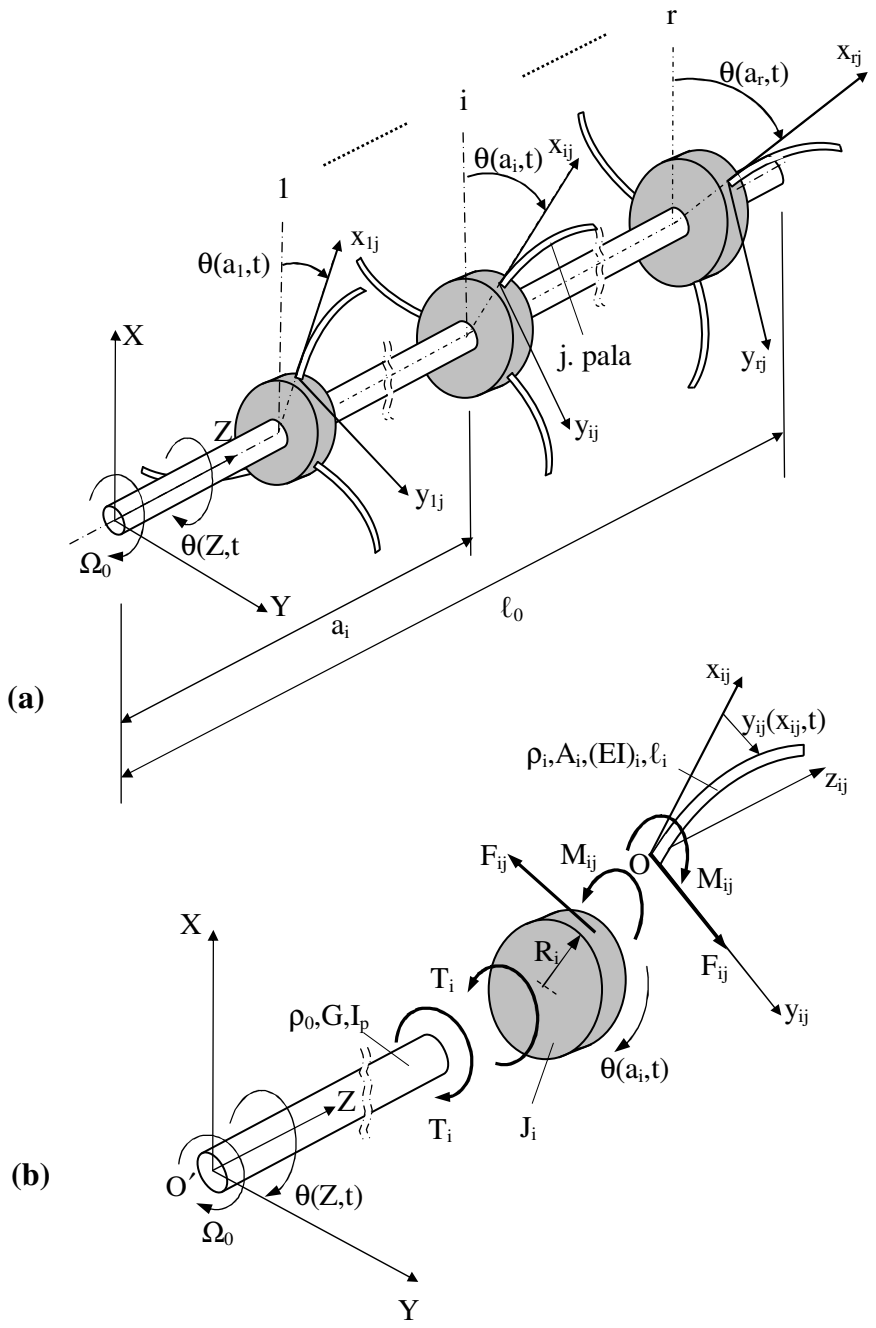
Bu bölümde, lineer bir model çerçevesinde, çok kademeli bir rotor-pala sistemi ele alınmıştır. İlk olarak, mil burulma-pala eğilme titreşimlerine ilişkin matematik model, sonlu elemanlar yöntemi ve Galerkin yöntemi gibi iki farklı yöntemin bir arada kullanıldığı karma bir yöntemle elde edilmiştir. Daha sonra, tek ve çok kademeli rotor-pala sistemlerinde, mil burulma-pala eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin bir inceleme gerçekleştirilerek bağlaşıklığın, bu tür sistemlerin titreşim davranışı üzerindeki etkileri ortaya konulmuştur.

3.1 Mil Burulma-Pala Eğilme Titreşimlerine İlişkin Matematik Model

Yoğunluğu ρ_0, kayma modülü G, kesit eylemsizlik momenti I_p ve uzunluğu ℓ_0 olan burulma esnekliğine sahip bir mil ve bu milin üzerinde taşıdığı r adet rijid diskten oluşan (r kademeli) rotor-pala sistemi göz önüne alınsın (Şekil 3.1a). Burada, yarıçapı R_i, kütlesel eylemsizlik momenti J_i olan i. rijid disk, yoğunluğu ρ_i, eğilme rijidliği $(EI)_i$, kesit alanı A_i, ve uzunluğu ℓ_i olan k_i adet özdeş pala taşısın.

Üç parçadan oluşan (burulma mili, rijid disk ve palalar) bu bileşik sistemin modellenmesinde sentetik, çok eksen takımlı ve karma bir yönteme başvurulsun. Bu amaçla, parçalar ayrı ayrı ele alınsın ve bu parçaların her birinin hareketi, farklı modelleme yöntemi kullanılarak, en uygun eksen takımında incelensin.

Bu amaçla ilk olarak, taşıdığı disklerin T_i tepki momentlerinin etkisinde bulunan burulma mili ele alınsın. Milin sol ucuna bağlı, mil ile birlikte Ω_0 sabit açısal hızı ile dönen $O'; XYZ$ eksen takımında, burulma hareketleri incelenmek istenir, modellemede sonlu elemanlar yöntemine başvurulur ve milin, n adet, eşit uzunluklu, 3 düğüm noktalı (ikisi uç, biri orta noktasında) ve 2. dereceden şekil fonksiyonuna sahip sonlu elemanlardan oluştuğu düşünülürse,



Şekil 3.1: Çok Kademeli Rotor-Pala Sistemi
a) Genel Görünüm, b) Elemanlar

$$\rho_0 I_p \ell_0 \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2} + \frac{GI_p}{\ell_0} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_{S_i} \cdot T_i \qquad \textbf{(3.1)}$$

yazılabilir. Denk. (3.1)'de, $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2n}\}^T$, 2n boyutlu düğüm koordinatları vektörü, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_3 = \{0,0,1,0,\ldots,0\}^T$ örneğinde olduğu gibi, j. 2n boyutlu birim vektor,

s_i, i. diskin bağlandığı düğüm noktası ve $\rho_0 I_p \ell_0 \cdot \mathbf{M}$ ve $\frac{GI_p}{\ell_0} \cdot \mathbf{K}$, milin bağlı-serbest sınır koşullarına karşılık gelen, 2nx2n boyutlu global kütle ve katılık matrisleridir. Buradaki, **M** ve **K** matrislerinin yapısı ek C'de verilmiştir.

İkinci olarak, üzerinde k_i adet pala taşıyan i. rijid disk ele alınsın. Milin $-T_i$ tepki momentiyle palaların $-F_{ij}$ ve $-M_{ij}$; $j=1,2,\ldots,k_i$ tepki kuvvet ve momentlerinin etkisi altındaki i. rijid diskin hareket denklemi, diskin, mile ait s_i nci düğüm noktası ile birlikte hareket edeceğine dikkat ederek, $O';XYZ$ eksen takımında

$$J_i \cdot (\mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}) = -T_i - \sum_{j=1}^{k_i} (R_i \cdot F_{ij} + M_{ij}) \qquad \textbf{(3.2)}$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak, i. rijid diske (i. kademeye) bağlı j. palanın $O;x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ eksen takımındaki hareketi göz önüne alınsın. Bunun için, Bölüm 2'de ele alınan rotor-pala sisteminde palanın, dönme düzlemi içerisindeki enine titreşimlerine ilişkin hareketini tanımlayan (2.11,12) denklemlerine başvurulsun. Ancak, artık çok kademeli bir rotor-pala sistemi modellenmeye çalışıldığından (2.11,12) denklemleri elde edilirken kullanılan (2.5) boyutsuz parametrelerinde zaman ölçeği olarak 1. rijid diske bağlı (1. kademedeki) palaların $\omega_1^* = \sqrt{\frac{(EI)_1}{\rho_1 A_1 \ell_1^4}}$ şeklindeki frekans ölçeği kullanılsın.

i. rijid diskin dönme hızı,

$$\Omega_i(t) = \Omega_0 + \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \qquad \textbf{(3.3)}$$

şeklindedir ve boyutsuz karşılığı

$$\beta = \frac{\Omega_0}{\omega_1^*}, \ \beta_i = \frac{\Omega_i}{\omega_1^*} \qquad \textbf{(3.4)}$$

ifadeleri ile

$$\beta_i(\tau) = \beta + \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) \qquad \textbf{(3.5)}$$

olarak yazılabilir.

Burada nokta, artık τ'ya göre türevi göstermektedir. i. rijid diskin dönme hızının boyutsuz karşılığı böylece elde edildikten sonra, bu diske bağlı, eğilme rijidliği $(EI)_i$, yoğunluğu, ρ_i, kesit alanı A_i, boyu ℓ_i olan j. palanın düzlem içi enine titreşimlerinin hareketine ait diferansiyel denklem ise, küçük genlikli titreşimler kabulu altında lineer olmayan terimlerin ihmal edilmesiyle, Denk. (2.11)'den hareketle matris-vektör gösterilimiyle ve (3.4) ile

$$\tau = \omega_1^* t\,,\quad \alpha_i = \frac{R_i}{\ell_i}\,,\quad \eta_i = \frac{\omega_i^*}{\omega_1^*}\,,\quad \omega_i^* = \sqrt{\frac{(EI)_i}{\rho_i A_i \ell_i^4}} \qquad \textbf{(3.6)}$$

tanımları altında

$$\ddot{\mathbf{g}}_{ij}(\tau) + \left[\eta_i^2 \cdot \boldsymbol{\Lambda}^4 - \beta_i^2(\tau) \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{I})\right] \cdot \mathbf{g}_{ij}(\tau) + \dot{\beta}_i(\tau)(\alpha_i \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.7)}$$

olarak yazılabilir. Burada $\boldsymbol{\Lambda}$, elemanları $\Lambda_{pp} = \lambda_p$ olan mxm boyutunda köşegen matris; $\mathbf{I}$, mxm boyutunda birim matris; $\mathbf{g}_{ij}(\tau)$, j. palaya ait m boyutlu Galerkin koordinatları vektörü; $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$, mxm boyutlu simetrik matrisler, $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ ise, mx1 boyutlu vektörlerdir ve elemanları Denk. (2.12)'de tanımlıdır.

(3.5) ifadesi, (3.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\ddot{\mathbf{g}}_{ij}(\tau) + \left[\eta_i^2 \cdot \boldsymbol{\Lambda}^4 - \left(\beta + \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(\tau)\right)^2 \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{I})\right] \cdot \mathbf{g}_{ij}(\tau) + (\alpha_i \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.8)}$$

elde edilir. (3.8) nolu denklemden görüleceği üzere, pala düzlem içi enine titreşimleri ile mil-disk sisteminin burulma titreşimleri arasında, i. diske ilişkin $\mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau)$ terimi üzerinden lineer, $\left(\beta + \mathbf{e}_{s_i}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(\tau)\right)^2$ terimi üzerinden ise, pala titreşimlerinin kararlılığının yitimine yol açabileceği [23-25] çalışmalarıyla ortaya konmuş olan, lineer olmayan bağlaşıklık mevcuttur. Lineer olmayan bağlaşıklığın, rijid disklerin

titreşim genliklerinin ve frekanslarının küçük olması kabulleri altında ihmal edilmesiyle

$$\ddot{\mathbf{g}}_{ij}(\tau)+\left[\eta_i^2\cdot\mathbf{\Lambda}^4-\beta^2\cdot\left(\alpha_i\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{I}\right)\right]\cdot\mathbf{g}_{ij}(\tau)+(\alpha_i\cdot\mathbf{c}+\mathbf{d})\cdot\mathbf{e}_{s_i}^{T}\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau)=\mathbf{0} \tag{3.9}$$

elde edilir.

Bu formülasyon ışığında i. disk tarafından j. palaya uygulanan kesme kuvvetleri F_{ij}, ve eğilme momentleri M_{ij},

$$\begin{aligned} F_{ij}(\tau) &= \frac{(EI)_i}{\ell_i^2}\left.\frac{\partial^3 v_{ij}(u_{ij},\tau)}{\partial u_{ij}^3}\right|_{u_{ij}=0} = -2\frac{(EI)_i}{\ell_i^2}\mathbf{e}^{T}\mathbf{g}_{ij}(\tau), \\ M_{ij}(\tau) &= -\frac{(EI)_i}{\ell_i}\left.\frac{\partial^2 v_{ij}(u_{ij},\tau)}{\partial u_{ij}^2}\right|_{u_{ij}=0} = -2\frac{(EI)_i}{\ell_i}\mathbf{f}^{T}\mathbf{g}_{ij}(\tau) \end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak hesaplanır. Burada, **e** ve **f**, elemanları

$$e_p=\kappa_p\lambda_p^3,\quad f_p=\lambda_p^2 \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlı m boyutlu vektörlerdir ve κ_p Denk. (2.8)'de tanımlanmıştır.

Parçaların hareket denklemleri bu şekilde elde edildikten sonra sıra sistemin bütününün sentezlenmesine gelmiştir. Bunun için önce F_{ij} ve M_{ij}, Denk. (3.10)'dan alınıp Denk. (3.2)'de yerlerine konularak T_i çekilirse

$$T_i=-J_i\cdot\mathbf{e}_{s_i}\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)+2\frac{(EI)_i}{\ell_i}\left(\frac{R_i}{\ell_i}\cdot\mathbf{e}^{T}+\mathbf{f}^{T}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k_i}\mathbf{g}_{ij}(\tau)\right), \tag{3.12}$$

daha sonra T_i, Denk. (3.1)'de yerine konulursa

$$\left(\rho_0 I_p \ell_0\cdot\mathbf{M}+\sum_{i=1}^{r}J_i\cdot\mathbf{e}_{s_i}\mathbf{e}_{s_i}^{T}\right)\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)+\frac{GI_p}{\ell_0}\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\theta}(t)-\sum_{i=1}^{r}2\frac{(EI)_i}{\ell_i}\mathbf{e}_{s_i}\left(\frac{R_i}{\ell_i}\cdot\mathbf{e}^{T}+\mathbf{f}^{T}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k_i}\mathbf{g}_{ij}(\tau)\right)=0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Denk. (3.13)'de, (3.6) ve

$$\gamma_i = \frac{J_i}{\rho_0 I_p \ell_0},\ \delta_i = \frac{\rho_i A_i \ell_i^3}{\rho_0 I_p \ell_0},\ \mu = \frac{\omega_0^*}{\omega_1^*},\ \omega_0^* = \sqrt{\frac{G}{\rho_0 \ell_0^2}} \qquad \textbf{(3.14)}$$

tanımları kullanılarak, τ zamanına geçilip boyutsuzlaştırma yapılması sonunda

$$\left(\mathbf{M} + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \cdot \mathbf{e}_{s_i} \mathbf{e}_{s_i}^T\right) \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) + \mu^2 \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta}(\tau) - \sum_{i=1}^{r} 2\delta_i \eta_i^2 \mathbf{e}_{s_i} \left(\alpha_i \cdot \mathbf{e}^T + \mathbf{f}^T\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_i} \mathbf{g}_{ij}(\tau)\right) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.15)}$$

ifadesine ulaşılır. Denk. (3.9) ve Denk. (3.15)'in $2n + m \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\right)$ boyutlu tek bir hiper-matris/vektör denklemi halinde bir araya getirilmesiyle sistemin hareket denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{M}}_{10} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{M}}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathbf{M}}_{r0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{g}}_1 \\ \ddot{\mathbf{g}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{g}}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \delta_1 \overline{\mathbf{K}}_{01} & \delta_2 \overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & \delta_r \overline{\mathbf{K}}_{0r} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \overline{\mathbf{K}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.16)}$$

şeklinde elde edilir.

Burada $\mathbf{g}_i$, i. diske bağlı k_i adet palanın m boyutlu Galerkin koordinatları vektöründen oluşmuş $k_i \cdot m$ boyutlu bir hiper vektör, $\overline{\mathbf{M}}_{i0}$ ve $\overline{\mathbf{K}}_{0j}$, k_i (veya k_j) adet özdeş matristen oluşan hiper-matrisler, $\overline{\mathbf{K}}_{ii}$, k_i adet özdeş köşegen blok içeren blok-köşegen bir hiper-matris olup genel görünümleri

$$\mathbf{g}_i = \left\{\mathbf{g}_{i1}^T \quad \mathbf{g}_{i2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{g}_{ik_i}^T\right\}^T, \quad \overline{\mathbf{M}}_{i0} = \left[\mathbf{M}_{i0}^T \quad \mathbf{M}_{i0}^T \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{i0}^T\right]^T,$$
$$\overline{\mathbf{K}}_{0j} = \left[\mathbf{K}_{0j} \quad \mathbf{K}_{0j} \quad \cdots \quad \mathbf{K}_{0j}\right], \quad \overline{\mathbf{K}}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ii} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.17)}$$

şeklindedir. 2nx2n boyutlu $\mathbf{M}_{00}$ ve $\mathbf{K}_{00}$, mxm boyutlu $\mathbf{K}_{ii}$, mx2n boyutlu $\mathbf{M}_{i0}$ ve 2nxm boyutlu $\mathbf{K}_{0j}$ matrisleri ise

$$\mathbf{M}_{00}=\mathbf{M}+\sum_{i=1}^{r}\gamma_i\cdot\mathbf{e}_{s_i}\mathbf{e}_{s_i}^{T},\quad \mathbf{M}_{i0}=(\alpha_i\cdot\mathbf{c}+\mathbf{d})\cdot\mathbf{e}_{s_i}^{T},\quad \mathbf{K}_{00}=\mu^2\mathbf{K},$$
$$\mathbf{K}_{0j}=-2\eta_j^2\cdot\mathbf{e}_{s_j}\cdot\left(\alpha_j\cdot\mathbf{e}^{T}+\mathbf{f}^{T}\right),\quad \mathbf{K}_{ii}=\eta_i^2\cdot\mathbf{\Lambda}^4-\beta^2\cdot(\alpha_i\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{I}) \qquad \textbf{(3.18)}$$

şeklinde tanımlıdır.

Denk. (3.16), Şekil 3.1'de görülen çok kademeli rotor-pala sisteminin serbest titreşimleri için lineer, yaklaşık ve ayrıklaştırılmış bir model oluşturmaktadır.

3.2 Özdeğer Analizi

$\overline{\mathbf{G}}_i=\left\{\mathbf{G}_{i1}^{T},\mathbf{G}_{i2}^{T},...,\mathbf{G}_{ik_i}^{T}\right\}^{T}$ olmak üzere $\boldsymbol{\theta}(\tau)=\boldsymbol{\Theta}\cdot e^{i\sigma\tau}$, $\mathbf{g}_i(\tau)=\overline{\mathbf{G}}_i\cdot e^{i\sigma\tau}$ şeklindeki çözüm kabulleri Denk. (3.16)'da yerlerine konulup, Ek D'de verildiği üzere, parçalı matrislerde ters alma ve çarpma kuralları dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{00}-\sigma^2\mathbf{I} & \delta_1\cdot\overline{\mathbf{B}}_{01} & \delta_2\cdot\overline{\mathbf{B}}_{02} & \cdots & \delta_r\cdot\overline{\mathbf{B}}_{0r}\\ \overline{\mathbf{C}}_{10} & \overline{\mathbf{K}}_{11}+\delta_1\cdot\overline{\mathbf{D}}_{11}-\sigma^2\mathbf{I} & \delta_2\cdot\overline{\mathbf{D}}_{12} & \cdots & \delta_r\cdot\overline{\mathbf{D}}_{1r}\\ \overline{\mathbf{C}}_{20} & \delta_1\cdot\overline{\mathbf{D}}_{21} & \overline{\mathbf{K}}_{22}+\delta_2\cdot\overline{\mathbf{D}}_{22}-\sigma^2\mathbf{I} & \cdots & \delta_r\cdot\overline{\mathbf{D}}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{\mathbf{C}}_{r0} & \delta_1\cdot\overline{\mathbf{D}}_{r1} & \delta_2\cdot\overline{\mathbf{D}}_{r2} & \cdots & \overline{\mathbf{K}}_{rr}+\delta_r\cdot\overline{\mathbf{D}}_{rr}-\sigma^2\mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Theta}\\ \overline{\mathbf{G}}_1\\ \overline{\mathbf{G}}_2\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{G}}_r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.19)}$$

özdeğer analizi problemine gelinir. Burada üst çizgili matrisler, yerine göre k_i veya k_ixk_j adet özdeş bloktan oluşan

$$\overline{\mathbf{B}}_{0j}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{0j} & \mathbf{B}_{0j} & \cdots & \mathbf{B}_{0j}\end{bmatrix},\quad \overline{\mathbf{C}}_{i0}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{i0}\\ \mathbf{C}_{i0}\\ \vdots\\ \mathbf{C}_{i0}\end{bmatrix},\quad \overline{\mathbf{D}}_{ij}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{ij} & \mathbf{D}_{ij} & \cdots & \mathbf{D}_{ij}\\ \mathbf{D}_{ij} & \mathbf{D}_{ij} & \cdots & \mathbf{D}_{ij}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{D}_{ij} & \mathbf{D}_{ij} & \cdots & \mathbf{D}_{ij}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.20)}$$

görünümüne sahip hiper-matrislerdir ve

$$\mathbf{A}_{00}=\mathbf{M}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{00},\quad \mathbf{B}_{0j}=\mathbf{M}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{0j},\quad \mathbf{C}_{i0}=-\mathbf{M}_{i0}\mathbf{A}_{00},\quad \mathbf{D}_{ij}=-\mathbf{M}_{i0}\mathbf{B}_{0j} \qquad \textbf{(3.21)}$$

tanımları geçerlidir. İçerdiği matrislerin tekrarlı yapıda oluşundan yararlanılarak Denk. (3.19)'daki özdeğer analizi problemi Ek E'de verildiği üzere analitik olarak geliştirilebilir ve şu sonuca varılır:

Karakteristik denklem,

$$\Delta_i = k_i \delta_i = k_i \frac{\rho_i A_i \ell_i^3}{\rho_0 I_p \ell_0}, \tag{3.22}$$

i. diskin taşıdığı palaların toplam eylemsizliğinin boyutsuz bir ölçüsünü oluşturmak üzere

$$\det\left[\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \Delta_1\mathbf{B}_{01} & \Delta_2\mathbf{B}_{02} & \cdots & \Delta_p\mathbf{B}_{0r} \\ \mathbf{C}_{10} & \Delta_1\mathbf{D}_{11}+\mathbf{K}_{11} & \Delta_2\mathbf{D}_{12} & \cdots & \Delta_p\mathbf{D}_{1r} \\ \mathbf{C}_{20} & \Delta_1\mathbf{D}_{21} & \Delta_2\mathbf{D}_{22}+\mathbf{K}_{22} & \cdots & \Delta_p\mathbf{D}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{r0} & \Delta_1\mathbf{D}_{r1} & \Delta_2\mathbf{D}_{r2} & \cdots & \Delta_r\mathbf{D}_{rr}+\mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} - \sigma^2\mathbf{I}\right] \cdot \prod_{i=1}^{r}\left\{\det\left[\mathbf{K}_{ii}-\sigma^2\mathbf{I}\right]\right\}^{k_i-1} = 0 \tag{3.23}$$

şeklinde iki çarpana ayrılarak yazılabilir. Buradan, incelenen sistemin özdeğer analizi probleminin iki alt probleme ayrışacağı anlaşılmaktadır. (3.23)'de ilk çarpan, bağlaşık titreşimlere karşılık gelen, ikinci çarpan ise, bağsız titreşimlere karşılık gelen alt problemdir.

İki farklı mod şekli sınıfına karşılık gelen bu alt problemler, "mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları alt problemi" ve "rijid mil modları alt problemi" başlıkları altında aşağıda ele alınmıştır.

3.2.1 Mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları alt problemi

Bu problem, pala sayısı k_i den bağımsız olarak, 2n+rm boyutlu olup frekans denklemi

$$\det\left[\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \Delta_1\mathbf{B}_{01} & \Delta_2\mathbf{B}_{02} & \cdots & \Delta_p\mathbf{B}_{0r} \\ \mathbf{C}_{10} & \Delta_1\mathbf{D}_{11}+\mathbf{K}_{11} & \Delta_2\mathbf{D}_{12} & \cdots & \Delta_p\mathbf{D}_{1r} \\ \mathbf{C}_{20} & \Delta_1\mathbf{D}_{21} & \Delta_2\mathbf{D}_{22}+\mathbf{K}_{22} & \cdots & \Delta_p\mathbf{D}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{r0} & \Delta_1\mathbf{D}_{r1} & \Delta_2\mathbf{D}_{r2} & \cdots & \Delta_r\mathbf{D}_{rr}+\mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} - \sigma^2\mathbf{I}\right] = 0 \tag{3.24}$$

şeklindedir. Bu bağlaşık modlara ait 2n+rm adet öz frekansın yanı sıra bu frekanslara karşılık gelen özvektörler de Denk. (3.24)'den hesaplanabilir. Denk. (3.19)'un bu bağlaşık modlardan s incisine ait σ_s frekansına karşılık gelen

$$\mathbf{U}^{(s)} = \left\{ \boldsymbol{\Theta}^{(s)^T}, \mathbf{G}_{11}^{(s)^T}, \mathbf{G}_{12}^{(s)^T}, ..., \mathbf{G}_{1k_1}^{(s)^T}, ..., \mathbf{G}_{r1}^{(s)^T}, \mathbf{G}_{r2}^{(s)^T}, ..., \mathbf{G}_{rk_r}^{(s)^T} \right\}^T \tag{3.25}$$

özvektörü ile Denk. (3.24)'den aynı frekans için hesaplanacak

$$\mathbf{V}^{(s)} = \left\{ \boldsymbol{\Theta}^{(s)^T}, \mathbf{G}_{1}^{(s)^T}, \mathbf{G}_{2}^{(s)^T}, ..., \mathbf{G}_{r}^{(s)^T} \right\}^T \tag{3.26}$$

özvektörü arasında

$$\mathbf{G}_{ij}^{(s)} = \mathbf{G}_{i}^{(s)}; \quad j=1,2,\ldots,k_i \tag{3.27}$$

ilişkisi mevcuttur. Diğer bir değişle, mil burulma-pala eğilme bağlaşık modlarında, aynı diske bağlı bütün palalar özdeş biçimde davranmakta ve bu modlara ait özvektörler Denk. (3.24)'de tanımlı alt problemden hesaplanabilmektedir.

3.2.2 Rijid mil modları alt problemi

Palaları taşıyan her i. diske, frekans denklemi

$$\det\left[\mathbf{K}_{ii} - \sigma^2\mathbf{I}\right] = \det\left[\eta_i^2\boldsymbol{\Lambda}^4 - \beta^2\cdot(\alpha_i\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{I}) - \sigma^2\mathbf{I}\right] = 0, \; i=1,2,\ldots,r \tag{3.28}$$

olan bir alt problem karşılık gelir ve bu alt problemin boyutu, o diskin taşıdığı pala sayısı k_i'den bağımsız olarak, bir palanın model serbestlik derecesi olan m dir. Denk. (3.28)'in rijid bir rotora bağlı olarak dönen bir palanın frekans denklemi olduğuna dikkat edilirse, bu modlarda mil esnekliğinin bir etkisinin bulunmadığı anlaşılır. Denk. (3.23)'e göre, i. kademeye karşılık gelen ve Denk. (3.28)'den hesaplanacak her bir frekansın (k_i-1) katlı olarak değerlendirilmesi gerekmektedir. Buradan anlaşılacağı üzere rijid mil modları, bir kademesinde birden fazla pala içeren sistemlere özgüdür. Denk. (3.19)'dan, bu modlardan birine ait bir σ_s frekansına karşılık hesaplanacak $\mathbf{U}^{(s)}$ özvektörü, Denk. (3.28)'in q. alt probleminden aynı

frekans için hesaplanacak $\mathbf{W}_q^{(s)}$ özvektörü yardımıyla belirlenebilir. Bunun için, $\alpha_{qj}^{(s)}$'ler, pozitif veya negatif ölçek katsayıları olmak üzere

$$\boldsymbol{\Theta}^{(s)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \alpha_{qj}^{(s)} \cdot \mathbf{W}_q^{(s)}; \quad \sum_{j=1}^{k_q} \alpha_{qj}^{(s)} = 0 & i = q \\ \mathbf{0} & i \neq q \end{cases} \tag{3.29}$$

olduğunun göz önüne alınması yeterlidir. Ele alınan rotor-pala sisteminde, q. kademeye karşılık gelen rijid mil modunda yalnızca bu kademedeki palalar titreşirken, diğer kademelerdeki palalar hareketsiz kalır. Titreşim hareketi yapan bütün palalar aynı mod biçimine sahiptir. Ancak bu mod biçimleri, bağlı oldukları disk üzerindeki toplam etkileri sıfırlanacak biçimde ölçeklidir. Bu nedenle bu modlarda mil, bir rijid cisim gibi davranır. Ayrıca Denk. (3.29), toplamda sıfır etmeleri kaydıyla palaların bağıl genliklerini belirsiz bırakmaktadır. Bunun tek istisnası, her iki palanın eşit genlikle zıt yönde titreşeceği k=2 halidir.

