İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTROMANYETİK IŞINLAYICI DİZİLERİ İÇİN ZAMAN-FREKANS DOMENİ GREEN FONKSİYONU GÖSTERİLİMLERİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Çağatay ULUIŞIK

Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı : TELEKOMÜNİKASYON MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTROMANYETİK IŞINLAYICI DİZİLERİ İÇİN ZAMAN-FREKANS DOMENİ GREEN FONKSİYONU GÖSTERİLİMLERİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Çağatay ULUIŞIK
(504022152)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Mart 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Haziran 2008

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Ercan TOPUZ (İTÜ)**
Eş Danışmanı :	**Prof.Dr. Levent SEVGİ (DÜ)**
Diğer Jüri Üyeleri :	**Prof.Dr. Tayfun GÜNEL (İTÜ)**
	Prof.Dr. Sedef KENT (İTÜ)
	Prof.Dr. Selim ŞEKER (BÜ)
	Doç.Dr. Özlem Aydın ÇİVİ (ODTÜ)
	Doç.Dr. Ali YAPAR (İTÜ)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Doktora çalışmalarım boyunca benden her türlü yardımı esirgemeyen sayın hocalarım Ercan Topuz ve Levent Sevgi'ye ve bu süre zarfında sabır ve desteğinden ötürü sevgili eşim Özlem Uluışık'a teşekkür ederim.

Haziran 2008 Çağatay ULUIŞIK

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **v**
TABLO LİSTESİ **vi**
ŞEKİL LİSTESİ **vii**
ÖZET **x**
SUMMARY **xii**

1. GİRİŞ **1**
1.1 Tarihçe 1
1.2 Orijinal Katkı 5
1.3 Kapsam 8

2. REFERANS ÇÖZÜMLER **10**
2.1 Frekans Domeninde Eleman-Eleman Toplama 10
2.1.1 Çizgisel Dipol Dizileri 10
2.1.2 Çizgisel Dipol Dizileri için Hızlı Yakınsayan Alternatif Çözüm 12
2.1.3 Dikdörtgen ve Üç Boyutlu Dipol Dizileri 18
2.1.4 Anten_GUI Yazılımı 20
2.2 Zaman Domeninde Eleman-Eleman Toplama 23
2.2.1 Çizgisel Dipol Dizileri 23
2.2.2 Dikdörtgen ve Üç Boyutlu Dipol Dizileri 25

3. FREKANS DOMENİNDE FLOQUET DALGALAR **26**
3.1 Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri 26
3.2 Yarı-Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri 33
3.3 Sonlu Çizgisel Dipol Dizileri 46
3.4 Dikdörtgen Dipol Dizileri 48
3.5 Üç boyutlu ve Rastgele Yerleştirilmiş Dipol Dizileri 50

4. ZAMAN DOMENİNDE FLOQUET DALGALAR **55**
4.1 Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri 55
4.1.1 Frekans Domeninden Direk Dönüşüm 55
4.1.2 Yüksek Frekans Yaklaşıklığı 62
4.2 Yarı-Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri 63
4.2.1 Dürtü Cevabı 63
4.2.2 Kısa Süreli Darbelerle Uyarma 67
4.2.3 q=0 Terimi için Gerekli Konvolüsyon Integralinin Yaklaşık Hesabı 70
4.3 Sonlu Çizgisel Dipol Dizileri 81
4.4 Sonlu Dikdörtgen Dipol Dizileri 84
4.5 Üç Boyutlu ve Rastgele Yerleştirilmiş Dipol Dizileri 88

5. SONUÇLAR **90**

KAYNAKLAR **92**

EKLER **95**

ÖZGEÇMİŞ **114**

KISALTMALAR

FD	: Floquet Dalgalar
YFD	: Yayılan Floquet Dalgalar
SFD	: Sızıntı Floquet Dalgalar
EDİ	: En Dik İniş
YSÇD	: Yarı-sonsuz Çizgisel Dizi
SÇD	: Sonlu Çizgisel Dizi
SDD	: Sonlu Dikdörtgen Dizi
3DD	: Üç Boyutlu Dizi
YAY	: Yapay Açıklık Yaklaşıklığı
GUI	: Kullanıcı Ara Yüzü
FFT	: Hızlı Fourier Dönüşümü

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1 : $k_{\rho q}$ 'nun reel ya da imajiner çıkmasına göre β_q kutupları ve karşı gelen Floquet Dalgalar 37

Tablo 3.2 : β_q kutuplarının 3 farklı bölgedeki k ve k_{zq} cinsinden değerleri 40

Tablo 3.3 : 3 boyutlu bir dizinin $0 \prec \theta \prec 360^\circ$ arasında (1^σlik artımlarla) ışıma diyagramını, eleman-eleman toplama yöntemi ve Floquet dalgalar kullanılarak elde etmek için gerekli işlem sürelerinin karşılaştırılması ($d_x=d_y=0.25\lambda$, $d_z=1\lambda$, $\eta_x=0$, $\eta_y=0.4$, $\eta_z=0.25$) 51

Tablo 4.1 : η_z ve τ' nun değerlerine göre (4.6) eşitliği ile verilen zaman domeni dispersiyon denkleminin $z_i'(t)$ çözümleri 58

Tablo 4.2 : $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ konvolüsyonunun sayısal ve analitik olarak kapalı formda hesaplanması için gerekli işlem sürelerinin karşılaştırılması 80

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 : Literatürde incelenmiş olan farklı düzlemsel periyodik dipol dizileri..... 2
Şekil 2.1 : Sonsuz uzunluklu, çizgisel, periyodik dipol dizisine ait geometri..... 10
Şekil 2.2 : Yarı-sonsuz uzunluklu, çizgisel dipol dizisine ait geometri..... 13
Şekil 2.3 : A_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişiminin, eleman-eleman toplama yönteminde farklı N_z değerleri için karşılaştırması. Elemanlar arası mesafe $d_z=2\lambda$, elemanlar arası normalize faz farkı a)$\eta_z=0.25$ b)$\eta_z=0$ 15
Şekil 2.4 : A_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişiminin, eleman-eleman toplama yönteminde farklı N_z değerleri alınarak hesaplanan değerlerinin, (2.14) eşitliği ile bulunan asimptotik çözüm ile karşılaştırılması ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=10^{-5}$)..... 17
Şekil 2.5 : E_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişiminin, eleman-eleman toplama yönteminde farklı N_z değerleri için karşılaştırması. Elemanlar arası mesafe $d_z=2\lambda$, elemanlar arası normalize faz farkı $\eta_z=0$. 18
Şekil 2.6 : Dikdörtgen dipol dizisine ait geometri..... 18
Şekil 2.7 : Üç boyutlu dipol dizisine ait geometri..... 19
Şekil 2.8 : ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü (GUI)..... 21
Şekil 2.9 : ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile eleman-eleman toplama yönteminin karşılaştırılması (M=10, N=6, $d_x=1\lambda$, $d_y=0.5\lambda$, $\eta_x=1/8$, $\eta_y=0$, f=300MHz)..... 22
Şekil 2.10 : ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile 3 boyutlu ışıma diyagramı (M=10, N=6, $d_x=1\lambda$, $d_y=0.5\lambda$, $\eta_x=1/8$, $\eta_y=0$, f=300 MHz)..... 23
Şekil 3.1 : a) $|k_{zq}|<|k|$ ise $k_{\rho q}$ reel ve yayılan Floquet dalgalar) **b)** $|k_{zq}|>|k|$ ise $k_{\rho q}$ imajiner ve sızıntı Floquet dalgalar ($Im(k_{\rho q})<0$)..... 29
Şekil 3.2 : Sonsuz uzunluklu çizgisel bir dipol dizisinin z=0'da oluşturacağı E_z alan bileşeninin genliğinin ρ mesafesi ile değişimi için yayılan Floquet dalgalar ve farklı sayıda sızıntı Floquet dalgalar kullanılarak bulunan çözümün, eleman-eleman toplama yöntemi ile bulunan referans çözüm ile karşılaştırılması ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=0.25$) 31
Şekil 3.3 : a) Eleman-eleman toplama yöntemi ile **b)** Floquet dalgalar ile bulunan E_z alan değerlerinin z ve ρ koordinatlarına göre değişimi ($d_z=1\lambda$, $\eta_z=0.25$)..... 32
Şekil 3.4 : Kompleks k_z düzlemi..... 35
Şekil 3.5 : α-düzleminde integrasyon eğrisi C_α ve β_q kutuplarının yerleri..... 36
Şekil 3.6 : En dik iniş yolu (EDİ), semer noktası θ ve β_q kutuplarının yerleri..... 37
Şekil 3.7 : Floquet dalganın gözlem noktasına ulaşıp ulaşamama durumu..... 39
Şekil 3.8 : Yarı-sonsuz çizgisel bir dizinin orijinden $R_d=2\lambda$ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=0.25$) 45

Şekil 3.9 : Yarı-sonsuz çizgisel bir dizinin z=0'da oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin ρ mesafesi ile değişimi ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=1/8$)..... 46
Şekil 3.10 : Sonlu çizgisel dipol dizisine ait geometri ve yapay açıklık yaklaşımı..... 46
Şekil 3.11 : $N_z=10$ elemanlı sonlu çizgisel bir dizinin orijinden $R_d=12\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile ρ-z düzleminde değişimi ($d_z=1\lambda$, $\eta_z=0.25$)..... 47
Şekil 3.12 : Sonlu çizgisel dipol dizisine ait geometri ve yapay açıklık yaklaşımı..... 48
Şekil 3.13 : $N_x x N_z=4x21$'lik dikdörtgen bir dizinin yz düzleminde orijinden $R_d=100\lambda$ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi ($d_x=0.1\lambda$, $d_z=0.1\lambda$, $\eta_x=0.2$, $\eta_z=0.4$) 49
Şekil 3.14 : $N_x x N_y x N_z=4x2x21$'lik üç boyutlu bir dizinin yz düzleminde orijinden $R_d=100\lambda$ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi ($d_x=0.1\lambda$, $d_y=0.25\lambda$, $d_z=0.1\lambda$, $\eta_x=0.2$, $\eta_y=1$, $\eta_z=0.4$)..... 50
Şekil 3.15 : Yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak modellenebilecek bazı düzlemsel dipol dizileri..... 52
Şekil 3.16 : a) Şekil 3.15c'deki trapezoidal dizinin xy düzleminde orijinden $R_d=100\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z'nin genliğinin φ açısı ile değişimi ($N_z=12-2m$, m=0,1,2,3,4,5, $N_x=6$, $d_x=d_z=0.25\lambda$, $\eta_x=0$, $\eta_z=0.5$) **b)** Şekil 3.15f'deki üçgen dizinin xy düzleminde orijinden $R_d=100\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z'nin genliğinin φ açısı ile değişimi ($d_x=d_z=0.25\lambda$, $\eta_x=0.125$, $\eta_z=0.5$)..... 54
Şekil 4.1 : a) $\tau=\tau_0$ başlangıç anında z_0' noktasından β_0 açısıyla hareket eden Floquet dalga **b)** $\tau>\tau_0$ anlarında ayrık iki $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ noktalarından β_1(t) veβ_2(t) açılarıyla hareket eden Floquet dalgalar..... 61
Şekil 4.2 : a) $\tau>\tau_0$ anlarında ayrık iki $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ noktalarından β_1(t) ve β_2(t) açılarıyla hareket eden Floquet dalgalar **b)** $z_2'(t)<0$ ise sadece $z_1'(t)$ noktasından β_1(t) açılarıyla hareket eden Floquet dalgaların katkısı..... 64
Şekil 4.3 : Normalize Rayleigh darbesi **a)** zaman domeninde $\hat{G}(t)$ darbesinin normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimi **b)** frekans domeninde $\omega_M|G(\omega)|$'nin frekansla değişimi 69
Şekil 4.4 : Normalize faz farkı $\eta_z=0.6$ ve ardışık dipoller arası mesafe $d_z=0.1$m olan yarı-sonsuz çizgisel bir dipol dizisi tarafından uyarılan 0. Floquet dalga $\hat{A}_0^{FW}(t)$ ve 0. kırınan dalga $\hat{A}_0^{d}(t)$'nin $\rho=1.5$m ve z=1.7m gözlem noktasında normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimleri..... 71
Şekil 4.5 : Normalize Rayleigh darbesi ve üç tane dikdörtgen darbenin süperpozisyonu ile yapılan yaklaşıklık..... 72

Şekil 4.6 : η_z=0.6, d_z=0.1m, ρ=1.5m ve z=1.7m için $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$'nin $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman sayısal konvolüsyon ile hesaplanan değerleri ile, $\hat{G}(t)$ 3 tane dikdörtgen darbe alındığı zaman analitik konvolüsyon ile kapalı formda bulunan ifadesinin t/T normalize zaman ile değişimlerinin karşılaştırılması 75

Şekil 4.7 : Normalize Rayleigh darbesi ve 5 tane dikdörtgen darbenin süperpozisyonu ile yapılan yaklaşıklık 76

Şekil 4.8 : η_z=0.6, d_z=0.1m, ρ=1.5m ve z=1.7m için, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman ve 5 tane dikdörtgen darbe ile modellendiği zaman bulunan $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$'lerin karşılaştırılması 78

Şekil 4.9 : Normalize Rayleigh darbesi ve 11 tane dikdörtgen darbenin süperpozisyonu ile yapılan yaklaşıklık 79

Şekil 4.10 : η_z=0.6, d_z=0.1m, ρ=1.5m ve z=1.7m için, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman ve 11 tane dikdörtgen darbe ile modellendiği zaman bulunan $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$'lerin karşılaştırılması 80

Şekil 4.11 : 10 elemanlı (N_z=10) çizgisel bir dipol dizisinin **a)** ρ=1.5m, z=–1.5m **b)** ρ=1.5m, z=0.5m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$ (d_z=0.1m, η_z=0.2, T=d_z/c) 82

Şekil 4.12 : 4x21 elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin x=0m, y=0.4m, z=1m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$'nin normalize zaman ile değişimi (d_x=0.1m, d_z=0.1m, η_x=0.2, η_z=0.4) 85

Şekil 4.13 : 3x100 elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin **a)** x=1000m, y=1000 $\sqrt{14}$ m, z=1000m **b)** x=2000m, y=1000 $\sqrt{11}$ m, z=1000m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$'nin normalize zaman ile değişimi (d_x=0.5m, d_z=0.1m, η_x=0.5, η_z =0.25) 88

Şekil 4.14 : Şekil 3.15c'deki trapezoidal dizinin x=0m, y=10m, z=0m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$'nin normalize zaman t/T (T=d_z/c) ile değişimi (d_x=d_z=0.25m, η_x=0, η_z=0.5, N_z=12-2m (m=0,1,2,3,4,5), N_x=6) 89

ELEKTROMANYETİK IŞINLAYICI DİZİLERİ İÇİN ZAMAN-FREKANS DOMENİ GREEN FONKSİYONU GÖSTERİLİMLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, periyodik dipol dizilerinin frekans ve zaman domeni ışınım karakteristikleri incelenmiştir. Çok sayıda ışınlayıcı / saçıcı içeren periyodik yapılar, elektronik tarama kabiliyetli anten dizilerinden, kırınım ızgaralarına, fotonik kristal fiberlerden metamateryallere kadar geniş bir kullanım alanı bulmaktadır.

Sırayla uyarılan / doğrusal fazlı, periyodik bir dipol dizisinin, bir gözlem noktasında oluşturacağı alan, her bir dipolün katkısının ayrı ayrı hesaplanıp süperpozisyonu ile bulunabilir. Ancak eleman-eleman toplama ismi verilen bu klasik yöntem, çok sayıda dipol içeren diziler için işlem süresini çok uzatmakta ve yayılan, sızıntı, kırınan gibi farklı dalga bileşenlerinin etkilerinin ayrı ayrı incelenmesine ve bir gözlem noktasındaki katkılarının bağıl ağırlıklarının belirlenmesine olanak vermemektedir.

Diğer taraftan, periyodiklik özellikleri kullanılarak, dizinin toplam ışınım alanı için Floquet dalgaları ve sonsuz periyodik bir dizinin sonlandırılmasının etkilerini karakterize eden uç kırınım bileşenlerini içeren alternatif bir formülasyon elde edilebilir.

Biri diğerine göre kaydırılmış ve uygun şekilde ağırlaştırılmış iki yarı-sonsuz çizgisel periyodik dizinin farkını alarak sonlu çizgisel diziler modellenebilir. Bu tezde önerilen ve *yapay açıklık yaklaşımı* adı verilen yöntemde ise, L_z kadar kaydırılmış dizinin bir P(x, y, z) gözlem noktasında oluşturacağı alan, diziyi kaydırmak yerine gözlem noktasını zıt yönde kaydırarak, orijinal kaydırılmamış dizinin bir $P'(x, y, z\text{-}L_z)$ sanal gözlem noktasında oluşturacağı alan bulunarak hesaplanmaktadır.

Önerilen bu *yapay açıklık yaklaşımı,* çizgisel dipol dizilerinin süperpozisyonu alınarak elde edilebilen her türlü düzlemsel ve üç boyutlu dipol dizisinin etkin biçimde modellenmesinde de kullanılmıştır. Bu yaklaşım kullanılarak iki ve üç boyutlu dipol dizilerinin hem frekans hem de literatürde pek yer almamış zaman domeni ışınım karakteristikleri incelenmiş ve sayısal çözüm örnekleri verilmiştir.

Dipolleri süren kaynak fonksiyonunun sabit genlikli, zamanda sınırlı, dikdörtgen bir yapıda olması durumunda Green fonksiyonu gösterilimlerini içeren konvolüsyon integrallerinin analitik olarak değerlendirilebileceğinden hareketle, bu tezde konvolüsyon integrallerinin yaklaşık olarak belirlenmesi için kaynak fonksiyonuna genlik ve süreleri adaptif biçimde belirlenen parça parça sürekli bir dizi dikdörtgen darbe ile yaklaşıklık yapılmasına dayanan bir yöntem geliştirilmiştir.

Tezde, Floquet dalga gösterilimleri kullanılarak hesaplanan sonuçların doğrulanması (validasyonu) için bunlar eleman eleman toplama yöntemi ile elde edilen kesin sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu kapsamda ayrıca, klasik eleman eleman toplama yönteminin yakınsaklık özelliklerini iyileştiren bir formülasyon geliştirilmiştir.

Bu tezde Floquet dalgası gösterilimlerinin bir, iki ve üç boyutlu, çok elemanlı, periyodik dipol dizilerinin zaman / frekans domeni cevaplarının hesaplanmasında oldukça yüksek doğruluk ve etkinlik sağladığı ortaya konulmuştur.

TIME AND FREQUENCY DOMAIN GREEN'S FUNCTION REPRESENTATIONS FOR ARRAYS OF ELECTROMAGNETIC RADIATORS

SUMMARY

In this thesis, frequency and time domain radiation characteristics of periodic dipole arrays are investigated. Periodic structures involving large numbers of radiators / scatterers have a vast range of applications ranging from electronically scanned antenna arrays, diffraction gratings, photonic crystal fibers to metamaterials.

The field radiated by a sequentially excited / linearly phased dipole array can be calculated via a superposition over the contributions of individual dipoles in the array. This classical approach called element-by-element summation suffers from two shortcomings: i) its numerical implementation becomes time consuming and inefficient for large size arrays ii) it does not provide a framework for identification of the mechanisms generating different wave objects (propagating, evanescent, diffracted waves) and their relative weights at given observation points.

On the other hand, by taking advantage of the periodicity, the problem can be cast into an alternative formulation wherein the contributions of individual elements are represented collectively in terms of Floquet waves, which are augmented with tip diffracted wave constituents to account for the truncation of a strictly periodic sequence at a large but finite number.

The field radiated by a finite, periodic line array of dipoles at a given observation point can be synthesized via superposition of shifted and properly weighted replicas of the field radiated by semi-infinite line array of dipoles. In this thesis, we propose a synthetic aperture type approach for calculation of the field radiated by a finite line array of length L_z, wherein the contribution of the shifted semi-infinite line array is accounted for by the contribution of the original array at an oppositely shifted virtual observation point $P'(x, y, z\text{-}L_z)$.

The proposed synthetic aperture approach is also used for efficient modeling of radiation from structures involving line arrays organized spatially to form planar and 3D arrays. In this thesis, utilizing the proposed approach radiation from 2D and 3D dipole arrays are calculated and examples of numerical results are presented both in the frequency domain and also in the, heretofore scarcely investigated, time domain.

For obtaining the response for realistic dipole excitations, we introduced an accurate analytic approximation technique for calculating the involved convolution integral, which is based on an adaptive windowing scheme wherein the pulse excitation is represented approximately via a set of rectangular pulses with adaptively determined amplitudes and time extends. Following this approach the convolution is synthesized via the contributions from the set of rectangular pulses each of which can be calculated in closed form. The resulting formulation yields substantial reduction in the computation time.

The exact solution obtained via element-by-element summation is utilized as a comparison solution for validating the numerical results calculated via Floquet wave representations. In this context, a method is proposed to substantially improve the convergence properties of the element-by-element summation approach.

In this thesis, we have been able to verify that Floquet waves provide a very accurate and efficient representation for calculating time / frequency domain radiation from large, 1D, 2D and 3D periodic dipole arrays.

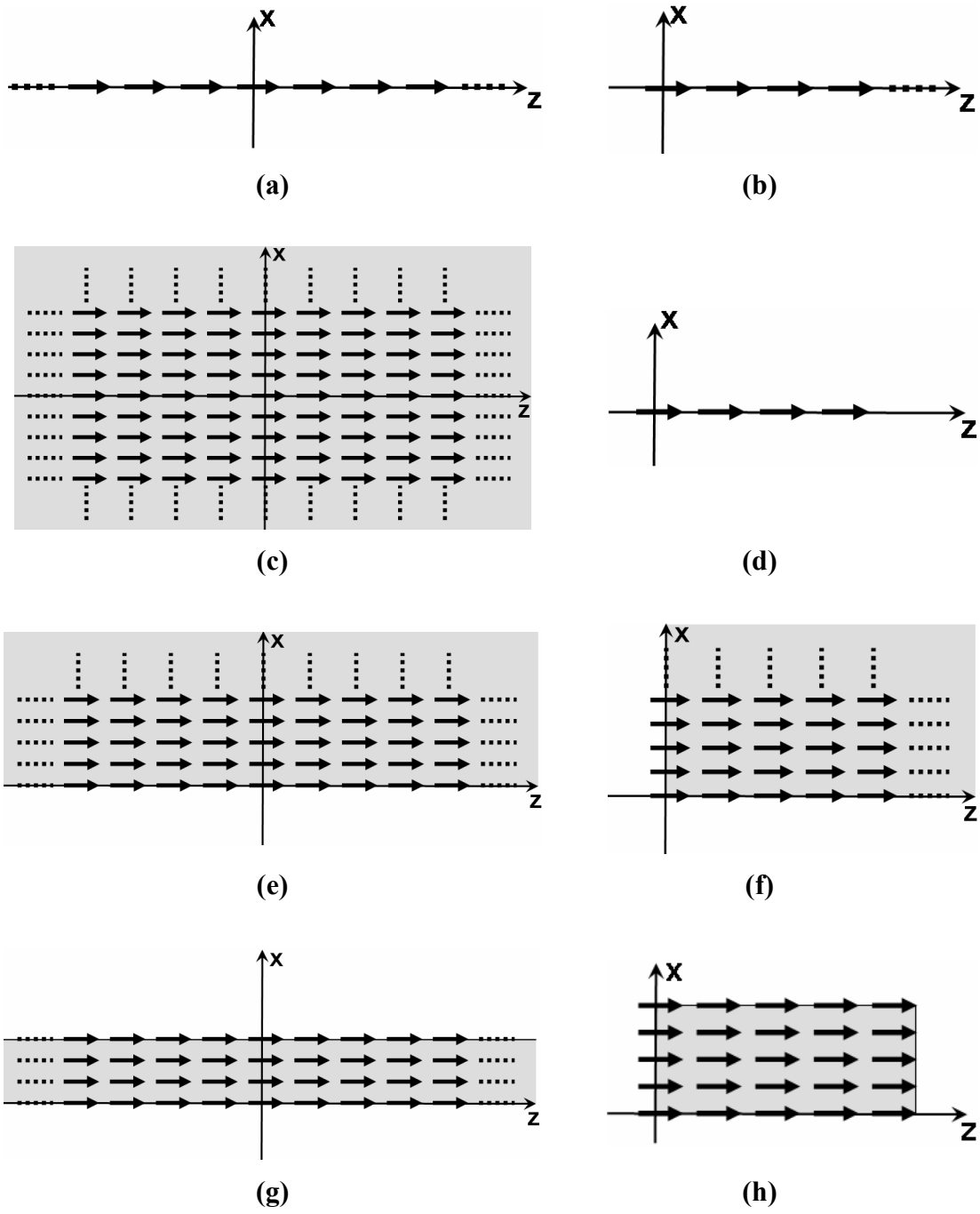
1. GİRİŞ

Periyodik dipol dizilerinin frekans ve zaman domeni karakteristiklerinin incelenmesi özelikle son 10 yılda literatürde geniş biçimde yer almaktadır. [1-22]. Bunun nedeni çok sayıda ışınlayıcı / saçıcı içeren periyodik yapıların uygulamada giderek daha fazla yer bulabilmesidir. Bu uygulama alanları elektronik tarama kabiliyetli anten dizilerinden, frekans seçici yüzeylere, kırınım ızgaralarına, fotonik kristal fiberlere ve metamateryallere kadar uzanmaktadır.

1.1 Tarihçe

Çok sayıda ışınlayıcı / saçıcı içeren periyodik dipol dizilerin çözümlerini, her bir dipolün etkisinin ayrı ayrı hesaplanıp (eleman-eleman) toplanmasına dayalı klasik yönteme alternatif olarak dizilerin periyodiklik özelliklerinden faydalanarak az sayıda Floquet dalga ve kırınan dalgalar cinsinden elde etmeye yönelik çok sayıda bilimsel çalışma yapılmış ve yayımlanmıştır. Floquet dalga analizleri işlem süresini kısaltma avantajının yanı sıra dalganın yayılan, sızıntı ve kırınan bileşenlerini ayrı ayrı inceleme imkanı sunarak olayın fiziğinin de daha iyi anlaşılmasını sağlamaktadır.

Bu konudaki önemli çalışmaların çoğu Prof. Felsen ve grubu tarafından yapılmıştır [5-14]. Frekans domeninde yapılan ilk araştırmalarda periyodik çizgisel dipol dizileri incelenmiştir. Şekil 1.1a'da gösterilen z-ekseni üzerinde sabit d_z aralıklarla yerleştirilmiş periyodik ve fazları doğrusal olarak arttırılan sonsuz tane dipol içeren dizi [7] nolu kaynakta incelenmiştir. z-yönlü bu dipollerin oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin sadece z-bileşeni olacaktır ve diğer bütün alan bileşenleri bu manyetik potansiyel (A_z) cinsinden bulunabilir. Bu çalışmada, klasik eleman-eleman toplama yönteminde Poisson toplamı kullanılarak ve Green fonksiyonun yerine spektral integral gösterilimi yerleştirilerek sonuçlar Hankel fonksiyonu cinsinden bulunmuş ve Hankel fonksiyonun büyük argümanlarda geçerli yaklaşık ifadesi kullanılarak Floquet dalgalar elde edilmiştir.



Şekil 1.1 : Literatürde incelenmiş olan farklı düzlemsel periyodik dipol dizileri

Sonsuz çizgisel dizinin z=0'da kesilmiş hali olan ve Şekil 1.1b'de gösterilen yarı-sonsuz çizgisel dizi [8] nolu kaynakta incelenmiştir. Dizinin z=0'da kesilmesinin sonucu olarak iki etki ortaya çıkar: a) bu dizi tarafından uyarılan Floquet dalgalar dizinin sol uç noktasında kırınıma uğrayacaklardır ve b) sonsuz diziye ait Floquet dalgalar bütün uzaya yayılamayacak gölge bölge sınır açısı ile sınırlı bir bölge içerisine hapsolacaklardır.

A_z'nin, Green fonksiyonunun spektral integral gösterilimi kullanılarak bulunan integral ifadesinde, rezidü katkıları kutupların reel ya da kompleks olmasına göre yayılan ya da sızıntı Floquet dalgalarını, semer noktası katkıları kırınan dalgaları verir ve semer noktasının bir kutuba denk düşmesi ise gölge bölge sınır açısını belirler.

Şekil 1.1e'de gösterilen yarı-sonsuz düzlemsel, periyodik dipol dizisi [5,6] nolu kaynaklarda frekans domeninde incelenmiştir. Bu yapı, Şekil 1.1c'de gösterilen her iki yöne doğru sonsuz düzlemsel dipol dizisinin x=0'da kesilmiş ve x≥0 üst yarı düzlemindeki dipolleri içeren alt kümesidir. x ve z doğrultularında sabit d_x ve d_z aralıklarıyla yerleştirilen dipollerin fazları her iki yönde doğrusal olarak $k\eta_x d_x$ ve $k\eta_z d_z$ farklarla arttırılmıştır. Çizgisel dipollere benzer şekilde bu yapıya ait çözümler *yayılan, sızıntı* ve dizinin x=0 kenarından *kırınan* dalgalar cinsinden elde edilmiştir.

Şekil 1.1f'de gösterilen x≥0, z≥0 bölgesine yerleştirilmiş yarı-sonsuz düzlemsel, periyodik dipol dizisi frekans domeninde [9] nolu kaynakta incelenmiştir. Şekil 1.1h'de gösterilen her iki yönde de sonlu dikdörtgen kesitli periyodik yapı [10] nolu kaynakta frekans domeninde incelenmiştir. Değinilen çalışmada dikdörtgen yapı, Şekil 1.1f'de gösterilen x=0 ve z=0'da sınırlı yapıdan, bu yapının kendisinin +x ve +z yönlerinde kaydırılmış halinin çıkarılması ve iki kere çıkarılmış olan kaydırılmış yapıların kesişim bölgesinin toplanması ile elde edilmiştir.

Şekil 1.1g'de gösterilen x=0'da alttan ve x=L_x'de üstten kesilmiş yarı-sonsuz düzlemsel, periyodik dipol dizisi [11] nolu kaynakta frekans domeninde incelenmiştir. Bu yapıya ait çözümler, Şekil 1.1c'deki sonsuz düzlemsel yapıdaki dipollerin genlikleriyle oynayarak elde edilmiştir. Şu ana kadar bahsedilen bütün çalışmalarda dipoller eş genliklerle uyarılıyordu. [11]'de ise dizinin kenarları olan x=0 ve x=L_x doğrularına yaklaşıldıkça dipollerin genlikleri azaltılarak 0'a

yaklaştırılmış ve sonsuz dizinin $x<0$ ve $x>L_x$ bölgelerindeki dipollerin genliklerine 0 verilerek Şekil 1.1g'deki yapıya ait çözümler elde edilmiştir.

Şekil 1.1c'deki sonsuz düzlemsel yapıdaki dipollerin genlikleriyle hem z hem de x doğrultularında oynayarak Şekil 1.1h'de gösterilen dikdörtgen yapı [12] nolu kaynakta frekans domeninde incelenmiştir. Sonsuz dizinin $0\leq x\leq L_x$ ve $0\leq z\leq L_z$ bölgesi dışında kalan dipollerin genliklerine 0 verilmiş ve bu bölgenin içindeki dipollerin genlikleri dizinin sınırlarına yaklaştıkça azalıp tam sınırda sıfır olacak şekilde ayarlanmıştır.

Zaman domenindeki çalışmalara ise önce çizgisel dipol dizileri ile başlanılmıştır. Şekil 1.1a'daki sonsuz çizgisel periyodik dipol dizisinin zaman domeni analizi [7] nolu kaynakta yapılmıştır. Bu çalışmada yine aynı kaynakta bulunan frekans domeni çözümlerinin ters Fourier dönüşümü, dönüşüm integralinin semer noktası katkıları ile hesaplanarak sozsuz çizgisel dizinin zaman domeni Floquet dalgaları bulunmuştur.

Şekil 1.1b'deki z=0'da kesilmiş, yarı-sonsuz periyodik çizgisel dizinin zaman domeni analizi [8] nolu kaynakta yapılmıştır. Yine aynı çalışmada bulunan yarı-sonsuz dizinin frekans domeni Floquet dalgaları ve kırınan dalgaların ters Fourier dönüşüm integralleri, semer noktası katkıları cinsinden hesaplanarak zaman domeni Floquet dalgalar ve kırınan dalgalar bulunmuştur.

Şekil 1.1c'deki her iki yönde de sonsuz, düzlemsel periyodik dizinin zaman domeni karakteristikleri [13] nolu kaynakta incelenmiştir. [14] nolu kaynakta ise Şekil 1.1e'de gösterilen yarı-sonsuz düzlemsel, periyodik dipol dizisi zaman domeninde incelenmiştir.

Biri diğerine göre +z yönünde kaydırılmış 2 yarı-sonsuz çizgisel periyodik dizinin farkını alarak Şekil 1.1d'deki sonlu çizgisel dizilerin modellenmesinden [3] nolu kaynakta bahsedilmiştir.

Rasgele yerleştirilmiş dipol dizileri ise [15] nolu kaynakta frekans domeninde incelenmiştir. [15]'de rasgele diziler, çizgisel sonlu dizilerin süperpozisyonu olarak modellenmiş ve her bir çizgisel sonlu dizi ise [3] nolu kaynakta olduğu gibi yarı-sonsuz çizgisel dizilerin farkı olarak modellenmiştir.

Şekil 1.1h'de gösterilen dikdörtgen sonlu periyodik dizinin ve rasgele yerleştirilmiş dizilerin zaman domeni karakteristikleri daha önce incelenmemiştir.

1.2 Orijinal Katkı

Bu çalışma kapsamında elde edilen gelişmeler ve sağlanan orijinal katkılar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

a) Biri diğerine göre +z yönünde kaydırılmış 2 yarı-sonsuz çizgisel periyodik dizinin farkını alarak sonlu çizgisel dizilerin modellenmesinde *yapay açıklık yaklaşımı* adı verilen bir yöntem geliştirilmiştir. Literatürdeki çalışmalarda kaydırılmış dizinin bir gözlem noktasında oluşturacağı alanı hesaplamak için, dizinin sol uç noktası ile gözlem noktası arasında ilave açı ve mesafeler tanımlanarak belirleniyor ve formülasyonun bu yeni durumu da içerecek şekilde genişletilmesi gerekiyordu [3]. Önerilen yapay açıklık yaklaşımında ise L_z kadar kaydırılmış dizinin bir P(x, y, z) gözlem noktasında oluşturacağı alan, diziyi kaydırmak yerine gözlem noktasını zıt yönde kaydırarak, orijinal kaydırılmamış dizinin bir $P'(x, y, z\text{-}L_z)$ sanal gözlem noktasında oluşturacağı alan bulunarak hesaplanmaktadır. Yapay açıklık yaklaşımı adı verilen bu yöntemin uygulanması ile hem formülasyonda hem de işlem süresinde önemli tasarruf edilmiştir. Aynı yaklaşım dikdörtgen kesitli dizilerin, x-doğrultusunda kaydırılmış çizgisel dipol dizilerinin süperpozisyonu alınarak modellenmesinde de kullanılmıştır. Yine çizgisel dizileri kaydırmak yerine gözlem noktası zıt yönde kaydırılmış ve orijinal sonlu çizgisel dizinin bu kaydırılmış gözlem noktalarında oluşturacağı alanlar hesaplanmıştır.

b) Yukarıda (a) şıkkında bahsettiğimiz yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak dikdörtgen kesitli ve çizgisel dipollerin toplamı şeklinde ifade edilebilen rasgele yerleştirilmiş farklı düzlemsel ve 3 boyutlu sonlu periyodik dizilerin zaman domeni karakteristikleri incelenmiştir. Bu inceleme sırasında dikdörtgen, periyodik yerleştirilmiş ve sırayla uyarılan bir dipol dizisindeki her bir dipolden çıkan dalgaların aynı anda varacağı gözlem noktası koordinatları, dipoller arası normalize faz farkları cinsinden bulunmuştur.

c) Yarı-sonsuz çizgisel dizilerdeki dipollerin dürtü fonksiyonları yerine, kısa süreli (geniş-bantlı) kaynak fonksiyonları ile uyarılmaları durumunda, semer noktası yaklaşımının uygulanamadığı q=0 indeksli Floquet ve kırınan dalgaların bu kaynak fonksiyonları ile konvolüsyonlarının hesaplanması gerekiyordu ve sayısal olarak hesaplanması gereken bu konvolüsyonlar, işlem süresi açısından çok ağır bir yük getiriyordu. Bunun yerine normalize Rayleigh darbesi olarak seçilen kaynak fonksiyonları birçok dikdörtgen darbenin toplamı seklinde ifade edilmiş ve yapılan bu yaklaşıklık sayesinde konvolüsyonlar analitik olarak hesaplanıp kapalı formda ifadeler elde edilmiş ve işlem süresinde bir kaç yüz katı geçen avantajlar sağlanmıştır.

d) Şekil 1.1b'de gösterilen yarı-sonsuz çizgisel dipol dizisine ait çözümler Floquet dalgalar ve kırınan dalgalar cinsinden bulunduğunda, doğru olup olmadıkları klasik eleman-eleman toplama yöntemi ile karşılaştırılıyordu. Ancak eleman-eleman toplama yönteminde her bir dipolün etkisinin ayrı ayrı hesaplanması gerekiyordu. Sonsuz tane dipol içeren yapı, eleman-eleman toplama yönteminde sonlu sayıda dipolün etkisi hesaplanarak, yarı-sonsuz dizi modellenmeye çalışılır. Ardışık dipoller arası mesafe ve faz farkının bazı özel değerlerinde, ne kadar çok sayıda alınırsa alınsın toplama işlemlerinin ıraksayacağı ve sonlu sayıda dipol ile yarı-sonsuz dizinin modellenemeyeceği gösterilmiştir. Ayrıca dipoller arası mesafe ve faz farkının tekil değerlere yakın oldukları zaman serilerin çok yavaş yakınsayacağı gösterilmiş ve böyle parametre bölgelerinde de hızlı biçimde yakınsayan bir formülasyon geliştirilmiştir.

e) Çalışmaların ilk aşamalarında, isotropik ışıma yapan noktasal kaynaklardan oluşan düzlemsel anten dizileri için bir MatLab grafik kullanıcı arayüzü (GUI) oluşturulmuştur. Bu paket sayesinde, xy düzleminde bir doğru boyunca, bir çember üzerinde, dikdörtgen bir alan içerisinde ya da tamamen rasgele bir şekilde istenen sayıda noktasal kaynak yerleştirilebiliyor ve bu yapıya ilişkin ışıma diyagramı ister 3 boyutlu, ister herhangi bir 2 boyutlu kesitinde, arzu edilen herhangi bir frekans değerinde çizdirilebilmektedir. Ayrıca bu paket ile kullanıcı her türlü demet oluşturma ve demet tarama özelliklerini test edebilmektedir.

Ana başlıklar halinde a)-e) de değinilen alanlarda bu tez kapsamında elde edilen gelişmelerin bazı sonuçları aşağıda sıralanan bildiri / makale yayınları ile raporlanmıştır.

i) Frekans domeninde (a) ve (b) şıkkında bahsedilen yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak çizgisel ve dikdörtgen periyodik dipol dizilerinin incelendiği çalışma **ELECO 2007** konferansında sunulmuştur [23].

ii) Frekans domeninde yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak elde edilen dikdörtgen periyodik dizilere ait çözümlerin hızlı Fourier dönüşüm (FFT) algoritmaları kullanılarak bulunan zaman domeni çözümlerinin incelendiği çalışma **CEM-TD 2007** konferansında sunulmuştur [22].

iii) CEM-TD 2007 konferansında sunulan bildirinin genişletilmiş hali (d) şıkkında bahsedilen analitik konvolüsyonların kapalı ifadelerini ve (b) şıkkında bahsedilen rasgele yerleştirilmiş dizilere örnek olarak trapezoidal bir diziye ait incelemeleri içerecek şekilde, bu konferansa ait özel sayı çıkartan **International Journal of Numerical Modeling** dergisine Ocak 2008'de sunulmuştur [21]. Kabul edilmesi halinde Ekim 2008'de basılacaktır.

iv) Yapay açıklık yaklaşımını doğrudan zaman domeninde kullanarak, dikdörtgen dipol dizilerinin karakteristiklerinin detaylı bir şekilde incelendiği, 3 boyutlu dizilerin yapay açıklık yaklaşımı ve yarı-sonsuz diziye ait Floquet dalgalar kullanılarak elde edilen çözümlerinin, eleman-eleman toplama yöntemine göre işlem süresini ne kadar kısalttığının gösterildiği ve yukarıda (d) şıkkında bahsedilen yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait çözümlerin yavaş yakınsadığı durumlarda önerilen alternatif hızlı yakınsayan yöntemin anlatıldığı makalemiz **IEEE Transactions on Antennas and Propagation** dergisinde basılmıştır [20].

v) (e) şıkkında bahsedilen bir MatLab grafik kullanıcı arayüzünü (GUI) tanıtan çalışmamız **IEEE Antennas and Propagation Magazine** dergisinde basılmıştır [19]. Makale basıldıktan sonra aldığımız e-posta'lardan anlaşıldığı kadarıyla dünyanın çeşitli yerlerindeki bir çok elektronik ve haberleşme mühendisliği bölümünde Antenler ve Yayılım konulu derslerde, tarafımızdan oluşturulan kullanıcı arayüzü derse yardımcı bir araç olarak kullanılmaktadır.

1.3 Kapsam

Floquet dalgalarıyla yapılan hesapların doğruluğunu test etmek (validasyon) amacıyla kullanılan eleman-eleman toplama yöntemine dayalı referans çözümler Bölüm 2'de sunulmuştur. Frekans domeni referans çözümleri 2.1 alt başlığı altında sunulurken, 2.2 alt başlığı zaman domeni referans çözümlerine ayrılmıştır. Yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait çözümlerin yavaş yakınsadığı durumlarda önerilen alternatif hızlı yakınsayan yöntem 2.1.2'de verilmiş, 2.1.4'de ise isotropik ışıma yapan noktasal kaynaklardan oluşan düzlemsel anten dizileri için oluşturulan MatLab grafik kullanıcı arayüzü tanıtılmıştır.

