İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ İKİZ BOŞLUK İÇEREN UZAYIN TİTREŞİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Hasan Faik KARA

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

AĞUSTOS 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ İKİZ BOŞLUK İÇEREN UZAYIN TİTREŞİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Hasan Faik KARA
(Enstitü No: 501061056)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Ağustos 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Ağustos 2008

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Hasan ENGİN**
Diğer Jüri Üyeleri:	**Doç. Dr. Abdul HAYIR**
	Doç.Dr. İrfan COŞKUN (Y.T.Ü.)

AĞUSTOS 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında gerekli mesaiyi ayıran, bilgi ve tecrübesine müracaat ettiğim danışman hocam sayın Prof. Dr. Hasan ENGİN' e şükranlarımı sunarım. Bununla birlikte, bilgileriyle her zaman yardımıma koşan Aydın ÖZMUTLU'ya, mesai arkadaşlarım Akif KUTLU'ya ve Murat YILMAZ'a teşekkürü borç bilirim. Bölüm öğretim üyelerine gösterdikleri maddi ve manevi desteklerden dolayı şükranlarımı sunarım.

Ayrıca hayatım boyuca desteklerini esirgemeyen, eğitimimdeki katkılarından dolayı, aileme de müteşekkirim.

Ağustos 2008 Hasan Faik KARA

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ii
İÇİNDEKİLER iii
ŞEKİL LİSTESİ iv
SEMBOL LİSTESİ viii
ÖZET ix
SUMMARY x

1 GİRİŞ 1

2 DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER 5

3 ANALİTİK ÇÖZÜM 9
3.1 Formülasyon ve Çözüm 9
3.2 Sınır Koşullarını Sağlatılması 16
3.2.1 Oyuk iç yüzeyindeki sınır koşulları 16
3.2.1.1 Birinci oyuk iç yüzeyindeki sınır koşullarının sağlatılması 16
3.2.1.2 İkinci oyuk iç yüzeyindeki sınır koşullarının sağlatılması 22

4 SAYISAL UYGULAMALAR 31
4.1 Sayısal Veriler 31
4.2 Sonuçlar 31
4.2.1 U sayısı ile çözümlerin yakınsaklığı 31
4.2.2 Birinci oyuk çevresinde ve iki oyuk arasındaki bölgede gerilme ve yer değiştirmeler 32
4.2.3 İki oyuk arasındaki mesafenin büyümesi durumunda oyuk yüzeylerindeki gerilmelerin değişimi 32
4.2.4 Açısal frekans, oyuk yarıçapları ve iki oyuk arasındaki mesafenin çeşitli değerleri için oyuk yüzeylerindeki ve iki oyuk arasındaki bölgede çözümler 32

5 TARTIŞMA 34

KAYNAKLAR 35

EK A 37

EK B 42

EK C 51

EK D 55

ÖZGEÇMİŞ 64

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler…….. 5
Şekil 3.1 : Problemin geometrisi……... 9
Şekil A.1 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=11 için σ_{rr}'nin θ_1'e göre değişimi……. 37
Şekil A.2 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=11 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi…… 37
Şekil A.3 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=11 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi……. 38
Şekil A.4 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=11 için σ_{rr}'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 38
Şekil A.5 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=11 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 38
Şekil A.6 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=11 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi……... 39
Şekil A7 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için σ_{rr}'nin θ_1'e göre değişimi……. 39
Şekil A.8 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi…… 39
Şekil A.9 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi……. 40
Şekil A.10 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için σ_{rr}'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 40
Şekil A.11 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 40
Şekil A.12 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi……... 41
Şekil B.1 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi..…… 42
Şekil B.2 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın r_1'e göre değişimi……. 42
Şekil B.3 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi…….. 43

Şekil B.4 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için u_r 'nin r_1 'e göre değişimi…… 43
Şekil B.5 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için u_θ 'nın r_1 'e göre değişimi……... 43
Şekil B.6 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…… 44
Şekil B.7 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi……... 44
Şekil B.8 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi……... 44
Şekil B.9 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için u_r 'nin r_1 'e göre değişimi…… 45
Şekil B.10 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için u_θ 'nın r_1 'e göre değişimi…… 45
Şekil B.11 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi……... 45
Şekil B.12 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi……... 46
Şekil B.13 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi……... 46
Şekil B.14 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için u_r 'nin r_1 'e göre değişimi…… 46
Şekil B.15 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için u_θ 'nın r_1 'e göre değişimi…… 47
Şekil B.16 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…… 47
Şekil B.17 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi…… 47
Şekil B.18 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi…… 48
Şekil B.19 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için u_r 'nin r_1 'e göre değişimi…… 48
Şekil B.20 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için u_θ 'nın r_1 'e göre değişimi…… 48
Şekil B.21 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…… 49
Şekil B.22 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın r_1 'e göre değişimi…… 49

Şekil B.23 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi…….. 49
Şekil B.24 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için u_r'nin r_1'e göre değişimi…… 50
Şekil B.25 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için u_θ'nın r_1'e göre değişimi…… 50
Şekil C.1 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi…… 51
Şekil C.2 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 51
Şekil C.3 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi…… 52
Şekil C.4 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 52
Şekil C.5 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi…… 53
Şekil C.6 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 53
Şekil C.7 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi…… 54
Şekil C.8 : $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi…….. 54
Şekil D.1 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi…….. 55
Şekil D.2 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi…….. 55
Şekil D.3 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi…….. 56
Şekil D.4 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=4m, a_2=4m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi…….. 56
Şekil D.5 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=4m, a_2=4m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi…….. 56
Şekil D.6 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=4m, a_2=4m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi…….. 57
Şekil D.7 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=6m, a_2=6m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi…….. 57
Şekil D.8 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=6m, a_2=6m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi…….. 57

Şekil D.9 : $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=6m, a_2=6m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…….. 58
Şekil D.10 : $\omega = 1000$ rad/s, D=17m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi…….. 58
Şekil D.11 : $\omega = 1000$ rad/s, D=17m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi…….. 58
Şekil D.12 : $\omega = 1000$ rad/s, D=17m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…….. 59
Şekil D.13 : $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi…….. 59
Şekil D.14 : $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi…….. 59
Şekil D.15 : $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…….. 60
Şekil D.16 : $\omega = 750$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi…….. 60
Şekil D.17 : $\omega = 750$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi…….. 60
Şekil D.18 : $\omega = 750$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi……. 61
Şekil D.19 : $\omega = 1500$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi…….. 61
Şekil D.20 : $\omega = 1500$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi…….. 61
Şekil D.21 : $\omega = 1500$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi…….. 62
Şekil D.22 : $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'e göre değişimi…… 62
Şekil D.23 : $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'e göre değişimi…… 62
Şekil D.24 : $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi……. 63

SEMBOL LİSTESİ

ω	: Zorlama frekansı
t	: Zaman
p_i	: Harmonik iç basınç
p_0	: Harmonik iç basınç genliği
ρ	: Yarı sonsuz ortamın kütle yoğunluğu
ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}	: Şekildeğiştirme bileşenleri
e	: Düzlemsel hacim değiştirme oranı
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
λ, μ	: Lamé sabitleri
n_x	: Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün *x* bileşeni
n_y	: Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün *y* bileşeni
$\hat{t}_x$	: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin *x* bileşeni
$\hat{t}_y$	: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin *y* bileşeni
$\hat{U}$	: Yerdeğiştirme vektörü
$\hat{U}_x$	: Sınırdaki yerdeğiştirmenin *x* bileşeni
$\hat{U}_y$	: Sınırdaki yerdeğiştirmenin *y* bileşeni
U_x	: Yerdeğiştirmenin *x* bileşeni
U_y	: Yerdeğiştirmenin *y* bileşeni
U_r	: Yerdeğiştirmenin radyal doğrultudaki bileşeni
U_θ	: Yerdeğiştirmenin açısal doğrultudaki bileşeni
φ, ψ	: Yerdeğiştirme potansiyelleri
D	: Oyuk merkezleri arasındaki mesafe
a_1, a_2	: Oyukların yarıçapları
r, θ	: Kutupsal koordinatlar
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$	: Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	: Kartezyen koordinatlarda gerilme bileşenleri
k_1	: Boyuna dalga sayısı
k_2	: Enine dalga sayısı
c_1	: Boyuna dalga hızı
c_2	: Enine dalga hızı
J_n	: Birinci nevi Bessel fonksiyonu
Y_n	: İkinci nevi Bessel fonksiyonu
H_n	: Üçüncü nevi Bessel (Hankel) fonksiyonu

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ İKİZ BOŞLUK İÇEREN UZAYIN TİTREŞİMLERİ

ÖZET

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. Bu tür problemler akustik ve optikte de geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Boşluk içeren sonsuz ortamların dinamik etkiler altındaki davranışının incelenmesi, matematik modellemesinin kolay olması nedeni ile de tercih edilmektedir.

Bu çalışmada, ikiz silindirik boşluk içeren ve boşluklardan biri harmonik iç basınçla zorlanan homogen, izotrop ve lineer elastik uzayın davranışı incelendi.

Birinci bölümde, problem tanıtılarak literatürde bulunan bu konuyla ilgili önceki çalışmalardan ve bu çalışmada kullanılan yöntemden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çözüm için kullanılan temel denklemlerin çıkarılışı gösterilmiştir. Newton'un ikinci yasasından faydalanarak hareket denklemleri yazılmış, homogen, izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli bünye bağıntıları kullanılarak Navier denklemleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, çözüm yöntemi anlatılmıştır. Kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyen sabitler delik yüzeyleri üzerinde yazılan sınır koşulları ile hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde Mathematica programı kullanılarak sayısal hesaplamalar yapılmış, oyuk yüzeylerinde ve oyukların çevresinde değişik parametrelere bağlı olarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerin değişimi grafiklerle gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, çözüm tekniği ve sonuçların kısa bir değerlendirmesi yapılmıştır.

VIBRATIONS OF A SPACE WHICH INCLUDE TWO CAVITIES SUBJECTED TO A HARMONIC FORCING

SUMMARY

Behavior of an elastic medium, which consists of a cavity or a material, under the dynamic effects has been subject of recent studies. Investigations dealing with tunneling, underground pipelining, underwater pipelining and constructing underground power plants are namely the basics of this topic. Also, there are many applications of these problems in acoustics and optics. But also, the response of an infinite medium under the dynamic effects is widely chosen by researchers because its mathematical modeling is easy.

In this study, response of a homogeneous, isotropic and linear elastic infinite medium, which includes two cylindrical cavities, is investigated when subjected to harmonic inner pressure.

In the first part of the study, problem is presented simply and investigations on the same topic found in literature including the methods used before is given.

In the second part, derivation of basic equations is given. Equations of motion that is written based on Newton's second law and then Navier's equations are derived using constitutive equations for homogeneous, isotropic and linear elastic medium.

In the third part, method for solving the equation is explained. Coupled equation of motions is reduced into two wave equations by use of Helmholtz potentials in polar coordinates. These reduced wave equations are solved by using the multiplication series of the Bessel and the trigonometric functions. Unknown coefficients were calculated by applying boundary conditions on the cavities.

In the fourth part, Mathematica software is used to reach the numerical solutions. Variation of displacement and stress components on cavities inner surface and on the region between two cavities depending on various parameters are shown via graphics.

In the fifth part, the technique of solution and results are discussed briefly.

1 GİRİŞ

İçerisinde boşluk bulunan elastik bir ortamın dinamik etkiler karşısındaki davranışı, geçmişte birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir **[5-6]**. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. Bu tür problemler akustik ve optikte de geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Boşluk içeren sonsuz ortamların dinamik etkiler altındaki davranışının incelenmesi, matematik modellemesinin kolay olması nedeni ile de tercih edilmektedir.

Yarı sonsuz elastik bir ortamdaki gömülü boruların dinamik davranışını **[2]** no'lu çalışmada incelenmiştir. Bu çalışmada homogen bir zemine gömülü boru hattının etrafının farklı bir malzemeyle doldurulması hali göz önüne alınarak gerçek durum modellenmeye çalışılmıştır. Modelin davranışı Bessel fonksiyonları yardımıyla temsil edilmiş, serbest yüzey ve dolgu bölgesi yüzeyinden dalgaların ardışık yansımaları göz önüne alınmıştır. Bir başka çalışmada ise **[16]**, geometrisinin dairesel kabuktan farklı olması halini göz önüne almışlardır. Çalışmada iç bölgede sonlu eleman modellemesi yapılmış, dış bölgedeyse analitik çözüm teknikleri kullanılmıştır.

Zamana bağlı yüzey kuvvetleri etkisindeki sonsuz uzunluktaki silindirik boşluğun bulunduğu homogen, izotrop ve elastik yarım uzay ortamının davranışını **[13]** no'lu çalışmada incelenmiştir. Çözümde ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılmış olup çözüm fonksiyonları olarak alınan Henkel – trigonometrik fonksiyon serileri simetrik ve asimetrik kısımlara ayrılarak sınır koşulları boşluk ve serbest yüzey üzerinde sağlatılıp hata azaltılmaya çalışılmıştır.

Kabuk eksenine eğik açıyla gelen düzlem dalgalar etkisinde, yatay katmanlı viskoelastik yarım uzayda gömülü sonsuz uzun silindirik kabuğun üç eksenli davranışını **[12]** no'lu çalışmada incelemiştir. Bu çalışmada, boru hattını veya tüneli içeren iç bölgede basitleştirilmiş Donell kabuk teorisi, dış bölgedeyse viskoelastik yarım uzay için dolaylı bir integral ifadesinin birleşmesinden elde edilen çözüm

fonksiyonları kullanılmıştır. Dolaylı integral hareketli Green fonksiyonlarıyla ifade edilmiştir.

Taşıt veya sismik yükler altında viskoelastik ortamda gömülü çoklu silindirik boşluklu sistemlerin üç eksenli davranışı **[7]** no'lu çalışmanın konusu olmuştur. Çalışmada, ana tünel sabit hızlı hareketli araç yüküne ve radyal basınca maruzken ana tünel ve servis tüneli arasındaki zemin etkileşimi araştırılmıştır. Çözüm fonksiyonları olarak Bessel – Fourier fonksiyon serileri kullanılmıştır.

Elastik yarım uzayda gömülü ikiz boşluğun P dalgaları karşısındaki davranışını **[11]** no'lu çalışmada, Fourier-Bessel serileri yardımıyla bir seri çözümü şeklinde elde edilmiş, daha sonra çözümü tek boşluklu duruma genişletilerek, boşluk sayısının bir yada iki olması durumundaki farklılıkları incelenmiştir.

Tek silindirik boşluğa sahip yarım uzayın, içten zorlanma durumuna karşı gelen davranışını kompleks değişkenler metodunu kullanarak **[15]** no'lu çalışmada elde edilmiştir. Verruijt, bu çalışmasında, Sokolnikoff ve Muskhelishvili'nin karşılaştığı zorluklardan bahsetmiş ve bu zorlukların birtakım analitik ve sayısal analizlerle aşılabileceğini göstermiştir.

Dairesel silindirik bir boşluk içeren bir elastik yarım uzayda harmonik titreşimleri **[4]** no'lu çalışmada araştırılmıştır. Kutupsal koordinatlarda yazılan hareket denklemleri, Helmholtz potansiyellerinin kullanılmasıyla iki adet ayrık dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel fonksiyonları ve trigonometrik fonksiyonlar çarpım serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür.

Elastisite teorisinde karşılaşılan çeşitli sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan belli başlı altı yöntem vardır. Bunlar;

- Ters Yöntem: Diferansiyel denklem takımı çözülerek probleme cevap bulunacak yerde, ters olarak, denklem takımını sağlayan bir takım fonksiyonlar içinden sınır koşullarını sağlayan çözüm olarak seçilir.
- Yarı Ters Yöntem: Bilinmeyenlerin tümü yerine bir kısmına uygun fonksiyonlar seçilir ve diğer kısmının ise bazı diferansiyel denklemleri ve sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmesine çalışılır.

- Direkt Yöntem: Belirli sınır değer problemini oluşturan ilgili diferansiyel denklem takımının tümü, doğrudan doğruya integre edilerek çözümler bulunduktan sonra sınır koşullarının sağlatılmasına çalışılır.
- Enerji Yöntemi: Fiziksel anlamı enerji olan belirli bir integralin ekstrem yapılmasına çalışılmaktadır.
- Sayısal Yöntemler: İncelenen cisim sonlu bir takım parçalara ayrılarak belirli noktalarda yaklaşık çözüm elde edilmesine çalışılır.
- Deneysel Yöntemler: Gerek form gerekse sınır koşulları bakımından karışık problemlerde başvurulan bir yöntemdir.

Bu çalışmada ele alınan problemin geometrisine uygunluğu nedeniyle Direkt yöntem kullanılmıştır. Bir elastisite probleminin direkt yöntemle incelenmesi, problemin diferansiyel denklem takımının belirli sınır koşulları altında doğrudan doğruya çözülmesini amaçlar. Bu açıdan problem, ya altı gerilme bileşenini esas alan Beltrami – Michell uygunluk denklemlerinin denge denklemleri ile birlikte belirli sınır koşulları altındaki çözümüne veya yerdeğiştirme bileşenlerini esas alan Navier denklemlerinin yine belirli sınır koşullarını gerçekleyen çözümünün bulunmasına getirilebilmektedir. Belirli sınır koşulları altında birden fazla kısmi diferansiyel denklemin simültane olarak çözümünde ortaya çıkan güçlük nedeniyle çözümü gerçekleştirebilmek için bir takım yardımcı fonksiyonların kullanılması düşünülmüştür. Elastiste teorisinde gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri, kullanılan yardımcı fonksiyonların çeşitli mertebelerden kısmi türevleri yardımıyla tanımlanmaktadır. Çözülmesi istenen takım Beltrami denklemleriyse tanımlanan fonksiyonlar gerilme fonksiyonları adını alır. Buna karşılık Navier denklemleri çözülmek istenirse kullanılan fonksiyonlara yerdeğiştirme fonksiyonları denir. Bu tür yardımcı fonksiyonlar potansiyel fonksiyonlar olarak adlandırılıp, denge halinde bulunan gerilme sistemlerini doğuran potansiyeller ve yerdeğiştirmeleri üreten potansiyeller olmak üzere iki tip potansiyel tanımlanmaktadır.

Çalışmada, harmonik iç basınçla zorlanan homogen, izotrop ve lineer elastik, ikiz silindirik boşluklu tam uzayın davranışı incelendi. Silindirik boşlukların ekseni boyunca geometri, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmemesi nedeniyle düzlem şekil değiştirme hali göz önüne alındı.

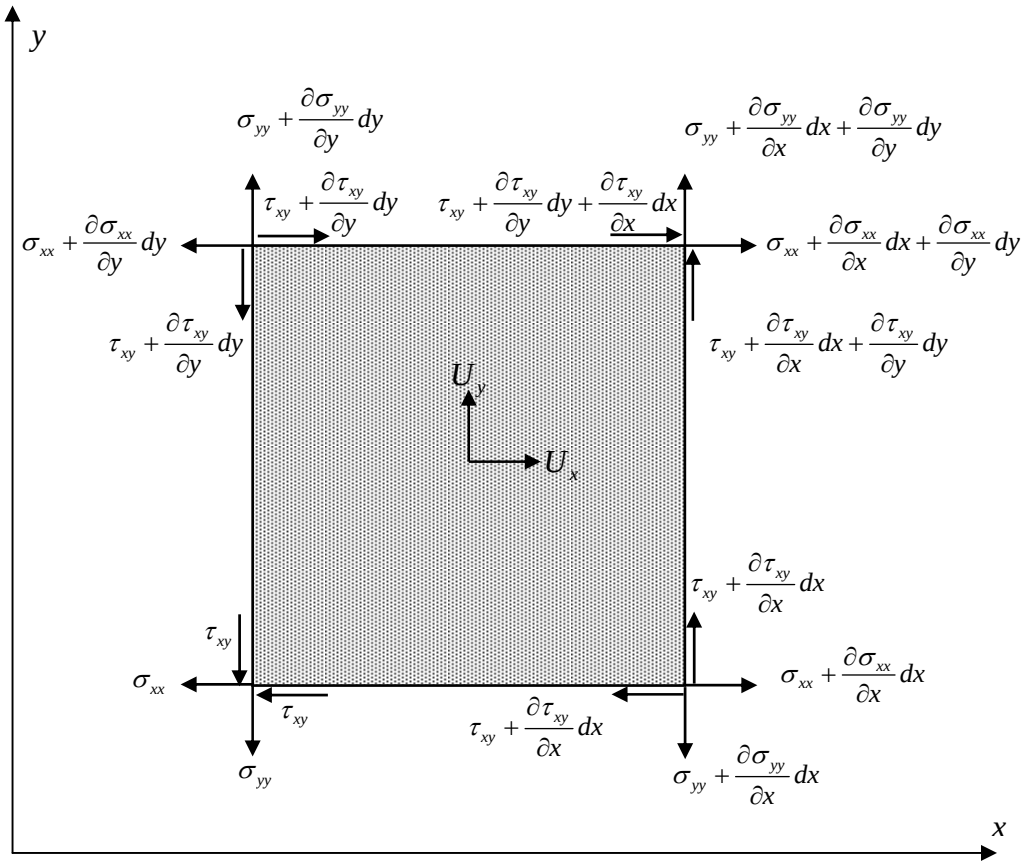
Çözümde, kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. İkinci nevi Bessel fonksiyonlarının özellikle büyük mertebelerinde küçük argüman halinde ekstrem değerler alması dolayısıyla seri sonlu sayıda terim alarak kesilmiştir.

Analitik çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyenler oyuk yüzeyleri üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Sayısal işlemlerde Mathematica paket programı kullanılarak oyuk yüzeyindeki ve düzlem içinde istenilen noktalarda yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin çeşitli parametrelere göre değişimleri grafiklerle gösterilmiştir.

2 DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde iki boyutlu lineer elastik ve homogen, izotrop bir ortamdan alınan bir yüzey elemanına etki eden kuvvet sistemine Newton' un ikinci hareket kanunu uygulanarak düzlem elastisitenin temel denklemleri elde edildi. Homogen, izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli olan bünye bağıntıları, elde edilen bu denklemlerde kullanılarak yerdeğiştirmeler cinsinden alan denklemleri olan Navier denklemleri elde edildi.

Şekil 2.1 de görüldüğü gibi iki boyutlu lineer elastik ve homogen, izotrop bir ortamdan alınan diferansiyel bir alan elemanında kütle kuvvetlerini ihmal ederek Newton' un ikinci hareket kanunu uygulayalım.



Şekil 2.1: Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler

Bahis konusu olan elamanın kenarlarına etkiyen kuvvetleri ve ivme bileşenlerini göz önüne alalım. Levha kalınlığını birim olarak alıp *x* ekseni doğrultusundaki hareket denklemini yazacak olursak;

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial y}dy\right)+\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)\right]dy-\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial y}dy\right)+\sigma_{xx}\right]dy$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)\right]dx-\frac{1}{2}\left[\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)+\tau_{xy}\right]dx$$
$$=\rho\frac{\partial^2U_x}{\partial t^2}dxdy$$

ifadesi elde edilir. Hareket denklemini bir kez de *y* ekseni doğrultusunda yazıp gerekli kısaltmalar ve düzenlemelerden yapıldıktan sonra aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2U_x}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2.1.a)}$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2U_y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2.1.b)}$$

Burada σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} gerilme tansörünün, U_x ve U_y yerdeğiştirmenin kartezyen koordinatlardaki bileşenleridir. ρ kütle yoğunluğunu, *t* ise zamanı göstermektedir.

Gerilmeler cinsinden sınır koşulları:

$$\sigma_{xx}n_x+\tau_{xy}n_y=\hat{t}_x \qquad \textbf{(2.2.a)}$$

$$\tau_{xy}n_x+\sigma_{yy}n_y=\hat{t}_y \qquad \textbf{(2.2.b)}$$

Burada n_x ve n_y sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün bileşenleri $\hat{t}_x$ ve $\hat{t}_y$ ise sınırda etki eden dış gerilmenin bileşenleridir.