3.3 Sayısal Uygulamalar

Bu alt bölümde, 3.2 alt bölümünde ortaya konmuş olan hesap yönteminin, tek ve çok kademeli rotor-pala sistemleri için uygulama sonuçlarına yer verilmiştir. Hesaplar, bu amaçla geliştirilmiş bir FORTRAN programı yardımıyla gerçekleştirilmiş ve palaların modellenmesinde m=10 Galerkin terimi kullanılmıştır. Ayrıca hesaplarda, mil burulma frekanslarının ilk 10 tanesinin göz önüne alınması yeterli görüldüğünden, milin modellenmesinde, 10. burulma frekansı için yeterli yakınsamayı sağlayan n=10(r+1) sonlu eleman kullanılmıştır. Bu eleman sayısı, Tablo 3.1'de de görüleceği üzere ilgili 10 burulma frekansı için tatminkar bir yaklaşıklık sağlamaktadır.

Mil burulma ve pala eğilme titreşimleri arasındaki bağlaşıklığın hesap sonuçları üzerindeki etkilerini görebilmek için, sonuçlar, bu bağlaşıklığın hesaba katılmaması durumunda bulunacak sonuçlarla karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu amaçla, palaları rijid kabul ederek mil burulma titreşimlerini incelemeye yönelik

$$[\mathbf{M}+\sum_{i=1}^{r}\bar{\gamma}_i\mathbf{e}_{s_i}\mathbf{e}_{s_i}^{T}]\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\mu^2\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0} \qquad \textbf{(3.30)}$$

problemi ile, mili rijid kabul ederek pala titreşimlerini incelemeye yönelik

$$\ddot{\mathbf{g}}_{ij}+\left[\eta_i^2\boldsymbol{\Lambda}^4-\beta^2(\alpha_i\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{I})\right]\mathbf{g}_{ij}=\mathbf{0}\,;\quad i=1,\,2,\ldots,r \qquad \textbf{(3.31)}$$

problemi ele alımıştır. Denk. (3.30)'da $\bar{\gamma}_i$, taşıyıcı disk ve palaların

$$\bar{J}_i=J_i+k_i\rho_i A_i\ell_i[\tfrac{1}{12}\ell_i^2+(R_i+\tfrac{\ell_i}{2})^2] \qquad \textbf{(3.32)}$$

olarak ifade edilmiş dönme eylemsizlikleri toplamının

$$\bar{\gamma}_i=\frac{\bar{J}_i}{\rho_0 I_p\ell_0}=\gamma_i+\Delta_i(\tfrac{1}{3}+\alpha_i^2+\alpha_i) \qquad \textbf{(3.33)}$$

şeklindeki boyutsuz karşılığıdır.

3.3.1 Tek kademeli rotor-pala sistemlerinde bağlaşık titreşimler

İlk olarak, üzerinde birden fazla pala taşıyan tek bir rijid disk ve bu diski sağ ucunda taşıyan burulma milinden ibaret, tek kademeli bir rotor-pala sistemi ele alınsın. Bu durumda, r=1 ve diskin mile bağlandığı düğüm noktası s=2n dir. Bu alt bölümde, tek kademeli bir sistem göz önüne alındığından dolayı, i. diski tanımlayan i indisi hesaplardan düşürülecektir. Ayrıca, yapılacak inceleme pala sayısı k dan bağımsız olduğundan, pala sayısının verilmesine gerek yoktur.

3.3.1.1 Modelin doğrulanması

Yapılan inceme sonuçlarını ortaya koymadan önce, bu çalışmada önerilen yöntemle elde edilen modelin doğrulanması yerinde olur. Denk. (3.19) ile tanımlanan orijinal problem, Denk. (3.24) ve Denk. (3.28) ile tanımlanan iki alt probleme indirgenmişti. Bu alt problemlerden Denk. (3.28) ile tanımlanan rijid mil modları alt problemi, şimdiye dek bir çok çalışmaya konu olmuş [9-14,19] ve çok iyi bilinen, dönen kirişlerin düzlem içi titreşimlerinin modelidir. Bu nedenle, yalnızca Denk. (3.24) ile tanımlanan mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları alt problemine ilişkin modelin

doğruluğunun kontrol edilmesi yeterlidir. Bu kontrol için, μ boyutsuz parametresinden yararlanılması düşünülsün. Buna göre μ nün değeri sıfıra götürüldüğünde model, elastik mil-rijid pala modeline, sonsuza götürüldüğünde ise, rijid mil-elastik pala modeline yaklaşacaktır. Dolayısıyla, Denk.(3.24)'ün, μ'nün uç değerleri için elde edilecek sonuçları, bu uç değerlere karşılık gelen modellerin sonuçlarıyla karşılaştırılarak kontrol yapılabilir.

İlk olarak μ'nün değerini sıfıra doğru götürelim. Bu durumda model, bir ucu bağlı, diğer ucunda eylemsizlik momenti $\bar{\gamma}$ olan bir rijid cisim taşıyan burulma miline yaklaşacaktır. Böyle bir modelin kesin, boyutsuz, burulma doğal frekanslarının, $\bar{\omega}_i = \dfrac{\omega_i}{\omega_0^*}$ olmak üzere

$$\cos\bar{\omega} - \bar{\gamma}\bar{\omega}\sin\bar{\omega} = 0 \qquad \textbf{(3.34)}$$

denkleminin kökleri olduğu gösterilebilir. Buna göre sistem parametrelerinin a) α=0.4, β=0, γ=0.33, Δ=0.75 $\rightarrow \bar{\gamma}=1$ ve b) α=0.4, β=0, γ=2.32, Δ=3 $\rightarrow \bar{\gamma}=5$ şeklinde iki farklı kombinasyonu için Denk. (3.24)'den μ=0.0001 olmak üzere hesaplanan ilk on σ_i frekansı, $\bar{\omega}_i = \dfrac{\sigma_i}{\mu}$ şeklinde yeniden ölçeklendirilerek, Denk. (3.34)'den elde edilen değerlerle birlikte Tablo 3.1'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

İkinci olarak, diğer uç durum olan μ'nün değerinin sonsuza gitmesi halinde model, sabit açısal hızla dönen ve bağlı-serbest sınır şartlarına sahip elastik pala modeline yaklaşacaktır. Buna göre sistem parametrelerinin α=1, γ=1, Δ=1 değerleri ve boyutsuz dönme hızı β'nın üç farklı değeri için Denk. (3.24)'den μ=10000 alınarak hesaplanan $\sigma_i = \dfrac{\omega_i}{\omega_1^*}$ şeklinde tanımlı ilk üç boyutsuz doğal frekans, Naguleswaran [19] tarafından düzlem dışı titreşimler için verilen frekans değerlerinin $\sigma_{iç}^2=\sigma_{dış}^2-\beta^2$

Tablo 3.1: μ=0.0001 İçin Hesaplanan Frekansların Elastik Mil-Rijid Pala Frekansları İle Karşılaştırması

		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_6$	$\bar{\omega}_7$	$\bar{\omega}_8$	$\bar{\omega}_9$	$\bar{\omega}_{10}$
$\bar{\gamma}=1$	Model	0.8620	3.4269	6.4381	9.5302	12.6471	15.7757	18.9127	22.0580	25.2132	28.3814
	Denk.(3.34)	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293	12.6453	15.7713	18.9024	22.0365	25.1724	28.3096
$\bar{\gamma}=5$	Model	0.4337	3.2042	6.3150	9.4464	12.5837	15.7248	18.8701	22.0213	25.1811	28.3527
	Denk.(3.34)	0.4328	3.2039	6.3148	9.4459	12.5823	15.7207	18.8602	22.0002	25.1407	28.2814

Tablo 3.2: μ=10000 İçin Hesaplanan Frekansların Rijid Mil-Elastik Pala Frekansları İle Karşılaştırması (α=1 için)

	$\beta = 0$			$\beta = 2$			$\beta = 10$		
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1	σ_2	σ_3
Model	3.5160	22.0345	61.6972	4.4005	23.2803	63.0357	13.2591	43.2301	88.6025
Ref.[19]	3.5160	22.0345	61.6972	4.4005	23.2802	63.0358	13.2579	43.2266	88.5937

denklemi kullanılarak düzlem içi titreşimlere uyarlanması ile elde edilen değerlerle birlikte Tablo 3.2'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Ayrıca, β=0 değerinde merkezkaç kuvvet etkisi devreye girmediğinden, Denk. (3.24)'den bu β değerine karşılık hesaplanan frekanslar, stasyoner konsol kirişin boyutsuz frekansları olan ve sayısal değerleri ek B'de verilen λ_i 'lerin karesiyle de kontrol edilebilir.

Tablo 3.1 ve Tablo 3.2'nin incelenmesinden, Denk. (3.24)'te verilen model ile, μ parametresinin sıfıra ve sonsuza götürülmesine karşılık gelen, sırasıyla elastik mil-rijid pala ve rijid mil-elastik pala modelleri arasındaki uyumun tatmin edici olduğu görülmektedir. Bu da, modelin, μ parametresinin bu sınır durumlar dışına karşılık gelen ara değerlerinde de iyi sonuç vereceğinin bir göstergesi olarak kabul edilebilir.

3.3.1.2 Parametrik incelemeler

Tek kademeli rotor-pala modelinin dinamik davranışı, daha önce tanımlanan α, β, γ, Δ ve μ boyutsuz parametrelerinin yanı sıra, taşıyıcı diskin mil üzerindeki konumunu tanımlayan, boyutsuz

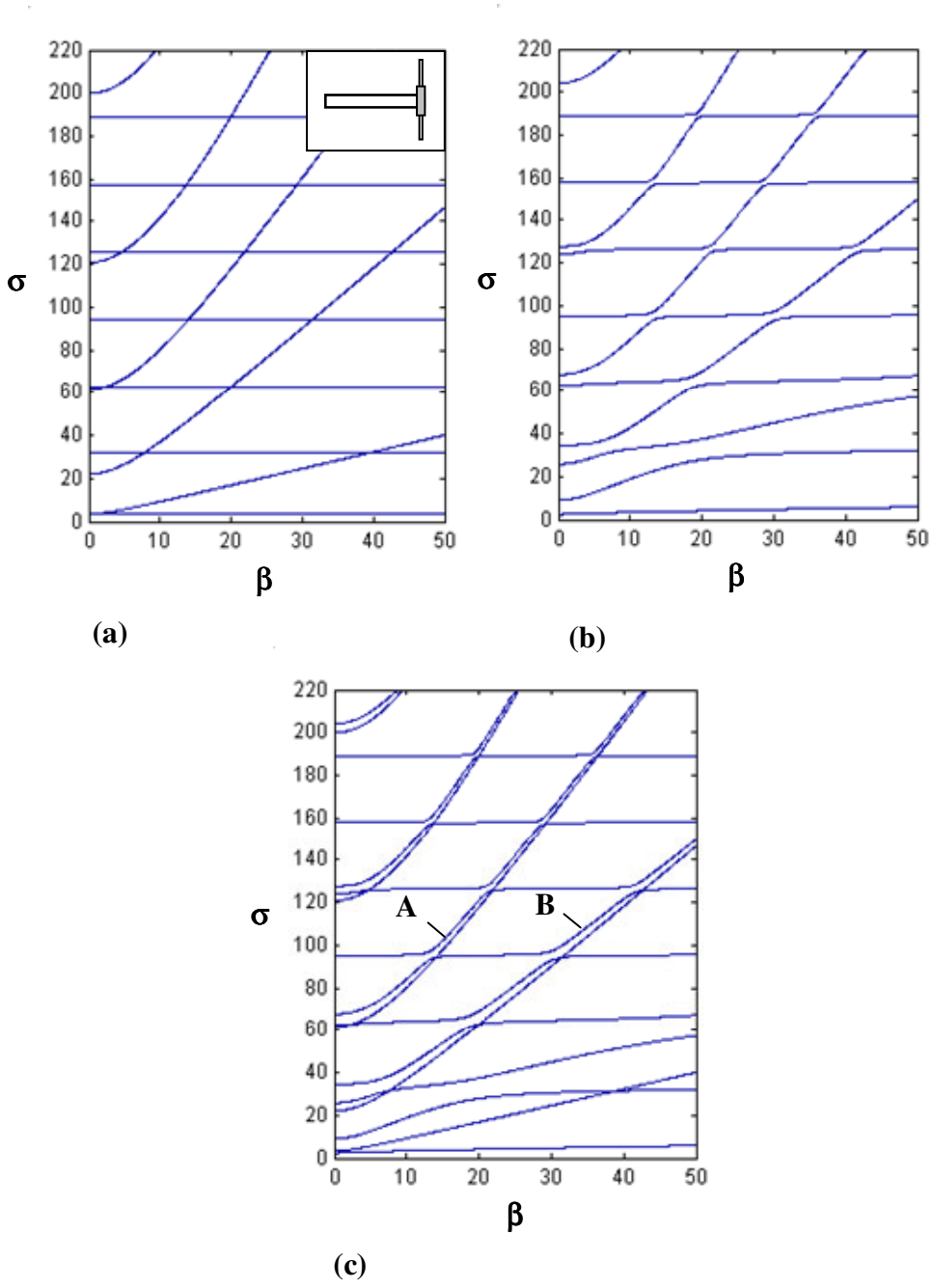
$$\overline{\eta} = \frac{a}{\ell_0} \qquad \textbf{(3.35)}$$

parametresine de bağımlıdır. Ancak formülasyonda disk, milin s. düğüm noktasına bağlı kabul edildiğinden $a = \frac{\ell_0}{2n} s$ (s=1,2,...,2n) olmakta, $\overline{\eta}$ da sürekli olarak değil,

$$\overline{\eta} = \frac{s}{2n} \; ; \qquad s=1,2,...,2n \qquad \textbf{(3.36)}$$

uyarınca değişmektedir. Bu bölümde, sistem özfrekanslarının bu boyutsuz parametrelerle değişimine ilişkin bir parametrik inceleme ortaya konacaktır.

İlk olarak α=0.4, γ=1, Δ=10, μ=10 şeklinde tanımlı bir rotor-pala sisteminde özfrekansların boyutsuz hız β ile değişimi incelenmiş ve sonuçlar Şekil 3.2a, b ve c'de verilmiştir. Şekil 3.2a'da, bağlaşıklığı dikkate almayan (3.30) ve (3.31) denklemlerinden hesaplanan bağsız frekanslar görülmektedir. Burada, yatay hatlar dönme hızından etkilenmeyen mil burulma frekanslarına, β arttıkça yükselen eğriler ise merkezkaç kuvvet etkisi ile sertleşen palaların frekanslarına karşılık gelmektedir.

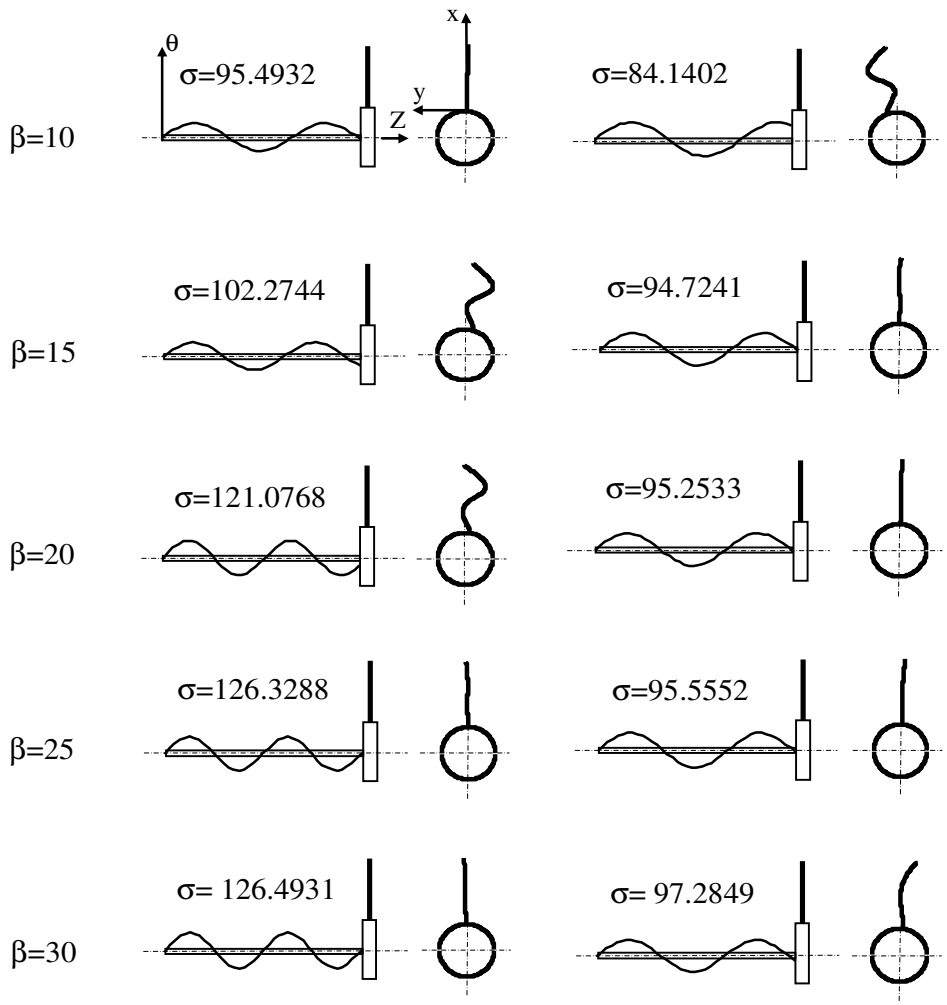


Şekil 3.2: Özfrekansların Mil Boyutsuz Dönme Hızı β İle Değişimi
a) Bağsız, b) Bağlaşık, c) Bütün Frekanslar
(α=0.4, γ=1, Δ=10, μ=10)

Şekil 3.2b'de, Denk. (3.24)'den hesaplanan mil burulma-pala eğilme bağlaşık modlarına ait frekanslar görülmektedir ve bu şekil tek palalı bir modele ait bütün frekansları barındırmaktadır. Şekil 3.2b'ye ek olarak Denk.(3.28)'in de hesaba katılmasıyla çok palalı modele ait bütün frekanslar Şekil 3.2c'deki gibi elde edilmiş olur. Bu şekil, Şekil 3.2a'daki pala frekanslarının ve Şekil 3.2b'nin süperpozisyonundan başka bir şey değildir ve bazı β değerlerine karşılık gelen ilk on frekans Tablo 3.3'de verilmiştir. Burada, * ile gösterilen frekanslar, üzerinde birden çok pala taşıyan rotor-pala sistemlerine özgü rijid mil modlarına; diğer frekanslar ise, mil burulma-pala eğilme bağlaşık modlarına karşılık gelen frekanslardır. Farklı parametre bileşimlerine karşılık gelen frekanslar tablolar halinde Ek F'de verilmiştir. Şekil 3.2a ve 3.2b'nin karşılaştırılmasından şu sonuçlara varılır: i) Bağsız haldeki frekansların geometrik yerlerinin kesişme noktalarından uzaklaştıkça bağlaşıklığın özfrekanslar üzerindeki etkisi azalmaktadır. ii) Özellikle düşük frekanslarda olmak üzere, bu kesişme noktaları civarında bağlaşık modlara ilişkin özfrekanslar çok ciddi geometrik yer sapmasına (loci-veering) uğramaktır. Bu geometrik yer sapmaları civarında fiziksel olarak ne olduğunu daha iyi anlayabilmek için, Şekil 3.2c'de görülen A ve B'nin geometrik yerleri üzerindeki bazı noktalara karşılık gelen mil burulma-pala eğilme bağlaşık mod biçimleri, ilgili boyutsuz frekans değerleriyle birlikte Şekil 3.3'de verilmiştir. Palalara ait mod biçimlerinin pala sayısından bağımsız olması nedeniyle tek pala göz önüne alınmıştır.

Tablo 3.3: Üzerinde k Adet Pala Taşıyan Rotor-Pala Sistemine İlişkin Frekanslar (α=0.4, γ=1, Δ= 10, μ=10, *: (k-1) katlı özdeğer)

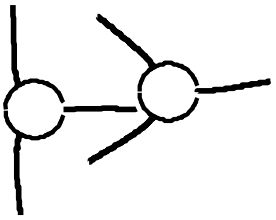
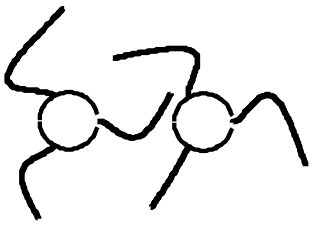
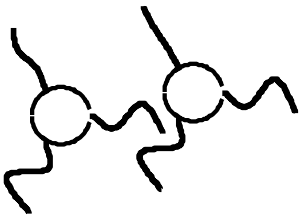
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
β=0	2.4147	3.5160*	9.0813	22.0345*	25.7803	34.4928	61.6972*	62.5385	67.7701	95.1458
β=5	2.9264	5.6545*	12.6040	26.6164*	29.1079	35.7292	63.4377	66.8854*	71.8722	95.2172
β=10	3.3873	9.2643*	18.8391	32.7712	37.0050*	42.7690	64.1111	80.2182*	84.1402	95.4932
β=15	3.7511	13.0496*	24.3159	34.7057	49.5139*	54.1024	64.7881	94.7241	98.0155*	102.2744
β=20	4.0905	16.8752*	27.8875	37.4354	62.8077*	62.8263	69.1592	95.2533	117.9818*	121.0768
β=25	4.4192	20.7190*	29.6770	41.1061	64.1496	76.4560*	81.2292	95.5552	126.3288	139.0445*
β=30	4.7370	24.5754*	30.5780	44.9657	64.6410	90.2966*	92.8830	97.2849	126.4931	157.4517
β=35	5.0408	28.4419*	31.1174	48.6072	65.0851	95.0307	104.2557*	108.6997	126.6280	157.7251
β=40	5.3278	31.4940	32.3172*	51.9168	65.6040	95.2833	118.2950*	121.7132	127.1586	157.7909
β=45	5.5959	31.7851	36.2002*	54.8469	66.2928	95.4125	126.1940	132.3919*	136.4039	157.8571
β=50	5.8440	32.0245	40.0898*	57.3275	67.2759	95.5104	126.4069	146.5318*	149.8741	158.0535



Şekil 3.3: Mil Burulma-Pala Eğilme Bağlaşık Modları (Sol sütun, Şekil 3.2'deki A geometrik yerine; sağ sütun, B geometrik yerine ait noktalar)

A'ya ilişkin geometrik yerler üzerinde ilerlerken mil burulma modunun 4. moddan 5. moda, pala eğilme modunun ise 3. moddan 2. moda geçtiği; B'ye ilişkin geometrik yerler üzerinde ilerlerken ise, mil burulma modunun 4. modda kaldığı, pala eğilme modunun 3. modan 2. moda geçtiği görülmektedir. Bu da, bir bağsız moddan diğerine bağlaşıklığın etkisiyle kademeli bir geçişin olduğunu ortaya koymaktadır. Bu durum, Jei ve Lee'nin [37] elastik rotor-yatak sistemlerinin özdeğer problemlerinde geometrik yer sapmasına ilişkin çalışmalarında da ortaya koydukları gibi, geometrik yer sapmasının fiziksel gerçekliğinin bir kanıtı olarak görülebilir.

Şekil 3.4'de boyutsuz dönme hızı β=20 için rijid mil modlarına ait bazı mod biçimleri verilmiştir. Burada, k=2 ve 3 palalı rotor-pala sistemlerine ilişkin (k-1) adet olası pala mod biçimi toplu olarak gösterilmiştir. Mil şekilleri, bu modlarda milin rijid cisim olarak davranması nedeniyle gösterilmemiştir.

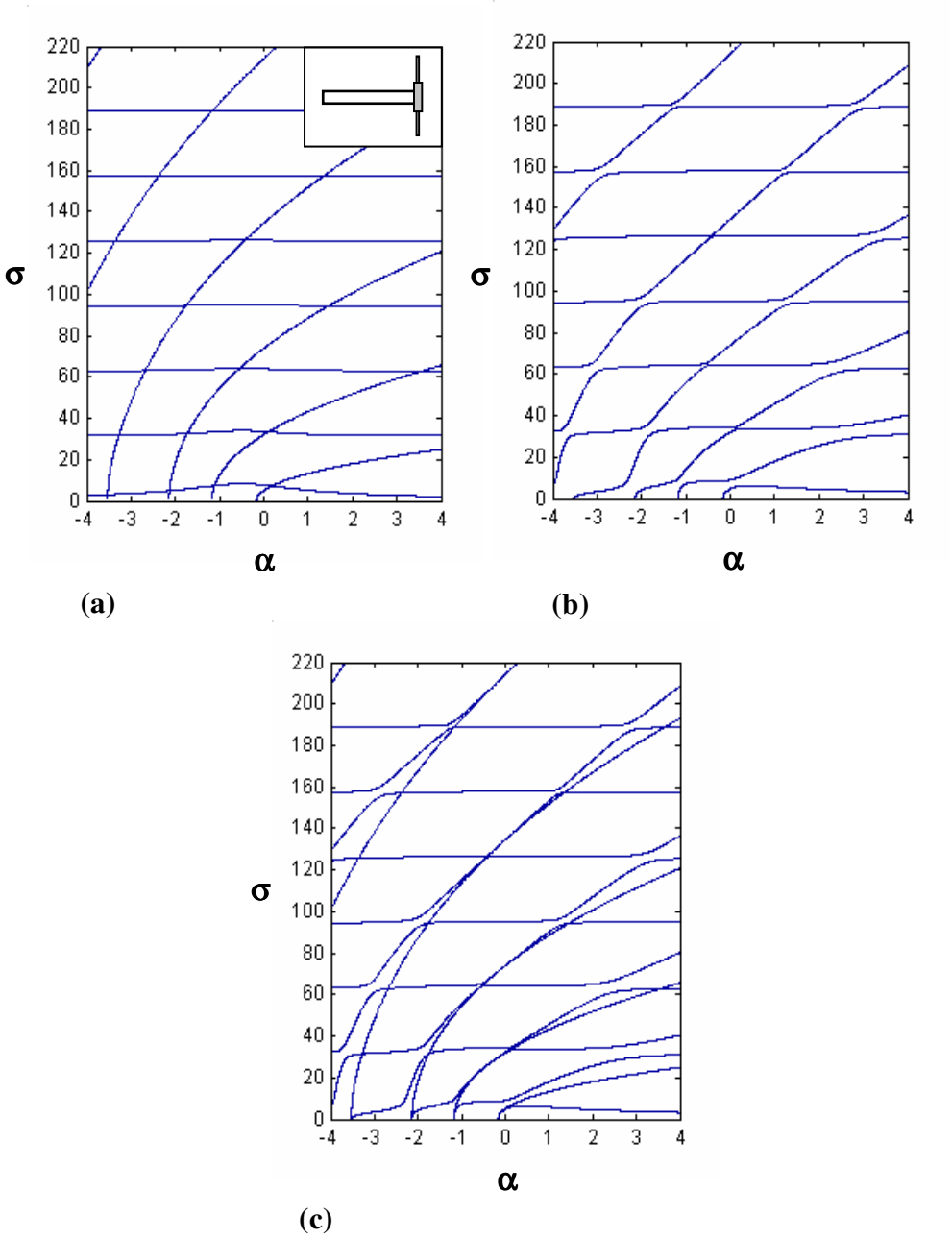
	1.Mod σ=16.8752	2. Mod σ=62.8077	3. Mod σ=117.9818
k=2			
k=3			

Şekil 3.4: β=20 İçin Rijid Mil Modları

Burada, bu tezle kısmen örtüşen bir çalışmayı ortaya koyan Huang ve Ho [22]'nun ulaştıkları sonuçlarla, bu çalışmada elde edilen sonuçların bir karşılaştırması yerinde olur.

Huang ve Ho'nun mil dönmezken verdikleri mod biçimleriyle, burada verilen mod biçimleri arasında benzerlikler vardır. Diğer taraftan, özfrekansların mil dönme hızı ile değişimini veren Şekil 3b,c ile, bu grafiğe karşılık gelen, Huang ve Ho'nun çalışmalarında verdikleri grafik arasında çok ciddi nitel farklılıklar mevcuttur. Çalışmalarında, bağlaşıklığın pala titreşimlerinde kararlılık yitimine neden olacağı, bu tez çalışmasıyla desteklenmeyen ve beklentilerle de uyuşmayan, çarpıcı sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca, ele aldıkları örnek rotor-pala modelindeki eksik verilerden dolayı ortaya koydukları hesaplar yinelenememektedir.