Frekans domeni Floquet dalgalar Bölüm 3'te incelenmiştir. Yapay açıklık yaklaşımı kullanarak 2 boyutlu (düzlemsel) ve 3 boyutlu sonlu dizilerden ışınımın hesaplanmasında, yarı-sonsuz çizgisel dizilerin çözümleri kullanılmaktadır. Diğer taraftan, yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait çözümlerin de sonsuz çizgisel dizilere ait çözümlere dayandırılması sebebiyle, bu tez çalışmasında sonsuz ve yarı-sonsuz çizgisel dizilerin karakteristikleri ağırlıklı bir yer tutmaktadır. Bu nedenle Floquet dalgaları gösterilimine ilişkin olarak literatürde mevcut olan bazı sonuçlara ve okuyucuya kolaylık sağlamak için gerek görülen yerlerde bu sonuçların çıkarılmasına ait bazı ara adımlara da tezde yer verilmiştir. 3.1 alt başlığında [7] nolu kaynakta yer alan sonsuz çizgisel dizilere ait frekans domeni sonuçlarının çıkarılışına ve 3.2 alt başlığında [8] nolu kaynakta yer alan yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait sonuçların çıkarılışına yer verilmiştir. Yarı-sonsuz çizgisel dizilerin farkını alarak sonlu dizilerin modellenebileceğinden ve önerilen bir yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak dizileri kaydırmak yerine gözlem noktalarının zıt yönde kaydırılabileceğinden 3.3 alt başlığında bahsedilmiştir. Aynı yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak dikdörtgen dipol dizilerinin sonlu çizgisel dipol dizilerinin toplamları olarak modellenebileceğinden 3.4 alt başlığı altında ve çizgisel dizilerin toplamı olarak ifade edilebilen her türlü rasgele dipol dizisinin ve 3 boyutlu dizilerin yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait frekans domeni Floquet dalgalar cinsinden nasıl bulunacağına ve bazı aydınlatıcı örneklere 3.5 alt başlığında yer verilmiştir.

Zaman domeni Floquet dalgalar Bölüm 4'te incelenmiştir. Frekans domenindeki yaklaşımın aynısı zaman domeninde de uygulanmış ve literatürde mevcut olan

sonsuz ve yarı sonsuz çizgisel dizilere ait bazı sonuçlara ve bütünlüğü sağlamak için gerekli görülen bazı çıkarılmalara da tezde yer verilmiştir. 4.1 alt başlığında [7] nolu kaynakta yer alan sonsuz çizgisel dizilere ait zaman domeni sonuçlarının çıkarılışına ve 4.2 alt başlığında [8] nolu kaynakta yer alan yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait sonuçların çıkarılışına yer verilmiştir. Kısa süreli (geniş-bantlı) kaynak fonksiyonları ile uyarılan dipollerden oluşan yarı-sonsuz çizgisel dizilerin çözümlerinde karşılaşılan konvolüsyonların sayısal olarak hesaplanmasına alternatif olarak, kaynak fonksiyonları birçok dikdörtgen darbenin toplamı şeklinde ifade edilip konvolüsyonların analitik olarak hesaplanıp kapalı formda ifadeler elde edilebileceğinden 4.2.3 alt başlığında bahsedilmiştir. 4.3 kapsamında yapay açıklık yaklaşımının zaman domeninde nasıl uygulanacağı konusu ele alınmış ve sonlu çizgisel dipol dizilerinin zaman domeni karakteristikleri incelenmiştir. Dikdörtgen dipol dizilerinin ve rasgele dipol dizileri ile 3 boyutlu dizilerin çözümlerinin yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak yarı-sonsuz çizgisel dizilere ait zaman domeni Floquet dalgalar cinsinden nasıl bulunacağı ve bazı tipik örnekler 4.4 ve 4.5'de verilmiştir.

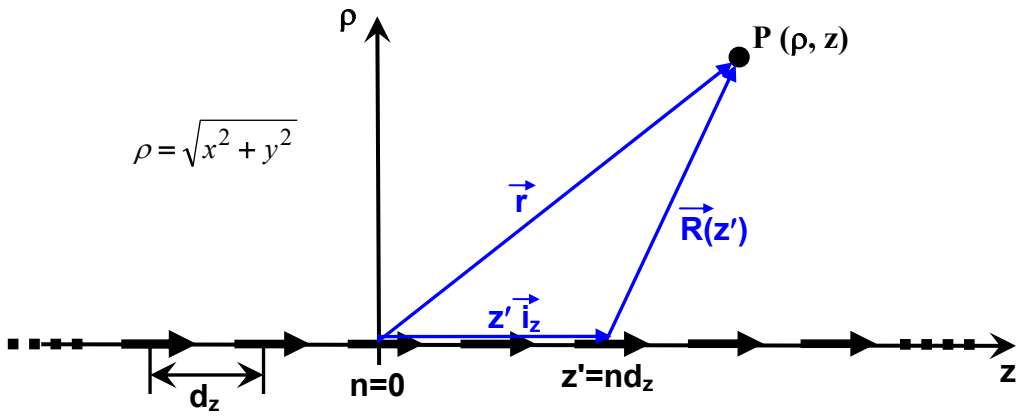
5. bölüm tez kapsamında yapılan çalışmalar ve elde edilen gelişmelere ilişkin sonuç ve yorumların verilmesine ayrılmıştır. Bu bölümde ayrıca, tezde ele alınmış olan problemin devamı niteliğinde yapılabilecek çalışmalar için öneriler de verilmiştir.

2. REFERANS ÇÖZÜMLER

2.1 Frekans Domeninde Eleman-Eleman Toplama

2.1.1 Çizgisel Dipol Dizileri

z-ekseni doğrultusunda yerleştirilmiş, sonsuz uzunluklu, çizgisel, periyodik dipol dizisine ait geometri Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Ardışık dipoller arasındaki mesafe sabit ve d_z'ye eşittir. Bu çok ufak boyutlu elektrik akım dipolleri, birim genlik ve $k\eta_z n d_z$ (n = –∞, …-1, 0, 1, …∞) doğrusal fazlarıyla uyarılmışlardır. $k\eta_z d_z$ ardışık iki dipol arasındaki faz farkını göstermektedir. Boyutsuz olan η_z parametresi, normalize faz farkına denk düşmektedir ve özellikle 3. ve 4. bölümde bahsedilecek olan Floquet dalga analizlerinde önemli bir rol oynayacaktır. k parametresi, serbest uzay dalga sayısını göstermektedir ve $k = \omega / c$ eşitliği ile ifade edilir.



Şekil 2.1 : Sonsuz uzunluklu, çizgisel, periyodik dipol dizisine ait geometri

Eleman-eleman toplama yönteminde, her bir dipolün bir P(ρ,z) gözlem noktasında oluşturacağı alan ayrı ayrı bulunacak ve sonra bu alanlar toplanacaktır.

z-ekseni doğrultusunda yerleştirilmiş çizgisel dipolün alanı, tek bileşeni A_z olan manyetik vektör potansiyel yardımıyla belirlenir. E_z ve diğer elektrik alan bileşenleri, A_z cinsinden kolaylıkla elde edilebilir.

Frekans domeni Green fonksiyonu ile frekans domeni dipol akımları çarpılarak ve z′ üzerinden integral alınarak, frekans domeninde tanımlı A_z manyetik potansiyeli bulunabilir. Frekans domeni Green fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$A(\vec{r},z',\omega)=\frac{e^{-jkR(z')}}{4\pi R(z')} \tag{2.1}$$

Burada $R(z')=|\vec{R}(z')|$ olarak tanımlıdır ve n. dipolden gözlem noktasına doğru uzanan $\vec{R}(z')$ vektörü Şekil 2.1'de gösterilmiştir. $\vec{i}_\rho$ ve $\vec{i}_z$ sırasıyla ρ ve z eksenleri boyunca birim vektörleri göstermek üzere $\vec{R}(z')=\vec{r}-z'\vec{i}_z=\rho\vec{i}_\rho+(z-z')\vec{i}_z$ ve $\left|\vec{R}(z')\right|=R(z')=\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$ yazılarak frekans domeni Green fonksiyonu için

$$A(\vec{r},z',\omega)=\frac{e^{-jkR(z')}}{4\pi R(z')}=\frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu bağıntı (0,0,z') noktasında lokalize birim genlikli kaynağın katkısını vermektedir, frekans domeni dipol akımları (birim genlik için)

$$J(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(z'-nd_z)e^{-jk\eta_z\,nd_z} \tag{2.3}$$

ifadesi yardımıyla toplam A_z alanı

$$A_z(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jk\eta_z\,nd_z}\,\frac{e^{-jkR_n}}{4\pi\,R_n} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Burada R_n n. dipolden gözlem noktasına olan uzaklığı göstermektedir.

$$R_n=\sqrt{\rho^2+(z-nd_z)^2} \tag{2.5}$$

Yarı-sonsuz çizgisel dipol dizileri için (2.4) eşitliğindeki toplam *n=0*'dan ∞'a kadar ve sonlu dipol dizileri için ise *n=0*'dan (N_z-1)'e kadar hesaplanacaktır.

Elektrik alan vektörü $\vec{E}(\vec{r})$, manyetik vektör potansiyel $\vec{A}(\vec{r})$'den aşağıda verilen (2.6) eşitliği ile elde edilebilir.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu\vec{A} + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla(\nabla.\vec{A}) \tag{2.6}$$

Ara işlemlerden sonra,

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{30}{jk} e^{-jk\eta_z\, nd_z} e^{-jkR_n}\, x(z-nd_z)\left[\frac{-k^2}{R_n^3} + \frac{3jk}{R_n^4} + \frac{3}{R_n^5}\right] \tag{2.7a}$$

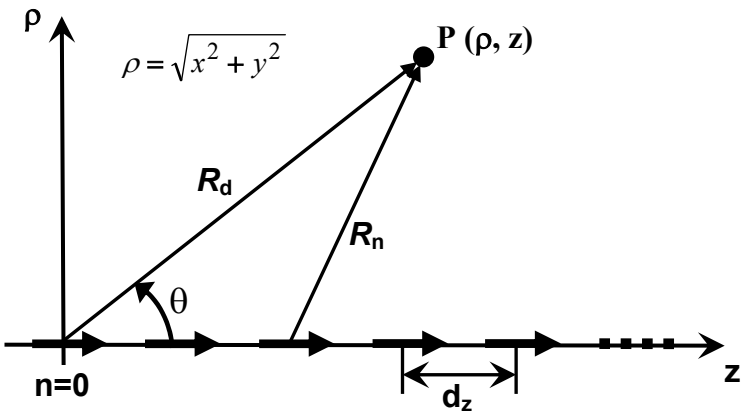
$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{30}{jk} e^{-jk\eta_z\, nd_z} e^{-jkR_n}\, y(z-nd_z)\left[\frac{-k^2}{R_n^3} + \frac{3jk}{R_n^4} + \frac{3}{R_n^5}\right] \tag{2.7b}$$

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{30}{jk} e^{-jk\eta_z\, nd_z} e^{-jkR_n}\left[\frac{k^2}{R_n} - \frac{jk}{R_n^2} - \frac{1}{R_n^3} + (z-nd_z)^2\left(\frac{-k^2}{R_n^3} + \frac{3jk}{R_n^4} + \frac{3}{R_n^5}\right)\right] \tag{2.7c}$$

elde edilir. (2.7) eşitliklerinden görüleceği üzere E_x ve E_y alan bileşenleri, dipol dizisinden uzaklaştıkça, uzaklığın 3. ve daha yüksek mertebeden kuvvetleri ile sönmekte iken, E_z alan bileşeni uzaklık ile doğrusal bir şekilde sönen terim içermektedir. Dolayısıyla uzak alanda sadece E_z bileşeni var olacak, E_x ve E_y bileşenleri ise uzak alanda etkili olmayacaklardır.

2.1.2 Çizgisel Dipol Dizileri için Hızlı Yakınsayan Alternatif Çözüm

Sonsuz uzunluklu, çizgisel dipol dizisine ait geometri Şekil 2.1'de gösterilmiş ve bu diziye ait manyetik potansiyel (2.4) eşitliği ile 2.1.1 alt başlığı altında elde edilmişti. z=0'dan başlayan ve +z yönünde sonsuz tane dipol içeren yarı-sonsuz, çizgisel dipol dizisi Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 : Yarı-sonsuz uzunluklu, çizgisel dipol dizisine ait geometri

Yukarıdaki Şekil 2.2'de gösterilen orijin ile gözlem noktası arasındaki mesafe R_d aşağıdaki (2.8) eşitliğindeki hesaplanabilir.

$$R_d = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.8}$$

Şekil 2.2'de gösterilen yarı-sonsuz çizgisel dipol dizisine ait manyetik skaler potansiyel,

$$A_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jk\eta_z nd_z} \frac{e^{-jkR_n}}{4\pi R_n} \tag{2.9}$$

olacaktır. Bu ifadeden hareketle sayısal çözümler elde edilmek istenirse, dizi z boyunca sonlu N_z sayıda dipol içerecek şekilde kesilmelidir. Bu sonlu dizi ile yarı-sonsuz diziyi modelleyebilmek için N_z dipol sayısı yeteri kadar büyük seçilmelidir. Ancak burada da karşımıza bazı yakınsaklık problemleri çıkmakta ve bazı η_z , d_z değerleri için alınması gereken dipol sayısı çok fazla olmaktadır. Bu yakınsaklık problemlerini görmek için A_z'nin çözümünde *n*'nin büyük değerlerinde geçerli olan $R_n \approx (nd_z - z)$ yaklaşıklığı kullanılırsa

$$A_z(\omega) = \frac{e^{jkz}}{4\pi d_z} \sum_n \frac{e^{-jk(\eta_z + 1)n\, d_z}}{n} \tag{2.10}$$

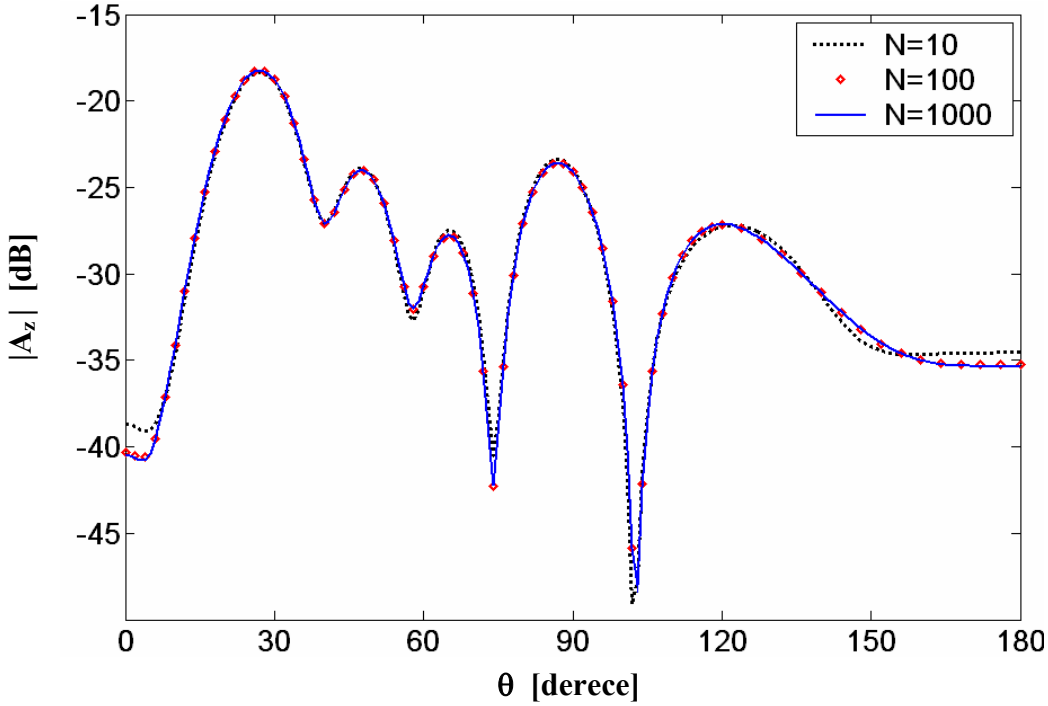
elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi, $k(\eta_z + 1)\, d_z = 2\pi\, p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ koşulu sağlandığı durumlarda (2.10) eşitliğinde geçen toplam $\sum_n 1/n$ gibi ıraksayacaktır.

O halde, seri $\eta_z = \frac{p}{d_z/\lambda} - 1$ değerleri için ıraksar ve bunun haricindeki her η_z değeri için yakınsar ve kapalı şekilde ifade edilebilir.

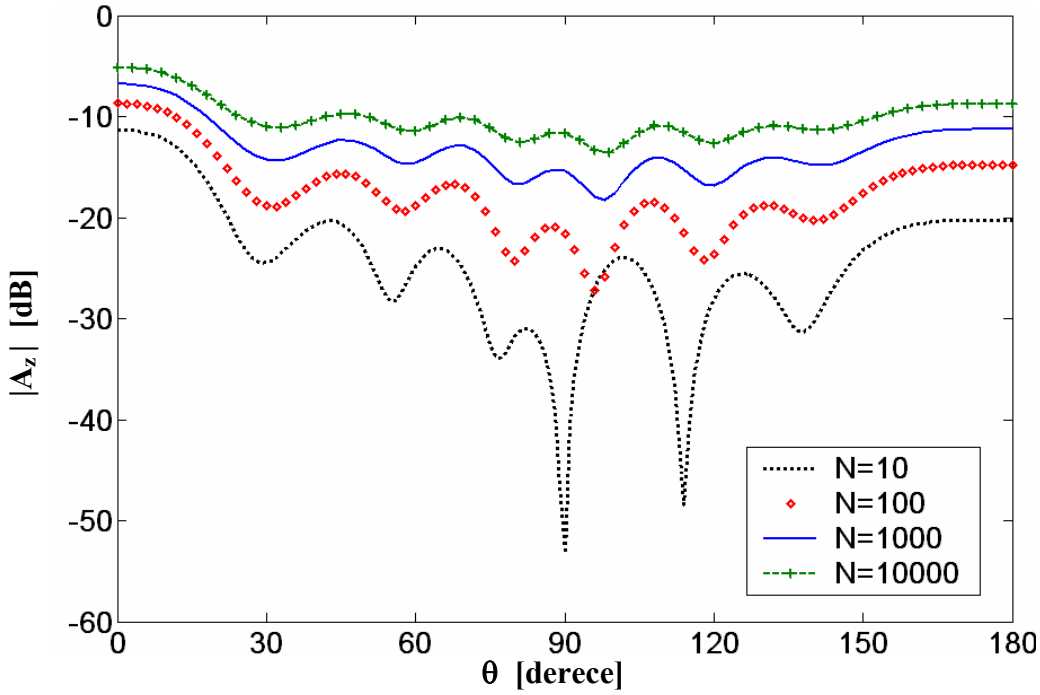
Örneğin elemanlar arası mesafe $d_z=2\lambda$ iken, elemanlar arası normalize faz farkı η_z 0.5'in tam sayı katlarında ise $\left(\eta_z = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \cdots\right)$, seri ıraksayacak aksi halde yakınsayacaktır. Şekil 2.3'de $d_z=2\lambda$ iken A_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişimi farklı N_z değerleri için karşılaştırılmıştır. Şekil 2.3a'da $\eta_z=0.25$ seçildiğinden seri çok çabuk yakınsamıştır ve N_z=10, 100 ve 1000 için hesaplanan değerler arasında mükemmel bir uyum vardır. Ancak Şekil 2.3b'de $\eta_z=0$ alındığından seri ıraksamaktadır ve N_z ne kadar büyük seçilirse seçilsin, sonlu sayıda dipol kullanılarak hesaplanan toplam alan, yarı-sonsuz diziyi modellememektedir.

Diğer taraftan, $\eta_z \to \frac{p}{d_z/\lambda} - 1$ değerleri için seri çok yavaş yakınsayacak, dolayısıyla alınması gereken toplam dipol sayısı N_z çok artacak ve bu da işlem süresini artıracaktır. İşlem süresini azaltmak için (2.10) eşitliği ile bulunan büyük n değerleri için geçerli olan yaklaşık ifade, (2.9) eşitliğinden bir çıkartılıp bir de toplanırsa, aşağıdaki (2.11) eşitliği elde edilir.

$$A_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jk\eta_z nd_z} \frac{e^{-jkR_n}}{4\pi R_n} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-jk\eta_z nd_z} \frac{e^{-jk(nd_z - z)}}{4\pi nd_z} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-jk\eta_z nd_z} \frac{e^{-jk(nd_z - z)}}{4\pi nd_z} \tag{2.11}$$



(a)



(b)

Şekil 2.3 : A_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişiminin, eleman-eleman toplama yönteminde farklı N_z değerleri için karşılaştırması. Elemanlar arası mesafe $d_z=2\lambda$, elemanlar arası normalize faz farkı a) $\eta_z=0.25$ b) $\eta_z=0$

(2.11) eşitliğindeki, birinci toplamdaki n=0 dışındaki terimler ile ikinci toplam ifadeleri tek bir toplam olarak aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu yeni toplam ifadesi artık hızlı yakınsayacağından az terimle hesaplanabilir.

$$A_z(\omega)=\frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}+\sum_{n=1}^{N_z}\frac{e^{-jk(\eta_z nd_z+R_n)}}{4\pi R_n}-\frac{e^{-jk(\eta_z+1)nd_z}e^{jkz}}{4\pi nd_z}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-jk(\eta_z+1)nd_z}e^{jkz}}{4\pi nd_z} \qquad (2.12)$$

Burada,

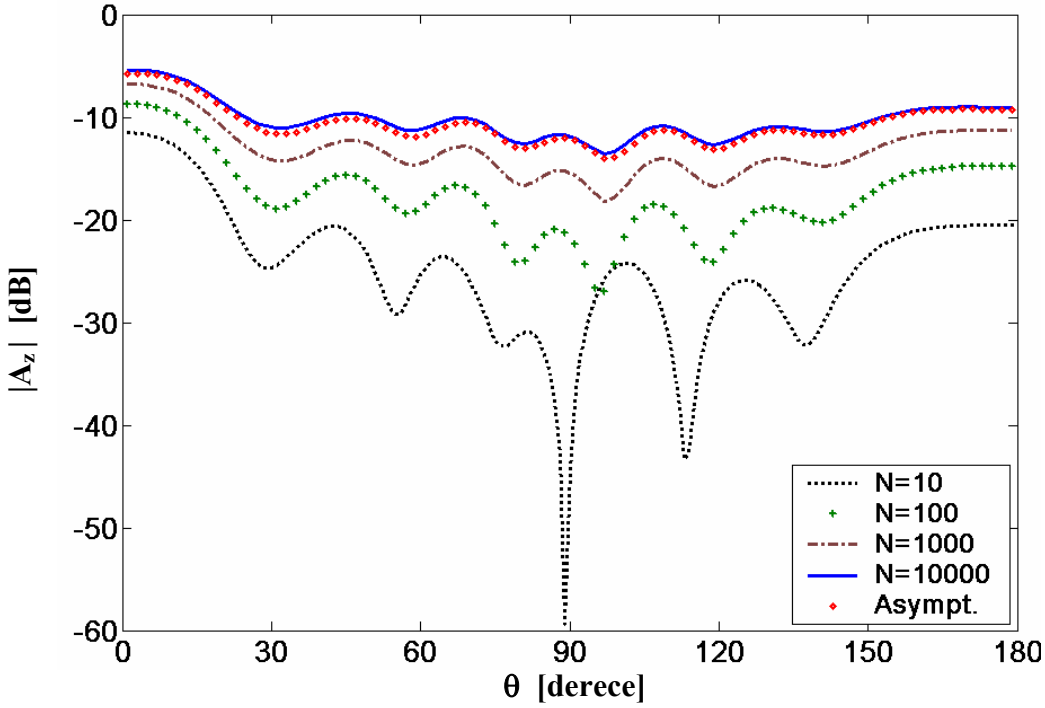
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{jan}}{n}=-\ln(1-e^{ja}) \text{ eğer } \mathrm{Im}(a)\geq 0 \text{ ise} \qquad (2.13)$$

bağıntısı kullanılarak

$$A_z(\omega)=\frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}-\frac{e^{jkz}}{4\pi d_z}\ln\left(1-e^{-jk(\eta_z+1)d_z}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{e^{-jk(\eta_z nd_z+R_n)}}{4\pi R_n}-\frac{e^{-jk(\eta_z+1)nd_z}e^{jkz}}{4\pi nd_z} \qquad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) eşitliği eleman-eleman toplama yönteminde karşılaşılan yavaş yakınsayan seriler için etkin bir şekilde kullanılabilir ve işlem süresini oldukça kısaltır.

Şekil 2.4'de $d_z=2\lambda$ ve $\eta_z=10^{-5}$ iken A_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişimi farklı N_z değerleri için hesaplanmış ve bu değerler (2.14) eşitliği ile verilen asimptotik çözüm ile karşılaştırılmıştır. η_z değeri, (2.9) eşitliği ile verilen toplamı ıraksatan $\eta_z=0$ değerine çok yakın olduğundan dolayı seri oldukça yavaş yakınsayacaktır. Bu örnekte N_z =10, 100, 1000 ve 10000 değerleri için bulunan çözümler birbirine uymamakla beraber, uyum ancak N_z =10000 ve N_z =100000 değerleri için sağlanmıştır. Dolayısıyla N_z =10000 alınarak bulunan çözüm referans çözüm olarak kabul edilebilir. Buna karşılık (2.14) ile verilen asimptotik çözümde sadece 10 terim alınarak bulunan çözümler bu referans çözüm ile tamamen uyuşmaktadır. İşlem süresi ise bir kaç yüz kat daha az sürmektedir.

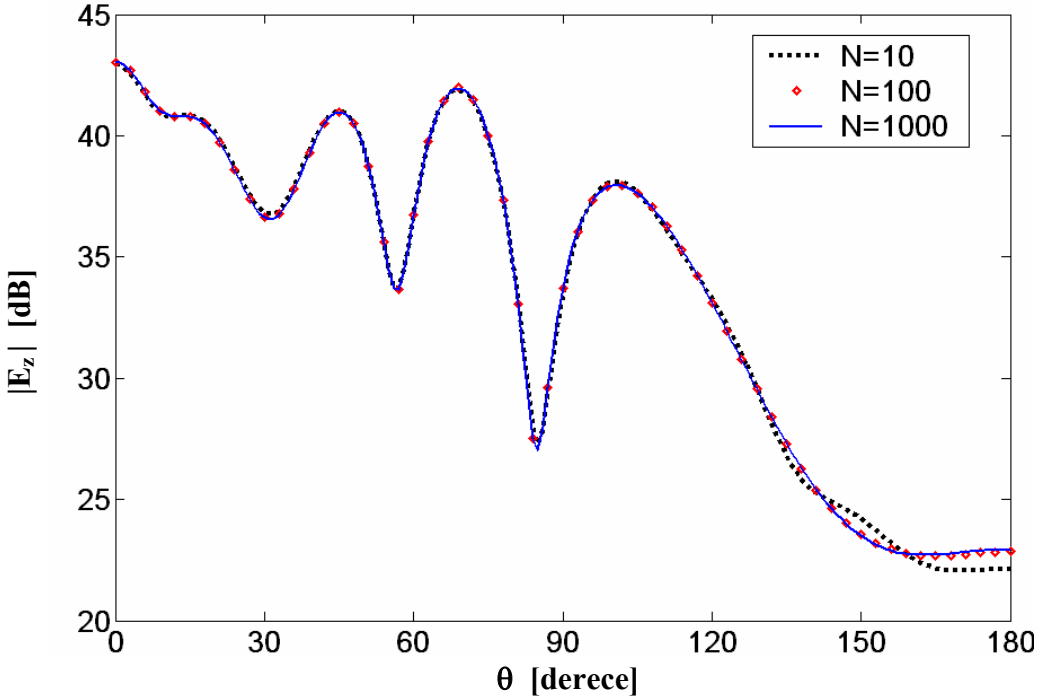


Şekil 2.4 : A_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişiminin, eleman-eleman toplama yönteminde farklı N_z değerleri alınarak hesaplanan değerlerinin, (2.14) eşitliği ile bulunan asimptotik çözüm ile karşılaştırılması ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=10^{-5}$)

Şekil 2.5'de $d_z=2\lambda$ ve $\eta_z=0$ iken E_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişimi farklı N_z değerleri için hesaplanmıştır. Yukarıda $\eta_z=0$ iken A_z'nin (2.9) eşitliği ile verilen toplam ifadesinin ıraksadığını göstermiştik. Şaşırtıcı bir şekilde $\eta_z=0$ iken ıraksayan A_z değeri kullanılarak (2.7c) eşitliği ile elde edilen E_z değeri aynı η_z değerinde ıraksamamakta, aksine çok hızlı bir şekilde yakınsamaktadır. Şekilden de görüldüğü üzere sadece $N_z=10$ terim bile almak serinin yakınsaması için yeterlidir.

A_z ıraksarken, E_z'nin yakınsaması şu şekilde izah edilebilir: A_z'nin ıraksamasının sebebi (2.9) eşitliğinde geçen $1/R_n$ terimidir, çünkü daha önce gösterdiğimiz gibi, büyük n değerleri için $1/R_n$ terimi $1/n$ gibi davranmakta ve serinin ıraksamasına neden olmaktaydı. E_z'nin (2.7c) eşitliği ile verilen ifadesi de benzer şekilde k^2/R_n terimi içermesine rağmen, n'nin büyük değerleri için parantezin içindeki $(z-nd)^2$ ifadesi R_n^2 gibi davranmakta ve $-k^2/R_n^3$ ifadesi ile çarpılarak $-k^2/R_n$ ye eşit olmakta ve $+k^2/R_n$ ile sadeleşmektedir. Bunun sonucunda (2.7c) eşitliği ile verilen E_z

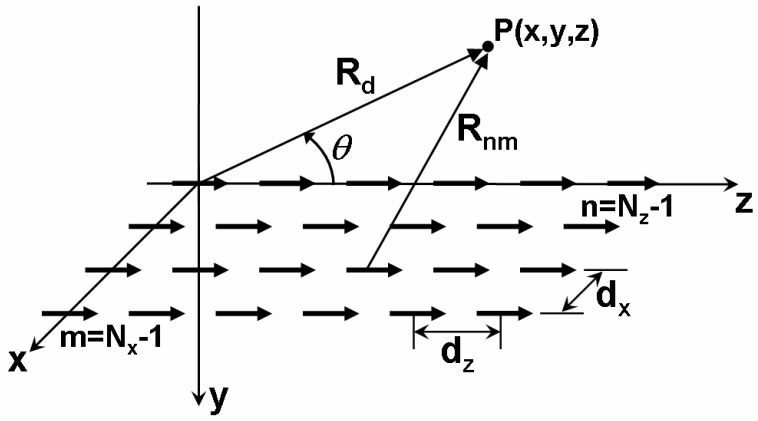
ifadesinde $1/R_n$'li terim kalmadığından seri, η_z'nin her değeri için hızlı yakınsamaktadır.



Şekil 2.5 : E_z'nin genliğinin $R_d=3\lambda$. radyal uzaklıkta θ açısı ile değişiminin, eleman-eleman toplama yönteminde farklı N_z değerleri için karşılaştırması. Elemanlar arası mesafe $d_z=2\lambda$, elemanlar arası normalize faz farkı $\eta_z=0$.

2.1.3 Dikdörtgen ve Üç Boyutlu Dipol Dizileri

Dikdörtgen dipol dizisine ait geometri Şekil 2.6'da gösterilmiştir.



Şekil 2.6 : Dikdörtgen dipol dizisine ait geometri

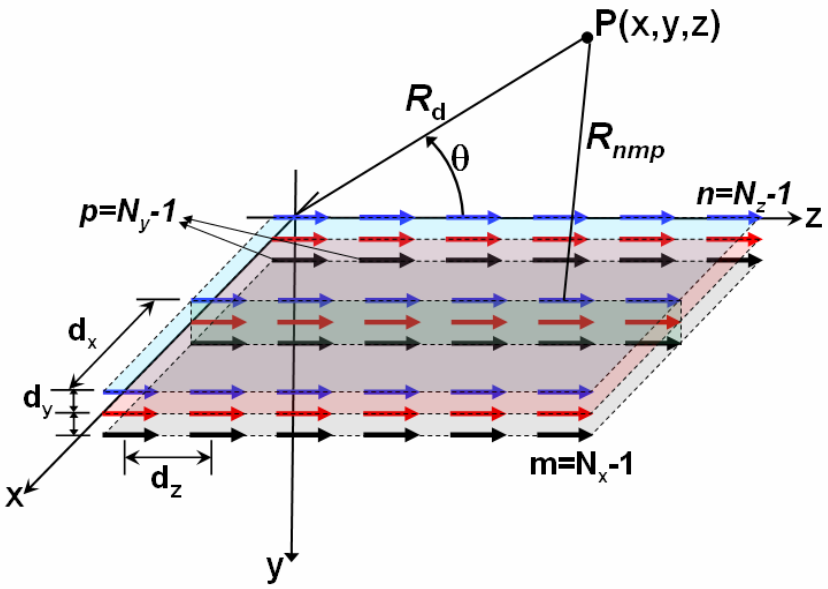
Şekil 2.6'da gösterilen dikdörtgen dipol dizisi z yönünde sonlu N_z tane ve x yönünde sonlu N_x tane dipol içermektedir. z- ve x-doğrultusunda dipoller arası mesafe sırasıyla d_z ve d_x kadardır. z- ve x-doğrultusunda ardışık iki dipol arasındaki faz farkı

sırasıyla $k\eta_z d_z$ ve $k\eta_x d_x$ kadardır. Bu yapıya ait manyetik skaler potansiyel A_z, daha önce (2.4) eşitliği ile bulunan, sonsuz uzunluklu çizgisel yapıya benzer bir şekilde, eleman-eleman toplama yöntemi ile aşağıdaki (2.15a) eşitliğindeki gibi bulunabilir. (2.15a) eşitliğinde geçen R_{nm} terimi n,m. dipolden gözlem noktasına olan uzaklığı göstermektedir ve daha önce (2.5) eşitliği ile verilen R_n terimine benzer bir şekilde aşağıdaki (2.15b) eşitliğindeki gibi bulunabilir.

$$A_z(\omega) = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_z-1} \frac{e^{-jkR_{nm}}}{4\pi R_{nm}} e^{-j(k\eta_x m d_x + k\eta_z n d_z)} \tag{2.15a}$$

$$R_{nm} = \sqrt{(x-md_x)^2 + y^2 + (z-nd_z)^2} \tag{2.15b}$$

Üç boyutlu dipol dizisine ait geometri Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7 : Üç boyutlu dipol dizisine ait geometri

Bu yapıya ait manyetik skaler potansiyel A_z, eleman-eleman toplama yöntemi ile aşağıdaki (2.16a) eşitliğindeki gibi bulunabilir. (2.16a) eşitliğinde geçen R_{nmp} terimi n,m,p. dipolden gözlem noktasına olan uzaklığı göstermektedir ve aşağıdaki (2.16b) eşitliğindeki gibi bulunabilir.

$$A_z(\omega) = \sum_{p=0}^{N_y-1} \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_z-1} \frac{e^{-jkR_{nmp}}}{4\pi R_{nmp}} e^{-j(k\eta_x m d_x + k\eta_y p d_y + k\eta_z n d_z)} \tag{2.16a}$$

$$R_{nmp} = \sqrt{(x-md_x)^2 + (y-pd_y)^2 + (z-nd_z)^2} \tag{2.16b}$$

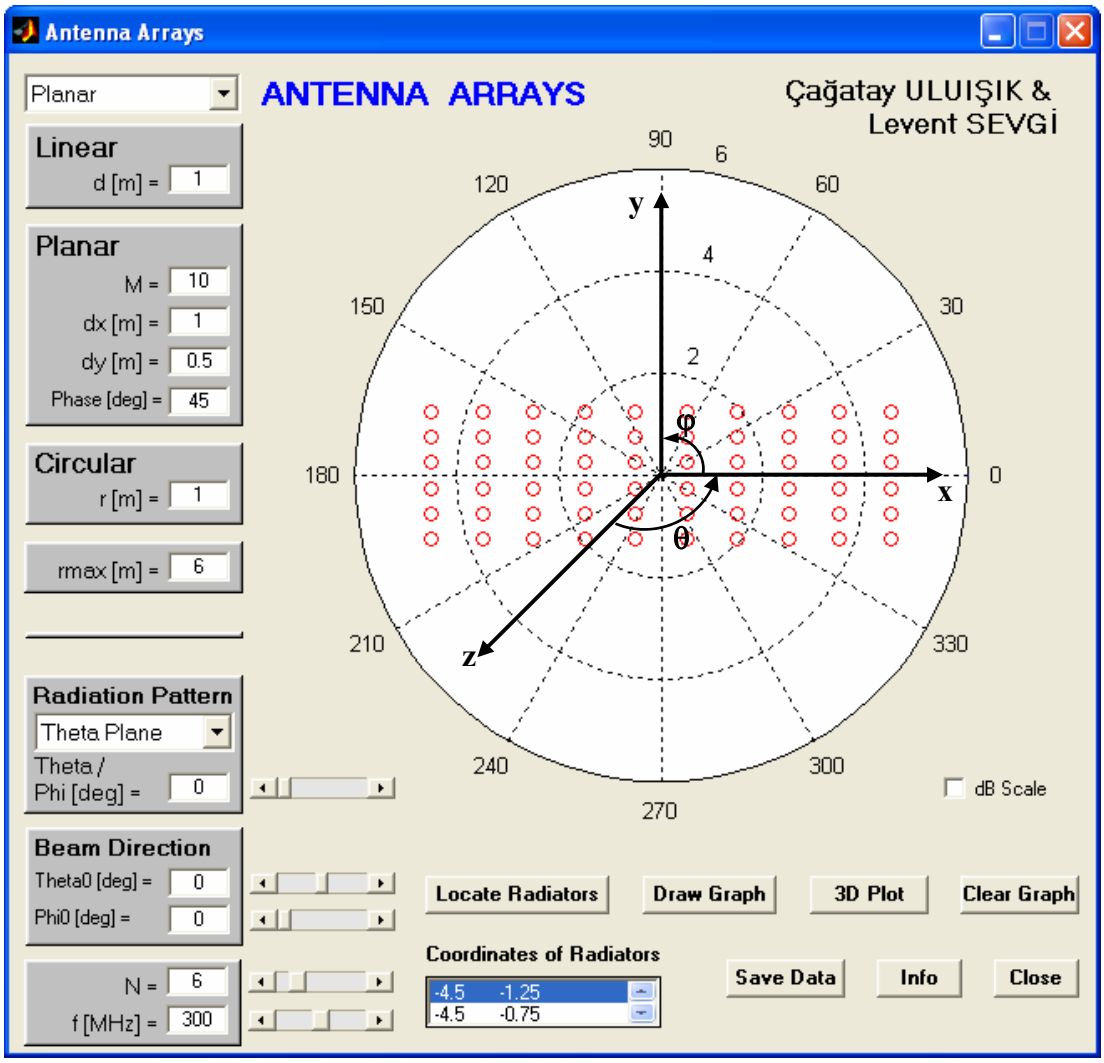
2.1.4 Anten_GUI Yazılımı

Doktora çalışmalarının ilk aşamalarında, isotropik ışıma yapan noktasal kaynaklardan oluşan düzlemsel anten dizileri için bir MatLab grafik kullanıcı arayüzü (GUI) oluşturulmuş ve bu çalışma "A Matlab-Based Visualisation Package for Planar Arrays of Isotropic Radiators" başlığıyla, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 47, No. 1, pp. 156-163'de yayınlanmıştı [19]. Hazırlanan bu MatLab paketine ilişkin kullanıcı ara yüzü Şekil 2.8'de görülmektedir. Bu paket sayesinde, xy düzleminde bir doğru boyunca, bir daire üzerinde, dikdörtgen bir alan içerisinde ya da tamamen rasgele bir şekilde istenen sayıda noktasal kaynak yerleştirilebiliyor ve bu yapıya ilişkin ışıma diyagramı ister 3 boyutlu, ister herhangi bir 2 boyutlu kesitinde, arzu edilen herhangi bir frekans değerinde çizdirilebilmektedir. Ayrıca bu paket ile kullanıcı her türlü demet oluşturma ve demet tarama özelliklerini test edebilmektedir. Hesaplamaların temelinde ise aşağıda (2.17) eşitliği ile verilen gayet basit bir formül yatmaktadır.

$$E(\theta,\phi) = \sum_{i=1}^{N} I_i e^{jF_i}\ e^{jkr_i \sin\theta \cos(\phi_i - \phi)} \tag{2.17}$$

Bu eşitlikte I_i i'inci elemanın genliğini, F_i fazını, (r_i , ϕ_i) i.inci elemanın koordinatlarını ve N toplam eleman sayısını göstermektedir.