Yerdeğiştirmeler cinsinden sınır koşulları:

$$U_x=\hat{U}_x \qquad \textbf{(2.3.a)}$$

$$U_y=\hat{U}_y \qquad \textbf{(2.3.b)}$$

Burada $\hat{U}_x$ ve $\hat{U}_y$ sınırdaki yerdeğiştirmenin belirli olan bileşenleridir. Lineer elastik ve homogen, izotrop ortamlardaki bünye bağıntısı indis gösterimiyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{2.4}$$

λ ve μ Lamé değişmezleri olup, bu değişmezler E Elastisite modülü ve ν Poisson oranı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.5.a}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.5.b}$$

Hacim değiştirme oranı olan ε_{kk} ise düzlem şekildeğiştirme hali için aşağıdaki gibidir.

$$e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \tag{2.6}$$

Kartezyen koordinatlardaki şekildeğiştirme – yerdeğiştirme bağıntıları:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \tag{2.7.a}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \tag{2.7.b}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \tag{2.7.c}$$

(2.7) bağıntıları (2.4) bünye bağıntısı ile birlikte (2.1) hareket denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa kartezyen koordinatlarda yerdeğiştirmeler cinsinden Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 U_x = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \tag{2.8.a}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 U_y = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \tag{2.8.b}$$

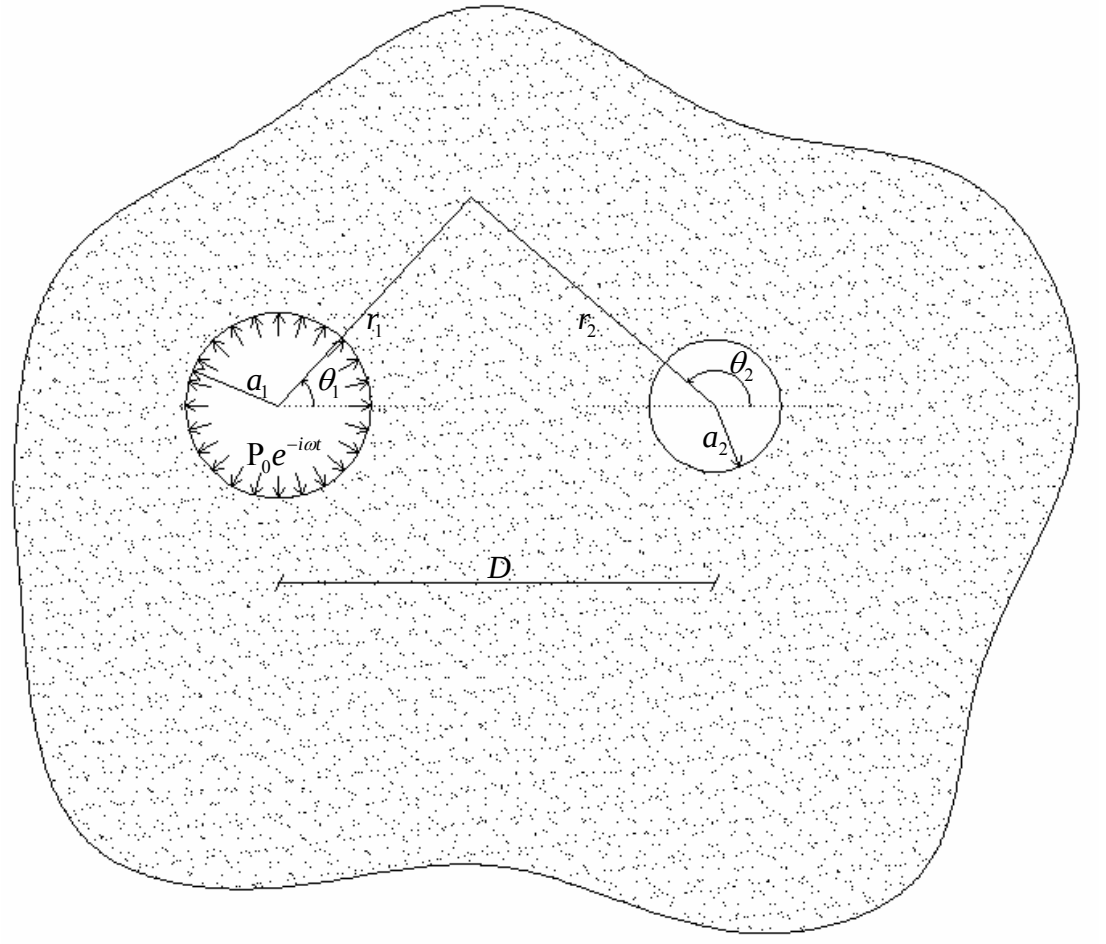
(2.8) Navier denklemlerindeki, ∇^2 kartezyen koordinatlarda Laplasyen olup ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3 ANALİTİK ÇÖZÜM

3.1 Formülasyon Ve Çözüm

Tam sonsuz ortamda, a_1 ve a_2 yarıçaplı, Şekil 3.1' de görüldüğü gibi iki silindirik oyuk göz önüne alalım. z, oyuk ekseni boyunca ortamın geometrisi, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmediği kabul edilirse problem düzlem şekildeğiştirme hali olarak göz önüne alınabilir. Problemin geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması uygundur.



Şekil 3.1: Problemin geometrisi

Yönetici denklemimiz olan Navier denklemi aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla.\vec{U}+\mu\nabla^2\vec{U}=\rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} \quad \textbf{(3.1)}$$

Burada $\vec{U}(r,\theta,t)$ yerdeğiştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu, λ ve μ Lamé değişmezlerini, ∇ Nabla operatörünü, *t'* de zamanı göstermektedir. *r* ve θ kutupsal koordinatlardır.

Sonsuz ortamda bulunan silindirik kabuğu iç yüzeyine p_0 genlik, ω açısal frekans, *t'* de zaman olmak üzere

$$p_i = p_0 e^{-i\omega t} \quad \textbf{(3.2)}$$

şeklinde değişen, harmonik iç basıncın etkidiği düşünülürse, yerdeğiştirme ve gerilme fonksiyonları da 1. mertebe teorisinin kullanılması sonucu aynı şekilde harmonik fonksiyonlarla ifade edilebilir.

$$U_r(r,\theta,t)=u_r(r,\theta)e^{-i\omega t} \quad \textbf{(3.3.a)}$$

$$U_\theta(r,\theta,t)=u_\theta(r,\theta)e^{-i\omega t} \quad \textbf{(3.3.b)}$$

$$\sigma_{rr}(r,\theta,t)=\sigma_{rr}(r,\theta)e^{-i\omega t} \quad \textbf{(3.4.a)}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,t)=\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)e^{-i\omega t} \quad \textbf{(3.4.b)}$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta,t)=\tau_{r\theta}(r,\theta)e^{-i\omega t} \quad \textbf{(3.4.c)}$$

Burada u_r ve u_θ yerdeğiştirme vektörünün, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ ve $\tau_{r\theta}$ gerilme tansörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleridir.

Yerdeğiştirmelere ait (3.3) ifadeleri, (3.1) Navier denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, Navier denklemleri aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla.\vec{u}+\mu\nabla^2\vec{u}+\rho\omega^2\vec{u}=0 \quad \textbf{(3.5)}$$

Burada

$$\vec{u}=u_r\vec{e}_r+u_\theta\vec{e}_\theta \quad \textbf{(3.6)}$$

şeklinde kutupsal koordinatlarda ifade edilebilir.

Helmholtz ayırma teoremi kullanılarak $\vec{u}$ yerdeğiştirme vektörü $\varphi(r,\theta)$ skaler ve $\vec{\psi}(r,\theta)=\psi(r,\theta)\vec{e}_z$ vektörel potansiyel fonksiyonları cinsinden aşağıdaki yapıda yazılabilir.

$$\vec{u}=\vec{\nabla}\varphi+\vec{\nabla}\times(\psi\vec{e}_z) \qquad \textbf{(3.7)}$$

Burada, tek çözüm elde edilebilmesi $\vec{\psi}$ vektörel potansiyelinin diverjansı sıfır olmalıdır, yani:

$$\vec{\nabla}.(\psi\vec{e}_z)=0$$

Potansiyel fonksiyonlarla yazılan yerdeğiştirme vektörüne ait (3.7) ifadesi (3.5) Navier denkleminde yerine yazılırsa bu ayırma işleminin sonunda indirgenmiş dalga denklemi olarak

$$\nabla^2\varphi+k_1^2\varphi=0 \qquad \textbf{(3.8.a)}$$

$$\nabla^2\psi+k_2^2\psi=0 \qquad \textbf{(3.8.b)}$$

denklemleri elde edilmektedir. ∇^2 kutupsal koordinatlarda Laplasyen olup

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

ile ifade edilmektedir. İndirgenmiş dalga denklemindeki

$k_1=\omega/c_1$	Boyuna dalga sayısı,
$k_2=\omega/c_2$	Enine dalga sayısı,
$c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$	Boyuna dalga hızı,
$c_2=\sqrt{\mu/\rho}$	Enine dalga hızı,

olarak tanımlanmaktadır.

Yerdeğiştirme vektörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleri potansiyel fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad \textbf{(3.9.a)}$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad \textbf{(3.9.b)}$$

Gerilme – yerdeğiştirme bağıntılarının kutupsal koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \qquad \textbf{(3.10.a)}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\lambda + 2\mu)\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \qquad \textbf{(3.10.b)}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \qquad \textbf{(3.10.c)}$$

Çarpanlara ayırma yönteminin kullanılmasıyla (3.8) dalga denklemlerinin çözümü Bessel – trigonometrik fonksiyonlar serisi olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(\mathcal{A}_n H_n^{(1)}(k_1 r) + \mathcal{B}_n H_n^{(2)}(k_1 r))\cos n\theta + (\mathcal{C}_n H_n^{(1)}(k_1 r) + \mathcal{D}_n H_n^{(2)}(k_1 r))\sin n\theta\right]$$

(3.11.a)

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(\mathcal{E}_n H_n^{(1)}(k_2 r) + \mathcal{F}_n H_n^{(2)}{}_n(k_2 r))\cos n\theta + (\mathcal{G}_n H_n^{(1)}(k_2 r) + \mathcal{H}_n H_n^{(2)}{}_n(k_2 r))\sin n\theta\right]$$

(3.11.b)

Burada $H_n(x)$ üçüncü nevi Bessel fonksiyonudur ve $J_n(x)$ve $Y_n(x)$ (birinci ve ikinci nevi Bessel fonksiyonları) cinsinden şu şekilde tariflenmiştir. $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$, $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$

$H_n^{(2)}(x)$ fonksiyonu sonsuzda radyasyon koşulu dolayısıyla atılabilir. Bessel fonksiyonlarının indislerinin tam sayı olması nedeniyle bu sonsuz serileri -∞ yerine sıfırdan başlatmak kabildir. Böylece, her iki oyuk için $\varphi(r,\theta)$ ve $\psi(r,\theta)$ fonksiyon serileri,

$$\varphi^{(1)}(r_1,\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\cos n\theta_1 + B_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\sin n\theta_1\right] \qquad \textbf{(3.12.a)}$$

$$\psi^{(1)}(r_1,\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\sin n\theta_1\right] \qquad \textbf{(3.12.b)}$$

$$\varphi^{(2)}(r_2,\theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_1 r_2)\cos n\theta_2 + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_1 r_2)\sin n\theta_2\right] \qquad \textbf{(3.12.c)}$$

$$\psi^{(2)}(r_2,\theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_2 r_2)\cos n\theta_2 + D_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_2 r_2)\sin n\theta_2\right] \qquad \textbf{(3.12.d)}$$

şeklini alır. Burada $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ bilinmeyen değişmezler olup, sınır koşullarının sağlatılmasıyla elde edilecektir.

Bu, (3.12) çözüm fonksiyonlarının (3.9) yerdeğiştirme ifadelerinde yerine yazılmasıyla yerdeğiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir. (1. oyuk için i=1, 2. oyuk için i=2 olacaktır)

$$u_{r_i} = \frac{1}{r_i}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\{C_n^{(i)}[\text{-n}H_n^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta_i) + D_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_i k_2)]\cos(n\theta_i)\}$$
$$+\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\{\{A_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_1) - H_{n+1}^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta_i)\} \qquad \textbf{(3.13.a)}$$
$$+\{B_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_1) - H_{n+1}^{(1)}(r_i k_1)]\sin(n\theta_i)\}\}$$

$$u_{\theta_i} = \frac{1}{r}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\{A_n^{(i)}[\text{-n}H_n^{(1)}(r_i k_1)]\sin(n\theta) + B_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta_i)\}$$
$$-\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\{\{C_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_2) - H_{n+1}^{(1)}(r_i k_2)]\cos(n\theta_i)\} \qquad \textbf{(3.13.b)}$$
$$+\{D_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_2) - H_{n+1}^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta_i)\}\}$$

Yerdeğiştirmelere ait (3.13) bağıntılarını, kutupsal koordinatlardaki (3.10) gerilme – yerdeğiştirme bağıntılarında yerine yazarsak, gerilme bileşenleri,
Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$\sigma_{r_i r_i} = \frac{\lambda}{r_i}\{\frac{1}{r_i}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}[-n^2 H_n^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta) + B_n^{(i)}[-n^2 H_n^{(1)}(r_i k_1)]\sin(n\theta_i)\}$$
$$+\frac{1}{r}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}[-nH_n^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta_i) + D_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_i k_2)\cos(n\theta_i)\}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_1) - H_{n+1}^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta_i)$$
$$+B_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_1) - H_{n+1}^{(1)}(r_i k_1)]\sin(n\theta_i)\}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[-nH_{n-1}^{(1)}(r_i k_2) + nH_{n+1}^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta)$$
$$+D_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[nH_{n-1}^{(1)}(r_i k_2) - nH_{n+1}^{(1)}(r_i k_2)]\cos(n\theta_i)\}\}$$
$$+(\lambda+2\mu)\{\frac{-1}{r_i^2}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}[-nH_n^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta_i) + D_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_i k_2)]\cos(n\theta_i)\}$$
$$+\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}\frac{k_1^{\,2}}{4}[H_{n-2}^{(1)}(r_i k_1) - 2H_n^{(1)}(r_i k_1) + H_{n+2}^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta_i)$$

$$+B_n^{(i)}\frac{k_1^{\,2}}{4}[H_{n-2}^{(1)}(r_ik_1)-2H_n^{(1)}(r_ik_1)+H_{n+2}^{(1)}(r_ik_1)]\sin(n\theta_i)\}$$

$$+\frac{1}{r_i}\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[-nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)+nH_{n+1}^{(1)}(r_ik_2)]\sin(n\theta_i)$$

$$+D_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)-nH_{n+1}^{(1)}(rk_2)]\cos(n\theta_i)\}\}$$

(3.14.a)

$$\sigma_{\theta_i\theta_i}=\frac{\lambda+2\mu}{r_i}\{\frac{1}{r_i}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}[-n^2H_n^{(1)}(r_ik_1)]\cos(n\theta)+B_n^{(i)}[-n^2H_n^{(1)}(r_ik_1)]\sin(n\theta_i)\}$$

$$+\frac{1}{r}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}[-nH_n^{(1)}(r_ik_2)]\sin(n\theta)+D_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_ik_2)\cos(n\theta_i)\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_ik_1)-H_{n+1}^{(1)}(r_ik_1)]\cos(n\theta_i)$$

$$+B_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_ik_1)-H_{n+1}^{(1)}(r_ik_1)]\sin(n\theta_i)\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[-nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)+nH_{n+1}^{(1)}(r_ik_2)]\sin(n\theta_i)$$

$$+D_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)-nH_{n+1}^{(1)}(r_ik_2)]\cos(n\theta_i)\}\}$$

$$+\lambda\{\frac{-1}{r_i^{\,2}}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}[-nH_n^{(1)}(r_ik_2)]\sin(n\theta)+D_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_ik_2)]\cos(n\theta_i)\}$$

$$+\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}\frac{k_1^{\,2}}{4}[H_{n-2}^{(1)}(r_ik_1)-2H_n^{(1)}(r_ik_1)+H_{n+2}^{(1)}(r_ik_1)]\cos(n\theta_i)$$

$$+B_n^{(i)}\frac{k_1^{\,2}}{4}[H_{n-2}^{(1)}(r_ik_1)-2H_n^{(1)}(r_ik_1)+H_{n+2}^{(1)}(r_ik_1)]\sin(n\theta_i)\}$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[-nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)+nH_{n+1}^{(1)}(r_ik_2)]\sin(n\theta_i)$$

$$+D_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)-nH_{n+1}^{(1)}(r_ik_2)]\cos(n\theta_i)\}\}$$

(3.14.b)

$$\tau_{r_i\theta_i}=\frac{\mu}{r_i}\{\frac{-1}{r_i}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}[-nH_n^{(1)}(r_ik_1)]\sin(n\theta)+B_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_ik_1)]\cos(n\theta_i)\}$$

$$+\frac{1}{r}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}[-n^2H_n^{(1)}(r_ik_2)]\cos(n\theta_i)+D_n^{(i)}[-n^2H_n^{(1)}(r_ik_2)\sin(n\theta_i)\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[-nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_1)+nH_{n+1}^{(1)}(r_ik_1)]\sin(n\theta_i)$$

$$+B_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[nH_{n-1}^{(1)}(r_ik_1)-H_{n+1}^{(1)}(r_ik_1)]\cos(n\theta_i)\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_ik_2)-H_{n+1}^{(1)}(r_ik_2)]\cos(n\theta_i)$$

$$+D_n^{(i)}\frac{k_2}{2}[H_{n-1}^{(1)}(r_i k_2)-H_{n+1}^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta_i)\}\}$$

$$+r\{\frac{-1}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}[-nH_n^{(1)}(r_i k_1)]\sin(n\theta_i)+B_n^{(i)}[nH_n^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta_i)\}$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\{A_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[-nH_{n-1}^{(1)}(r_i k_1)+nH_{n+1}^{(1)}(r_i k_1)]\sin(n\theta)$$

$$+B_n^{(i)}\frac{k_1}{2}[nH_{n-1}^{(1)}(r_i k_1)-nH_{n+1}^{(1)}(r_i k_1)]\cos(n\theta_i)\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n^{(i)}\frac{k_2^2}{4}[H_{n-2}^{(1)}(r_i k_2)-2H_n^{(1)}(r_i k_2)+H_{n+2}^{(1)}(r_i k_2)]\cos(n\theta_i)$$

$$+D_n^{(i)}\frac{k_2^2}{4}[H_{n-2}^{(1)}(r_i k_2)-2H_n^{(1)}(r_i k_2)+H_{n+2}^{(1)}(r_i k_2)]\sin(n\theta_i)\}\}$$

(3.14.c)

Potansiyel fonksiyonların koordinat takımları arasındaki dönüşümünde aşağıdaki Graff toplama formülü kullanılır.

$$H_n(k_j r_1)\begin{Bmatrix}\cos(n\theta_1)\\ \sin(n\theta_1)\end{Bmatrix}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2}\Big(H_{n-m}(k_j D)\pm(-1)^m H_{m+n}(k_j D)\Big)J_m(k_j r_2)\begin{Bmatrix}\cos(m\theta_2)\\ \sin(m\theta_2)\end{Bmatrix}$$

(3.15.a)

ve

$$H_n(k_j r_2)\begin{Bmatrix}\cos(n\theta_2)\\ \sin(n\theta_2)\end{Bmatrix}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2}\Big(H_{m-n}(k_j D)\pm(-1)^n H_{m+n}(k_j D)\Big)J_m(k_j r_1)\begin{Bmatrix}\cos(m\theta_1)\\ \sin(m\theta_1)\end{Bmatrix}$$

(3.15.b)

Burada $\varepsilon_m=\begin{Bmatrix}1,\ \text{m=0}\\ 2,\ \text{m=1,2,3,....}\end{Bmatrix}$ olacaktır.

Kutupsal koordinatlarda hesaplamış olduğumuz yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerini, kartezyen koordinatlardaki bileşenleri cinsinden hesaplayabilmek için aşağıdaki dönüşüm formülleri kullanılmaktadır.

$$u_x=u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta \qquad \textbf{(3.16.a)}$$

$$u_y=u_r\sin\theta+u_\theta\cos\theta \qquad \textbf{(3.16.b)}$$

$$\sigma_{xx}=\frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos 2\theta+\tau_{r\theta}\sin 2\theta \qquad \textbf{(3.17.a)}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}}{2}-\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\cos 2\theta-\tau_{r\theta}\sin 2\theta \qquad \textbf{(3.17.b)}$$

$$\tau_{xy}=\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{2}\sin 2\theta-\tau_{r\theta}\cos 2\theta \qquad \textbf{(3.17.c)}$$

3.2 SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

3.2.1 OYUK İÇ YÜZEYLERİNDEKİ SINIR KOŞULLARI

Birinci oyuk iç yüzeyinde $\sigma_{r_1r_1}$ radyal gerilmesi yük fonksiyonuna, $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi de θ' nın her değeri için sıfıra eşit olmalıdır.

$$\sigma_{r_1r_1}\Big|_{r_1=a_1} = -p_i \qquad \tau_{r_1\theta_1}\Big|_{r_1=a_1} = 0 \tag{3.18}$$

İkinci oyuk iç yüzeyinde $\sigma_{r_1r_1}$ radyal gerilmesi ve $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi θ' nın her değeri için sıfıra eşit olmalıdır.

$$\sigma_{r_2r_2}\Big|_{r_2=a_2} = 0 \qquad \tau_{r_2\theta_2}\Big|_{r_2=a_2} = 0 \tag{3.19}$$

3.2.1.1 BİRİNCİ OYUK İÇ YÜZEYLERİNDEKİ SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

Gerilme ve şekil değiştirme ifadelerinde kullanılacak φ ve ψ potansiyelleri, birinci oyuktan gelen $\varphi^{(1)}\psi^{(1)}$ potansiyelleri ile ikinci oyuktan gelen $\varphi^{(2)}\psi^{(2)}$ potansiyellerinin toplamıdır.

$$\varphi = \varphi^{(1)}(r_1,\theta_1) + \varphi^{(2)}(r_2,\theta_2) \tag{3.20.a}$$

$$\psi = \psi^{(1)}(r_1,\theta_1) + \psi^{(2)}(r_2,\theta_2) \tag{3.20.b}$$

(3.9) ifadeleri, (3.10) ifadelerinde yerine yazıldığında, birinci oyuk için potansiyeller cinsinden gerilmeler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{rr} = \left(\lambda+2\mu\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial r_1\partial\theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta_1}\right) + \frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial\psi}{\partial\theta_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r_1\partial\theta_1}\right) \tag{3.21.a}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial r_1\partial\theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{r_1}\left(\lambda+2\mu\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial\psi}{\partial\theta_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r_1\partial\theta_1}\right) \tag{3.21.b}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r_1}\left(r_1\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r_1\partial\theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r_1^2}\right) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} + \frac{\partial\psi}{\partial r_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r_1\partial\theta_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_1^2}\right) \tag{3.21.c}$$

(3.20) ifadeleri (3.21) ifadelerinde yerine yazılıp bazı düzenlemeler yapılırsa, σ_{rr} ve $\tau_{r\theta}$ gerilmeleri, potansiyeller cinsinden şu şekilde yazılabilir.