İkinci olarak, β=10, γ=1, Δ=1, μ=10 şeklinde tanımlı bir sistemde boyutsuz disk yarıçapı α'nın etkisi incelenmiş ve sonuçlar Şekil 3.5a, b ve c'de verilmiştir. Denk. (3.30) ve (3.31)'den hesaplanan bağsız frekanslar Şekil 3.5a'da gösterilmiştir. Burada yükselen eğriler palaların eğilme frekanslarını, yatay gidişli eğriler ise mil burulma frekanslarını göstermektedir. Tek palalı sistemlere özgü, yalnızca bağlaşık modlara ait frekanslar Denk. (3.24)'den hesaplanarak Şekil 3.5b'de ve çok palalı bir sisteme ait bütün frekanslar ise Denk. (3.24)'ün yanında Denk. (3.28)'in de hesaba katılmasıyla Şekil 3.5c'de gösterilmiştir. Bu şekillerde palaların, dönme merkezinin dışına bakması (α>0) haline ve merkezkaç kuvvetin bası etkisine maruz kalacak biçimde dönme merkezine bakması (α<0) haline karşılık gelen sonuçlar bir arada görülmektedir.



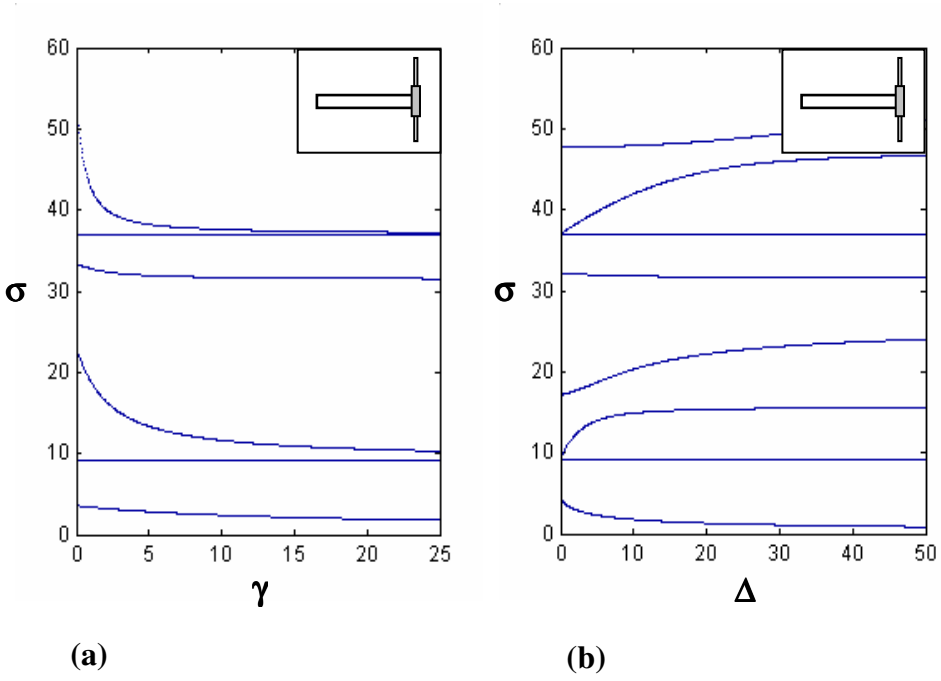
Şekil 3.5: Özfrekansların Boyutsuz Disk Yarıçapı α İle Değişimi
a) Bağsız, b) Bağlaşık, c) Bütün Frekanslar
(β=10, γ=1, Δ=1, μ=10)

Bu şekillerin incelenmesinden şu sonuçlara varılır: i) Şekil 3.5a'da mil frekanslarının α ile, $\alpha = -0.5$ noktası civarında bir maksimuma sahip olacak biçimde değiştiği görülmektedir. Bunun nedeni, disk-pala sisteminin dönme eylemsizliğini tanımlayan Denk. (3.33)'deki $\bar{\gamma}(\alpha)$ fonksiyonunun

$$\frac{d\bar{\gamma}(\alpha)}{d\alpha} = \Delta_i (2\alpha + 1) = 0 \rightarrow \alpha = -0.5 \qquad \textbf{(3.37)}$$

şeklinde $\alpha = -0.5$ noktasında bir minimuma sahip olmasıdır. Ayrıca, α'nın büyümesiyle birlikte merkezkaç kuvvet etkisi palaların sertleşmesine, bu da pala eğilme modlarına ait frekansların artmasına neden olmaktadır. Bunun yanında Şekil 3.5b ve c'de, bağsız frekansların birbirleriyle kesişme noktaları civarında, çok güçlü bağlaşıklık etkilerinin ortaya çıktığı ve frekansların geometrik yer sapmasına maruz kaldığı görülmektedir. ii) $\alpha<0$ parametre bölgesinde merkezkaç kuvvetin bası etkisi devreye girdiğinden, pala frekansları düşmekte ve belli bir α değerinde sıfırlanmaktadır. Yani, statik kararlılık yitiminin (burkulma) ortaya çıktığı görülmektedir. Bu problem, ilk olarak Mostaghel ve Tadjbakhsh [3] tarafından ortaya konmuş ve daha sonra birçok araştırmacı tarafından da [4-10] ele alınmıştır. Bunun yanında, Şekil 3.5c'den bağsız ve bağlaşık pala frekanslarının aynı noktada sıfırlandığı yani bağlaşıklığın burkulma koşullarında bir değişikliğe neden olmadığı görülmektedir.

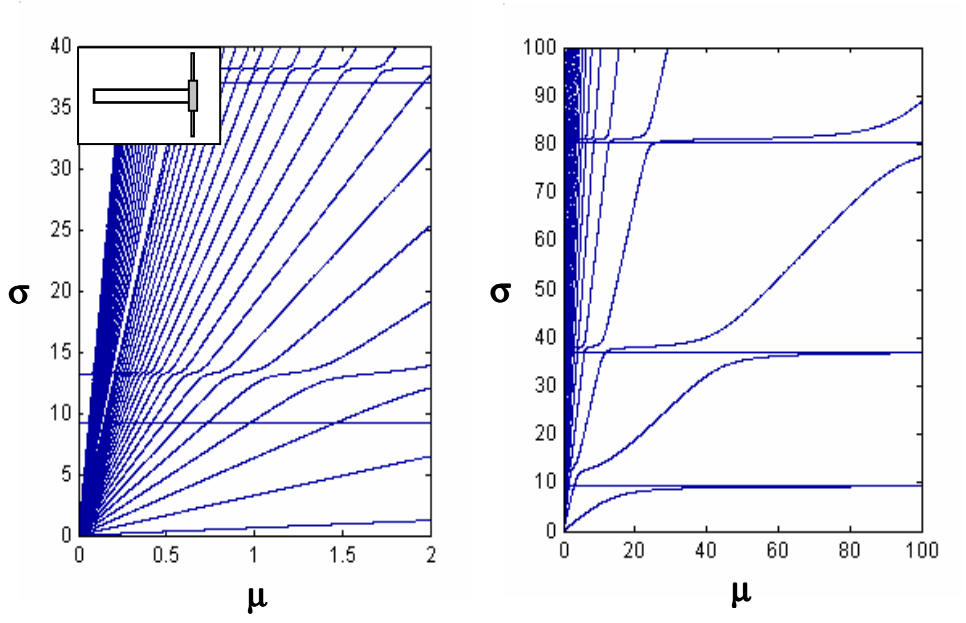
Üçüncü olarak, α=0.4, β=10, Δ=10, μ=10 şeklinde tanımlı, çok palalı bir sistem ele alınıp özfrekansların boyutsuz disk eylemsizliği γ ile değişimi incelenmiş ve sonuçlar Şekil 3.6a'da verilmiştir.



Şekil 3.6: Özfrekansların a) Boyutsuz Disk Eylemsizliği γ (α=0.4, β=10, Δ=10, μ=10), b) Palaların Toplam Boyutsuz Eylemsizliği Δ (α=0.4, β=10, γ=1, μ=5) İle Değişimi

Bu şeklin incelenmesinden görülür ki, yatay hatlar, Denk. (3.28) ile tanımlı rijid mil modlarına karşılık gelen ve γ'nın değişiminden etkilenmeyen (k-1) katlı bağsız pala eğilme frekanslarıdır. Diğer eğriler ise Denk. (3.24) ile tanımlı mil burulma-pala eğilme bağlaşık modlarına karşılık gelen frekanslardır. γ'nın artmasıyla birlikte yatay hatlara yaklaşan eğriler bağlaşık eğilme frekanslarıdır. Bağsız ve bağlaşık eğilme frekanslarının birbirine yaklaşmasının sebebi ise, disk eylemsizliğinin artmasının disk titreşimlerini engellemesi ve bunun da bağlaşıklığın azalmasına sebep olmasıdır. γ'nın artmasıyla yatay gitme eğiliminde olan diğer eğriler ise, sıfıra yaklaşan hariç, bağlı-bağlı sınır şartlarına sahip çubuğun $\sigma_j=\mu_j\pi$; j=1,2,… şeklinde yeniden ölçeklendirilmiş burulma frekanslarına yaklaşan bağlaşık mil frekanslarıdır.

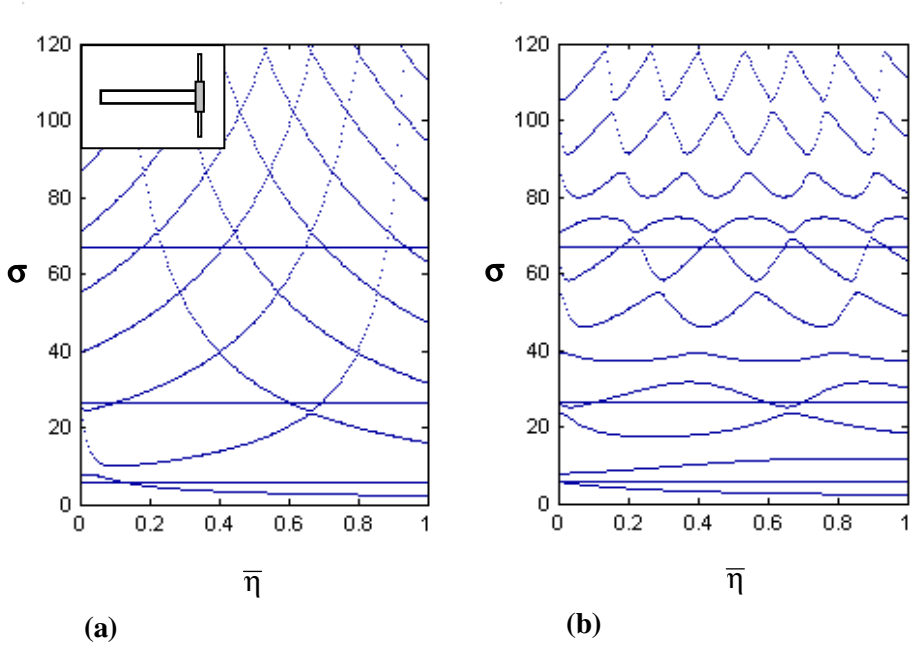
Bir sonraki inceleme olarak, özfrekansların, palaların toplam eylemsizliğinin boyutsuz karşılığı olan $\Delta=k\delta$ parametresi ile değişimi ele alınmıştır. Bunun için, $\alpha=0.4$, $\beta=10$, $\gamma=1$, $\mu=5$ şeklinde tanımlı çok palalı bir sistem göz önüne alınarak yapılan analiz sonuçları Şekil 3.6b'de verilmiştir. Burada yatay hatlar, Şekil 3.6a'dakine benzer şekilde, Denk. (3.28) ile tanımlı rijid mil modlarına karşılık gelen ve Δ'nın değişiminden etkilenmeyen (k-1) katlı bağsız pala eğilme frekanslarıdır. Bağlaşıklığın olmadığı Δ=0'da bu yatay hatlarla aynı noktadan çıkan ve Δ'nın artmasıyla birlikte bağlaşıklığın etkin hale gelmesi sonucu bu yatay hatlardan ayrılan eğriler Denk. (3.24)'den elde edilen bağlaşık pala frekanslarıdır.



Şekil 3.7: Özfrekansların Mil Ve Palaların Frekans Ölçekleri Oranı μ İle Değişimi ($\alpha=0.4$, $\beta=10$, $\gamma=1$, $\Delta=2$)

Diğer eğriler ise bağlaşık mil burulma frekanslarına aittir ve bekleneceği üzere Δ'nın artmasıyla birlikte, sıfıra yaklaşan en alttaki hariç, $\sigma_j=\mu j\pi$; j=1,2,… şeklinde yeniden ölçeklendirilmiş bağlı-bağlı sınır şartlarına sahip çubuğun burulma frekanslarına yaklaşmaktadır. Ancak kuvvetli bağlaşıklık etkisinden dolayı bağlaşık frekansların geometrik yerlerinde sapma meydana gelmekte ve doğrultuları değişmektedir. Diğer bir incelemede, özfrekansların mil ve palaların frekans ölçeği ile değişimi, α=0.4, β=10, γ=1, Δ=2 şeklinde tanımlı çok palalı bir sistem için ele alınmış ve sonuçlar Şekil 3.7'de verilmiştir. Bu şekillerde yatay hatlar, μ'nün değişiminden etkilenmeyen (k-1) katlı bağlaşık pala frekanslarıdır. Bekleneceği üzere, bağlaşık mil frekansları, μ ile birlikte doğrusal olarak artmaktadır ve bu frekanslar, bağlaşıklığın güçlü etkisi yüzünden bağlaşık pala frekansları ile içe içe geçmektedir. Ayrıca, μ'nün artmasıyla birlikte böyle bir sistemdeki genel eğilimin elastik mil-rijid pala sisteminden, rijid mil-elastik pala sistemine doğru bir geçiş şeklinde olduğu görülmektedir. Şekil 3.7'nin ilk grafiğinde, mil frekanslarına ilişkin doğruların arasında yer alan boşluk, o boşluğa karşılık gelen mil modunun sonlu elemanlar yöntemi tarafından yakalanamaması nedeniyle oluşan bir problemden kaynaklanmaktadır.

Son olarak, Şekil 3.8a ve b'de, α=0.4, β=5.0, γ=0.2, Δ=5.0, μ=5.0 şeklinde tanımlı bir sistemde özdeğerlerin, boyutsuz disk konumu $\bar{\eta}$ ile değişimi gösterilmiştir.



Şekil 3.8: Özfrekansların Diskin Mil Üzerindeki Konumu İle Değişimi
a) Bağsız, b) Bağlaşık (α=0.4, β=5.0, γ=0.2, Δ=5.0, μ=5.0)

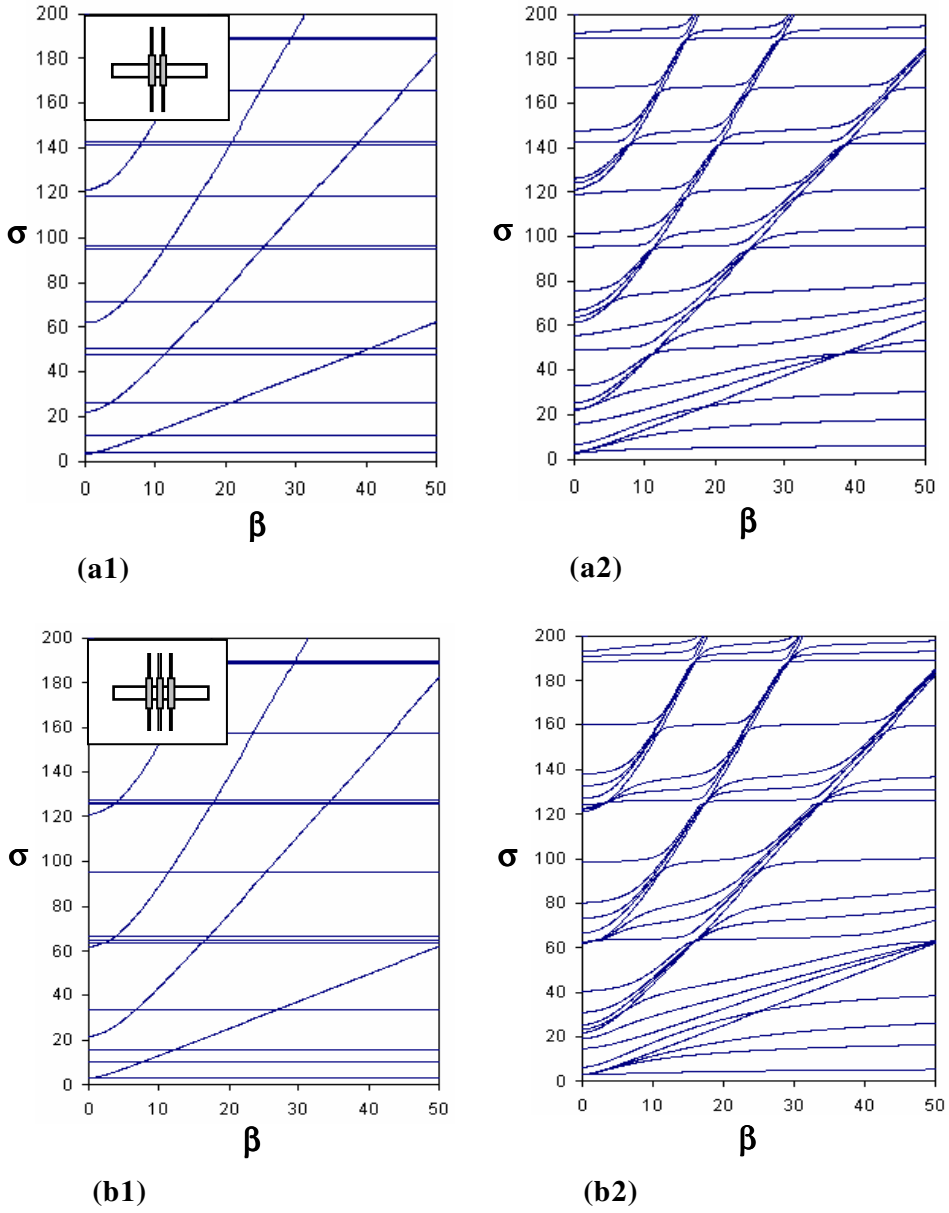
Şekil 3.8a'daki yatay çizgiler, diskin mil üzerindeki konumundan etkilenmeyen pala frekanslarını, zikzaklı eğriler ise mil frekanslarını göstermektedir. Mil frekansları, $\overline{\eta} = 0$ iken, üzerinde disk bulunmayan milin $\sigma_j = \mu(j-0.5)\pi$; j=1,2,... şeklindeki frekanslarından çıkıp, bu değerlerin altında ve disk konumu ilgili modun bir düğüm noktasıyla çakıştığında yeniden bu değerleri alacak biçimde dalgalanmaktadır. Şekil 3.8b'nin Şek. 3.8a ile karşılaştırılması, bağlaşıklık dikkate alınmadan gerçekleştirilecek bir özdeğer hesabının ne kadar hatalı sonuç verebileceğini bir kez daha ortaya koymaktadır.

3.3.2 Çok kademeli rotor-pala sistemlerinde bağlaşık titreşimler

Bu bölümde, bu çalışmada tanıtılan hesap yöntemi, çok kademeli rotor-pala sistemlerine uygulanmış ve hesap sonuçları verilmiştir. Ele alınan r kademeli bir rotor pala sisteminde milin modellenmesinde n=10(r+1) sonlu eleman kullanılmıştır. Ayrıca, kullanılan hesap yönteminin bir sonucu olarak, i'inci diskin taşıdığı pala sayısı k_i'nin önceden verilmesine gerek yoktur.

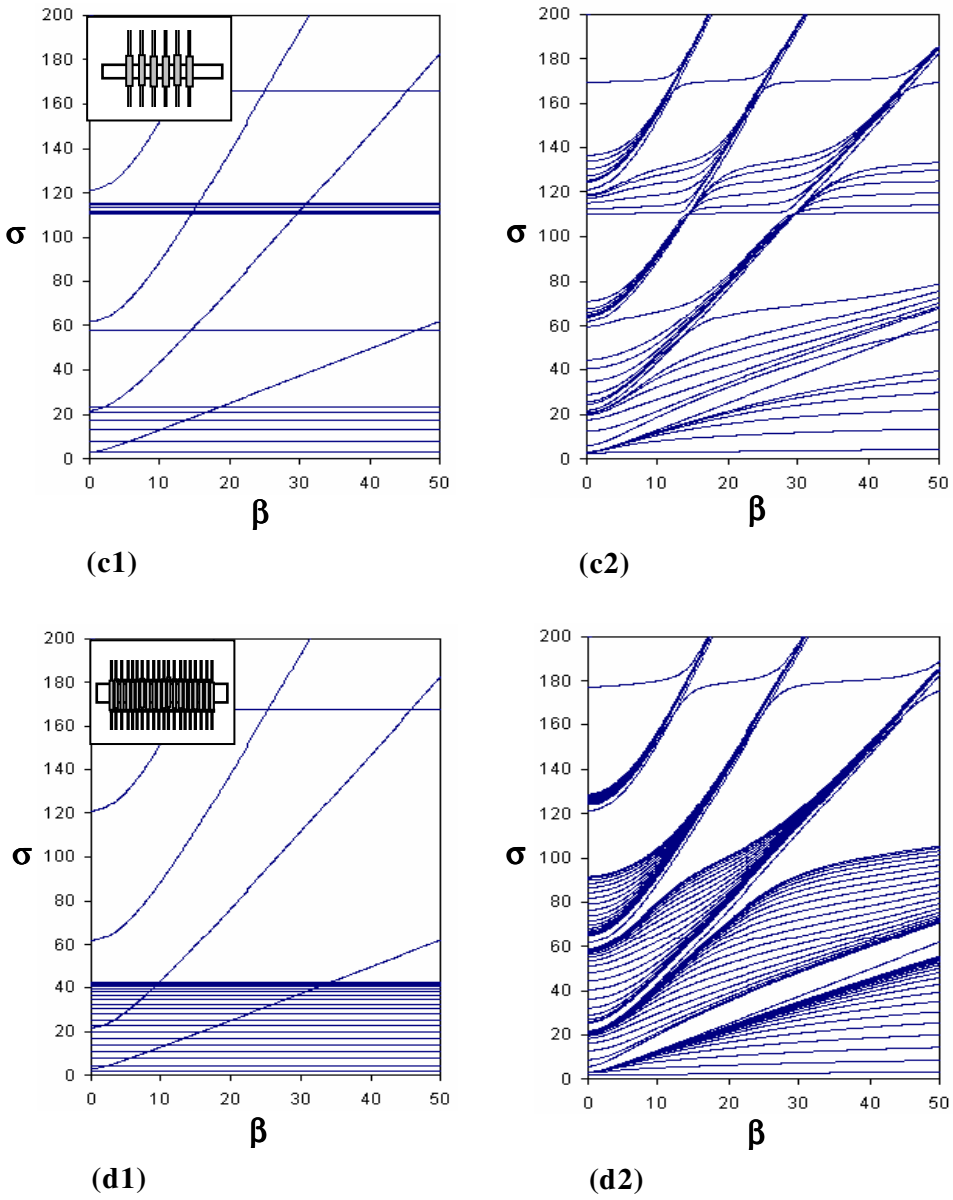
İlk olarak, birbirleriyle özdeş kademelere sahip, her bir kademenin milin sol ucundan $a_i = \frac{\ell_0}{r+1} \cdot i$ uzaklığına yerleştirildiği ve μ=5, α_i=1, γ_i=0.2, Δ_i=0.4, η_i =1; i=1,2,…,r şeklinde tanımlı çok kademeli bir rotor-pala sistemi ele alınmıştır. r=2, 3, 6, 20 kademe içeren rotor-pala sistemleri için özfrekansların boyutsuz dönme hızı β ile değişimi incelenmiş ve sonuçlar Şekil 3.9'da verilmiştir. Şekil 3.9a1-d1, Denk. (3.30) ve (3.31)'den hesaplanmış bağsız frekansları, Şekil 3.9a2-d2 ise, Denk. (3.24) ve (3.28)'den hesaplanmış bağlaşık analiz sonuçlarını göstermektedir.

Şekil 3.9a1-d1'de, yatay hatlar boyutsuz dönme hızı β'dan etkilenmeyen mil burulma frekanslarıdır. Disk ve palaların eylemsizliğinden dolayı milin disklerle olan bağlantı noktaları, yüksek frekanslarda hareketsiz kalma eğilimine girecektir. Bunun sonucu olarak da, yüksek modlarda mil, her birinin boyu $\ell_0/(r+1)$ ve Denk.(3.14)'de tanımlı μ ile yeniden ölçeklendirilen frekansları $\sigma_q = q(r+1)\mu\pi$; q=1,2,… olan r adet bağlı-bağlı sınır şartlarına ve frekansı $\sigma_q = (q-0.5)(r+1)\mu\pi$; q=1,2,… olan bir adet bağlı-serbest sınır şartlarına sahip burulma çubuğundan ibretmiş gibi davranmaya çalışacaktır.



Şekil 3.9: Özfrekansların Boyutsuz Hız β İle Değişimi a1) 2 Özdeş Kademeli, Bağsız; a2) 2 Özdeş Kademeli, Bağlaşık; b1) 3 Özdeş Kademeli, Bağsız; b2) 3 Özdeş Kademeli, Bağlaşık; c1) 6 Özdeş Kademeli, Bağsız; c2) 6 Özdeş Kademeli, Bağlaşık; d1) 20 Özdeş Kademeli, Bağsız; d2) 20 Özdeş Kademeli, Bağlaşık Sistem

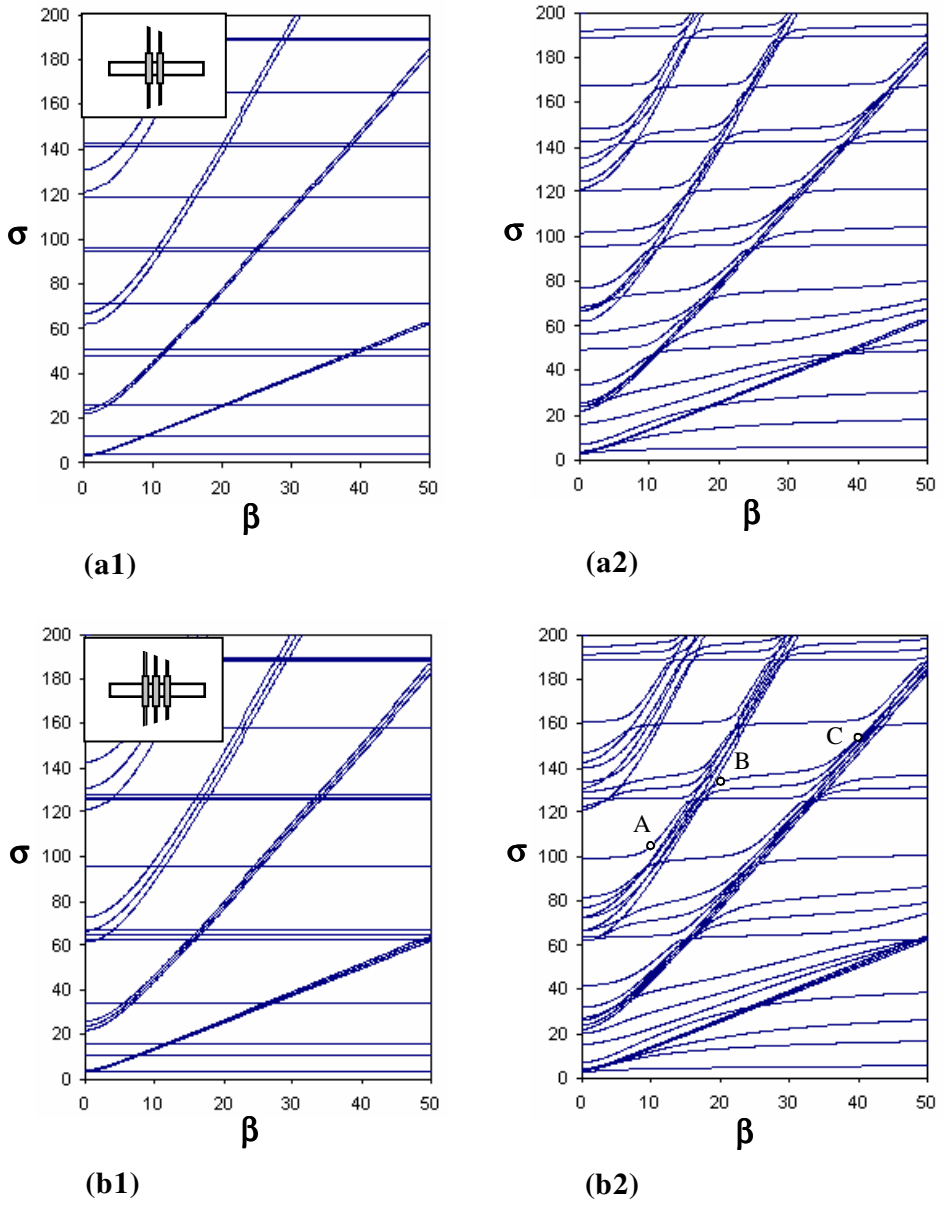
Bundan dolayı, en alttaki r adedi hariç mil burulma frekanslarından, r adet frekans içeren grupların $\sigma_q=q(r+1)\mu\pi$ ve tek başına bulunanların $\sigma_q=(q-0.5)(r+1)\mu\pi$ değerine yaklaştıkları görülmektedir. Diğer taraftan, β'nın artmasıyla yükselen eğriler ise, merkezkaç kuvvetin çeki etkisiyle sertleşen palaların titreşimlerine ait eğilme frekanslarıdır.