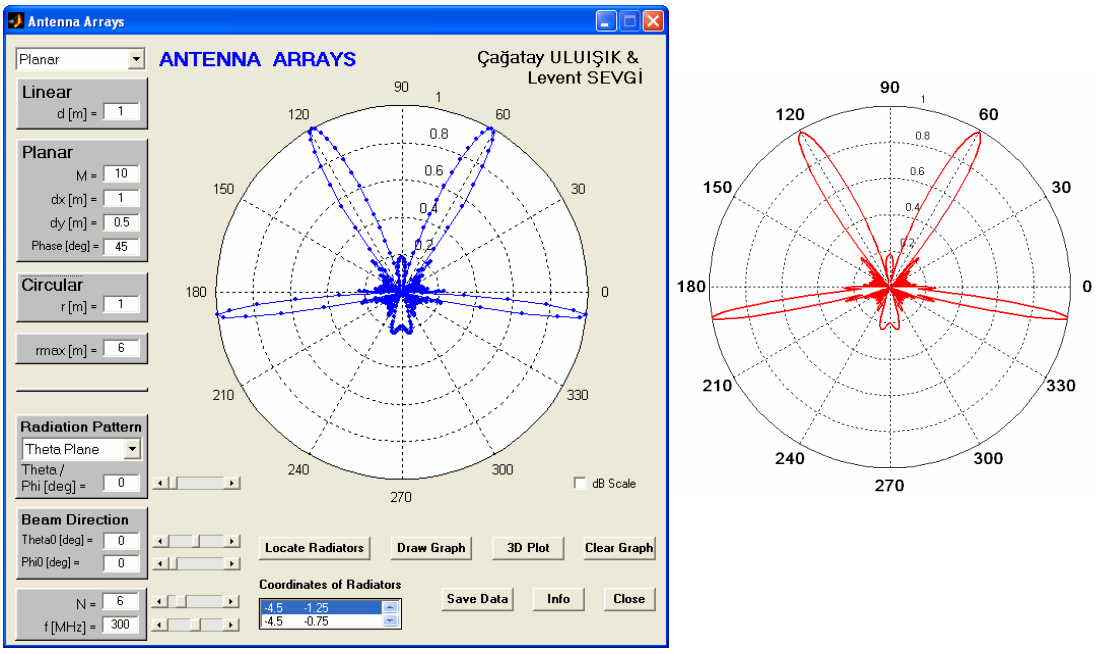
2.1.3 alt başlığı altında incelediğimiz ve Şekil 2.6'de verilen dikdörtgen dipol dizisine ait yapı, noktasal kaynaklar değil de, x-z düzleminde z-doğrultusunda uzanan dipoller içeriyordu. Ancak θ=90°, φ=(0°, 360°) açı değerleri için dipollerde noktasal kaynak gibi davranacak yani isotropik ışıma yapacaktır. Ayrıca ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü, uzak alan değerlerini hesaplamaktadır. Demek ki 2.1.3 alt başlığı altında incelediğimiz ve Şekil 2.6'de verilen yapıda ρ=100λ gibi büyük bir değer seçerek uzak alan değerlerine geçip θ=90° iken φ açısını 0°'den, 360°'ye kadar değiştirecek olursak yani xy düzlemindeki uzak alan değerlerini hesaplarsak, eleman-eleman toplama ile bulduğumuz ışıma diyagramını, ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile çizdirilen ışıma diyagramı ile karşılaştırma imkanı doğacaktır. Bu sayede eleman-eleman toplama için yazdığımız programın bir sağlamasını yapabileceğiz.



Şekil 2.8 : ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü (GUI)

Yukarıda Şekil 2.8'de, ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile xy düzleminde, x doğrultusunda $d_x=1\lambda$ aralıklarla M=10 tane ve y doğrultusunda $d_y=0.5\lambda$ aralıklarla N=6 tane olmak üzere toplam 60 tane noktasal kaynağın nasıl yerleştirildiği gösterilmiştir. ANTENGUI arayüzü y doğrultusunda ardışık kaynaklar arasında faz farkı verilmesine müsaade etmemektedir, dolayısıyla $\eta_y=0$ olmaktadır. Ancak "Planar" bloğunun içindeki faz açısına belli bir açı değeri girilerek x doğrultusundaki ardışık kaynaklar arasında bir faz farkı yaratmak mümkündür. Şekil 2.8'de bu faz açısı 45° girilmiştir, bu $\pi/4$ radyanlık faz farkının eleman-eleman toplama yönteminde $k\eta_x d_x$ çarpımı ile ifade edildiği ve $k=2\pi/\lambda$ olduğu hatırlanacak olunursa, $d_x=1\lambda$ elemanlar arası mesafe değeri için normalize faz farkı $\eta_x=1/8$ olmaktadır. Şekil 2.9a'da bu yapının Şekil 2.8'deki koordinat sistemine göre φ=0° için θ açısı ile uzak alandaki değişimi yani xz düzlemindeki ışıma diyagramı

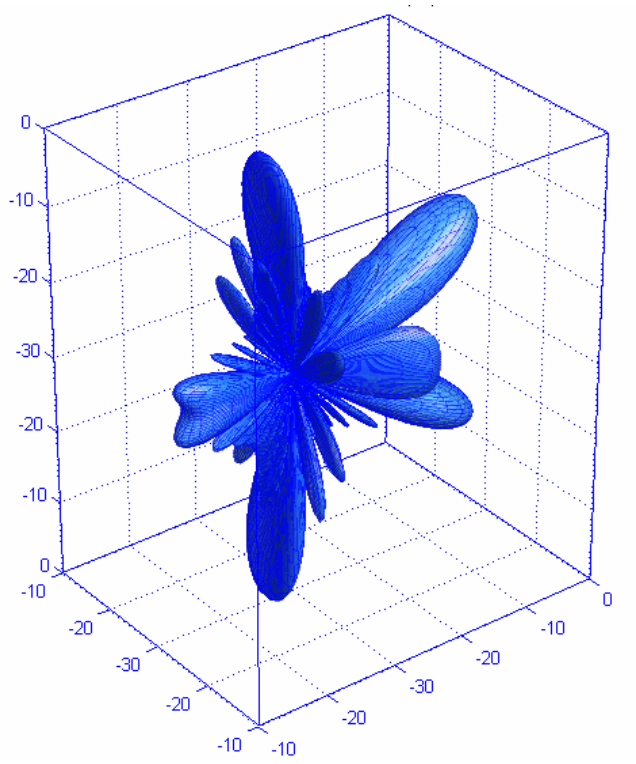
gösterilmiştir. 2.1.3 alt başlığı altında incelenen dikdörtgen dipol dizisi xz düzleminde yer almaktaydı. N_x=10, N_z=6, $d_x=1\lambda$, $d_z=0.5\lambda$, $\eta_x=1/8$, $\eta_z=0$ değerleri ile tanımlanan bu dizinin xy düzlemindeki orijinden $\rho=100\lambda$ uzaklıkta ışıma diyagramı Şekil 2.9b'de gösterilmiştir. Şekil 2.9'dan görüldüğü üzere ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile eleman-eleman toplama yönteminin sonuçlarının uzak alanda ve dipollere dik kesitte birbirine gayet iyi uyduğu gözlemlenmiştir.



(a) (b)

Şekil 2.9 : ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile eleman-eleman toplama yönteminin karşılaştırılması (M=10, N=6, $d_x=1\lambda$, $d_y=0.5\lambda$, $\eta_x=1/8$, $\eta_y=0$, f=300MHz)

ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü, 3 boyutlu ışıma diyagramları çizilmesine de olanak sağlamaktadır. Aşağıda Şekil 2.10'deki grafik, Şekil 2.9'da verilen 60 tane noktasal kaynak içeren yapının 3 boyutlu ışıma diyagramıdır.



Şekil 2.10 : ANTENGUI MatLab kullanıcı arayüzü ile 3 boyutlu ışıma diyagramı (M=10, N=6, $d_x=1\lambda$, $d_y=0.5\lambda$, $\eta_x=1/8$, $\eta_y=0$, f=300 MHz)

2.2 Zaman Domeninde Eleman-Eleman Toplama

2.2.1 Çizgisel Dipol Dizileri

Bölüm 2.1.1'de gösterildiği üzere, z-ekseni boyunca yerleştirilmiş sonsuz sayıda dipolden oluşan yapının üreteceği elektrik alan, sadece manyetik vektör potansiyelin z bileşeni $A_z(\omega)$ tarafından belirlenmektedir. Zaman domeninde de $A_z(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümü $\hat{A}_z(t)$ kullanılarak elektrik alan bileşenleri bulunabilir. Bundan sonra tez boyunca ^ sembolü, zamana bağımlı bir fonksiyonu gösterecektir. Fourier dönüşüm çifti aşağıda (2.18) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

$$A_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_z(t) e^{-j\omega t} dt \tag{2.18a}$$

$$\hat{A}_z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{2.18b}$$

Frekans domeninde Green fonksiyonu ile dipol akımları çarpılarak, $A_z(\omega)$ manyetik skaler potansiyel bulunmuştu. Frekans domeninde çarpma işlemi, zaman domeninde konvolüsyona karşı düştüğünden, zaman domeni Green fonksiyonu ile zaman domeni dipol akımlarının konvolüsyonu ile zaman domeninde tanımlı $\hat{A}_z(t)$ manyetik skaler potansiyel bulunabilir.

$J(\omega)$ frekans domeni dipol akımlarından hareketle $F^{-1}(e^{-j\omega\alpha}) = \delta(t-\alpha)$ ters dönüşüm çifti yardımıyla, $\hat{J}(t)$ zaman domeni (birim genlikli) dipol akımları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{J}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z' - nd_z)\delta\left(t - \frac{\eta_z n d_z}{c}\right) \tag{2.19}$$

Benzer şekilde zaman domeni Green fonksiyonu da

$$\hat{A}(z',t) = \frac{\delta\left(t - \frac{R(z')}{c}\right)}{4\pi R(z')} \tag{2.20}$$

olarak elde edilir. Buna göre, sıra ile tetiklenen dipol dizisinin zaman domeni dürtü cevabı,

$$\hat{A}_z(t) = \hat{A}(z',t) \otimes \hat{J}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{\eta_z n d_z}{c} - \frac{R_n)}{c}\right)}{4\pi R_n} \tag{2.21}$$

şeklinde belirlenir. Dipoller dürtü fonksiyonları yerine *Ĝ(t)* kaynak fonksiyonu ile uyarıldığında elde edilecek manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z^G(t)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{A}_z^G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{G}\left(t - \frac{\eta_z n d_z}{c} - \frac{R_n)}{c}\right)}{4\pi R_n} \tag{2.22}$$

Yarı-sonsuz çizgisel dipol dizileri için (2.22) eşitliğindeki toplam *n=0*'dan ∞'a kadar ve sonlu dipol dizileri için ise *n=0*'dan $(N_z - 1)$'e kadar hesaplanacaktır.

2.2.2 Dikdörtgen ve Üç Boyutlu Dipol Dizileri

Şekil 2.6'da gösterilen, $\hat{G}(t)$ kaynak fonksiyonları ile sırayla uyarılan dikdörtgen dipol dizisine ait zaman domeni manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z^G(t)$, yukarıda (2.22) eşitliği ile bulunan, sonsuz uzunluklu çizgisel yapıya benzer bir şekilde, eleman-eleman toplama yöntemi ile aşağıdaki (2.23) eşitliğindeki gibi bulunabilir.

$$\hat{A}_z^G(t) = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_z-1} \frac{\hat{G}\left(t - \frac{\eta_x\, m d_x}{c} - \frac{\eta_z\, n d_z}{c} - \frac{R_{nm}}{c} \right)}{4\pi\, R_{nm}} \tag{2.23}$$

Şekil 2.7'de gösterilen üç boyutlu dipol dizisine ait zaman domeni, manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z^G(t)$, benzer şekilde, eleman-eleman toplama yöntemi ile aşağıdaki (2.24) eşitliği ile ifade edilebilir.

$$\hat{A}_Z^G(t) = \sum_{p=0}^{N_y-1} \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_z-1} \frac{\hat{G}\left(t - \frac{\eta_x\, m d_x}{c} - \frac{\eta_y\, p d_y}{c} - \frac{\eta_z\, n d_z}{c} - \frac{R_{nmp}}{c} \right)}{4\pi\, R_{nmp}} \tag{2.24}$$

(2.23) ve (2.24) eşitliklerinde geçen R_{nm} ve R_{nmp} ifadeleri, ilgili dipol ile gözlem noktası arasındaki uzaklığı göstermektedir ve daha önce sırasıyla (2.15b) ve (2.16b) eşitlikleriyle tanımlanmışlardır.

3. FREKANS DOMENİNDE FLOQUET DALGALAR

3.1 Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri

Eleman-eleman toplama yönteminde, (2.3) nolu eşitlik ile bulunan frekans domeni dipol akımları ile (2.2) nolu eşitlik ile bulunan frekans domeni Green fonksiyonu ile çarpıldıktan sonra z′ üzerinden entegre edilerek, manyetik skaler potansiyel bulunmuştu.

Dipol akımları, Poisson toplamı kullanılarak, n-indisi yerine q-indisli bir toplama dönüştürülebilir ve bu yeni toplam kullanılarak daha önce her bir dipolün katkısı göz önüne alınarak (n üzerinden toplam ile) bulunmuş olan manyetik skaler potansiyel A_z, q üzerinden toplanan Floquet dalgalar cinsinden ifade edilebilir. Poisson toplamı, en genel haliyle aşağıda (3.1) eşitliğinde tanımlandığı şekildedir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\upsilon)\, e^{-j2\pi q\upsilon} d\upsilon \tag{3.1}$$

(2.3) eşitliği ile verilen frekans domeni dipol akımları, (3.1) eşitliği ile verilen Poisson toplamı kullanılarak, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z' - nd_z) e^{-jk\eta_z\, nd_z} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z' - \upsilon d_z) e^{-jk\eta_z\, \upsilon d_z} e^{-j2\pi q\upsilon} d\upsilon \tag{3.2}$$

(3.2) eşitliğinde $\upsilon' = \upsilon d_z$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılır ve integral hesaplanırsa,

$$J(\omega) = \frac{1}{d_z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-jk\eta_z z'} e^{-j2\pi q z'/d_z} \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$\alpha_q = 2\pi q / d_z \tag{3.4a}$$

$$k_{zq} = k\eta_z + \alpha_q \tag{3.4b}$$

tanımları kullanılarak $J(\omega)$ frekans domeni dipol akımları

$$J(\omega) = \frac{1}{d_z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{zq}z'} \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir. Dipol akımları ve frekans domeni Green fonksiyonu yardımıyla manyetik skaler potansiyel aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A_z(\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^{FW}(\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR(z')}}{4\pi R(z')} e^{-jk_{zq}z'} \quad dz' \tag{3.6}$$

Burada A_q^{FW}, q. Floquet dalgası olarak adlandırılacaktır. (3.6) eşitliğinde geçen, tek bir dipolün Green fonksiyonu ifadesi olan $e^{-jkR(z')}/(4\pi R(z'))$ terimi yerine aşağıda verilen spektral integral gösterilimi [24] (s.481) kullanılırsa,

$$\frac{e^{-jkR(z')}}{4\pi R(z')} = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_\rho \rho)\, e^{-jk_z(z-z')} dk_z \tag{3.7}$$

q. Floquet dalgaya ait ifade (3.8) eşitliğindeki gibi bulunur.

$$A_q^{FW}(\omega) = \frac{1}{8\pi j d_z} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_\rho \rho)\, e^{-jk_z z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jz'(k_z - k_{zq})} dz' \; dk_z \tag{3.8}$$

(3.7) ve (3.8) eşitliklerinde geçen $H_0^{(2)}$ ifadesi 0. dereceden 2. tip Hankel fonksiyonunu göstermektedir; k_z ve k_ρ ifadeleri ise sırasıyla z ekseni doğrultusundaki ve ρ radyal eksen doğrultusundaki dalga sayılarını göstermektedirler ve

$$k_\rho = \sqrt{k^2 - k_z^2} \tag{3.9}$$

bağıntısını sağlarlar. (3.8) eşitliğindeki z' integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jz'(k_z - k_{zq})} dz' = 2\pi\,\delta(k_z - k_{zq}) \tag{3.10}$$

şeklinde değerlendirilerek q. Floquet dalga için

$$A_q^{FW}(\omega) = \frac{e^{-jk_{zq}z}}{4jd_z} H_0^{(2)}(k_{\rho q}\rho) \tag{3.11}$$

ifadesi elde edilir. (3.11) eşitliğinde geçen $k_{\rho q}$ ifadesi k_z=k_{zq} olduğu zaman k_ρ'nun alacağı değeri göstermektedir ve (3.9) eşitliği uyarınca aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$k_{\rho q} = \sqrt{k^2 - k_{zq}^2} \tag{3.12}$$

0. dereceden 2. tip Hankel fonksiyonu için

$$H_0^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j[z-\pi/4]} \qquad |z|>>0 \tag{3.13}$$

asimptotik ifadesi [25], (s364) kullanılarak

$$A_q^{FW}(\omega) = \frac{e^{-j(k_{\rho q}\rho + k_{zq}z + \pi/4)}}{2d_z\sqrt{2\pi k_{\rho q}\rho}} \tag{3.14}$$

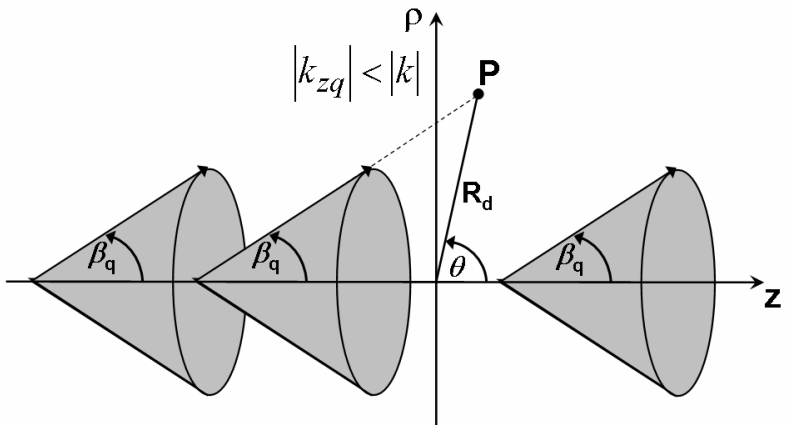
elde edilir. (3.12) eşitliği uyarınca | k_{zq} | < | k | ise $k_{\rho q}$ reel çıkar ve yayılan Floquet dalgalara karşı düşer. | k_{zq} | > | k | ise $k_{\rho q}$ imajiner olacaktır ve bu durumda Floquet bileşenleri sızıntı dalgası şeklinde olacaktır. (3.12) nolu eşitlikte geçen karekök fonksiyonu, $\rho \to \infty$ iken radyasyon koşulunun sağlanması amacıyla $\mathrm{Im}(k_{\rho q}) \le 0$, olacak şekilde seçilmiştir. Dolayısıyla sızıntı Floquet dalgalar, z ekseninden uzaklaştıkça üstel olarak hızlı bir şekilde söneceklerdir ve sadece z ekseninin yakın civarında önem kazanacaklardır.

Yayılan ve sızıntı Floquet dalgaların yayılım karakteristikleri Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Her bir q. indisi ayrı bir Floquet dalgayı göstermektedir ve her Floquet dalga, z ekseni boyunca ayrı bir çizgisel kaynağa denk düşmektedir. Floquet

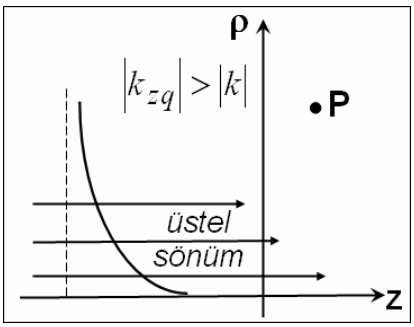
dalgaların yayılım vektörü $\vec{k}_q^{FW} = k_{\rho q}\vec{i}_\rho + k_{zq}\vec{i}_z$ olduğuna göre, bu çizgisel kaynağın her bir z noktasından çıkan Floquet dalgalar, yarı açısı

$$\beta_q = \cos^{-1}(k_{zq}/k) \tag{3.15}$$

olan bir koni üzerinde ilerlemektedirler. Herhangi bir P=(ρ,z) gözlem noktasına, birbirine paralel olarak ve koni yüzeyinde ilerleyen dalgalardan biri mutlaka ulaşacaktır.



(a)



(b)

Şekil 3.1 : a) $|k_{zq}| < |k|$ ise $k_{\rho q}$ reel ve yayılan Floquet dalgalar) **b)** $|k_{zq}| > |k|$ ise $k_{\rho q}$ imajiner ve sızıntı Floquet dalgalar ($Im(k_{\rho q}) < 0$)

Bu Floquet dalgaların yayılma açısı β_q çizgisel bir dipol dizisinin uzak alanda ışıma diyagramının maksimum değerlere sahip olacağı açı değerlerine denk düşmektedir. Dolayısıyla $|k_{zq}| < |k|$ koşulu ile belirlenen yayılan Floquet dalga sayısı da, dipol dizisi ışıma diyagramındaki ana demet sayısına denk düşecektir [26] (s. 260).

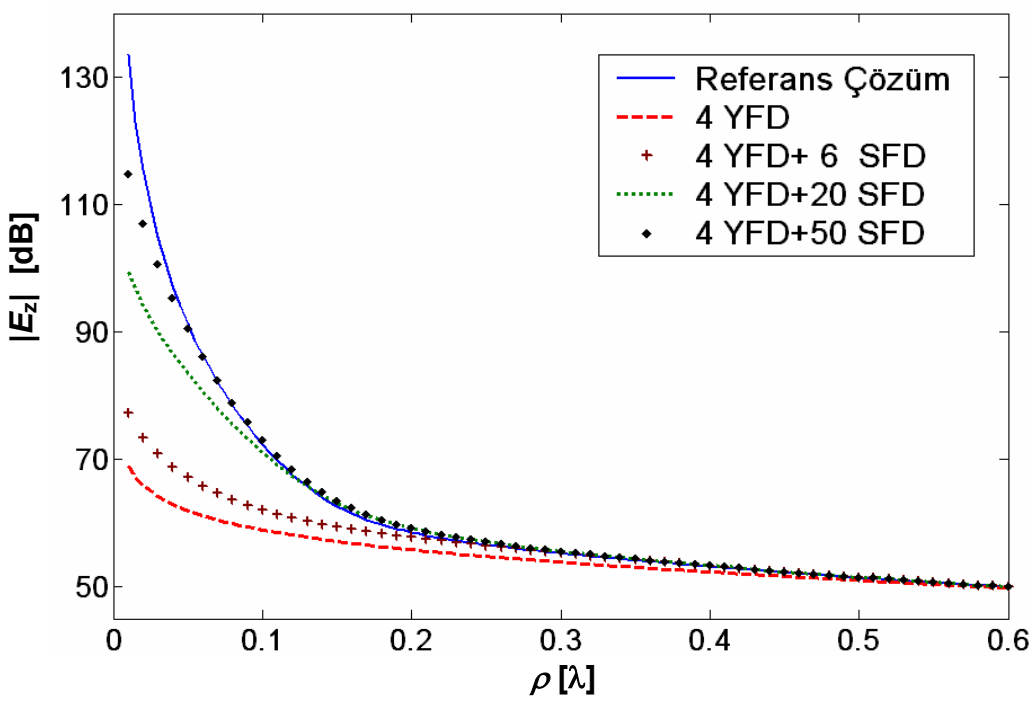
Yayılımın sadece $|k_{zq}| < |k|$ için olduğundan bahsetmiştik. (3.15) eşitliği uyarınca k_{zq} değeri *+k'* ya yaklaşırsa β_q açısı 0°'ye ve k_{zq} değeri *–k'* ya yaklaşırsa β_q açısı 180°'ye yaklaşır. $|k_{zq}| = |k|$ koşulu yayılım durumundan, sızıntı durumuna geçişi gösterir. $|k_{zq}| > |k|$ ise, β_q açısı kompleks değerler alır ve alan ρ ekseni boyunca sönen sızıntı dalgalar şeklinde olur.

Manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeni ve $E_z = -j\omega\mu A_z + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$ bağıntısı yardımıyla elektrik alanın E_z bileşeni, bazı ara işlemlerden sonra,

$$E_z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{30}{kd_z}\sqrt{\frac{2\pi}{k_{\rho q}\rho}}\left(k_{zq}^2 - k^2\right)e^{-j\left(k_{\rho q}\rho + k_{zq}z - \pi/4\right)} \tag{3.16}$$

olarak elde edilir. Şekil 3.2'de sonsuz uzunluklu çizgisel bir dipol dizisinin z=0'da oluşturacağı E_z alan bileşeninin genliğinin ρ mesafesi ile değişimi gösterilmiştir. Bu sonsuz dizide ardışık dipoller arası mesafe d_z=2λ ve ardışık dipoller arası normalize faz farkı η_z=0.25 olarak seçilmiştir. Burada referans çözüm olarak (2.7c) eşitliği ile bulunan eleman-eleman toplama yöntemi kullanılmıştır. Şekilde kullanılan parametreler için eleman-eleman toplama yöntemindeki seride 201 dipol alanının (*n*=[-100,100]) göz önüne alınması ile sayısal hesaplamalarda yeterli doğruluk elde edildiği test edilmiş ve referans çözüm bu şekilde oluşturulmuştur. Referans çözüm elde edildikten sonra aynı gözlem noktalarındaki E_z alan değerleri bir de (3.16) eşitliği ile verilen Floquet dalgalar kullanılarak hesaplanmıştır. d_z=2λ ve η_z=0.25 değerleri için (3.12) eşitliği uyarınca sadece *q*=1, 0, -1, -2 indisleri için $k_{\rho q}$ reel çıkacak ve q'nun diğer her değerinde $k_{\rho q}$ imajiner çıkacaktır. Dolayısıyla bu dizi tarafından sadece 4 tane yayılan Floquet dalga (YFD) uyarılacak, diğer bütün Floquet dalgalar sızıntı (SFD) şeklinde olacaklar ve daha öncede bahsedildiği üzere ρ mesafesi arttıkça üstel olarak hızlı bir şekilde sönecekler ve sadece dizinin yakın civarında önem kazanacaklardır. Şekil 3.2'den görüleceği diziye yaklaştıkça sadece 4 tane yayılan Floquet dalganın toplamı ile bulunan çözümler yeterli olmamakta ve ne kadar fazla sızıntı Floquet dalga alınırsa, referans çözüme o kadar yaklaşılmaktadır. Şekilde sırasıyla 6 (q= -5, -4, -3, 2, 3, 4), 20 ve 50 tane sızıntı Floquet dalganın, 4

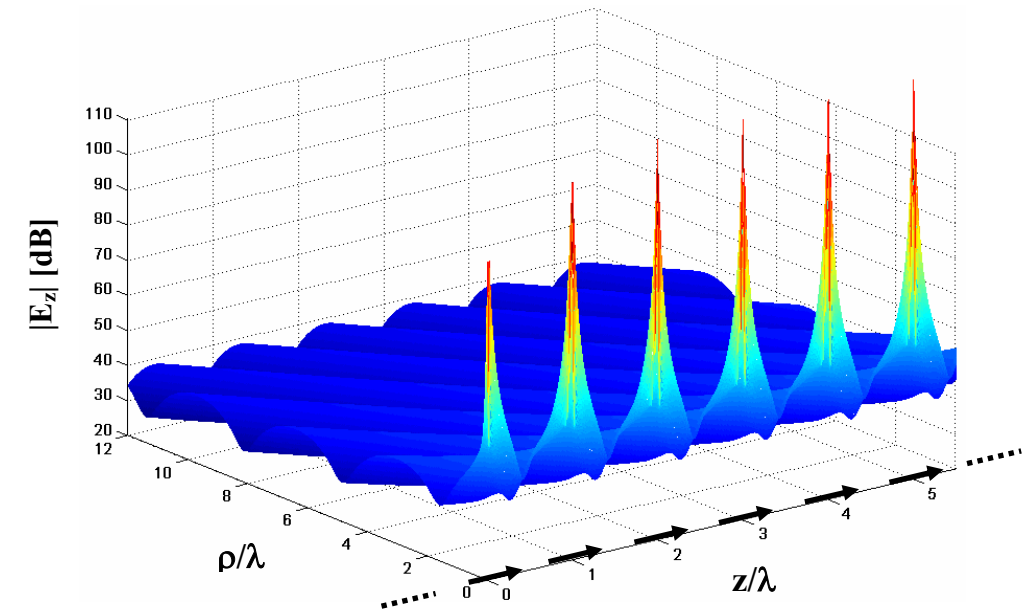
yayılan Floquet dalgaya ilave edilmesiyle elde edilen alan değerleri çizilmiştir. Diziden uzaklaştıkça yani artan ρ değerleri için 4 tane yayılan Floquet dalga yeterli olmaktadır ve her bir gözlem noktasındaki alan değerlerinin bulunması için 201 defa toplama işlemi gerektiren eleman-eleman toplama yöntemine karşılık sadece 4 toplama işlemi yapılarak çözümler elde edilmektedir ki bu da Floquet dalgaların eleman-eleman toplama yöntemine göre çok daha hızlı olduğunu ortaya koymaktadır.



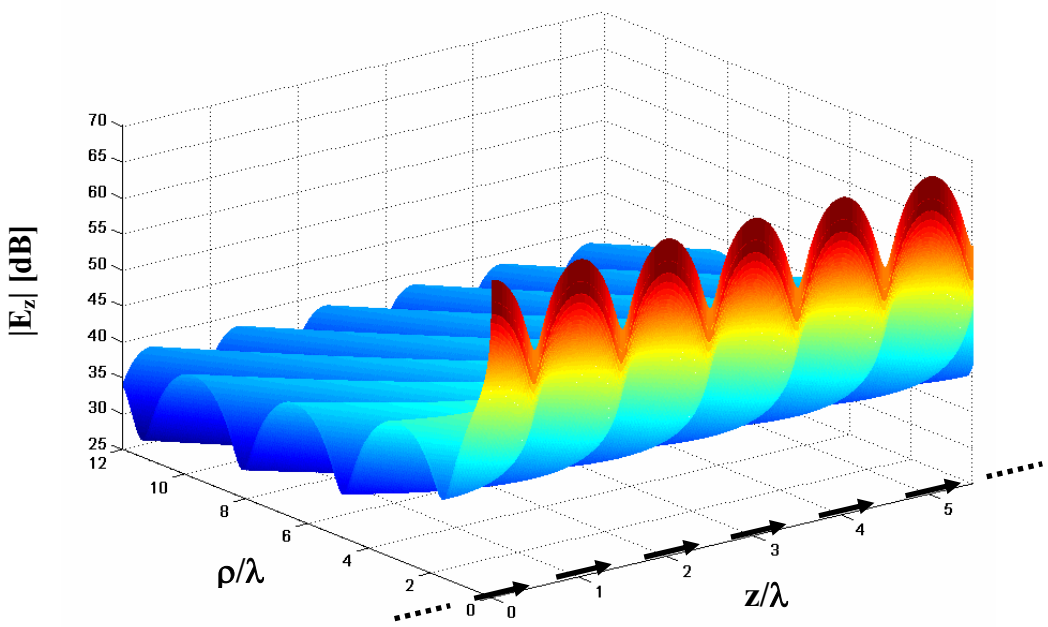
Şekil 3.2 : Sonsuz uzunluklu çizgisel bir dipol dizisinin z=0'da oluşturacağı E_z alan bileşeninin genliğinin ρ mesafesi ile değişimi için yayılan Floquet dalgalar ve farklı sayıda sızıntı Floquet dalgalar kullanılarak bulunan çözümün, eleman-eleman toplama yöntemi ile bulunan referans çözüm ile karşılaştırılması (d_z=2λ, η_z=0.25)

Şekil 3.3'de ardışık dipoller arası mesafesi d_z=1λ ve normalize faz farkı η_z=0.25 olan sonsuz uzunluklu çizgisel bir dipol dizisinin oluşturacağı E_z alan bileşeninin genliğinin z ve ρ koordinatlarına göre değişimi gösterilmiştir. Şekil 3.3a'nın oluşturulmasında eleman-eleman toplama yöntemi, Şekil 3.3b'nin oluşturulmasında ise Floquet dalgalar kullanılmıştır. Bu yapı sadece 2 tane yayılan Floquet dalga uyaracaktır, bunlar da q=0 ve q=-1 indislerine denk düşen Floquet dalgalardır. Şekil 3.3b'de gösterilen alan değerleri, sadece bu iki yayılan Floquet dalganın toplanmasıyla elde edilmiş ve sızıntı Floquet dalgalar ihmal edilmiştir. Şekil 3.3a ve Şekil 3.3b'nin karşılaştırılmasından görüleceği üzere yayılan Floquet dalgalar ile bulunan çözüm, dizinin yakın civarı haricinde referans çözüm ile uyuşmaktadır.

Dizinin yakın civarında da Floquet dalgaları kullanarak referans çözüme yakın sonuçlar elde edilmek isteniyorsa, belirli bir sayıda sızıntı Floquet dalganın da hesaplanması gerekmektedir.



(a)



(b)

Şekil 3.3 : a) Eleman-eleman toplama yöntemi ile **b)** Floquet dalgalar ile bulunan E_z alan değerlerinin z ve ρ koordinatlarına göre değişimi ($d_z=1\lambda$, $\eta_z=0.25$)

3.2 Yarı-Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri

Sonsuz uzunluklu dizilerde daha önce gördüğümüz üzere, dipol akımları için Poisson toplamı kullanılarak, manyetik skaler potansiyel A_z, q üzerinden toplanan Floquet dalgalar cinsinden ifade edilebilmişti.

Şekil 2.2'de gösterilen z=0'da kesilmiş ve z=0'dan başlayıp z=+∞'a uzanan yarı-sonsuz çizgisel diziye ait dipol akımlarının ifadesi, (2.3) eşitliği ile bulunan sonsuz diziye ait dipol akımlarının ifadesindeki toplamın n=(–∞, ∞) yerine n=(0, ∞)'a hesaplanmasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$J(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z' - nd_z) e^{-jk\eta_z\, nd_z} \tag{3.17}$$

Yarı-sonsuz bir dizi için geçerli kesilmiş Poisson toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{F(0)}{2} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(\upsilon) e^{-j2\pi q\upsilon} d\upsilon \tag{3.18}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu bağıntı yardımıyla, sonsuz çizgisel diziler için yapılmış olan benzer yol izlenerek (3.17) ifadesi

$$J(\omega) = \frac{\delta(z')}{2} + \frac{1}{d_z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-j\, k_{zq}\, z'} \tag{3.19}$$

şekline dönüştürülebilir. Bu durumda manyetik skaler potansiyel A_z için,

$$A_z(\omega) = \frac{1}{2} \frac{e^{-jkR_d}}{4\pi R_d} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d_z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-jkR(z')}}{4\pi R(z')} e^{-j\, k_{zq}\, z'} dz' \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada, $R(z')$ ve R_d'nin $R(z') = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ ve $R_d = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ şeklindeki tanım bağıntılarının hatırlatılması yararlı olacaktır. Aşağıdaki gibi tanımlanan $A_0(\omega)$ ve $A_q^T(\omega)$

$$A_0(\omega) = \frac{e^{-jkR_d}}{4\pi R_d} \tag{3.21a}$$

$$A_q^T(\omega) = \frac{1}{d_z}\int_0^{\infty} \frac{e^{-jkR(z')}}{4\pi R(z')} e^{-j k_{zq} z'} dz' \tag{3.21b}$$

yardımıyla (3.20)

$$A_z(\omega) = \frac{A_0(\omega)}{2} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^T(\omega) \tag{3.22}$$

şekline indirgenir. (3.21b) eşitliğindeki integralin içindeki, tek bir dipole ait Green fonksiyonu ifadesi yerine daha önce (3.7) eşitliği ile verilen spektral integral gösterilim kullanılırsa

$$A_q^T(\omega) = \frac{1}{8\pi\, jd_z}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}\left(k_\rho \rho\right) e^{-jk_z(z-z')} e^{-j k_{zq} z'} dk_z\, dz' \tag{3.23}$$

elde edilir. Yukarıda sıra değiştirilip, z' integrali küçük bir kayıp varsayımı ile değerlendirilerek [5, 8]

$$A_q^T(\omega) = \frac{1}{8\pi d_z}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}\left(k_\rho \rho\right) \frac{e^{-jk_z z}}{k_z - k_{zq}} dk_z \tag{3.24}$$

yazılabilir. Yukarıdaki bağıntıda Hankel fonksiyonunun büyük argüman asimptotik ifadesi kullanılarak

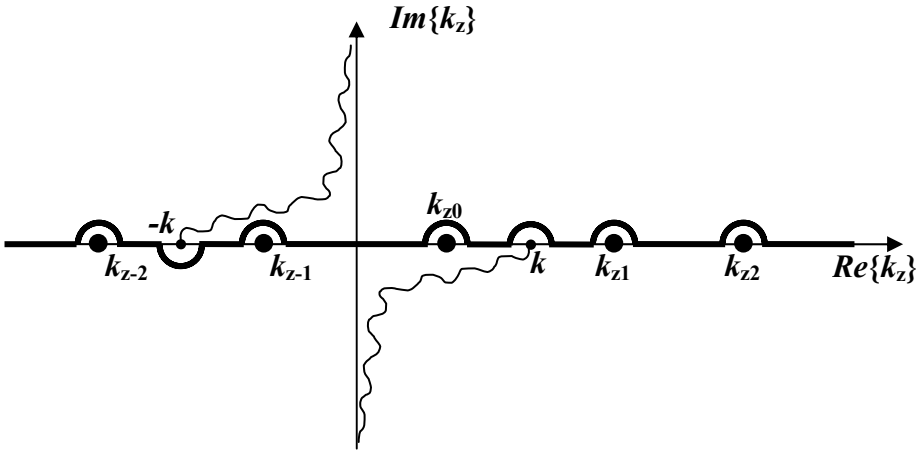
$$A_q^T(\omega) = \frac{e^{j\pi/4}}{4\pi d_z\sqrt{2\pi\rho}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(k_\rho \rho + k_z z)}}{(k_z - k_{zq})\sqrt{k_\rho}} dk_z\,, \qquad \begin{aligned} k_\rho &= \sqrt{k^2 - k_z^2} \\ k_{zq} &= k\eta_z + 2\pi q / d_z \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. Yukarıdaki integrandın $k_z = \pm k$'da dallanma noktaları ve $k_z = k_{zq}$'da basit kutupları bulunmaktadır. Bu tekil noktalar Şekil 3.4'de dal kesimleri ve integrasyon eğrisi ile birlikte gösterilmiştir. Spektral düzlem $\mathrm{Im}\{k_\rho\} < 0$ ile tanımlıdır. Bu kutuplardaki rezidüler Floquet Dalgalara (FD) karşı düşer. Kolayca görüleceği gibi,

- $|k|>|k_{zq}|$ olduğu durumda $k_{\rho q}$ reel çıkar ve kutuplar yayılan Floquet dalgalara karşı düşer.

- $|k|<|k_{zq}|$ olduğu durumda ise $k_{\rho q}$ saf imajiner çıkar ve kutuplar sızıntı Floquet dalgalara karşı düşer.

Başka bir deyişle, yayılan Floquet dalgalara karşı düşen kutuplar $|k_{zq}|<|k|$ aralığında bulunmalıdır. Buna göre Şekil 3.4'de q=0 ve q=-1 indisleriyle gösterilenler dışındaki Floquet bileşenleri sızıntı dalgalara karşı düşecektir.



Şekil 3.4 : Kompleks k_z düzlemi

(3.25) eşitliğindeki integrandı basitleştirmek için (k_z, k_ρ) silindirik koordinatlarından (k, α) küresel koordinatlarına geçilsin.

$$k_z = k\cos(\alpha) \tag{3.26a}$$

$$k_\rho = k\sin(\alpha) \tag{3.26b}$$

(z, ρ) silindirik koordinatları da (R_d ,θ) küresel koordinatlarında

$$z = R_d\cos(\theta) \tag{3.27a}$$

$$\rho = R_d\sin(\theta) \tag{3.27b}$$

olarak yazılırsa (3.25) eşitliğindeki faz terimi

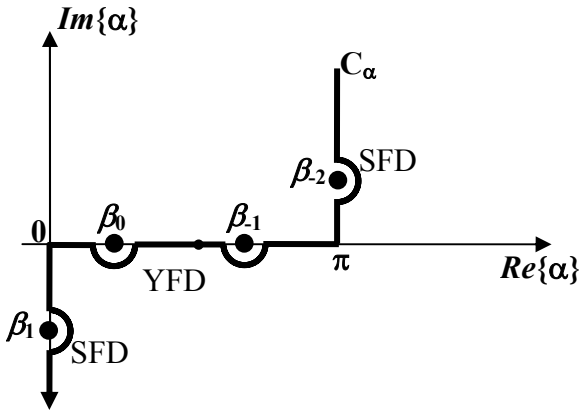
$$k_\rho\,\rho + k_z z = kR_d\cos(\alpha-\theta) \tag{3.28}$$

şeklini alır. Ayrıca (3.15) eşitliği uyarınca $k_{zq} = k\cos(\beta_q)$ olduğu ve (3.26a) eşitliği uyarınca $dk_z = -k\sin(\alpha)d\alpha$ olduğu da dikkate alınırsa, (3.25) eşitliği aşağıdaki hale dönüşür.

$$A_q^T(\omega) = \frac{-e^{j\pi/4}}{4\pi d_z\sqrt{2\pi\rho k}} \int_{C_\alpha} \frac{e^{-jkR_d\cos(\alpha-\theta)}}{\cos(\alpha)-\cos(\beta_q)}\sqrt{\sin(\alpha)}\,d\alpha \tag{3.29}$$

(3.29) eşitliğinin kutupları olan $\alpha = \beta_q$ değerleri daha önce (3.15) eşitliği ile tanımlanan $\beta_q = \cos^{-1}(k_{zq}/k)$ değerine eşittir. Ayrıca (3.26a) eşitliği uyarınca $\alpha = \cos^{-1}(k_z/k)$ olur.

$\cos^{-1}$ fonksiyonunun ana dalı seçilerek k_z düzleminden α-düzlemine geçilince integrasyon eğrisi C_α ve β_q kutupları Şekil 3.5'de gösterildiği şekilde olacaktır.