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)(\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r_1^2}) + \frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \theta_1^2} \right) +$$
$$(\lambda + 2\mu)(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta_1}) + \frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} \right) +$$
$$(\lambda + 2\mu)(\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial r_1^2}) + \frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial \theta_1^2} \right) +$$
$$(\lambda + 2\mu)(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \theta_1}) + \frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \theta_1} + -\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} \right)$$

(3.22.a)

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r_1}\left(r_1(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta_1}) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} \right) +$$
$$\frac{\mu}{r_1}\left(r_1(-\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r_1^2}) + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \theta_1^2} \right) +$$
$$\frac{\mu}{r_1}\left(r_1(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} - \frac{1}{r_1^2}\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \theta_1}) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial r_1 \partial \theta_1} \right) +$$
$$\frac{\mu}{r_1}\left(r_1(-\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial r_1^2}) + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial \theta_1^2} \right)$$

(3.22.b)

(3.22) ifadelerinde kullanılacak $\varphi^{(1)}$ ve $\psi^{(1)}$ potansiyelleri, (3.12.a) ve (3.12.b)'deki gibidir. $\varphi^{(2)}$ ve $\psi^{(2)}$ potansiyelleri ise, (3.15.b) de verilen Graff toplama formülünün (3.12.c) ve (3.12.d)'de yerine yerleştirilmesi ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\cos n\theta_1 + B_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\sin n\theta_1 \right] \quad \textbf{(3.23.a)}$$

$$\psi^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\sin n\theta_1 \right] \quad \textbf{(3. 23.b)}$$

$$\varphi^{(2)}(r_2, \theta_2) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty}[A_n^{(2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D) \pm (-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D) \right) J_m(k_1 r_1)\cos(m\theta_1)] \right.$$
$$\left. +[B_n^{(2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D) \pm (-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D) \right) J_m(k_1 r_1)\sin(m\theta_1)] \right\} \quad \textbf{(3. 23.c)}$$

$$\psi^{(2)}(r_2, \theta_2) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty}[C_n^{(2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2 D) \pm (-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_2 D) \right) J_m(k_2 r_1)\cos(m\theta_1)] \right.$$
$$\left. +[D_n^{(2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2 D) \pm (-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_2 D) \right) J_m(k_2 r_1)\sin(m\theta_1)] \right\}$$

(3. 23.d)

(3.23) ifadeleri (3.22.a) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra n ve m değerlerini sonsuza götürmek yerine sonlu bir U sayısında kesersek, bilinmeyen katsayılar cinsinden gerilme ifadesi şu şekilde elde edilir.

$$\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\left[\sum_{n=0}^{U} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\cos n\theta_1 + B_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\sin n\theta_1\right]\right) +$$

$$\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\left[\sum_{n=0}^{U} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\cos n\theta_1 + B_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\sin n\theta_1\right] +\right.$$

$$\left.\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\left[\sum_{n=0}^{U} A_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\cos n\theta_1 + B_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1)\sin n\theta_1\right]\right) +$$

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial\theta_1}\left[\sum_{n=0}^{U} C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\sin n\theta_1\right]\right.$$

$$-\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\sum_{n=0}^{U} C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\sin n\theta_1\right] +$$

$$\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left[\sum_{n=0}^{U} C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\sin n\theta_1\right]\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial\theta_1}\right)\left[\sum_{n=0}^{U} C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1)\sin n\theta_1\right] +\right.$$

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2}\left\{\sum_{n=0}^{U}[A_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D)\right)J_m(k_1 r_1)\cos(m\theta_1)] +\right.\right.$$

$$\left.\left.+[B_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D)\right)J_m(k_1 r_1)\sin(m\theta_1)]\right\}\right)$$

$$+\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\left\{\sum_{n=0}^{U}[A_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D)\right)J_m(k_1 r_1)\cos(m\theta_1)] +\right.\right.$$

$$\left.\left.+[B_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D)\right)J_m(k_1 r_1)\sin(m\theta_1)]\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}\left\{\sum_{n=0}^{U}[A_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D)\right)J_m(k_1 r_1)\cos(m\theta_1)] +\right.$$

$$\left.\left.+[B_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_1 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_1 D)\right)J_m(k_1 r_1)\sin(m\theta_1)]\right\}\right)$$

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial\theta_1}\left\{\sum_{n=0}^{U}[C_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_2 D)\right)J_m(k_2 r_1)\cos(m\theta_1)]\right.\right.$$

$$\left.\left.+[D_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_2 D)\right)J_m(k_2 r_1)\sin(m\theta_1)]\right\}\right.$$

$$-\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left\{\sum_{n=0}^{U}[C_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2 D)\pm(-1)^n H_{m+n}^{(1)}(k_2 D)\right)J_m(k_2 r_1)\cos(m\theta_1)]\right.$$

$$+[D_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2D)\pm(-1)^nH_{m+n}^{(1)}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1)\sin(m\theta_1)]\Big\}\Big)$$

$$+\frac{\lambda}{r_1}\Big(\frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big\{\sum_{n=0}^{U}[C_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2D)\pm(-1)^nH_{m+n}^{(1)}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1)\cos(m\theta_1)]$$

$$+[D_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2D)\pm(-1)^nH_{m+n}^{(1)}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1)\sin(m\theta_1)]\Big\}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial\theta_1}\Big\{\sum_{n=0}^{U}[C_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2D)\pm(-1)^nH_{m+n}^{(1)}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1)\cos(m\theta_1)]$$

$$+[D_n^{(2)}\sum_{m=0}^{U}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}^{(1)}(k_2D)\pm(-1)^nH_{m+n}^{(1)}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1)\sin(m\theta_1)]\Big\}\Big) \qquad \textbf{(3.24)}$$

(3.24)'deki ifadeyi sin (u θ_1) (u=1,2,…U) ve cos (u θ_1) (u=0,1,2…U) parantezlerine alabiliriz. sin (u θ_1)'lı terimlere K1S(u) ve cos (u θ_1)'lı terimlere K1C(u) dersek, gerilme fonksiyonunun r_1=a için değerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\left[\sigma_{rr}\right]_{r_1=a_1}=\left[\sum_{u=0}^{U}K1C(u)\ \cos(u\ \theta_1)\right]+\left[\sum_{u=1}^{U}K1S(u)\ \sin(u\ \theta_1)\right] \qquad \textbf{(3.25)}$$

Sınır koşullarına göre (3.24) ifadesinin r_1 = a_1 için değeri $-P_i$ olmalıdır. Bu eşitliğin her θ_1 değeri için sağlanabilmesi için u'nun sıfırdan büyük her değeri için K1S(u) ve K1C(u) sıfıra eşit olmalı, u nun sıfır değeri için K1C(u=0) $-P_i$ 'ye eşit olmalıdır.

Buradan 2U+1 adet denklem elde edilir.

K1C ve K1S katsayılarını bulmak için bazı yeni fonksiyonlar tanımlayalım.

$$\phi C_1=A_n^{(1)}H_n^{(1)}(rk_1) \qquad \textbf{(3.26.a)}$$

$$\phi S_1=B_n^{(1)}H_n^{(1)}(rk_1) \qquad \textbf{(3.26.b)}$$

$$\phi C_2=A_n^{(2)}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}(k_1D)+(-1)^nH_{m+n}(k_1D)\right)J_m(k_1r_1) \qquad \textbf{(3.26.c)}$$

$$\phi S_2=B_n^{(2)}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}(k_1D)-(-1)^nH_{m+n}(k_1D)\right)J_m(k_1r_1) \qquad \textbf{(3.26.d)}$$

$$\psi C_1=C_n^{(1)}H_n^{(1)}(rk_2) \qquad \textbf{(3.26.e)}$$

$$\psi S_1=D_n^{(1)}H_n^{(1)}(rk_2) \qquad \textbf{(3.26.f)}$$

$$\psi C_2=C_n^{(2)}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}(k_2D)+(-1)^nH_{m+n}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1) \qquad \textbf{(3.26.g)}$$

$$\psi S_2=D_n^{(2)}\frac{\varepsilon_m}{2}\left(H_{m-n}(k_2D)-(-1)^nH_{m+n}(k_2D)\right)J_m(k_2r_1) \qquad \textbf{(3.26.f)}$$

(3.26)'da tanımlanan yeni fonksiyonlar cinsinden potansiyeller de şu şekilde olacaktır.

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{U} \left(\phi C_1 \cos(n\theta_1) + \phi S_1 \sin(n\theta_1) \right) \quad \textbf{(3.27.a)}$$

$$\phi^{(2)} = \sum_{n=0}^{U} \sum_{m=0}^{U} \left(\phi C_2 \cos(m\theta_1) + \phi S_2 \sin(m\theta_1) \right) \quad \textbf{(3.27.b)}$$

$$\psi^{(1)} = \sum_{n=0}^{U} \left(\psi C_1 \cos(n\theta_1) + \psi S_1 \sin(n\theta_1) \right) \quad \textbf{(3.27.c)}$$

$$\psi^{(2)} = \sum_{n=0}^{U} \sum_{m=0}^{U} \left(\psi C_2 \cos(m\theta_1) + \psi S_2 \sin(m\theta_1) \right) \quad \textbf{(3.27.d)}$$

K1S(u) katsayısını oluşturan terimleri (3.24) ifadesinin içinde aradığımızda, bu terimlerin, (3.22.a)'da θ_1'e göre türevi olmayan yada 2. türevi olan potansiyellerin sinüs fonsiyonu içeren kısımlarından, ve θ_1'e göre 1. Türevi olan potansiyellerin cosinüs fonksiyonu içeren kısımlarından geldiği görülür. (3.27) ifadelerine bakıldığında, $\phi^{(1)}$ ve $\psi^{(1)}$ potansiyellerinin sadece n üzerine toplamı olduğunu, $\phi^{(2)}$ ve $\psi^{(2)}$ potansiyellerinin ise hem n hem de m üzerinde toplamı olduğunu görüyoruz. Bu yüzden (3.22.a)'da $\phi^{(1)}$ ve $\psi^{(1)}$ içeren bölümlerde n=u olduğu durumlardan ve $\phi^{(2)}$ ve $\psi^{(2)}$ içeren bölümlerde de m=u için her n değeri için K1S(u)'ya bir katkı gelecektir. O halde K1S(u) katsayısını (3.27)'de tanımladığımız yeni fonksiyonlar cinsinden şu şekilde ifade etmemiz mümkündür.

$$K1S(u) = \left[\left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi S_1}{\partial r_1^2} + \frac{\lambda}{r_1} \left(\frac{\partial \phi S_1}{\partial r_1} + \frac{-n^2 \phi S_1}{r_1} \right) \right) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{-n\psi C_1}{r_1 \partial r_1} + \frac{n\psi C_1}{r_1^2} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{r_1} \left(\frac{-n\psi C_1}{r_1} + \frac{n\partial \psi C_1}{\partial r_1} \right) \right]_{n=u, r_1=a_1} + \left[\sum_{n=0}^{U} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi S_2}{\partial r_1^2} + \frac{\lambda}{r_1} \left(\frac{\partial \phi S_2}{\partial r_1} + \frac{-m^2 \phi S_2}{r_1} \right) \right.$$
$$\left. + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{-m\partial \psi C_2}{r_1 \partial r_1} + \frac{m\psi C_2}{r_1^2} \right) + \frac{\lambda}{r_1} \left(\frac{-m\psi C_2}{r_1} + \frac{m\partial \psi C_2}{\partial r_1} \right) \right]_{m=u, r_1=a_1}$$

(3.28.a)

K1C(u)'yu oluşturan terimler de benzer şekilde, θ_1'e göre türevi olmayan yada 2. türevi olan potansiyellerin cosinüs'lü kısmından ve θ_1'e göre 1. türevi olan potansiyellerin de sinüs'lü kısmından gelmektedir.

$$K1C(u)=\left[\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi C_1}{\partial r_1^2}+\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial\phi C_1}{\partial r_1}+\frac{-n^2\phi C_1}{r_1}\right)\right)+(\lambda+2\mu)\left(\frac{n\psi S_1}{r_1\partial r_1}+\frac{-n\psi S_1}{r_1^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{-n\psi C_1}{r_1}+\frac{n\partial\psi C_1}{\partial r_1}\right)\right]_{n=u,r_1=a_1}+\left[\sum_{n=0}^{U}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi C_2}{\partial r_1^2}+\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{\partial\phi C_2}{\partial r_1}+\frac{-m^2\phi C_2}{r_1}\right)\right.$$
$$\left.+(\lambda+2\mu)\left(\frac{m\partial\psi S_2}{r_1\partial r_1}+\frac{-m\psi S_2}{r_1^2}\right)+\frac{\lambda}{r_1}\left(\frac{m\psi S_2}{r_1}+\frac{-m\partial\psi S_2}{\partial r_1}\right)\right]_{m=u,r_1=a_1}$$

(3.28.b)

Birinci oyuk yüzeyindeki $\tau_{r\theta}$ gerilmesi, tanımlanmış sınır şartlarına göre sıfırdır. $\tau_{r\theta}$ gerilmesini, σ_{rr} gerilmesinin hesabındakine benzer şekilde aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\left[\tau_{r\theta}\right]_{r_1=a_1}=\left[\sum_{u=0}^{U}K2C(u)\ \cos(u\ \theta_1)\right]+\left[\sum_{u=1}^{U}K2S(u)\ \sin(u\ \theta_1)\right] \qquad \textbf{(3.29)}$$

Buradaki K2S ve K2C katsayıları da gene benzer şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$K2S(u)=\left[\frac{\mu}{r_1}\left(r_1\left(\frac{-n\partial\phi C_1}{r_1\partial r_1}+\frac{n\phi C_1}{r_1^2}\right)+\frac{n\phi C_1}{r_1}+\frac{-n\partial\phi C1}{\partial r_1}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{-r_1\partial^2\psi S_1}{\partial r_1^2}+\frac{\partial\psi S_1}{\partial r_1}+\frac{-n^2\psi S_1}{r_1}\right)\right]_{n=u,r_1=a_1}$$
$$+\left[\sum_{n=0}^{U}\frac{\mu}{r_1}\left(r_1\left(\frac{-m\partial\phi C_2}{r_1\partial r_1}+\frac{m\phi C_2}{r_1^2}\right)+\frac{m\phi C_2}{r_1}+\frac{-m\partial\phi C_2}{\partial r_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{-r_1\partial^2\psi S_2}{\partial r_1^2}+\frac{\partial\psi S_2}{\partial r_1}+\frac{-m^2\psi S_2}{r_1}\right)\right]_{m=u,r_1=a_1}$$

(3.30.a)

$$K2C(u)=\left[\frac{\mu}{r_1}\left(r_1\left(\frac{n\partial\phi S_1}{r_1\partial r_1}+\frac{-n\phi S_1}{r_1^2}\right)+\frac{-n\phi S_1}{r_1}+\frac{n\partial\phi S1}{\partial r_1}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{-r_1\partial^2\psi C_1}{\partial r_1^2}+\frac{\partial\psi C_1}{\partial r_1}+\frac{-n^2\psi C_1}{r_1}\right)\right]_{n=u,r_1=a_1}+$$
$$\left[\sum_{n=0}^{U}\frac{\mu}{r_1}\left(r_1\left(\frac{m\partial\phi S_2}{r_1\partial r_1}+\frac{-m\phi S_2}{r_1^2}\right)+\frac{-m\phi S_2}{r_1}+\frac{m\partial\phi S_2}{\partial r_1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{r_1}\left(\frac{-r_1\partial^2\psi C_2}{\partial r_1^2}+\frac{\partial\psi C_2}{\partial r_1}+\frac{-m^2\psi C_2}{r_1}\right)\right]_{m=u,r_1=a_1}$$

(3.30.b)

3.2.1.2 İkinci Oyuk İç Yüzeylerindeki Sınır Koşullarının Sağlatılması

İkinci oyuk iç yüzeyindeki sınır koşullarının hesabında kullanacağımız potansiyellerden $\phi^{(2)}$ ve $\psi^{(2)}$ (3.12.c) ve (3.12.d)'deki gibidir. r_1 ve θ_1'e bağlı $\phi^{(1)}$ ve $\psi^{(1)}$ potansiyellerini ise r_2 ve θ_2'ye bağlı hale getirmek için (3.15.a)'da verilen Graff toplama fonksiyonu kullanılır. (3.26)'da tanımladığımız gibi yeni fonksiyonlar tanımlayalım.

$$\phi C_1 = A_n^{(1)} \frac{\varepsilon_m}{2}\Big(H_{n-m}(k_1 D) + (-1)^m H_{m+n}(k_1 D)\Big) J_m(k_1 r_2) \quad \textbf{(3.31.a)}$$

$$\phi S_1 = B_n^{(1)} \frac{\varepsilon_m}{2}\Big(H_{n-m}(k_1 D) - (-1)^m H_{m+n}(k_1 D)\Big) J_m(k_1 r_2) \quad \textbf{(3.31.b)}$$

$$\phi C_2 = A_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_1 r_2) \quad \textbf{(3.31.c)}$$

$$\phi S_2 = B_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_1 r_2) \quad \textbf{(3.31.d)}$$

$$\psi C_1 = C_n^{(1)} \frac{\varepsilon_m}{2}\Big(H_{n-m}(k_2 D) + (-1)^m H_{m+n}(k_2 D)\Big) J_m(k_2 r_2) \quad \textbf{(3.31.e)}$$

$$\psi S_1 = D_n^{(1)} \frac{\varepsilon_m}{2}\Big(H_{n-m}(k_2 D) - (-1)^m H_{m+n}(k_2 D)\Big) J_m(k_2 r_2) \quad \textbf{(3.31.f)}$$

$$\psi C_2 = C_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_2 r_2) \quad \textbf{(3.31.g)}$$

$$\psi S_2 = D_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_2 r_2) \quad \textbf{(3.31.f)}$$

Bu yeni fonksiyonlar cinsinden potansiyeller de şu şekilde olacaktır.

$$\phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{U}\sum_{m=0}^{U}\Big(\phi C_1 \cos(m\theta_1) + \phi S_1 \sin(m\theta_1)\Big) \quad \textbf{(3.32.a)}$$

$$\phi^{(2)} = \sum_{n=0}^{U}\Big(\phi C_2 \cos(n\theta_1) + \phi S_2 \sin(n\theta_1)\Big) \quad \textbf{(3.32.b)}$$

$$\psi^{(1)} = \sum_{n=0}^{U}\sum_{m=0}^{U}\Big(\psi C_1 \cos(m\theta_1) + \psi S_1 \sin(m\theta_1)\Big) \quad \textbf{(3.32.c)}$$

$$\psi^{(2)} = \sum_{n=0}^{U}\Big(\psi C_2 \cos(n\theta_1) + \psi S_2 \sin(n\theta_1)\Big) \quad \textbf{(3.32.d)}$$

İkinci oyukta σ_{rr} fonksiyonunun oyuk yüzeyindeki değerini şu şekilde gösterirsek:

$$\left[\sigma_{rr}\right]_{r_2=b} = \left[\sum_{u=0}^{U} K3C(u)\ \cos(u\ \theta_2)\right] + \left[\sum_{u=1}^{U} K3S(u)\ \sin(u\ \theta_2)\right] = 0 \quad \textbf{(3.33)}$$

K3S ve K3C fonksiyonları aşağıdaki gibi olacaktır

$$K3S(u)=\left[\sum_{n=0}^{U}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi S_1}{\partial r_2^2}+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{\partial\phi S_1}{\partial r_2}+\frac{-m^2\phi S_1}{r_2}\right)\right)+(\lambda+2\mu)\left(\frac{-m\psi C_1}{r_2\partial r_2}+\frac{m\psi C_1}{r_2^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{-m\psi C_1}{r_2}+\frac{m\partial\psi C_1}{\partial r_2}\right)\right]_{m=u,r_2=a_2}+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi S_2}{\partial r_2^2}+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{\partial\phi S_2}{\partial r_2}+\frac{-n^2\phi S_2}{r_2}\right)\right.$$
$$\left.+(\lambda+2\mu)\left(\frac{-n\partial\psi C_2}{r_2\partial r_2}+\frac{n\psi C_2}{r_2^2}\right)+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{-n\psi C_2}{r_2}+\frac{n\partial\psi C_2}{\partial r_2}\right)\right]_{n=u,r_2=a_2}$$

(3.34.a)

$$K3C(u)=\left[\sum_{n=0}^{U}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi C_1}{\partial r_2^2}+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{\partial\phi C_1}{\partial r_2}+\frac{-m^2\phi C_1}{r_2}\right)\right)+(\lambda+2\mu)\left(\frac{m\psi S_1}{r_2\partial r_2}+\frac{-m\psi S_1}{r_2^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{m\psi S_1}{r_2}+\frac{-m\partial\psi S_1}{\partial r_2}\right)\right]_{m=u,r_2=a_2}+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\phi C_2}{\partial r_2^2}+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{\partial\phi C_2}{\partial r_2}+\frac{-n^2\phi C_2}{r_2}\right)\right.$$
$$\left.+(\lambda+2\mu)\left(\frac{n\partial\psi S_2}{r_2\partial r_2}+\frac{-n\psi S_2}{r_2^2}\right)+\frac{\lambda}{r_2}\left(\frac{n\psi S_2}{r_2}+\frac{-n\partial\psi S_2}{\partial r_2}\right)\right]_{n=u,r_2=a_2}$$

(3.34.b)

$\tau_{r\theta}$ gerilme fonksiyonunun ikinci oyuk yüzeyinde değerini de aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\left[\tau_{r\theta}\right]_{r_2=b}=\left[\sum_{u=0}^{U}K4C(u)\ \cos(u\ \theta_2)\right]+\left[\sum_{u=1}^{U}K4S(u)\ \sin(u\ \theta_2)\right] \qquad \textbf{(3.35)}$$

Buradaki K4S ve K4C fonksiyonları şöyle olacaktır.

$$K4S(u)=\left[\sum_{n=0}^{U}\frac{\mu}{r_2}\left(r_2\left(\frac{-m\partial\phi C_1}{r_2\partial r_2}+\frac{m\phi C_1}{r_2^2}\right)+\frac{m\phi C_1}{r_2}+\frac{-m\partial\phi C1}{\partial r_2}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\mu}{r_2}\left(\frac{-r_2\partial^2\psi S_1}{\partial r_2^2}+\frac{\partial\psi S_1}{\partial r_2}+\frac{-m^2\psi S_1}{r_2}\right)\right]_{m=u,r_2=a_2}+$$
$$\left[\frac{\mu}{r_2}\left(r_2\left(\frac{-n\partial\phi C_2}{r_2\partial r_2}+\frac{n\phi C_2}{r_2^2}\right)+\frac{n\phi C_2}{r_2}+\frac{-n\partial\phi C_2}{\partial r_2}\right)+\frac{\mu}{r_2}\left(\frac{-r_2\partial^2\psi S_2}{\partial r_2^2}+\frac{\partial\psi S_2}{\partial r_2}+\frac{-n^2\psi S_2}{r_2}\right)\right]_{n=u,r_2=a_2}$$

(3.36.a)

$$K4C(u)=\left[\sum_{n=0}^{U}\frac{\mu}{r_2}\left(r_2\left(\frac{m\partial\phi S_1}{r_2\partial r_2}+\frac{-mS_1}{r_2^2}\right)+\frac{-m\phi S_1}{r_2}+\frac{m\partial\phi S1}{\partial r_2}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\mu}{r_2}\left(\frac{-r_2\partial^2\psi C_1}{\partial r_2^2}+\frac{\partial\psi C_1}{\partial r_2}+\frac{-m^2\psi C_1}{r_2}\right)\right]_{m=u,r_2=a_2}+$$
$$\left[\frac{\mu}{r_2}\left(r_2\left(\frac{n\partial\phi S_2}{r_2\partial r_2}+\frac{-n\phi S_2}{r_2^2}\right)+\frac{-n\phi S_2}{r_2}+\frac{n\partial\phi S_2}{\partial r_2}\right)+\frac{\mu}{r_2}\left(\frac{-r_2\partial^2\psi C_2}{\partial r_2^2}+\frac{\partial\psi C_2}{\partial r_2}+\frac{-n^2\psi C_2}{r_2}\right)\right]_{n=u,r_2=a_2}$$

(3.36.b)

K1S(u), K1C(u), K2S(u), K2C(u), K3S(u), K3C(u), K4S(u) ve K4C(u) fonksiyonlarını açarsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$K1S(u)=\frac{(\lambda+2\mu)}{4}B_u^{(1)}k_1^2\left(H_{u-2}^{(1)}(a_1k_1)-2H_u^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+2}^{(1)}(a_1k_1)\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_1}B_u^{(1)}\left(-\frac{u^2H_u^{(1)}(a_1k_1)}{a_1}+\frac{k_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_1)\right)+$$
$$(\lambda+2\mu)uC_u^{(1)}\left(\frac{H_u^{(1)}(a_1k_2)}{a_1^{\,2}}-\frac{k_2(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_2)}{2a_1}\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_1}C_u^{(1)}\left(\frac{-uH_u^{(1)}(a_1k_2)}{a_1}+\frac{uk_2}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_2)\right)+$$
$$\left[\sum_{n=1}^{U}\frac{(\lambda+2\mu)}{4}B_n^{(2)}k_1\varepsilon_u\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left.\left(\frac{J_{u-2}(a_1k_1)-2J_u(a_1k_1)-J_{u+2}(a_1k_1)}{2}\right)+\right.$$
$$\frac{\lambda}{a}B_n^{(2)}\varepsilon_u\left(\frac{-u^2}{2a_1}J_u(a_1k_1)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{J_{u-1}(a_1k_1)-J_{u+1}(a_1k_1)}{4}(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)+$$
$$(\lambda+2\mu)C_n^{(2)}\varepsilon_u\left(\frac{uJ_u(a_1k_2)}{2a_1^{\,2}}\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{uk_2}{4a_1}\left(J_{u-1}(a_1k_2)-J_{u+1}(a_1k_2)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a}C_n^{(2)}\varepsilon_u\left(-\frac{u}{2a_1}J_u(a_1k_2)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^n(H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{uk_2}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_2)-J_{u+1}(a_1k_2)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)\right]$$