Şekil 3.9: (Devam)

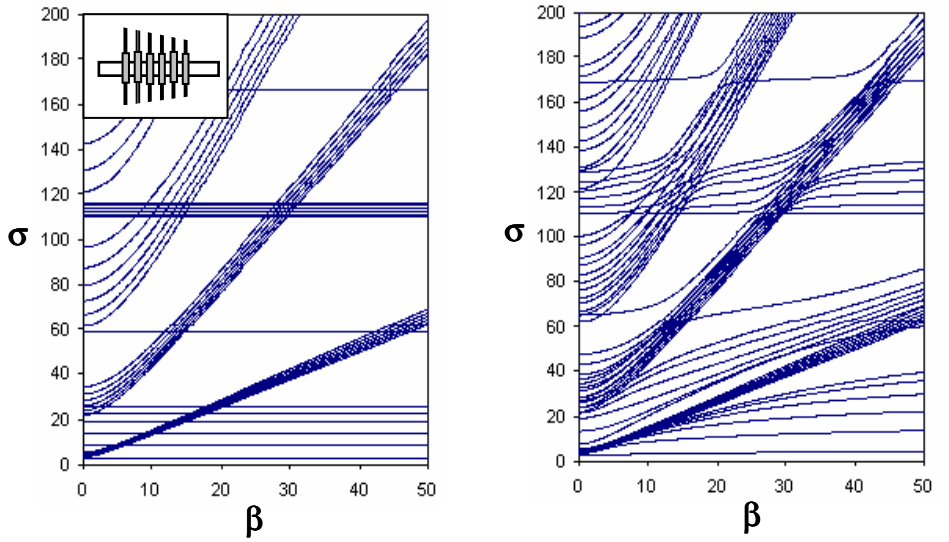
Şekil 3.9a2-d2'de ise, bağlaşıklığın göz önüne alındığı analiz sonuçları gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden şu sonuçlara varılır: i) Bağlaşık frekanslarla bir arada görülen bağsız pala frekansları, çok palalı (k≠1) ve r adet özdeş kademeden oluşan bu sistemde r(k-1) katlıdır. ii) Her kademeden yalnızca bir pala eğilme frekansı mil burulma frekanslarıyla bağlaşmakta ve r adet frekans ilgili bağsız eğilme frekansı yakınında toplanarak ona paralel ilerlemektedir. iii) bağlaşıklığın etkisiyle mil burulma ve pala eğime frekansları iç içe geçmekte ve frekansların geometrik yerlerinde ciddi sapmalar olmaktadır. Sonuç olarak, bağlaşık analiz sonuçlarıyla bağsız analiz sonuçları arasında çok ciddi fark bulunmaktadır.

İkinci olarak, birbirlerinden eşit uzaklıklara yerleştirilmiş, her bir diskin kendi içinde özdeş, fakat diğer disklerden farklı palalar taşıdığı, r kademeden oluşan bir rotor-pala sistemi ele alınmıştır. μ=5, α_1=1, γ_1=0.2, Δ_1=0.4 olmak üzere $\alpha_i = \frac{\alpha_1}{\psi_i}$, $\gamma_i = \gamma_1$, $\Delta_i = \Delta_1 \psi_i^3$, $\eta_i = \frac{\eta_1}{\psi_i^2}$; $\psi_i = 1 - 0.04(i-1)$; i=2,3,…,r şeklinde tanımlı ve r=2, 3, 6, 20 kademe içeren rotor-pala sistemleri için, özfrekansların boyutsuz hız β ile değişimi incelenerek sonuçlar Şekil 3.10'da verilmiştir.

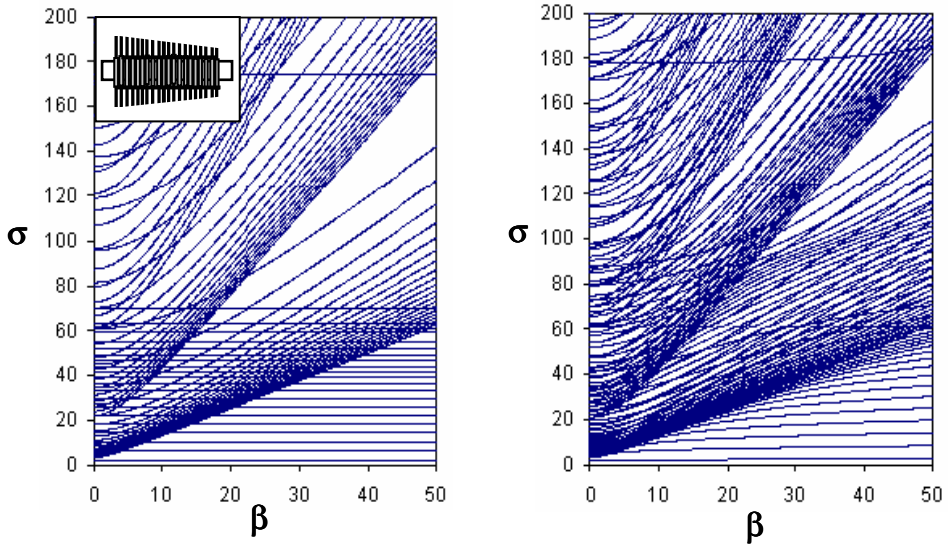


Şekil 3.10: Özfrekansların Boyutsuz Hız β İle Değişimi a1) 2 Farklı Kademeli, Bağsız; a2) 2 Farklı Kademeli, Bağlaşık; b1) 3 Farklı Kademeli, Bağsız; b2) 3 Farklı Kademeli, Bağlaşık; c1) 6 Farklı Kademeli, Bağsız; c2) 6 Farklı Kademeli, Bağlaşık; d1) 20 Farklı Kademeli, Bağsız; d2) 20 Farklı Kademeli, Bağlaşık Sistem

Şekil 3.10a1-d1'de, her kademede farklı frekans ölçeğine sahip palaların bulunmasından dolayı bağsız pala frekansları, birbirinden ayırt edilen r adetli gruplar halinde görülmektedir. Şekil 3.10a2-d2 ise, bağlaşık analiz sonuçlarını göstermektedir ve bu şekillerden şu sonuçlara varılabilir. i) farklı kademelere ilişkin pala eğilme frekanslarının saçılarak ilerlemesinden dolayı, şekiller çok daha fazla karışık hale gelmiştir. ii) her i inci kademeye ait bağsız pala frekansları (k_i-1) katlı olarak bağlaşık frekanslarla birlikte görülmektedir. iii) Her kademeden bir pala frekansı mil burulma frekanslarıyla bağlaşmakta ve frekanslar geometrik yer sapmasına uğramaktadır. Bu da, bağlaşık analiz sonuçlarını bağsız analiz sonuçlarından oldukça farklı hale getirmektedir.



(c1) **(c2)**



(d1) **(d2)**

Şekil 3.10: (Devam)

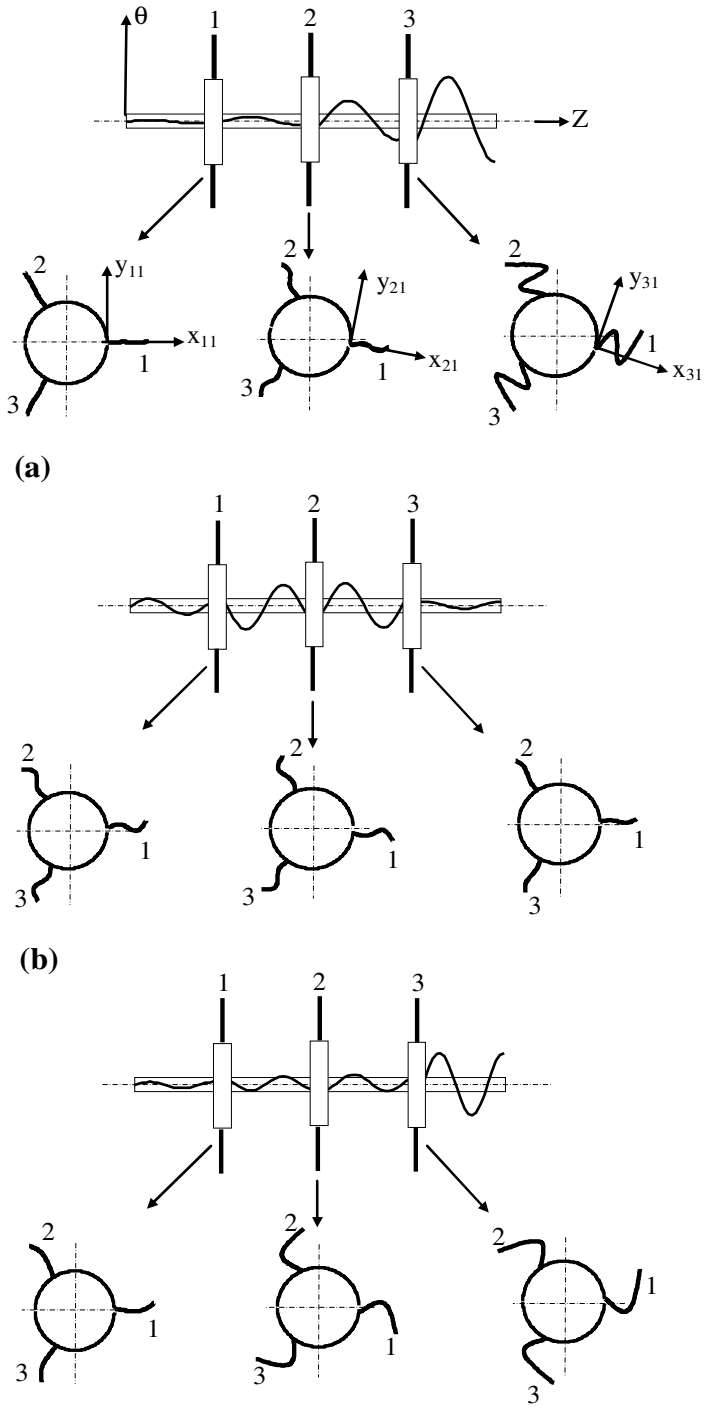
Tablo 3.4: Şekil 3.10b1,b2'de Görülen 3 Kademeli Rotor-Pala Sistemi İçin Bağsız Ve Bağlaşık Frekansların Karşılaştırması (i üst indisli değerler (k_i-1) katlı frekansları göstermektedir)

		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
β=5	Bağsız	3.8217	7.4115	7.6742	7.9669	10.8356	16.2886	28.9241	30.5275	32.3645	34.2830
	Bağlaşık	3.8066	6.7568	7.2713	7.4115^1	7.6742^2	7.9669^3	11.1726	17.5527	23.9908	28.9241^1
β=10	Bağsız	3.8217	10.8356	13.2591	13.6068	13.9819	16.2886	34.2830	43.2302	44.6464	46.2595
	Bağlaşık	4.2432	10.0059	11.7896	13.2591^1	13.6068^2	13.9819^3	17.9819	22.1347	29.3416	38.5508
β=15	Bağsız	3.8217	10.8356	16.2886	19.2625	19.7228	20.2141	34.2830	59.5924	61.0254	62.6322
	Bağlaşık	4.5405	11.9346	15.4188	19.2625^1	19.7228^2	20.2141^3	24.0817	27.4503	33.7671	42.0696

Bu fark, Şekil 3.10b1,b2'deki 3 kademeli rotor-pala sisteminde, 3 farklı boyutsuz hız β değeri için hesaplanmış, bağsız ve bağlaşık hesap sonuçlarına ilişkin ilk 10 frekansı gösteren Tablo 3.4'den de görülebilir.

Son olarak Şekil 3.11'de, mil burulma-pala eğilme bağlaşık mod biçimleri hakkında bir fikir vermesi amacıyla, Şekil 3.10b2'de görülen ve aynı bağlaşık frekansa ilişkin geometrik yer üzerinde bulunan A, B, C noktalarına ait mod biçimleri verilmiştir. Burada, bağlaşıklığın etkisiyle mod biçimlerindeki başkalaşım açıkça görülmektedir. Şekil 3.11a, 8. mil burulma moduyla 3. pala eğilme modu arasındaki bağlaşıklığı, Şekil 3.11b, 11. mil burulma moduyla 3. pala eğilme modu arasındaki bağlaşıklığı ve Şekil 3.11c, 11. mil burulma moduyla 2. pala eğilme modu arasındaki bağlaşıklığı göstermektedir. Bu da, Şekil 3.10b2'de, A, B, C noktalarının üzerinde bulunduğu bağlaşık frekans boyunca ilerlerken, bağlaşıklığın etkisiyle bir moddan diğerine kademeli bir geçisin olması gerektiği yolundaki beklentiyle örtüşmektedir.

Mil burulma-pala eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığına ilişkin buraya kadar yapılan incelemeler, [38-40] ile verilen çalışmalarla da ortaya konulmuştur.

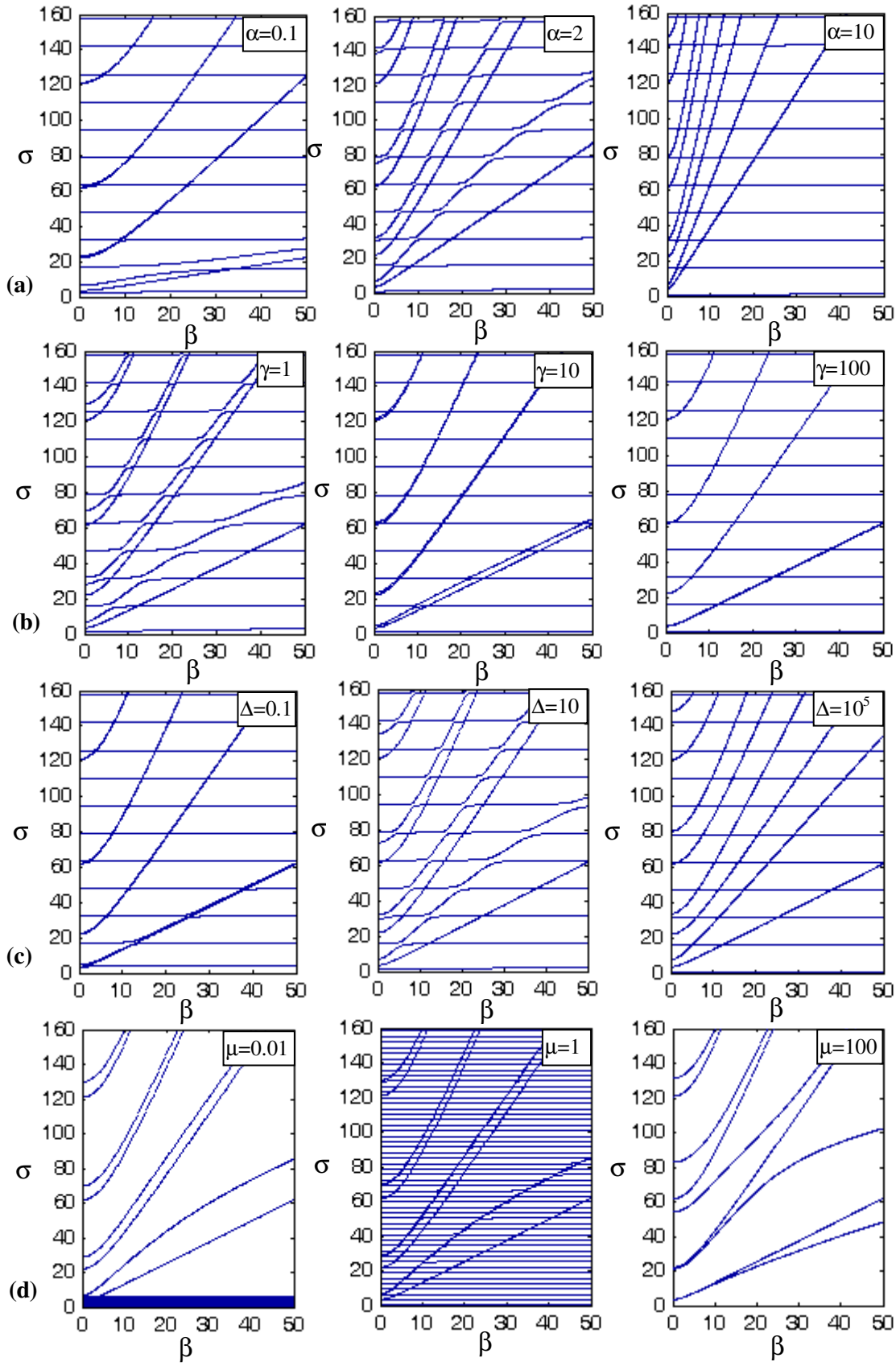


Şekil 3.11: Mil Burulma-Pala Eğilme Bağlaşık Modları
a) Şekil 3.10b2'deki A noktası, β=10, σ=104.2698;
b) Şekil 3.10b2'deki B noktası, β=20, σ=133.6422;
c) Şekil 3.10b2'deki C noktası, β=40, σ=153.7841

3.3.3 Sistem parametrelerinin bağlaşıklığa etkisi

Bu bölümde, Bölüm 3.3.1 de incelenen rotor-pala sistemi ele alınarak, sistem özfrekanslarının boyutsuz rotor hızı β ile değişimine ilişkin grafikler yardımıyla, çeşitli sistem parametrelerinin bağlaşıklığa olan etkisi incelenmiş ve sonuçlar Şekil 3.12'de verilmiştir.

Şekil 3.12a'da, boyutsuz disk yarıçapı α'nın bağlaşıklığa olan etkisi ele alınmıştır. Bu amaçla, diğer parametreleri γ=1, Δ=5, μ=5 şeklinde verilen bir sistemde, α=0.1, α=1, α=10 şeklindeki 3 farklı α değeri için σ–β diyagramları verilmiştir. Bu diyagramlarda β ile yükselen kesintisiz eğriler bağsız pala modlarına ilişkin frekansları, mil burulma modlarının ağır bastığı bölgelerde yatay, pala eğilme modlarının ağır bastığı bölgelerde ise bağsız pala frekanslarını izleyerek giden eğriler ise bağlaşık modlara ilişkin frekansları göstermektedir. Bağsız pala frekanslarına ait eğrilerle bağlaşık frekanslara ait eğrilerin ilgili bölgelerinin (bağlaşık pala frekansları diyelim) birbirine yakın olması bağlaşıklık etkilerinin zayıflığının, bunların birbirinden ayrılması ise, ayrılma miktarına göre, bağlaşıklık etkilerinin derecesinin bir göstergesidir. Şekil 3.12a'daki diyagramların bu söylenenler ışığında karşılaştırılmasından, α'nın büyümesiyle, bağlaşık pala frekanslarının, bağsız pala frekanslarından belirgin bir şekilde ayrıldığı, dolayısıyla, bağlaşıklık etkisinin arttığı görülmektedir. Şekil 3.12b, boyutsuz disk eylemsizliği γ'nın bağlaşıklığa etkisini göstermektedir. Bu şekilde, α=1, Δ=5, μ=5 ile tanımlı bir sistemin γ=1, γ=10, γ=100 değerlerine karşılık gelen 3 farklı σ–β diyagramı görülmektedir. Bu şekillerin karşılaştırılmasından, γ'nın küçük değerlerinde bağlaşıklık belirginken, γ'nın büyümesiyle -bu durumda diskin hareketsiz kalma eğilimine girip pala ile mil titreşimleri arasındaki etkileşimi azaltmasıyla bağlantılı olarak- bağlaşıklığın etkisini yitirdiği görülmektedir. Benzer şekilde, Şekil 3.12c'de verilen 3 diyagramın karşılaştırılmasından palaların toplam boyutsuz eylemsizliği Δ'nın artmasıyla bağlaşık pala frekanslarının bağsız pala frekanslarından belirgin biçimde ayrıldığı yani bağlaşıklık etkisinin arttığı; Şekil 3.12d'deki diyagramların karşılaştırılmasından da, mil ve pala frekans ölçekleri oranı μ'nün artmasıyla mil frekanslarının yüksek frekans bölgelerine doğru kaydığı, bunu yaparken bağlaşık pala frekanslarını da birlikte sürüklemeleri sonucu bağlaşıklık etkilerinin giderek belirgin hale geldiği görülmektedir.



Şekil 3.12: Çeşitli Sistem Parametrelerinin Bağlaşıklık Üzerindeki Etkileri
a) α'nın (γ=1, Δ=5, μ=5), b) γ'nın (α=1, Δ=5, μ=5),
c) Δ'nın (α=1, γ=1, μ=5), d) μ'nün (γ=1, γ=1, Δ=5) Etkisi

Şekil 3.12'nin (ve çok çeşitli parametre kombinasyonlarına karşılık gelen fakat burada verilmeyen daha bir çok şeklin) incelenmesinden elde edilen sonuçlar, sistem parametrelerinin çeşitli uygulama alanlarındaki mertebelerini veren Tablo 3.5'teki parametre değerleriyle birlikte değerlendirildiğinde, bağlaşıklığın küçük, çiftlik tipi rüzgar türbinleriyle gaz türbinlerinin kısa palalı kademelerinde kayda değer bir etkisinin bulunmayacağı, buna karşılık, uzun palalı büyük rüzgar türbinlerinde, gaz türbinlerinin uzun palalı kademelerinde ve istisnasız bütün buhar türbinlerinde ciddi etkilerinin bulunacağı sonucuna varılmıştır.

Özetlersek; bağlaşıklık etkilerinin, palaları uzun, disk çapları küçük olan (büyük α), disk eylemsizliği milinkine göre çok büyük olmayan (küçük γ), toplam pala eylemsizliği milinkine göre büyük olan (büyük Δ) ve mil doğal frekanslarının mertebesi palalarınkinden yüksek olan (büyük μ) rotor-pala sistemlerinde özellikle belirgin olacağı anlaşılmaktadır.

Bu bilgilerin uygulamada karşılaşılan rotor-pala sistemleriyle ilişkilendirilebilmesi için, rüzgar, gaz ve buhar türbinleri gibi uygulama alanlarında sistem parametrelerinin hangi değer mertebelerinde olduğunun belirlenmesine çalışılmış ve çeşitli alanlara giren çok sayıda örneğin incelenmesi sonucu Tablo 3.5'de verilen sonuçlara ulaşılmıştır. Bu tablodan görüldüğü gibi, her bir uygulama alanında sistem parametreleri, çok geniş bir mertebe aralığına yayılmaktadır. Bu yayılmanın bir nedeni farklı amaçlara yönelik farklı tasarımlar bulunması; bir başka nedeni ise aynı gaz ve buhar türbininin farklı kademelerinde farklı parametre değerlerinin söz konusu olmasıdır.

Tablo 3.5: Boyutsuz Parametrelerin Bazı Uygulama Alanlarındaki Mertebeleri

Uygulama Alanı	α	β	γ	Δ	μ
Rüzgar Türbinleri	10^{-2}-10^{-1}	10^{-1}	10^{1}-10^{4}	10^{3}-10^{5}	10^{1}-10^{2}
Gaz Türbinleri	10^{-1}-10^{1}	10^{-2}-10^{0}	10^{0}-10^{2}	10^{-3}-10^{0}	10^{-3}-10^{0}
Buhar Türbinleri	10^{0}	10^{-1}-10^{1}	10^{-1}-10^{0}	10^{-1}-10^{0}	10^{-1}-10^{0}

4. ROTOR-PALA SİSTEMLERİNDE LİNEER OLMAYAN TİTREŞİMLER

Bölüm 3'de, çok kademeli ve her kademesinde birden çok pala taşıyan rotor-pala sistemlerinde, mil burulma-pala eğilme titreşimleri lineer bir model üzerinden incelendi. Bu incelemeye esas olarak, palanın dönme düzlemi içindeki eğilme titreşimlerine ilişkin (2.11,12) ile verilen modelde, lineer olmayan terimlerin küçük genlikli titreşimler kabulü altında göz ardı edilmesiyle ulaşılan lineer modelden yararlanıldı. Bu durumda, akla şöyle bir soru takılabilir: "Lineer olmayan terimlerin göz ardı edilmesi acaba hareketin kimi nitel özelliklerinin, en önemlisi de, olası kaotik davranışların gözden kaçmasına yol açmakta mıdır?"

Bu soruya yanıt aranmadan önce, bu tez kapsamındaki incelemeler için yapılan ön çalışmalardan biri olan [41]'e değinmek yerinde olur. Bu çalışmada, rijid bir rotora burulma yayı ve viskoz sönüm elemanı ile bağlı rijid çubuktan oluşan çok basit bir rotor-pala sistemi ele alınmış ve rijid çubuğun dönme düzlemi içerisindeki titreşimlerine ilişkin lineer olmayan model üzerinden Lyapunov üssü hesabına dayalı olarak yapılan inceleme sonunda, bu sistemin, rotordaki hız dalgalanması nedeniyle belli parametre bileşimlerinde kaotik davranış göstereceği sonucuna ulaşılmıştır. Çok basit bir rotor-pala modeli esas alınarak yapılan inceleme sonunda ulaşılan bu sonuç, benzer bir incelemenin, palanın sürekli ortam olarak göz önüne alındığı daha gerçekçi bir rotor-pala sistemi üzerinde yinelenerek, yukarıdaki soruya cevap aranmasını gerekli kılmıştır.

Yukarıda sorulan soruya yanıt aramak amacıyla bu bölümdeki incelemelerde, Şekil 2.1 ile verilen tek kademeli rijid rotor-elastik pala sistemi esas alınmıştır. Palanın enine titreşimlerine ilişkin lineer olmayan (2.11,12) denklemlerinde, yapılan incelemenin yalnızca nitel bazı sonuçlara ulaşmak amacını taşıması nedeniyle hesap basitliği açısından, Galerkin açınımında bir terim alınmış (m=1) ve incelemeler, birinci moda karşılık gelen tek modlu model üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bu yapılarak, birinci modun üst modlarla olan bağlaşıklığı ihmal edilmiş ve kaba bir yaklaşıklıkla yetinilmiştir.

İlk olarak, mil burulma titreşimlerinin rotor hızında meydana getirdiği hız dalgalanmalarını bir soyutlama düzeyinde probleme yansıtmak amacıyla, rijid rotorun belli bir frekansla dalgalanarak dönmesi özel halinde pala titreşimleri ele alınmış ve Lyapunov üssü hesabına dayalı olarak elde edilen kaos kartı ve Poincaré tasviri yardımıyla palanın, bazı parametre bileşimlerinde kaotik davranış göstereceği sonucuna ulaşılmıştır.

İkinci olarak, sabit hızla dönen rijid rotora bağlı palanın, bir perturbasyon yöntemi olan Lindstedt-Poincaré yöntemi yardımıyla frekans hesabı gerçekleştirilmiş ve lineer olmayan unsurların sistemin doğal frekansı üzerindeki etkileri irdelenerek, zorlanmış titreşimlerine ilişkin frekans cevabı verilmiştir.