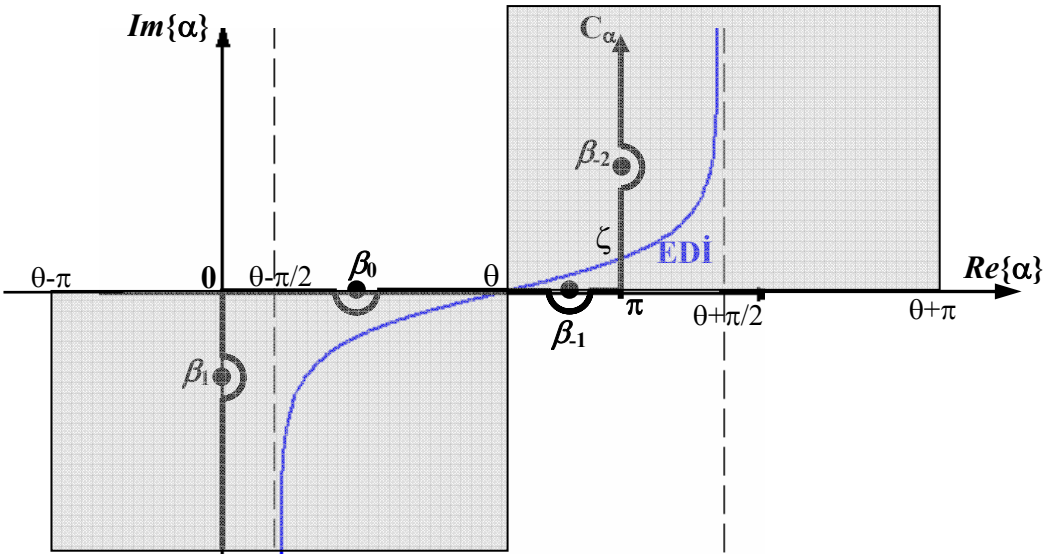
Şekil 3.5 : α-düzleminde integrasyon eğrisi C_α ve β_q kutuplarının yerleri

$k_{\rho q}$'nun reel ya da imajiner çıkmasına göre β_q kutuplarının yerleri ve karşı düştükleri Floquet Dalgalar Tablo 3.1'de özetlenmiştir.

Tablo 3.1 : $k_{\rho q}$ 'nun reel ya da imajiner çıkmasına göre β_q kutupları ve karşı gelen Floquet Dalgalar

$\lvert k\rvert > \lvert k_{zq}\rvert$	$\lvert k\rvert < \lvert k_{zq}\rvert$	
$k_{\rho q}$ reel	$k_{\rho q}$ imajiner $\mathrm{Im}(k_{\rho q}) < 0$	
$-k < k_{zq} < k$	$k_{zq} < -k$	$k_{zq} > k$
$-1 < \frac{k_{zq}}{k} < 1$	$\frac{k_{zq}}{k} < -1$	$\frac{k_{zq}}{k} > 1$
β_q reel $\beta_q \in (0, \pi)$	β_q kompleks $\beta_q \in (\pi, \pi + j\infty)$	β_q kompleks $\beta_q \in (-j\infty, 0)$
Yayılan Floquet Dalgalar (YFD)	Sızıntı Floquet Dalgalar (SFD)	Sızıntı Floquet Dalgalar (SFD)

(3.29) eşitliğindeki integral yüksek frekans yaklaşıklığı altında asimptotik olarak değerlendirilecektir. Bu amaçla C_α integrasyon konturu, semer noktasından en dik iniş doğrultusunda geçecek şekilde deforme edilir. Şekil 3.6'da bu yeni kontur EDİ ile gösterilmiş, integrasyon yolunun deforme edilebileceği sönümlü bölgeler taranmış ve bu bölgede EDİ'nin asimptotik davranışı kesikli çizgilerle belirtilmiştir. Gözlem noktasına bağlı olarak EDİ'nin orijinal C_α konturunu kestiği α noktaları Şekil 3.6'da θ ve ζ ile gösterilmiştir.



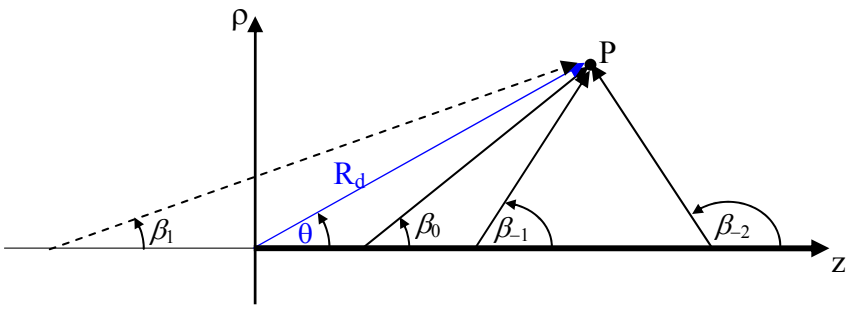
Şekil 3.6 : En dik iniş yolu (EDİ), semer noktası θ ve β_q kutuplarının yerleri

(3.29) bağıntısındaki faz teriminin birinci türevinin sıfıra eşitlenmesi ile hemen görüleceği gibi θ, semer noktasına karşı düşmektedir (Bakınız EK A). Açıktır ki, (3.29)'da q indisi ile belirtilen yayılan veya sızıntı Floquet dalgasını tanımlayan β_q kutbunun C_α üzerindeki konumu θ – ζ aralığı dışında ise integral yolunun değiştirilmesinin bir etkisi olmayacak aksi takdirde EDİ yolu kullanılırken β_q'daki rezidü katkısının da göz önüne alınması gerekecektir.

EDİ üzerindeki integral asimptotik yöntemlerle kolayca değerlendirilebilir. Kuşkusuz, böyle bir gösterilimde kullanılacak asimptotik yaklaşıklıkların, β_q kutbunun θ veya ζ üzerinden geçtiği bölgelerde süreksizliğe yol açmayacak şekilde belirlenmeleri de önem taşımaktadır.

Açısal spektrumda çalışmanın sağladığı önemli bir yarar da, gözlem noktasına ulaşan Floquet dalgaların tipi ve bunu belirleyen parametreler hakkında fiziksel bir görüş sağlamasıdır. Şekil 3.7'de $\eta_z>0$ durumu için verilen şematik çizimde semer noktası olarak belirlenen θ'nın, gözlem noktasını orijine (dizinin kesildiği uca) birleştiren R_d doğrusu ile dizi arasındaki açıya karşı düştüğü görülmektedir. Şekilde ayrıca ilk birkaç yayılan Floquet dalganın bu gözlem noktasına ulaşıp ulaşamama durumu da sürekli ve kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Yayılan Floquet dalgaların bir bölümünün gözlem noktasına ulaşamamasının sebebi şekilde şematik olarak gösterildiği üzere dizinin sonlandırılmış olmasının sonucudur. Reel açılara karşı düşmediği için şekilde gösterilmemekle birlikte benzer bir durum sızıntı Floquet dalgalar için de söz konusudur ve bunların da (aşağıda verilecek olan kritere bağlı olarak) ancak bir bölümü gözlem noktasındaki alana katkıda bulunur. Aşağıda gösterileceği gibi her Floquet dalga için β_q^{SB} gibi bir gölge bölge sınır açısı tanımlanabilir, öyle ki bu dalgalar yalnızca $\theta < \beta_q^{SB}$ için gözlem noktasındaki alana (kırınım dışında) katkıda bulunurlar.

Yayılan veya sızıntı, gözlem noktasına ulaşan veya ulaşmayan tüm Floquet dalgaların, dizinin kesilen ucundan kırınımlarının gözlem noktalarındaki etkileri, (3.22) bağıntısındaki ilk terim (bakınız (3.21a)) ile birlikte her bir Floquet dalga için (3.29)'un EDİ konturu üzerinde değerlendirilmesi ile elde edilecektir.



Şekil 3.7 : Floquet dalganın gözlem noktasına ulaşıp ulaşamama durumu

O halde en dik iniş yolunun, β_q^{SB} açılarının, rezidü katkıları ile EDİ üzerindeki integralin asimptotik ifadesi ve toplam kırınım teriminin belirlenmesi gerekmektedir.

En dik iniş yolunu bulmak için faz fonksiyonunun imajiner kısmının, faz fonksiyonunun semer noktasındaki imajiner kısmına eşit olduğu noktalar kümesi belirlenir. $q(\alpha)$ faz fonksiyonunun imajiner kısmı $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$ yazılarak aşağıda (3.30) nolu eşitlikte verildiği gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\{q(\alpha)\} &= \mathrm{Im}\{-jk\,R_d\,\cos((\alpha_r-\theta)+j\alpha_i)\,\} = -k\,R_d\,\cos(\alpha_r-\theta)\cosh(\alpha_i) \\ &= -k\,R_d \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dolayısıyla, EDİ yolu bağıntısı

$$1 = \cos(\alpha_r-\theta)\cosh(\alpha_i) \tag{3.31}$$

olarak elde edilir.

Gölge bölge sınırı, β_q kutuplarının, en dik iniş yolu (EDİ) üzerinde yer aldığı $\theta = \beta_q^{SB}$ açılarında tanımlanır. Dolayısıyla gölge bölge sınırını bulmak için, en dik iniş yolu, β_q kutuplarından geçiyor kabul edildiğinden (3.31) nolu eşitlikte $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ yerine $\beta_q = \beta_{qr} + i\beta_{qi}$ yazılabilir. Ayrıca bulunacak θ açısı da gölge bölge sınır değerine eşit olacağından θ yerine β_q^{SB} yazılabilir.

$$\cos(\beta_{qr}-\beta_q^{SB})\cosh(\beta_{qi}) = 1 \tag{3.32}$$

Bu durumda $k_{\rho q}$'nun reel ya da imajiner olmasına göre farklı β_q^{SB} değerleri ortaya çıkacaktır. Daha önce Tablo 3.1'de özetlendiği üzere β_q kutupları k ve k_{zq} dalga sayılarının değerlerine göre 3 farklı bölgede bulunabilir. Bu 3 farklı bölgedeki β_q değerleri (3.15) eşitliğinden hareketle Tablo 3.2'deki gibi olacaktır.

Tablo 3.2 : β_q kutuplarının 3 farklı bölgedeki k ve k_{zq} cinsinden değerleri

$\lvert k\rvert > \lvert k_{zq}\rvert$	$\lvert k\rvert < \lvert k_{zq}\rvert$	
$k_{\rho q}$ reel	$k_{\rho q}$ imajiner $\quad Im(k_{\rho q}) < 0$	
$-k < k_{zq} < k$ β_q reel $\beta_q \in (0, \pi)$ $\beta_q = \beta_{qr}$	$k < k_{zq}$ β_q kompleks $\beta_q \in (-j\infty, 0)$ $\beta_q = -j\lvert\beta_{qi}\rvert$	$k_{zq} < -k$ β_q kompleks $\beta_q \in (\pi, \pi + j\infty)$ $\beta_q = \pi + j\lvert\beta_{qi}\rvert$
$\beta_q = \cos^{-1}\left(\frac{k_{zq}}{k}\right)$	$\cos(\beta_q) = \cos\left(-j\lvert\beta_{qi}\rvert\right)$ $= \cosh\left(\lvert\beta_{qi}\rvert\right) = \frac{k_{zq}}{k}$ $\lvert\beta_{qi}\rvert = \cosh^{-1}\left(\frac{k_{zq}}{k}\right)$ $\beta_q = -j\cosh^{-1}\left(\frac{k_{zq}}{k}\right)$	$\cos(\beta_q) = \cos\left(\pi + j\lvert\beta_{qi}\rvert\right) =$ $-\cos\left(j\lvert\beta_{qi}\rvert\right) = -\cosh\left(\lvert\beta_{qi}\rvert\right) = \frac{k_{zq}}{k}$ $\lvert\beta_{qi}\rvert = \cosh^{-1}\left(-\frac{k_{zq}}{k}\right)$ $\beta_q = \pi + j\cosh^{-1}\left(-\frac{k_{zq}}{k}\right)$

Tablo 3.2'deki β_q değerleri (3.32) eşitliğinde yerine koyulacak olunursa $k_{\rho q}$'nun reel ya da imajiner olmasına göre gölge bölge sınır açısı β_q^{SB} değerleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta_q^{SB} = \beta_q = \cos^{-1}\left(\frac{k_{zq}}{k}\right) \qquad \text{Yayılan dalgalar, } k_{\rho q} \text{ reel} \qquad (3.33a)$$

$$\beta_q^{SB} = \cos^{-1}\left(\frac{k}{k_{zq}}\right) \qquad \text{Sızıntı dalgalar, } k_{\rho q} \text{ imajiner} \qquad (3.33b)$$

O halde (3.29) eşitliği ile verilen A_q^T, kesilmiş Floquet dalgalar ve A_q^d ile gösterilen kırınan dalgalar olmak üzere 2 ayrı katkının toplamı şeklinde ifade edilebilir.

$$A_q^T(\omega) = A_q^{FW}(\omega)\, U\left(\beta_q^{SB} - \theta\right) + A_q^d(\omega) \qquad (3.34)$$

Burada, U birim basamak fonksiyonu aşağıda (3.35) eşitliğinde tanımlanmıştır.

$$U\left(\beta_q^{SB}-\theta\right)=\begin{cases}1 & \theta<\beta_q^{SB}\\ 0.5 & \theta=\beta_q^{SB}\\ 0 & \theta>\beta_q^{SB}\end{cases} \tag{3.35}$$

Yukarıdaki (3.34) eşitliğinde geçen A_q^{FW} ifadesi integrasyon eğrisi üzerindeki kutuplardan gelen rezidü katkılarını göstermektedir. Daha önce de işaret edildiği gibi bu katkı yalnızca $\beta_q^{SB}>\theta$ koşulunu sağlayan Floquet dalgalar için söz konusudur. $\alpha=\beta_q$ basit kutuplarındaki rezidü katkısı

$$A_q^{FW}(\omega)=\frac{e^{-j\left[kR_d\cos(\beta_q-\theta)+\pi/4\right]}}{2d_z\sqrt{2\pi\rho k\sin(\beta_q)}}=\frac{e^{-j(k_{\rho q}\rho+k_{zq}z+\pi/4)}}{2d_z\sqrt{2\pi\rho k_{\rho q}}} \tag{3.36}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte gösterildiği gibi rezidü katkıları daha önce (3.14) eşitliği ile bulunan sonsuz diziye ait Floquet dalgaların ifadesinin aynısıdır.

(3.34) bağıntısında A_q^d ile gösterilen uç kırınımı katkısı, (3.29)'daki integralin EDİ kullanılarak asimptotik olarak değerlendirilmesi ile elde edilecektir. Ek A'da ayrıntıları verilmiş olduğu gibi A_q^d'nun gölge bölgesi sınır açısı geçişlerinde sürekliliği sağlayacak biçimde asimptotik olarak hesaplanmasıyla

$$A_q^d(\omega)=\frac{e^{-jkR_d}}{j4\pi d_z kR_d}\frac{F\left(\delta_q^2\right)}{(\cos(\beta_q)-\cos(\theta))} \tag{3.37}$$

elde edilir. Burada,

$$F(\delta_q^2)=\pm\sqrt{\pi}\delta_q\, e^{j\delta_q^2}\, e^{j\pi/4}\, erfc(\pm e^{j\pi/4}\delta_q) \tag{3.38a}$$

$$\delta_q=\sqrt{2kR_d}\sin\left(\frac{\beta_q-\theta}{2}\right) \tag{3.38b}$$

olarak tanımlıdır ve *erfc* tümleyici hata fonksiyonunu göstermektedir (Bakınız Ek A). Bu durumda (3.34) bağıntısı (3.22)'de yerine koyularak gözlem noktasında toplam A_z alanı

$$A_z(\omega) = \underbrace{\frac{A_0}{2} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^d(\omega)}_{A^d} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^{FW}(\omega)\, U\left(\beta_q^{SB} - \theta\right) \tag{3.39}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A_0 (3.21a), A_q^d (3.37), A_q^{FW} (3.36) ve β_q^{SB} (3.33) eşitlikleri ile verilmiştir.

(3.39) eşitliğinde gösterildiği gibi gözlem noktasındaki toplam kırınım etkilerine karşı düşen ilk 2 terim

$$A^d = \frac{A_0}{2} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^d(\omega) = \frac{e^{-jkR_d}}{4\pi R_d}\left[\frac{1}{2} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{F\left(\delta_q^2\right)+1-1}{j\, d_z k\, (\cos(\beta_q) - \cos(\theta))}\right] \tag{3.40}$$

şeklinde yazılsın. Bu ifade biraz düzenlenecek olunursa,

$$A^d = \frac{e^{-jkR_d}}{4\pi R_d}\left[\frac{1}{2} + j\sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{kd_z(\cos(\theta) - \cos(\beta_q))} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{F\left(\delta_q^2\right)-1}{j\, d_z k\, (\cos(\beta_q) - \cos(\theta))}\right] \tag{3.41}$$

elde edilir. (3.41) eşitliğindeki ilk toplam

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a - 2\pi q} = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{a}{2}\right) \tag{3.42}$$

özdeşliği yardımıyla kapalı biçimde ifade edilirse

$$A^d = \frac{e^{-jkR_d}}{4\pi R_d}\left[\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\cot\left(\frac{a}{2}\right) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{F\left(\delta_q^2\right)-1}{j\, d_z k\, (\cos(\beta_q) - \cos(\theta))}\right] \tag{3.43}$$

elde edilir. Burada a

$$a = kd_z(\cos(\theta) - \cos(\beta_q)) + 2\pi q \tag{3.44}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $2\pi q = d_z \alpha_q$ olduğu dikkate alınarak,

$$a = kd_z \cos(\theta) - d_z \left[k\cos(\beta_q) - \alpha_q \right] \tag{3.45}$$

yazılabilir. Burada $k\cos(\beta_q) = k_{zq}$ ve $k_{zq} - \alpha_q = k\eta_z$ kullanılırsa

$$a = kd_z \cos(\theta) - d_z k\eta_z \tag{3.46}$$

elde edilir. Nihayet, q=0 için (3.4b) eşitliği uyarınca $k_{z0} = k\eta_z$ ve (3.15) eşitliği uyarınca $\cos(\beta_0) = k_{z0}/k = \eta_z$ yazılarak

$$a = kd_z \left[\cos(\theta) - \cos(\beta_0) \right] \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.43) eşitliğindeki köşeli parantezin içindeki ilk 2 terim aşağıdaki (3.48) özdeşliği kullanılarak tek bir terim olarak ifade edilebilir:

$$\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\cot\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{1 - e^{ja}} \tag{3.48}$$

Yukarıdaki (3.48) eşitliği ve a yardımcı değişkeninin (3.47) eşitliği ile bulunan ifadesi (3.43)'de yerine konularak A^d toplam kırınım terimi aşağıdaki (3.49) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir.

$$A^d = \frac{e^{-jkR_d}}{4\pi R_d} \left[\frac{1}{1 - e^{jkd_z\left[\cos(\theta) - \cos(\beta_0)\right]}} + \sum_q \frac{F\left(\delta_q^2\right) - 1}{j\, d_z k\, (\cos(\beta_q) - \cos(\theta))} \right] \tag{3.49}$$

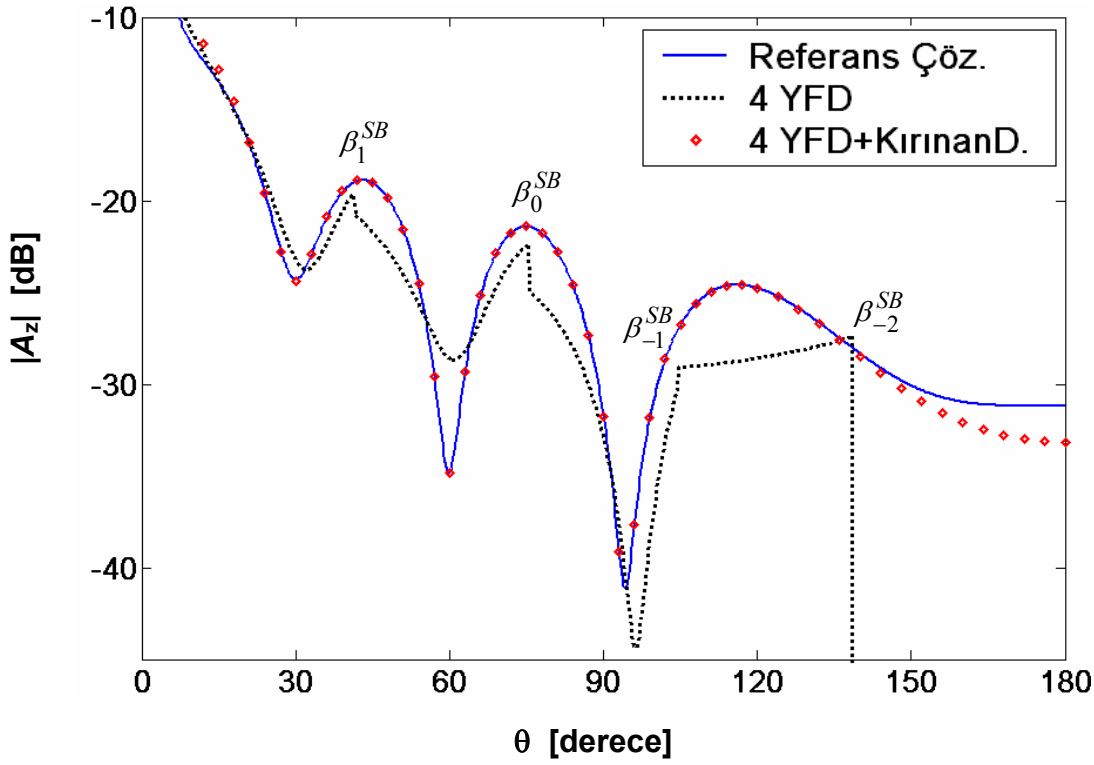
Sızıntı Floquet dalgalar için β_q kutupları Tablo 3.1'de özetlendiği şekilde kompleks çıkar ve Şekil 3.5'de gösterildiği üzere, reel eksen üzerindeki semer noktalarından uzakta bulunduklarından (3.49) eşitliğindeki F fonksiyonu $F \approx 1$ olur ve dolayısıyla (3.49) eşitliğindeki toplamı sadece yayılan Floquet dalgalara denk düşen q indisleri için hesaplamak yeterli olacaktır. (3.49) eşitliğindeki parantez içindeki ilk terim, bütün sızıntı dalgalar tarafından uyarılan kırınan dalgaların toplam etkisini kapalı bir formda vermektedir. Sonuç olarak gözlem noktasındaki A_z alanının hesaplanmasında (3.39)'da belirtilen A^d için (3.49) ifadesi kullanılacaktır.

Yayılan, sızıntı Floquet dalgalarının, bunlara ilişkin gölge bölgelerinin ve uç kırınım etkilerinin bağıl katkılarını göstermek amacıyla aşağıda 2 sayısal hesaplama örneği verilecektir.

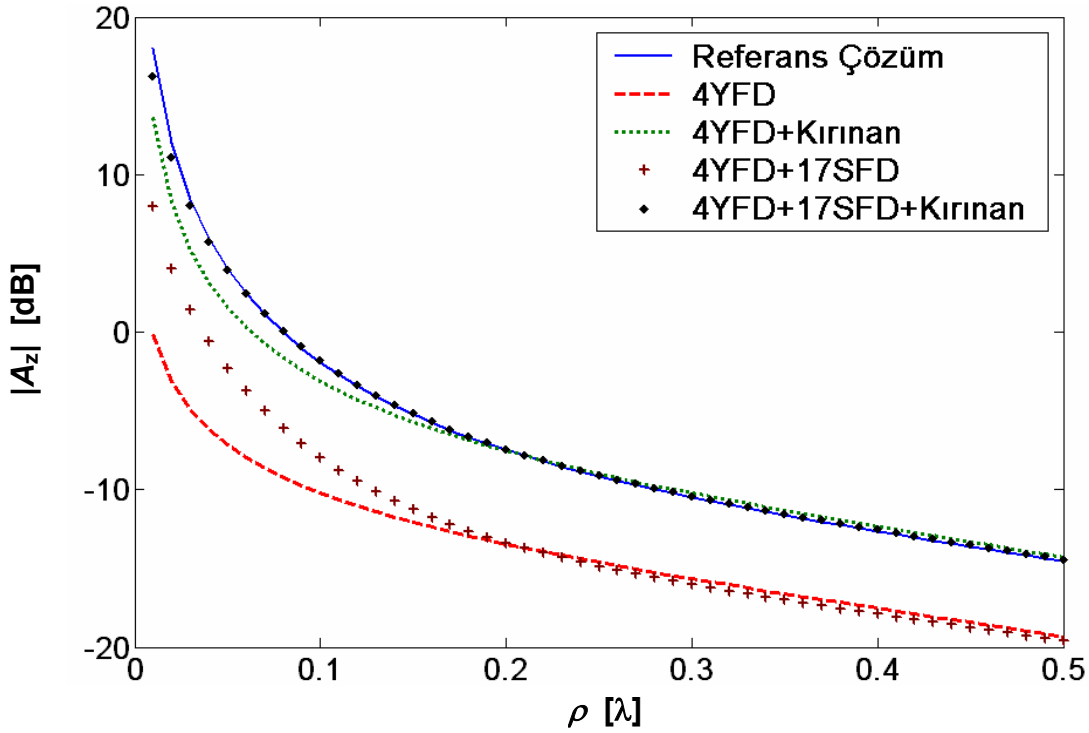
Şekil 3.8'de yarı-sonsuz uzunluklu çizgisel bir dipol dizisinin orijinden R_d=2λ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi gösterilmiştir. Bu yarı-sonsuz dizide ardışık dipoller arası mesafe d_z=2λ, ve ardışık dipoller arası normalize faz farkı η_z=0.25 olarak seçilmiştir. Burada referans çözüm olarak (2.9) eşitliği ile bulunan eleman-eleman toplama yöntemi kullanılmıştır. Ancak (2.9) eşitliğinde verilen n=(0, ∞)'a toplama işlemi, sayısal çözümler elde edebilmek amacıyla kesilmiş ve eleman-eleman toplama yöntemindeki seri n=[0, 100] arasındaki n değerleri için hesaplanmıştır. Referans çözüm elde edildikten sonra aynı gözlem noktalarındaki A_z alan değerleri bir de (3.39) eşitliği ile verilen kesilmiş Floquet dalgalar ve z=0'daki dizinin köşesinden kırınan dalgalar kullanılarak hesaplanmıştır. $d_z=2\lambda$ ve η_z=0.25 değerleri için (3.12) eşitliği uyarınca sadece q=1, 0, -1, -2 indisleri için yayılan Floquet dalgalar (YFD) uyarılacak, diğer bütün Floquet dalgalar sızıntı (SFD) şeklinde olacaktır. Bu 4 yayılan Floquet dalgaya ilişkin gölge bölge sınır açıları (3.33a) eşitliği uyarınca β_{-2}^{SB}=138.6°, β_{-1}^{SB}=104.5°, β_{0}^{SB}=75.5°, β_{1}^{SB}=41.4° olacaktır. Şekil 3.8'de önce kırınan dalgalar ilave edilmeden sadece (3.39) eşitliğindeki Floquet dalgalar A_q^{FW} çizdirilmiş ve her bir Floquet dalga $\theta < \beta_q^{SB}$ için hesaba katılmış $\theta > \beta_q^{SB}$ için o Floquet dalga hesaba katılmamıştır. Dolayısıyla da daha önce bahsedildiği gibi her bir $\theta = \beta_q^{SB}$ değerinde bir süreksizlik oluşmuştur. Ancak Floquet dalgalara ilaveten kırınan dalgalarda eklenerek bulunan alan değerleri, kırınan dalgaların $\theta = \beta_q^{SB}$ değerindeki zıt işaretli süreksizliği sayesinde, bir süreksizlik göstermemektedir ve bulunan sonuçlar referans çözümler ile uyuşmaktadır. Şekil 3.8 çizdirilirken kırınan dalgalara ilaveten sadece yayılan Floquet dalgalar çizdirilmiş, sızıntı Floquet dalgalar hesaba katılmamıştır. Dolayısıyla da diziye yaklaşılan θ =0° ve θ =180° civarı haricinde sızıntı Floquet dalgaların hesaba katılmaması sonuçları etkilememiş sadece o civarda ufak sapmalara sebep olmuştur. Ancak kırınan dalgalar hesaplanırken (3.49) eşitliği kullanılmış dolayısıyla da hem 4 tane yayılan Floquet dalganın dizinin

köşesinden uyardığı kırınan dalgalar hem de sonsuz sayıdaki sızıntı Floquet dalganın dizinin köşesinden uyardığı kırınan dalgalar hesaba katılmıştır.

Şekil 3.9'da yarı-sonsuz uzunluklu çizgisel bir dipol dizisinin z=0'da oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin ρ mesafesi ile değişimi gösterilmiştir. Ardışık dipoller arası mesafe $d_z=2\lambda$, ve ardışık dipoller arası normalize faz farkı $\eta_z=0.125$ olarak seçilmiştir. Burada referans çözüm, (2.9) eşitliği ile bulunan eleman-eleman toplama yöntemindeki seri n=[0, 100] arasındaki n değerleri için hesaplanarak elde edilmiştir. Bu örnekte gözlem noktaları hem diziye yakın noktalar seçildiğinden sızıntı Floquet dalgalar önem kazanmakta hem de kırınan dalgaların oluştuğu z=0 köşesinin üstünde bulunulduğundan kırınan dalgalar da önem kazanmaktadır. Şekilden de görüleceği üzere yayılan Floquet dalgalara ilaveten sızıntı Floquet dalgalar ve kırınan dalgalar ilave edilerek elde edilen sonuçlar referans çözüm ile dizinin çok yakın civarında bile tam uyuşmaktadır.

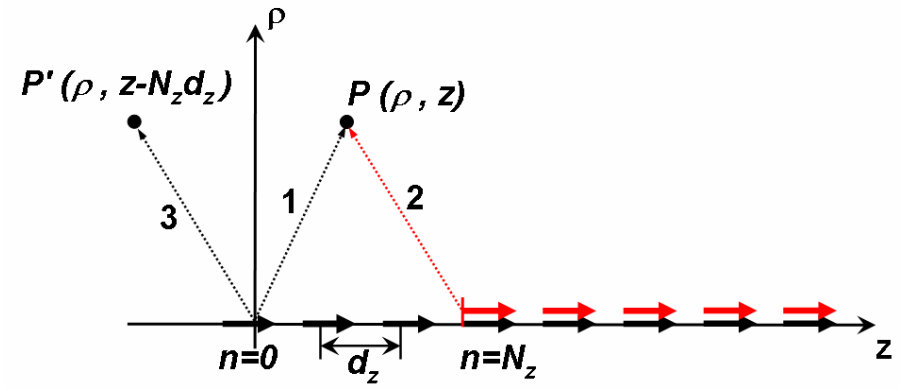


Şekil 3.8 : Yarı-sonsuz çizgisel bir dizinin orijinden $R_d=2\lambda$ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=0.25$)



Şekil 3.9 : Yarı-sonsuz çizgisel bir dizinin z=0'da oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin ρ mesafesi ile değişimi ($d_z=2\lambda$, $\eta_z=1/8$)

3.3 Sonlu Çizgisel Dipol Dizileri



Şekil 3.10 : Sonlu çizgisel dipol dizisine ait geometri ve yapay açıklık yaklaşımı

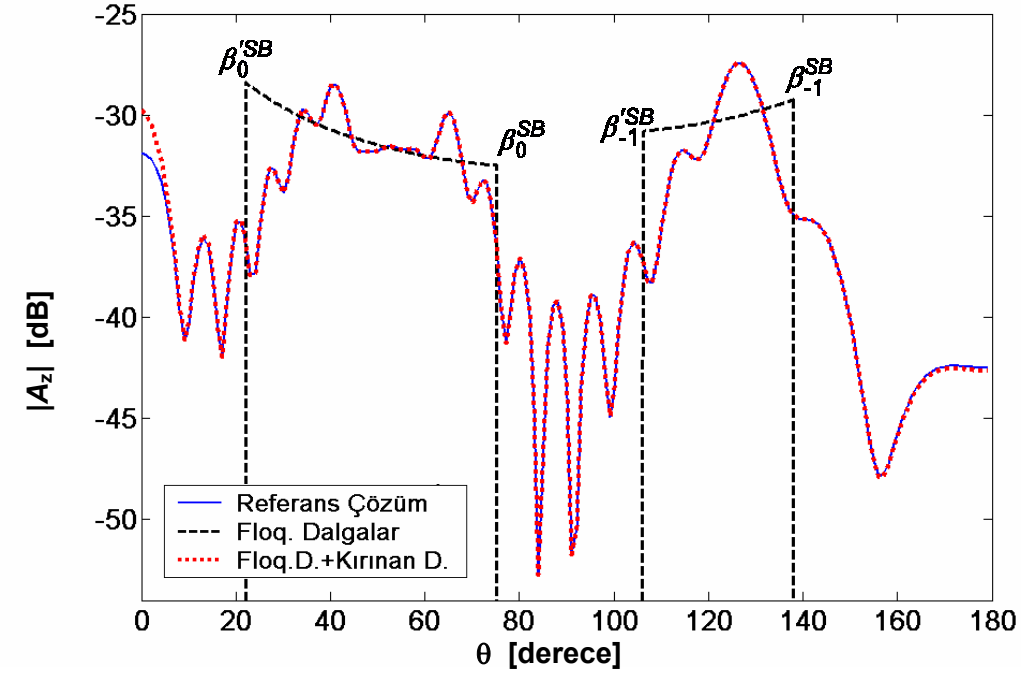
Sonlu çizgisel dipol dizisine ait geometri Şekil 3.10'da gösterilmiştir. Yarı-sonsuz çizgisel diziye (YSÇD) ait çözümler elde edildikten sonra, sonlu çizgisel diziye (SÇD) ait çözümler bir yapay açıklık yaklaşıklığı (YAY) kullanılarak elde edilecektir. Burada temel yaklaşım, N_z elemanlı sonlu dizinin, orijinal yarı sonsuz dizi ile +z yönünde $N_z d_z$ kadar kaydırılmış 2. bir yarı-sonsuz dizinin farkı olarak modellenmesidir.

Bu amaçla, kaydırılmış olan ikinci dizinin birinci dipolü ile aynı yerde bulunan, orijinal dizinin n=N_z indisli dipolünün $e^{-jk\eta_z N_z d_z}$ kadar bir faz farkıyla uyarıldığı dikkate alınarak, ikinci kaydırılmış dizi $e^{-jk\eta_z N_z d_z}$ değerinde bir faz farkıyla ağırlaştırılmalıdır.

Sonlu çizgisel diziler literatürde de [3] ele alınmıştır. Ancak kullanılan yaklaşımda kaydırılmış dizinin bir P(ρ, z) gözlem noktasında oluşturacağı alanı bulmak için dizinin sol uç noktası ile gözlem noktası arasında yeni bir θ' açısı ve R'_d uzaklığı tanımlamaları yapılması ve dolayısıyla da bütün formülasyonun üzerinden yeniden geçilmesi gerekliliği vardır. Bu tezde önerilen yapay açıklık yaklaşımında ise, problem uzayının homojen oluşu ile resiprositeden yararlanılmakta ve kaydırılmış dizinin bir P(ρ,z) noktasında oluşturacağı alan, orijinal dizinin P(ρ, z-$N_z d_z$) noktasında oluşturacağı alana eşit olacağı dikkate alınarak, dipol dizisini kaydırmak yerine gözlem noktasını ters yönde kaydırmak suretiyle dizinin etkisi modellenmekte ve sonlu dizinin alanı

$$A_z^{SÇD}(\rho,z) = A_z^{YSÇD}(\rho,z) - e^{-jk\eta_z N_z d_z} A_z^{YSÇD}(\rho,\ z - N_z d_z) \tag{3.50}$$

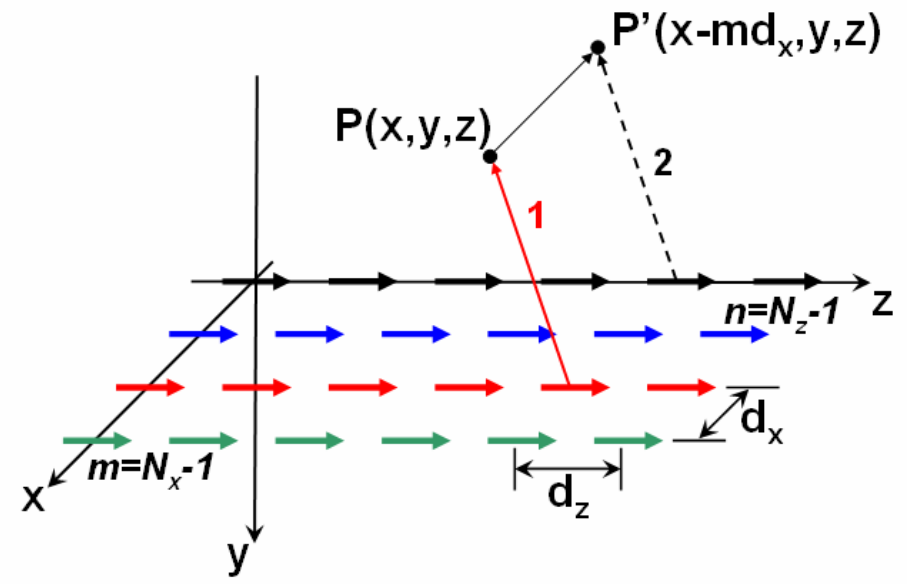
şeklinde belirlenmektedir.



Şekil 3.11 : N_z=10 elemanlı sonlu çizgisel bir dizinin orijinden $R_d=12\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile ρ-z düzleminde değişimi ($d_z=1\lambda$, $\eta_z=0.25$)

Şekil 3.11'de N_z=10 elemanlı çizgisel bir dipol dizisinin orijinden R_d=12λ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z'nin genliğinin θ açısı ile değişimi gösterilmiştir. Bu dizide ardışık dipoller arası mesafe d_z=1λ ve normalize faz farkı η_z=0.25 olarak seçilmiştir. d_z ve η_z'nin bu değerleri için (3.12) eşitliği uyarınca sadece q=0, -1 indisleri için yayılan Floquet dalgalar (YFD) uyarılacaktır. Bu 2 yayılan Floquet dalgaya ilişkin gölge bölge sınır açıları (3.33a) eşitliği uyarınca $\beta_0^{SB} = 75.5°$ ve $\beta_{-1}^{SB} = 138.6°$ olacaktır. Kaydırılmış sonsuz diziye ait Floquet dalgalar hesaplanırken gözlem noktası –z yönünde kaydırıldığından dolayı bu diziye ait gölge bölge sınır açıları da değişecektir ve basit bir hesap ile kaydırılmış dizinin gölge bölge sınır açılarının $\beta_0^{'SB} = 21.8°$ ve $\beta_{-1}^{'SB} = 105.2°$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla 2 yarı sonsuz dizinin farkını alarak sonlu dizilerin modellenmesi ekstra gölge bölge sınır açıları getirmektedir. Şekil 3.11'den görüldüğü üzere Floquet dalgaların gölge bölge sınır açılarında sahip oldukları süreksizlik, kırınan dalgaların ilave edilmesiyle ortadan kalkmaktadır.

3.4 Dikdörtgen Dipol Dizileri



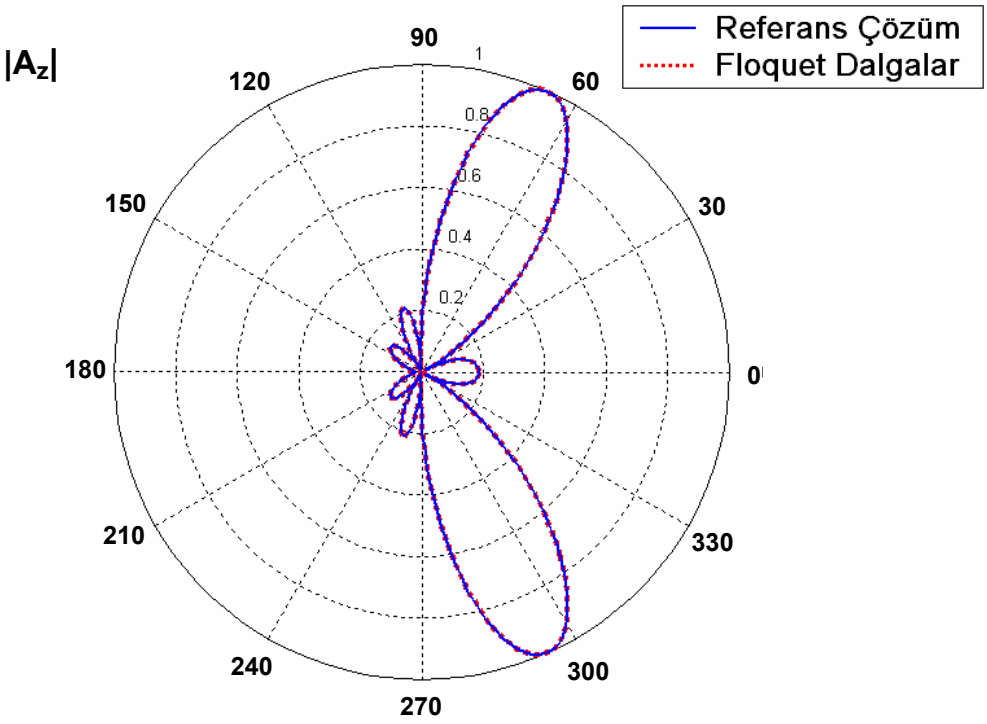
Şekil 3.12 : Sonlu çizgisel dipol dizisine ait geometri ve yapay açıklık yaklaşımı

Büyük boyutlu dipol dizileri için eleman-eleman toplama yöntemi çok uzun sürdüğünden, alternatif olarak, sonlu çizgisel dipol dizilerinin elde edilmesinde kullandığımız yapay açıklık yaklaşımı iki boyuta genişletilerek sonlu dikdörtgen

dizinin (SDD) alanı, sonlu çizgisel dizilerin (SÇD) katkılarının uygun biçimde ağırlaştırılarak süperpozisyonu ile belirlenecektir. Bu yaklaşımda, +x yönünde d_x kadar kaymış çizgisel bir dizinin $P(x, y, z)$ noktasında oluşturacağı alan, orijinal dizinin $P'(x-d_x, y, z)$ noktasında oluşturacağı alan bulunarak hesaplanır ve yine dipol dizilerini kaydırmak yerine gözlem noktaları ters yönde kaydırılarak dikdörtgen dizilere ait çözümler aşağıdaki (3.51) eşitliğindeki gibi belirlenir:

$$A_z^{\mathrm{SDD}}(x,y,z) = \sum_{m=0}^{N_x-1} e^{-jk\eta_x m d_x} A_z^{SÇD}(x - md_x, y, z) \tag{3.51}$$

Şekil 3.13'de $N_x \times N_z = 4 \times 21$'lik dikdörtgen bir dizinin yz düzleminde, orijinden $R_d = 100\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyelin genliği $|A_z(\omega)|$'nin θ açısı ile değişimi görülmektedir. Bu şekilde verilen ışıma diyagramının elde edilmesinde kullanılan MatLab kodu EK C'de verilmiştir.