(3.37.a)

$$K1C(u)=\frac{(\lambda+2\mu)}{4}A_u^{(1)}k_1^2\left(H_{u-2}^{(1)}(a_1k_1)-2H_u^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+2}^{(1)}(a_1k_1)\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_1}A_u^{(1)}\left(-\frac{u^2H_u^{(1)}(a_1k_1)}{a_1}+\frac{k_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_1)\right)+$$
$$(\lambda+2\mu)uD_u^{(1)}\left(\frac{-H_u^{(1)}(ak_2)}{a_1^{\,2}}+\frac{k_2(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_2)}{2a_1}\right)$$
$$\frac{\lambda}{a_1}D_u^{(1)}\left(\frac{uH_u^{(1)}(a_1k_2)}{a_1}-\frac{uk_2}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_2)\right)+$$
$$\left[\sum_{n=1}^{U}\frac{(\lambda+2\mu)}{4}A_n^{(2)}k_1\varepsilon_u\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left(\frac{J_{u-2}(a_1k_1)-2J_u(a_1k_1)-J_{u+2}(a_1k_1)}{2}\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_1}A_n^{(2)}\varepsilon_u\left(\frac{-u^2}{2a_1}J_u(a_1k_1)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{J_{u-1}(a_1k_1)-J_{u+1}(a_1k_1)}{4}\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right)+$$
$$(\lambda+2\mu)D_n^{(2)}\varepsilon_u\left(\frac{-uJ_u(ak_2)}{2a_1^{\,2}}\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{uk_2}{4a_1}\left(J_{u-1}(a_1k_2)-J_{u+1}(a_1k_2)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)$$
$$\frac{\lambda}{a_1}D_n^{(2)}\varepsilon_u\left(-\frac{u}{2a_1}J_u(a_1k_2)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^n(H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{uk_2}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_2)-J_{u+1}(a_1k_2)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^nH_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)\right]$$

(3.37.b)

$$K2S(u)=\frac{\mu}{a_1}A_u^{(1)}\left(\frac{u}{a_1}H_u^{(1)}(a_1k_1)-\frac{uk_1}{2}\left(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_1)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{u}{a_1}H_u^{(1)}(a_1k_1)-\frac{uk_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_1)\right)+$$
$$\frac{\mu}{a_1}D_u^{(1)}\left(\frac{-u^2}{a_1}H_u^{(1)}(a_1k_2)+\frac{k_2}{2}\left(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_2)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{a_1k_2^2}{4}\left(H_{u-2}^{(1)}(a_1k_2)-2H_u^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+2}^{(1)}(a_1k_2)\right)\right)+$$

$$\left[\sum_{n=1}^{U}\frac{\mu}{a_1}\left[A_n^{(2)}\varepsilon_u\left(\frac{uJ_u(a_1k_1)}{2a_1}\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.\right.\right.$$
$$-\frac{uk_1}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_1)-J_{u+1}(a_1k_1)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)$$
$$\frac{u}{2a_1}J_u(a_1k_1)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)$$
$$\left.-\frac{uk_1}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_1)-J_{u+1}(a_1k_1)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right)+$$
$$\frac{\mu}{a_1}D_n^{(2)}\varepsilon_u\left(-\frac{u^2}{2a_1}J_u(a_1k_2)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$+\frac{k_2}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_2)-J_{u+1}(a_1k_2)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)$$
$$\left.\left.-\frac{a_1k_2^2}{8}\left(H_{u-n}(Dk_2)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\left(J_{u-2}(a_1k_2)-2J_u(a_1k_2)-J_{u+2}(a_1k_2)\right)\right)\right]$$

(3.37.c)

$$K2C(u)=\frac{\mu}{a_1}B_u^{(1)}\left(\frac{-u}{a_1}H_u^{(1)}(a_1k_1)+\frac{uk_1}{2}\left(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_1)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{u}{a_1}H_u^{(1)}(a_1k_1)+\frac{uk_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_1)\right)+$$
$$\frac{\mu}{a_1}C_u^{(1)}\left(\frac{-u^2}{a_1}H_u^{(1)}(a_1k_2)+\frac{k_2}{2}\left(H_{u-1}^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_1k_2)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{a_1k_2^2}{4}\left(H_{u-2}^{(1)}(a_1k_2)-2H_u^{(1)}(a_1k_2)-H_{u+2}^{(1)}(a_1k_2)\right)\right)+$$
$$\left[\sum_{n=0}^{U}\frac{\mu}{a_1}B_n^{(2)}\varepsilon_u\left(-\frac{uJ_u(a_1k_1)}{2a_1}\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.\right.$$
$$+\frac{uk_1}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_1)-J_{u+1}(a_1k_1)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)$$
$$-\frac{u}{2a_1}J_u(a_1k_1)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)$$
$$\left.+\frac{uk_1}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_1)-J_{u+1}(a_1k_1)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right)+$$
$$\frac{\mu}{a_1}C_n^{(2)}\varepsilon_u\left(-\frac{u^2}{2a_1}J_u(a_1k_2)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$+\frac{k_2}{4}\left(J_{u-1}(a_1k_2)-J_{u+1}(a_1k_2)\right)\left(H_{u-n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)$$
$$\left.\left.-\frac{a_1k_2^2}{8}\left(H_{u-n}(Dk_2)+(-1)^n H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\left(J_{u-2}(a_1k_2)-2J_u(a_1k_2)-J_{u+2}(a_1k_2)\right)\right)\right]$$

(3.37.d)

$$K3S(u)=\left[\sum_{n=1}^{U}\frac{(\lambda+2\mu)}{4}B_n^{(1)}k_1\varepsilon_u\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left(\frac{J_{u-2}(a_2k_1)-2J_u(a_2k_1)-J_{u+2}(a_2k_1)}{2}\right)$$
$$\frac{\lambda}{a_2}B_n^{(1)}\varepsilon_u\left(\frac{-u^2}{2a_2}J_u(a_2k_1)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{J_{u-1}(a_2k_1)-J_{u+1}(a_2k_1)}{4}k_1\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right)+$$
$$(\lambda+2\mu)C_n^{(1)}\varepsilon_u\left(\frac{uJ_u(a_2k_2)}{2a_2{}^2}\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{uk_2}{4a_2}\left(J_{u-1}(a_2k_2)-J_{u+1}(a_2k_2)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_2}C_n^{(1)}\varepsilon_u\left(-\frac{u}{2a_2}J_u(a_2k_2)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^u(H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{uk_2}{4}\left(J_{u-1}(a_2k_2)-J_{u+1}(a_2k_2)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)\right]+$$
$$\frac{(\lambda+2\mu)}{4}B_u^{(2)}k_1^2\left(H_{u-2}^{(1)}(a_2k_1)-2H_u^{(1)}(a_2k_1)-H_{u+2}^{(1)}(a_2k_1)\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_2}B_u^{(2)}\left(-\frac{u^2H_u^{(1)}(a_2k_1)}{a_2}+\frac{k_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_1)\right)+$$
$$(\lambda+2\mu)uC_u^{(2)}\left(\frac{H_u^{(1)}(a_2k_2)}{a_2{}^2}-\frac{k_2(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_2)}{2a_2}\right)+$$
$$\frac{\lambda}{a_2}C_u^{(2)}\left(\frac{-uH_u^{(1)}(a_2k_2)}{a_2}+\frac{uk_2}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_2)\right)$$

(3.37.e)

$$K3C(u)=\left[\sum_{n=1}^{U}\frac{(\lambda+2\mu)}{4}A_n^{(1)}k_1\varepsilon_u\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left(\frac{J_{u-2}(a_2k_1)-2J_u(a_2k_1)-J_{u+2}(a_2k_1)}{2}\right)$$
$$\frac{\lambda}{a_2}A_n^{(1)}\varepsilon_u\left(\frac{-u^2}{2a_2}J_u(a_2k_1)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{J_{u-1}(a_2k_1)-J_{u+1}(a_2k_1)}{4}k_1\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right)+$$

$$(\lambda+2\mu)D_n^{(1)}\varepsilon_u\left(-\frac{uJ_u(a_2k_2)}{2a_2{}^2}\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{uk_2}{4a_2}\left(J_{u-1}(a_2k_2)-J_{u+1}(a_2k_2)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)+$$

$$\frac{\lambda}{a_2}D_n^{(1)}\varepsilon_u\left(\frac{u}{2a_2}J_u(a_2k_2)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^u(H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{uk_2}{4}\left(J_{u-1}(a_2k_2)-J_{u+1}(a_2k_2)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right)\right]+$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{4}A_u^{(2)}k_1^2\left(H_{u-2}^{(1)}(a_2k_1)-2H_u^{(1)}(a_2k_1)-H_{u+2}^{(1)}(a_2k_1)\right)+$$

$$\frac{\lambda}{a_2}A_u^{(2)}\left(-\frac{u^2H_u^{(1)}(a_2k_1)}{a_2}+\frac{k_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_1)\right)+$$

$$(\lambda+2\mu)uD_u^{(2)}\left(-\frac{H_u^{(1)}(a_2k_2)}{a_2{}^2}+\frac{k_2(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_2)}{2a_2}\right)+$$

$$\frac{\lambda}{a_2}D_u^{(2)}\left(\frac{uH_u^{(1)}(a_2k_2)}{a_2}-\frac{uk_2}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_2)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_2)\right)$$

(3.37.f)

$$K4S(u)=\left[\sum_{n=1}^{U}\frac{\mu}{a_2}A_n^{(1)}\varepsilon_u\left(\frac{uJ_u(a_2k_1)}{2a_2}\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right.\right.$$

$$+\frac{uk_1}{4}\left(J_{u-1}(a_2k_1)-J_{u+1}(a_2k_1)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)$$

$$\frac{u}{2a_2}J_u(a_2k_1)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)$$

$$\left.-\frac{uk_1}{4}\left(J_{u-1}(a_2k_1)-J_{u+1}(a_2k_1)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1)+(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1)\right)\right)+$$

$$\frac{\mu}{a_2}D_n^{(1)}\varepsilon_u\left(-\frac{u^2}{2a_2}J_u(a_2k_2)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\right.$$

$$+\frac{k_2}{4}\left(J_{u-1}(a_2k_2)-J_{u+1}(a_2k_2)\right)\left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)$$

$$\left.\left.-\frac{a_2k_2^2}{8}\left(H_{-u+n}(Dk_2)-(-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2)\right)\left(J_{u-2}(a_2k_2)-2J_u(a_2k_2)-J_{u+2}(a_2k_2)\right)\right)\right]+$$

$$\frac{\mu}{a_2}A_u^{(2)}\left(\frac{u}{a_2}H_u^{(1)}(a_2k_1)-\frac{uk_1}{2}\left(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_1)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{u}{a_2}H_u^{(1)}(a_2k_1)-\frac{uk_1}{2}(H_{u-1}^{(1)}(a_2k_1)-H_{u+1}^{(1)}(a_2k_1)\right)+$$

$$\frac{\mu}{a_2} D_u^{(2)} \left(\frac{-u^2}{a_2} H_u^{(1)}(a_2 k_2) + \frac{k_2}{2} \left(H_{u-1}^{(1)}(a_2 k_2) - H_{u+1}^{(1)}(a_2 k_2) \right) \right.$$
$$\left. - \frac{a_2 k_2^2}{4} \left(H_{u-2}^{(1)}(a_2 k_2) - 2H_u^{(1)}(a_2 k_2) - H_{u+2}^{(1)}(a_2 k_2) \right) \right)$$

(3.37.g)

$$K4C(u) = \left[\sum_{n=1}^{U} \frac{\mu}{a_2} B_n^{(1)} \varepsilon_u \left(- \frac{u J_u(a_2 k_1)}{2a_2} \left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1) - (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1) \right) \right. \right.$$
$$+ \frac{u k_1}{4} \left(J_{u-1}(a_2 k_1) - J_{u+1}(a_2 k_1) \right) \left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1) - (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1) \right)$$
$$- \frac{u}{2a_2} J_u(a_2 k_1) \left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1) - (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1) \right)$$
$$\left. + \frac{u k_1}{4} \left(J_{u-1}(a_2 k_1) - J_{u+1}(a_2 k_1) \right) \left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_1) - (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_1) \right) \right) +$$
$$\frac{\mu}{a_2} C_n^{(1)} \varepsilon_u \left(- \frac{u^2}{2a_2} J_u(a_2 k_2) \left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2) + (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2) \right) \right.$$
$$+ \frac{k_2}{4} \left(J_{u-1}(a_2 k_2) - J_{u+1}(a_2 k_2) \right) \left(H_{-u+n}^{(1)}(Dk_2) + (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2) \right)$$
$$\left. \left. - \frac{a_2 k_2^2}{8} \left(H_{-u+n}(Dk_2) + (-1)^u H_{u+n}^{(1)}(Dk_2) \right) \left(J_{u-2}(a_2 k_2) - 2J_u(a_2 k_2) - J_{u+2}(a_2 k_2) \right) \right) \right] +$$
$$\frac{\mu}{a_2} B_u^{(2)} \left(- \frac{u}{a_2} H_u^{(1)}(a_2 k_1) + \frac{u k_1}{2} \left(H_{u-1}^{(1)}(a_2 k_1) - H_{u+1}^{(1)}(a_2 k_1) \right) \right.$$
$$\left. - \frac{u}{a_2} H_u^{(1)}(a_2 k_1) + \frac{u k_1}{2} (H_{u-1}^{(1)}(a_2 k_1) - H_{u+1}^{(1)}(a_2 k_1) \right) +$$
$$\frac{\mu}{a_2} C_u^{(2)} \left(\frac{-u^2}{a_2} H_u^{(1)}(a_2 k_2) + \frac{k_2}{2} \left(H_{u-1}^{(1)}(a_2 k_2) - H_{u+1}^{(1)}(a_2 k_2) \right) \right.$$
$$\left. - \frac{a_2 k_2^2}{4} \left(H_{u-2}^{(1)}(a_2 k_2) - 2H_u^{(1)}(a_2 k_2) - H_{u+2}^{(1)}(a_2 k_2) \right) \right)$$

(3.37.h)

Bilinmeyenlerin bulunmasında kullanılacak denklemler aşağıda gösterildiği gibidir.

$K1S(u) = 0, \quad u = 1, 2, ...U$

$K1C(u) = \text{-}P_i \delta_{uo}, \quad u = 0, 1, ...U$

$K2S(u) = 0, \quad u = 1, 2, ...U$

$K2C(u) = 0, \quad u = 0, 1, ...U$

$K3S(u) = 0, \quad u = 1, 2, ...U$

$K3C(u) = 0, \quad u = 0, 1, ...U$

$K4S(u) = 0, \quad u = 1, 2, ...U$

$K4C(u) = 0, \quad u = 0, 1, ...U$ **(3.38)**

Toplam 8U+4 denklem

Belirli bir U sayısı için yukarıdaki denklemler çözüldüğünde $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(1)}, B_n^{(2)}$, $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ bilinmeyenleri bulunur. Bilinmeyenler bulunduktan sonra r_1 ve θ_1 koordinatlarına bağlı olarak gerilme ve yer değiştirme ifadelerini bulmak için önce (3.27)'de tariflenmiş potansiyeller (3.20)'de yerine yazılarak toplam potansiyeller elde edilir, sonra bu potansiyeller (3.21) ve (3.9)'da yerine yazılır. Eğer gerilme ve yer değiştirmelerin, r_2 ve θ_2 koordinatlarına bağlı olarak bulunması istenirse, bu kez (3.27)'de tariflenmiş potansiyeller yerine (3.32)'de tariflenmiş potansiyeller kullanılmalıdır.

4 SAYISAL UYGULAMALAR

4.1 Sayısal Veriler

Seçilen p_0 iç basınç genliği, ω zorlama frekansı, a_1 ve a_2 oyuk yarıçapları, D iki oyuk arasındaki mesafe, malzeme sabitleri ve U sayısı için istenilen herhangi bir noktada gerilme ve yer değiştirme bileşenleri hesaplanabilir. Sayısal uygulamalarda kütle yoğunluğu ρ = 2665 kg/m3, Elastisite modülü E = 7.567x109 Pa, Poisson oranı $\nu = 0.25$, iç basınç genliği p_0 = 100'000 Pa alınmıştır. Tüm grafiklerde gerilmeler N/m2, açılar radyan, yer değiştirmeler metre olarak ifade edilmiştir.

4.2 Sonuçlar

Yukarıda verilen değerler kullanılarak birçok farklı durum için sonuçlar incelenmiştir. Birinci durumda $\omega = 1000$ rad/s, D =15m, a_1=5m, a_2 =5m için U sayısının 11 ve 12 değeri için birinci ve ikinci oyuk yüzeyindeki gerilmeler θ_1 ve θ_2'ye bağlı olarak grafikte gösterilmiştir. İkinci durumda gerilme ve yer değiştirmelerin delik yüzeyinden itibaren r_1 ile değişimi incelenmiştir. Üçüncü durumda iki oyuk arasındaki mesafenin büyük değerler alması durumunda oyuk yüzeylerindeki gerilmelerin değişimi incelenmiştir. Dördüncü durumda ω, D, a_1, ve a_2'nin değişik değerleri için oyuk yüzeylerindeki gerilmeler incelenmiştir.

4.2.1 U Sayısı İle Çözümlerin Yakınsaklığı

Şekil A.1-A.6'da $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2 =5m ve U=11 için σ_{rr} $\sigma_{\theta\theta}$ ve $\tau_{r\theta}$'nın birinci ve ikinci oyuk yüzeylerindeki değerlerinin grafiği çizilmiştir. Sonra U sayısının 12 olması durumundaki grafikler çizilmiştir (Şekil A.7-A12). U sayısının 11 ve 12 olması durumunda sonuçların birbirine yeter derecede yakın olduğu görülmüştür. Ayrıca bu çözümlerde σ_{rr} ve $\tau_{r\theta}$'nın verilen sınır koşulları ile paralel oldukları da görülmüştür.

4.2.2 Birinci Oyuk Çevresinde Ve İki Oyuk Arasındaki Bölgede Gerilme Ve Yer Değiştirmeler

Şekil B.1-B.25 'de $\omega = 1000\,\text{rad/s}$, D=15m, a_1=5m, a_2=5m ve θ_1'in çeşitli değerleri için birinci oyuk çevresinde ve iki oyuk arasındaki gerilme ve yer değiştirmelere ait grafikler r_1'e bağlı olarak çizilmiştir. Yalnız bu hesaplarda, bilinmeyenlerin hesabına kadar olan kısımda U=12, bu kısımdan sonra U=120 alınmıştır. Bunun nedeni kullandığımız Graff toplama fonksiyonunun, delik yüzeyinde U=12 değeri için geçerli olmasına karşın $r_1 = 10m$ değeri için ancak U=120 değerinde doğru sonuçlar verebilmesidir.

4.2.3 İki Oyuk Arasındaki Mesafenin Büyümesi Durumunda Oyuk Yüzeylerindeki Gerilmelerin Değişimi

Şekil C.1-C8'de $\omega = 1000\,\text{rad/s}$, a_1=5m, a_2=5m ve iki oyuk arasındaki mesafenin 20m, 35m, 100m ve 400m olması durumundaki oyuk yüzeylerindeki gerilmelerin θ_1 ve θ_2'ye bağlı grafikleri verilmiştir. İki oyuk arasındaki mesafe arttıkça, birinci oyuk yüzeyindeki gerilmeler belirli bir değerde sabitlenmeye başlamıştır. İkinci oyuk yüzeyindeki gerilmeler ise sıfıra yaklaşmıştır.

4.2.4 Açısal Frekans, Oyuk Yarıçapları Ve İki Oyuk Arasındaki Mesafenin Çeşitli Değerleri İçin Oyuk Yüzeylerindeki Ve İki Oyuk Arasındaki Bölgede Çözümler

Bu bölümde açısal frekans, oyuk yarıçapları ve iki oyuk arasındaki mesafe çeşitli değerler verilerek çözümler incelenmiştir. Sonuç olarak σ_{rr} gerilmesi, ω, a_1, a_2, ve D parametrelerine bağlı olarak bazı durumlarda, iki oyuk arasındaki bölgede, birinci oyuk yüzeyindeki değerinden daha büyük değerler alabilmektedir. Şekil D.3'deki grafikte $\omega = 1000\,\text{rad/s}$, D=15m, a_1=5m, a_2=5m için σ_{rr} gerilmesi, iki oyuk arasındaki bölgede, birinci oyuk yüzeyindeki değerinden çok daha büyük bir değer almıştır. Oyuk yarıçaplarını 4m'ye düşürdüğümüzde ise (Şekil D.6) σ_{rr} gerilmesi, iki oyuk arasındaki bölgede, birinci oyuk yüzeyindeki değerine daha yakın değerler almıştır. Oyuk yarıçapları 6m olduğunda ise (Şekil D.9) bu kez en büyük σ_{rr} gerilmesi, birinci oyuk yüzeyinde gerçekleşmiştir. $\omega = 1000\,\text{rad/s}$, D=17m, a_1=5m,

a_2=5m için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi (Şekil D.12) ve $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi (Şekil D.15) karşılaştırıldığında, iki oyuk arasındaki mesafe 4m arttığında, σ_{rr} en büyük değerini birinci oyuk yüzeyinde değil iki oyuk arasındaki bölgede almıştır. Fakat $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi (Şekil D.15) ve $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi (Şekil D.24) karşılaştırıldığında, açısal frekans 500 rad/s arttığında, maksimum σ_{rr} gerilmesi birinci oyuk yüzeyinden iki oyuk arasındaki bölgeye kaymıştır.

5 TARTIŞMA

Bu çalışmada a_1 ve a_2 yarıçaplı iki dairesel oyuk içeren uzayın, birinci oyuk yüzeyinden harmonik zorlama altındaki davranışı incelenmiştir. Elde edilen kuple denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyellerinin kullanılması ile ayrıklaştırılmış ve Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri ile kapalı çözümü yapılmıştır.

Doğruluğu kesin çözümler elde etme istediğimizde karşılaşılan en büyük problem kullandığımız Graff toplama fonksiyonunun geçerlilik bölgesinde olmuştur. Graff toplama fonksiyonunun geçerliliği, açısal frekans, (3.8) diferansiyel denklemlerinin çözümündeki terim sayısı, Graff toplama fonksiyonunundaki terim sayısı, r ve θ koordinatları ve iki oyuk arasındaki mesafeye bağlı altı boyutlu uzayda bir bölgededir. Bulunan sonuçların doğruluğunu büyük oranda Graff toplama fonksiyonunun geçerliliği belirlemektedir. Yapılan çözümlerde Graff toplama fonksiyonunun, açısal frekansın küçülmesi, diferansiyel denklemlerin çözümündeki terim sayısının artması, Graff toplama fonksiyonundaki terimlerin sayısının azalması, r koordinatının büyümesi ve iki oyuk arasındaki mesafenin azalması ile geçerliliğini kaybettiği görülmüştür. Örneklerimizde r koordinatının, oyuk yarıçapına eşit olduğu oyuk yüzeyinde graff toplama fonksiyonundaki terim sayısını 12 almak yeterli gelmişken, r koordinatı oyuk yarıçapının iki katı olduğunda, terim sayısını 120 almak gerekmiştir.