4.1 Kaotik Titreşimler

Ele alınan rotor-pala sisteminde, kaotik titreşimleri incelemek üzere, rijid rotorun harmonik hız dalgalanmasına sahip olması özel halinde ortaya çıkacak pala titreşimlerine eğilinsin ve rotorun

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega_1 \sin \nu t \qquad \textbf{(4.1)}$$

hızıyla dalgalandığı kabul edilsin. Bu kabul ışığında, pala titreşimlerine ait (2.11) denkleminde zaman boyutsuzlaştırılmasının, dalgalanma frekansı ν'ye göre yapılması daha uygun olduğundan, (2.5)'de tanımlı

$$\tau = \omega^* t \qquad \textbf{(4.2)}$$

şeklindeki boyutsuzlaştırmadan

$$\bar{\tau} = \nu t \qquad \textbf{(4.3)}$$

boyusuzlaştırmasına geçişi sağlayan

$$\bar{\tau} = \bar{\omega}\tau \ , \quad \bar{\omega} = \frac{\nu}{\omega^*} \qquad \textbf{(4.4)}$$

tanımı kullanılarak (2.11) ifadesi

$$\ddot{g}_p+\frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_p^4\dot{g}_p+\frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_p^4 g_p-\beta^2\sum_{q=1}^{m}\left(\alpha A_{pq}+B_{pq}+\delta_{pq}\right)g_q\right]+\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}C_{pqrs}\,g_q g_r\ddot{g}_s+\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}D_{pqrs}\,g_q\dot{g}_r\dot{g}_s$$
$$+\frac{1}{\bar{\omega}^2}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left[E_{pqrs}-\beta^2F_{pqrs}\right]g_q g_r g_s+\frac{2\beta}{\bar{\omega}}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}G_{pqr}\,g_q\dot{g}_r+\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\left[\alpha H_{pqr}+K_{pqr}\right]g_q g_r$$
$$=-\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}\left(\alpha c_p+d_p\right);\quad p=1,2,...,m \tag{4.5}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.5) ifadesinde noktalar artık $\bar{\tau}$'ya göre türevi göstermektedir. Burada β, Denk. (4.1)'in (4.4) uyarınca ve

$$\beta=\frac{\Omega}{\omega^*},\ \beta_0=\frac{\Omega_0}{\omega^*},\ \delta=\frac{2\Omega_1}{\Omega_0} \tag{4.6}$$

tanımları altında boyutsuzlaştırılmasıyla

$$\beta=\beta_0(1+\frac{\delta}{2}\sin\bar{\tau}) \tag{4.7}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi, yalnızca birinci titreşim moduna ilişkin bir inceleme yapmak amacıyla m=1 alınarak (4.5) denklemi, (2.12) ifadelerinden m=1 için hesaplanan katsayıların sayısal değerleri

$$A_{11}=-1.570878,\ B_{11}=-1.193336,\ C_{1111}=2.143318,\ D_{1111}=4.596773,\ E_{1111}=10.110166,$$
$$F_{1111}=0.155068,\ G_{111}=0,\ H_{111}=-1.736491,\ K_{111}=-0.290536,\ c_1=0.782991,\ d_1=0.568825 \tag{4.8}$$

olmak üzere ve g_1 yerine gösterilim kolaylığı bakımından g yazılıp, katsayıların indisleri de kaldırılarak,

$$\ddot{g}+\frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_1^4\,\dot{g}+\frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_1^4-\beta^2(\alpha A+B+1.0)\right]g+Cg^2\,\ddot{g}+Dg\,\dot{g}^2+\frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[E-\beta^2F\right]g^3$$
$$+\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}\left[\alpha H+K\right]g^2=-\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}(\alpha c+d) \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.9), kaotik titreşimlere ilişkin incelemeye esas olan denklemdir. Yakından bakılırsa bu denklemin, hem parametrik hem de doğrudan

zorlama etkisindeki lineer olmayan bir sisteme işaret ettiği görülür ve bu özellikleriyle son derece karmaşık dinamik davranışlar göstermesi beklenmelidir.

4.1.1 Lyapunov üssü hesabı

Bir dinamik sistemde, sistem davranışının başlangıç koşullarına aşırı duyarlılığının kaosa neden olduğu bilinmektedir. Bu duyarlılığın bir ölçüsünü oluşturan Lyapunov üsleri de, en önemli kaos ölçütlerinden biri olarak kabul edilir. Özel olarak, bir dinamik sistemde, belli bir parametre bileşiminde Lyapunov üslerinden en az birinin pozitif olması, sistemin o parametre bileşiminde kaotik davranış göstereceğine işaret eder [42,43].

Bu inceleme kapsamında Lyapunov üsleri, doğrudan doğruya en büyük üssün elde edilmesine yönelik bir algoritma yardımıyla hesaplanmıştır. Bu algoritmayı sergilemek üzere Denk. (4.9)'un durum uzayındaki ifadesine geçilirse, $u_1 = g$, $u_2 = g'$ ile

$$\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2\}^T, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} u_2 \\ -\frac{1}{1+Cu_l^2} \cdot \left\{ \frac{\zeta}{\bar{\omega}} \lambda_l^4 u_2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2} \left[\lambda_l^4 - \beta^2(\alpha A + B + 1.0) \right] u_1 + Du_l u_2^2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2} \left[E - \beta^2 F \right] u_l^3 + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}} [\alpha H + K] u_l^2 + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}} (\alpha c + d) \right\} \end{array} \right\} \tag{4.11}$$

tanımları altında

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \tag{4.12}$$

yazılabilir. Denklem (4.12)'nin, sistem parametrelerinin belirli değerlerine ve rasgele başlangıç koşullarına karşılık gelen, $[\bar{\tau}_0, \bar{\tau}_N]$ zaman aralığındaki N adımlı çözümü bir sayısal integrasyon yöntemi ile elde edilir. Geçici titreşimlerin etkisini silmek için bu çözümün ilk n adımı atılıp, geri kalanı "referans çözüm" adı altında $\mathbf{u}(\bar{\tau}_k)$; k=n+1, n+2,...,N şeklinde saklanır.

Lyapunov üssü bu referans çözümün kararlılığının bir ölçüsüdür ve bu nedenle, bu çözüm civarındaki varyasyonel (küçük sapmalara karşılık gelen) denklemlerin

çözümlerinin davranışı incelenerek elde edilir. Referans çözümün her $\bar{\tau}_k$ anı için varyasyonel denklem, Denk. (4.11)'deki **F**(**u**) fonksiyonunun Jakobiyeninin bu andaki değeri yardımıyla

$$\tilde{\mathbf{u}}'(\bar{\tau};\bar{\tau}_k) = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}(\bar{\tau}_k)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\bar{\tau};\bar{\tau}_k)\,; \quad k=n+1,...,N \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerden k=n+1 inci adıma karşılık gelen birincisinin,

$$\left|\tilde{\mathbf{u}}(0;\bar{\tau}_k)\right| = 1 \tag{4.14}$$

şeklindeki bir normal başlangıç koşulu ile sayısal olarak bir adım çözülmesiyle $\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\tau}_{k+1};\bar{\tau}_k)$ elde edilir ve k=n+2 nci adıma karşılık gelen ikinci denkleme geçilir. Bu denklem de, bir önceki denklemden elde edilen çözüm

$$\tilde{\mathbf{u}}(0;\bar{\tau}_{k+1}) = \frac{\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\tau}_{k+1};\bar{\tau}_k)}{\left|\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\tau}_{k+1};\bar{\tau}_k)\right|} \tag{4.15}$$

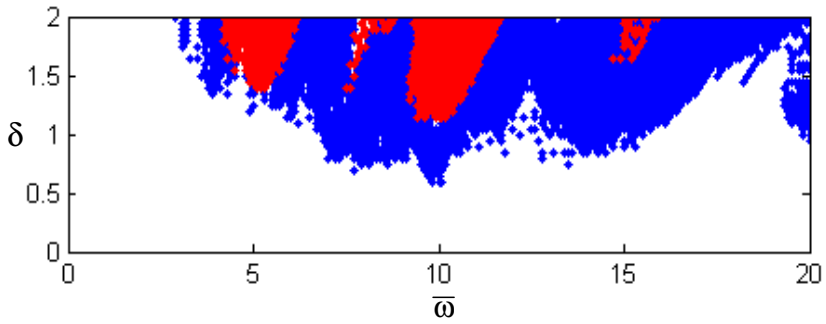
şeklinde normalize edilip başlangıç koşulu alınarak bir adım çözülür ve işlemler bu düzende $[\bar{\tau}_{n+1},\bar{\tau}_N]$ aralığı boyunca sürdürülür. Bu algoritma çerçevesinde en büyük Lyapunov üssünün

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\bar{\tau}_N - \bar{\tau}_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{N} \ln\left|\tilde{\mathbf{u}}(\bar{\tau}_{k+1};\bar{\tau}_k)\right| \tag{4.16}$$

şeklinde hesaplanacağı gösterilebilir [43-45].

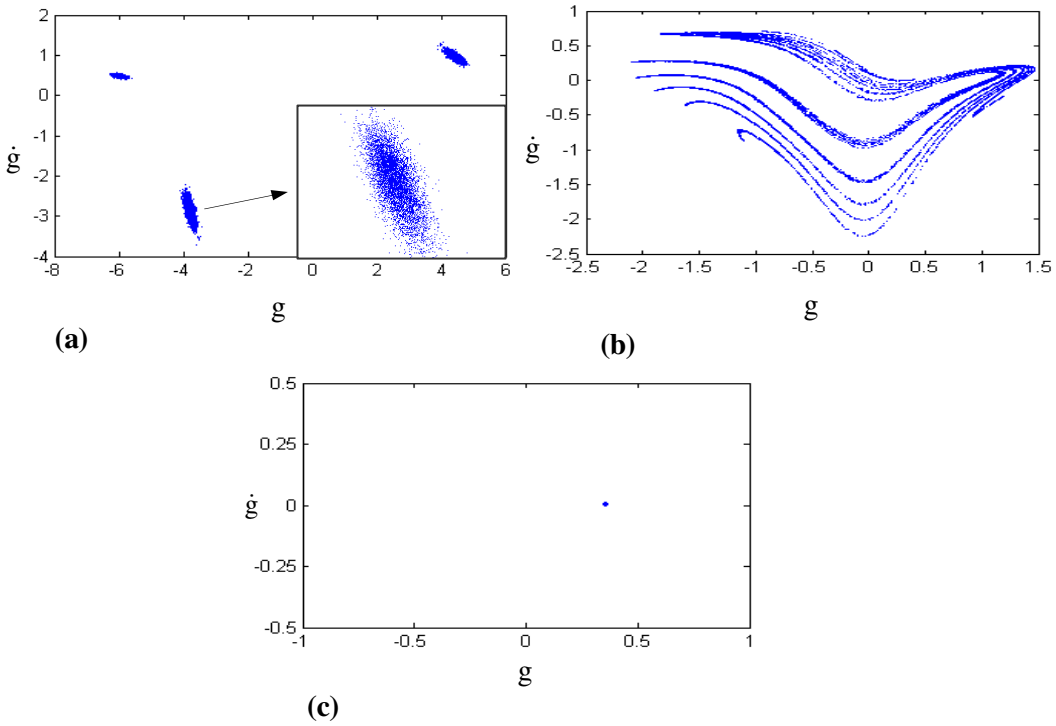
4.1.2 Sayısal uygulama

Ele alınan rotor-pala sisteminde kaotik titreşimlere sebep olabilecek en önemli iki parametre, rotor dalgalanma frekansı ν'nün boyutsuz karşılığı olan $\bar{\omega}$ ile, rotor dönme hızının ortalama değeri Ω_0'dan maksimum sapmayı tanımlayan Ω_1 dalgalanma genliğinin boyutsuz karşılığı olan δ parametresidir. Dolayısıyla, sistemin kaotik titreşimlerine ilişkin, Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartını bu iki parametreden oluşan $\bar{\omega} - \delta$ düzleminde elde etmek yerinde olur.



Şekil 4.1: Lyapunov Üssü Hesabına Dayalı Kaos Kartı

Bu amaçla, $\alpha = 1$, $\beta_0 = 5$, $\zeta = 0.001$ parametreleriyle tanımlı bir rotor-pala sistemi örneği ele alınmış, özel olarak geliştirilen ve sayısal integrasyonda Runge-Kutta(4) yöntemini kullanan bir FORTRAN programından yararlanılarak, Lyapunov üssünün pozitif değer aldığı noktalar işaretlenmiş ve $\bar{\omega} - \delta$ parametre düzleminde, Şekil 4.1'de gösterilen kaos kartı elde edilmiştir. Bu şekle göre, ele alınan rotor-pala modelinin kaotik davranış göstereceği geniş parametre bölgelerinin bulunduğu anlaşılmaktadır. Farklı renkle gösterilen dört adet iç bölge, sistemin kararlılığını yitirdiği (titreşim genliğinin sınırsız büyüdüğü) parametre bileşimlerine karşılık gelmektedir. Bu kaos kartını doğrulamak amacıyla Şekil 4.2'de, Şekil 4.1'de verilen kaos kartında kaotik ve kaotik olmayan iki parametre bileşimine karşılık gelen Poincaré tasvirleri verilmiştir.



Şekil 4.2: Poincaré Tasviri a) $\bar{\omega}$=7, δ=1.8, ζ=0.001;
b) $\bar{\omega}$=7, δ=1.8, ζ=0.1; c) $\bar{\omega}$=6, δ=0.5, ζ=0.001

Bilindiği gibi, bir harekete ait faz yörüngesinin, sisteme ait karakteristik bir zaman aralığı tetikleme aralığı alınarak elde edilmiş stroboskopik bir görüntüsünden ibaret olan Poincaré tasviri, Lyapunov üssü dışındaki en önemli kaos ölçütüdür. Bu ölçüte göre, Poincaré tasviri fraktal olan hareket kaotiktir. Öte yandan, Poincaré tasvirinin bir veya birden çok, ancak sonlu sayıda noktadan ibaret olması da, hareketin harmonik (bir nokta) veya harmonik altı (birden çok nokta) peryodik bir hareket olacağını gösterir. Bu çalışmada tetikleme aralığı olarak, parametrik zorlama ile dış zorlamanın ortak peryodu olan $T=2\pi$ alınmıştır.

Şekil 4.2 a, $\omega=7$, $\delta=1.8$, $\zeta=0.001$ parametrelerine karşılık gelen Poincaré tasviridir. Bu parametre bileşiminde sistem, kaotik davranış göstermesine karşın Poincaré tasviri fraktalden değil, üç bulutsu bölgeden oluşmaktadır. Ancak bilindiği üzere sönümün düşük olması durumunda karşılaşılan bu tür tasvirler, sönüm arttırıldığında fraktal görünüm almaktadırlar [42]. Bu durumda, sönüm $\zeta=0.1$ değerine yüseltilirse, Poincaré tasviri Şekil 4.2 b'deki görünümü almakta yani, fraktal şekil vermektedir ve bu da hareketin kaotik olduğunun açık bir göstergesidir. Şekil 4.2 c'de ise, $\omega=6$, $\delta=0.5$, $\zeta=0.001$ şeklinde kaotik olmayan bir noktaya ait Poincaré tasviri görülmektedir. Şekilde tek bir nokta ayırd edilmektedir. Bu da hareketin, $T=2\pi$ peryoduyla peryodik bir hareket olduğuna işaret etmektedir. Görüldüğü üzere, Poincaré tasvirleri de Şekil 4.1'de verilen ve Lyapunov üssü hesabına dayalı olarak elde edilen kaos kartını doğrulamaktadır.

4.2 Frekans Analizi

İkinci olarak, Şekil 2.1 ile verilen rotor-pala sisteminde, rotorun sabit hızla dönmesi özel halinde pala titreşimleri ele alınsın ve sistem doğal frekansı hesaplanarak, zorlanmış titreşimlerine ilişkin frekans cevabı analizi gerçekleştirilsin. Bunun için, (2.11) denkleminde rotorun sabit hızla dönmesi özel halinde $\dot{\beta}=0$ yazılarak

$$\ddot{g}_p+\zeta\lambda_p^4 g_p+\lambda_p^4 g_p-\beta^2\sum_{q=1}^{m}(\alpha A_{pq}+B_{pq}+\delta_{pq})\,g_q+\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}C_{pqrs}\,g_q g_r\ddot{g}_s+\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}D_{pqrs}\,g_q\dot{g}_r\dot{g}_s$$
$$+\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left[E_{pqrs}-\beta^2F_{pqrs}\right]g_q g_r g_s+2\beta\sum_{q=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}G_{pqr}\,g_q\dot{g}_r=0\;;\quad p=1,2,...,m \tag{4.17}$$

ifadesine ulaşılır. Yalnızca birinci titreşim moduna ilişkin bir inceleme yapmak amacıyla, (4.17) denkleminde m=1 alınarak ve g_1 yerine, gösterilim kolaylığı bakımından g konularak, ayrıca (2.12) ifadelerinden gerekli sayısal değerler hesaplanarak,

$$\begin{aligned} &a = 2.143318,\ b = 4.596773,\ c = 10.110166 + 0.155068\beta^2 \\ &\overline{\Omega}_0^2 = 12.362363 + (0.193336 + 1.571878\alpha)\beta^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.18)}$$

tanımları altında

$$\ddot{g} + \zeta\lambda_1^4\dot{g} + \overline{\Omega}_0^2\, g + a\, g^2\ddot{g} + b\, g\dot{g}^2 + c\, g^3 = 0 \qquad \textbf{(4.19)}$$

yazılabilir. (4.19) denklemi bu bölümdeki incelememize esas oluşturan denklemdir ve yalnızca üçüncü dereceden lineer olmayan terimler içermektedir. Denk. (4.17)'de ifadesinde eşitliğin solundaki terimlerin sonuncusu, katsayısının, (2.12) denklemlerinden m=1 için hesaplanan sayısal değerinin sıfır olması nedeniyle problemden düşmektedir.

(4.19) lineer olmayan denkleminin çözümünü elde etmek üzere pertürbasyon yöntemlerine başvurulması düşünülsün. Pertürbasyon yöntemleri, lineer olmayan terimlerin lineer terimler yanında küçük mertebeden olduğu kabulü altında probleme asimtotik seriler şeklinde çözüm bulmaya çalışan yaklaşık analitik çözüm yöntemleridir.

Bu amaçla, ilk olarak (4.19) denklemini perturbasyon yöntemleriyle çözüme uygun formata getirmek üzere

$$g = \sqrt{\varepsilon}\cdot x \qquad \textbf{(4.20)}$$

şeklinde değişken dönüşümü yapılarak,

$$2\varepsilon\overline{\mu} = \zeta\lambda_1^4 \qquad \textbf{(4.21)}$$

tanımı altında

$$\ddot{x} + \overline{\Omega}_0^2 \, x + \varepsilon(2\overline{\mu}\dot{x} + a\, x^2\ddot{x} + b\, x\dot{x}^2 + c\, x^3) = 0 \qquad \textbf{(4.22)}$$

yazılabilir.

4.2.1 Doğal frekans hesabı

Şimdi, bu denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek üzere, bir pertürbasyon yöntemi olan Lindstedt-Poincaré yöntemine [46,47] başvurulsun. Çözümünün peryodik olacağı bilinen korunumlu sistemler, bu yöntem için önemli bir uygulama alanı oluştururlar.

Şimdi, Lindstedt-Poincaré yöntemini (4.22) denklemine, sönümü ihmal ederek, adım adım uygulayıp sonuca ulaşalım. Çözüm, tüm pertürbasyon yönemlerinde olduğu gibi,

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau) \qquad \textbf{(4.23)}$$

şeklinde bir pertürbasyon serisi şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca, frekans da

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0 + \varepsilon\overline{\Omega}_1 + \varepsilon^2\overline{\Omega}_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overline{\Omega}_k \qquad \textbf{(4.24)}$$

şeklinde bir pertürbasyon serisi ile temsil edilir ve

$$\overline{\tau} = \overline{\Omega}\tau \qquad \textbf{(4.25)}$$

değişken dönüşümü yapılırsa (4.22) denklemi,

$$\overline{\Omega}^2\ddot{x} + \overline{\Omega}_0^2 \, x + \varepsilon(a\overline{\Omega}^2 \, x^2\ddot{x} + b\, x\dot{x}^2 + c\, x^3) = 0 \qquad \textbf{(4.26)}$$

halini alır. Artık noktalar $\overline{\tau}$'ye göre türevleri göstermektedir ve (4.23) ile tanımlı çözüme ilişkin pertürbasyon serisi de artık τ'nun değil $\overline{\tau}$'nin bir fonksiyonudur. Ayrıca, (4.25) değişken dönüşümünden sonra (4.26) ile tanımlı sistemin titreşim peryodunun da 2π olacağı açıktır.

(4.23) ve (4.24) ile tanımlı pertürbasyon serilerinin, (4.26)'da yerlerine yazılması ve ε'un kuvvetlerine göre eşitliklerin ayrılmasıyla

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\
&\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1 + x_1 = -2\frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Omega}_0}\ddot{x}_0 - ax_0^2\ddot{x}_0 - bx_0\dot{x}_0^2 - \frac{c}{\overline{\Omega}_0^2}x_0^3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{4.27}$$

denklemlerine ulaşılır. (4.26) ile tanımlı sistemin titreşim peryodunun 2π olması nedeniyle (4.27) ile verilen denklemlerden her birinin çözümü de 2π peryodiktir. Yani bu denklemler,

$$x(\overline{\tau}) = x(\overline{\tau} + 2\pi), \ \ k=1,2,3,\ldots \tag{4.28}$$

koşulunu sağlamaktadırlar. (4.27) denklemlerinden birincisinin çözümü, birbirlerinin karmaşık eşleniği olan

$$A_0 = \tfrac{1}{2}a_0 e^{i\sigma_0}, \ \ \overline{A}_0 = \tfrac{1}{2}a_0 e^{-i\sigma_0} \tag{4.29}$$

ifadeleri ile

$$x_0(\overline{\tau}) = A_0 e^{i\overline{\tau}} + \overline{A}_0 e^{-i\overline{\tau}} \tag{4.30}$$

şeklinde yazılabilir. (4.30) çözümü 2π peryoduyla peryodik, korunumlu bir titreşim sistemine işaret etmektedir ve a_0 ile σ_0, başlangıç koşullarından hesaplanacaktır. Bu çözüm gerekli ara hesaplardan sonra (4.27) ile tanımlı denklemlerden ikincisinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + x_1 = &(2\frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Omega}_0}A_0 + 3aA_0^2\overline{A}_0 - bA_0^2\overline{A}_0 - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}A_0^2\overline{A}_0)e^{i\overline{\tau}} \\
&+ (2\frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Omega}_0}\overline{A}_0 + 3aA_0\overline{A}_0^2 - bA_0\overline{A}_0^2 - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}A_0\overline{A}_0^2)e^{-i\overline{\tau}} \\
&+ (aA_0^3 + bA_0^3 - \frac{c}{\overline{\Omega}_0^2}A_0^3)e^{i3\overline{\tau}} + (a\overline{A}_0^3 + b\overline{A}_0^3 - \frac{c}{\overline{\Omega}_0^2}\overline{A}_0^3)e^{-i3\overline{\tau}}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ifadesine ulaşılır. (4.31)'de eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim rezonansa sebep olan ve seküler terimler olarak bilinen terimlerdir. (4.28) koşulu gereği, çözümün 2π

peryoduna sahip olduğu bilgisinden hareketle, bu seküler terimler (4.29) ifadeleri göz önüne alınarak sıfıra eşitlenirse

$$(\frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Omega}_0}a_0 + \frac{3}{8}a\,a_0^3 - \frac{1}{8}b\,a_0^3 - \frac{3}{8}\frac{c}{\overline{\Omega}_0^2}a_0^3)e^{i\sigma_0} = 0 \qquad \textbf{(4.32)}$$

$$(\frac{\overline{\Omega}_1}{\overline{\Omega}_0}a_0 + \frac{3}{8}a\,a_0^3 - \frac{1}{8}b\,a_0^3 - \frac{3}{8}\frac{c}{\overline{\Omega}_0^2}a_0^3)e^{-i\sigma_0} = 0 \qquad \textbf{(4.33)}$$

denklemlerine ulaşılır. (4.32,33) denklemleri aynı sonuca götüreceğinden birisi ele alınırsa

$$\overline{\Omega}_1 = \frac{1}{8}\left[b + 3\left(\frac{c}{\overline{\Omega}_0^2} - a\right)\right]a_0^2\overline{\Omega}_0 \qquad \textbf{(4.34)}$$

ifadesi elde edilir. Hesap burada kesilerek (4.24)'e dönülür ve $\varepsilon = 1$ konulursa, küçük genliklerde yaklaşık olarak geçerli bir doğal frekans ifadesi olarak

$$\overline{\Omega} = \left[1 + \frac{1}{8}\left[b + 3\left(\frac{c}{\overline{\Omega}_0^2} - a\right)\right]a_0^2\right]\overline{\Omega}_0 \qquad \textbf{(4.35)}$$

elde edilir. Başlangıç şartları, tüm pertürbasyon yöntemlerinde hesaba katılmasının en uygun olduğu

$$x_0(0) = X_0, \quad \dot{x}_0(0) = 0; \quad x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0, \quad k=1,2,3,\ldots \qquad \textbf{(4.36)}$$

şeklinde göz önüne alınır ve (4.30)'a dönülürse $a_0 = X_0$, $\sigma_0 = 0$ ve (4.25) ile sıfırıncı mertebeye kaşılık gelen çözüm

$$x(\tau) = X_0\cos\overline{\Omega}\tau + O(\varepsilon) \qquad \textbf{(4.37)}$$

olarak elde edilir. (4.36) başlangıç şartlarına karşılık gelen doğal frekans ifadesi ise

$$\overline{\Omega} = \left[1 + \frac{1}{8}\left[b + 3\left(\frac{c}{\overline{\Omega}_0^2} - a\right)\right]X_0^2\right]\overline{\Omega}_0 \qquad \textbf{(4.38)}$$

şeklindedir. Beklendiği üzere doğal frekans, sistem parametrelerinin yanı sıra X_0 genliğine de bağlıdır. Denk. (4.38)'deki c ve $\overline{\Omega}_0$ (lineer doğal frekans)

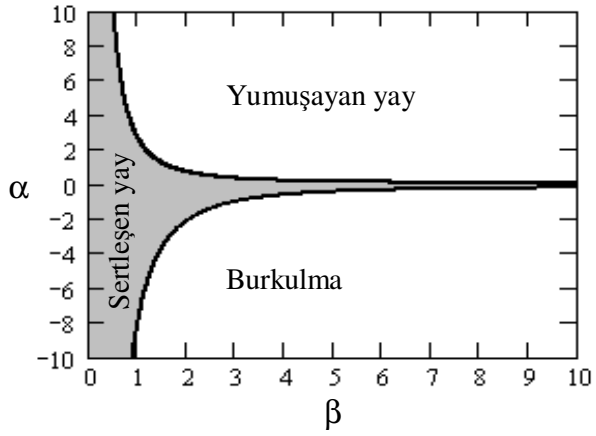
büyüklüklerinin Denk. (4.18) uyarınca sistem parametreleri α ve β'ya bağlı olduklarına dikkat edilirse,

$$b+3\left(\frac{c(\beta)}{\overline{\Omega}_0^2(\alpha,\beta)}-a\right)=b+3\left(\frac{10.110166+0.155068\beta^2}{12.362363+(0.193336+1.571878\alpha)\beta^2}-a\right)=0 \qquad \textbf{(4.39)}$$

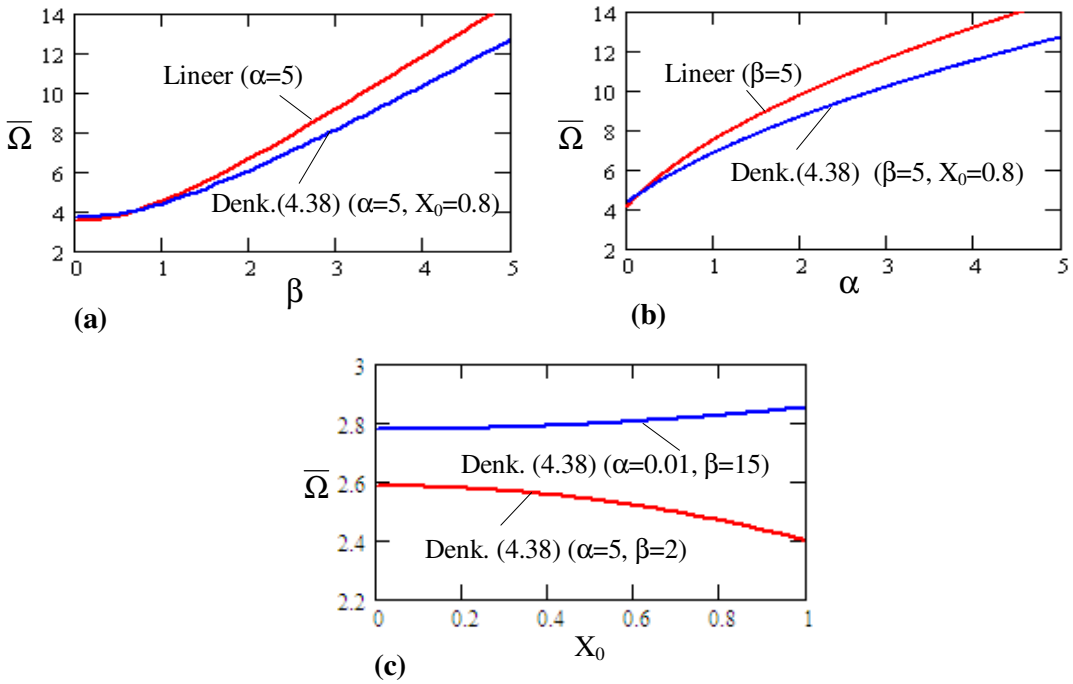
eşitliğinin sağlandığı α-β bileşimlerinde frekansın genlikten bağımsız kalacağı ve bu denklemin, α-β düzleminde frekansın genlikle arttığı (sertleşen yay) parametre bölgesi ile frekansın genlikle azaldığı (yumuşayan yay) parametre bölgesini ayıran bir sınır vereceği anlaşılır. Diğer taraftan α'nın negatif değerlerinde, β'nın artmasıyla birlikte pala merkezkaç kuvvetin bası etkisi altında kalacak ve lineer doğal frekans $\overline{\Omega}_0(\alpha,\beta)$ gittikçe küçülerek belli bir β değerinde sıfırlanacaktır. Bu, palanın burkulması (statik kararlılığını yitirmesi) anlamına gelir. Dolayısıyla, α-β parametre düzleminde statik kararlı ve kararsız bölgeleri birbirinden ayıran birinci moda ilişkin burkulma sınırı

$$\overline{\Omega}_0^2(\alpha,\beta)=12.362363+(0.193336+1.571878\alpha)\beta^2=0 \qquad \textbf{(4.40)}$$

ifadesi kullanılarak çizilebilir. Şekil 4.3'de bu sınırlar ve ayırdığı parametre bölgeleri gösterilmiştir. Bu tespitler önemlidir, çünkü, dönme hızına bağlı olarak, palanın statik kararlı olup olmadığını, kararlıysa aynı palanın bazen yumuşayan, bazen sertleşen bir yay olarak davranabileceğini; yani çalışma sırasında davranışında nitel bir değişiklik ortaya çıkabileceğini göstermektedir.