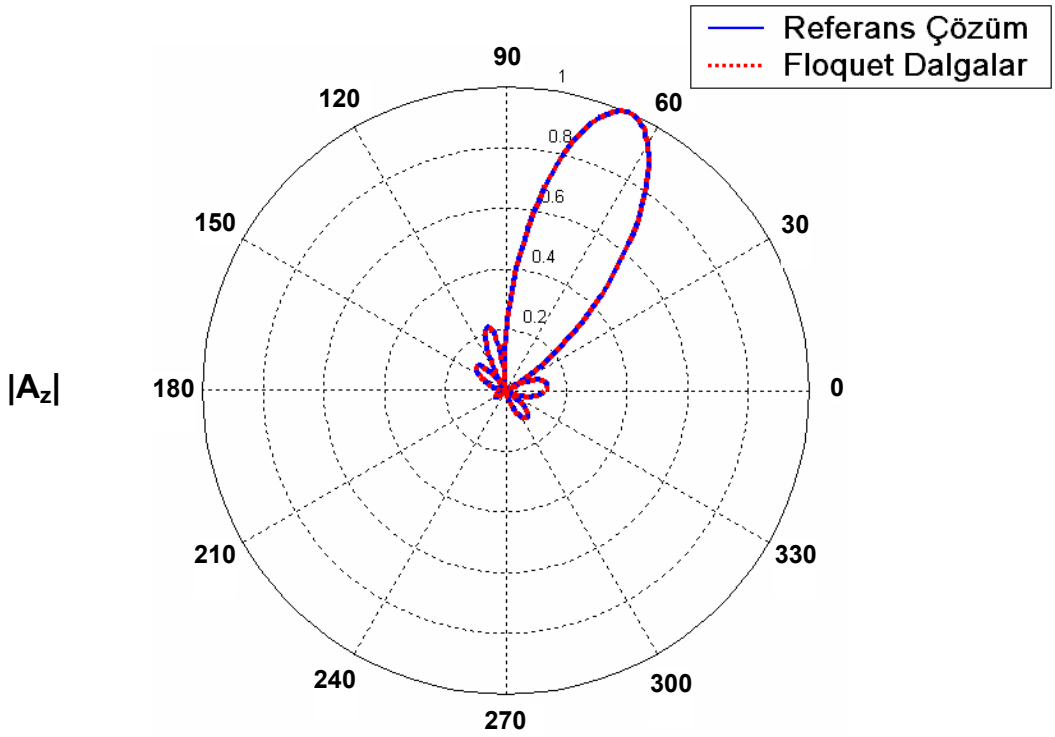


Şekil 3.13 : $N_x \times N_z = 4 \times 21$'lik dikdörtgen bir dizinin yz düzleminde orijinden $R_d = 100\lambda$ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi ($d_x = 0.1\lambda$, $d_z = 0.1\lambda$, $\eta_x = 0.2$, $\eta_z = 0.4$)

3.5 Üç boyutlu ve Rasgele Yerleştirilmiş Dipol Dizileri

Yapay açıklık yaklaşımı rasgele yerleştirilmiş iki ve üç boyutlu dizilerden ışınımın hesaplanmasına da kolayca genelleştirilebilir. Örneğin, üç boyutlu düzgün bir dizi dikdörtgen dizilerin toplamı şeklinde düşünülebilir. +y yönünde d_y kadar kaymış dikdörtgen bir dizinin P(x, y, z) noktasında oluşturacağı alan, orijinal dikdörtgen dizinin P(x, y-d_y, z) noktasında oluşturacağı alan bulunarak hesaplanabilir ve yine dipol dizilerini kaydırmak yerine gözlem noktaları kaydırılarak üç boyutlu dizilere (3DD) ait çözümler aşağıdaki (3.52) eşitliğindeki gibi elde edilebilir.

$$A_z^{3DD}(x,y,z) = \sum_{p=0}^{N_y-1} e^{-jk\eta_y p d_y} A_z^{SDD}(x, y-pd_y, z) \tag{3.52}$$



Şekil 3.14 : $N_x \times N_y \times N_z = 4 \times 2 \times 21$'lik üç boyutlu bir dizinin yz düzleminde orijinden $R_d = 100\lambda$ radyal uzaklıkta oluşturacağı manyetik vektör potansiyelin A_z bileşeninin genliğinin θ açısı ile değişimi ($d_x = 0.1\lambda$, $d_y = 0.25\lambda$, $d_z = 0.1\lambda$, $\eta_x = 0.2$, $\eta_y = 1$, $\eta_z = 0.4$)

Şekil 3.14'de $N_x \times N_y \times N_z = 4 \times 2 \times 21$'lik üç boyutlu bir dizinin orijinden $R_d = 100\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik potansiyel $A_z(\omega)$'nin genliğinin yz düzleminde θ açısı ile değişimi çizdirilmiştir. Bu 3 boyutlu dizi Şekil 3.13'deki dikdörtgen dizinin kendisi ve y-doğrultusunda d_y kadar kaydırılmışının süperpozisyonu ile elde

edilmiştir. d_y=0.25λ ve η_y=1 olarak seçildiğinden ötürü y-doğrultusundaki ardışık dipoller arasındaki faz farkı $k\eta_y d_y$=π/2 olur ve bunun sonucunda da dikdörtgen dizinin Şekil 3.13'de verilen ışıma diyagramındaki ana demetlerden biri yok olur.

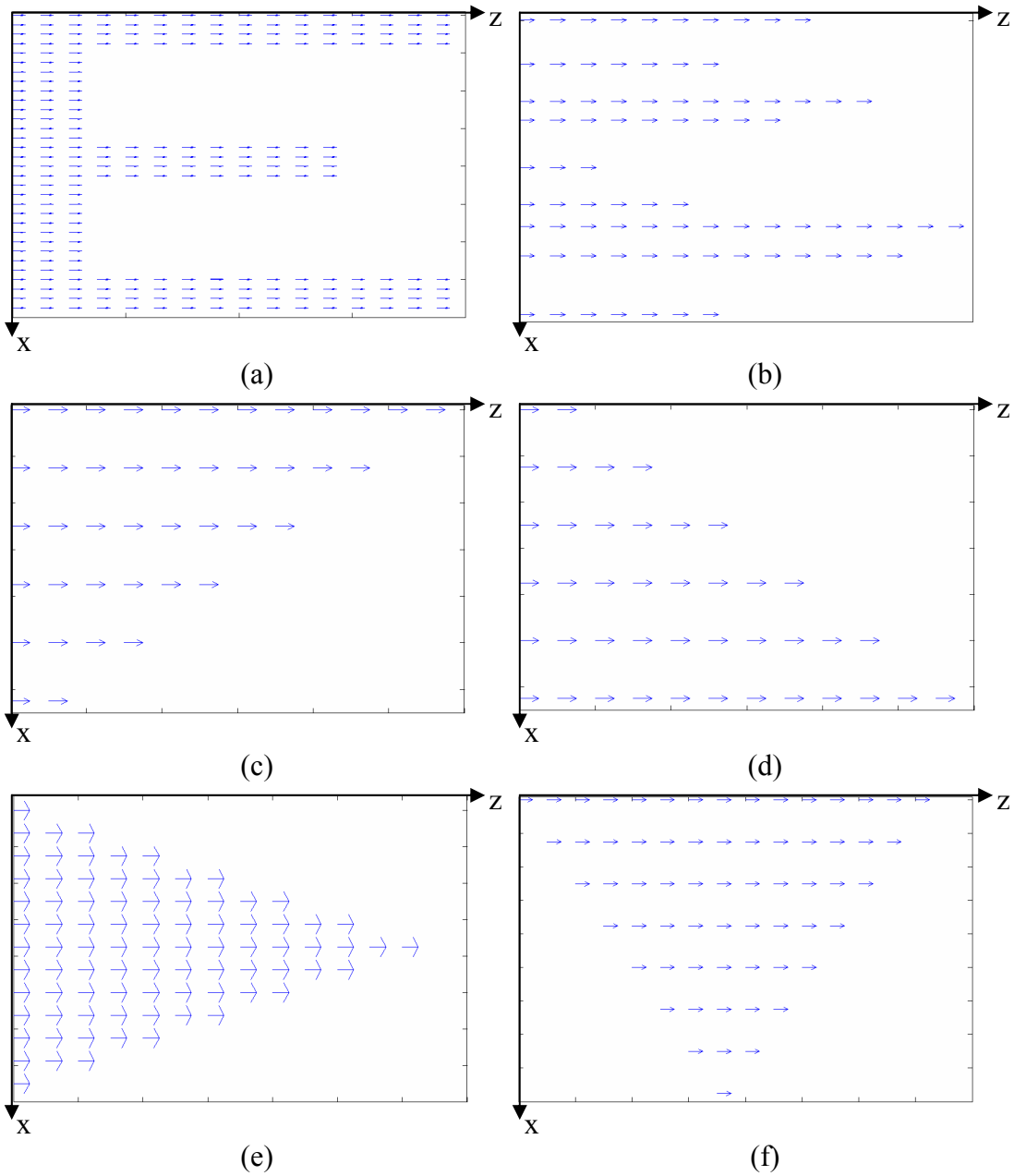
Yapay açıklık yaklaşımında sonlu çizgisel dizi, iki tane yarı sonsuz çizgisel dizinin farkı olarak modellendiğinden, dizinin z-doğrultusunda eleman sayısı N_z'nin artması işlem süresinde bir artışa sebep olmayacaktır. Ancak dikdörtgen ve 3 boyutlu dizilerde toplam alan çizgisel dizilerin süperpozisyonu ile bulunduğundan işlem süresi, dizinin x- ve y-doğrultularındaki eleman sayıları N_x ve N_y ile doğru orantılı olacaktır. Tablo 3.3'de 3 boyutlu dizilerin eleman-eleman toplama yöntemi ve Floquet dalgalar kullanılarak ışıma diyagramını elde etmek için gerekli işlem süreleri karşılaştırılmıştır. N_z'nin artması Floquet dalgalarla hesap yaparken işlem süresini etkilememekte, ancak eleman-eleman toplama yönteminde işlem süresi N_z ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Dolayısıyla yapay açıklık yaklaşımı bir doğrultuda çok fazla, diğer doğrultularda az eleman içeren dizilerin çözümünde çok etkin olacaktır.

Tablo 3.3 : 3 boyutlu bir dizinin 0°<θ<360° arasında (1°'lik artımlarla) ışıma diyagramını, eleman-eleman toplama yöntemi ve Floquet dalgalar kullanılarak elde etmek için gerekli işlem sürelerinin karşılaştırılması (d_x=d_y=0.25λ, d_z=1λ, η_x=0, η_y=0.4, η_z =0.25)

$N_x \times N_y \times N_z$	$4\times10\times10$	$4\times10\times100$	$4\times10\times1000$
Referans Çözüm	3.4 s	33.1s	329.9 s
Floquet Dalgalar	21.9 s	22 s	22.1 s

Yapay açıklık yaklaşıklığı kullanılarak, çizgisel dizilerin toplamı şeklinde ifade edilebilen her türlü dizinin çözümü Floquet dalgalar kullanılarak hızlı bir şekilde elde edilebilir. Şekil 3.15'de yapay açıklık yaklaşımı yardımı ile modellenmesinde herhangi bir ilave güçlük olmayan, dipol dağılımları oldukça düzensiz yapıdaki dizilere birkaç örnek gösterilmiştir. z-doğrultusundaki çizgisel diziye ait çözümler Floquet dalgalar kullanılarak bulunduğundan, dizi z-doğrultusunda periyodik olmalı, yani ardışık dipoller arası mesafe d_z ve normalize faz farkı η_z sabit kalmalıdır. Ancak yapay açıklık yaklaşımında bu periyodiklik koşulunun x-doğrultusunda sağlanması şart değildir (Bakınız Şekil 3.15b). Her bir çizgisel dizinin oluşturacağı alan ayrı ayrı hesaplandığından, bir öncekine göre d_{x1} uzaklıkta bulunan bir çizgisel dizi η_{x1}

normalize faz farkıyla uyarılırken, bir sonraki çizgisel dizi bu d_{x1}'den farklı bir d_{x2} mesafesi kadar uzakta bulunabilir ve bir önceki çizgisel diziye göre η_{x1}'den farklı bir η_{x2} normalize faz farkıyla uyarılabilir.



Şekil 3.15 : Yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak modellenebilecek bazı düzlemsel dipol dizileri

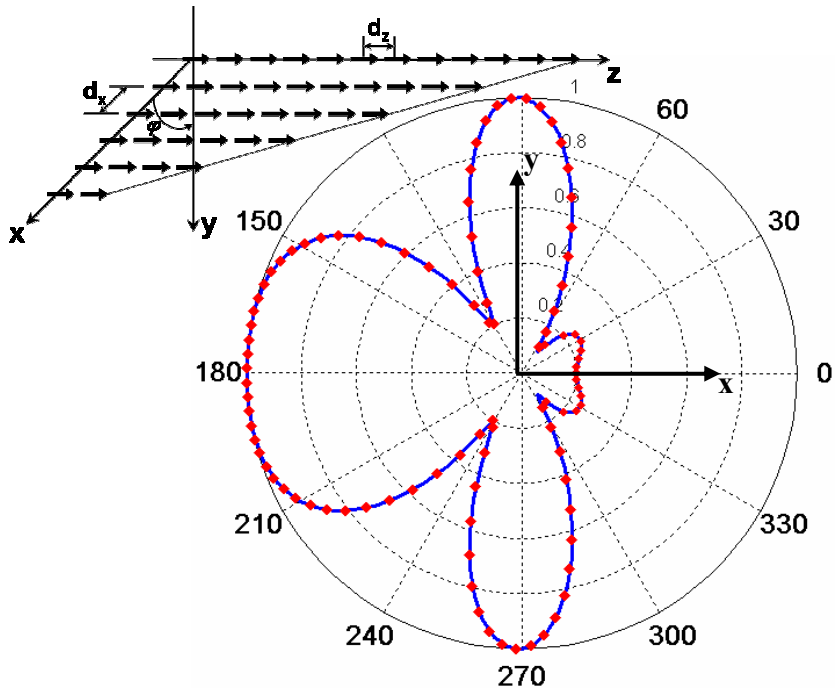
Şekil 3.15c'de xz düzleminde yerleştirilmiş trapezoidal bir dizi gösterilmiştir. Bu dizi 6 tane çizgisel diziden oluşmaktadır. Bunlardan birincisi z-ekseni üzerinde 12 tane dipolden oluşan çizgisel bir dizidir ve bu dizi yarı-sonsuz çizgisel bir dizi ile +z yönünde $12d_z$ kadar kaydırılmış 2. bir yarı sonsuz dizinin farkı alınarak hesaplanabilir. 2. çizgisel dizi z-ekseninde 10 tane dipolden oluşan çizgisel bir

dizinin +x yönünde d_x kadar kaymış halidir ve yarı-sonsuz çizgisel bir dizi ile +z yönünde $10d_z$ kadar kaydırılmış 2. bir yarı sonsuz dizinin farkı alınarak hesaplanabilir. Diğer 4 çizgisel dizi için de benzer şekilde yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak trapezoidal diziye ait çözümler kapalı formda aşağıdaki (3.53) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir. Şekil 3.16a'da bu trapezoidal dizinin xy düzleminde orijinden $R_d=100\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z 'nin genliğinin φ açısı ile değişimi gösterilmiştir.

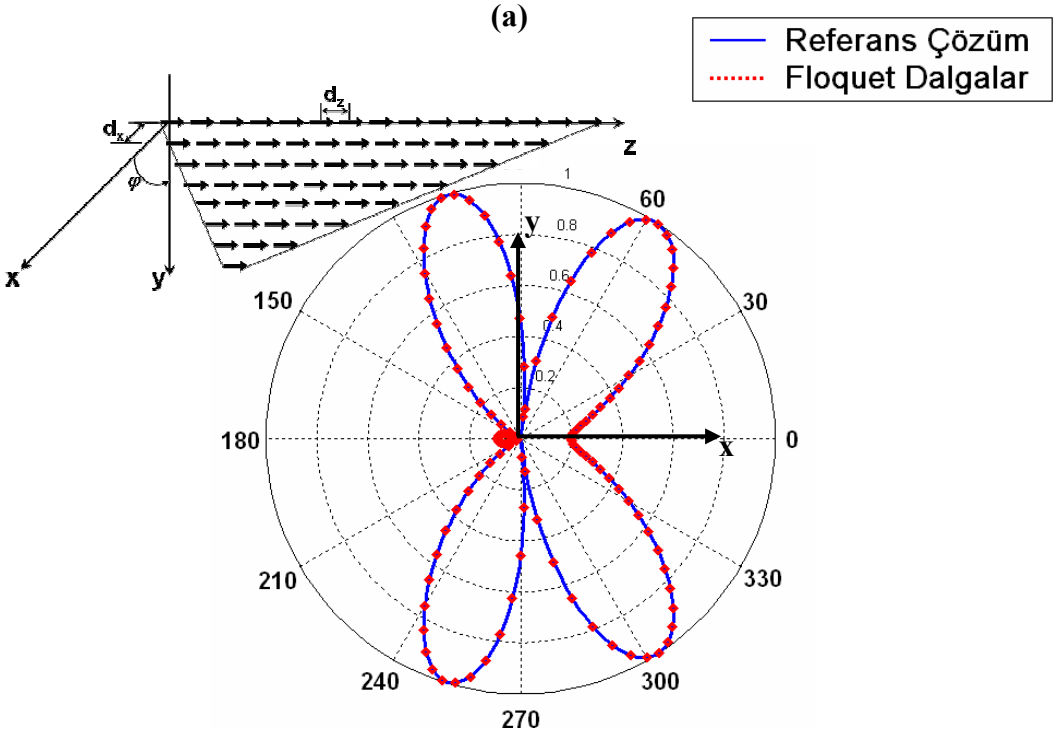
$$A_z^{\text{Trapz.}}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{5} e^{-jk\eta_x m d_x}\times \left[A_z^{YSÇD}(x-md_x,y,z)-e^{-jk\eta_z(12-2m)d_z}A_z^{YSÇD}(x-md_x,y,\ z-(12-2m)d_z)\right] \tag{3.53}$$

Şekil 3.15f'de xz düzleminde yerleştirilmiş üçgen bir dizi gösterilmiştir. Bu dizi 8 tane çizgisel diziden oluşmaktadır. Bunlardan birincisi z-ekseni üzerinde 15 tane dipolden oluşan çizgisel bir dizidir. 13 tane dipolden oluşan 2. çizgisel dizi ise +z yönünde d_z kadar kaydırılmış yarı-sonsuz çizgisel bir dizi ile +z yönünde $14d_z$ kadar kaydırılmış ikinci bir yarı sonsuz dizinin farkı alınarak hesaplanabilir. 11 tane dipolden oluşan 3. çizgisel dizi ise +z yönünde $2d_z$ kadar kaydırılmış yarı-sonsuz çizgisel bir dizi ile +z yönünde $13d_z$ kadar kaydırılmış ikinci bir yarı sonsuz dizinin farkı alınarak hesaplanabilir. Diğer 5 çizgisel dizi için de benzer şekilde yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak üçgen diziye ait çözümler kapalı formda aşağıdaki (3.54) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir. Şekil 3.16b'de bu üçgen dizinin xy düzleminde orijinden $R_d=100\lambda$ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z 'nin genliğinin φ açısı ile değişimi gösterilmiştir.

$$A_z^{\text{Uçgen}}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{7} e^{-jk\eta_x m d_x}\times\left[e^{-jk\eta_z m d_z}A_z^{YSÇD}(x-md_x,y,z-md_z)-e^{-jk\eta_z(15-m)d_z}A_z^{YSÇD}(x-md_x,y,\ z-(15-m)d_z)\right] \tag{3.54}$$



(a)



(b)

Şekil 3.16 : a) Şekil 3.15c'deki trapezoidal dizinin xy düzleminde orijinden R_d=100λ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z'nin genliğinin φ açısı ile değişimi (N_z=12-2m, m=0,1,2,3,4,5, N_x=6, d_x=d_z=0.25λ, η_x=0, η_z=0.5) **b)** Şekil 3.15f'deki üçgen dizinin xy düzleminde orijinden R_d=100λ uzaklıkta oluşturacağı manyetik skaler potansiyel A_z'nin genliğinin φ açısı ile değişimi (d_x=d_z=0.25λ, η_x=0.125, η_z =0.5)

4. ZAMAN DOMENİNDE FLOQUET DALGALAR

4.1 Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri

4.1.1 Frekans Domeninden Direk Dönüşüm

2.2.1 alt başlığı altında zaman domeni Green fonksiyonu ile zaman domeni dipol akımlarının konvolüsyonu alınarak zaman domeninde tanımlı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$ eleman-eleman toplama yöntemi ile (2.21) eşitliğindeki gibi bulunmuştu. Bu çözüm bizim referans çözümümüz olarak kullanılacaktır.

3.1 alt başlığında, frekans domeninde dipol akımları, Poisson toplamı kullanılarak, n-indisi yerine q-indisli bir toplama dönüştürülmüş ve bu yeni toplam kullanılarak manyetik skaler potansiyel $A_z(\omega)$, q üzerinden toplanan frekans domeni Floquet dalgalar cinsinden ifade edilmişti. Benzer şekilde zaman domeni dipol akımlarının Poisson toplamı uygulanarak bulunmuş olan ifadesi kullanılarak, zaman domeni skaler potansiyeli $\hat{A}_z(t)$, q üzerinden toplanan zaman domeni Floquet dalgalar cinsinden ifade edilebilir.

(2.19) eşitliği ile verilmiş olan zaman domeni dipol akımları (3.1) eşitliği ile tanımlanan Poisson toplamı kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{J}(t) = \frac{1}{d_z} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{\eta_z z'}{c}\right) e^{-j\alpha_q z'} \tag{4.1}$$

Zaman domeninde $\hat{A}_z$ manyetik skaler potansiyelinin Floquet dalga gösterilimi (2.20) ile verilen zaman domeni Green fonksiyonu ile dipol akımlarının konvolüsyonu alınarak elde edilecektir.

$$\hat{A}_z(t) = \hat{A}(z',t) \otimes \hat{J}(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{A}_q^{FW}(t) \tag{4.2}$$

Burada q. zaman domeni Floquet dalgaya karşı düşen $\hat{A}_q^{FW}$ ifadesi aşağıdaki (4.3) eşitliğindeki gibi olur.

$$\hat{A}_q^{FW}(t) = \frac{1}{4\pi d_z} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{-j\alpha_q z'}}{R(z')} \delta\left(t - \frac{\eta_z z'}{c} - \frac{R(z')}{c}\right) dz' \tag{4.3}$$

q. zaman domeni Floquet dalgası $\hat{A}_q^{FW}(t)$ için elde edilen bu ifade, (3.6) nolu eşitlik ile bulunan frekans domeni q. Floquet dalgası $A_q^{FW}(\omega)$'nin direk ters Fourier dönüşümü ile de bulunabilir.

(4.3) nolu eşitlik, verilen t anında q. Floquet dalgasına yalnızca

$$t - \frac{\eta_z z'}{c} - \frac{R(z')}{c} = 0 \tag{4.4}$$

bağıntısını sağlayan z' için katkı geldiğini ifade etmektedir. (4.4) eşitliği zaman domeni dispersiyon denklemi olarak adlandırılır. Aşağıdaki (4.5) eşitliği ile ifade edilebilen bir τ, hareketli koordinat sistemi tanımlanırsa,

$$\tau = t - \frac{\eta_z z}{c} \tag{4.5}$$

zaman domeni dispersiyon denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau + \frac{\eta_z (z - z')}{c} = \frac{R(z')}{c} \tag{4.6}$$

O halde bu z′ değerlerini bulmak için yukarıdaki (4.6) eşitliğinde geçen $R(z')$ ifadesinin yerine $R(z') = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ yazılır, her iki tarafın karesi alınır ve eşitlik biraz düzenlenecek olunursa,

$$(\eta_z^2 - 1)(z' - z)^2 - 2\tau\,\eta_z c\,(z' - z) + \tau^2 c^2 - \rho^2 = 0 \tag{4.7}$$

bulunur ve bu 2. dereceden eşitliğin kökleri

$$z'_{1,2} = z - \frac{c}{(1-\eta_z^2)}\left(\tau\,\eta_z \pm \sqrt{\tau^2 - \frac{\rho^2}{c^2}(1-\eta_z^2)}\right) \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. Daha önce (4.5) eşitliği ile belirlenen τ parametresinden hareketle dalganın gözlem noktasının bulunduğu mesafeye (ρ) ulaştığı ana karşı düşen bir τ_0 parametresi tanımlanırsa,

$$\tau_0 = t_0 - \frac{\eta_z z}{c} \tag{4.9a}$$

$$\tau_0 = \sqrt{1-\eta_z^2}\,\frac{\rho}{c} \tag{4.9b}$$

(4.8) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$z'_i = z - \frac{c}{(1-\eta_z^2)}\left(\tau\,\eta_z + (-1)^i\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}\right), \qquad i = 1, 2 \tag{4.10}$$

i =1, 2 değerlerinin hangisinin, hangi koşullarda (4.6) eşitliğinin çözümü olduğunu belirlemek için (4.10) eşitliği ile bulunan z'_i değerleri (4.6) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$R(z'_i) = \frac{c}{(1-\eta_z^2)}\left(\tau + (-1)^i\,\eta_z\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}\right) \qquad \mathrm{Re}\{R(z')\} \geq 0 \qquad i = 1, 2 \tag{4.11}$$

elde edilir. Daha önce (4.9b) ile bulduğumuz τ_0 ifadesi hatırlanacak olunursa, (4.12) eşitliklerinde özetlendiği gibi $|\eta_z| < 1$ ya da $|\eta_z| > 1$ olmasına göre τ_0 reel ya da saf imajiner çıkar. $|\eta_z| < 1$ ışınımın olduğu, $|\eta_z| > 1$ ise ışınımın olmadığı duruma denk düşer.

$$|\eta_z| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tau_0 \text{ reel} \tag{4.12a}$$

$$|\eta_z| > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tau_0 \text{ saf imajiner } \tau_0 = -j|\tau_0| \tag{4.12b}$$

$|\eta_z|<1$ durumu için τ_0 reel çıkar ve τ<0 veya τ>0 olmasına göre 2 durumu ayrı ayrı incelememiz gerekir.

$$\tau<0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{c}{(1-\eta_z^2)}\left(\tau+(-1)^i\eta_z\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}\right)\right\}<0 \qquad \text{Çözüm yok} \qquad (4.13a)$$

$$\tau>0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{c}{(1-\eta_z^2)}\left(\tau+(-1)^i\eta_z\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}\right)\right\}>0 \qquad \begin{matrix}\text{2 çözüm}\\ z_1'(t) \text{ ve } z_2'(t)\end{matrix} \qquad (4.13b)$$

(4.13a) eşitliğinde gösterildiği şekilde $\tau<0$ için (4.11) eşitliğinin sağ tarafının reel kısmı <0 çıkmaktadır ve bu da $\mathrm{Re}\{R(z')\}\geq 0$ koşulu ile çeliştiğinden $\tau<0$ için (4.6) eşitliği ile verilen zaman domeni dispersiyon denkleminin çözümü yoktur.

(4.13b) eşitliğinde gösterildiği şekilde $\tau>0$ için (4.11) eşitliğinin sağ tarafının reel kısmı >0 çıkmaktadır ve bu da $\mathrm{Re}\{R(z')\}\geq 0$ koşulu ile uyuştuğundan $\tau>0$ için (4.6) eşitliği ile verilen zaman domeni dispersiyon denkleminin i=1,2 için 2 ayrı çözümü vardır: $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$.

Daha önce de işaret edildiği gibi $|\eta_z|>1$ durumu ışınım yapmayan çözümlere karşı düşer. Bu çalışmada, tüm zamanlarda, tüm uzayda var olan [7] bu patolojik çözümler ile ilgilenilmeyecektir.

η_z ve τ' nun değerlerine göre kaç çözüm oluşacağı, aşağıdaki Tablo'da özetlenmiştir.

Tablo 4.1 : η_z ve τ' nun değerlerine göre (4.6) eşitliği ile verilen zaman domeni dispersiyon denkleminin $z_i'(t)$ çözümleri

$\lvert\eta_z\rvert<1$ Işınım var	
$\tau<0$	$\tau>0$
Çözüm yok	$z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$

Şimdi ışınım olduğu yani $|\eta_z|<1$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumda (4.6) eşitliğinin $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ şeklinde iki tane çözümü olacaktır. q. Floquet Dalgaya karşı düşen $\hat{A}_q^{FW}(t)$ ifadesi daha önce (4.3) nolu eşitlik ile bulunmuştu. (4.3) eşitliğinde geçen dirac fonksiyonunun argümanı $f(z')$ ile gösterilirse problem bu integralin $f(z')=0$ koşulunu sağlayan z_i' i=1,2 noktalarında örneklenerek değerlendirilmesine indirgenir. Bu amaçla,

$$f(z_i')=0 \quad \text{ise} \quad \delta\left[f(z')\right]=\delta(z'-z_i')\left|\frac{df}{dz'}\right|_{z_i'}^{-1} \tag{4.14}$$

bağıntısında

$$\frac{df}{dz'}=-\frac{\eta_z}{c}+\frac{(z-z')}{c\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}=\frac{-\eta_z\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}+z-z'}{c\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} \tag{4.15}$$

kullanılarak

$$\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)=\frac{e^{-j\alpha_q z_i'}}{4\pi d_z}\frac{c}{\left[-\eta_z R(z_i')+(z-z_i')\right]} \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğiyle bulunan $R(z_i')=\tau c+\eta_z(z-z_i')$ değeri (4.16) nolu eşitlikte yerine yerleştirilirse,

$$\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)=\frac{e^{-j\alpha_q z_i'}}{4\pi d_z}\frac{c}{\left[-c\eta_z\tau+(z-z_i')(1-\eta_z^2)\right]} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) eşitliğinde geçen $(z-z_i')$ ifadesi yerine daha önce (4.10) eşitliği ile bulunan değeri yazılırsa ve gerekli sadeleştirilirse yapılırsa,

$$\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)=\frac{e^{-j\alpha_q z_i'}}{4\pi d_z}\frac{U(\tau-\tau_0)}{\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}} \tag{4.18}$$

elde edilir. Daha önce Tablo 4.1'de özetlendiği üzere sadece $|\eta_z|<1$ iken $\tau>0$ koşulu sağlanıyorsa zaman domeni dispersiyon denkleminin 2 ayrı çözümü vardı. Ancak $\tau>0$ iken $\tau<\tau_0$ ise (4.10) eşitliği uyarınca $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ çözümleri kompleks çıkarlar ve birbirlerinin eşlenikleridir. Bu kompleks eşlenik çözümler $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$, (4.3) eşitliğindeki integrale ait reel eksen üzerindeki integrasyon eğrisinin üzerinde yer almadıklarından integralin sonucu 0 çıkar. Dolayısıyla yayılan Floquet dalgalar sadece $\tau \geq \tau_0$ için var olacaklardır. Bu nedenle (4.18) eşitliği ile verilen q. zaman domeni Floquet dalga ifadesine $U(\tau-\tau_0)$ birim basamak fonksiyonu ilave edilmiştir. $\tau=\tau_0$ olduğunda ise (4.10) eşitliği uyarınca dispersiyon denkleminin reel çözümleri

birbirleriyle çakışık olurlar $z_1'(t_0)=z_2'(t_0)=z_0'$. Ayrıca (4.5) ve (4.9a) eşitlikleri uyarınca $\tau=\tau_0$ olduğu zaman $t=t_0$ olmaktadır. Şekil 4.1a'dan görüleceği üzere z_0' noktasından β_0 açısıyla hareket eden Floquet dalgalar $\tau=\tau_0$ anında gözlem noktasına ulaşmaktadırlar. $\tau>\tau_0$ ya da özdeş olarak $t>t_0$ olduğunda ise $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ çözümleri birbirinden ayrılmakta ve Şekil 4.1b'den görüleceği üzere $z_1'(t)$ zamanla $+\infty$ yününde $z_2'(t)$ ise $-\infty$ yününde ilerlemektedir. $z_1'(t)$ noktasından $\beta_1(t)$ açısıyla hareket eden Floquet dalgalar ile $z_2'(t)$ noktasından $\beta_2(t)$ açısıyla hareket eden Floquet dalgalar gözlem noktasına aynı anda ulaşmaktadır. Dolayısıyla da q. Floquet dalga bu i=1 ve i=2 indisli çözümlerin süperpozisyonu olarak aşağıdaki (4.19) eşitliğindeki gibi bulunabilir.

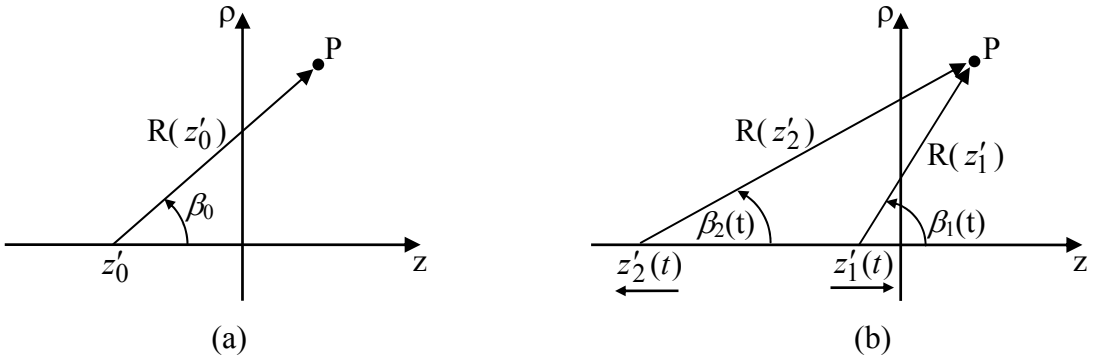
$$\hat{A}_z(t)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\hat{A}_q^{FW}(t)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{e^{-j\alpha_q z_i'}}{4\pi d_z}\frac{U(\tau-\tau_0)}{\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}} \tag{4.19}$$

Yukarıdaki (4.19) eşitliğindeki $q\neq 0$ indisli Floquet dalgalar reel değildirler ve bu sebeple fiziksel olarak gözlenebilir alanlara denk düşmezler. Ancak α_q'nun (3.4a) eşitliği ile verilen değerinin $\alpha_q=2\pi q/d_z$ olduğu ve (4.10) eşitliği ile bulunan z_i' ifadesinin de q'dan bağımsız olduğu hatırlanacak olunursa pozitif q'lar için bulunan $\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)$ ifadesi ile negatif q'lar için bulunan $\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)$ ifadesi birbirlerinin eşlenikleri olacaktır ve dolayısıyla toplamları $\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)$ ifadesinin reel kısmının 2 katına eşit olacaktır.

$$\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)+\hat{A}_{-q,i}^{FW}(t)=2\,\mathrm{Re}\left\{\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)\right\} \tag{4.20}$$

Yukarıdaki (4.20) eşitliğinden görüldüğü üzere $+q$ ve $-q$ eşleşmesi fiziksel olarak gözlenebilir reel bir alana denk düşmektedir. Bu durumda (4.19) eşitliğindeki toplam sadece pozitif q'lar için hesaplanarak manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$ için aşağıdaki reel ifade elde edilir.

$$\hat{A}_z(t) = \underbrace{\frac{U(\tau-\tau_0)}{2\pi d_z\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}}}_{\hat{A}_0^{FW}(t)} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_q z_i')}{2\pi d_z\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}}U(\tau-\tau_0) \tag{4.21}$$



Şekil 4.1 : a) $\tau=\tau_0$ başlangıç anında z_0' noktasından β_0 açısıyla hareket eden Floquet dalga **b)** $\tau>\tau_0$ anlarında ayrık iki $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ noktalarından β_1(t) veβ_2(t) açılarıyla hareket eden Floquet dalgalar

Şekil 4.1'de gösterilen $\beta_i(t)$ açıları yarı-sonsuz ve sonlu dipol dizilerinin zaman domeni cevaplarının bulunmasında önemli bir rol oynayacaktır. Bu nedenle aşağıda bu açıların ne şekilde hesaplanabileceği aşağıda gösterilecektir. Şekilden görüleceği gibi

$$\cos(\beta_i(t)) = \frac{\left(z - z_i'(t)\right)}{R\left(z_i'(t)\right)} \tag{4.22}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\tau = \tau_0$ yani $t = t_0$ anında $\cos(\beta_0)$ aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\cos(\beta_0) = \frac{(z - z_0')}{R(z_0')} \tag{4.23}$$

Bu ifade, (4.6) ve (4.10) bağıntılarından yararlanılarak

$$\cos(\beta_0) = \eta_z \tag{4.24}$$

şekline indirgenebilir. Yukarıdaki (4.24) eşitliğinden görüleceği üzere β_0 açısı τ'dan ve q'dan bağımsızdır, sadece ardışık dipoller arası normalize faz farkı η_z'ye bağlıdır. β_0 yardımıyla (4.22) eşitliği ile tanımlanan β_i(t) açıları $\cos(\beta_0)$ ve $\sin(\beta_0)$ cinsinden

$$\cos(\beta_i(t)) = \frac{(-1)^i \sin^2(\beta_0)\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} + \cos(\beta_0)\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}{\sin^2(\beta_0) + \cos^2(\beta_0)\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} \tag{4.25}$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.1.2 Yüksek Frekans Yaklaşıklığı

Zaman domeni Floquet dalgaları için bulunmuş olan (4.21) kesin çözümü kuşkusuz, frekans domeni Floquet dalgaları için verilen (3.11) ifadesinin ters Fourier dönüşü ile de bulunabilir Ancak ilginç olan şudur ki (3.11)'deki Hankel fonksiyonunun yüksek frekans yaklaşıklığı kullanılır ve ters Fourier integrali yalnızca semer noktası katkılarını içeren bir asimptotik yaklaşımla değerlendirilirse

$$\hat{A}_z(t) = \frac{U(\tau-\tau_0)}{2\pi d_z\sqrt{2\tau_0(\tau-\tau_0)}} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{q=-\infty \\ q\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-j\alpha_q z_i'}}{4\pi d_z\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}}\, U(\tau-\tau_0) \tag{4.26}$$

bulunur. Elde edilen bu sonuç q≠0 için (4.19) ile verilen kesin çözümün birebir aynısıdır. Ters Fourier integralinin doğrudan hesaplanabileceği bir yapıda olmasına karşın q=0 terimi ise (Hankel fonksiyonunun asimptotik ifadesinin kullanılması sebebiyle), ancak $\tau=\tau_0$'da kesin çözümle çakışan iyi bir yaklaşıklık oluşturur.

Bu durum zaman domeni Floquet dalgalarının elde edilmesinde, yüksek frekans yaklaşıklıklarının kullanılmasının geçerli olduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Yarı-sonsuz ve sonlu dizilerin zaman domeni çözümlerinin elde edilmesinde kullanılacağı için yüksek frekans yaklaşıklığının ayrıntıları Ek B1'de verilmiştir.

4.2 Yarı-Sonsuz Çizgisel Dipol Dizileri

4.2.1 Dürtü Cevabı

Şekil 2.2'de gösterilen yarı-sonsuz dizi için zaman domeninde, eleman-eleman toplama yöntemi ile referans çözüm, (2.21) eşitliği ile verilen sonsuz dizi için bulunan çözümdeki toplamın n=0,∞ üzerinden alınması ile bulunur.

(4.27) eşitliğiyle tanımlanan sonlu Poisson toplamı kullanılarak, yarı-sonsuz çizgisel dipol dizisi için zaman domeni Floquet dalgalar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{A}_z(t) = \frac{\hat{A}_0(t)}{2} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{A}_q^T(t) \tag{4.27}$$

$\hat{A}_0(t)$ ifadesi n=0 indisli dipolden gelen bireysel katkıyı göstermektedir. (2.21) eşitliğinde n=0 yazılacak olunursa ve (2.5) eşitliği uyarınca $R_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2} = R_d$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\hat{A}_0(t) = \frac{\delta\left(t - \frac{R_d}{c}\right)}{4\pi R_d} \tag{4.28}$$

bulunur. (4.27) eşitliğinde geçen $\hat{A}_q^T(t)$ ifadesi (3.34) eşitliği ile bulunmuş olan frekans domeni ifadesi $A_q^T(\omega)$ 'nun ters Fourier dönüşümü alınarak bulunabilir.