Bu problemin devamı olabilecek çalışmalar;

1. Ortamın yarı sonsuz olması,
2. Ortamın farklı malzemelerden oluşması,
3. Ortamın homogen olmaması,
4. Ortamın viskoelastik olması
5. Zorlamanın oyuk yüzeyinin bir kısmına etkimesi olarak özetlenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Akpınar, M.**, 2000. Harmonik basınç etkisindeki dairesel boşluklu yarım düzlem problemi, *Yüksek Lisans Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[2] **Datta, S.K., Shah A.H., Wong K.C.**, 1984. Dynamic stresses and displacements in buried pipe, *Journal of Engineering Mechanics,* **110,** 1451-1466.

[3] **El – Akily, N. and Datta, S.K.**, 1981. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space – Numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **9,** 477-487.

[4] **Engin, H. Coşkun, İ.**, 2001. Boşluk içeren yarım uzayda zorlanmış titreşimler, *XII. Ulusal Mekanik Kongresi,* Konya, 10-14 Eylül, s. 365-374.

[5] **Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S.**, Elastodynamics, Vol II, Academic Press, New York, 1975.

[6] **Graff**, **K.F.**, Wave motion in elastic solids, Clarendron press, Oxford, 1975.

[7] **Guan, F. and Moore, I.D.**, 1994. Three – dimensional dynamic response of twin cavities due to traveling loads, *Journal of Engineering Mechanics,* **120,** 637-651.

[8] **Hildebrand, F.B.**, Advanced Calculus for Applications, Prentice – Hall, New Jersey, 1962.

[9] **İnan, M.**, Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı:750, İstanbul, 1969.

[10] **Luco, J.E. and De Barros F.C.P.**, 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space – I: Formulation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **23,** 553-567.

[11] **Liang, J**., Zhang, H., 2004. A series solution for surface motion amplification due to underground group cavities: Incident P waves *Acta Seismologica Sinica*, **17**, 296-307

[12] **Luco, J.E. and De Barros F.C.P.**, 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space – II: Validation and numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **23,** 569-580.

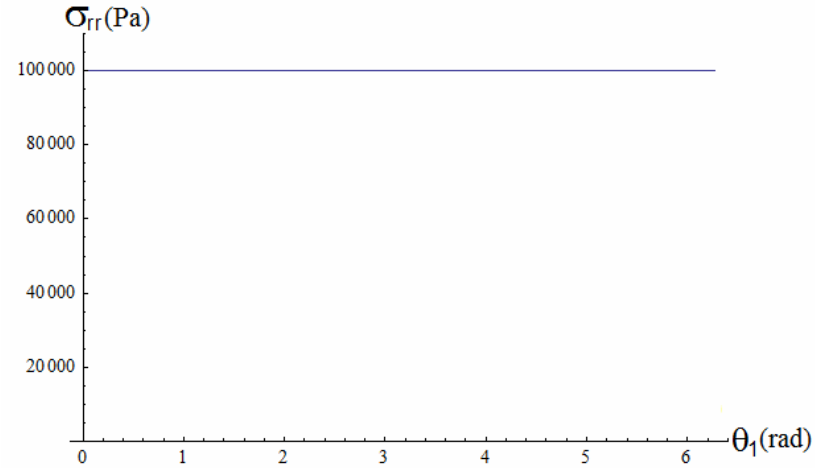
[13] **Thiruvenkatachar V.R. and Viswanathan K.**, 1965. Dynamic response of an elastic half space with cylindrical cavity to time – dependent surface tractions over the boundary of the cavity, *Journal of Mathematics and Mechanics,* **14,** 541-571.

[14] **Tranter, C.J.**, Bessel Functions with Some Physical Applications, The English Universities Press, London, 1968.

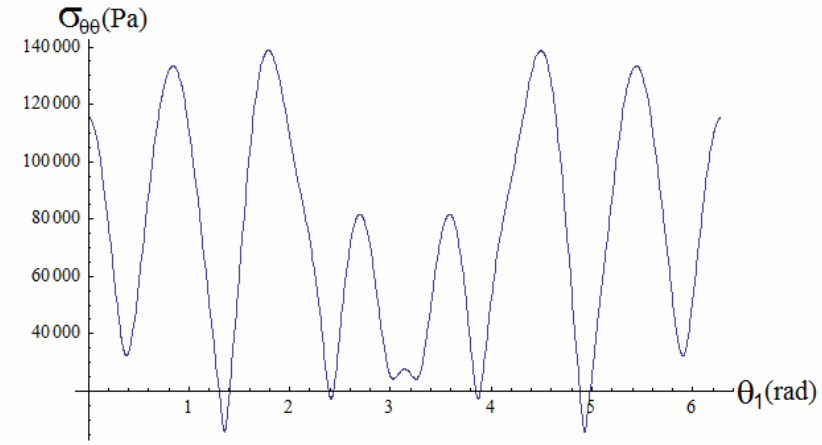
[15] **Verruijt, A**., 1998. Deformations of an elastic half-plane with circular cavity, *Solid Structures*, **35**, 2795-280

[16] **Wong K.C., Shah A.H. and Datta, S.K.**, 1985. Dynamic stresses and displacements in a buried tunnel, *Journal of Engineering Mechanics,* **111,** 218-2

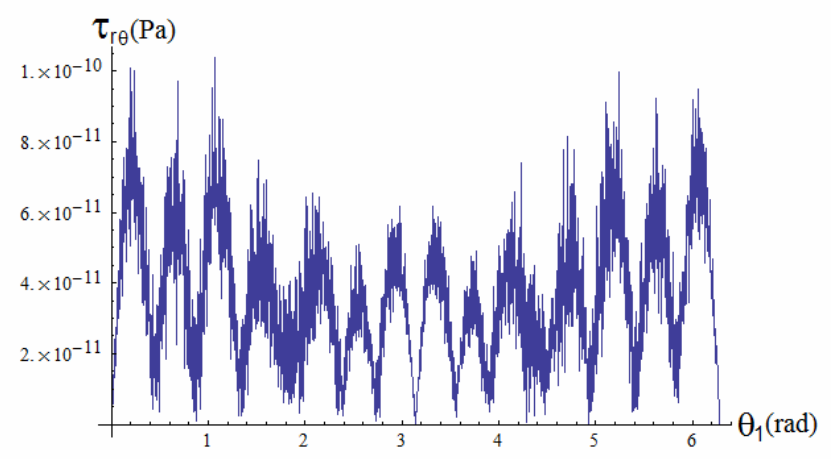
EK A: U SAYISININ 11 VE 12 OLMASI DURUMUNDAKİ ÇÖZÜMLERE AİT GRAFİKLER



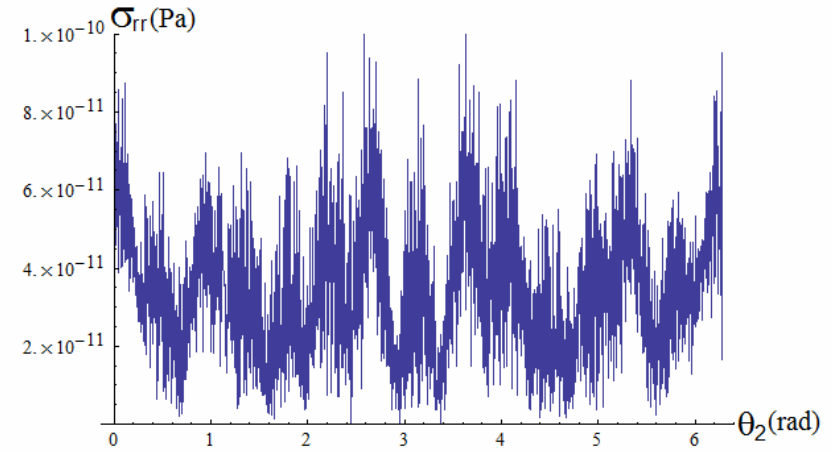
Şekil A.1: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=11 için σ_{rr}'nin θ_1'e göre değişimi



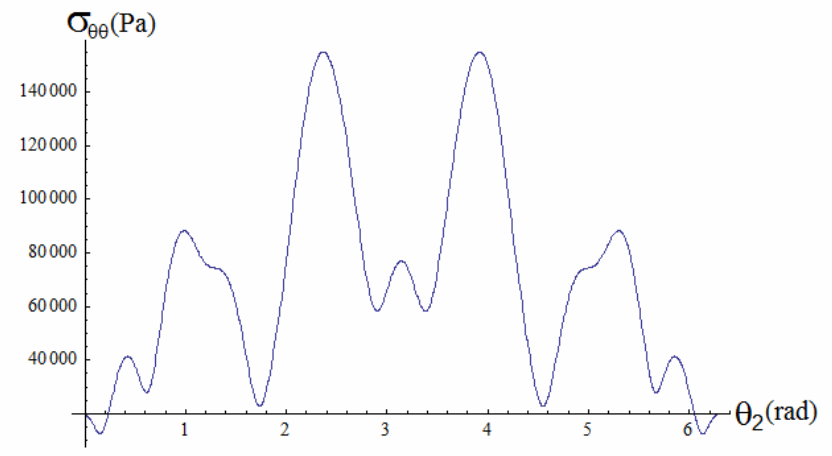
Şekil A.2: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=11 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



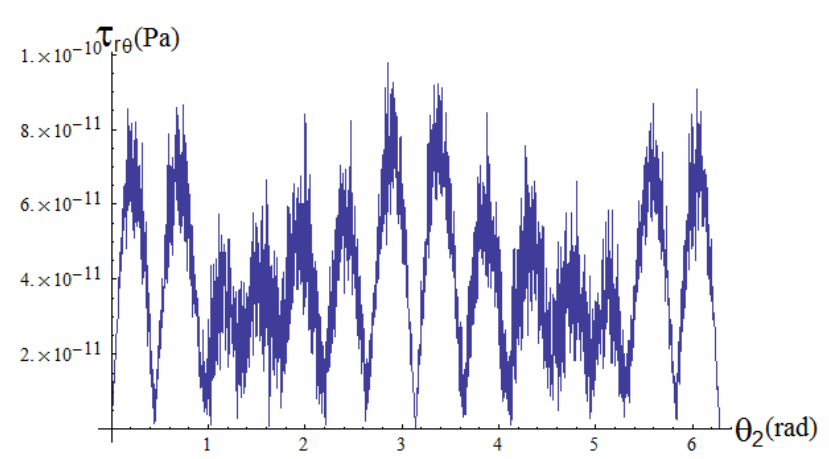
Şekil A.3: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=11 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



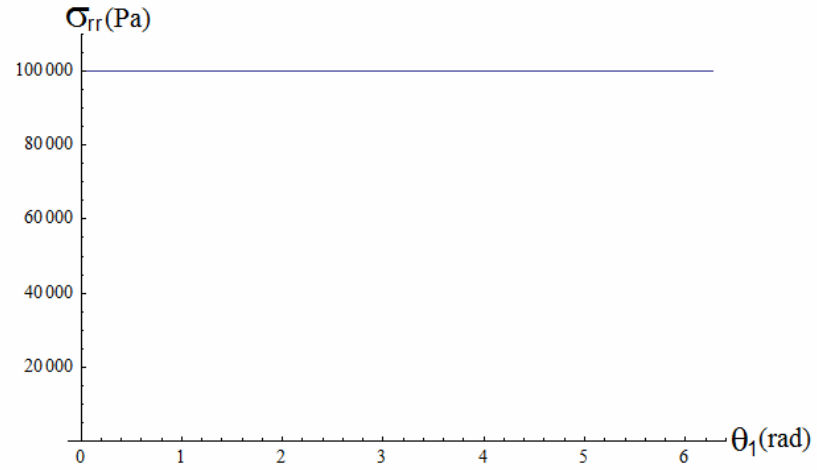
Şekil A.4: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=11 için σ_{rr}'nin θ_2'ye göre değişimi



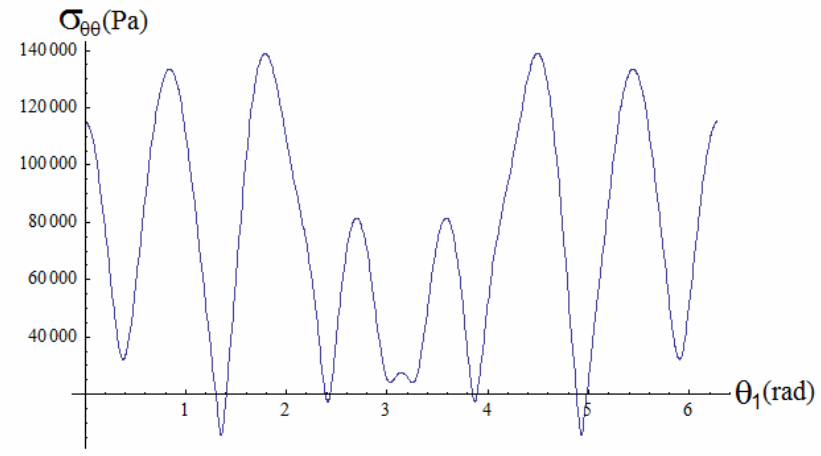
Şekil A.5: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=11 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi



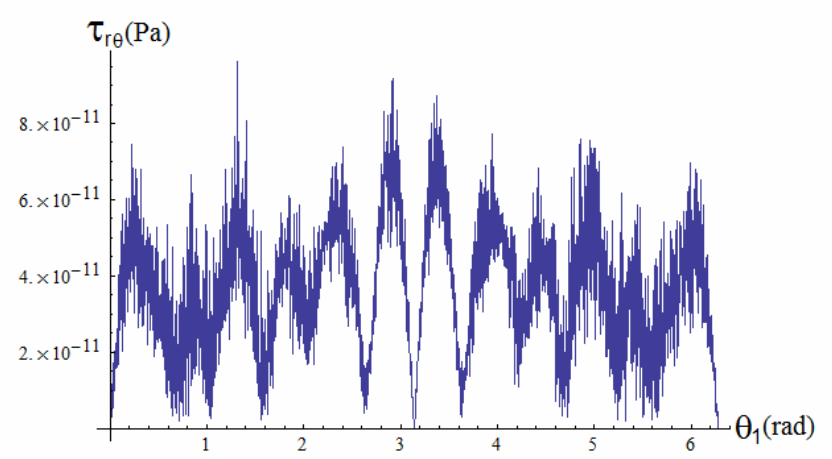
Şekil A.6: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=11 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi



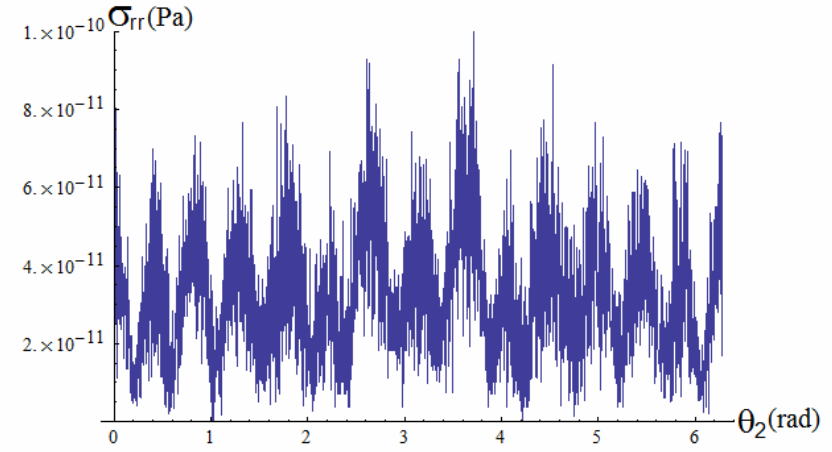
Şekil A.7: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için σ_{rr}'nin θ_1'e göre değişimi



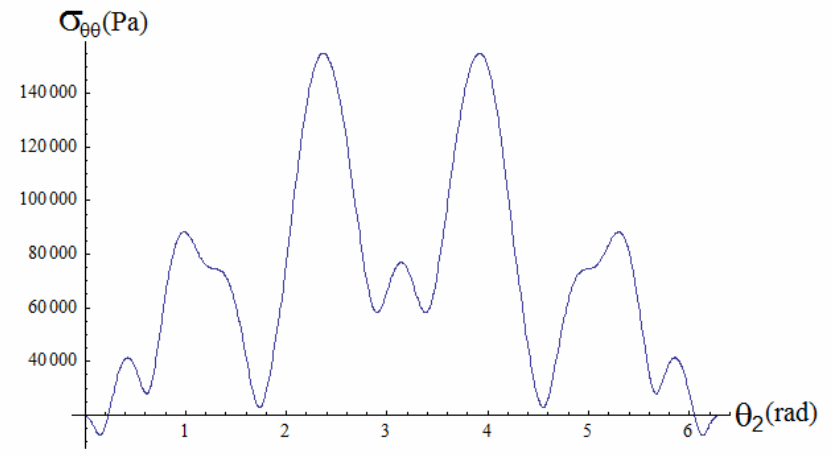
Şekil A.8: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



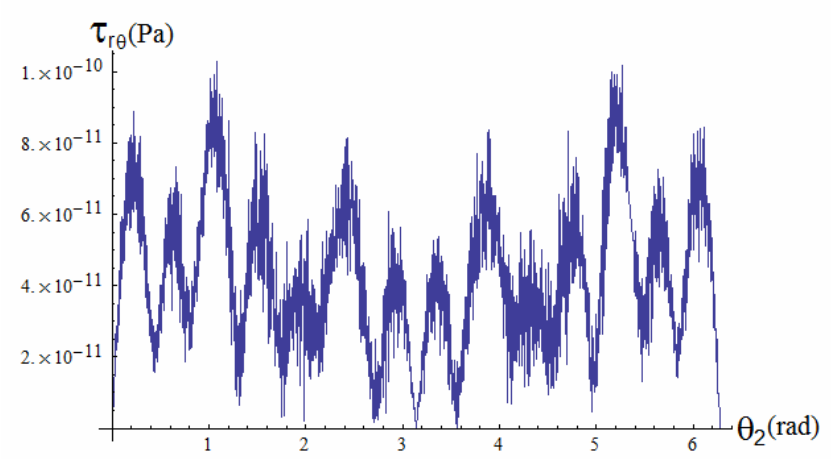
Şekil A.9: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



Şekil A.10: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için σ_{rr}'nin θ_2'ye göre değişimi

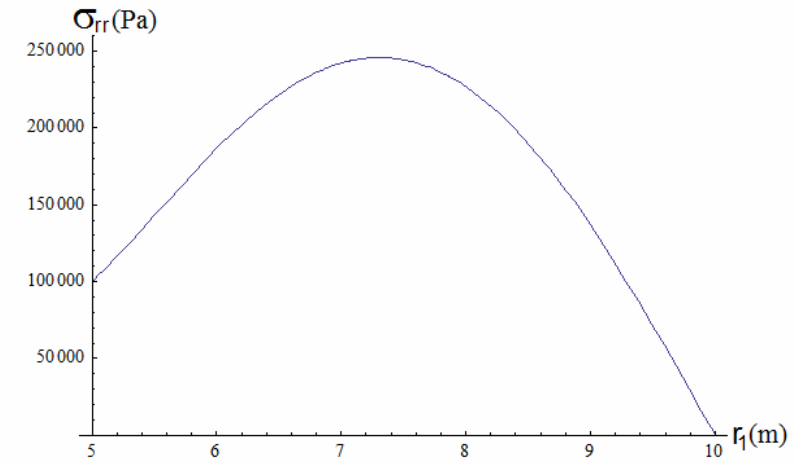


Şekil A.11: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi

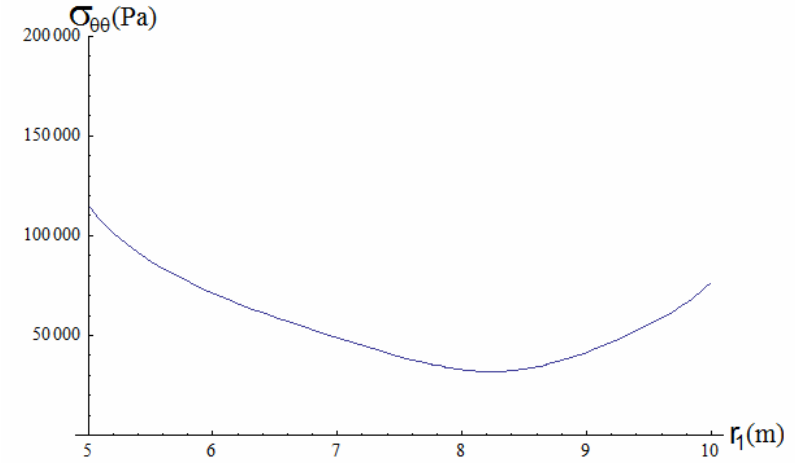


Şekil A.12: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi

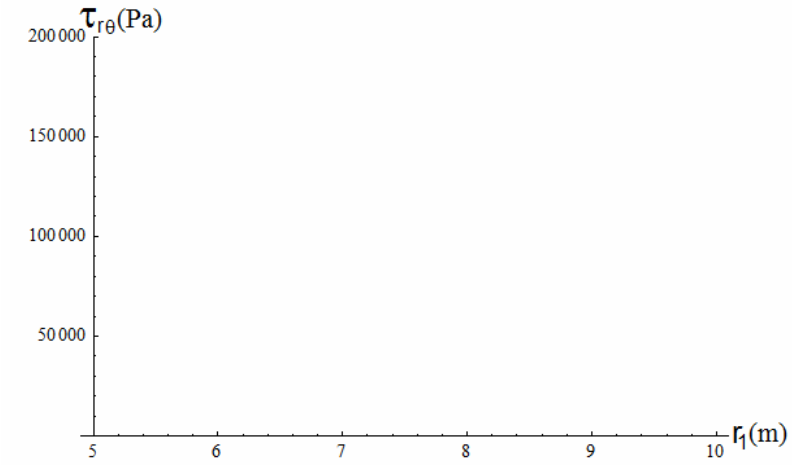
EK B: BİRİNCİ OYUK ÇEVRESİNDE VE İKİ OYUK ARASINDAKİ BÖLGEDE GERİLME VE YER DEĞİŞTİRMELER



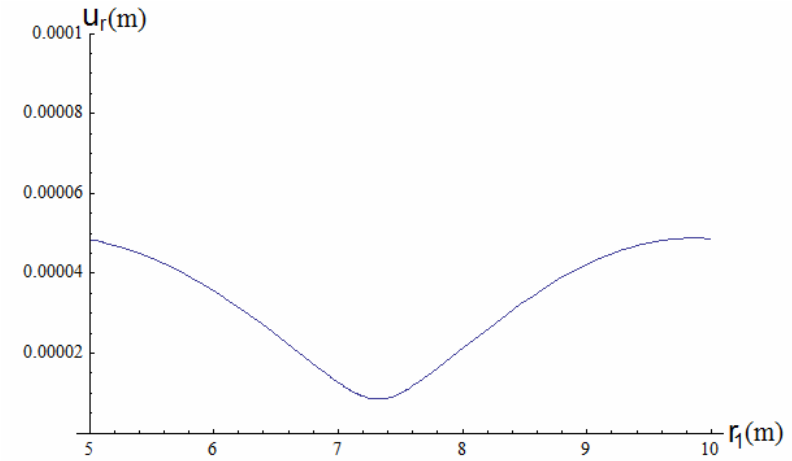
Şekil B.1: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



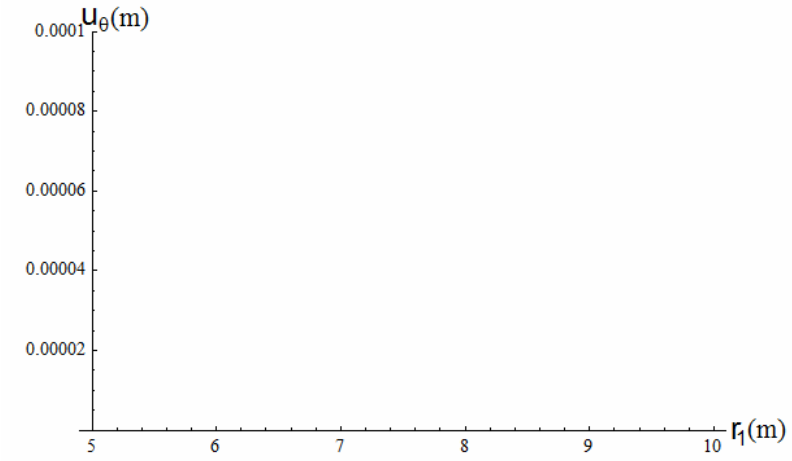
Şekil B.2: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