Şekil 4.3: Yumuşayan-Sertleşen Yay Ve Burkulma Sınırı



Şekil 4.4: Doğal Frekansın a) β İle, b) α İle, c) X_0 İle Değişimi

Şekil 4.4 a, b ve c'de ise, Denk. (4.38) uyarınca, doğal frekansın sistem parametreleri ve genlik ile değişimi görülmektedir. Şekil 4.4 a, b'de, lineer modele ait frekans eğrileri de gösterilmiştir. Burada, doğal frekansların beklendiği gibi, α ve β ile arttığı, lineer olmayan modele ait frekans eğrilerinin, genliğe bağımlılığın bir sonucu olarak, lineer modele ait frekans eğrilerinden ayrıldığı görülmektedir. Şekil 4.4 c'de ise lineer olmayan modele ait frekansların genlik ile değişimi verilmiştir. Görüldüğü gibi, yumuşayan yaya karşılık gelen parametre bileşiminde (α=5, β=2) frekans genlikle azalırken, sertleşen yaya karşılık gelen parametre bileşiminde (α=0.01, β=15) genlikle artmaktadır.

4.2.2 Frekans cevabı

Şimdi, (4.22) ile tanımlı modelde, zorlayıcı kuvvet frekansı'nın değişiminin sistemin davranışı üzerindeki etkilerini görmek amacıyla, harmonik kuvvetle zorlanmış titreşimlere ilişkin frekans cevabı problemi ele alınsın. Bu durumda, lineer olmayan terimlerin ve sönümün yanı sıra zorlayıcı kuvvet genliğinin de ε mertebesinde olduğu kabulü ile (4.22) denklemi yerine,

$$\ddot{x} + \bar{\Omega}_0^2 x + \varepsilon(2\bar{\mu}\dot{x} + a x^2\ddot{x} + b x\dot{x}^2 + c x^3) = \varepsilon f \cos\bar{\Omega}\tau \qquad \textbf{(4.41)}$$

yazılabilir. Çözüm yöntemi olarak, sistemin zorlanmış kalıcı titreşimlerinin, zorlayıcı kuvvetin $\overline{\Omega}$ frekansıyla peryodik olacağı bilgisinden hareketle, çözümünün peryodik olacağı bilinen sistemlerin incelenmesi için elverişli bir yöntem olan ve bir önceki alt bölümde hesap ayrıntısı verilen Lindstedt-Poincaré yöntemine başvurulsun.

4.2.2.1 Esas rezonans

İlk olarak sistemin, esas rezonans ($\overline{\Omega} \approx \overline{\Omega}_0$) civarındaki davranışını inceleyelim. Denk. (4.41)'in çözümü

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau) \qquad \textbf{(4.42)}$$

şeklinde bir pertürbasyon serisi olarak tanımlanabilir. $k, \overline{\Omega}$'nın $\overline{\Omega}_0$'dan farklılığını ölçen bir parametre olmak kaydıyla, sistemin $\overline{\Omega} \approx \overline{\Omega}_0$ civarındaki davranışını incelemek üzere

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0 (1 + k\varepsilon) \qquad \textbf{(4.43)}$$

denilir ve

$$\bar{\tau} = \overline{\Omega}\tau = \overline{\Omega}_0 (1 + k\varepsilon)\tau \qquad \textbf{(4.44)}$$

değişken dönüşümü yapılırsa, (4.41) denklemi,

$$\overline{\Omega}_0^2 (1+k\varepsilon)^2 \ddot{x} + \overline{\Omega}_0^2 x + \varepsilon\left[2\bar{\mu}\overline{\Omega}_0 (1+k\varepsilon)\dot{x} + a\overline{\Omega}_0^2 (1+k\varepsilon)^2 x^2 \ddot{x} + b\overline{\Omega}_0^2 (1+k\varepsilon)^2 x\dot{x}^2 + cx^3\right] = \varepsilon f \cos\bar{\tau} \qquad \textbf{(4.45)}$$

şeklini alır. Değişken dönüşümünden sonra, (4.45) denkleminde noktalar $\bar{\tau}$'ye göre türevi göstermektedir ve denklemin tanımladığı zorlanmış sistemin kalıcı titreşimleri, 2π peryoduyla peryodik titreşimlerdir. Ayrıca, Denk. (4.42) ile tanımlı pertürbasyon serisi artık $\bar{\tau}$'nin bir fonksiyonudur.

(4.42)'nin, (4.45)'de yerine konması ve ε'un kuvvetlerine göre eşitliklerin ayrılmasıyla

$$\varepsilon^0: \quad \overline{\Omega}_0^2 \ddot{x}_0 + \overline{\Omega}_0^2 x_0 = 0$$
$$\varepsilon^1: \quad \overline{\Omega}_0^2 \ddot{x}_1 + \overline{\Omega}_0^2 x_1 = -2k\overline{\Omega}_0^2 \ddot{x}_0 - 2\overline{\mu}\overline{\Omega}_0 \dot{x}_0 - a\overline{\Omega}_0^2 x_0^2 \ddot{x}_0 - b\overline{\Omega}_0^2 x_0 \dot{x}_0^2 - c x_0^3 + f\cos\overline{\tau} \quad \textbf{(4.46)}$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

denklemleri elde edilir. Denklemlerden birincisinin çözümü,

$$x_0(\overline{\tau}) = A_0 e^{i\overline{\tau}} + \overline{A}_0 e^{-i\overline{\tau}} \quad \textbf{(4.47)}$$

şeklindedir. A_0 ve $\overline{A}_0$, Denk. (4.29)'da tanımlıdır. (4.47) denklemi gerekli ara hesaplardan sonra (4.46) ile tanımlı denklemlerden ikincisinde yerine yazılır ve

$$f\cos\overline{\tau} = \frac{f}{2}(e^{i\overline{\tau}} + e^{-i\overline{\tau}}) \quad \textbf{(4.48)}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_0^2 \ddot{x}_1 + \overline{\Omega}_0^2 x_1 = &\left[2\overline{\Omega}_0^2 k A_0 - 2\overline{\mu}\overline{\Omega}_0 i A_0 + 3(a\overline{\Omega}_0^2 - c)A_0^2\overline{A}_0 - b\overline{\Omega}_0^2 A_0^2\overline{A}_0 + \tfrac{f}{2}\right]e^{i\overline{\tau}} \\ &+ \left[2\overline{\Omega}_0^2 k\overline{A}_0 + 2\overline{\mu}\overline{\Omega}_0 i\overline{A}_0 + 3(a\overline{\Omega}_0^2 - c)A_0\overline{A}_0^2 - b\overline{\Omega}_0^2 A_0\overline{A}_0^2 + \tfrac{f}{2}\right]e^{-i\overline{\tau}} \\ &+ \left[(a+b)\overline{\Omega}_0^2 - c\right]A_0^3 e^{i3\overline{\tau}} + \left[(a+b)\overline{\Omega}_0^2 - c\right]\overline{A}_0^3 e^{-i3\overline{\tau}}\end{aligned} \quad \textbf{(4.49)}$$

elde edilir. (4.49) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim rezonansa neden olan ve seküler terim adı verilen terimlerdir. Hareketin 2π peryoduyla peryodik olması gereğinden dolayı bu terimler sıfıra eşit olmalıdır. (4.29) ifadesi göz önüne alınarak bu terimler sıfıra eşitlenirse

$$a_0\overline{\Omega}_0^2 k - a_0\overline{\mu}\overline{\Omega}_0 i + 3(a\overline{\Omega}_0^2 - c)\frac{a_0^3}{8} - b\overline{\Omega}_0^2\frac{a_0^3}{8} + f e^{-i\sigma_0} = 0 \quad \textbf{(4.50)}$$

$$a_0\overline{\Omega}_0^2 k + a_0\overline{\mu}\overline{\Omega}_0 i + 3(a\overline{\Omega}_0^2 - c)\frac{a_0^3}{8} - b\overline{\Omega}_0^2\frac{a_0^3}{8} + f e^{i\sigma_0} = 0 \quad \textbf{(4.51)}$$

elde edilir. Bu denklemler birbirleriyle özdeştir ve aynı sonuca götürecektir. Dolayısıyla, yalnızca (4.50) denklemi ele alınır ve

$$f e^{-i\sigma_0} = \frac{f}{2}(\cos\sigma_0 - i\sin\sigma_0) \quad \textbf{(4.52)}$$

olduğuna dikkat edilerek gerçel ve sanal kısımları ayrılırsa

$$a_0\bar{\Omega}_0^2 k + \frac{a_0^3}{8}\left[3(a\bar{\Omega}_0^2 - c) - b\bar{\Omega}_0^2\right] = -\frac{f}{2}\cos\sigma_0 \qquad \textbf{(4.53)}$$

$$a_0\bar{\mu}\bar{\Omega}_0 = -\frac{f}{2}\sin\sigma_0 \qquad \textbf{(4.54)}$$

yazılabilir. (4.53) ve (4.54)'ün kareleri alınıp toplanarak

$$\left\{a_0\bar{\Omega}_0^2 k + \frac{a_0^3}{8}\left[3(a\bar{\Omega}_0^2 - c) - b\bar{\Omega}_0^2\right]\right\}^2 + (a_0\bar{\mu}\bar{\Omega}_0)^2 - \frac{f^2}{4} = 0 \qquad \textbf{(4.55)}$$

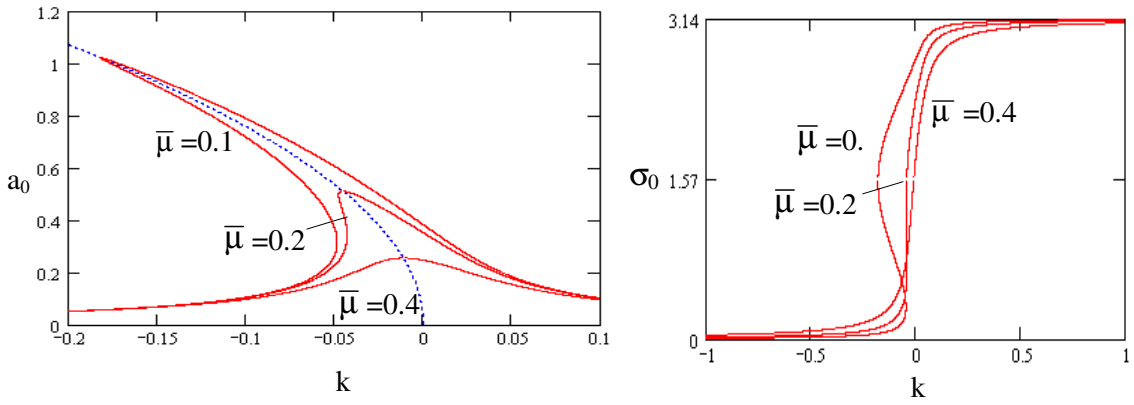
ya da k yalnız bırakılarak

$$k = -\frac{a_0^2}{8}[3(a - \frac{c}{\bar{\Omega}_0^2}) - b] \mp \frac{1}{\bar{\Omega}_0^2}\sqrt{\frac{f^2}{4a_0^2} - \bar{\mu}^2\bar{\Omega}_0^2} \qquad \textbf{(4.56)}$$

elde edilir. Bu iki denklem taraf tarafa oranlanarak da

$$\sigma_0 = a\tan\frac{\bar{\mu}}{-\bar{\Omega}_0\left\{k + \frac{a_0^2}{8}\left[3(a - \frac{c}{\bar{\Omega}_0^2}) - b\right]\right\}} \qquad \textbf{(4.57)}$$

ifadesine ulaşılır. a_0 zorlanmış titreşim genliği ve σ_0 faz açısı ile zorlayıcı kuvvet frekansı $\bar{\Omega}$'nın $\bar{\Omega}_0$'dan farklılığını ölçen k parametresi arasında (4.55-57) bağıntıları mevcuttur. Değer taraftan, hesabın sıfırıncı mertebede kesilmesiyle çözüm, (4.44,47) ifadeleri göz önüne alınarak

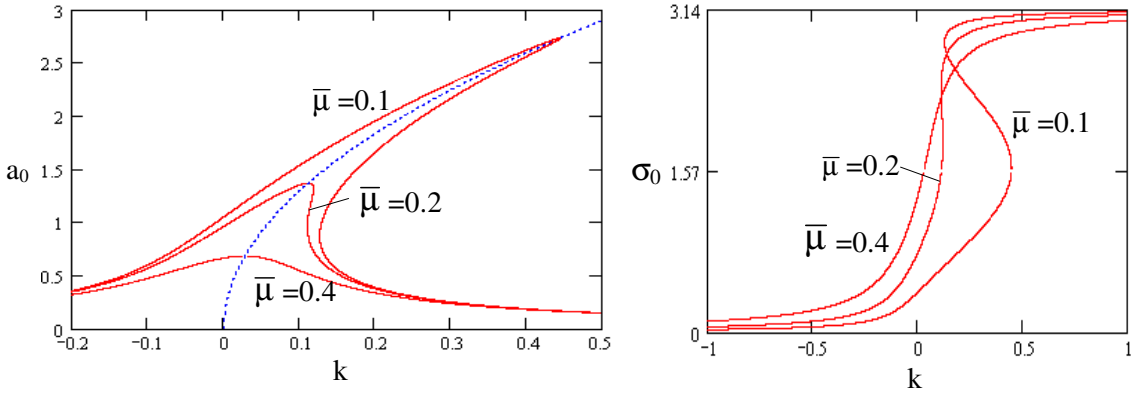


Şekil 4.5: Sistemin, Esas Rezonans Civarındaki Frekans Cevabı
(f=2, α=2, β=5; Yumuşayan yay)

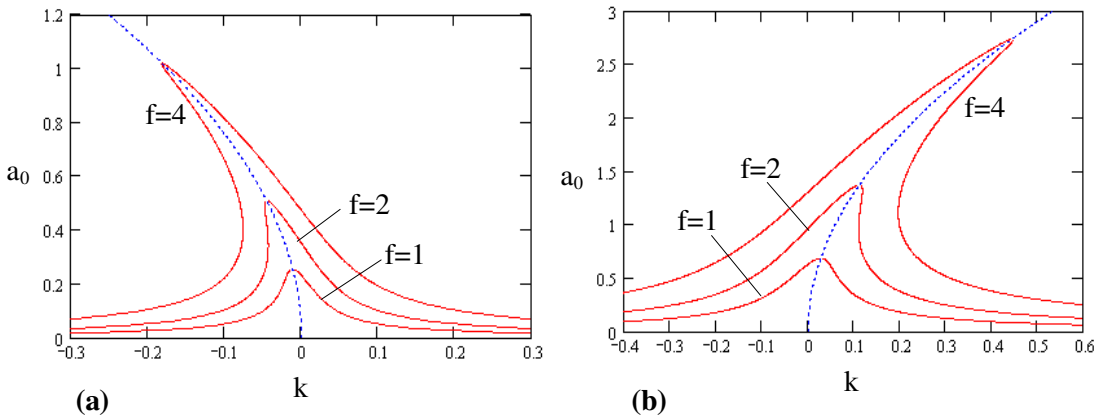
$$x(\tau) = a_0 \cos\left[\overline{\Omega}\tau - \sigma_0\right] + O(\varepsilon) \qquad \textbf{(4.58)}$$

şeklinde elde edilir.

Şekil 4.5, palanın, yumuşayan yay olarak davranmasına karşılık gelen, Şekil 4.6 ise, sertleşen yay olarak davranmasına karşılık gelen parametre bileşimleri için Denk. (4.56,57)'den elde edilmiş frekans cevaplarını göstermektedir. Bu şekillerin incelenmesinden şu sonuçlara varılır. Beklentilere uygun bir biçimde, Şekil 4.5'de yumuşayan yay etkisi ile rezonans eğrileri sola, Şekil 4.6'da ise sertleşen yay etkisi ile sağa yatmakta, ayrıca, lineer olmayan sistemlere özgü, frekans cevabının bazı frekans bölgelerinde süreksizlik göstermesi olarak bilinen ve o bölgede sistemin kararsız davranışlar göstermesine neden olan sıçrama olayı görülmektedir. Sönüm ise, genlik tepelerini aşağıya çekici, bunun sonucu olarak da belli bir değerden sonra sıçrama olayını ortadan kaldırıcı etki yapmaktadır.



Şekil 4.6: Sistemin, Esas Rezonans Civarındaki Frekans Cevabı
(f=2, α=0.5, β=1; Sertleşen yay)



Şekil 4.7: Sistemin, Esas Rezonans Civarındaki Frekans Cevabına f'nin Etkisi
a) $\overline{\mu}$ =0.2, α=2, β=5; Yumuşayan Yay;
b) $\overline{\mu}$ =0.2, α=0.5, β=1; Sertleşen Yay

Diğer taraftan Şekil 4.7'de f zorlayıcı kuvvet genliğinin frekans cevabına etkisi verilmiştir. Bu şekilden f'nin artmasıyla birlikte sıçrama olayının ortaya çıktığı görülmektedir.

4.2.2.2 Harmonik üstü rezonans

İkinci olarak, sistemin, harmonik üstü rezonans ($\overline{\Omega} \approx \frac{1}{3}\overline{\Omega}_0$) civarındaki davranışı incelensin. Ancak bu kez (4.41) denkleminde, sebebine daha sonra dönülmek üzere, zorlayıcı kuvvet etkisinin ε mertebesinde olduğu kabulü kaldırılarak, çözümü (4.42) ifadesi ile tanımlı,

$$\ddot{x} + \overline{\Omega}_0^2 x + \varepsilon(2\overline{\mu}\dot{x} + a x^2\ddot{x} + b x\dot{x}^2 + c x^3) = f\cos\overline{\Omega}\overline{\tau} \qquad \textbf{(4.59)}$$

denklemi ele alınsın. Bu kez, yine k, $\overline{\Omega}$'nın $\frac{1}{3}\overline{\Omega}_0$'dan farklılığını ölçen bir parametre olmak üzere

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{3}\overline{\Omega}_0(1 + k\varepsilon) \qquad \textbf{(4.60)}$$

denilir ve

$$\overline{\tau} = \overline{\Omega}\tau = \frac{1}{3}\overline{\Omega}_0(1 + k\varepsilon)\tau \qquad \textbf{(4.61)}$$

şeklinde değişken dönüşümü yapılırsa (4.59) denklemi

$$\frac{1}{9}\overline{\Omega}_0^2(1+k\varepsilon)^2\ddot{x} + \overline{\Omega}_0^2 x + \varepsilon\left[\frac{2}{3}\overline{\mu}\overline{\Omega}_0(1+k\varepsilon)\dot{x} + \frac{1}{9}a\overline{\Omega}_0^2(1+k\varepsilon)^2 x^2\ddot{x} + \frac{1}{9}b\overline{\Omega}_0^2(1+k\varepsilon)^2 x\dot{x}^2 + cx^3\right] = f\cos\overline{\tau} \qquad \textbf{(4.62)}$$

olarak elde edilir. (4.62) denkleminde noktalar, artık $\overline{\tau}$'ye göre türevi göstermektedir ve peryodu 2π'dir. (4.42) ile tanımlı, çözüme ilişkin pertürbasyon serisi (4.62)'de yerine konulup ε'nun kuvvetlerine göre eşitliklerin ayrılmasıyla

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad \bar{\Omega}_0^2 \ddot{x}_0 + 9\bar{\Omega}_0^2 x_0 = 9f\cos\bar{\tau} \\
&\varepsilon^1: \quad \bar{\Omega}_0^2 \ddot{x}_1 + 9\bar{\Omega}_0^2 x_1 = -2k\bar{\Omega}_0^2 \ddot{x}_0 - 6\mu\bar{\Omega}_0 \dot{x}_0 - a\bar{\Omega}_0^2 x_0^2 \ddot{x}_0 - b\bar{\Omega}_0^2 x_0 \dot{x}_0^2 - 9cx_0^3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

elde edilir. (4.63) denklemlerinden birincisinin çözümü

$$
x_0 = A_0 e^{i3\bar{\tau}} + \bar{A}_0 e^{-i3\bar{\tau}} + \frac{9f}{16\bar{\Omega}_0^2}(e^{i\bar{\tau}} + e^{-i\bar{\tau}}) \tag{4.64}
$$

şeklindedir. (4.64) ifadesi gerekli ara hesaplardan sonra (4.63) denklemlerinin ikincisinde yerine yazılır ve rezonansa sebep olan seküler terimlerin sıfıra eşit olması gereği dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
&18kA_0 - \frac{18\bar{\mu}A_0}{\bar{\Omega}_0} i + a(27A_0^2\bar{A}_0 + 22f^2A_0 + f^3) - b(9A_0^2\bar{A}_0 + 2f^2A_0 - f^3) \\
&- \frac{9c}{\bar{\Omega}_0^2}(3A_0^2\bar{A}_0 + 6f^2A_0 + f^3) = 0
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

ifadesine ulaşılır. (4.29) dikkate alınırsa (4.65) denklemi

$$
\begin{aligned}
&\left[9ka_0 - \frac{9\bar{\mu}}{\bar{\Omega}_0} a_0 i + \frac{27}{8} a_0^3 (a - \frac{b}{3} - \frac{c}{\bar{\Omega}_0^2}) + f^2 a_0 (11a - b - \frac{27c}{\bar{\Omega}_0^2})\right] e^{i\sigma_0} \\
&+ f^3 (a + b - \frac{9c}{\bar{\Omega}_0^2}) = 0
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

şeklini alır. (4.66) ifadesi $e^{-i\sigma_0}$ ile çarpılıp

$$
e^{-i\sigma_0} = \cos\sigma_0 - i\sin\sigma_0 \tag{4.67}
$$

olduğu dikkate alınırsa ve ulaşılan denklemin sanal ve gerçel kısımları ayrılırsa

$$
9ka_0 + \frac{27}{8} a_0^3 (a - \frac{b}{3} - \frac{c}{\bar{\Omega}_0^2}) + f^2 a_0 (11a - b - \frac{27c}{\bar{\Omega}_0^2}) = -f^3 (a + b - \frac{9c}{\bar{\Omega}_0^2})\cos\sigma_0 \tag{4.68}
$$

$$
\frac{9\bar{\mu}}{\bar{\Omega}_0} a_0 = -f^3 (a + b - \frac{9c}{\bar{\Omega}_0^2})\sin\sigma_0 \tag{4.69}
$$

ifadelerine ulaşılır. (4.68) ve (4.69)'un kareleri alınıp taraf tarafa toplanır ve k yalnız bırakılırsa

$$k = -\frac{1}{8}a_0^2\left(3a - b - \frac{3c}{\bar{\Omega}_0^2}\right) - \frac{9}{16^2}\frac{f^2}{\bar{\Omega}_0^4}\left(11a - b - \frac{27c}{\bar{\Omega}_0^2}\right) \mp \frac{1}{\bar{\Omega}_0^2}\sqrt{\left[\frac{9^2}{16^3}\frac{f^3}{a_0\bar{\Omega}_0^4}\left(a + b - \frac{9c}{\bar{\Omega}_0^2}\right)\right]^2 - \bar{\mu}^2\bar{\Omega}_0^2}\ , \tag{4.70}$$

birbirine oranlanırsa da

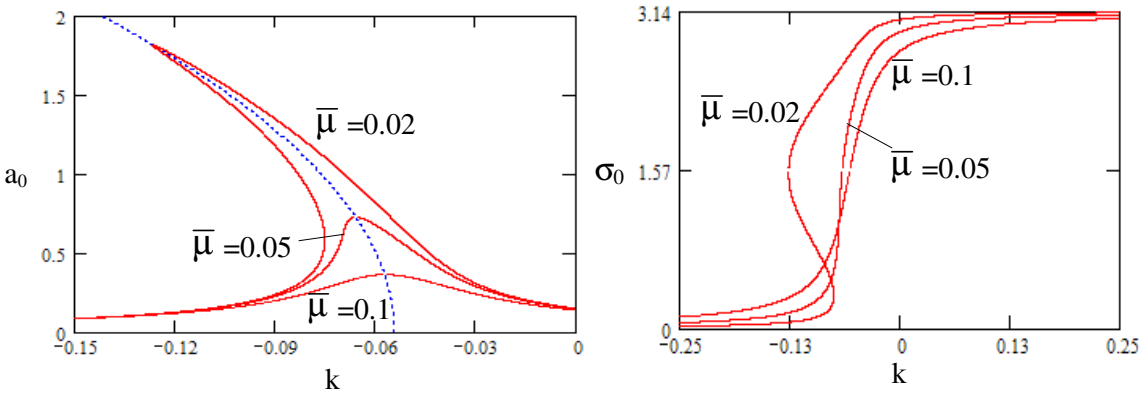
$$\sigma_0 = a\tan\frac{-\bar{\mu}}{-\bar{\Omega}_0\left[k + \frac{1}{8}a_0^2\left(3a - b - \frac{3c}{\bar{\Omega}_0^2}\right) + \frac{9}{16^2}\frac{f^2}{\bar{\Omega}_0^4}\left(11a - b - \frac{27c}{\bar{\Omega}_0^2}\right)\right]} \tag{4.71}$$

elde edilir. Hesabın sıfırıncı mertebede kesilmesiyle de çözüm, (4.61,64) göz önüne alınarak

$$x(\tau) = a_0\cos\left[3\bar{\Omega}\tau - \sigma_0\right] + \frac{9f}{8\bar{\Omega}_0^2}\cos\bar{\Omega}\tau + O(\varepsilon) \tag{4.72}$$

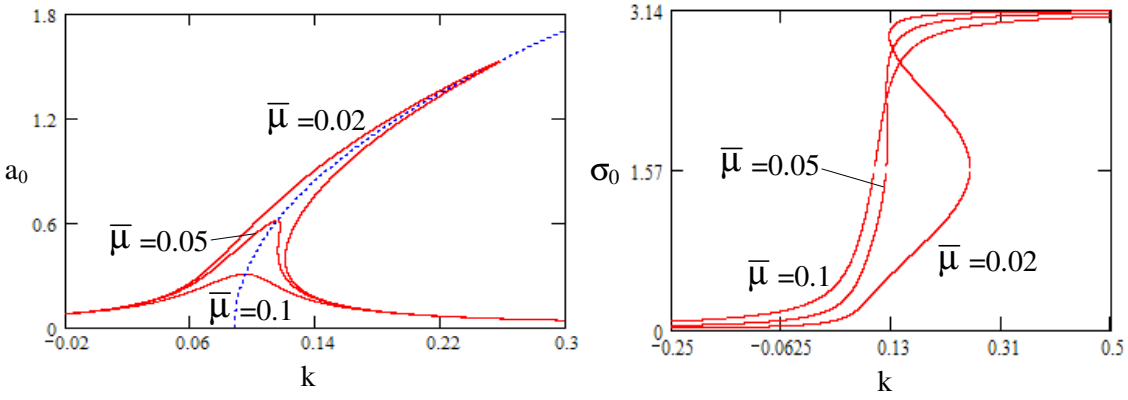
şeklinde elde edilir.

Denklem (4.71,74)'den hareketle elde edilen Şekil 4.8, sistemin, yumuşayan yay olarak davrandığı, Şekil 4.9 ise sertleşen yay olarak davrandığı parametre bileşimlerine karşılık gelen harmonik üstü frekans cevaplarını göstermektedir.