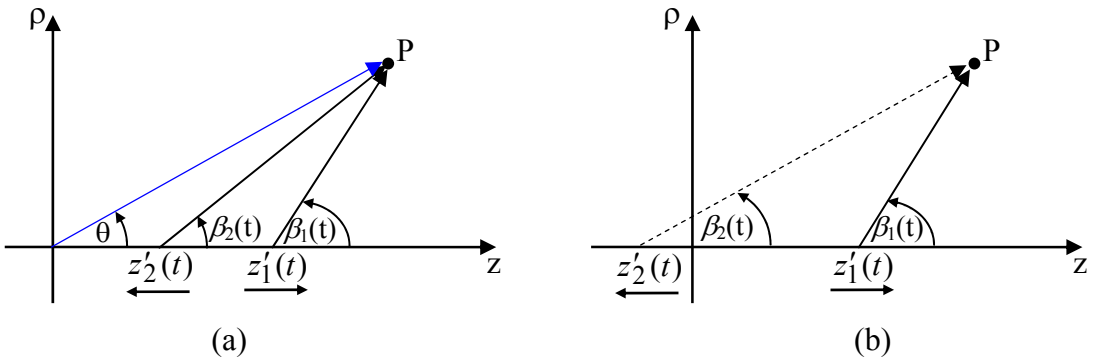
$$\hat{A}_q^T(t) = F^{-1}\left\{A_q^{FW}(\omega)\, U\left(\beta_q^{SB} - \theta\right) + A_q^d(\omega)\right\} \tag{4.29}$$

Burada $A_q^{FW}(\omega)$ daha önce (3.36) eşitliği ile ve $A_q^d(\omega)$ (3.37) eşitliği ile tanımlıdır. 4.1.1 alt başlığında detaylı bir şekilde incelendiği ve Tablo 4.1'de özetlendiği üzere sonsuz çizgisel dipol dizilerinde, $|\eta_z| < 1$ ise $z = z_0'$ noktasından çıkan Floquet dalgalar $\tau = \tau_0$ anında gözlem noktasına varmaktaydı. $\tau > \tau_0$ olduğunda ise $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ çözümleri birbirinden ayrılmakta ve Şekil 4.2a'dan görüleceği üzere $z_1'(t)$

zamanla $+\infty$ yününde $z_2'(t)$ ise $-\infty$ yününde ilerlemekteydi. Ancak yarı-sonsuz çizgisel dipol dizilerinde, dizi z=0'da kesilmiş olduğundan sadece $z_i'(t) > 0$ koşulu sağlandığı sürece $z_i'(t)$ noktasından çıkan Floquet dalgalar $\beta_i(t)$ açısıyla ilerleyerek gözlem noktasına ulaşabileceklerdir. O halde yarı-sonsuz diziye ait Floquet dalgalar, sonsuz diziye ait Floquet dalgaların ifadesinin $U\left(z_i'(t)\right)$ birim basamak fonksiyonu ile kesilmesi ile ifade edilebilirler. Aşağıda Şekil 4.2'den görüleceği üzere $\beta_i(t) = \theta$ olduğu anda $z_i'(t) = 0$ olmaktadır ve $z_i'(t) > 0$ koşulu ile $\beta_i(t) > \theta$ koşulları özdeştir. Dolayısıyla da sonsuz diziye ait Floquet dalgalar $U\left(\beta_i(t) - \theta\right)$ birim basamak fonksiyonu ile kesilerek, yarı-sonsuz diziye ait $\hat{A}_q^T(t)$ ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\hat{A}_q^T(t) = \hat{A}_q^d(t) + \sum_{i=1}^{2} \hat{A}_{q,i}^{FW}(t)\, U\left(\beta_i(t) - \theta\right) \tag{4.30}$$

Burada $A_q^{FW}(\omega)$'nin ters Fourier dönüşümü olan $\hat{A}_q^{FW}(t)$ sonsuz uzunluklu çizgisel dizinin zaman domeni çözümlerinde (4.19) eşitliği ile ve zamanla değişen $\beta_i(t)$ gölge bölge sınır açıları (4.25) eşitliği ile verilmiştir. (4.29) ifadesinin değerlendirilmesindeki son adım (3.37) eşitliği ile verilen $A_q^d(\omega)$ frekans domenindeki kırınan dalgalara ait ifadenin ters Fourier dönüşümü olan $\hat{A}_q^d(t)$ ifadesinin bulunmasıdır. (3.37) eşitliği ile verilen $A_q^d(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümü (4.31) eşitliğindeki gibi olacaktır.



Şekil 4.2 : a) $\tau > \tau_0$ anlarında ayrık iki $z_1'(t)$ ve $z_2'(t)$ noktalarından $\beta_1(t)$ ve $\beta_2(t)$ açılarıyla hareket eden Floquet dalgalar **b)** $z_2'(t) < 0$ ise sadece $z_1'(t)$ noktasından $\beta_1(t)$ açılarıyla hareket eden Floquet dalgaların katkısı

$$\hat{A}_q^d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR_d}}{j4\pi d_z kR_d} \frac{F\left(\delta_q^2\right)}{\left[\cos(\beta_q)-\cos(\theta)\right]} e^{j\omega t} d\omega \tag{4.31}$$

$A_q^d(\omega)$ kırınan dalgalara ait ifadenin $\theta \approx \beta_q$ civarında baskın olduğu göz önüne alınarak $\hat{A}_q^d(t)$ bulunurken sadece bu bölgedeki değerleri alınacak şekilde bir yaklaşıklık yapabiliriz. $\theta \approx \beta_q$ için (3.38b) eşitliği uyarınca $\delta_q^2 \approx 0$ olacaktır ve (A.18) eşitliği uyarınca da $kR_d \approx k_{\rho q}\rho + k_{zq} z$ olacaktır. Bu durumda yukarıda (4.31) eşitliği ile verilmiş olan kırınan dalgalara ait ifade $\hat{A}_q^d(t)$, $\theta \approx \beta_q$ civarında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{A}_q^d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j(k_{\rho q}\rho + k_{zq} z - \omega t)}}{j8\pi^2 d_z kR_d} \frac{F(\delta_q^2)}{\left[\cos(\beta_q)-\cos(\theta)\right]} d\omega \tag{4.32}$$

Yukarıdaki integranddaki faz fonksiyonu, sonsuz uzunluklu dizinin çözümünde karşılaşılan faz fonksiyonu $\psi(\omega)$ ile aynı çıktı, dolayısıyla $\omega_{q,i}(t)$ semer noktaları da aynı çıkacaktır. (4.32) eşitliğindeki integral, (B.16) eşitliğinde tanımlandığı şekilde semer noktalarından gelen katkılar cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanabilir. (Bakınız Ek B2)

$$\hat{A}_{q,i}^d(t) = \frac{\sqrt{-j\omega_{q,i}}}{4\pi d_z\sqrt{2\pi}\, R_d} \frac{\sqrt{c}}{|\alpha_q|\sqrt{\rho}} \frac{\sin^{3/2}(\beta_i)}{\left[\cos(\beta_i)-\cos(\theta)\right]} F(\delta_{q,i}^2) e^{j\omega_{q,i}(t-t_d)} \qquad \begin{matrix} \text{i=1,2} \\ \text{q}\neq 0 \end{matrix} \tag{4.33}$$

Faz terimi *q=0* için ω'ya doğrusal bağlı olacağından dolayı semer noktası yaklaşımı geçersiz olacaktır. O halde yukarıdaki $\hat{A}_{q,i}^d(t)$ ifadesi *q≠0* için geçerli olacaktır ve *q=0* durumu ayrıca incelenmelidir. *q=0* için (4.31) eşitliğindeki ters Fourier integrali doğrudan hesaplanarak

$$\hat{A}_0^d(t) = \frac{c}{4\pi d_z R_d} \frac{U(t-t_d)}{\left[\cos(\beta_0)-\cos(\theta)\right]} \sqrt{\frac{t_d - t_0}{t - t_0}} \tag{4.34}$$

elde edilir. (Bakınız Ek B2)

(4.33) eşitliği ile verilen $\hat{A}_{q,i}^{d}(t)$ ifadesi kompleks değerler almaktadır. Ancak (4.20) eşitliğinde Floquet dalgalar için gösterildiği gibi, kırınan dalgalarda da +q. ve –q. dalgaların süperpozisyonu reel ve fiziksel olarak gözlenebilir alanlar oluşturmaktadır.

Kırınan dalgalara ait $\hat{A}_{q}^{d}(t)$ ifadesi de i=1 ve i=2 indisli $\hat{A}_{q,i}^{d}(t)$ ifadelerinin toplamı olarak ifade edilebilir ve (4.30) eşitliği ile verilen $\hat{A}_{q}^{T}(t)$ ifadesi de aşağıda (4.35) eşitliklerinde tanımlı i=1 ve i=2 indisli $\hat{A}_{q,i}^{T}(t)$ ifadelerinin toplamı olarak yazılabilir.

$$\hat{A}_{q}^{T}(t)=\sum_{i=1}^{2}\hat{A}_{q,i}^{T}(t)=\sum_{i=1}^{2}\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)\,U\left(\beta_i(t)-\theta\right)+\hat{A}_{q,i}^{d}(t) \tag{4.35}$$

q=0 için yukarıdaki (4.35) eşitliği yazılacak olunursa,

$$\hat{A}_{0}^{T}(t)=\hat{A}_{0}^{FW}(t)\,U\left(\beta_0-\theta\right)+\hat{A}_{0}^{d}(t) \tag{4.36}$$

elde edilir. Burada $\hat{A}_{0}^{FW}$ (4.21), $\hat{A}_{0}^{d}$ (4.34) ve β_0 (4.24) eşitlikleri ile verilmiştir.

Yarı-sonsuz dizi tarafından oluşturulan manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$'nin (4.27) eşitliği ile verilen ifadesinde $\hat{A}_0(t)$ ifadesi yerine (4.28) eşitliği ile verilen değeri ve $\hat{A}_{q}^{T}(t)$ ifadesi yerine *q=0* için (4.36) eşitliği ile verilen ifadesi ve *q≠0* ise (4.35) eşitliğiyle verilen ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned}\hat{A}_z(t)=&\frac{\delta\left(t-t_d\right)}{8\pi R_d}+\hat{A}_{0}^{FW}(t)\,U\left(\beta_0-\theta\right)+\hat{A}_{0}^{d}(t)\\&+\sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{q=-\infty\\ q\neq 0}}^{\infty}\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)\,U\left(\beta_i(t)-\theta\right)+\hat{A}_{q,i}^{d}(t)\end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. $\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)$ ve $\hat{A}_{q,i}^{d}(t)$'nin +q. ve –q. bileşenlerinin birbirlerinin eşlenikleri olmaları sebebiyle süperpozisyonlarının reel bir alan vermeleri özelliği kullanılarak (4.37) eşitliği sadece pozitif *q*'lar üzerinden bir toplam şeklinde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\hat{A}_z(t) = \frac{\delta(t-t_d)}{8\pi R_d} + \hat{A}_0^{FW}(t)\,U(\beta_0-\theta) + \hat{A}_0^{d}(t)$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{q=1}^{\infty} \hat{A}_{q,i}^{FW}(t)\,U(\beta_i(t)-\theta) + \hat{A}_{q,i}^{d}(t)\right\} \tag{4.38}$$

4.2.2 Kısa Süreli Darbelerle Uyarma

Pratik uygulamalarda, dipoller şimdiye kadar incelediğimiz gibi dürtü fonksiyonlarıyla değil de, kısa süreli ve dolayısıyla da geniş bir bant genişliğine sahip kaynak fonksiyonlarıyla uyarılırlar. Bu kaynak fonksiyonları $\hat{G}(t)$ sembolü ile ve spektrumu da $G(\omega)$ ile gösterilsin.

Bu durumda $\hat{G}(t)$ darbeleriyle uyarılan dipollerin oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z^G(t)$, yarı-sonsuz dipol dizisinin (4.37) eşitliği ile verilen dürtü cevabı $\hat{A}_z(t)$ ile $\hat{G}(t)$ kaynak fonksiyonunun konvolüsyonu alınarak aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\hat{A}_z^G(t) = \frac{\hat{G}(t-t_d)}{8\pi R_d} + \hat{G}(t)\otimes\hat{A}_0^T(t) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{q=-\infty\\ q\neq 0}}^{\infty} \hat{G}(t)\otimes\hat{A}_{q,i}^T(t) \tag{4.39}$$

Ancak yukarıdaki (4.39) eşitliğindeki konvolüsyon işlemi sayısal hesaplamalar yaparken çok uzun zaman aldığından bir şekilde bu konvolüsyon işleminden kaçınılmaya çalışılır. Zaman domeninde konvolüsyon işlemi, frekans domeninde çarpmaya karşı düştüğünden $\hat{G}(t)\otimes\hat{A}_{q,i}^T(t) = F^{-1}\left\{G(\omega)A_q^T(\omega)\right\}$ yazılabilir. $A_q^T(\omega)$ ifadesinin ters Fourier dönüşümü alınırken karşılaşılan integraller, durağan faz yöntemi kullanılarak sadece $\omega_{q,i}(t)$ semer noktalarından gelen katkılar hesaplanarak $\hat{A}_{q,i}^T(t)$ ifadesi bulunmuştu. Kısa süreli (geniş bantlı) kaynak fonksiyonları için $G(\omega)$, ters Fourier dönüşüm integralinin fazı $\hat{\psi}(\omega)$'ya oranla yavaş değişen bir fonksiyon olduğundan sadece semer noktasındaki değerleri $G(\omega_{q,i}(t))$ hesaplanarak aşağıdaki yaklaşık ifade elde edilir.

$$\hat{A}_z^G(t) = \frac{\hat{G}(t-t_d)}{8\pi R_d} + \hat{G}(t) \otimes A_0^T(t) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{q=-\infty \\ q\neq 0}}^{\infty} G(\omega_{q,i}(t)) \hat{A}_{q,i}^T(t) \tag{4.40}$$

Burada $\hat{A}_0^T(t)$ için (4.36) eşitliği ile ve $\hat{A}_{q,i}^T(t)$ için de (4.35) eşitliği ile bulunan bağıntılar kullanılır ve $\hat{A}_{q,i}^T(t)$ ifadesinin +q ve –q toplamının reel bir sonuç verdiği özelliği hatırlanarak, toplama işlemi sadece pozitif q değerleri için yapılırsa

$$\begin{aligned} \hat{A}_z^G(t) = & \frac{\hat{G}(t-t_d)}{8\pi R_d} + \hat{G}(t) \otimes \left[\hat{A}_0^{FW}(t)\, U(\beta_0 - \theta) + \hat{A}_0^d(t) \right] \\ & + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \sum_{i=1}^{2} \sum_{q=1}^{\infty} G(\omega_{q,i}(t)) \left[\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)\, U(\beta_i(t) - \theta) + \hat{A}_{q,i}^d(t) \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.41}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, (4.39) eşitliğinde q≠0 terimlerini içeren konvolüsyon işlemleri asimptotik olarak hesaplanabilmektedir. Ancak q=0 için faz fonksiyonu ω'ya doğrusal olarak bağlı olduğundan, semer noktası yaklaşıklığı kullanılamaz ve (4.41) eşitliğindeki konvolüsyon işleminin hesaplanması gerekmektedir.

(4.41)'in değerlendirilebilmesi için önemli bir husus da kaynak fonksiyonu seçilirken hem zaman domenindeki ifadesi $\hat{G}(t)$ hem de frekans domenindeki ifadesi $G(\omega)$'nın analitik kapalı bir formda bilinmesi gerekliliğidir. Tezin bundan sonraki bölümünde sayısal örnekler bulunurken $\hat{G}(t)$ normalize Rayleigh darbesi olarak seçilmiştir. Normalize Rayleigh darbesi $\hat{G}(t)$ ve spektrumu $G(\omega)$ aşağıda verilmiştir:

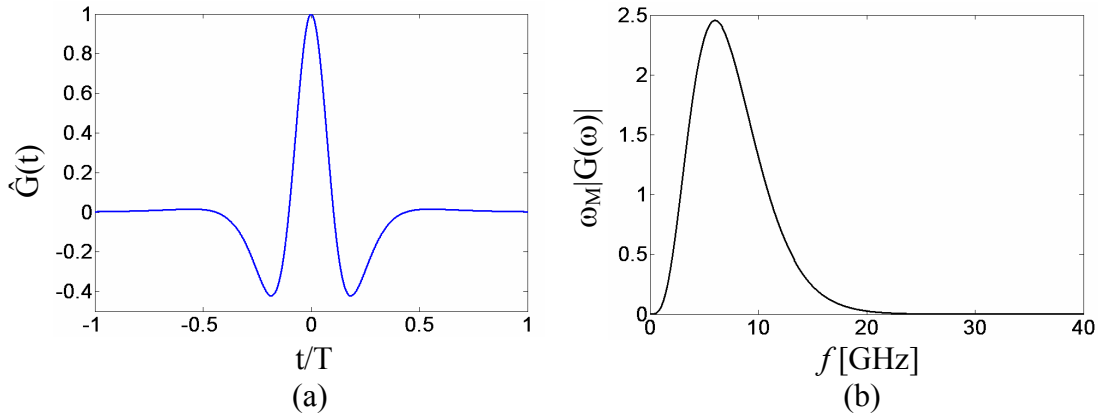
$$\hat{G}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{j}{(j + \omega_M t/4)^5} \right\} \tag{4.42a}$$

$$G(\omega) = \frac{\pi}{6\omega_M} \left(\frac{4\omega}{\omega_M} \right)^4 e^{-4|\omega|/\omega_M} \tag{4.42b}$$

$$\omega_M = 4\pi c / d_z \tag{4.42c}$$

Yukarıdaki (4.42c) eşitliği ile tanımlanan ω_M, merkezi radyal frekansı göstermektedir. Şekil 4.3'de d_z=*0.1m* yani $f_M = \omega_M / 2\pi = 6\ GHz$ için $\hat{G}(t)$

darbesinin normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimi ve spektrumu $G(\omega)$'nın genliğinin frekansla değişimi görülmektedir.



Şekil 4.3 : Normalize Rayleigh darbesi **a)** zaman domeninde $\hat{G}(t)$ darbesinin normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimi **b)** frekans domeninde $\omega_M|G(\omega)|$'nin frekansla değişimi

(4.41) eşitliği ile kullanılarak $\hat{A}_z^G(t)$ hesaplanırken sonsuz tane q için toplam yapmaya gerek yoktur. Hatırlanacak olunursa $\omega_{q,i}(t)$ semer noktaları, q indisi ile doğrusal olarak artmaktaydı. Dolayısıyla da sadece $\omega_{q,i}(t)$ semer noktalarını $G(\omega)$'nın bandı içerisinde bıraktıran q değerleri için toplam işleminin yapılması yeterli olacaktır.

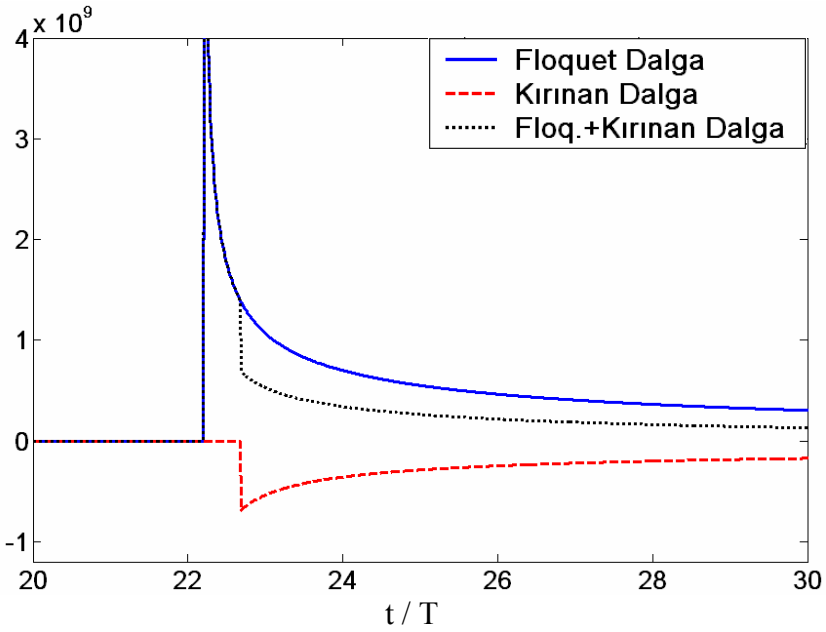
(4.38) eşitliği ile bulunan $\hat{A}_z(t)$ dürtü cevabı bulunurken, Hankel fonksiyonlarının yüksek frekanslarda geçerli yaklaşık ifadesi kullanıldığından ve ters Fourier dönüşüm integralleri semer noktası katkıları cinsinden yaklaşık olarak hesaplandığından, $\hat{A}_z(t)$ sadece dalga cephesinin yakın civarında yani erken gözlem zamanlarında geçerli olacaktır. Ancak Şekil 4.3b'deki gibi düşük frekans bileşenleri içermeyen bir $\hat{G}(t)$ darbesi ile konvolüsyon, $\hat{A}_z^G(t)$'nin sadece erken gözlem zamanlarında değil daha sonra da yeterli doğrulukla geçerli olmasını sağlamaktadır.

4.2.3 q=0 Terimi için Gerekli Konvolüsyon Integralinin Yaklaşık Hesabı

Normalize Rayleigh darbeleri $\hat{G}(t)$ ile uyarılan yarı-sonsuz uzunluklu bir dipol dizisine ait manyetik skaler potansiyel (4.41) eşitliği ile hesaplanırken, $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t)$ ve $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{d}(t)$ konvolüsyonlarının sayısal olarak hesaplanması gerekir. Sıfırıncı Floquet dalga $\hat{A}_0^{FW}(t)$, (4.21) eşitliği ile verilen ifadesinden görüleceği üzere $U(\tau - \tau_0)$ ya da özdeş olarak $U(t - t_0)$ birim basamak fonksiyonu ile kesildiğinden dolayı sadece $t > t_0$ anlarında mevcuttur. Ayrıca $\hat{A}_0^{FW}(t)$'nin bu ifadesinin $\tau=\tau_0$ ya da özdeş olarak $t=t_0$ değerinde bir kutubu vardır.

Şekil 4.4'de yarı-sonsuz çizgisel bir dipol dizisi tarafından uyarılan 0. Floquet dalga $\hat{A}_0^{FW}(t)$ ve 0. kırınan dalga $\hat{A}_0^{d}(t)$'nin ρ=1.5m ve z=1.7m gözlem noktasında normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimleri çizilmiştir. η_z=0.6 ve ardışık dipoller arası mesafe d_z=0.1m olarak seçildiğinden (4.9) eşitlikleri uyarınca $t_0 = 2.22/c$ olmaktadır. T=0.1/c olduğundan $t_0 = 22.2T$ olarak yazılabilir ve şekilden de $\hat{A}_0^{FW}(t)$'nin $t_0 = 22.2T$ değerinde bir kutbu olduğu açıkça görülmektedir. (4.34) eşitliği ile verilen ifadesinden gözüktüğü üzere $\hat{A}_0^{d}(t)$'nin de $t = t_0$ değerinde bir kutbu vardır. Ancak $\hat{A}_0^{d}(t)$ ifadesi $U(t - t_d)$ birim basamak fonksiyonu ile kesildiğinden dolayı sadece $t > t_d$ anlarında mevcuttur ve $t_d > t_0$ olduğundan dolayı $t = t_0$ anında $\hat{A}_0^{d}(t)$'nin bir kutubu olmayacak aksine 0 olacak ve $t = t_d$ anında bir süreksizlik gösterecektir. Bu gözlem noktası için $t_d = R_d / c = 2.267/c = 22.67T$ olacaktır. $\hat{A}_0^{d}(t)$'nin bu $t = t_d$ anında gösterdiği süreksizlik de Şekil 4.4'de açıkça görülmektedir.

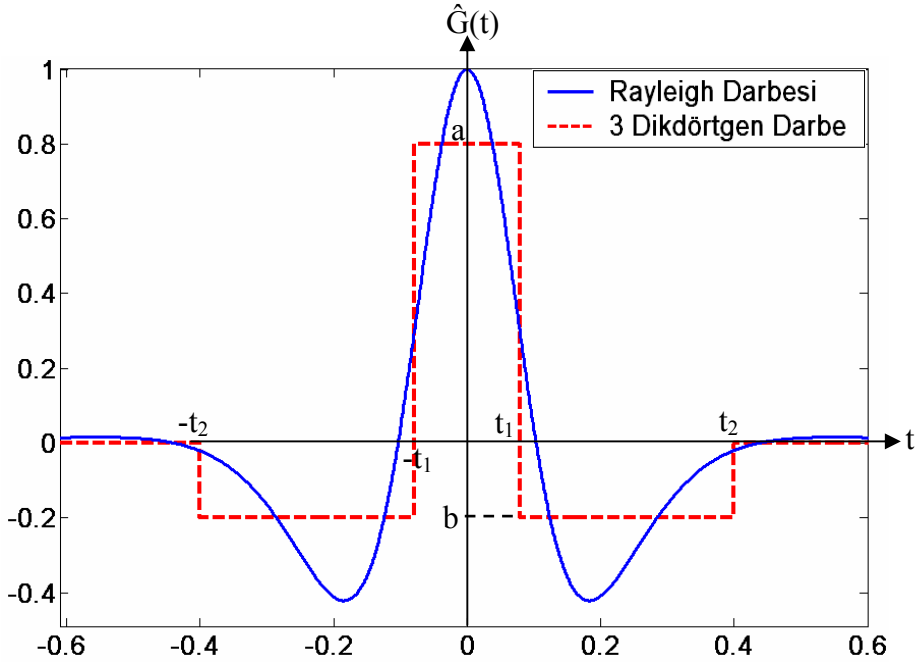
Sayısal konvolüsyon hesaplanırken $\hat{A}_0^{FW}(t)$, $t = t_0$ değerine ne kadar yakın bir değerden hesaplanmaya başlatılırsa ve örnekler arası süre dt ne kadar ufak seçilirse, sonuçlar o kadar daha doğru çıkmaktadır. Ancak dt değerinin azalması, örnek sayısının ve de dolayısıyla işlem süresinin artmasına sebep olmaktadır.



Şekil 4.4 : Normalize faz farkı η_z=0.6 ve ardışık dipoller arası mesafe d_z=0.1m olan yarı-sonsuz çizgisel bir dipol dizisi tarafından uyarılan 0. Floquet dalga $\hat{A}_0^{FW}(t)$ ve 0. kırınan dalga $\hat{A}_0^{d}(t)$ 'nin ρ=1.5m ve z=1.7m gözlem noktasında normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimleri

Çok fazla işlem süresi gerektiren sayısal konvolüsyon işlemi yaklaşık olarak çok daha hızlı bir şekilde değerlendirilebildiği takdirde işlem süresi kısalacak ve bunun sonucunda da zaman domeni Floquet dalga gösterilimlerinin etkinliği önemli ölçüde artacaktır. Kaynak fonksiyonunun sabit genlikli, zamanda sınırlı, dikdörtgen bir yapıda olması durumunda konvolüsyon integralinin analitik olarak değerlendirilebileceğinden hareketle, bu tezde konvolüsyon integralinin yaklaşık olarak belirlenmesi için kaynak fonksiyonuna genlik ve süreleri adaptif biçimde belirlenen parça parça sürekli bir dizi dikdörtgen darbe ile yaklaşıklık yapılmasına dayanan bir yöntem geliştirilmiştir.

Yöntemin uygulanışına ilk örnek olarak normalize Rayleigh darbesine Şekil 4.5'de gösterildiği şekilde 3 tane dikdörtgen darbenin toplamı şeklinde bir yaklaşıklık yapılarak, konvolüsyon işlemi analitik olarak hesaplanıp kapalı formda ifadeleri aşağıda elde edilmiştir.



Şekil 4.5 : Normalize Rayleigh darbesi ve üç tane dikdörtgen darbenin süperpozisyonu ile yapılan yaklaşıklık

$\hat{A}_0^{FW}(t)$'nin (4.21) eşitliğindeki ifadesi ile Şekil 4.5'deki kırmızı renk ve kesik çizgilerle gösterilen, 3 dikdörtgen darbenin toplamı olan yaklaşık $\hat{G}(t)$ ifadesinin konvolüsyonu alınacak olunursa

$$\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{1}{2\pi d_z} \times$$

$$\left[\int_{-t_2+t}^{-t_1+t} \frac{bU(u-t_o)du}{\sqrt{(u-\eta_z z/c)^2 - \tau_0^2}} + \int_{-t_1+t}^{t_1+t} \frac{aU(u-t_o)du}{\sqrt{(u-\eta_z z/c)^2 - \tau_0^2}} + \int_{t_1+t}^{t_2+t} \frac{bU(u-t_o)du}{\sqrt{(u-\eta_z z/c)^2 - \tau_0^2}} \right] \quad (4.43)$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.43) eşitliğindeki integraller $\int (x^2+a^2)^{-0.5} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ eşitliği kullanarak hesaplanırsa $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t)$ konvolüsyonu analitik olarak hesaplanıp sonuç kapalı formda aşağıdaki (4.44) eşitliğindeki gibi bulunur.

$$\hat{G}(t)\otimes\hat{A}_0^{FW}(t)=\frac{1}{2\pi\, d_z}\begin{cases}0 & t<t_0-t_2\\ b\ln\left(\dfrac{A_1}{\tau_0}\right) & t_0-t_2\le t<t_0-t_1\\ b\ln\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)+a\ln\left(\dfrac{A_2}{\tau_0}\right) & t_0-t_1\le t<t_0+t_1\\ b\ln\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)+a\ln\left(\dfrac{A_2}{A_3}\right)+b\ln\left(\dfrac{A_3}{\tau_0}\right) & t_0+t_1\le t<t_0+t_2\\ b\ln\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)+a\ln\left(\dfrac{A_2}{A_3}\right)+b\ln\left(\dfrac{A_3}{A_4}\right) & t_0+t_2\le t\end{cases} \tag{4.44}$$

Yukarıdaki (4.44) eşitliğinde geçen A_1, A_2, A_3, A_4 ifadeleri aşağıdaki (4.45) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

$$A_1=t_2+\tau+\sqrt{(t_2+\tau)^2-\tau_0^2} \tag{4.45a}$$

$$A_2=t_1+\tau+\sqrt{(t_1+\tau)^2-\tau_0^2} \tag{4.45b}$$

$$A_3=-t_1+\tau+\sqrt{(-t_1+\tau)^2-\tau_0^2} \tag{4.45c}$$

$$A_4=-t_2+\tau+\sqrt{(-t_2+\tau)^2-\tau_0^2} \tag{4.45d}$$

Aynı $\hat{G}(t)$ kaynak fonksiyonu ile (4.34) eşitliği ile verilen $\hat{A}_0^d(t)$ ifadesinin konvolüsyonu alınacak olunursa,

$$\hat{G}(t)\otimes\hat{A}_0^d(t)=\frac{c\sqrt{t_d-t_0}}{4\pi\, d_z R_d\left[\cos(\beta_0)-\cos(\theta)\right]}\times \left[\int_{-t_2+t}^{-t_1+t}\frac{bU(u-t_d)du}{\sqrt{u-t_0}}+\int_{-t_1+t}^{t_1+t}\frac{aU(u-t_d)du}{\sqrt{u-t_0}}+\int_{t_1+t}^{t_2+t}\frac{bU(u-t_d)du}{\sqrt{u-t_0}}\right] \tag{4.46}$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.46) eşitliğindeki integraller hesaplanırsa $\hat{G}(t)\otimes\hat{A}_0^d(t)$ konvolüsyonu analitik olarak hesaplanıp sonuç kapalı formda aşağıdaki (4.47) eşitliğindeki gibi bulunur.

$$\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^d(t) = \frac{c\sqrt{t_d - t_0}}{2\pi d_z R_d \left[\cos(\beta_0) - \cos(\theta)\right]} \times$$

$$\begin{cases} 0 & t < t_d - t_2 \\ b(D_1 - D_0) & t_d - t_2 \le t < t_d - t_1 \\ b(D_1 - D_2) + a(D_2 - D_0) & t_d - t_1 \le t < t_d + t_1 \\ b(D_1 - D_2) + a(D_2 - D_3) + b(D_3 - D_0) & t_d + t_1 \le t < t_d + t_2 \\ b(D_1 - D_2) + a(D_2 - D_3) + b(D_3 - D_4) & t_d + t_2 \le t \end{cases} \quad (4.47)$$

Yukarıdaki (4.47) eşitliğinde geçen D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 ifadeleri aşağıdaki (4.48) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

$$D_0 = \sqrt{t_d - t_0} \quad (4.48a)$$

$$D_1 = \sqrt{t + t_2 - t_0} \quad (4.48b)$$

$$D_2 = \sqrt{t + t_1 - t_0} \quad (4.48c)$$

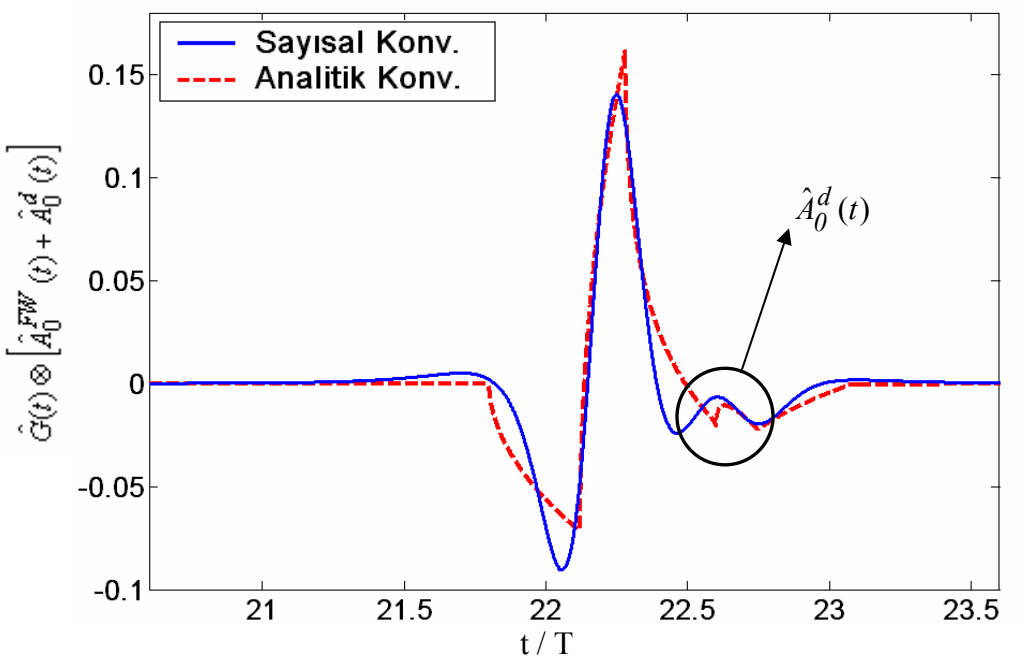
$$D_3 = \sqrt{t - t_1 - t_0} \quad (4.48d)$$

$$D_4 = \sqrt{t - t_2 - t_0} \quad (4.48e)$$

Sayısal hesaplamalarda kullanılan parametreler için Rayleigh darbesinin üç tane dikdörtgen darbe ile modellenmesinde Şekil 4.5'deki darbelerin genlik ve sürelerini a=0.8, b=-0.2, t_1=0.08T, t_2=0.4T olarak seçmek uygun olacaktır. Bu parametreler için (4.44) ve (4.47) eşitlikleri ile kapalı formda verilen $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^d(t))$ ifadesinin, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman sayısal konvolüsyon ile hesaplanan değerleri ile karşılaştırılması Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Şekilden görüleceği üzere 3 tane dikdörtgen darbe alarak yapılan yaklaşıklık kaba olarak doğru olmakla beraber detayları vermemektedir. Ayrıca Şekil 4.6'dan görülen bir diğer özellik $\hat{A}_0^d(t)$'nin katkısının $\hat{A}_0^{FW}(t)$'nin yanında çok ufak olduğudur.

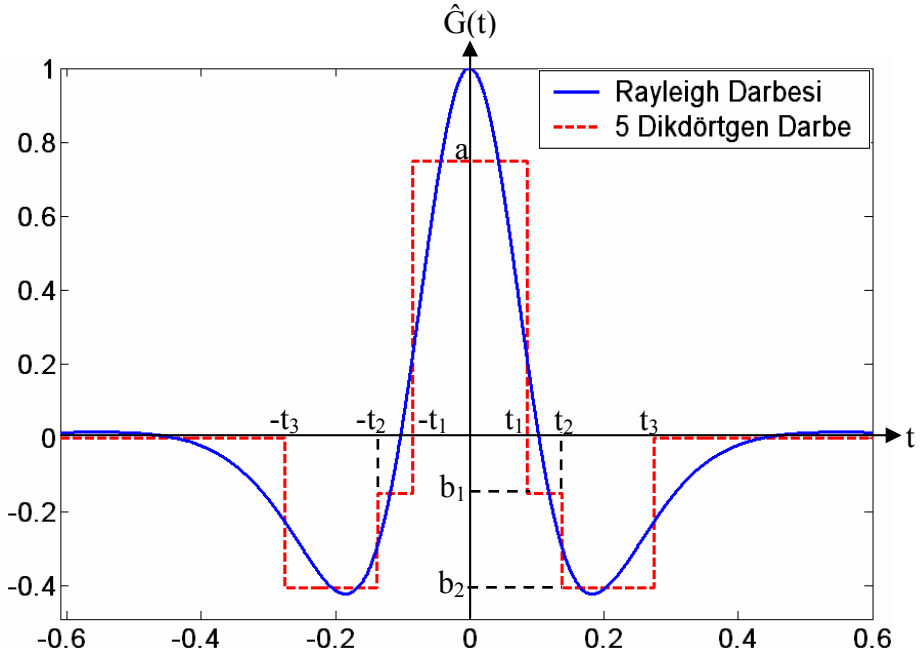
Diğer taraftan, daha fazla sayıda dikdörtgen darbe kullanarak kaynak fonksiyonu için yapılan yaklaşıklığı istenildiği kadar iyileştirmek mümkündür. Bu durumu açıkça ortaya koymak için ilk olarak darbe sayısı beşe daha sonra da onbire çıkarılarak

konvolüsyon integrali hesaplanacaktır. Tezdeki sayısal hesaplamalarda onbir terimli bir açılım kullanılmış olmakla birlikte, formülasyonu çok uzatmamak için analitik ifadelerin beş darbe için verilmesi ile yetinilecektir.



Şekil 4.6 : η_z=0.6, d_z=0.1m, ρ=1.5m ve z=1.7m için $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^d(t))$'nin $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman sayısal konvolüsyon ile hesaplanan değerleri ile, $\hat{G}(t)$ 3 tane dikdörtgen darbe alındığı zaman analitik konvolüsyon ile kapalı formda bulunan ifadesinin t/T normalize zaman ile değişimlerinin karşılaştırılması

$\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi Şekil 4.7'deki gibi 5 tane dikdörtgen darbe ile modellendiğinde $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t)$ konvolüsyonu analitik olarak hesaplanıp sonuçlar aşağıdaki (4.49) eşitliğindeki gibi bulunur.