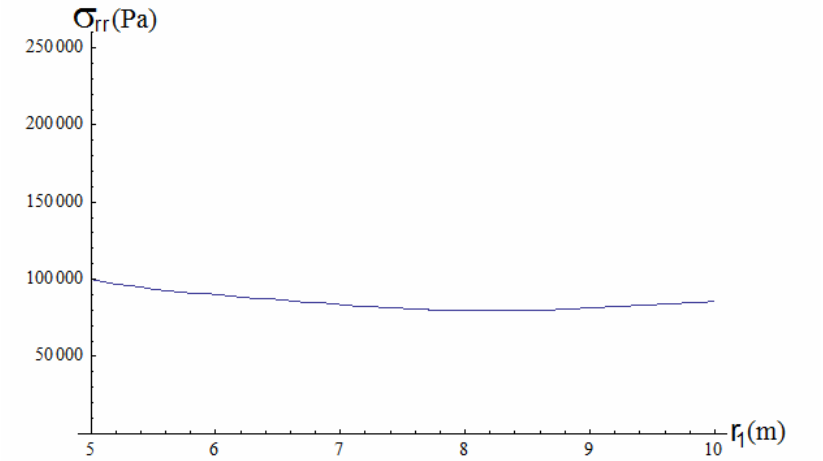
Şekil B.3: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



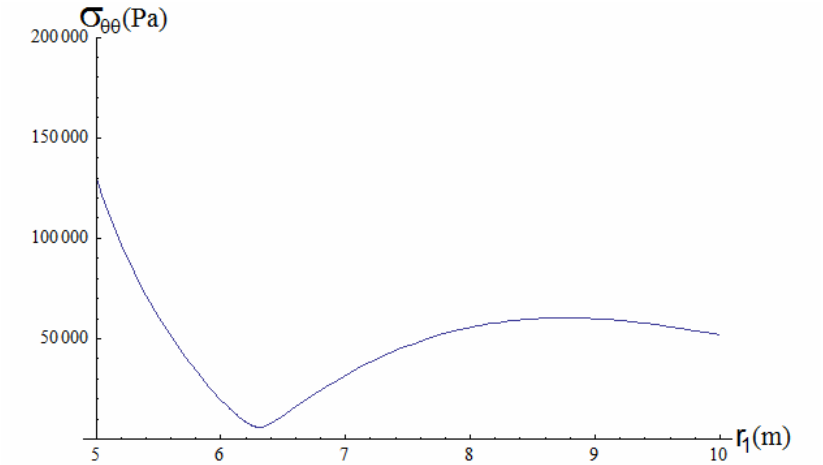
Şekil B.4: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için u_r'nin r_1'e göre değişimi



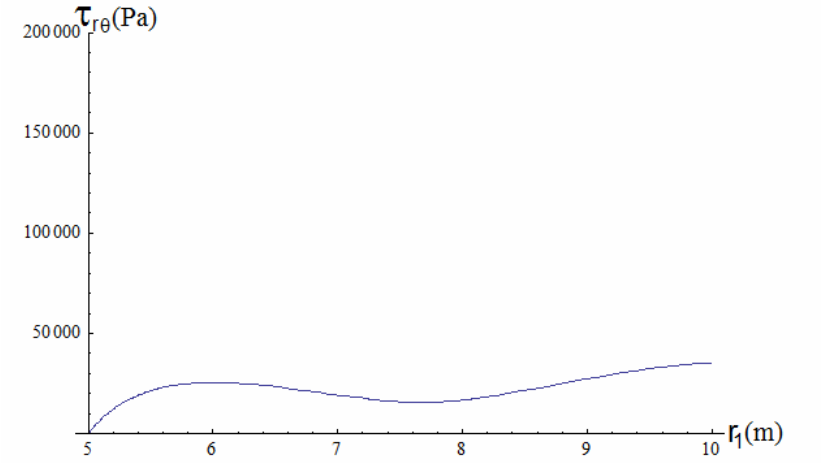
Şekil B.5: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=0 ve U=12 için u_θ'nın r_1'e göre değişimi



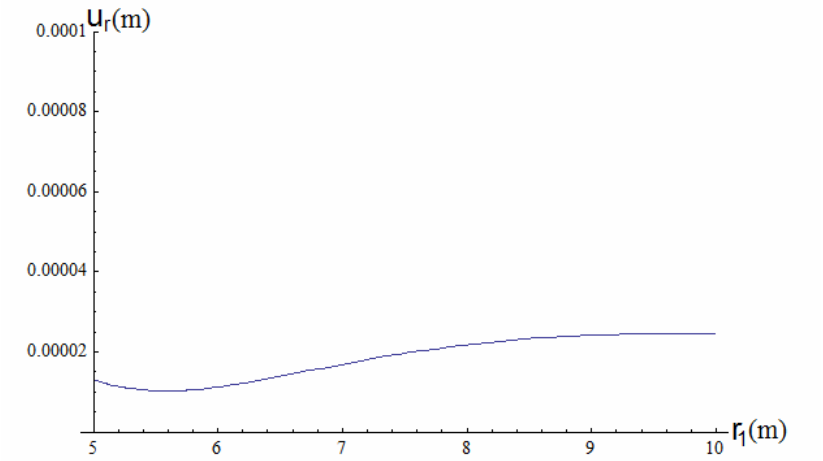
Şekil B.6: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



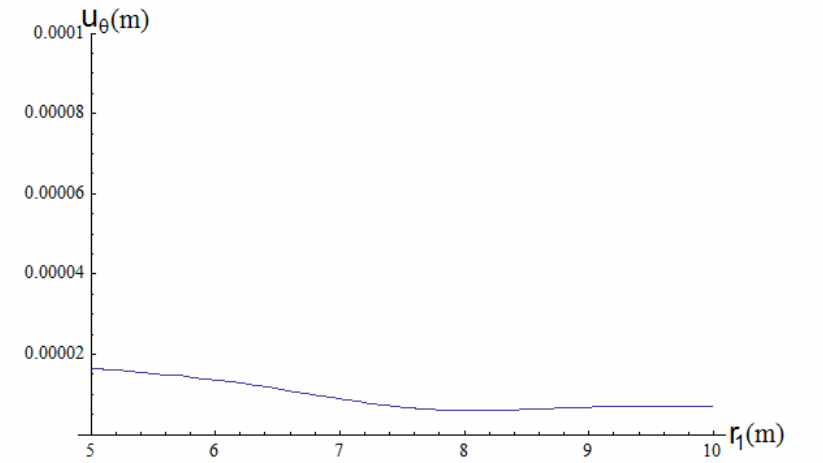
Şekil B.7: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



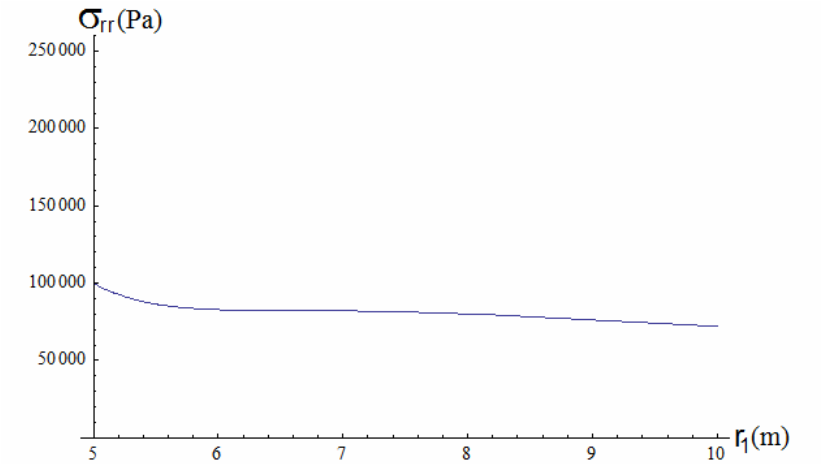
Şekil B.8: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



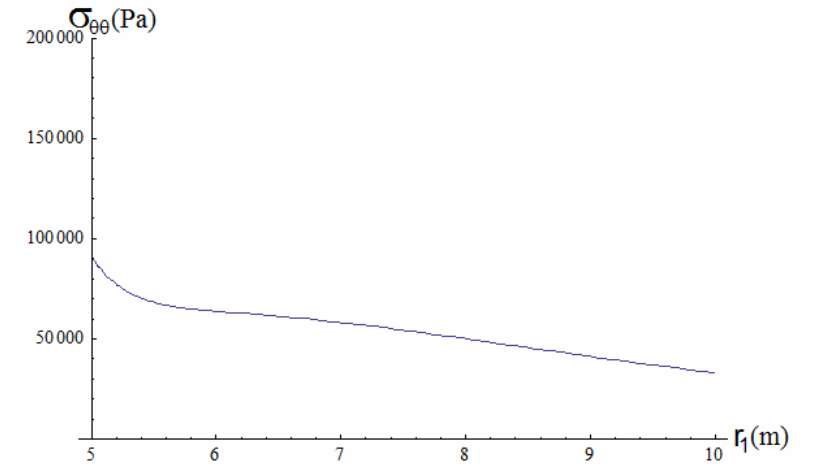
Şekil B.9: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için u_r 'nin r_1 'e göre değişimi



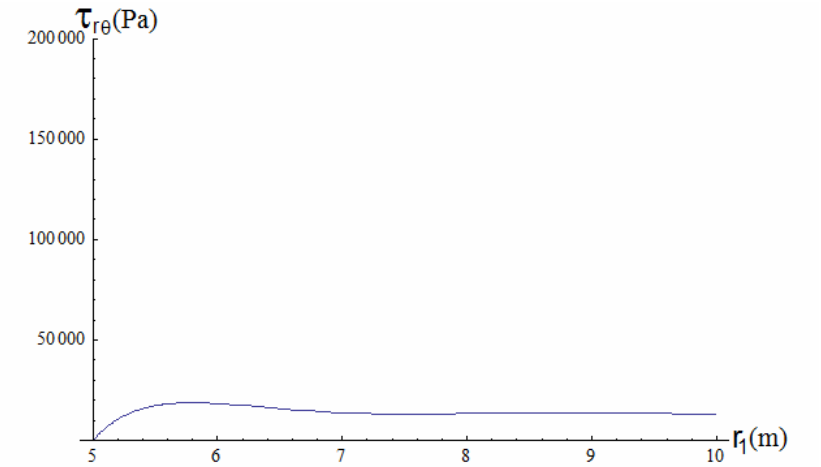
Şekil B.10: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=45^0 ve U=12 için u_θ 'nın r_1 'e göre değişimi



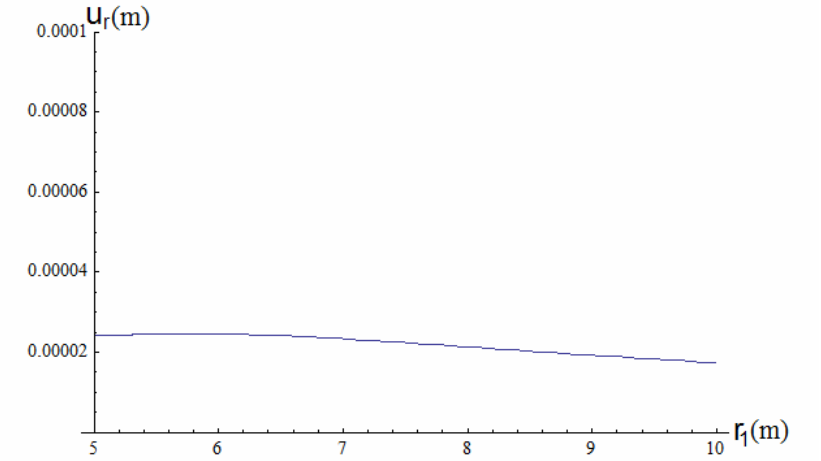
Şekil B.11: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi



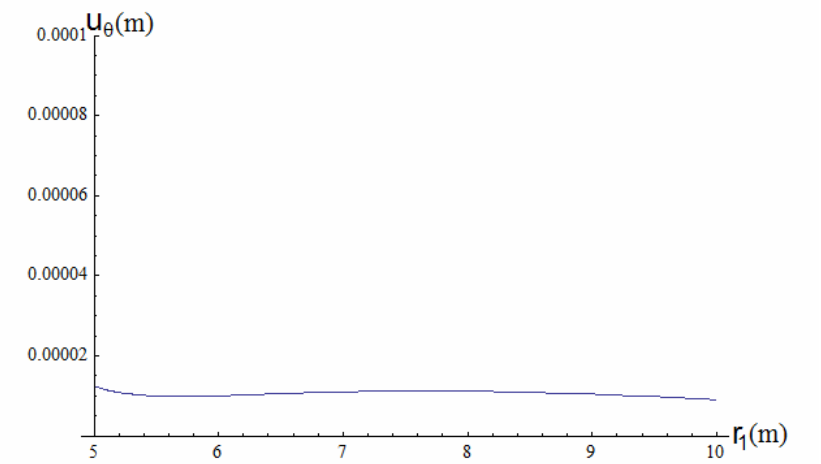
Şekil B.12: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



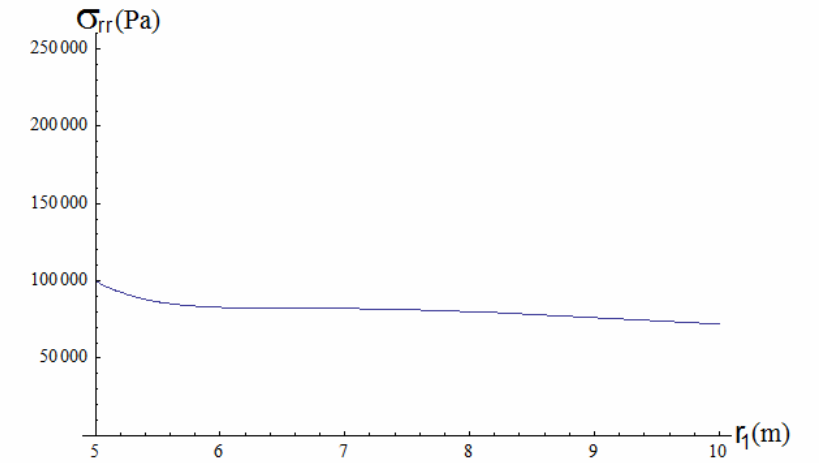
Şekil B.13: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



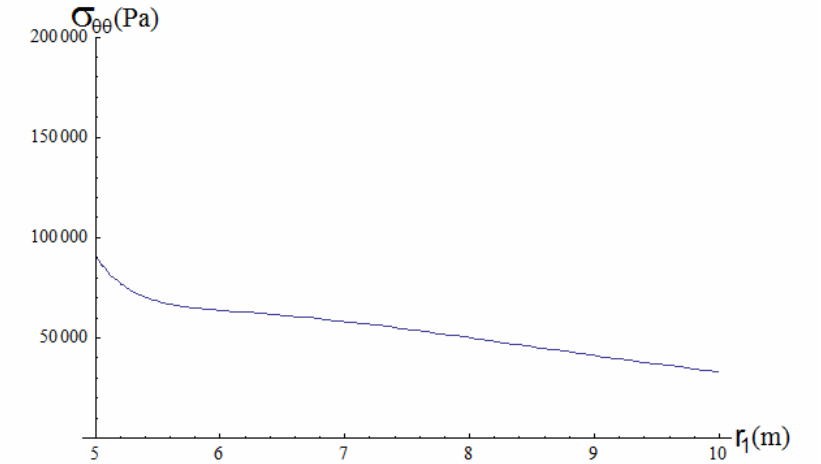
Şekil B.14: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için u_r'nin r_1'e göre değişimi



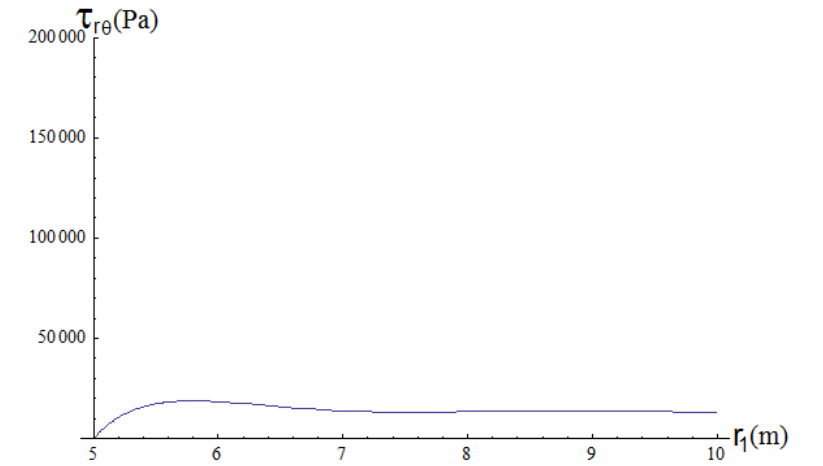
Şekil B.15: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=90^0 ve U=12 için u_θ'nın r_1'e göre değişimi



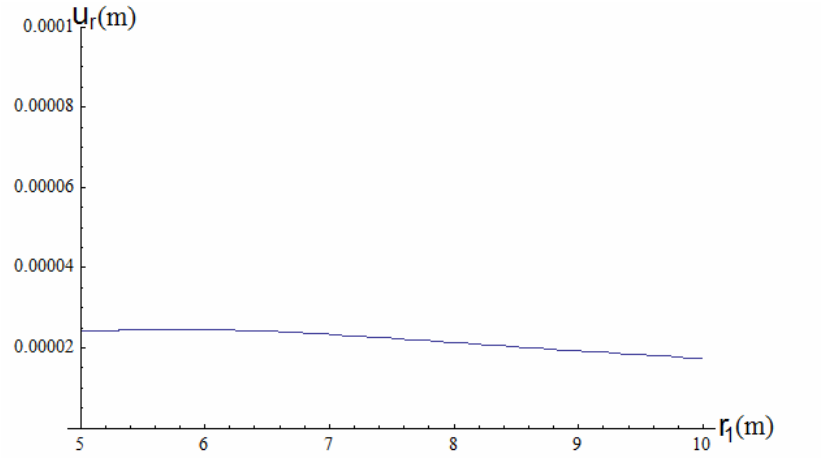
Şekil B.16: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



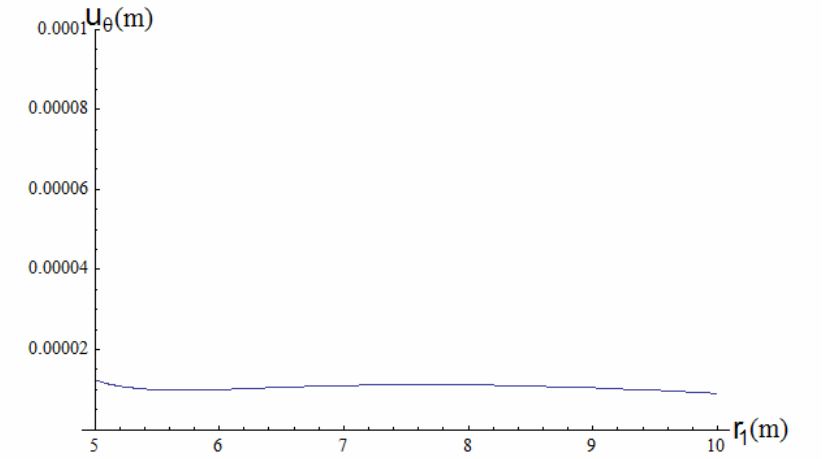
Şekil B.17: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



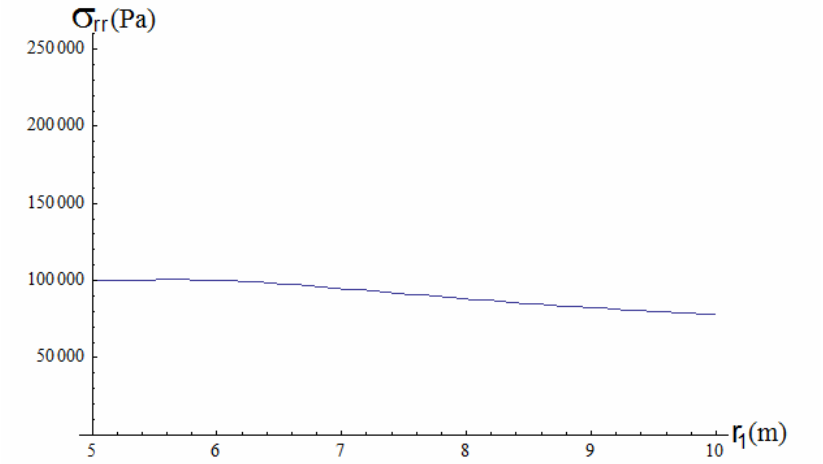
Şekil B.18: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



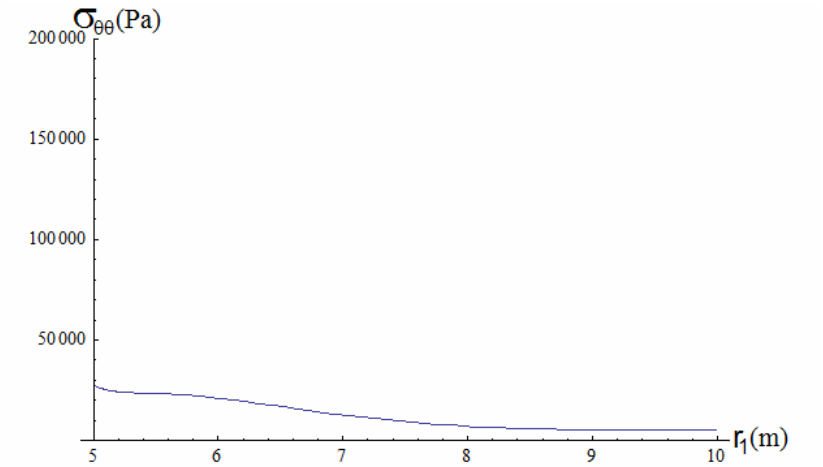
Şekil B.19: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için u_r'nin r_1'e göre değişimi



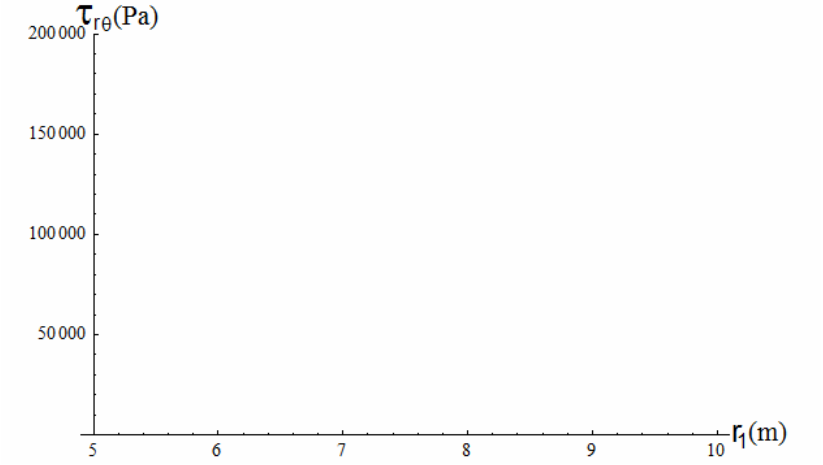
Şekil B.20: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=135^0 ve U=12 için u_θ'nın r_1'e göre değişimi