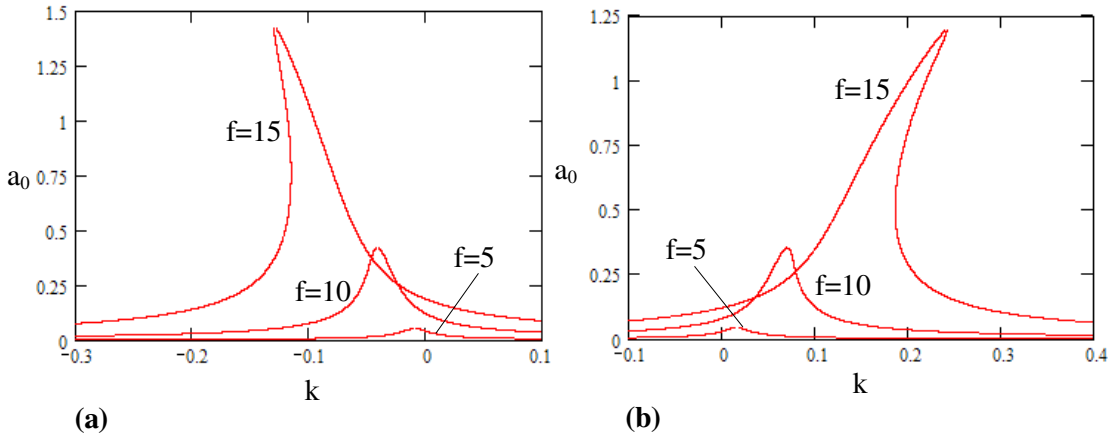


Şekil 4.8: Sistemin, Harmonik Üstü Rezonans Civarındaki Frekans Cevabı (f=12, α=1, β=2; Yumuşayan yay)

Her iki şeklin incelenmesinden, esas rezonans civarındakine benzer şekilde, sıçrama olayı görüleceği, artan sönümle birlikte zorlanmış titreşim genliğinin azalacağı ve belli bir değerden sonra sıçrama olayının ortadan kalkacağı görülür. Şekil 4.10'de ise sistemin yumuşayan ve sertleşen yay olarak davranması durumunda zorlayıcı kuvvet genliği f'nin titreşim genliğine olan etkisi görülmektedir. Artan f ile birlikte genliklerin artacağı ve sıçrama olayının görülmeye başlanacağı anlaşılmaktadır. Diğer taraftan, f'nin azalmasıyla birlikte zorlanmış titreşim genliği de çok hızlı bir şekilde azalmaktadır ve esas rezonansdakinden farklı olarak, harmonik üstü razonansda sistemin tahrik edilebilmesi için zorlayıcı kuvvet genliğinin büyük değerler alması gerektiği görülmektedir. Hesabın başında zorlayıcı kuvvetin ε mertebesinde olduğu kabulü de bu sebeple kaldırılmıştır.



Şekil 4.9: Sistemin, Harmonik Üstü Rezonans Civarındaki Frekans Cevabı (f=12, α=0.5, β=0.5; sertleşen yay)



Şekil 4.10: Sistemin, Harmonik Üstü Rezonans Civarındaki Frekans Cevabına f'nin Etkisi a) μ =0.05, α=1, β=2; Yumuşayan Yay; b) μ =0.05, α=0.5, β=0.5; Sertleşen Yay

$\overline{\Omega} \approx \frac{1}{3}\overline{\Omega}_0$ frekanslı harmonik bir kuvvetle zorlanan (4.59) ile tanımlı modelin (4.72) ile verilen cevabı yakıdan incelenirse, $\overline{\Omega}$ frekanslı bir harmonik terimin yanında, sistemin serbest titreşimleriyle ilişkili olan $3\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_0$ frekanslı bir harmonik üstü terim bulunmaktadır. Bu da, sistemin serbest titreşimlerinin zamanla sönmediğini, aksine zorlayıcı kuvvet tarafından tahrik edildiğini ortaya koymaktadır.

4.2.2.3 Harmonik altı rezonans

Son olarak, sistemin, harmonik altı rezonans ($\overline{\Omega} \approx 3\,\overline{\Omega}_0$) civarındaki davranışı incelensin. Bunun için (4.59) ifadesi göz önüne alınır ve bu kez zorlayıcı kuvvetin frekansı $\overline{\Omega}$'nın sistem doğal frekansı $\overline{\Omega}_0$'ın üç katı civarında olması halinde sistem frekans cevabını elde etmek üzere

$$\overline{\Omega} = 3\overline{\Omega}_0(1+k\varepsilon) \tag{4.73}$$

denilip

$$\overline{\tau} = \overline{\Omega}\tau = 3\overline{\Omega}_0(1+k\varepsilon)\tau \tag{4.74}$$

şeklinde değişken dönüşümü yapılırsa (4.59) denklemi

$$9\overline{\Omega}_0^2(1+k\varepsilon)^2\ddot{x} + \overline{\Omega}_0^2 x + \varepsilon\Big[6\overline{\mu}\overline{\Omega}_0(1+k\varepsilon)\dot{x} + 9a\overline{\Omega}_0^2(1+k\varepsilon)^2 x^2\ddot{x} + 9b\overline{\Omega}_0^2(1+k\varepsilon)^2 x\dot{x}^2 + cx^3\Big] = f\cos\overline{\tau} \tag{4.75}$$

şeklinde elde edilir. (4.42)'nin, çözümünün 2π peryodik olduğu bilinen (4.75)'de yerine konulup ε'nun kuvvetlerine göre eşitliklerin ayrılmasıyla

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_0 + \frac{1}{9}x_0 = \frac{f}{9\overline{\Omega}_0^2}\cos\overline{\tau} \\
&\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1 + \frac{1}{9}x_1 = -\frac{2\overline{\mu}}{3\overline{\Omega}_0}\dot{x}_0 - 2k\ddot{x}_0 - ax_0^2\ddot{x}_0 - bx_0\dot{x}_0^2 - \frac{c}{9\overline{\Omega}_0^2}x_0^3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{4.76}$$

elde edilir. (4.76) denklemlerinden birincisinin çözümü

$$x_0 = A_0 e^{i\frac{\bar{\tau}}{3}} + \overline{A}_0 e^{-i\frac{\bar{\tau}}{3}} - \frac{f}{16\overline{\Omega}_0^2}(e^{i\bar{\tau}} + e^{-i\bar{\tau}}) \qquad \textbf{(4.77)}$$

şeklindedir. (4.77) denklemi gerekli ara hesaplardan sonra ikincisinde yerine yazılarak rezonansa sebep olan seküler terimler sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}&\frac{2}{9}kA_0 - \frac{2}{9}\frac{\bar{\mu}}{\overline{\Omega}_0}A_0 i - a\left[-\frac{1}{3}A_0^2\overline{A}_0 + \frac{11}{9}f\overline{A}_0^2 - \frac{38}{9}f^2A_0\right] - b\left[\frac{1}{9}A_0^2\overline{A}_0 - \frac{5}{9}f\overline{A}_0^2 + 2f^2A_0\right] \\ &-\frac{c}{9\overline{\Omega}_0^2}\left[3A_0^2\overline{A}_0 - 3f\overline{A}_0^2 + 6f^2A_0\right] = 0\end{aligned} \qquad \textbf{(4.78)}$$

yazılabilir. (4.29) denklemlerinin (4.78)'de yerlerine yazılıp düzenlenmesiyle de

$$\begin{aligned}&\left[8ka_0 - 8\frac{\bar{\mu}}{\overline{\Omega}_0}a_0 i + a_0^3\left(3a - b - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}\right) + 4f^2a_0(38a - 18b - \frac{6c}{\overline{\Omega}_0^2})\right]e^{i\sigma_0} \\ &+ 2fa_0^2\left(-11a + 5b - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}\right)e^{-i2\sigma_0} = 0\end{aligned} \qquad \textbf{(4.79)}$$

elde edilir. (4.79) denklemi $e^{-i\sigma_0}$ ile çarpılıp,

$$e^{-i3\sigma_0} = \cos 3\sigma_0 - i\sin 3\sigma_0 \qquad \textbf{(4.80)}$$

olduğu göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa frekans cevabına ilişkin

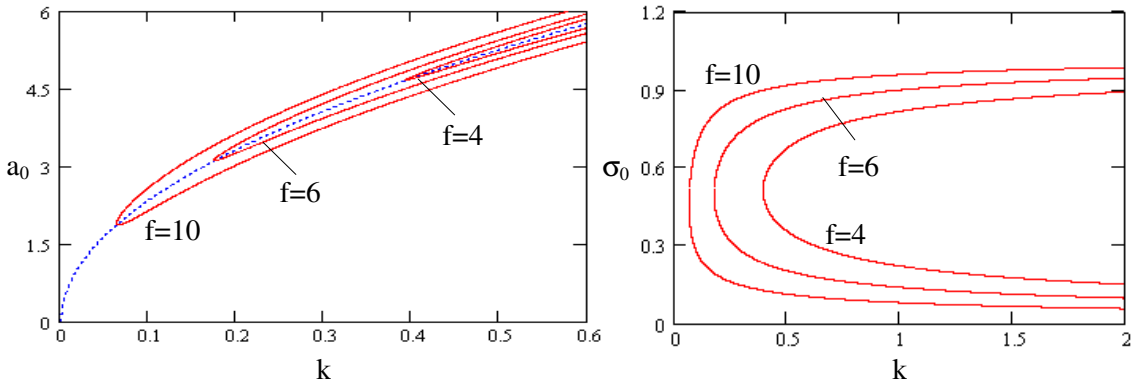
$$k = -\frac{a_0^2}{8}\left[3(a - \frac{c}{\overline{\Omega}_0^2}) - b\right] - \frac{f^2}{16^2\overline{\Omega}_0^4}\left[19a - 9b - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}\right] \mp \frac{1}{\overline{\Omega}_0^2}\sqrt{\left[\frac{f\,a_0}{64}\left(-11a + 5b - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}\right)\right]^2 - \bar{\mu}^2\overline{\Omega}_0^2} \qquad \textbf{(4.81)}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}a\tan\frac{-\bar{\mu}}{\overline{\Omega}_0\left[-k - \frac{1}{8}a_0^2\left(3a - b - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}\right) - \frac{f^2}{16\overline{\Omega}_0^4}\left(19a - 9b - \frac{3c}{\overline{\Omega}_0^2}\right)\right]} \qquad \textbf{(4.82)}$$

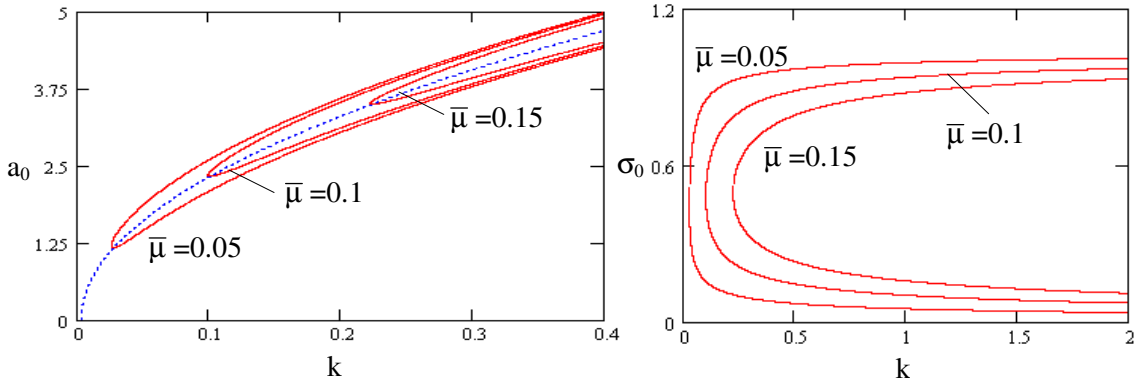
ifadelerine ulaşılır. Hesabın sıfırıncı mertebede kesilmesiyle de çözüm, (4.72,75) ile

$$x(\tau) = a_0\cos\left[\frac{\overline{\Omega}}{3}\tau - \sigma_0\right] - \frac{f}{8\overline{\Omega}_0^2}\cos\overline{\Omega}\tau + O(\varepsilon) \qquad \textbf{(4.83)}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 4.11: Sistemin Harmonik Altı Rezonans Civarındaki Frekans Cevabına f'nin Etkisi ($\bar{\mu}$ =0.1, α=0.5, β=2)



Şekil 4.12: Sistemin Harmonik Altı Rezonans Civarındaki Frekans Cevabına $\bar{\mu}$ 'nün Etkisi (f=0.1, α=0.5, β=2)

Denklem (4.81,82)'den hareketle elde edilen frekans cevapları Şekil 4.11,12'de verilmiştir. Bu şekillerde, harmonik altı rezonansın ancak zorlayıcı kuvvet genliği f'nin kayda değer büyüklüklerinde etkili olacağı ve zorlanmış titreşim genliğinin çok büyük değerler alabileceği, diğer taraftan esas ve harmonik üstü rezonanslardan farklı olarak sıçrama olayının ortaya çıkmayacağı görülmektedir.

Ayrıca, (4.81) ifadesi yakından incelenirse, esas ve harmonik üstü rezonanstan farklı olarak harmonik altı rezonansın her parametre bileşiminde ortaya çıkmayacağı görülmektedir. Harmonik altı rezonansın görüldüğü parametre bileşimlerinde, (4.83) ile verilen sistem cevabı, $\bar{\Omega}$ frekanslı bir harmonik terimin yanında, sistemin serbest titreşimleriyle ilişkili olan $\frac{\bar{\Omega}}{3} = \bar{\Omega}_0$ frekanslı bir harmonik altı terim içermektedir ve bu da sistemin serbest titreşimlerinin zamanla sönmediği, zorlayıcı kuvvet tarafından tahrik edildiğini anlamına gelmektedir.

Burada dönen kirişin birinci mod davranışıyla ilgili olarak elde edilen sonuçlar, büyük ölçüde, kübik geri getirme kuvvetine sahip tek serbestlik dereceli sistemlerin (Duffing denklemi) bilinen sonuçlarıyla örtüşmektedir [47].

Rotor-pala sistemlerinin kaos ve frekans analizine ilişkin Bölüm 4'de yapılan incelemeler, [41,48] ile verilen çalışmalarla da ortaya konulmuştur.

5. SONUÇLAR

İlk olarak, lineer bir model çerçevesinde, rotor-pala sistemlerinde mil burulma titreşimleriyle palaların dönme düzlemi içerisindeki eğilme titreşimlerinin bağlaşıklığı ve bu bağlaşıklığın sistemin titreşim davranışına olan etkileri incelenmiştir. Bu yapılırken, sentetik (sistemi oluşturan elemanların ayrı ayrı ele alındığı), çok eksen takımlı (her elemanın hareketinin en uygun eksen takımında incelendiği) ve karma (sonlu elemanlar ve Galerkin yöntemlerinin bir arada yer aldığı) bir modelleme yaklaşımı önerilip kullanılmıştır. İnceleme neticesinde ulaşılan sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

- Modellemede kullanılan karma yöntem, ele alınan rotor-pala sisteminin görece düşük serbestlik dereceli bir modelle temsil edilmesini sağlamış ve etkili olmuştur. Ayrıca inceleme, sistemin her kademesinin özdeş palalar taşıması özel halinde gerçekleştirilmiş ve bu da, ilgili özdeğer analizi probleminin tekrarlı yapıya sahip matrislere ilişkin özel bir problem haline gelmesini sağlamıştır. Bu özelliğinden yararlanılarak problem, analitik olarak geliştirilmiş ve $2n + m \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} k_i \right)$ olan boyutu mevcut pala sayısı k_i'den bağımsız hale getirilip düşürülerek, birbirinden bağımsız iki alt probleme ayrılmıştır. İki farklı mod şekli sınıfına karşılık gelen bu alt problemler, boyutu 2n+rm olan *mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları alt problemi* ile her i. kademeye m boyutlu bir alt problemin karşılık geldiği *rijid mil modları alt problemleri*dir.

- *Mil burulma-pala eğilme bağlaşık modları,* mil burulma titreşimleriyle pala eğilme titreşimleri arasındaki bağlaşıklık etkilerinin görüldüğü modlardır. Bu modlarda, her kademedeki palalar kendi içerisinde özdeş olarak davranmakta ve mil burulma frekansları ile pala eğilme frekansları arasında çok ciddi özdeğer geometrik yer sapması olayları meydana gelmektedir.

- *Rijid mil modları,* milin bir rijid cisim gibi davrandığı modlardır. Mildeki burulma esnekliği dikkate alınmaksızın yapılacak bir pala titreşim analizinde bulunacak sonucu temsil etmektedirler ve bir kademesinde birden fazla pala taşıyan sistemlere özgüdürler. i. kademeye karşılık gelen rijid mil modunda, o kademedeki palalar aynı mod biçimiyle ancak, bağlı oldukları disk üzerindeki toplam etkileri sıfır olacak şekilde titreşirken, diğer kademelerdeki palalar hareketsiz kalır.

- İlgili özdeğer analizi probleminin iki farklı alt probleme ayrılması, problem boyutunu oldukça düşmüştür. Örneğin, k=30, n=20, m=10 olan tek kademeli bir rotor-pala sisteminde problem boyutundaki azalma %82.4 iken; r=6, k_i=30, n=10(r+1), m=10 olan çok kademeli bir rotor-pala sisteminde bu azalma %86.6'dir. Kademelerin özdeş palalar taşımasının getirdiği bu avantaj sayesinde çok fazla kademeye sahip komple bir türbini dahi oldukça düşük serbestlik dereceli bir modelle modellemek mümkün olmaktadır.

- Tek ve çok kademeli rotor-pala örnekleri ele alınarak sistem parametrelerinin titreşim davranışı üzerindeki etkileri ortaya konmuştur. Elde edilen bazı önemli sonuçlar şunlardır: Boyutsuz disk yarıçapı α ve mil boyutsuz dönme hızı β'nın büyümesi ile birlikte artan merkezkaç kuvvet etkisi palaların sertleşmesine ve bu da, pala eğilme frekanslarının artmasına sebep olmaktadır. Palaların dönme merkezine bakması durumunda (α<0), merkezkaç kuvvetin bası etkisiyle pala frekansları düşmekte ve belli bir α değerinde sıfırlanarak statik kararlılık yitimi (burkulma) ortaya çıkmaktadır. Ancak bağlaşıklığın, burkulma koşullarına bir etkisinin bulunmadığı, dolayısıyla bu amaca yönelik incelemelerde dikkate alınmasına gerek olmadığı görülmüştür. Diğer taraftan, disk eylemsizliği γ'nın büyümesi, disk titreşimlerini engellemekte ve bu da, mil ve pala titreşimleri arasındaki bağlaşıklığın etkisinin azalmasına neden olmaktadır.

- Bağsız ve bağlaşık modellerin özfrekanslarının sistem parametreleriyle değişimine ilişkin sonuçların karşılaştırmasından, mil burulma frekansları ile pala eğilme frekansları arasında geometrik yer sapması olaylarının ortaya çıktığı ve bunun, çok ciddi farklara yol açtığı görülmüştür. Ayrıca, bağlaşıklığın sistemin titreşim biçimleri üzerindeki etkilerini ortaya koymak amacıyla, bağlaşık bir

frekansın geometrik yerleri üzerinde bulunan bazı noktalara ilişkin mod biçimleri verilmiştir. Bu mod biçimlerinin incelenmesinden, geometrik yer sapması nedeniyle, bir moddan diğerine kademeli bir geçişin olduğu görülmüştür. Böylece, rotor-pala sistemlerinin titreşim karakteristiklerinin hatasız olarak öngörülebilmesi için bağlaşıklık etkilerinin mutlaka dikkate alınması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

İkinci olarak, üzerinde tek pala taşıyan, tek kademeli rijid rotor-elastik pala modeli ele alınmış ve lineer olmayan terimlerin sistemin dinamiği üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu amaçla, pala titreşimlerine ilişkin tek serbestlik dereceli lineer olmayan bir model üzerinden önce, rijid rotorun dalgalanarak dönmesi özel halinde, Lyapunov üssü hesabına dayalı bir kaos incelemesi yapılmış; daha sonra, rijid rotorun sabit hızla dönmesi özel halinde, sistem doğal frekansı ile zorlanmış titreşimlerine ilişkin frekans cevapları elde edilmiştir. Bu inceleme neticesinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

- Bir soyutlama düzeyinde mil burulma titreşimlerini temsil eden rotordaki hız dalgalanmalarının, bazı sistem parametreleri bileşiminde, pala titreşimlerinde kaotik davranışa yol açacağı sonucuna ulaşılmıştır.

- Rotorun sabit hızla dönmesi özel halinde yapılan inceleme, dönen bir palanın, dönme hızına bağlı olarak, sertleşen ve yumuşayan yay karakterleri arasında geçiş yapacak şekilde nitelik değiştirebileceği önemli sonucunu vermiştir.

- Ayrıca, ele alınan modelin esas ve harmonik üstü rezonans cevaplarında, frekans cevabının bazı frekans bölgelerinde süreksizlik göstermesi olarak bilinen ve o bölgede sistemin kararsız davranışlar göstermesine neden olan *sıçrama* olayının ortaya çıktığı görülmüştür.

Bunun yanında, bu tez kapsamında yapılan incelemelerin bazı sınırlamalarına ve gelecekte bu konuda neler yapılması gerektiğine değinmek yerinde olur.

- Palalar, gerçek rotor-pala sistemlerinde yer alan palalardan farklı olarak, düzgün kesitli, kayma ve ağırlık merkezlerinin çakıştığı, birer Euler-Bernouilli kirişi olarak ele alınmışlardır. Bu da, mil burulma titreşimleriyle, palaların dönme düzlemi içerisindeki eğilme titreşimleri arasındaki bağlaşıklığın incelenmesini

sağlamıştır. Oysa, gerçek rotor-pala sistemlerinde, pala düzlem içi eğilme titreşimleri, aynı zamanda pala burulma ve pala düzlem dışı eğilme titreşimleriyle, pala düzlem dışı eğilme titreşimleri de mil eğilme titreşimleriyle bağlaşmaktadır. Dolayısıyla, daha gerçekçi bir model, bu bağlaşıklıkları da hesaba katan bir modeldir.

- Bu çalışmada, palaların üzerine dizildikleri diskler rijid olarak ele alınmışlardır. Disklerin de sürekli ortam olarak ele alındığı ve böylece, pala, mil ve disk titreşimleri arasındaki bağlaşıklığın hesaba katıldığı bir model kurulabilir. Ayrıca, gerçek rotor-pala sistemlerinde palalar, çoğu zaman kuşaklarla birbirlerine bağlanmışlardır. Bu sistem elemanlarını da hesaba katan ve palaların kendi aralarındaki bağlaşıklığının da probleme yansımasını sağlayan bir model kurulabilir.

- Lineer olmayan modellerler üzerinden yapılan incelemeler, bir serbestlik dereceli bir model üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bu incelemeler, daha yüksek serbestlik dereceli modeller yardımıyla yinelenmelidir.

KAYNAKLAR

[1] **Southwell, R. V. and Gough, B. S.**, 1921. On the free transverse vibrations of airscrew blades, *British A.R.C. Report and Memoranda No*. 766.

[2] **Srinivasan, A. V.**, 1997. Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades, *J. of Engineering for Gas Turbines and Power,* **119**, 743-775.

[3] **Mostaghel, N. And Tadjbakhsh, I.**, 1973. Buckling of rotating rods and plates, *Int. J. of Mechanical Science,* **15**, 429-434.

[4] **Rammerstorfer, F. G.**, 1974. Comments on buckling of rotating rods and plates, *Int. J. of Mechanical Science,* **16**, 515-517.

[5] **Nachman, A.,** 1975. The buckling of rotating rods, *J. of Applied* Mechanics, **42**, 222-224.

[6] **Lakin, W. D.,** 1976. Vibrations of a rotating flexible rod clamped off the axis of rotation, *J. of Engineering Mathematics,* **10(4)**, 313-321.

[7] **Lakin, W. D. and Nachman A.,** 1978. Unstable vibrations and buckling of rotating flexible rods, *Quarterly of Applied Mathematics*, **35**, 497-493.

[8] **Peters, D. A. and Hodges, D. H.,** 1980. In-plane vibration and buckling of a rotating beam clamped off the axis of rotation, *J. of Applied Mechanics,* **47**, 398-402.

[9] **Gürgöze, M.,** 1990. On the dynamical behaviour of a rotating beam, *J. of Sound and Vibration*, **143(2)**, 356-363.

[10] **Turhan, Ö.,** 2001. Dönme ekseninden kaçık bağlı olarak dönen elastik çubukların titreşim ve kararlılığı, *10. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu Bildiri Kitabı*, Konya, 12-14 Eylül, s. 19-27.

[11] **Fox, C. H. J. and Burdess, J. S.,** 1979. The natural frequencies of a thin rotating cantilever with offset root, *J. of Sound and Vibration,* **65(2)**, 151-158.

[12] **White, W. F., Kvaternik, R. G. and Kaza, K. R. V.,** 1979. Buckling of rotating beams, *Int. J. of Mechanical Science,* **21**, 739-745.

[13] **Eick, C. D. and Mignolet, M. P.**, 1995. Vibration and buckling of flexible rotating beams, *AIAA Journal*, **33(3)**, 528-538.

[14] **Yoo, H. H and Shin, S. H.,** 1998. Vibration analysis of a rotating cantilever beams, *J. of Sound and Vibration,* ***2*12(5)**, 807-828.

[15] **Turhan Ö. ve Bulut, G.,** 2001. İki Ucu Ankastre Dönen Elastik Çubukların Düzlem İçi ve Düzlem Dışı Titreşimleri, *10. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu Bildiri Kitabı*, Konya, 12-14 Eylül, s. 645-659.

[16] **Weber, H. I.,** 1976. A note on the stability of a rod subjected to compression by centrifugal force, *J. of Sound and Vibration,* **46(1)**, 105-111.

[17] **Lakin, W. D. and Kvaternik, R. G.,** 1989. An integrating matrix formulation for buckling of rotating beams including the effects of concentrated masses, *Int. J. Mechanical Science* , **31**, 569-777.

[18] **Naguleswaran S.,** 1994. Lateral vibrations of centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam, *J. of Sound and Vibration,* ***176*(5),** 613-624.

[19] **Naguleswaran, S.,** 1997. Out-of-plane vibration of a uniform Euler-Benoulli beam attched to the inside of a rotating rim, *J. of Sound and Vibration* ***200*(1)**, 63-81.

[20] **Chun, S. B. and Lee, C. W.,** 1996. Vibration analysis of shaft-bladed disk system by using substructure sysnthesis and assumed modes method, *J. of Sound and Vibration,* **189(5)**, 587-608.

[21] **Okabe, A., Otawara, Y., Kaneko, R., Matsushita, O. and Namura, K.,** 1991. An equivalent reduced modelling method and its application to shaft-blade coupled torsional vibration analysis of a turbine-generator set, *J. of Power and Energy,* **205**, 173-181.

[22] **Huang, S. C., Ho, K. B.,** 1996. Coupled shaft-torsion and blade-bending vibrations of a rotating shaft-disk-blade unit, *J. of Engineering for Gas Turbines and Power,* **118**, 100-106.

[23] **Turhan, Ö. and Bulut, G.,** 2005. Dynamic stability of rotating blades (beams) eccentrically clamped to a shaft with fluctuating speed, *J. of Sound and Vibration,* **280**, 945-964.

[24] **Al-Bedoor, B. O. and Al-Qaisia, A. A.,** 2005. Stability analysis of rotating blade bending vibration due to torsional excitation, *J. of Sound and Vibration,* **282**, 1065-1083.

[25] **Al-Nassar, Y. N. and Al-Bedoor, B. O.,** 2003. On the vibration of a rotating blade on a torsionally flexible shaft, *J. of Sound and Vibration,* **259(5)**, 1237-1242.

[26] **Ewins, D. J.,** 1973. Vibration characteristics of bladed disc assemblies, *J. of Mechanical Engineering Science,* **15(3)**, 165-186.

[27] **Loewy, R. G. and Khader, N.,** 1984. Structural dynamics of rotating bladed-disk assemblies coupled with flexible shaft motions, *AIAA Journal,* **22(9)**, 1319-1327.

[28] **Tsai, G. C.**, 2004. Rotating vibration behavior of turbine blades with different groups of blades, *J. of Sound and Vibration,* **271**, 547-575.

[29] **Crawley, E. F., Ducharme, E. H. and Mokadam, D. R.,** 1986. Analytical and experimental investigation of the coupled bladed disk/shaft whirl of a cantilevered turbofan, *J. of Engineering for Gas Turbines and Power,* **108**, 567-576.

[30] **Bladh, R., Pierre, C., Castanier, M. P. and Kruse, M. J.,** 2002. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modelling, *J. of Engineering for Gas Turbines and Power,* **124**, 311-324.

[31] **Chatelet, E., D'Ambrosio, F. and Jacquet-Richardet G.,** 2005. Toward global modelling approaches for dynamic analysis of rotating assemblies of turbomachines, *J. of Sound and Vibration,* **282**, 163-178.

[32] **Rao, J. S. and Carnegie, W.,** 1970. Non-linear vibrations of rotating cantilever beams, *The Aeronautical Journal of The Royal Aeronautical Society,* **74**, 161-165.

[33] **Hamdan, M. N. and Al-Bedoor, B. O.**, 2001. Non-linear free vibrations of a rotating flexible arm, *J.of Sound and Vibration,* **242(5)**, 839-853.

[34] **Larsen, J. W. and Nielsen, S. R. K.**, 2006. Non-linear dynamics of wind turbine wings, *Int. J. of Non-Linear Mechanics,* **41**, 629-643.