Şekil 4.7 : Normalize Rayleigh darbesi ve 5 tane dikdörtgen darbenin süperpozisyonu ile yapılan yaklaşıklık

$$\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{1}{2\pi d_z} \times \tag{4.49}$$

$$\begin{cases} 0 & t < t_0 - t_3 \\ b_2 \ln\left(\frac{A_1}{\tau_0}\right) & t_0 - t_3 \le t < t_0 - t_2 \\ b_2 \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_2}{\tau_0}\right) & t_0 - t_2 \le t < t_0 - t_1 \\ b_2 \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_2}{A_3}\right) + a \ln\left(\frac{A_3}{\tau_0}\right) & t_0 - t_1 \le t < t_0 + t_1 \\ b_2 \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_2}{A_3}\right) + a \ln\left(\frac{A_3}{A_4}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_4}{\tau_0}\right) & t_0 + t_1 \le t < t_0 + t_2 \\ b_2 \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_2}{A_3}\right) + a \ln\left(\frac{A_3}{A_4}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_4}{A_5}\right) + b_2 \ln\left(\frac{A_5}{\tau_0}\right) & t_0 + t_2 \le t < t_0 + t_3 \\ b_2 \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_2}{A_3}\right) + a \ln\left(\frac{A_3}{A_4}\right) + b_1 \ln\left(\frac{A_4}{A_5}\right) + b_2 \ln\left(\frac{A_5}{A_6}\right) & t_0 + t_3 \le t \end{cases}$$

Yukarıdaki (4.49) eşitliğinde geçen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, ifadeleri aşağıdaki (4.50) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

$$A_1 = t_3 + \tau + \sqrt{(t_3+\tau)^2 - \tau_0^2} \tag{4.50a}$$

$$A_2 = t_2 + \tau + \sqrt{(t_2+\tau)^2 - \tau_0^2} \tag{4.50b}$$

$$A_3 = t_1 + \tau + \sqrt{(t_1+\tau)^2 - \tau_0^2} \tag{4.50c}$$

$$A_4 = -t_1 + \tau + \sqrt{(-t_1+\tau)^2 - \tau_0^2} \tag{4.50d}$$

$$A_5 = -t_2 + \tau + \sqrt{(-t_2+\tau)^2 - \tau_0^2} \tag{4.50e}$$

$$A_6 = -t_3 + \tau + \sqrt{(-t_3+\tau)^2 - \tau_0^2} \tag{4.50f}$$

$\hat{G}(t)$ kaynak fonksiyonu Şekil 4.7'deki gibi 5 tane dikdörtgen darbe ile modellenirse, (4.34) eşitliği ile verilen $\hat{A}_0^d(t)$ ifadesi ile $\hat{G}(t)$'nin konvolüsyonu analitik olarak hesaplanıp sonuç kapalı formda aşağıdaki (4.51) eşitliğindeki gibi bulunur.

$$\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^d(t) = \frac{c\sqrt{t_d - t_0}}{2\pi\, d_z R_d \left[\cos(\beta_0) - \cos(\theta)\right]} \times \tag{4.51}$$

$$\begin{cases}
0 & t \le t_d - t_3 \\
b_2(D_1 - D_0) & t_d - t_3 \le t < t_d - t_2 \\
b_2(D_1 - D_2) + b_1(D_2 - D_0) & t_d - t_2 \le t < t_d - t_1 \\
b_2(D_1 - D_2) + b_1(D_2 - D_3) + a(D_3 - D_0) & t_d - t_1 \le t < t_d + t_1 \\
b_2(D_1 - D_2) + b_1(D_2 - D_3) + a(D_3 - D_4) + b_1(D_4 - D_0) & t_d + t_1 \le t < t_d + t_2 \\
b_2(D_1 - D_2) + b_1(D_2 - D_3) + a(D_3 - D_4) + b_1(D_4 - D_5) + b_2(D_5 - D_0) & t_d + t_2 \le t < t_d + t_3 \\
b_2(D_1 - D_2) + b_1(D_2 - D_3) + a(D_3 - D_4) + b_1(D_4 - D_5) + b_2(D_5 - D_6) & t_d + t_3 \le t
\end{cases}$$

Yukarıdaki (4.51) eşitliğinde geçen D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, ifadeleri aşağıdaki (4.52) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

$$D_0 = \sqrt{t_d - t_0} \tag{4.52a}$$

$$D_1 = \sqrt{t + t_3 - t_0} \tag{4.52b}$$

$$D_2 = \sqrt{t + t_2 - t_0} \tag{4.52c}$$

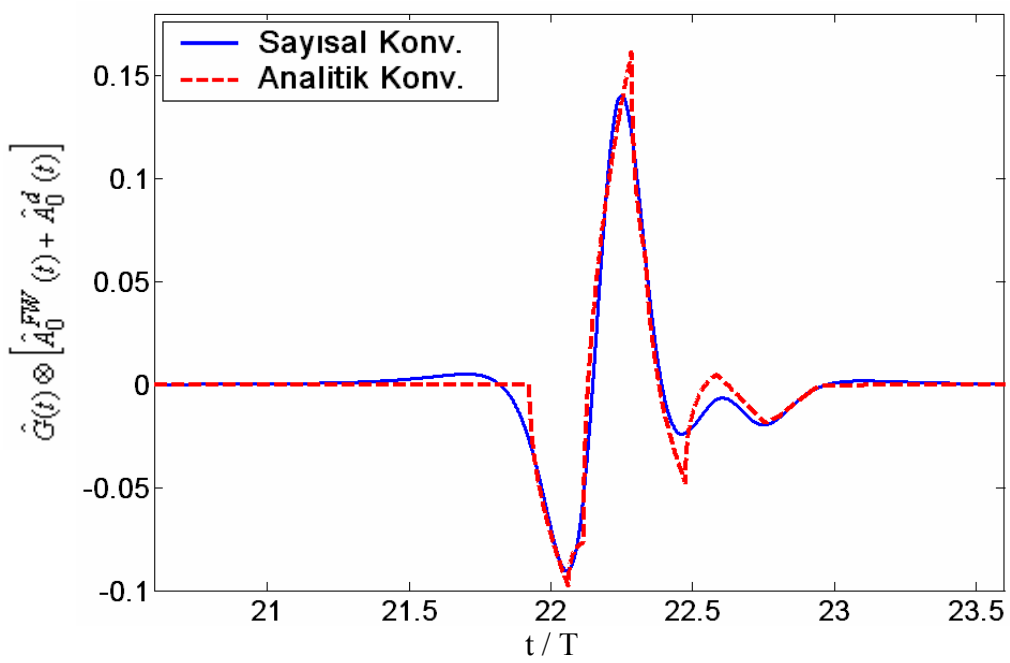
$$D_3 = \sqrt{t + t_1 - t_0} \tag{4.52d}$$

$$D_4 = \sqrt{t - t_1 - t_0} \tag{4.52e}$$

$$D_5 = \sqrt{t - t_2 - t_0} \tag{4.52f}$$

$$D_6 = \sqrt{t - t_3 - t_0} \tag{4.52g}$$

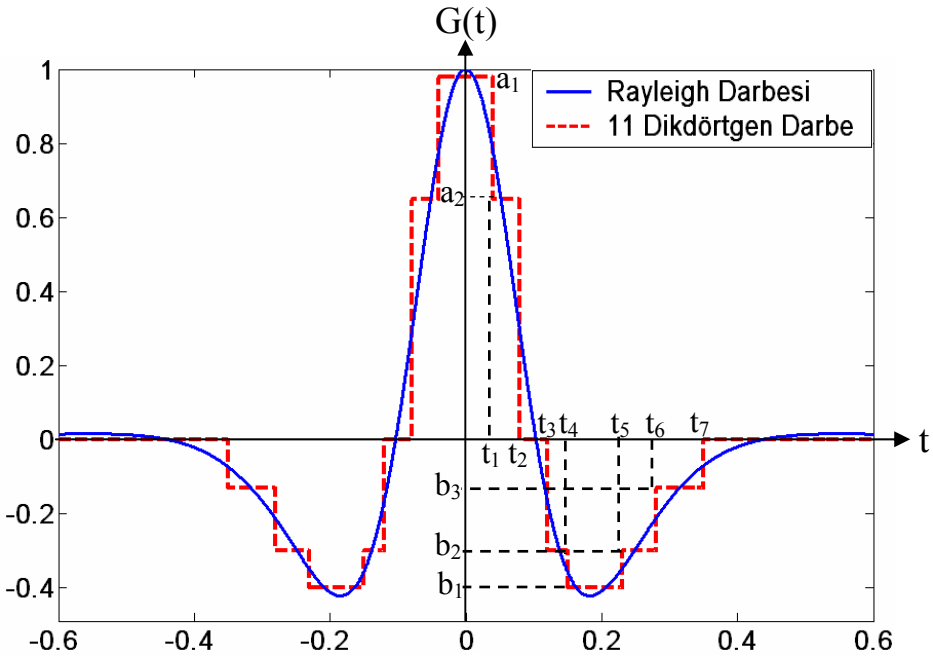
Rayleigh darbesinin 5 tane dikdörtgen darbe ile modellenmesinde Şekil 4.7'deki darbelerin genlik ve süreleri a=0.75, b_1=–0.15, b_2=–0.4064, t_1=0.085T, t_2=0.1375T, t_3=0.275T olarak seçilmesi uygundur. Bu parametreler için (4.49) ve (4.51) eşitlikleri ile kapalı formda verilen $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ ifadesinin, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman sayısal konvolüsyon ile hesaplanan değerleri ile karşılaştırılması Şekil 4.8'de gösterilmiştir.



Şekil 4.8 : η_z=0.6, d_z=0.1m, ρ=1.5m ve z=1.7m için, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman ve 5 tane dikdörtgen darbe ile modellendiği zaman bulunan $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ 'lerin karşılaştırılması

Şekil 4.8 ile Şekil 4.6 karşılaştırıldığında konvolüsyon integralinin hesabındaki hataların önemli ölçüde azaldığı görülmektedir. Ancak, beş darbe durumunda elde edilen sonuçlar ile konvolüsyon integralinin sayısal olarak hesaplanan değerleri arasında oldukça farklılık olan zaman aralıkları bulunmaktadır.

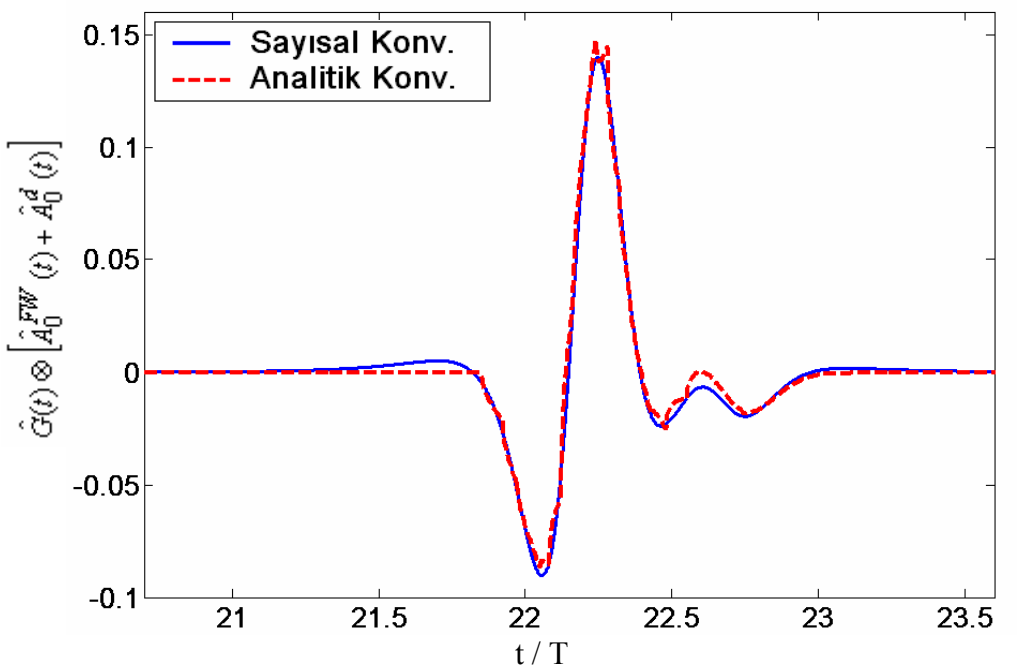
Hesap doğruluğunu arttırmak için kaynağı modellemede kullanılan darbe sayısı Şekil 4.9'da gösterildiği gibi onbire çıkarılmıştır. Tezde verilmemiş olmakla birlikte bu durumda $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t)$ ve $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{d}(t)$ konvolüsyonları analitik olarak hesaplanıp sonuçlar (4.49) ve (4.51) eşitliklerine benzer şekilde kolayca elde edilebilir.



Şekil 4.9 : Normalize Rayleigh darbesi ve 11 tane dikdörtgen darbenin süperpozisyonu ile yapılan yaklaşıklık

Hatayı azaltma yönünde uygun bir seçim olarak, Şekil 4.9'daki darbelerin genlik ve süreleri a_1=0.882, a_2=0.585, b_1=–0.36, b_2=–0.27, b_3=–0.1183, t_1=0.04T, t_2=0.08T, t_3=0.12T, t_4=0.15T, t_5=0.23T, t_6=0.28T, t_7=0.35T şeklinde belirlenmiştir. Bu parametreler için, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman sayısal konvolüsyon ile hesaplanan $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ değerleri ile $\hat{G}(t)$ 11 tane dikdörtgen darbe ile modellendiği zaman analitik konvolüsyon alınarak bulunan sonuçlar Şekil 4.10'da karşılaştırılmıştır. Şekilden de görüldüğü üzere Rayleigh darbesinin yerine 11 tane dikdörtgen darbe kullanılarak yapılan hesaplar sayısal konvolüsyon ile bulunan çözümlere yeterli yaklaşıklık sağlamaktadır. Bu nedenle, tezde verilen zaman

cevaplarının elde edilmesinde q=0 terimi ile ilgili konvolüsyon integralleri için kaynak fonksiyonuna onbir dikdörtgen dalga ile yaklaşıklık yaparak elde edilen analitik ifadeler kullanılmıştır.



Şekil 4.10 : η_z=0.6, d_z=0.1m, ρ=1.5m ve z=1.7m için, $\hat{G}(t)$ Rayleigh darbesi alındığı zaman ve 11 tane dikdörtgen darbe ile modellendiği zaman bulunan $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ 'lerin karşılaştırılması

Konvolüsyon hesabı için bu tezde önerilen yaklaşıklık yönteminin bilgisayar zamanını azaltmadaki etkinliğini göstermek için Tablo 4.2'de $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ konvolüsyonunun dt=0.0002s alarak sayısal olarak hesaplanması ve $\hat{G}(t)$ 11 tane dikdörtgen darbe ile modellenerek konvolüsyonun analitik olarak hesaplanması için gerekli işlem süreleri karşılaştırılmıştır. Tablodan da görüleceği üzere analitik olarak hesaplama 750 kattan daha fazla işlem süresinde tasarruf sağlamaktadır.

Tablo 4.2 : $\hat{G}(t) \otimes (\hat{A}_0^{FW}(t) + \hat{A}_0^{d}(t))$ konvolüsyonunun sayısal ve analitik olarak kapalı formda hesaplanması için gerekli işlem sürelerinin karşılaştırılması

	Sayısal Konvolüsyon (dt=0.0002 s)	Analitik Konvolüsyon
İşlem Süresi	263.74 s	0.344 s

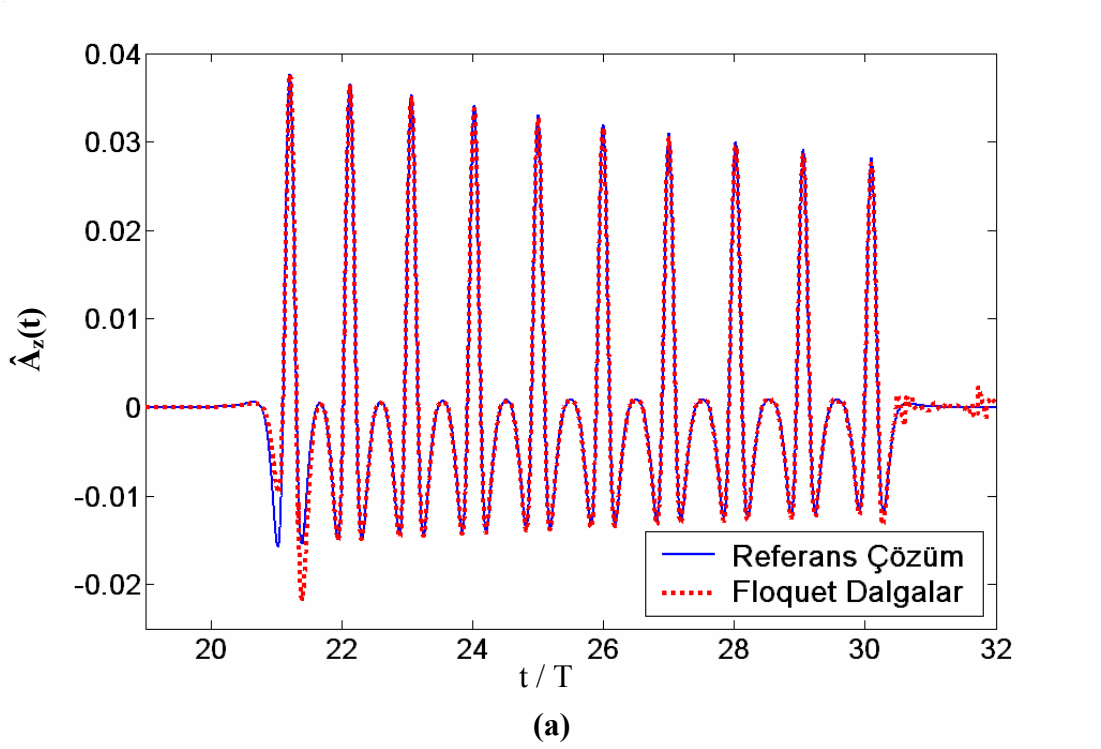
4.3 Sonlu Çizgisel Dipol Dizileri

Sonlu çizgisel dipol dizisine ait geometri Şekil 3.10'da gösterilmişti. Bu diziye ait eleman-eleman toplama yöntemine dayanan referans çözüm, (2.22) eşitliğindeki toplamın *n=0*'dan $(N_z - 1)$ 'e kadar hesaplanmasıyla elde edilir.

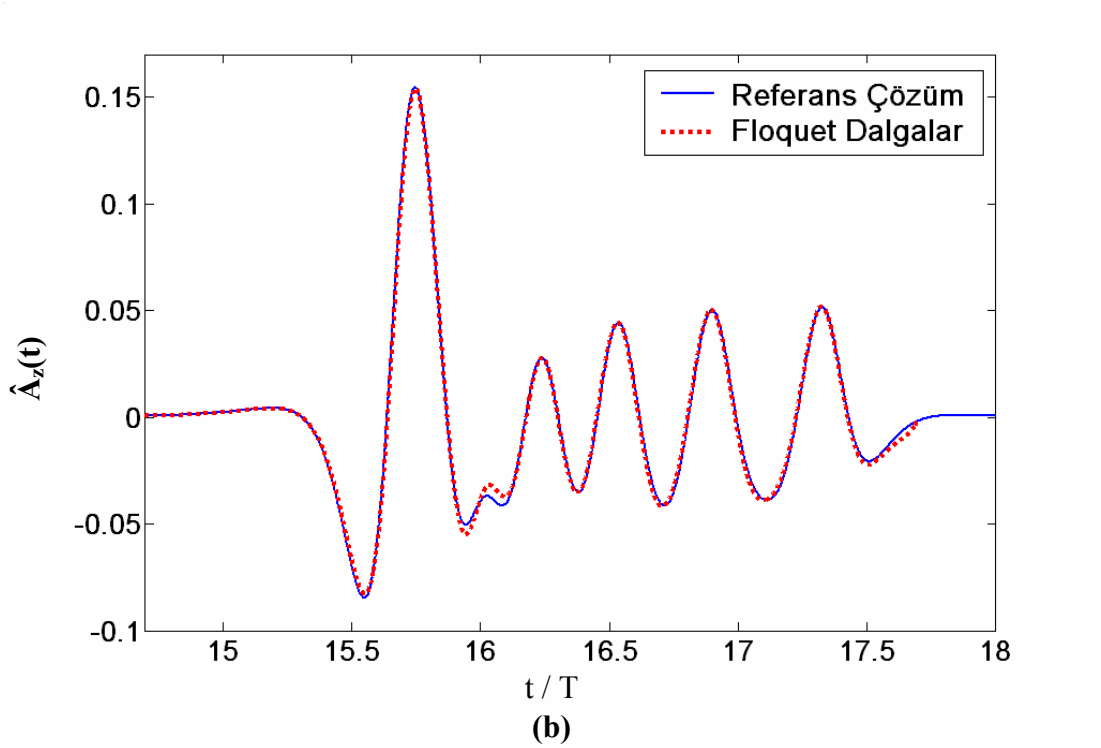
Frekans domeninde bahsedilen yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak sonlu çizgisel diziye (SÇD) ait çözümler, yarı sonsuz orijinal dizinin oluşturacağı alan ile bu dizinin z ekseninde $N_z d_z$ kadar kaydırılmış hali olan ikinci bir yarı sonsuz çizgisel dizinin (YSÇD) oluşturacağı alanın farkı alınarak bulunabilir. Frekans domeninde kaydırılmış dizi $e^{-jk\eta_z N_z d_z}$ faz farkıyla ağırlaştırılıyordu, dolayısıyla da zaman domeninde kaydırılmış diziye ait dipoller bu faz farkının karşı düştüğü $\eta_z N_z d_z / c$ kadar bir gecikmeyle uyarılmalıdır.

Kaydırılmış dizinin bir P(ρ, z) gözlem noktasında oluşturacağı alanı bulmak için dizinin sol uç noktası ile gözlem noktası arasında yeni bir θ' açısı ve R'_d uzaklığı tanımlamaları yapılması ve dolayısıyla da bütün formülasyonun üzerinden yeniden geçilmesi gerekliliği vardır. Ancak önerilen yapay açıklık yaklaşımında, kaydırılmış dizinin bir P(ρ,*z*) noktasında oluşturacağı alan, orijinal dizinin P(ρ, *z*-$N_z d_z$) noktasında oluşturacağı alana eşit olacağı dikkate alınarak, dipol dizisini kaydırmak yerine gözlem noktasını ters yönde kaydırmak suretiyle ikinci dizinin etkisi hesaplanabilir. Böylece sonlu çizgisel diziye ait bir P(ρ,*z*) gözlem noktasındaki çözümler, orijinal yarı-sonsuz dizinin bir P(ρ,*z*) gözlem noktasında oluşturacağı alan ile aynı orijinal dizinin bir P(ρ, *z*-$N_z d_z$) sanal gözlem noktasında $\eta_z N_z d_z / c$ kadar süre sonra oluşturacağı alanın farkı alınarak aşağıdaki (4.53) eşitliğindeki gibi hesaplanmıştır.

$$\hat{A}_z^{SÇD}(\rho, z, t) = \hat{A}_z^{YSÇD}(\rho, z, t) - \hat{A}_z^{YSÇD}(\rho,\ z - N_z d_z,\ t - \eta_z N_z d_z / c) \tag{4.53}$$



(a)



(b)

Şekil 4.11 : 10 elemanlı (N_z=10) çizgisel bir dipol dizisinin **a)** ρ=1.5m, z=–1.5m **b)** ρ=1.5m, z=0.5m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$ (d_z=0.1m, η_z=0.2, T=d_z/c)

Şekil 4.11'de ardışık dipoller arası mesafe d_z=0.1m ve normalize faz farkı η_z=0.2 olan N_z=10 elemanlı çizgisel bir dipol dizisinin farklı iki gözlem noktasında oluşturacağı $\hat{A}_z$(t) manyetik skaler potansiyelin t/T normalize zaman ile değişimi çizdirilmiştir. Bu diziye ait dipoller (4.42) eşitliği ile verilen ve Şekil 4.3'te çizdirilen normalize Rayleigh darbeleri ile uyarılmışlardır. Şekil 4.11a'daki gözlem noktası dizinin sol tarafında ve dizinin dışında olan ρ=1.5m, z=–1.5m koordinatlarıyla belirlenen nokta olarak seçilmiştir. Bu seçilen gözlem noktasına her bir dipolden çıkan dalgalar birbirlerinden farklı zamanlarda, ardarda varmakta ve her birinin etkisi ayrı ayrı gözlemlenebilmektedir. Bu şeklin elde edilmesinde |q|≤5 olacak şekilde toplam 11 tane zaman domeni Floquet dalgası kullanılmıştır. Ancak, negatif q değerlerine ait çözümlerin, pozitif q değerlerine ait çözümlerin eşleniği olduğu hatırlanarak, (4.41) eşitliği uyarınca sadece pozitif q değerleri için hesap yapılması yeterli olmuştur. Diğer q değerleri için $\omega_{q,i}(t)$ semer noktaları, kaynak fonksiyonunun spektrumu $G(\omega)$'nın dışında kalmış, dolayısıyla $G(\omega_{q,i}(t)) \approx 0$ olması sebebiyle bu q indisli Floquet dalgalardan hiçbir katkı gelmemiştir.

Şekil 4.11b'de seçilen ρ=1.5m, z=0.5m koordinatlarına sahip gözlem noktası ise dizinin ortasında yer almaktadır. Farklı dipollerden çıkan dalgalar gözlem noktasına eş zamanlı vararak girişime sebep olduklarından her bir dipolün ayrı ayrı etkisi gözlemlenememektedir. Bu şeklin elde edilmesinde q=0,1,2 indisli toplam 3 tane Floquet dalgası kullanılması yeterli olmuştur.

(4.33) eşitliği ile verilen kırınan dalgalara ait $\hat{A}^d_{q,i}(t)$ ifadesi yapılan yaklaşıklık sebebiyle sadece gölge bölge sınırı $\theta \approx \beta_i(t)$ civarında geçerli idi ve diğer yerlerde ihmal ediliyordu. Her iki şekilden de görüldüğü üzere yapılan bu yaklaşık sonuçları çok fazla etkilememektedir ve eleman-eleman toplama yöntemi ile hesaplanan referans çözüm ile Floquet dalgalar ile hesaplanan çözüm arasında çok iyi bir uyum vardır.

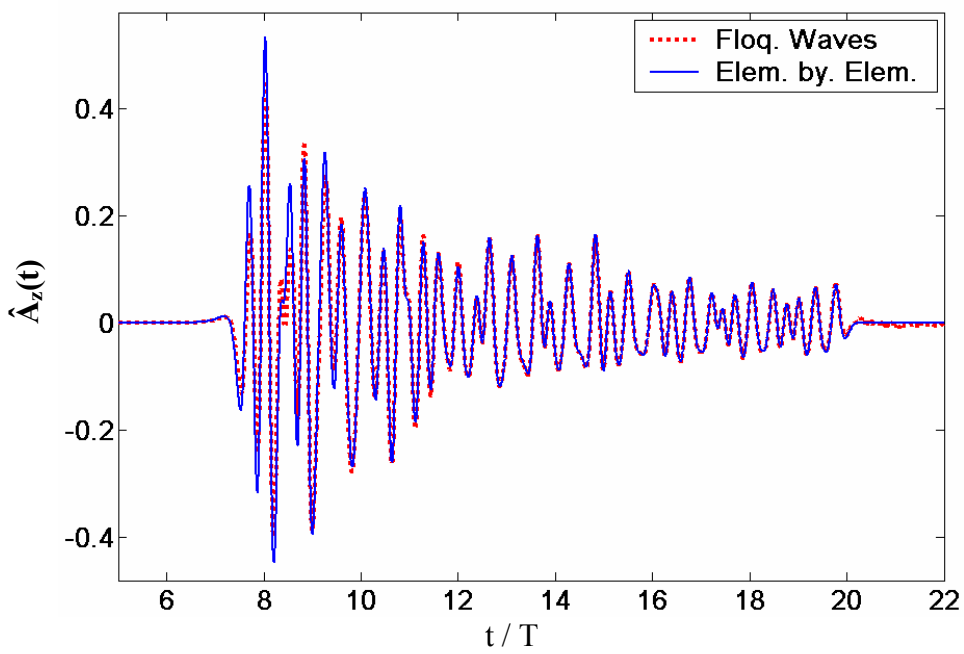
4.4 Sonlu Dikdörtgen Dipol Dizileri

Dikdörtgen dipol dizisine ait geometri Şekil 2.6'da gösterilmiştir. Bu diziye ait eleman-eleman toplama yöntemine dayanan referans çözüm daha önce (2.23) eşitliği ile bulunmuştu.

Yine yapay açıklık yaklaşımı kullanılarak dikdörtgen dizi, çizgisel dizilerin toplamı şeklinde düşünülebilir. +x yönünde d_x kadar kaymış çizgisel bir dizinin P(x, y, z) noktasında oluşturacağı alan, orijinal dizinin P′(x-d_x, y, z) noktasında oluşturacağı alan bulunarak hesaplanmış ve yine dipol dizilerini kaydırmak yerine gözlem noktaları zıt yönde kaydırılarak dikdörtgen dizilere ait çözümler sonlu çizgisel dizilere ait çözümler cinsinden aşağıdaki (4.54) eşitliğindeki gibi elde edilmiştir. Frekans domenindeki $e^{-jk\eta_x m d_x}$ fazıyla ağırlaştırma, zaman domeninde $\eta_x m d_x / c$ değerinde gecikmelere karşı düşmektedir.

$$\hat{A}_z^{\mathrm{SDD}}(x,y,z,t) = \sum_{m=0}^{N_x-1} \hat{A}_z^{SÇD}(x - m d_x, y, z,\ t - \eta_x\, m\, d_x / c) \tag{4.54}$$

Şekil 4.12'de ardışık dipoller arası mesafeler d_x=d_z=0.1m ve x ve z doğrultularındaki normalize faz farkları sırasıyla η_x=0.2, η_z =0.4 olan 4×21 elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin x=0m, y=0.4m, z=1m gözlem noktasında oluşturacağı $\hat{A}_z$(t) manyetik skaler potansiyelin t/T normalize zaman ile değişimi çizdirilmiştir. Bu diziye ait dipoller (4.42) eşitliği ile verilen normalize Rayleigh darbeleri ile uyarılmışlardır. Gözlem noktası dizinin tam ortasında yer almaktadır ve farklı dipollerden çıkan dalgalar gözlem noktasına eş zamanlı vararak girişime sebep olduklarından her bir dipolün ayrı ayrı etkisi gözlemlenememektedir. 4.2.2 alt başlığında anlatıldığı üzere düşük frekans bileşenleri içermeyen bir $\hat{G}(t)$ darbesi ile konvolüsyon, $\hat{A}_z^G(t)$'nin sadece erken gözlem zamanlarında değil daha sonra da geçerli olmasını sağlaması beklenmelidir. Gerçekten, Şekil 4.12'den görüldüğü üzere, yüksek frekans yaklaşıklığı kullanılarak bulunan Floquet dalgalar ile referans çözüm sadece erken gözlem zamanlarında değil sonrasında da tutarlıdır.



Şekil 4.12 : 4×21 elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin x=0m, y=0.4m, z=1m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$'nin normalize zaman ile değişimi (d_x=0.1m, d_z=0.1m, η_x=0.2, η_z=0.4)

Gözlem noktasının konumuna göre bazen dipollerden çıkan dalgalar gözlem noktasına farklı zamanda ulaşırken bazen de birbirlerine yakın zamanlarda ulaşıp girişime sebep olmaktadır. $N_x \times N_z$ elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin bütün dipollerinden çıkan dalgaların aynı anda vardıkları bir gözlem noktasını bulmak için dikdörtgen dipol dizisine ait (2.23) eşitliği ile verilen eleman-eleman toplama yöntemini inceleyelim. (2.23) eşitliğinde geçen R_{nm} değişkeninin (2.15b) eşitliği ile verilen ifadesi R_d parantezine alınarak aşağıdaki (4.55) eşitliğindeki gibi yazılabilir.

$$R_{nm} = R_d \sqrt{1 - \frac{2xmd_x}{R_d^2} - \frac{2znd_z}{R_d^2} + \frac{m^2 d_x^2}{R_d^2} + \frac{n^2 d_z^2}{R_d^2}} \tag{4.55}$$

$R_d >> N_x d_x$ ve $R_d >> N_z d_z$ için R_{nm} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R_{nm} = R_d \sqrt{1 - \frac{2xmd_x}{R_d^2} - \frac{2znd_z}{R_d^2}} \tag{4.56}$$

Yukarıdaki (4.56) eşitliğindeki $\sqrt{1-u}$ karekök fonksiyonu yerine u=0 civarındaki yüksek mertebeden terimleri içermeyen Taylor açılımı olan $1-u/2$ kullanılırsa

$$R_{nm} = R_d - \frac{xmd_x}{R_d} - \frac{znd_z}{R_d} \tag{4.57}$$

elde edilir. R_{nm}'nin yukarıda (4.57) eşitliği ile bulunan R_d' nin dizinin boyutlarına göre çok büyük olduğu zamanlarda geçerli olan yaklaşık ifadesi (2.23) eşitliğinde yerine koyulursa, $\hat{A}_z^G(t)$ manyetik skaler potansiyel aşağıdaki (4.58) eşitliğindeki yazılabilir.

$$\hat{A}_z^G(t) = \sum_{m=0}^{N_x-1}\sum_{n=0}^{N_z-1} \frac{\hat{G}\left(t - \frac{\eta_x\, md_x}{c} - \frac{\eta_z\, nd_z}{c} - \frac{R_d}{c} + \frac{xmd_x}{cR_d} + \frac{znd_z}{cR_d}\right)}{4\pi R_{nm}} \tag{4.58}$$

Yukarıdaki eşitlikten açıkça görülmektedir ki gözlem noktası ve normalize faz farkları arasında aşağıda (4.59) eşitlikleri ile verilen koşullar sağlandığı zaman,

$$\eta_x = \frac{x}{R_d} \tag{4.59a}$$

$$\eta_z = \frac{z}{R_d} \tag{4.59b}$$

$\hat{A}_z^G(t)$ manyetik skaler potansiyel aşağıdaki (4.60) eşitliğindeki yazılabilir ve dipollerin gözlem noktasına varış süreleri n ve m indislerinden bağımsız olup, her dipolden çıkan dalgalar gözlem noktasına aynı anda fakat gözlem noktasına uzaklıklarına göre farklı zayıflamalara uğrayıp ulaşırlar.

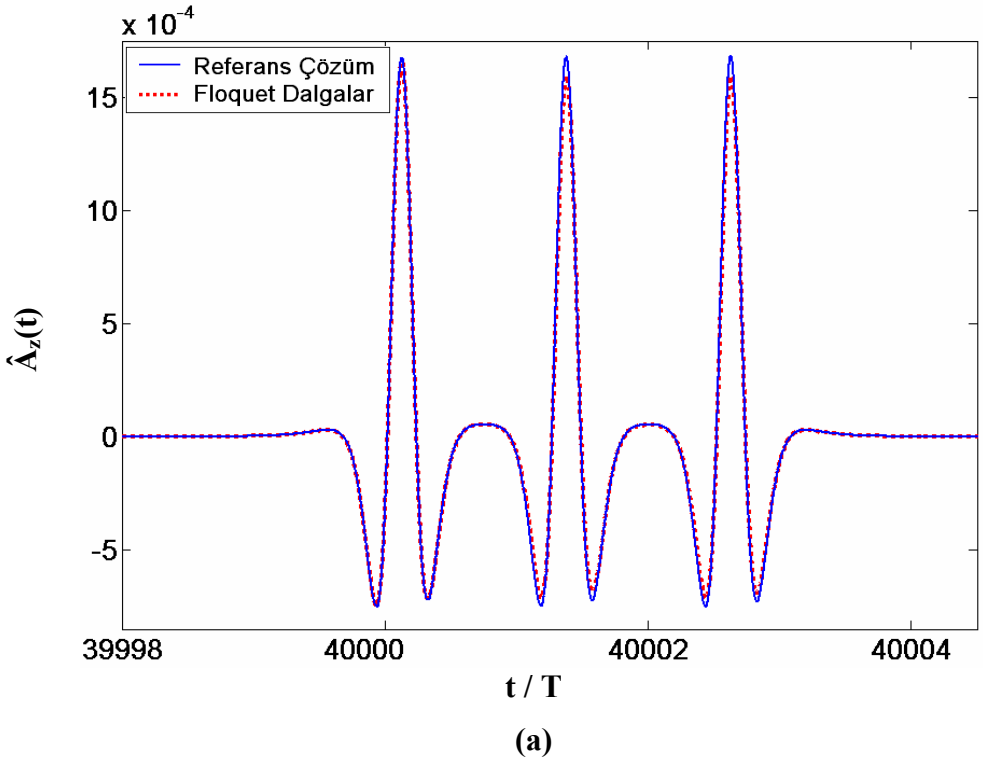
$$\hat{A}_z^G(t) = \sum_{m=0}^{N_x-1}\sum_{n=0}^{N_z-1} \frac{\hat{G}\left(t - \frac{R_d}{c}\right)}{4\pi R_{nm}} \tag{4.60}$$

Şekil 4.13'de ardışık dipoller arası mesafeler d_x=0.5m, d_z=0.1m ve x ve z doğrultularındaki normalize faz farkları sırasıyla η_x=0.5, η_z =0.25 olan 3×100 elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin farklı iki gözlem noktasında oluşturacağı $\hat{A}_z$(t) manyetik skaler potansiyelin t/T normalize zaman ile değişimi çizdirilmiştir. Bu diziye ait dipoller (4.42) eşitliği ile verilen normalize Rayleigh darbeleri ile uyarılmışlardır. Şekil 4.13a'daki gözlem noktası (4.59b) ile verilen $\eta_z = z/R_d$ koşulunu sağladığından dolayı z yönündeki 100 tane dipolün her birinden çıkan

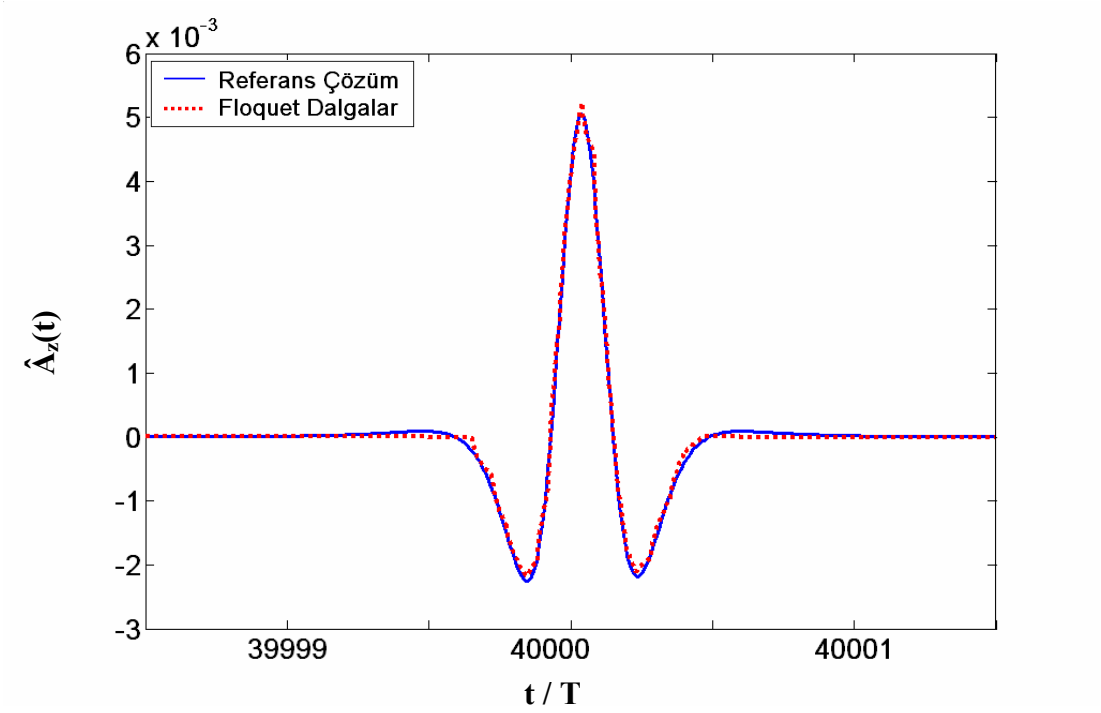
dalgalar gözlem noktasına aynı anda varmaktadırlar, ancak (4.59a) ile verilen $\eta_x = x/R_d$ koşulu sağlanmadığından dolayı x yönündeki 3 dipolün her birinden çıkan dalgalar gözlem noktasına şekilden de görüldüğü üzere farklı anlarda varacaklardır.

Şekil 4.13b'deki gözlem noktası hem (4.59a) hem de (4.59b) ile verilen $\eta_x = x/R_d$ ve $\eta_z = z/R_d$ koşullarını sağladığından dolayı 300 dipolün her birinden çıkan dalgalar gözlem noktasına aynı anda varmaktadırlar ve gözlem noktasında oluşan alan kaynak fonksiyonu ile aynı şekle sahip olmaktadır.

Şekil 4.13a ve Şekil 4.13b'deki her iki gözlem noktası için de R_d =4000m ve dizinin her iki yöndeki boyutları $N_x d_x$=3m ve $N_z d_z$=10m olduğundan dolayı $R_d >> N_x d_x$ ve $R_d >> N_z d_z$ koşulları sağlanmaktadır ve dolayısıyla (4.55) eşitliğinden (4.56) eşitliğine geçerken yapılan yaklaşıklık doğrudur. Ayrıca her iki şekilin çizdirilmesinde sadece q=0 indisli Floquet dalga kullanılmıştır. Şekil 4.13a çizdirilirken 0. Floquet dalganın Rayleigh darbesi olarak seçilen $\hat{G}(t)$ kaynak fonksiyonu ile konvolüsyonu sayısal olarak hesaplanmış, Şekil 4.13b çizdirilirken ise $\hat{G}(t)$ kaynak fonksiyonu Şekil 4.9'deki gibi 11 tane dikdörtgen darbe ile modellenmiş ve $\hat{G}(t) \otimes \hat{A}_0^{FW}(t)$ konvolüsyonu analitik olarak hesaplanmıştır.



(a)



(b)

Şekil 4.13 : 3×100 elemanlı dikdörtgen bir dipol dizisinin **a)** x=1000m, y=1000 $\sqrt{14}$ m, z=1000m **b)** x=2000m, y=1000 $\sqrt{11}$ m, z=1000m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z$(t)'nin normalize zaman ile değişimi (d_x=0.5m, d_z=0.1m, η_x=0.5, η_z =0.25)

4.5 Üç Boyutlu ve Rasgele Yerleştirilmiş Dipol Dizileri

Üç boyutlu dipol dizisine ait geometri Şekil 2.7'de gösterilmişti. Bu diziye ait eleman-eleman toplama yöntemine dayanan referans çözüm daha önce (2.24) eşitliği ile bulunmuştu.

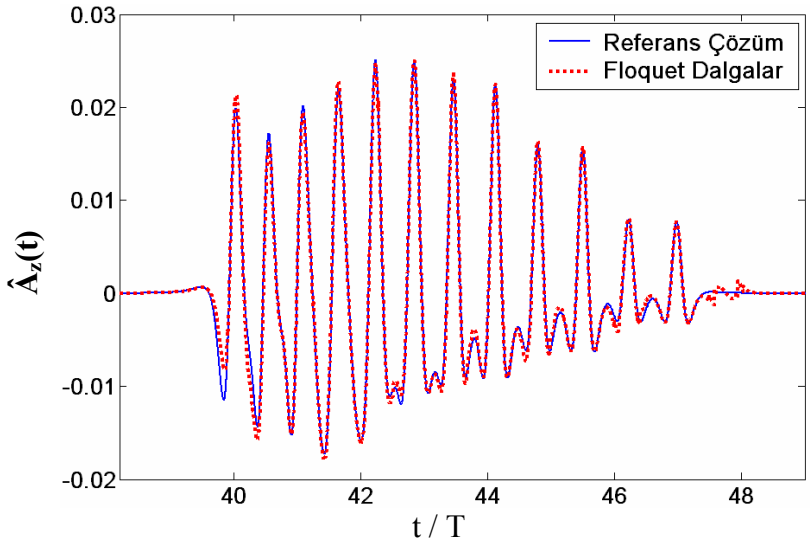
Yapay açıklık yaklaşımı ile üç boyutlu dizi, dikdörtgen dizilerin toplamı şeklinde düşünülebilir. +y yönünde d_y kadar kaymış dikdörtgen bir dizinin P(x, y, z) noktasında oluşturacağı alan, orijinal dikdörtgen dizinin P′(x, y-d_y, z) noktasında oluşturacağı alan bulunarak hesaplanabilir ve yine dipol dizilerini kaydırmak yerine gözlem noktaları zıt yönde kaydırılarak üç boyutlu dizilere ait çözümler dikdörtgen dizilere ait çözümler cinsinden aşağıdaki (4.61) eşitliğindeki gibi elde edilebilir.

$$\hat{A}_z^{3\mathrm{DD}}(x,y,z,t) = \sum_{p=0}^{N_y-1} \hat{A}_z^{\mathrm{SDD}}(x, y-pd_y, z,\ t-\eta_y\ p\,d_y/c) \tag{4.61}$$

3.5 alt başlığında frekans domeni için anlatıldığı gibi, zaman domeninde de rasgele yerleştirilmiş diziler, çizgisel dizilerin toplamı olarak modellenebilir. Her bir çizgisel dizi ise, biri diğerine göre +z doğrultusunda kaydırılmış ve zamanda belli bir gecikmeyle uyarılan iki yarı-sonsuz dizinin farkı alınarak hesaplanabilir. Frekans domenindeki faz fonksiyonları ile ağırlaştırma, zamanda gecikmelere denk düştüğünden Şekil 3.15c'deki trapezoidal diziye ait çözümler kapalı formda aşağıdaki (4.62) eşitliğindeki gibi ifade edilebilir.

$$\hat{A}_z^{\text{Trapz.}}(x,y,z)=\sum_{m=0}^{5}\hat{A}_z^{YSÇD}\left(x-md_x,y,z,t-\frac{\eta_x m\,d_x}{c}\right)- \\ \hat{A}_z^{YSÇD}\left(x-md_x,y,\ z-(12-2m)d_z,t-\frac{\eta_x m\,d_x}{c}-\frac{\eta_z\,(12-2m)\,d_z}{c}\right) \tag{4.62}$$

Aşağıda Şekil 4.14'de ardışık dipoller arası mesafeler $d_x=d_z=0.25$m ve normalize faz farkları $\eta_x=0$, $\eta_z=0.5$ olan Şekil 3.15c'deki trapezoidal dizinin, x=0m, y=10m, z=0m gözlem noktasında oluşturacağı $\hat{A}_z(t)$ manyetik skaler potansiyelin t/T normalize zaman ile değişimi çizdirilmiştir. Bu diziye ait dipoller (4.42) eşitliği ile verilen normalize Rayleigh darbeleri ile uyarılmışlardır. Floquet dalgalar ve yapay açıklık yaklaşıklığı kullanılarak bulunan çözüm, eleman-eleman toplama yöntemine dayanan referans çözüm ile birebir uyuşmaktadır.