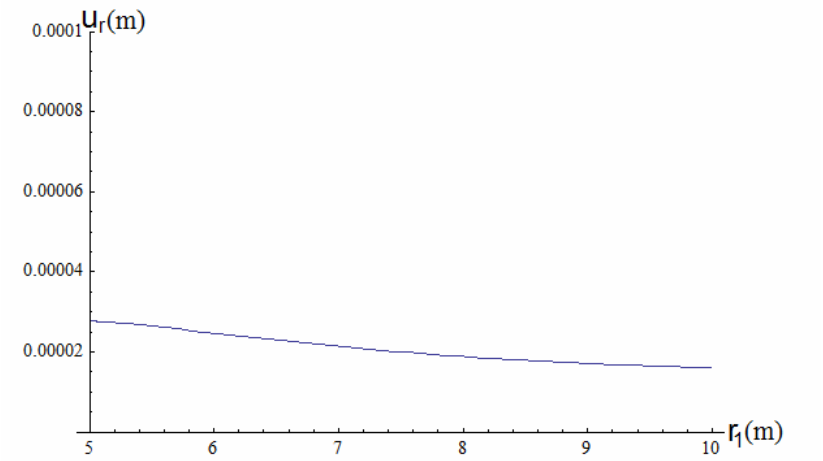
Şekil B.21: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



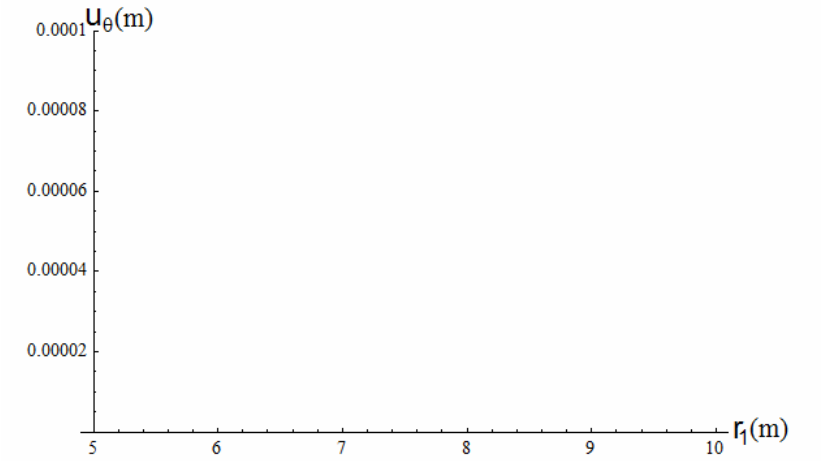
Şekil B.22: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın r_1'e göre değişimi



Şekil B.23: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için $\tau_{r\theta}$'nın r_1'e göre değişimi

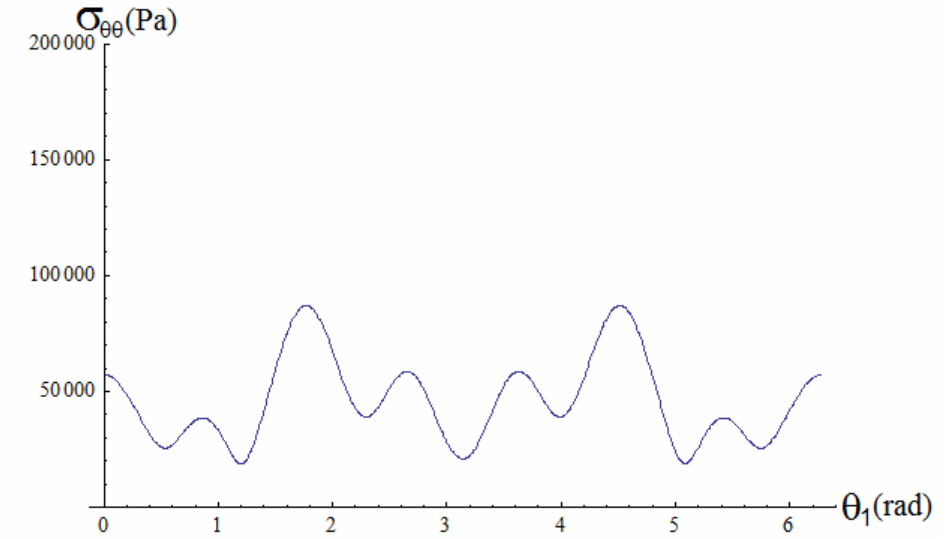


Şekil B.24: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için u_r 'nin r_1 'e göre değişimi

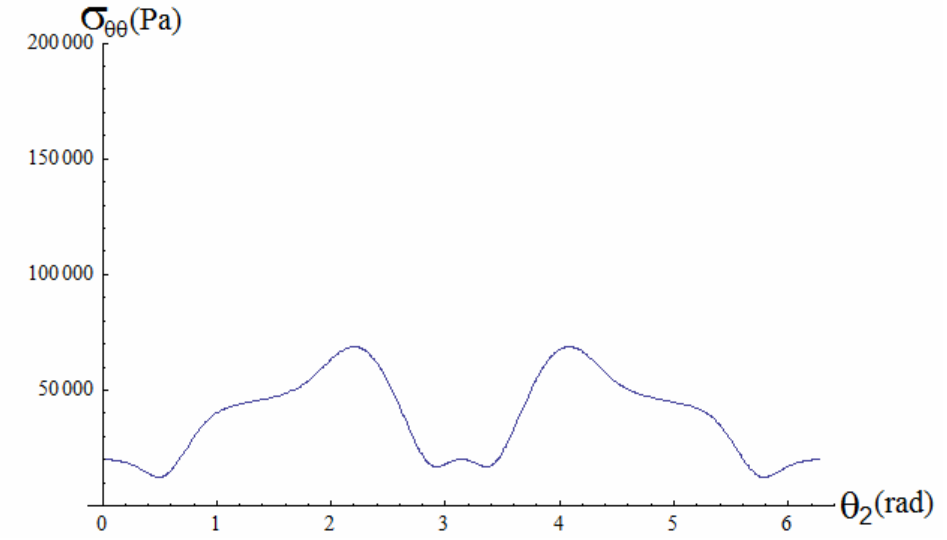


Şekil B.25: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, θ_1=180^0 ve U=12 için u_θ 'nın r_1 'e göre değişimi

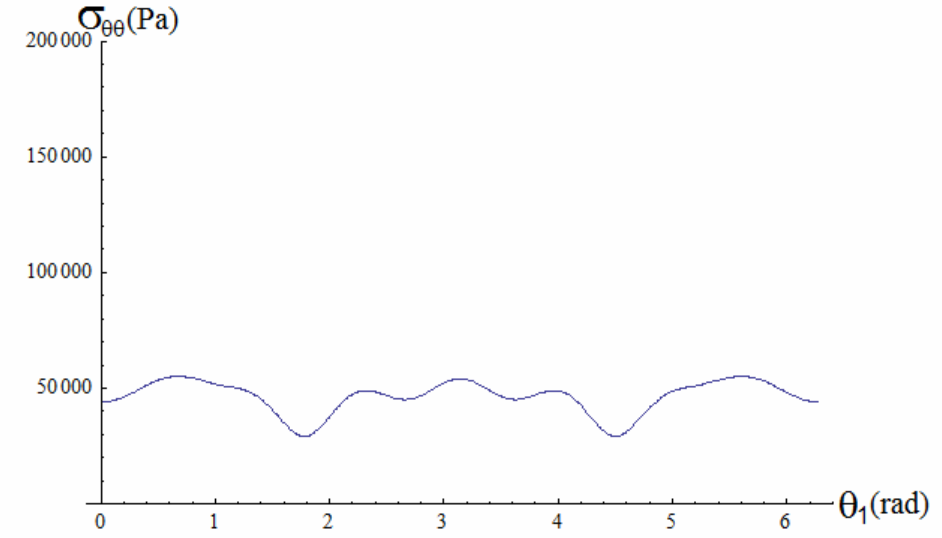
EK C: İKİ OYUK ARASINDAKİ MESAFENİN BÜYÜMESİ DURUMUNDA OYUK YÜZEYLERİNDEKİ GERİLMELERE AİT GRAFİKLER



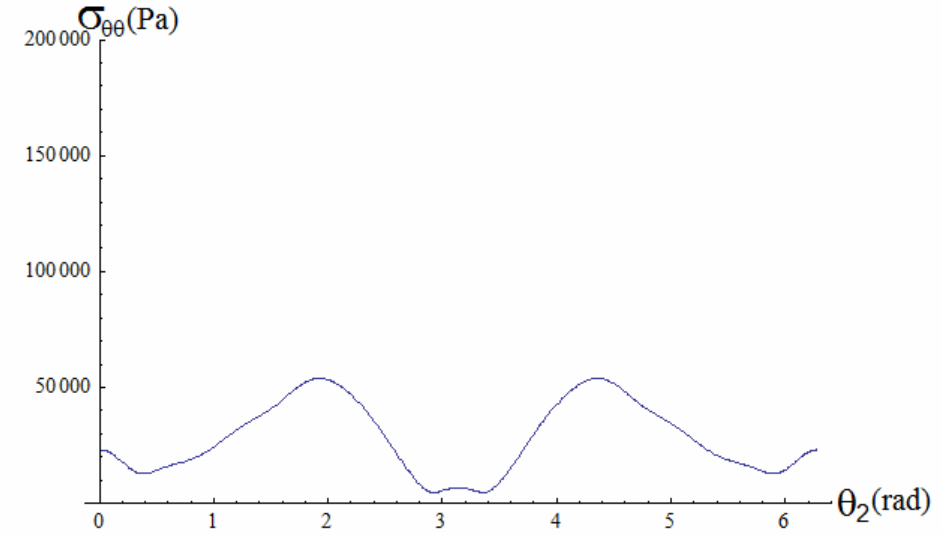
Şekil C.1: $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



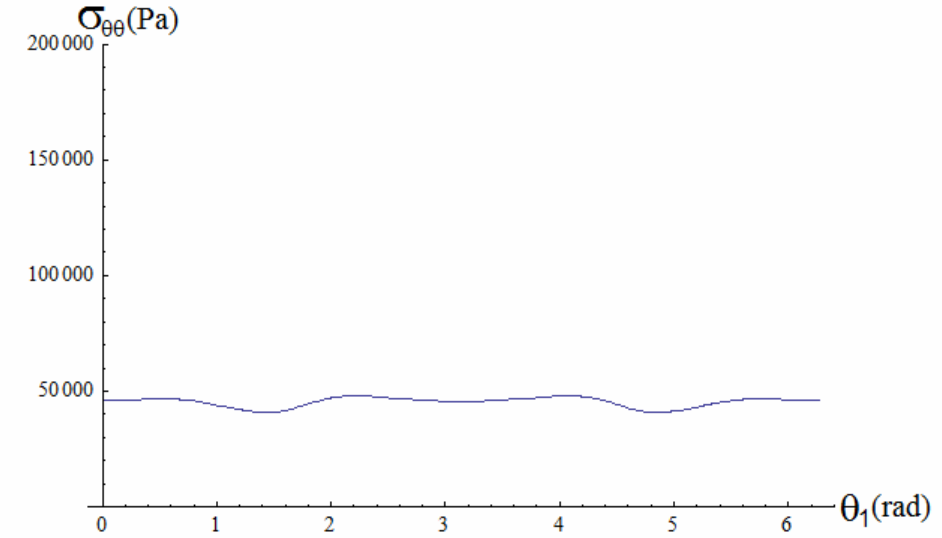
Şekil C.2: $\omega = 1000$ rad/s, D=20m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi



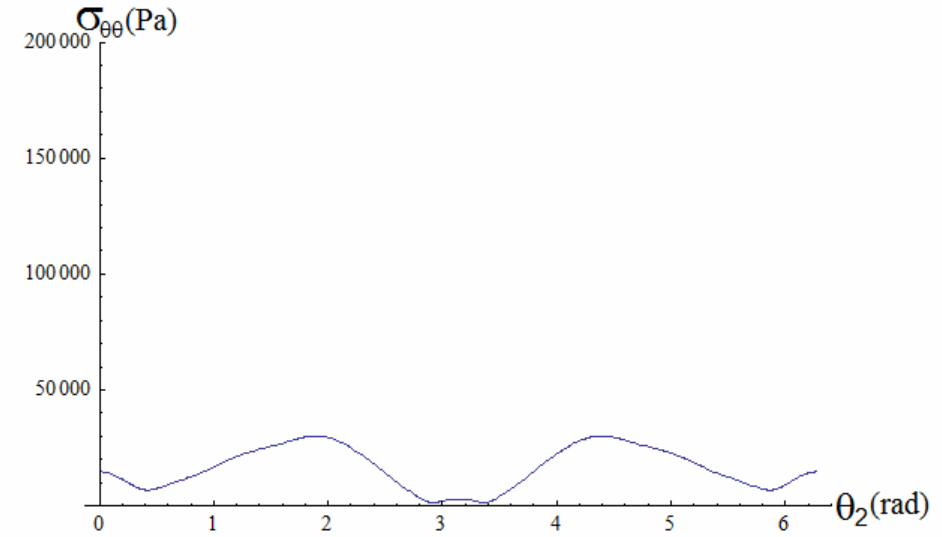
Şekil C.3: $\omega = 1000$ rad/s, D=35m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



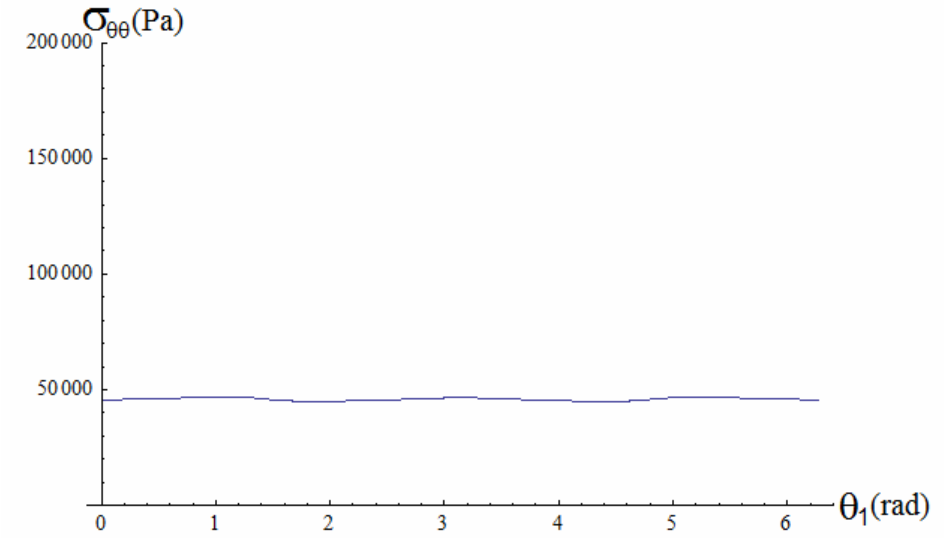
Şekil C.4: $\omega = 1000$ rad/s, D=35m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi



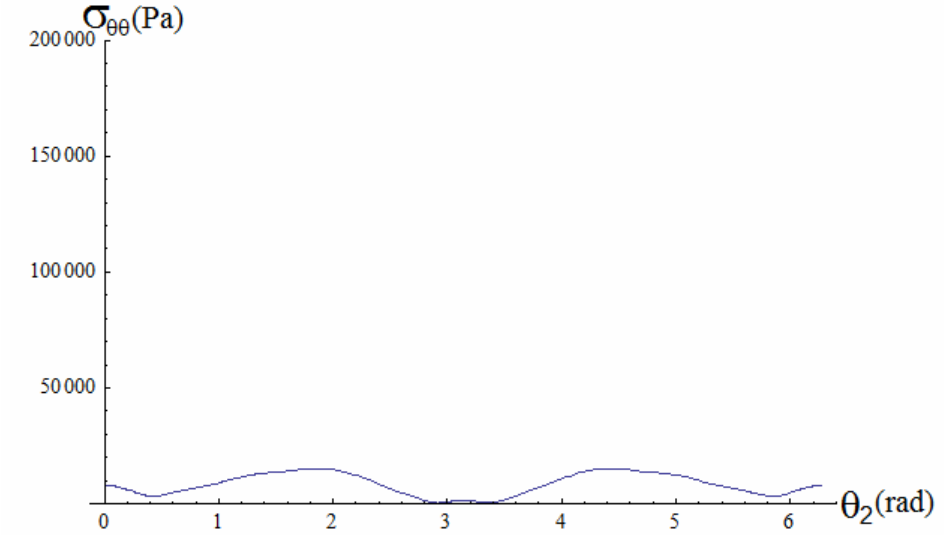
Şekil C.5: $\omega = 1000$ rad/s, D=100m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi



Şekil C.6: $\omega = 1000$ rad/s, D=100m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi

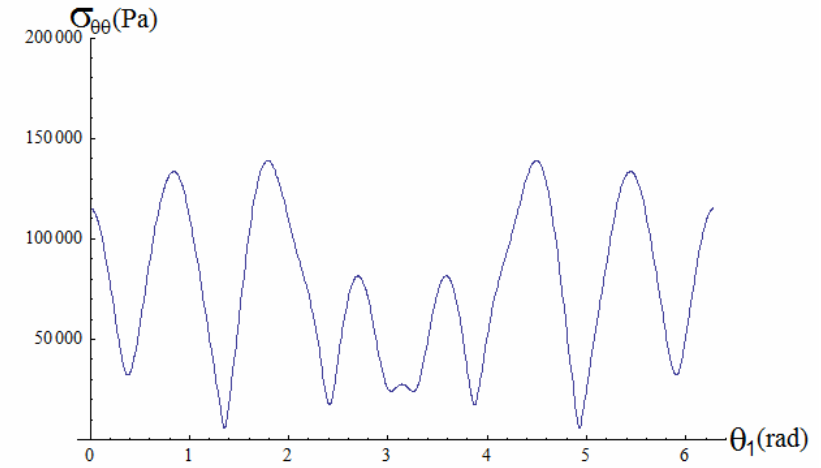


Şekil C.7: $\omega = 1000$ rad/s, D=400m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_1'e göre değişimi

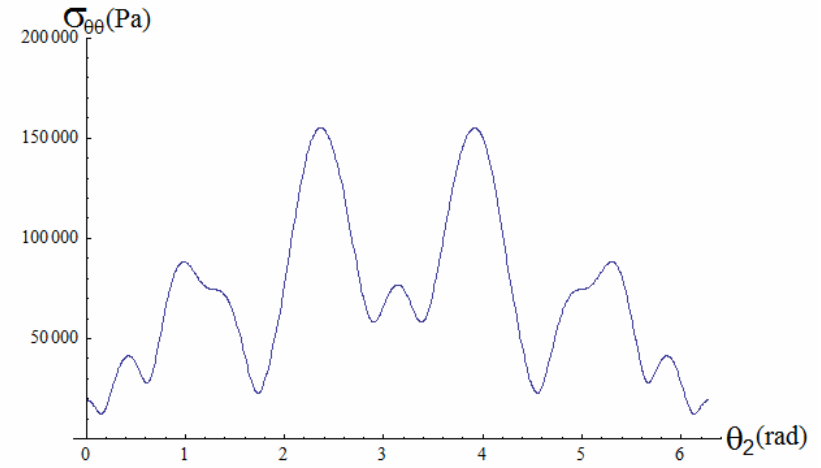


Şekil C.8: $\omega = 1000$ rad/s, D=400m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nin θ_2'ye göre değişimi

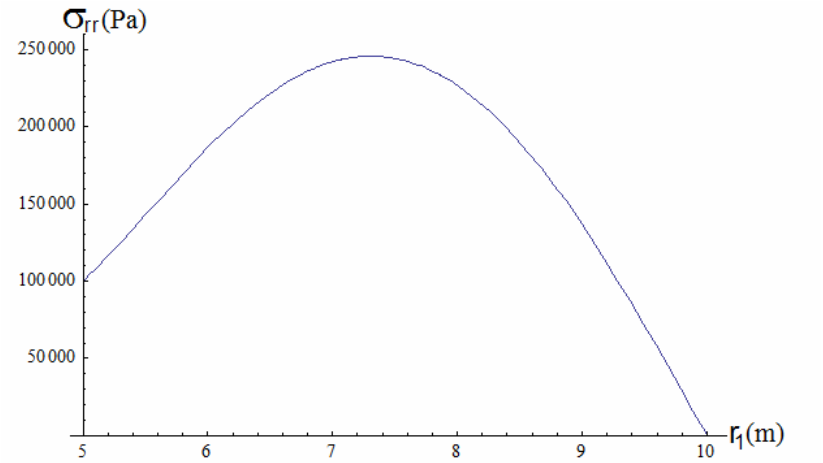
EK D: AÇISAL FREKANS, OYUK YARIÇAPLARI VE İKİ OYUK ARASINDAKİ MESAFENİN ÇEŞİTLİ DEĞERLERİ İÇİN BULUNAN ÇÖZÜMLERE AİT GRAFİKLER



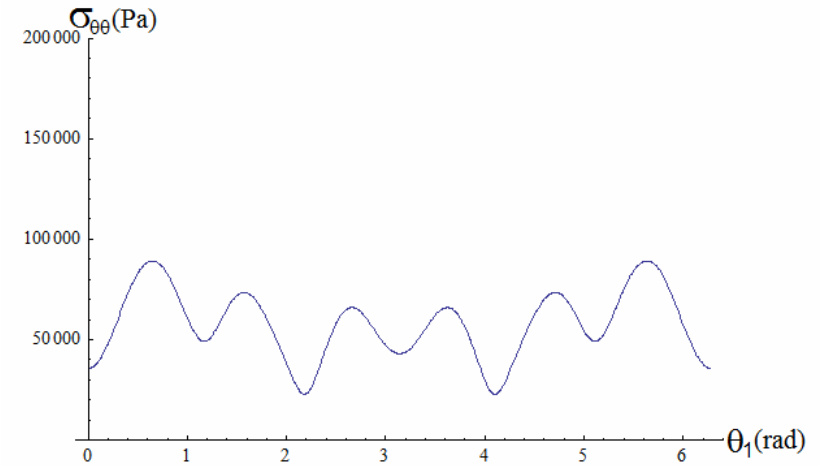
Şekil D.1: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi



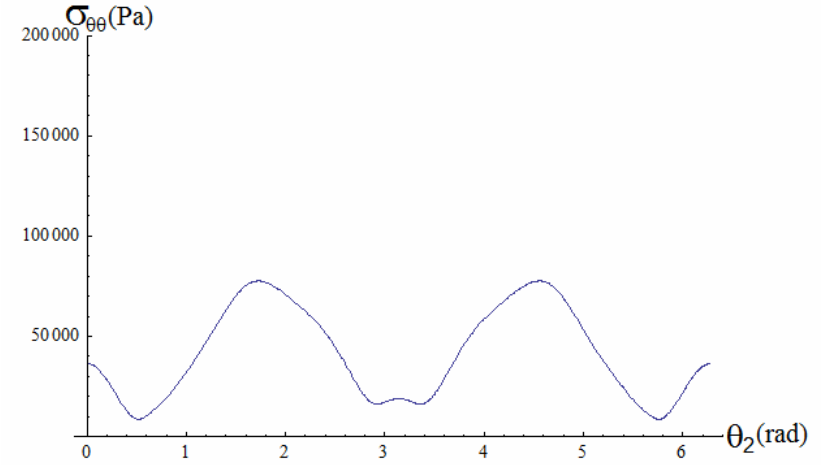
Şekil D.2: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi



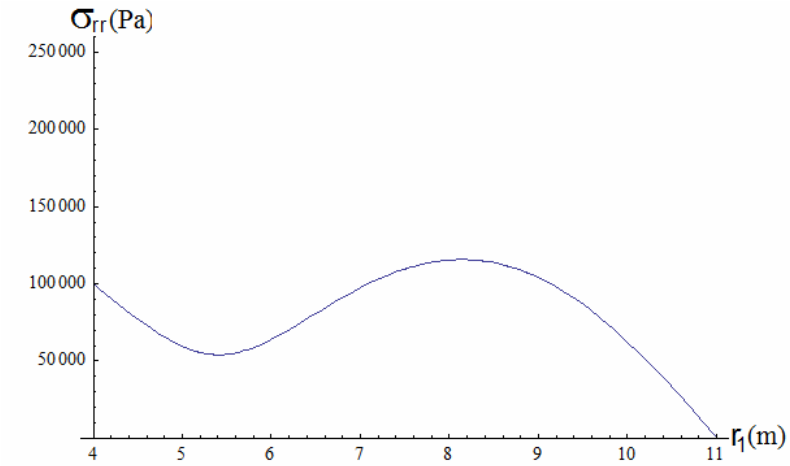
Şekil D.3: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