[35] **Larsen, J. W. and Nielsen, S. R. K.,** 2007. Nonlinear parametric instability of wind turbine wings, *J. of Sound and Vibration,* **299(1-2)**, 64-82.

[36] **Meirovitch, L.,** 1967. Analytical Methods in Vibrations, Macmillan, New York.

[37] **Jei, Y. G. and Lee, C. W.,** 1992. Does curve veering occur in the eigenvalue problem of rotors?, *J. of Vibration and Acoustics,* **114**, 32-36.

[38] **Turhan, Ö. ve Bulut, G.,** 2005. Tek kademeli rotor-pala sistemlerinde mil burulma-pala eğilme bağlaşık titreşimleri, *12. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu Bildiri Kitabı*, Kayseri, 9-11 Haziran, s. 165-176.

[39] **Turhan, Ö. and Bulut, G.,** 2005. Coupling Effects Between Shaft-torsion And Blade-Bending Vibrations In Rotor Blade Systems, *Proceedings of The Seventh International Conference on Vibration Problems*, Şile, İstanbul, 5-9 September, 505-510.

[40] **Turhan, Ö. and Bulut, G.,** 2006. Linearly coupled shaft-torsional and blade-bending vibrations in multi-stage rotor-blade systems, *J. of Sound and Vibration*, **296**, 292-318.

[41] **Bulut, G. ve Turhan, Ö.,** 2005. Hız dalgalanmaları bir rotor-pala sisteminde kaotik davranışlara yol açabilir mi? (basitleştirilmiş bir inceleme), *12. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu Bildiri Kitabı*, Kayseri, 9-11 Haziran, s. 217-224.

[42] **Moon, F. C.,** 1992. Chaotic and Fractal Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[43] **Argyris, J., Faust, G. and Haase, M.,** 1994. An Exploration Of Chaos, North-Holland.

[44] **Wolf, A., Swift, J. B., Harry L. S. and Vastano, J. A.,** 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, **16**, 285-317.

[45] **Rosenstein, M. T., Collins, J. J. and De Luca, C. J.,** 1993. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets", *Physica D,* **65**, 117-134.

[46] **Nayfeh, A. H.,** 1973. Perturbation Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[47] **Nayfeh, A. H. and Mook, D. T.,** 1979. Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[48] **Bulut, G. ve Turhan, Ö.,** 2007. Rotor-Pala Sistemlerinin Lineer Olmayan Titreşimleri: Modelleme, Frekans Analizi ve Kaos, *XV. Ulusal Mekanik Kongresi Bildiri Kitabı*, Isparta, 3-7 Eylül, s. 235-244.

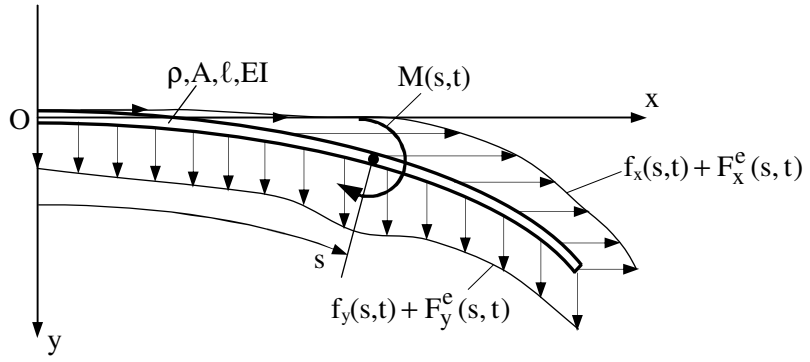
[49] **Meirovitch L.,** 1986. Elements of Vibration Analysis, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.

[50] **Lütkepohl H.,** 1996. Handbook of Matrices, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[51] **Ren, G. X., Zheng, Z. C. and Wang, W. J.,** 1999. Vibration characteristics of systems with multiple blades, *J. of Sound and Vibration*, **225(4)**, 597-610.

Ek A

Şekil A1'de gösterilen, yoğunluğu ρ, kesit alanı A, boyu ℓ ve eğilme rijidliği EI olan, $\mathbf{f}(s,t) = f_x(s,t)\mathbf{i} + f_y(s,t)\mathbf{j}$ yayılı kuvveti etkisindeki Euler-Bernouilli kirişinin düzlem içi eğilme titreşimlerinin hareketine ait denklem, kirişin, kayma ve ağırlık merkezlerinin çakıştığı kabulü altında elde edilsin. Diferansiyel geometriden, Şekil A.1'de gösterilen kirişin s koordinatı ile belirli bir noktasındaki eğrilik, s, çubuk eğilme eksenini izleyen eğrisel koordinat olmak ve üsler s'ye göre türevi göstermek üzere,



Şekil A.1: $\mathbf{f}(s,t)$ Yayılı Kuvveti Etkisindeki Stasyoner Kiriş

$$\rho(s,t) = \frac{\sqrt{1-[y'(s,t)]^2}}{y''(s,t)} \qquad \textbf{(A.1)}$$

olarak yazılabilir. s noktasındaki moment ise

$$M(s,t) = \frac{EI}{\rho(s,t)} = EI\frac{y''(s,t)}{\sqrt{1-[y'(s,t)]^2}} \qquad \textbf{(A.2)}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, malzeme sönümünü modele yansıtmak amacıyla, Kelvin-Voigt malzeme modeli ele alınsın. Bu modele göre, malzemenin gerilme (σ)-birim şekil değiştirme (ε) ilişkisi, $\overline{\zeta}$, viskoz sönüm orantı katsayısı olmak üzere

$$\sigma = E(\varepsilon + \overline{\zeta}\frac{d\varepsilon}{dt}) \qquad \textbf{(A.3)}$$

şeklinde tanımlıdır. (A.3) ifadesinden hareketle (A.2) yeniden ele alınır, ancak malzeme sönümü ile moment arasındaki ilişkinin lineer olduğu kabul edilirse,

$$M(s,t) = EI\left[\frac{y''(s,t)}{\sqrt{1-[y'(s,t)]^2}} + \overline{\zeta}\dot{y}''(s,t)\right] \qquad \textbf{(A.4)}$$

yazılabilir. Yine Şekil A.1'den, yayılı eylemsizlik kuvvetleri

$$F_x^e(s,t) = -\rho A \frac{d^2}{dt^2}\left\{\int_0^s \sqrt{1-[y'(\eta,t)]^2}\, d\eta - s\right\} \qquad \textbf{(A.5)}$$

$$F_y^e(s,t) = -\rho A \frac{d^2}{dt^2} y(s,t) \qquad \textbf{(A.6)}$$

olarak ve kirişin s koordinatı ile belirli bir noktasında, **f**(s,t) yayılı kuvveti etkisinde oluşan M(s,t) ifadesi, σ ve η kukla değişkenler olmak ve üsler η'ya göre türevi göstermek üzere

$$M(s,t) = -\int_s^\ell \left[f_x(\sigma,t) + F_x^e(\sigma,t)\right]\cdot\left[\int_s^\sigma y'(\eta,t)\, d\eta\right] d\sigma + \int_s^\ell \left[f_y(\sigma,t) + F_y^e(\sigma,t)\right]\cdot\left[\int_s^\sigma \sqrt{1-[y'(\eta,t)]^2}\, d\eta\right] d\sigma \qquad \textbf{(A.7)}$$

şeklinde yazılabilir. (A.7) ifadesinde η'ya göre integraller, çarpanı oldukları ilgili kuvvetin moment kollarıdır.

Şimdi, (A.4,5 ve 6), (A.7)'da yerlerine yazılıp, $1/\sqrt{1-[y'(s,t)]^2}$ ve $\sqrt{1-[y'(\eta,t)]^2}$ ifadelerinin

$$1/\sqrt{1-[y'(s,t)]^2} \cong 1 + \tfrac{1}{2}[y'(s,t)]^2 + \tfrac{3}{8}[y'(s,t)]^4 + \ldots \qquad \textbf{(A.8)}$$

$$\sqrt{1-[y'(\eta,t)]^2} \cong 1 - \tfrac{1}{2}[y'(\eta,t)]^2 - \tfrac{1}{8}[y'(\eta,t)]^4 + \ldots \qquad \textbf{(A.9)}$$

şeklindeki Taylor serisi açınımları dikkate alınarak 3. dereceye kadar olan terimler alıkonulursa ve s'ye göre iki kez kısmi integrasyon gerçekleştirilirse, üsler s'ye, noktalar da zamana göre türevi göstermek üzere Şekil A.1'de gösterilen stasyoner visko-elastik kirişin enine titreşimlerinin hareketine ait lineer olamayan integro-diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} &EI\left(y^{IV} + \tfrac{1}{2}y^{IV}y'^2 + 3y'y''y''' + y''^3\right) + EI\overline{\zeta}\dot{y}^{IV} + \rho A\left\{\ddot{y} - \tfrac{1}{2}\ddot{y}y'^2 + y'y''\int_s^\ell \ddot{y}\, d\sigma\right. \\ &\left. - y''\int_s^\ell\left[\int_0^\sigma\left(\dot{y}^2 + y'\ddot{y}'\right)d\eta\right]d\sigma + y'\int_0^s\left(\dot{y}^2 + y'\ddot{y}'\right)d\eta\right\} - y''\int_s^\ell f_x(\sigma,t)\, d\sigma \\ &- y'y''\int_s^\ell f_y(\sigma,t)\, d\sigma + f_x(s,t)\, y' - f_y(s,t)\left(1 - \tfrac{1}{2}y'^2\right) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(A.10)}$$

olarak elde edilir.

Ek B

Bir konsol kirişin enine titreşimlerinin boyutsuz doğal frekanslarına ilişkin frekans denklemi

$$1+\cos\lambda\cosh\lambda=0 \qquad \textbf{(B.1)}$$

dir. Bu denklemden hesaplanan ilk beş doğal frekans

λ_1=1.8751040687, λ_2=4.6940911329,
λ_3=7.8547574382, λ_4=10.9955407348, **(B.2)**
λ_5=14.1371683910,

şeklindedir.

Ek C

Millerin burulma titreşimlerinin sonlu elemanlarla modellenmesinde global kütle ve katılık matrislerinin oluşturulmasına ilişkin ayrıntılar birçok kitaptan edinilebilir (Bkz. [49]). İkinci dereceden şekil fonksiyonlarına sahip, bir düğümü ortada olmak üzere üç düğümlü n adet sonlu elemandan ibaret bir burulma çubuğunun global kütle ve katılık matrislerinin boyutsuz kısmı Denk. (C.1) ve (C.2)'de verilmiştir.

$$\mathbf{K} = \frac{n}{3} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -8 & & & & & & \\ -8 & 14 & -8 & 1 & & & \mathbf{0} & \\ & -8 & 16 & -8 & & & & \\ & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ & \mathbf{0} & & & & -8 & 16 & -8 \\ & & & & & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(C.1)}$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{30 \cdot n} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 2 & & & & & & \\ 2 & 8 & 2 & -1 & & & \mathbf{0} & \\ & 2 & 16 & 2 & & & & \\ & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ & \mathbf{0} & & & & 2 & 16 & 2 \\ & & & & & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(C.2)}$$

Ek D

Parçalı matrislerde ters alma işlemi, **A**(mxm), **B**(mxn), **C**(nxm), **D**(nxn) olmak, **A** ve $(\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})$ tekil olmamak üzere

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\\ -(\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & (\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\end{bmatrix}; \qquad \textbf{(D.1)}$$

parçalı matrislerde çarpma işlemi ise, **A**(mxn), **B**(mxp), **C**(q,n), **D**(qxp), **E**(nxr), **F**(nxs), **G**(pxr), **H**(pxs) olmak üzere

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{F}\\ \mathbf{G} & \mathbf{H}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{AE}+\mathbf{BG} & \mathbf{AF}+\mathbf{BH}\\ \mathbf{CE}+\mathbf{DG} & \mathbf{CF}+\mathbf{DH}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(D.2)}$$

şeklinde tanımlıdır [50].

(3.16) ifadesinde $\boldsymbol{\theta}(\tau)=\boldsymbol{\Theta}\cdot e^{i\sigma\tau}$, $\mathbf{g}_i(\tau)=\overline{\mathbf{G}}_i\cdot e^{i\sigma\tau}$ çözüm kabulleri yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \overline{\mathbf{M}}_{10} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \overline{\mathbf{M}}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{\mathbf{M}}_{r0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{00} & \delta_1\overline{\mathbf{K}}_{01} & \delta_2\overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & \delta_r\overline{\mathbf{K}}_{0r}\\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{22} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \overline{\mathbf{K}}_{rr}\end{bmatrix}-\sigma^2\mathbf{I}\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Theta}\\ \overline{\mathbf{G}}_1\\ \overline{\mathbf{G}}_2\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{G}}_r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(D.3)}$$

özdeğer analizi problemine ulaşılır. (D.3) ifadesinde, kütle matrisi **M**'nin, elemanları $\mathbf{M}_1$(2nx2n), $\mathbf{M}_2$(2nx $m\sum_{i=1}^{r}k_i$), $\mathbf{M}_3$($m\sum_{i=1}^{r}k_i$ x2n), $\mathbf{M}_4$($m\sum_{i=1}^{r}k_i$ x $m\sum_{i=1}^{r}k_i$) olmak üzere

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2\\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4\end{bmatrix},\ \mathbf{M}_1=\mathbf{M}_{00},\ \mathbf{M}_2=\mathbf{0},\ \mathbf{M}_3=\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{M}}_{10}^{T} & \overline{\mathbf{M}}_{20}^{T} & \cdots & \overline{\mathbf{M}}_{r0}^{T}\end{bmatrix}^{T},\ \mathbf{M}_4=\mathbf{I} \qquad \textbf{(D.4)}$$

şeklinde ve katılık maatrisi **K**'nın, elemanları $\mathbf{K}_1$(2nx2n), $\mathbf{K}_2$(2nx $m\sum_{i=1}^{r}k_i$), $\mathbf{K}_3$($m\sum_{i=1}^{r}k_i$ x2n), $\mathbf{K}_4$($m\sum_{i=1}^{r}k_i$ x $m\sum_{i=1}^{r}k_i$) olmak üzere

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2\\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4\end{bmatrix},\ \mathbf{K}_1=\mathbf{K}_{00},\ \mathbf{K}_2=\begin{bmatrix}\delta_1\overline{\mathbf{K}}_{01} & \delta_2\overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & \delta_r\overline{\mathbf{K}}_{0r}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_3=\mathbf{0},\ \mathbf{K}_4=\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{K}}_{22} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \overline{\mathbf{K}}_{rr}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(D.5)}$$

şeklinde parçalı olarak yazılmasıyla ve (D.1,2)'de tanımlı, parçalı matrislerde ters alma ve çarpma kurallarına dikkat edilerek

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{00} & \delta_1\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{01} & \delta_2\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & \delta_r\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{0r}\\ -\overline{\mathbf{M}}_{10}\mathbf{M}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{00} & -\delta_1\overline{\mathbf{M}}_{10}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{01}+\overline{\mathbf{K}}_{11} & -\delta_2\overline{\mathbf{M}}_{10}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & -\delta_r\overline{\mathbf{M}}_{10}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{0r}\\ -\overline{\mathbf{M}}_{20}\mathbf{M}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{00} & -\delta_1\overline{\mathbf{M}}_{20}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{01} & -\delta_2\overline{\mathbf{M}}_{20}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{02}+\overline{\mathbf{K}}_{22} & \cdots & -\delta_r\overline{\mathbf{M}}_{20}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{0r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\overline{\mathbf{M}}_{r0}\mathbf{M}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{00} & -\delta_1\overline{\mathbf{M}}_{r0}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{01} & -\delta_2\overline{\mathbf{M}}_{r0}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{02} & \cdots & -\delta_r\overline{\mathbf{M}}_{r0}\mathbf{M}_{00}^{-1}\overline{\mathbf{K}}_{0r}+\overline{\mathbf{K}}_{rr}\end{bmatrix}-\sigma^2\mathbf{I}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Theta}\\ \overline{\mathbf{G}}_1\\ \overline{\mathbf{G}}_2\\ \vdots\\ \overline{\mathbf{G}}_r\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(D.6)}$$

elde edilir. Denk. (D.6)'dan, (3.20,21) tanımları altında (3.19) ifadesine ulaşılır.

Ek E

Denklem (3.19)'da, üzerinde k_i adet pala taşıyan i. kademeye karşılık gelen, k_i adet alt-hiper satıra sahip i. hiper satır ele alınır ve herhangi j. ve k. palalara ilişkin iki alt-hiper satırın farkı yazılırsa

$$\left[\mathbf{K}_{ii} - \sigma^2\mathbf{I}\right]\left\{\mathbf{G}_{ij} - \mathbf{G}_{ik}\right\} = \{\mathbf{0}\};\ \ i=1,2,\ldots,r \qquad \textbf{(E.1)}$$

elde edilir. Denk. (E.1)'e göre ya

$$\det\left[\mathbf{K}_{ii} - \sigma^2\mathbf{I}\right] = 0 \qquad \textbf{(E.2)}$$

ya da

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}_{ik}\,(=\mathbf{G}_i)\,;\ \forall\ j,\ k \qquad \textbf{(E.3)}$$

olmalıdır.
i) Denk. (E.3)'ün geçerli olması halinde her i. kademe için

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}_{ik} = \mathbf{G}_i\,;\ \forall\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ r, \qquad \textbf{(E.4)}$$

yazılabilir. Bu durumda, her i. kademedeki k_i adet palaya ilişkin alt-hiper satırlar birbirleriyle özdeş hale gelir ve her kademedeki bu alt-hiper satırlardan yalnızca biri dikkate alınırsa

$$\left[\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & k_1\delta_1\mathbf{B}_{01} & k_2\delta_2\mathbf{B}_{02} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{B}_{0r} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{K}_{11}+k_1\delta_1\mathbf{D}_{11} & k_2\delta_2\mathbf{D}_{12} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{1r} \\ \mathbf{C}_{20} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{21} & \mathbf{K}_{22}+k_2\delta_2\mathbf{D}_{22} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{r0} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{r1} & k_2\delta_2\mathbf{D}_{r2} & \cdots & \mathbf{K}_{rr}+k_r\delta_r\mathbf{D}_{rr} \end{bmatrix} - \sigma^2\mathbf{I}\right]\begin{Bmatrix} \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(E.5)}$$

ifadesine ulaşılır. Denk. (E.4) ve (E.5)'den, mil burulma-pala eğilme bağlaşık modlarına ilişkin alt problemi tanımlayan Denk. (3.24) ve (3.27) elde edilir.
ii) Denk. (E.2)'nin geçerli olması durumunda

$$\det\left[\mathbf{K}_{ii} - \sigma^2\mathbf{I}\right] = 0;\quad i=q \qquad \textbf{(E.6)}$$

ve

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}_{ik} = \mathbf{G}_i\,;\quad i\neq q \qquad \textbf{(E.7)}$$

yazılabilir. Bu durumda her i=q için bu denklemin herhangi bir s'inci σ_s özdeğerine Denk. (E.1)'den $\mathbf{U}_q^{(s)} = \{\mathbf{G}_{qj} - \mathbf{G}_{qk}\}^{(s)}$ özvektörü karşılık gelir. Bu özvektörün j ve k'nın seçiminden bağımsız olduğuna dikkat edilirse, söz konusu s'inci modda bütün $\mathbf{G}_{qj}$ vektörlerinin $\mathbf{U}_q^{(s)}$ ile aynı formda olması gerektiği anlaşılır. Buna gore $\alpha_{qj}^{(s)}$ bir sabit ölçek katsayısı olmak üzere

$$\mathbf{G}_q^{(s)} = \mathbf{U}_q^{(s)},\ \mathbf{G}_{qj}^{(s)} = \alpha_{qj}^{(s)} \cdot \mathbf{G}_q^{(s)},\ \forall j,s \qquad \textbf{(E.8)}$$

yazılabilir. Denk. (E.6-8) ışığında Denk. (3.19)

$$\alpha_q^{(s)} = \sum_{j=1}^{k_q} \alpha_{qj}^{(s)} \qquad \textbf{(E.9)}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} & \sigma_s^2\mathbf{I} & k_1\delta_1\mathbf{B}_{01} & \cdots & \alpha_q^{(s)}\delta_q\mathbf{B}_{01} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{B}_{0r} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{K}_{11}+k_1\delta_1\mathbf{D}_{11} & \sigma_s^2\mathbf{I} & \cdots & \alpha_q^{(s)}\delta_q\mathbf{D}_{1q} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{q0} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{q1} & \cdots & \alpha_q^{(s)}\delta_q\mathbf{D}_{qq} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{qr} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{C}_{r0} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{r1} & \cdots & \alpha_q^{(s)}\delta_q\mathbf{D}_{qq} & \cdots & \mathbf{K}_{rr}+k_r\delta_r\mathbf{D}_{rr} & \sigma_s^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Theta}^{(s)} \\ \mathbf{G}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_q^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_r^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(E.10)}$$

şeklinde yazılabilir. Denk. (E.10)'da yer alan $\mathbf{G}_q^{(s)}$'in Denk. (E.8)'den hesaplanabilmesine karşın, $\alpha_q^{(s)}$ bilinmeyendir. Bilinmeyenleri bir araya toplamak amacıyla Denk. (E.10)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00}-\sigma_s^2\mathbf{I} & k_1\delta_1\mathbf{B}_{01} & \cdots & \delta_q\mathbf{B}_{01}\mathbf{G}_q^{(s)} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{B}_{0r} \\ \mathbf{C}_{10} & \mathbf{K}_{11}+k_1\delta_1\mathbf{D}_{11}-\sigma_s^2\mathbf{I} & \cdots & \delta_q\mathbf{D}_{1q}\mathbf{G}_q^{(s)} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{q0} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{q1} & \cdots & \delta_q\mathbf{D}_{qq}\mathbf{G}_q^{(s)} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{qr} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{r0} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{r1} & \cdots & \delta_q\mathbf{D}_{qq}\mathbf{G}_q^{(s)} & \cdots & \mathbf{K}_{rr}+k_r\delta_r\mathbf{D}_{rr}-\sigma_s^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{\Theta}^{(s)} \\ \mathbf{G}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \alpha_q^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_r^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(E.11)}$$

olarak düzenlenebilir. Denk. (E.11)'in gerçeklenebilmesi için ya katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması gerekir ki bu matrisin elemanları birbirinden bağımsız verili büyüklüklerdir ve rastlantısal haller dışında bu determinantın sıfıra eşit olması mümkün değildir, ya da bu denklemin sıfır çözüme sahip olması gerekir. Bu durumda çözüm,

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{0},\quad \alpha_q^{(s)} = 0 \qquad \textbf{(E.12)}$$

şeklindedir. Sonuç olarak, Denk. (E.6), (E.8) ve (E.12)'den rijid mil modlarına ilişkin alt problemi tanımlayan Denk. (3.28) ve (3.29) elde edilir.
Diğer taraftan, Denk.(3.19)'nın bir dizi elemanter matris işlemi sonrasında

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}\end{bmatrix}=0 \qquad \textbf{(E.13)}$$

şeklinde bir karakteristik denkleme götüreceği gösterilebilir. Burada **X**, 2n+rm boyutunda

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{00}-\sigma^2\mathbf{I} & k_1\delta_1\mathbf{B}_{01} & k_2\delta_2\mathbf{B}_{02} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{B}_{0r}\\ k_1\mathbf{C}_{10} & \mathbf{K}_{11}+k_1\delta_1\mathbf{D}_{11}-\sigma^2\mathbf{I} & k_2\delta_2\mathbf{D}_{12} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{1r}\\ k_2\mathbf{C}_{20} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{21} & \mathbf{K}_{22}+k_2\delta_2\mathbf{D}_{22}-\sigma^2\mathbf{I} & \cdots & k_r\delta_r\mathbf{D}_{2r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k_r\mathbf{C}_{r0} & k_1\delta_1\mathbf{D}_{r1} & k_2\delta_2\mathbf{D}_{r2} & \cdots & \mathbf{K}_{rr}+k_r\delta_r\mathbf{D}_{rr}-\sigma^2\mathbf{I}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(E.14)}$$

şeklinde; **Z**, $m\cdot\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)$ boyutunda, ve elemanları olan $\mathbf{Z}_{ii}$ alt-hiper matrisleri

$$\mathbf{Z}_{ii}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{ii}-\sigma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ii}-\sigma^2\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{ii}-\sigma^2\mathbf{I}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(E.15)}$$

olarak tanımlı k_i-1 özdeş blok içeren blok-diyagonal bir matris olmak üzere,

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Z}_{rr}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(E.16)}$$

şeklinde kare matrisler ve **0**, sıfır matrisi olup, Denk. (E.15)'deki $\mathbf{K}_{ii}$ Denk. (3.18)'de tanımlandığı gibidir. Denk. (E.13-16)'dan, sistemin, Denk. (3.23) ile verilen karakteristik denklemi elde edilir. Bu sonuç, Denk. (E.5) ve (E.6) ile uyum halindedir. Burada elde edilen sonuçlar, Ren ve ark. [51] tarafından yapılan, üzerinde özdeş palalar taşıyan tek kademeli bir rotor-pala sisteminin ele alındığı çalışmada elde edilen sonuçlarla da aynı doğrultudadır.

Ek F

Tablo F.1: Üzerinde k Adet Pala Taşıyan Rotor-Pala Sistemine İlişkin Frekanslar (α=0.1, γ=0.5, Δ=20, μ=10, *: (k-1) katlı özdeğer)

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
β=0	2.4139	3.5160*	11.9198	22.0345*	25.5092	37.3651	61.6972*	62.2922	68.6407	96.2172
β=5	2.6980	4.5218*	14.3466	25.3777*	27.7057	38.2037	63.8036	65.4872*	70.6814	96.2982
β=10	3.0604	6.3727*	18.7906	32.4882	33.4149*	41.3172	65.3606	75.5967*	78.7926	96.5284
β=15	3.3612	8.3280*	22.5279	36.4789	43.5162*	48.0191	66.2043	89.6658	91.2212	97.3789
β=20	3.6408	10.2920*	25.0965	39.3573	54.4712*	56.9387	67.2409	96.1058	105.9184*	108.2978
β=25	3.9167	12.2570*	26.7674	41.8440	64.1333	65.8254*	71.0030	96.5354	123.3695*	124.2730
β=30	4.1938	14.2247*	27.8751	44.0663	66.1216	77.3954*	80.3630	96.8510	127.2105	141.5156*

Tablo F.2: Üzerinde k Adet Pala Taşıyan Rotor-Pala Sistemine İlişkin Frekanslar (α=2, γ=1, Δ=10, μ=10, *: (k-1) katlı özdeğer)

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
β=0	1.2030	3.5160*	6.8432	22.0345*	30.0321	33.2800	61.6972*	62.8114	76.9871	94.4698
β=5	1.4489	9.6425*	17.4391	31.4464	32.3811*	44.5091	62.9873	73.8171*	89.8380	94.9986
β=10	1.7110	18.0257*	30.3857	33.7691	51.8532*	62.4205	69.0191	94.3303	100.7552*	120.1831
β=15	2.0003	26.5322*	31.3358	47.9256	63.0039	73.1867*	92.4720	96.4108	125.7497	132.6554*
β=20	2.3100	31.4585	35.0738*	60.7922	64.9400	94.2619	95.0897*	119.8297	126.5367	157.2035
β=25	2.6305	31.5404	43.6357*	62.5397	77.3598	94.5573	117.2533*	125.5606	145.7466	157.6727
β=30	2.9539	31.6163	52.2117*	62.7233	89.7027	95.7804	125.8157	139.5651*	156.8017	170.9092

Tablo F.3: Üzerinde k Adet Pala Taşıyan Rotor-Pala Sistemine İlişkin Frekanslar (α=5, γ=2, Δ=5, μ=5, *: (k-1) katlı özdeğer)

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}
β=0	0.4079	3.5160*	6.1016	15.7307	22.0345*	30.9614	31.9210	47.1446	61.6972*	62.8367
β=5	0.5166	14.3561*	15.7026	23.8193	31.4410	40.9234*	47.1054	54.6871	62.8746	78.5674
β=10	0.6538	15.7284	27.7367*	31.4097	45.7059	47.3212	62.8505	71.4128*	78.5477	92.0213
β=15	0.8081	15.7453	31.4268	41.2082*	47.1181	62.7603	67.6387	78.5978	94.3067	103.3715*
β=20	0.9697	15.7648	31.4388	47.1323	54.7152*	62.8299	78.5109	88.4605	94.3993	110.0871
β=25	1.1316	15.7875	31.4512	47.1427	62.8430	68.2438*	78.5498	94.2541	108.1026	110.4564
β=30	1.2893	15.8128	31.4647	47.1528	62.8526	78.5625	81.7868*	94.2853	110.0182	125.3846

ÖZGEÇMİŞ

Gökhan Bulut, 1975 yılında Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Adana'da tamamladıktan sonra, İTÜ Makina Mühendisliği bölümünden 1999 yılında, İTÜ FBE Konstrüksiyon programından 2003 yılında mezun oldu. Halen İTÜ Makina Fakültesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.