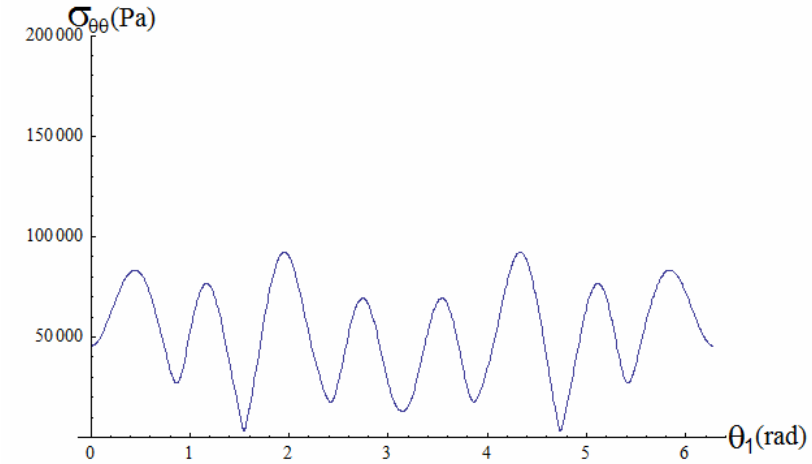
Şekil D.4: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=4m, a_2=4m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi



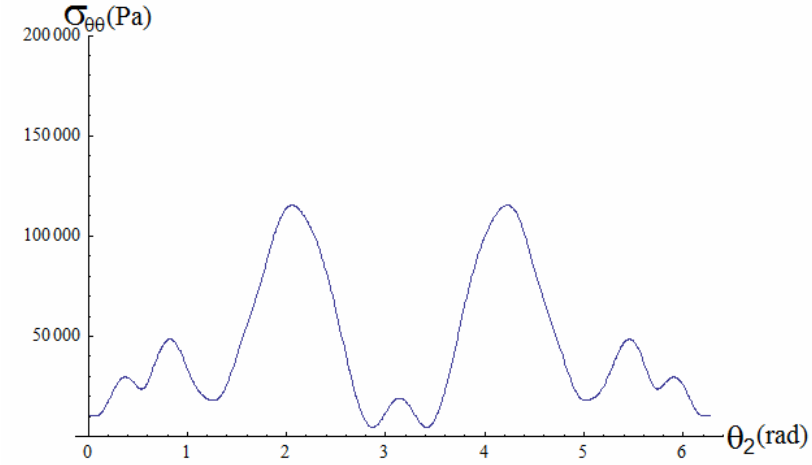
Şekil D.5: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=4m, a_2=4m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi



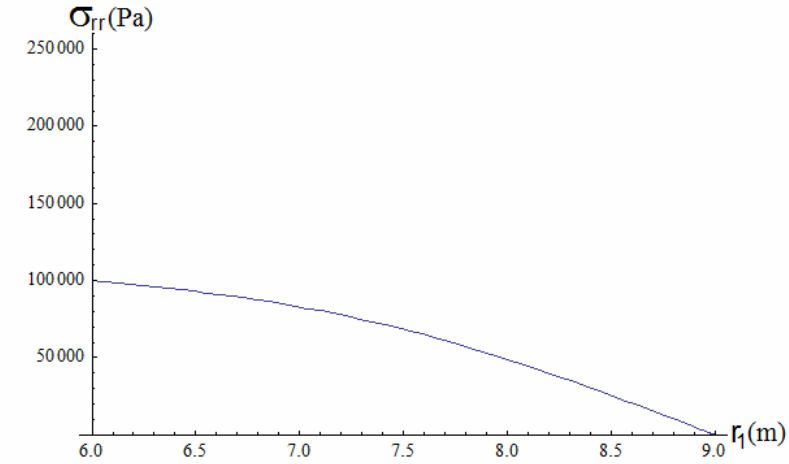
Şekil D.6: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=4m, a_2=4m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



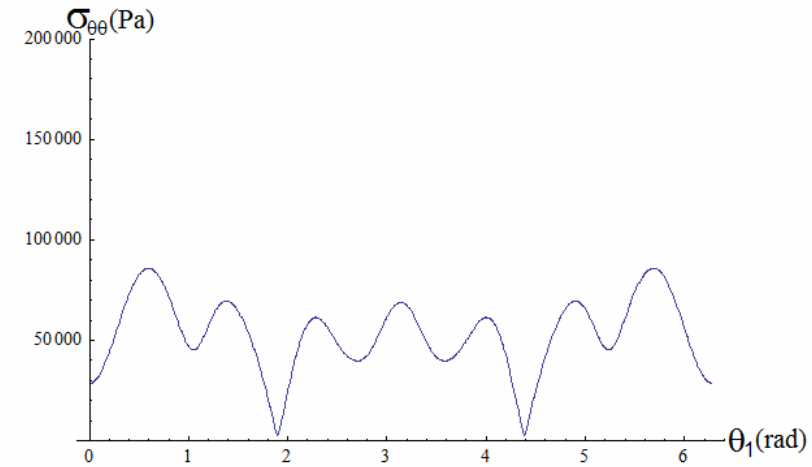
Şekil D.7: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=6m, a_2=6m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi



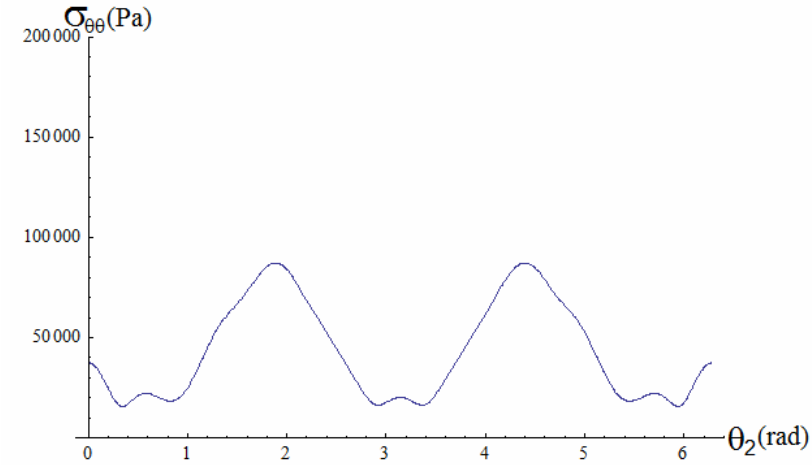
Şekil D.8: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=6m, a_2=6m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi



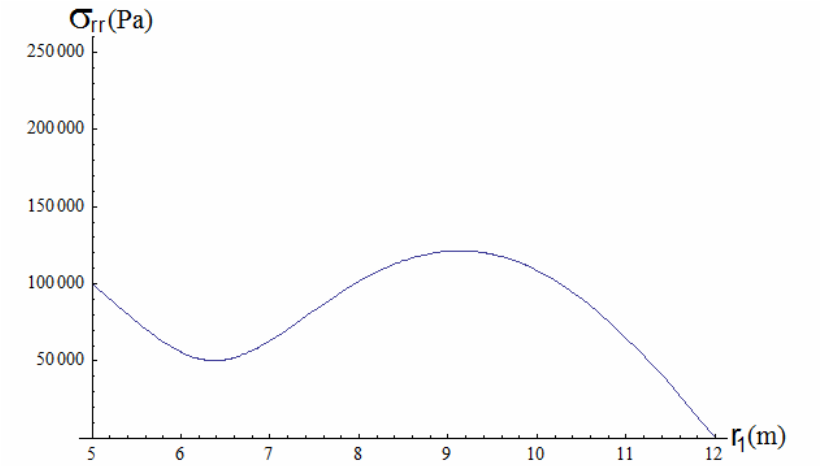
Şekil D.9: $\omega = 1000$ rad/s, D=15m, a_1=6m, a_2=6m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr}'nin r_1'e göre değişimi



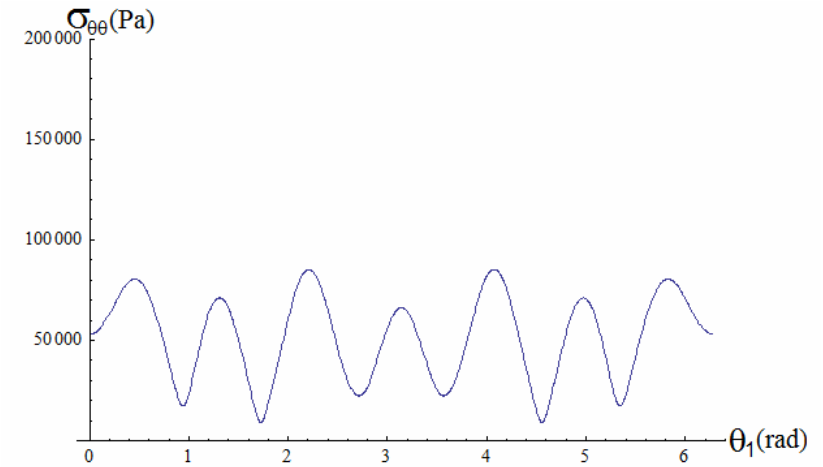
Şekil D.10: $\omega = 1000$ rad/s, D=17m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_1'ye göre değişimi



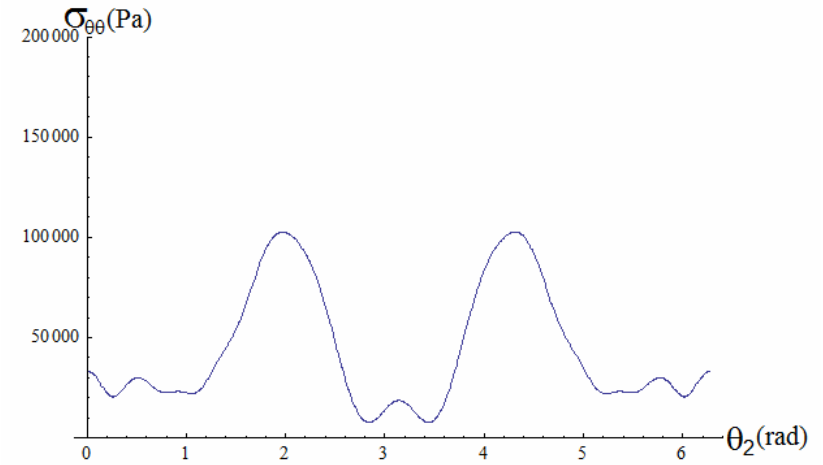
Şekil D.11: $\omega = 1000$ rad/s, D=17m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$'nın θ_2'ye göre değişimi



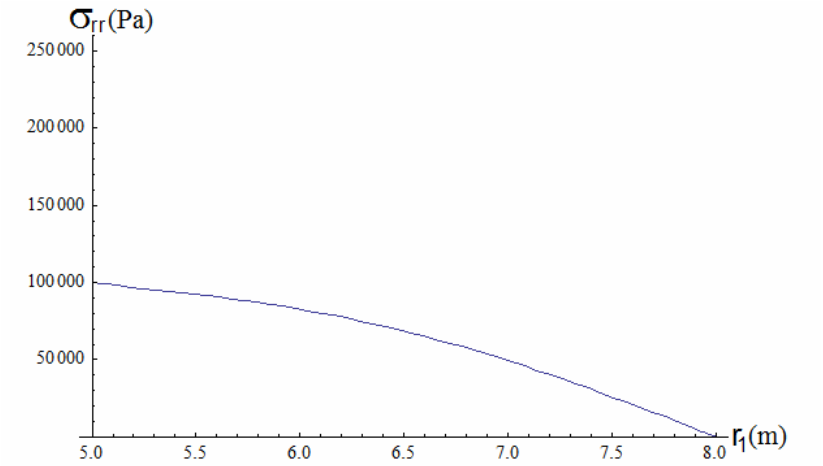
Şekil D.12: $\omega = 1000$ rad/s, D=17m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi



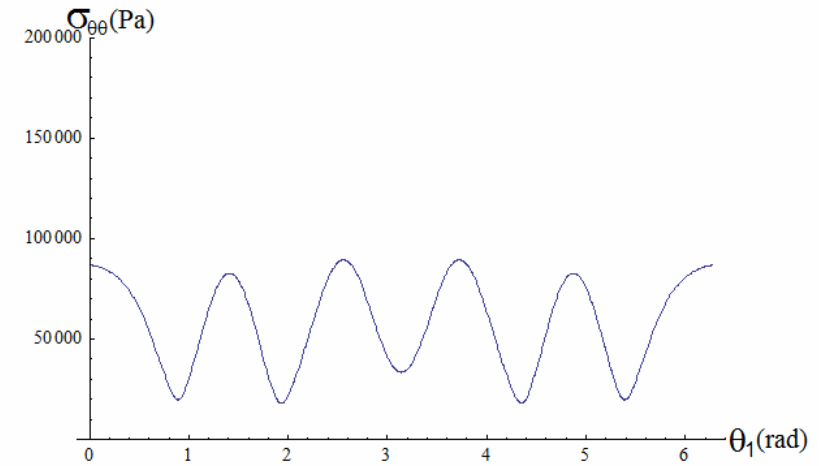
Şekil D.13: $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi



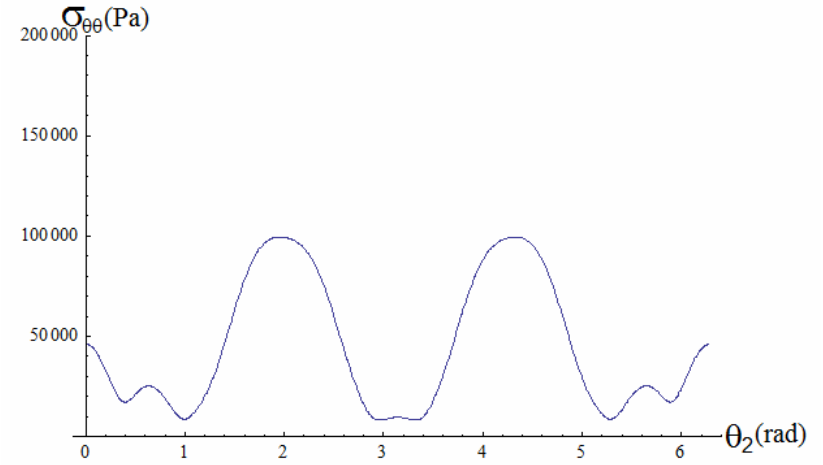
Şekil D.14: $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi



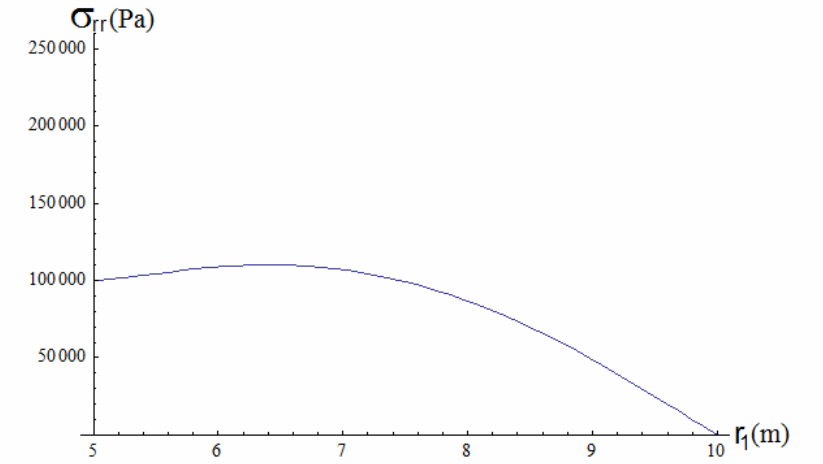
Şekil D.15: $\omega = 1000$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi



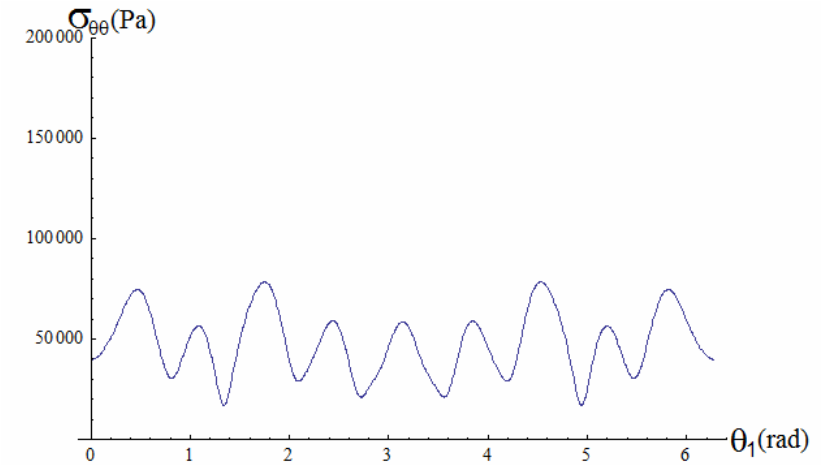
Şekil D.16: $\omega = 750$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi



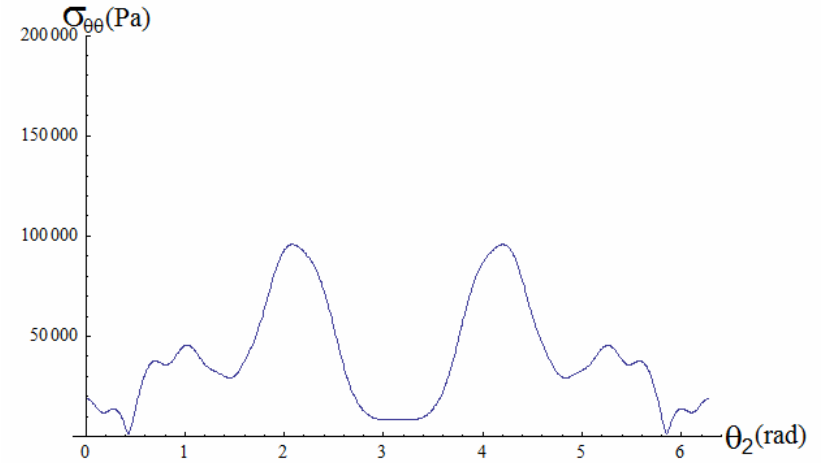
Şekil D.17: $\omega = 750$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi



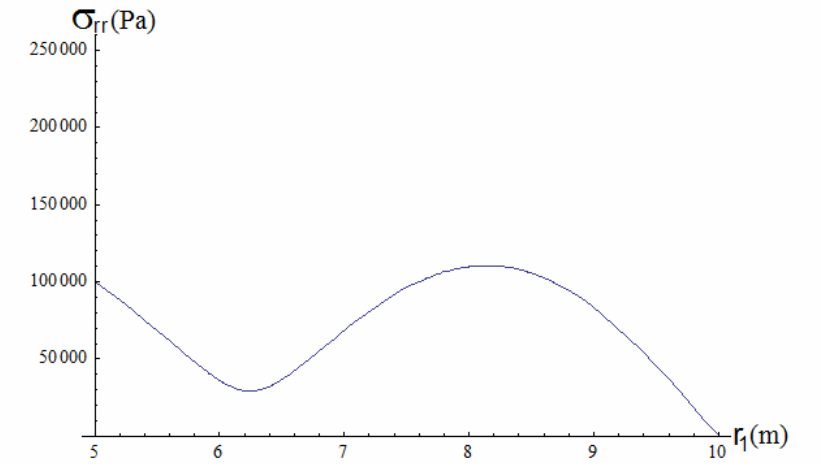
Şekil D.18: $\omega = 750$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi



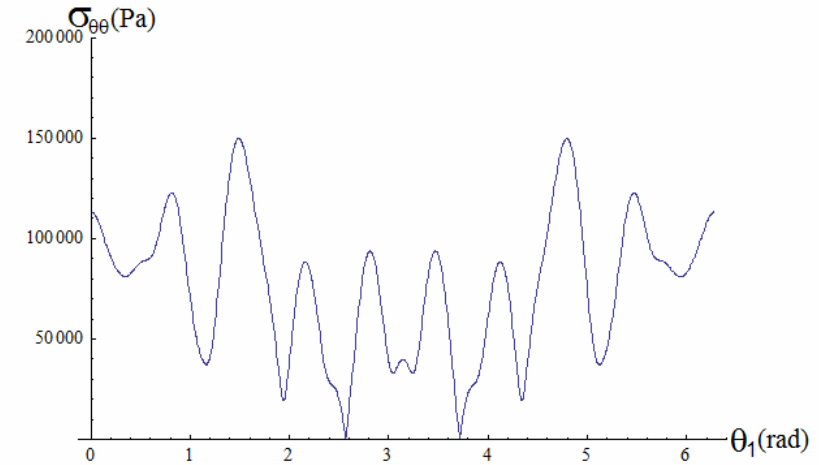
Şekil D.19: $\omega = 1500$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'ye göre değişimi



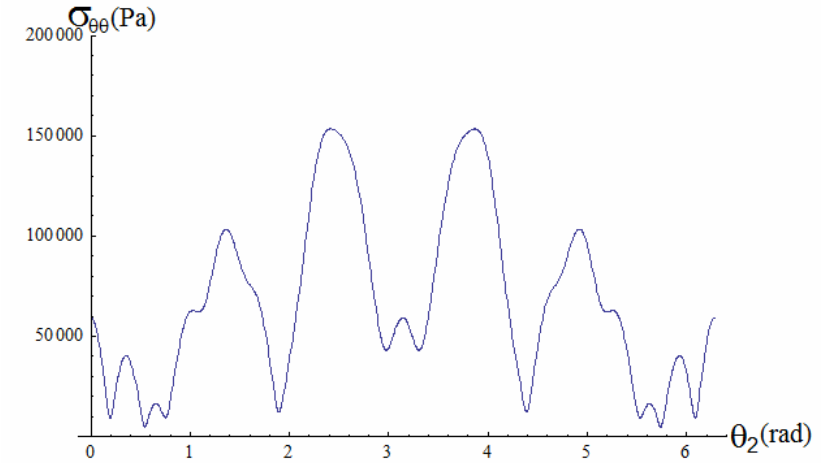
Şekil D.20: $\omega = 1500$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'ye göre değişimi



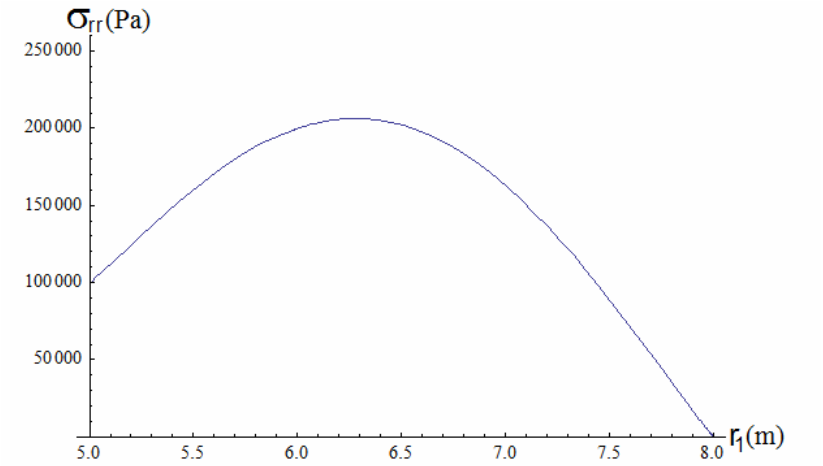
Şekil D.21: $\omega = 1500$ rad/s, D=15m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi



Şekil D.22: $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_1 = a_1$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_1 'e göre değişimi



Şekil D.23: $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $r_2 = a_2$ ve U=12 için $\sigma_{\theta\theta}$ 'nın θ_2 'e göre değişimi



Şekil D.24: $\omega = 1500$ rad/s, D=13m, a_1=5m, a_2=5m, $\theta_1 = 0^0$ ve U=12 için σ_{rr} 'nin r_1 'e göre değişimi

ÖZGEÇMİŞ

Hasan Faik KARA 1982 yılında Konya'da doğdu. Lise öğrenimini, 1998 – 2001 yılları arasında Meram Anadolu Lisesinde tamamlayıp, 2001 yılında İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne girdi ve 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsüne kayıt olan yazar, 2006 Aralıkta İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mekanik Anabilim Dalına araştırma görevlisi olarak girmiş olup halen bu görevini ifa etmektedir.