Şekil 4.14 : Şekil 3.15c'deki trapezoidal dizinin x=0m, y=10m, z=0m gözlem noktasında oluşturacağı manyetik skaler potansiyel $\hat{A}_z(t)$'nin normalize zaman t/T ($T=d_z/c$) ile değişimi ($d_x=d_z=0.25$m, $\eta_x=0$, $\eta_z=0.5$, $N_z=12-2m$ (m=0,1,2,3,4,5), $N_x=6$)

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, elektronik tarama kabiliyetli anten dizilerinden, kırınım ızgaralarına, fotonik kristal fiberlerden metamateryallere kadar geniş bir kullanım alanı bulan periyodik dipol dizilerinin frekans ve zaman domeni karakteristikleri incelenmiştir. Mevcut literatürde dikdörtgen kesitli veya rasgele yerleştirilmiş düzlemsel ya da 3 boyutlu dipol dizilerinin özellikle zaman domeni karakteristiklerinin çıkartılmasında bir takım eksiklikler tespit edilmiştir. Doktora tezi kapsamında sürdürdüğümüz çalışmalarda bu eksikliklerin bir kısmını giderecek ve mevcut literatüre katkı sağlayacak yeni yöntemler geliştirilmiş ve bazı özgün sonuçlara ulaşılmıştır.

Bu çalışma kapsamında yer alan özgün katkılar 4 ana grupta toplanabilir:

İlk katkı klasik eleman-eleman toplama yönteminin sonsuz veya çok elemanlı dizilere uygulanmasını kolaylaştırıcı bir niteliktedir. Yarı-sonsuz çizgisel dipol dizisine ait referans çözümler eleman-eleman toplama yöntemi ile bulunurken sonlu ama fazla sayıda dipolün etkisi hesaplanarak, yarı-sonsuz dizi modellenmeye çalışılır. Ardışık dipoller arası mesafe ve faz farkının bazı özel değerlerinde, ne kadar çok sayıda alınırsa alınsın sonlu sayıda dipol ile yarı-sonsuz dizinin modellenemeyeceği gösterilmiştir. Ayrıca dipoller arası mesafe ve faz farkının toplama işlemlerinin ıraksamasına sebep olan bu tekil değerlere yakın oldukları zaman serilerin çok yavaş yakınsayacağı gösterilmiş ve alternatif olarak hızlı yakınsayan bir yöntem geliştirilmiştir.

İkinci özgün katkı, biri diğerine göre kaydırılmış 2 yarı-sonsuz çizgisel periyodik dizinin farkını alarak sonlu çizgisel dizilerin modellenmesinde *yapay açıklık yaklaşımı* adı verilen bir yöntemin geliştirilmesidir. Önerilen *yapay açıklık yaklaşımı,* L_z kadar kaydırılmış dizinin bir P(x,y,z) gözlem noktasında oluşturacağı alanın, diziyi kaydırmak yerine gözlem noktasını zıt yönde kaydırarak, orijinal kaydırılmamış dizinin bir $P'(x,y,z- L_z)$ sanal gözlem noktasında oluşturacağı alanın

bulunarak hesaplanmasına dayanmaktadır. Bu sayede hem yeni açı ve mesafe tanımlarına gerek kalmamakta hem de işlem süresinden tasarruf edilmektedir.

Birbirine paralel çizgisel dipol dizilerinin süperpozisyonu alınarak elde edilebilen her türlü düzlemsel ve 3 boyutlu dipol dizisinin modellenmesinde de *yapay açıklık yaklaşımı* kullanılmış ve çizgisel dizileri kaydırmak yerine gözlem noktası zıt yönde kaydırılmıştır. Bu sayede bu dizilerin hem frekans hem de literatürde pek yer almamış zaman domeni karakteristikleri incelenmiştir.

Son olarak kısa süreli (geniş-bantlı) kaynak fonksiyonları ile uyarılan dizilerde sayısal olarak hesaplanması gereken konvolüsyon işlemlerine seçenek olarak, kaynak fonksiyonları birçok dikdörtgen darbenin toplamı şeklinde ifade edilip konvolüsyonlar analitik olarak hesaplanarak kapalı formda ifadeler elde edilmiş ve işlem süresinde bir kaç yüz kat tasarruf edilmiştir.

Ayrıca isotropik ışıma yapan noktasal kaynaklardan oluşan düzlemsel anten dizilerinin ışıma diyagramını 3 boyutlu ya da herhangi bir 2 boyutlu kesitinde, arzu edilen herhangi bir frekans değerinde çizdirmeye yarayan bir grafik kullanıcı arayüzü tasarlanmıştır.

Çalışmalar kapsamında geliştirilen yeni yaklaşımlar ve elde edilen özgün sonuçlar iki ayrı uluslararası konferansta bildiri olarak sunulmuş [22-23], IEEE Antennas and Propagation Magazine dergisinde bir makale yayınlanmış [19], IEEE Transactions on Antennas and Propagation dergisinde bir makale yayınlanmak üzere kabul edilmiş [20] ve International Journal of Numerical Modeling dergisine bir makale sunulmuştur [21].

Bu tezin devamı niteliğinde iki farklı alanda yapılabilecek çalışmalardan ilki elde edilen sonuçların dipoller yerine bazı gerçekçi tipten antenlerden oluşan dizilere genelleştirilmesi olacaktır. Yapılabilecek diğer bir inceleme de dikdörtgen kesitli periyodik dipol dizilerinin yapay açıklık yaklaşımı kullanmadan, dalga sayısı spektral integrallerinin çift toplamı üzerinden ifade edilebilen alanların asimptotik olarak çözülmesiyle, dizi tarafından uyarılan çift indisli Floquet dalgaların ve dizinin kenarlarından ve köşelerinden kırınan dalgaların hem frekans hem de zaman domeninde ayrı ayrı hesaplanmasını sağlayacak bir formülasyonun geliştirilmesidir.

KAYNAKLAR

[1] **Ishimaru, A., Coe, R.J., Miller, G.E. ve Geren, W.P.,** 1985. Finite periodic structure approach to large scanning array problems, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **33**, 1213-1220.

[2] **Skrivervik, A.K. ve Mosig, J.R.,** 1992. Finite-phased array of microstrip patch antennas: The infinite array approach, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **40**, 579-582.

[3] **Carin, L. ve Felsen, L.B.,** 1993. Time-harmonic and transient scattering by periodic flat strip arrays: Hybrid (Ray)–(Floquet Mode)-(MoM) algorithm, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, **41**, 412-421.

[4] **Çivi, Ö.A., Pathak, P.H. ve Chou, H.-T.,** 1999. On the Poisson sum formula for the analysis of wave radiation and scattering from large finite arrays, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, **47**, 958-959.

[5] **Capolino, F., Albani, M., Maci, S. ve Felsen, L.B.,** 2000. Frequency domain Green's function for a planar periodic semi-infinite phased array. Part I: Truncated Floquet wave formulation, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **48**, 67-74.

[6] **Capolino, F., Albani, M., Maci, S. ve Felsen, L.B.,** 2000. Frequency domain Green's function for a planar periodic semi-infinite phased array. Part II: Diffracted wave phenomenology, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **48**, 75-85.

[7] **Felsen, L.B. ve Capolino, F.,** 2000. Time domain Green's function for an infinite sequentially excited periodic line array of dipoles, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **48**, 921-931.

[8] **Capolino, F. ve Felsen, L.B.,** 2002. Frequency- and time-domain Green's functions for a phased semi-infinite periodic line array of dipoles, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **50**, 31-41.

[9] **Capolino, F., Maci, S. ve Felsen, L.B.,** 2000. Asymptotic high-frequency Green's function for a planar phased sectoral array of dipoles, *Radio Science*, **35**, 579-593.

[10] **Maci, S., Capolino, F. ve Felsen, L.B.,** 2001. Three-dimensional Green's function for planar rectangular phased dipole arrays, *Wave Motion*, **34**, 263-279.

[11] **Capolino, F., Mariottini F., Maci, S. ve Felsen, L.B.,** 2002. Floquet wave diffraction theory for tapered planar array Green's function, *Elektrik, Turkish Journal of Electrical Eng. & Computer Sci.,* **10**, 273-289.

[12] **Mariottini, F., Capolino, F., Maci, S. ve Felsen, L.B.,** 2005. Asymptotic high-frequency Green's function for a large rectangular planar periodic phased array of dipoles with weakly tapered excitation in two dimensions, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, **53**, 608-620.

[13] **Capolino, F. ve Felsen, L.B.,** 2003. Time domain Green's function for an infinite sequentially excited periodic planar array of dipoles, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, **51**, 160-170.

[14] **Capolino, F. ve Felsen, L.B.,** 2003. Short-pulse radiation by a sequentially excited semi-infinite periodic planar array of dipoles, *Radio Science*, **38**, 24, 1-12.

[15] **Martini, E., Toccafondi, A., Maci, S. ve Tiberio, R.,** 2003. Floquet wave-based diffraction approach for irregularly contoured planar phased arrays, *IEEE Antennas Wireless Propagat. Lett.*, **2**, 246-249.

[16] **Çivi, Ö.A., Pathak, P.H., Chou, H.-T. ve Nepa, P.,** 2000. A hybrid UTD-MoM for efficient analysis of electromagnetic radiation/scattering from large finite planar arrays, *Radio Science*, **35**, 607-620.

[17] **Kouyoumjian, R.G. ve Pathak, P.H.,** 1974. A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface, *Proc. IEEE*, **62**, 1448-1461.

[18] **Cicchetti, R., Faraone, A. ve Balzano, Q.,** 2003. A uniform asymptotic evaluation of the field radiated from collinear array antennas, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, **51**, 89-102.

[19] **Sevgi, L. ve Uluışık, Ç.,** 2005. A Matlab-based visualization package for planar arrays of isotropic radiators, *IEEE Antennas and Propag. Magazine*, **47**, 156-163.

[20] **Uluışık, Ç., Topuz, E. ve Sevgi, L.,** 2008. Some characteristics of radiation from linearly phased / sequentially excited periodic, rectangular arrays of dipoles, *IEEE Trans. Antennas and Propag.*, **56**, 1794-1798.

[21] **Uluışık, Ç., Topuz, E. ve Sevgi, L.,** 2007. Time-domain investigations of periodic rectangular dipole arrays, *International Journal of Numerical Modeling, Focussed Issue on the Seventh International Workshop on Computational Electromagnetics in the Time-Domain (CEM-TD)*, (Ocak 2008'de sunuldu)

[22] **Uluışık, Ç., Topuz, E. ve Sevgi, L.,** 2007. Time-domain investigations of periodic rectangular dipole arrays, *Workshop on Computational Electromagnetics in Time-Domain (CEM-TD 2007)*, Perugia, İtalya, 15-17 Ekim.

[23] **Uluışık, Ç., Topuz, E. ve Sevgi, L.,** 2007. Frequency-domain investigations of periodic dipole arrays, *5th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO 2007)*, Bursa, Türkiye, 5-9 Aralık, s. 270-273.

[24] **Felsen, L.B. ve Marcuvitz, N.,** 1973. Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[25] **Abramowitz, M. ve Stegun, I.,** 1965. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications Inc., New York.

[26] **Balanis, C.A.,** 1997. Antenna Theory: Analysis and Design, John Wiley and Sons Inc., New York.

[27] **Clemmow, P.C.,** 1996. The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields, IEEE Press, Piscataway, New Jersey.

EKLER

EK A (3.29) İntegralinin Asimptotik Hesabı ve (3.37) Bağıntısının Elde Edilmesi

Bu ekte, A_q^d ile gösterilen uç kırınımı katkısı için verilen (3.37) bağıntısı, (3.29)'daki integralin EDİ kullanılarak asimptotik olarak değerlendirilmesi ile elde edilecektir. Aşağıdaki gibi bir $Q(\alpha)$ regüler fonksiyonu tanımlanırsa,

$$Q(\alpha)=\sin\left(\frac{\beta_q-\alpha}{2}\right)\frac{\sqrt{\sin(\alpha)}}{\cos(\alpha)-\cos(\beta_q)} \tag{A.1}$$

A_q^d , $Q(\alpha)$ fonksiyonu cinsinden aşağıda verildiği gibi yazılabilir:

$$A_q^d(\omega)=\frac{e^{j\pi/4}}{4\pi d_z\sqrt{2\pi k\rho}}\int_{EDİ}Q(\alpha)\frac{e^{-jkR_d\cos(\alpha-\theta)}}{\sin\left(\frac{\beta_q-\alpha}{2}\right)}d\alpha \tag{A.2}$$

Yukarıdaki eşitlikte $Q(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha=\theta$ semer noktasındaki katkısı $Q(\theta)$ ile hesaplanıp, integralin dışına alınırsa,

$$A_q^d(\omega)=\frac{e^{j\pi/4}}{4\pi d\sqrt{2\pi k\rho}}\sin\left(\frac{\beta_q-\theta}{2}\right)\frac{\sqrt{\sin(\theta)}}{\cos(\theta)-\cos(\beta_q)}\int_{EDİ}\frac{e^{-jkR_d\cos(\alpha-\theta)}}{\sin\left(\frac{\beta_q-\alpha}{2}\right)}d\alpha \tag{A.3}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki integral kapalı formda aşağıdaki şekilde hesaplanabilir [27].

$$\int_{EDİ}\frac{e^{-jkR_d\cos(\alpha-\theta)}}{\sin\left(\frac{\beta_q-\alpha}{2}\right)}d\alpha=\frac{\sqrt{2\pi j}}{\sqrt{kR_d}}\frac{e^{-jkR_d}}{\sin\left(\frac{\beta_q-\theta}{2}\right)}F\left(\delta_q^2\right) \tag{A.4}$$

Burada F(.) fonksiyonu [17],

$$F(x) = 2j\sqrt{x}e^{jx}\int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-jt^2}dt \tag{A.5}$$

olarak ve argümanı δ_q

$$\delta_q = \sqrt{2kR_d}\sin\left(\frac{\beta_q - \theta}{2}\right) \tag{A.6}$$

olarak tanımlıdır. Buna göre $F(\delta_q^2)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$F(\delta_q^2) = \pm 2j\delta_q e^{j\delta_q^2}\int_{\pm\delta_q}^{\infty} e^{-jt^2}dt \tag{A.7}$$

Bu $F(\delta_q^2)$ fonksiyonunu aşağıda (A.8) eşitliği ile tanımlanan tümleyici hata fonksiyonu *erfc* cinsinden yazılabilir. [25], (s. 297).

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty} e^{-\tau^2}d\tau \tag{A.8}$$

Bu amaçla aşağıdaki gösterildiği şekilde $\tau^2 = jt^2$ değişken dönüşümünü yapılırsa,

$$t = \pm e^{-j\pi/4}\tau \tag{A.9a}$$

$$dt = \frac{\tau\, d\tau}{jt} = \pm e^{-j\pi/4}d\tau \tag{A.9b}$$

$F(\delta_q^2)$ fonksiyonu *erfc* fonksiyonu cinsinden aşağıda gösterildiği şekilde yazılabilir.

$$F(\delta_q^2) = 2j\delta_q e^{j\delta_q^2}\int_{\pm e^{j\pi/4}\delta_q}^{\infty} \pm e^{-j\pi/4}e^{-\tau^2}d\tau =$$

$$F(\delta_q^2) = \pm\sqrt{\pi}\delta_q e^{j\delta_q^2}\, e^{j\pi/4}erfc(\pm e^{j\pi/4}\delta_q) \tag{A.10}$$

Burada "±" işaretleri $\mathrm{Re}(e^{j\pi/4}\delta_q) \gtrless 0$ koşuluna uygun şekilde kullanılırlar. (A.3) eşitliğindeki integralin yerine (A.4) eşitliği ile verilen kapalı ifadesi yazılırsa, ve bu ifade biraz sadeleştirilirse

$$A_q^d(\omega) = \frac{\sqrt{\sin(\theta)}}{j4\pi d_z k\sqrt{\rho R_d}} \frac{e^{-jkR_d} F\left(\delta_q^2\right)}{\left[\cos(\beta_q) - \cos(\theta)\right]} \tag{A.11}$$

elde edilir. Buradaki $\sin(\theta) = \rho / R_d$ olduğu dikkate alınarak, (3.37) ile verilmiş olan kırınan dalga katkıları elde edilir:

$$A_q^d(\omega) = \frac{e^{-jkR_d}}{j4\pi d_z kR_d} \frac{F\left(\delta_q^2\right)}{\left[\cos(\beta_q) - \cos(\theta)\right]} \tag{A.12}$$

Bu ekte ayrıca, kırınan dalga katkılarının Floquet dalgaların gölge bölgesi geçişlerindeki süreksizliğini ortadan kaldırdığı gösterilecektir.

(3.34) eşitliği ile verilen $A_q^T(\omega)$ ifadesinde Floquet dalgalar birim basamak fonksiyonu ile kesildiğinden, $\theta = \beta_q^{SB}$ gölge bölge sınır açısında bir süreksizlik göstermekteydiler. Şimdi kırınan dalgaların $\theta = \beta_q^{SB}$ civarında nasıl davrandığını inceleyelim. Yayılan Floquet dalgalar için (3.33a) eşitliği uyarınca $\beta_q^{SB} = \beta_q$ olacaktır ve $\theta \to \beta_q$ için (A.6) eşitliği ile verilen δ_q değeri 0'a yaklaşacak ancak δ_q^2 ifadesi çok daha hızlı bir şekilde 0'a yaklaşacağından $\theta = \beta_q$ civarında $\delta_q^2 \approx 0$ alınabilir. (A.10) eşitliği ile verilen F fonksiyonu gölge bölge sınır açısı civarında $F(\delta_q^2) \approx \sqrt{j\pi}\left|\delta_q\right|$ değerini alacaktır. F fonksiyonunun bu değeri (A.12) eşitliğinde yerine konursa,

$$A_q^d(\omega) = \frac{e^{-jkR_d}\sqrt{j\pi}}{j4\pi d_z kR_d} \frac{\left|\delta_q\right|}{\left[\cos(\beta_q) - \cos(\theta)\right]}\Bigg|_{\theta=\beta_q} \tag{A.13}$$

elde edilir. Bu bağıntıdaki δ_q ifadesinin yerine (A.6) eşitliği ile verilen değeri yazılırsa ve $\theta \to \beta_q$ için ikinci terimin limit değeri L'Hopital kuralı kullanılarak hesaplanırsa,

$$\lim_{\theta\to\beta_q} \frac{|\delta_q|}{\cos(\beta_q)-\cos(\theta)} = \lim_{\theta\to\beta_q} \frac{\left|\sqrt{2kR_d}\sin\left(\frac{\beta_q-\theta}{2}\right)\right|}{\cos(\beta_q)-\cos(\theta)} = \frac{\sqrt{kR_d/2}}{\sin(\beta_q)} sign(\theta-\beta_q) \tag{A.14}$$

elde edilir. $\theta \to \beta_q$ için bulunan bu limit değeri (A.13) eşitliğinde kullanılırsa,

$$A_q^d(\omega) = \frac{e^{-jkR_d}e^{-j\pi/4}}{4d\sqrt{2\pi kR_d}} \frac{1}{\sin(\beta_q)} sign(\theta-\beta_q) \qquad \theta \approx \beta_q \tag{A.15}$$

elde edilir. (3.12) ve (3.15) eşitlikleri birlikte kullanılarak k_{zq} ve $k_{\rho q}$ Floquet dalga sayıları, β_q açısı cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k_{zq} = k\cos(\beta_q) \tag{A.16a}$$

$$k_{\rho q} = k\sin(\beta_q) \tag{A.16b}$$

elde edilir ve bu eşitlikler (3.27) eşitlikleri eşitlikleri ile birlikte kullanılarak,

$$k_{\rho q}\rho + k_{zq}z = kR_d\cos(\beta_q-\theta) \tag{A.17}$$

yazılabilir. Dolayısıyla da $\theta = \beta_q$ için

$$k_{\rho q}\rho + k_{zq}z = kR_d \qquad \theta = \beta_q \tag{A.18}$$

olacaktır. Bu ifade, A_q^d'nun (A.15) bağıntısında yerine koyulursa ve $\sin(\beta_q) = k_{\rho q}/k$ yazılırsa,

$$A_q^d(\omega) = \frac{e^{-j(k_{\rho q}\rho + k_{zq}z + \pi/4)}}{4d_z\sqrt{2\pi R_d k_{\rho q}^2/k}} sign(\theta-\beta_q) \tag{A.19}$$

elde edilir. $\sin(\beta_q) = k_{\rho q}/k$ ve $\sin(\theta) = \rho/R_d$ olduğundan $\theta \approx \beta_q$ için

$$R_d / k = \rho / k_{\rho q} \qquad \theta \approx \beta_q \tag{A.20}$$

yazılabilir. (A.19) eşitliğindeki karekökün içerisindeki R_d / k teriminin yerine yukarıda verilen ifadesi yazılacak olunursa,

$$A_q^d(\omega) = \frac{1}{2} \frac{e^{-j(k_{\rho q}\rho + k_{zq} z + \pi/4)}}{2 d_z \sqrt{2\pi \rho k_{\rho q}}} sign(\theta - \beta_q) \tag{A.21}$$

elde edilir. (3.36) eşitliği ile verilen A_q^{FW} ifadesi hatırlanacak olunursa, kırınan dalgalara ait A_q^d ifadesi $\theta = \beta_q$ civarında, Floquet dalgalar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$A_q^d = \frac{1}{2} A_q^{FW} sign(\theta - \beta_q) \qquad \theta \approx \beta_q \tag{A.22}$$

Açıkça görülmektedir ki, $\theta = \beta_q$ civarında A_q^{FW} Floquet dalgalarının sahip olduğu süreksizlik, A_q^d kırınan dalgaların zıt işaretli bir süreksizliği ile ortadan kalkmaktadır.

EK B1 Yüksek Frekans Yaklaşıklığı Altında $\hat{A}_q^{FW}(t)$ Floquet Dalgası için (4.26) Bağıntısının Elde Edilmesi

Bu ekte yüksek frekans yaklaşıklığı altında elde edilen (4.26) bağıntısının çıkarılışı ve ilgili asimptotik büyüklüklerin tanımları yer almaktadır.

Sonsuz uzunluklu çizgisel dipol dizileri tarafından uyarılan, frekans domeni Floquet dalgalar için yüksek frekanslarda geçerli asimptotik çözüm $A_q^{FW}(\omega)$ daha önce (3.14) eşitliği ile bulunmuştu. Bu $A_q^{FW}(\omega)$ ifadesinin (2.18b) eşitliğinde tanımlandığı şekilde ters Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde alınarak,

$$\hat{A}_q^{FW}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\pi/4}}{4\pi d_z \sqrt{2\pi k_{\rho q}\rho}}\; e^{-j(k_{\rho q}\rho + k_{zq}z - \omega t)}\; d\omega \tag{B.1}$$

zaman domeninde q. Floquet dalgaya denk düşen $\hat{A}_q^{FW}(t)$ ifadesi için yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. Yukarıdaki eşitlikte geçen faz terimi $\hat{\psi}(\omega)$ aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{\psi}(\omega) = k_{\rho q}\rho + k_{zq}z - \omega t \tag{B.2}$$

Yukarıdaki eşitlikte geçen $k_{\rho q}$ ifadesinin yerine (3.12) eşitliği ile bulunan değeri, k_{zq} ifadesinin yerine (3.4b) eşitliği ile bulunan değeri ve k ifadesinin yerine $k = \omega/c$ yazılırsa, faz terimi $\hat{\psi}(\omega)$, ω cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\eta_z + \alpha_q\right)^2}\;\rho + \left(\frac{\omega}{c}\eta_z + \alpha_q\right)z - \omega t \tag{B.3}$$

Semer noktaları, faz teriminin türevi 0'a eşitlenerek bulunur. O halde öncelikle $\hat{\psi}(\omega)$ faz teriminin ω'ya göre türevini alalım:

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \omega} = \frac{\rho}{c} \frac{\frac{\omega}{c} - \left(\frac{\omega}{c} \eta_z + \alpha_q \right) \eta_z}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{c} \eta_z + \alpha_q \right)^2}} + \frac{\eta_z}{c} z - t \tag{B.4}$$

$\hat{\psi}(\omega)$ faz teriminin ω'ya göre türevi, $k_{\rho q}$, k_{zq} ve k cinsinden aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \omega} = \frac{(k - k_{zq} \eta_z)}{k_{\rho q}} \frac{\rho}{c} + \frac{\eta_z}{c} z - t \tag{B.5}$$

Faz teriminin türevi 0'a eşitlenir, (4.5) eşitliği uyarınca $\eta_z z / c - t$ ifadesi yerine $-\tau$ ifadesi kullanılır ve bu ifade biraz düzenlenecek olunursa

$$\frac{\rho}{c} \left[\frac{\omega}{c} (1 - \eta_z^2) - \alpha_q \eta_z \right] = \tau \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \eta_z^2) - \frac{2\omega \eta_z \alpha_q}{c} - \alpha_q^2} \tag{B.6}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı da c ile çarpılıp, her iki tarafının karesi alındıktan sonra bu eşitlik biraz düzenlenecek olunursa ve $(1 - \eta_z^2)\rho^2 / c^2$ ifadesinin daha önce (4.9b) eşitliği ile tanımlanan τ_0 ifadesinin karesi olduğu dikkate alınarak yukarıdaki eşitlik aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\omega^2 (1 - \eta_z^2)(\tau^2 - \tau_0^2) - 2\alpha_q \eta_z c (\tau^2 - \tau_0^2)\omega - \alpha_q^2 c^2 \left(\tau^2 - \tau_0^2 + \frac{\rho^2}{c^2} \right) = 0 \tag{B.7}$$

Yukarıdaki eşitliğin kökleri olan $\omega_{q,i}(t)$ değerleri semer noktalarına karşı düşmektedir ve aşağıdaki şekilde hesaplanabilirler.

$$\omega_{q,\,i}(t) = \frac{\alpha_q \eta_z c + (-1)^i \sqrt{\alpha_q^2 \eta_z^2 c^2 + (1 - \eta_z^2)\alpha_q^2 c^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{(\tau^2 - \tau_0^2) c^2} \right)}}{(1 - \eta_z^2)} \qquad i=1,2 \tag{B.8}$$

Bu ifade $\alpha_q c / (1 - \eta_z^2)$ parantezine alınırsa ve biraz düzenlenirse $\omega_{q,i}(t)$ anlık frekansları aşağıdaki eşitlikteki gibi bulunur.

$$\omega_{q,\,i}(t) = \frac{\alpha_q c}{(1-\eta_z^2)}\left[\eta_z + \frac{(-1)^i \tau}{\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}}\right] \qquad i=1,2 \tag{B.9}$$

$\omega_{q,\,i}(t)$ anlık frekansları, $\tau > \tau_0$ iken reel çıkarlar ve q mod index'i arttıkça artar ancak zamanla azılırlar ve t→∞ için dolayısıyla da τ→∞ için aşağıda verilen kesim frekansına yaklaşırlar.

$$\omega_{q,\,i}^{kesim} = \lim_{\tau\to\infty} \omega_{q,\,i}(t) = \frac{\alpha_q c}{(1-\eta_z^2)}\left[\eta_z + (-1)^i\right] = \frac{\alpha_q c}{(-1)^i - \eta_z} \qquad i = 1,\, 2 \tag{B.10}$$

$\omega_{q,\,i}(t)$ anlık semer noktası frekanslarına karşı düşen, anlık dalga sayıları $k_{\rho q,i}(t)$, $k_{q,i}(t)$, ve $k_{zq,i}(t)$ ifadeleri (3.12) ve (3.4b) nolu eşitlikler uyarınca aşağıdaki gibi olacaktır.

$$k_{q,i}(t) = \frac{\omega_{q,i}(t)}{c} \tag{B.11a}$$

$$k_{zq,i}(t) = \eta_z \frac{\omega_{q,i}(t)}{c} + \alpha_q \tag{B.11b}$$

$$k_{\rho q,i}(t) = \sqrt{k_{q,i}^2(t) - k_{zq,i}^2(t)} \tag{B.11c}$$

Yukarıdaki $k_{\rho q,i}(t)$ ifadesinde geçen $k_{q,i}(t)$, ve $k_{zq,i}(t)$ ifadelerinin yerine sırasıyla (B.11a) ve (B.11b) eşitlikleriyle verilen ifadeleri yerleştirilirse,

$$k_{\rho q,i}(t) = \sqrt{\frac{\omega_{q,i}^2(t)}{c^2}(1-\eta_z^2) - 2\alpha_q\eta_z \frac{\omega_{q,i}(t)}{c} - \alpha_q^2} \tag{B.12}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte geçen $\omega_{q,i}(t)$ yerine (B.9) eşitliği ile bulunan değeri yerleştirilirse,

$$k_{\rho q,i}(t) = \frac{(-1)^i \alpha_q \rho}{c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}} \tag{B.13}$$

elde edilir. Daha önce (4.22) eşitliği ile tanımlanan $\cos(\beta_i(t))$ aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$$\cos\left(\beta_{q,i}(t)\right)=\frac{k_{zq,i}(t)}{k_{q,i}(t)} \tag{B.14}$$

Bu eşitlikte geçen $k_{q,i}(t)$, ve $k_{zq,i}(t)$ ifadelerinin yerine sırasıyla (B.11a) ve (B.11b) eşitlikleriyle verilen ifadeleri yerleştirilirse ve bu eşitliklerde yer alan $\omega_{q,\,i}(t)$ ifadesinin yerine (B.9) eşitliği ile verilen değeri yerleştirilirse, $\beta_{q,i}(t)$ açılarının aşağıdaki gibi, q Floquet indeksinden bağımsız olarak ifade edilebildiği dolayısıyla da $\beta_{q,i}(t)=\beta_i(t)$ olduğu görülür.

$$\cos\left(\beta_{q,i}(t)\right)=\frac{\eta_z+(-1)^i\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}}{1+(-1)^i\eta_z\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}} \tag{B.15}$$

Yukarıdaki eşitlik, paydanın eşleniği ile genişletilecek olunursa daha önce (4.25) eşitliği ile bulunan direk zaman domeninde tanımlı ifadenin aynısı elde edilir.

Durağan Faz Yöntemi'nde, bütün katkı integrandın faz teriminin türevinin 0'a eşitlenmesiyle bulunan semer noktalarından geliyordu ve bu katkı aşağıda gösterildiği gibi hesaplanabiliyordu.

$$\int f(\omega)e^{-j\psi(\omega)}d\omega=\sqrt{\frac{2\pi}{j\psi''(\omega_{q,i})}}f(\omega_{q,i})e^{-j\psi(\omega_{q,i})} \tag{B.16}$$

$\hat{A}_q^{FW}(t)$ zaman domeni Floquet dalgası, (B.1) eşitliğindeki integralin yüksek frekans yaklaşıklığı altında semer noktalarından gelen katkılar cinsinden hesaplanmasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\hat{A}_q^{FW}(t)=\sum_{i=1}^{2}\hat{A}_{q,i}^{FW}(t)=\sum_{i=1}^{2}\sqrt{\frac{2\pi}{j\left(\left.\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_{q,i}}\right)}}\frac{e^{-j\pi/4}e^{-j\hat{\psi}(\omega_{q,i})}U(\tau-\tau_0)}{4\pi\,d_z\sqrt{2\pi\,k_{\rho q,i}\rho}} \tag{B.17}$$

$\hat{\psi}(\omega)$ faz teriminin ve ikinci türevinin $\omega=\omega_{q,i}$ iken aldığı değerin hesaplanması gerekmektedir. Faz teriminin $\omega=\omega_{q,i}$ iken aldığı değer aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{\psi}(\omega_{q,i}) = k_{zq,i} z + k_{\rho q,i} \rho - \omega_{q,i} t \tag{B.18}$$

Yukarıdaki eşitlikte geçen, $k_{zq,i}(t)$ ve $k_{\rho q,i}(t)$ ifadelerinin yerine sırasıyla (B.11b) ve (B.13) eşitlikleriyle bulunan ifadeleri, $(\eta_z z/c - t)$ ifadesi yerine (4.5) eşitliği uyarınca $-\tau$ ve $\omega_{q,i}(t)$ ifadesinin yerine (B.9) eşitliği ile verilen değeri yerleştirilirse $(1-\eta_z^2)\rho^2/c^2$ ifadesinin daha önce (4.9b) eşitliği ile tanımlanan τ_0 ifadesinin karesi olduğu dikkate alınarak,

$$\hat{\psi}(\omega_{q,i}) = -\frac{\alpha_q c}{1-\eta_z^2}\left(\tau\eta_z + (-1)^i\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}\right) + \alpha_q z \tag{B.19}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik α_q parantezine alınırsa, parantezin içindeki terimin daha önce (4.10) eşitliği ile bulunan z_i' değişkenine eşit olduğu görülür ve $\hat{\psi}(\omega_{q,i})$ ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\hat{\psi}(\omega_{q,i}) = \alpha_q z_i' \tag{B.20}$$

$\hat{\psi}(\omega)$ faz teriminin ikinci türevi $\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}$, (3.12) ve (3.4b) nolu eşitlikler uyarınca $k_{\rho q}^2 = \omega^2(1-\eta_z^2)/c^2 - 2\eta_z\alpha_q\omega/c - \alpha_q^2$ olduğu hesaba katılarak, aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2} = \rho\frac{(1-\eta_z^2)k_{\rho q}^2 - \frac{\omega^2(1-\eta_z^2)^2}{c^2} + 2\frac{\omega\eta_z\alpha_q(1-\eta_z^2)}{c} - \eta_z^2\alpha_q^2}{c^2 k_{\rho q}^3} \tag{B.21}$$

$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}$ yukarıdaki eşitlik ile bulunduğuna göre $\omega = \omega_{q,i}$ yerleştirilirse,

$$\left.\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_{q,i}} = \frac{\rho}{c^2 k_{\rho q,i}^3}\left[(1-\eta_z^2)k_{\rho q,i}^2 - \frac{\omega_{q,i}^2(1-\eta_z^2)^2}{c^2} + 2\frac{\omega_{q,i}\eta_z\alpha_q(1-\eta_z^2)}{c} - \eta_z^2\alpha_q^2\right] \tag{B.22}$$

elde edilir. Burada $k_{\rho q,i}$ ve $\omega_{q,i}$ ifadeleri yerine sırasıyla (B.13) ve (B.9) eşitlikleriyle verilen ifadeleri yerleştirilir ve bu ifade düzenlenecek olunursa, $\hat{\psi}(\omega)$ faz teriminin ikinci türevinin $\omega = \omega_{q,i}$ iken aldığı değer aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\left.\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_{q,i}} = \frac{-\rho\alpha_q^2}{c^2 k_{\rho q,i}^3} \tag{B.23}$$

$\hat{\psi}(\omega_{q,i})$ ve $\left.\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_{q,i}}$ 'nin (B.20) ve (B.23) eşitlikleri ile bulunan ifadeleri ve $k_{\rho q,i}$'nin (B.13) eşitliğiyle verilen ifadesi (B.17) eşitliğinde yerine yerleştirilirse, $\hat{A}_q^{FW}(t)$ ifadesi, semer noktalarından gelen katkılar cinsinden

$$\hat{A}_q^{FW}(t) = \sum_{i=1}^{2} \hat{A}_{q,i}^{FW}(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{e^{-j\alpha_q z_i'}}{4\pi d_z\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}}\, U(\tau-\tau_0) \tag{B.24}$$

şeklinde elde edilir. *q*. zaman domeni Floquet dalgaya ilişkin, semer noktaları $\omega=\omega_{q,i}$'lerden gelen katkılar cinsinden bulunan yukarıdaki $\hat{A}_q^{FW}(t)$ ifadesi, daha önce (4.19) eşitliği ile bulunan ifadenin aynısı olarak elde edilmiş oldu.

Ancak atlanan ve gözden kaçırılmaması gereken bir nokta da (B.2) eşitliği ile verilen faz teriminin *q=0* için ω'ya doğrusal bağlı olacağı, dolayısıyla türevinin ω'dan bağımsız olacağı ve semer noktası yaklaşımının geçersiz olacağıdır. O halde (B.1) eşitliğindeki integralin, semer noktası katkıları cinsinden bulunan ifadesi *q≠0* için geçerli olacaktır ve *q=0* durumu ayrıca incelenmelidir.

q=0 için (3.4b) eşitliği ile verilen k_{zq} ve (3.12) eşitliği ile verilen $k_{\rho q}$ dalga sayıları

$$k_{z0} = k\eta_z \tag{B.25a}$$

$$k_{\rho 0} = k\sqrt{1-\eta_z^2} \tag{B.25b}$$

şeklinde yazılabilir. (4.9b) eşitliği uyarınca (B.25b) eşitliğinde geçen $\sqrt{1-\eta_z^2}$ ifadesi yerine $\sqrt{1-\eta^2} = \tau_0\frac{c}{\rho}$ yazılırsa, $k_{\rho 0} = k\tau_0\frac{c}{\rho} = \frac{\tau_0\omega}{\rho}$ elde edilir. k_{z0} ve $k_{\rho 0}$'ın bu değerleri (B.1) eşitliğine yerleştirilirse,

$$\hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{1}{4\pi d_z\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t-\eta_z z/c-\tau_0)}}{\sqrt{j\omega\tau_0}}\, d\omega \tag{B.26}$$

elde edilir. (4.5) eşitliği uyarınca, yukarıdaki integralin faz terimindeki parantezin içindeki ilk 2 terimin τ'ya eşit olduğu dikkate alınırsa ve integral sadece pozitif frekanslar üzerinden alınırsa,

$$\hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{1}{2\pi d_z \sqrt{2\pi\tau_0}} \mathrm{Re}\left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega(\tau-\tau_0)}}{\sqrt{j\omega}}\, d\omega \right\} \tag{B.27}$$

elde edilir. $u = \sqrt{\omega}$ ($d\omega = 2udu$) şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{1}{2\pi d_z \sqrt{2\tau_0}} \mathrm{Re}\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{j(\tau-\tau_0)u^2}}{\sqrt{j}}\, du \right\} \tag{B.28}$$

elde edilir. $u\sqrt{j(\tau-\tau_0)} = jx$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{1}{2\pi d_z \sqrt{2\tau_0}} \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau-\tau_0}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} \tag{B.29}$$

elde edilir. Hata fonksiyonunun [25], (s 297)

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} e^{-x^2} dx \tag{B.30}$$

gibi tanımlandığı hatırlanacak olunursa, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = erf(\infty) = 1$ olacaktır ve bu durumda, q=0 indeksli zaman domeni Floquet dalga aşağıdaki gibi bulunur.

$$\hat{A}_0^{FW}(t) = \frac{U(\tau-\tau_0)}{2\pi d_z \sqrt{2\tau_0(\tau-\tau_0)}} \tag{B.31}$$

(B.24) ve (B.31) bağıntılarının birleştirilmesi ile bu ekte kanıtlanması amaçlanan (4.26) eşitliği elde edilmiş olur.

EK B2 Yüksek Frekans Yaklaşıklığı Altında $\hat{A}_q^d(t)$ Kırınan Dalgası için (4.33) ve (4.34) Bağıntılarının Elde Edilmesi

(4.32) eşitliğindeki integral, (B.16) eşitliğinde tanımlandığı şekilde semer noktalarından gelen katkılar cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\hat{A}_q^d(t) = \sum_{i=1}^{2} \hat{A}_{q,i}^d(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{F(\delta_{q,i}^2)\, e^{-j\psi(\omega_{q,i})}}{j8\pi^2 d_z k_{q,i} R_d (\cos(\beta_q) - \cos(\theta))} \sqrt{\frac{2\pi}{j\left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_{q,i}}}} \tag{B.32}$$

Faz teriminin 2. türevinin semer noktasında aldığı değer (B.23) eşitliği ile $\left.\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\omega^2}\right|_{\omega=\omega_{q,i}} = \frac{-\rho\alpha_q^2}{c^2 k_{\rho q,i}^3}$ şeklinde bulunmuştu. Faz teriminin kendisinin semer noktasında aldığı değer aşağıdaki gibi bulunur.

$$\psi(\omega_{q,i}) = k_{\rho q,i}\rho + k_{zq,i} z - \omega_{q,i}\, t \tag{B.33}$$

Bu eşitlikte z ve ρ ifadelerinin yerine (3.27) eşitlikleri ile verilen değerleri ve $k_{\rho q,i}$, $k_{zq,i}$ ifadelerinin yerine (B.14) ve (B.11c) eşitliklerinden hareketle,

$$k_{\rho q,i} = k_{q,i} \sin(\beta_i) \tag{B.34a}$$

$$k_{z q,i} = k_{q,i} \cos(\beta_i) \tag{B.34b}$$

yazılırsa, faz teriminin semer noktasında aldığı değer aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\psi(\omega_{q,i}) = k_{q,i} R_d \cos(\beta_i - \theta) - \omega_{q,i}\, t \tag{B.35}$$

$\theta \approx \beta_i$ civarındaki çözümlerle ilgilenildiğinden $\cos(\beta_i - \theta) \approx 1$ kabul edilirse ve $k_{q,i} = \omega_{q,i}/c$ alınır ve $-\omega_{q,i}$ parantezine alınırsa,

$$\psi(\omega_{q,i}) = -\omega_{q,i}\left(t - \frac{R_d}{c}\right) \tag{B.36}$$

elde edilir. Aşağıdaki gibi bir t_d parametresi tanımlanarak,

$$t_d = \frac{R_d}{c} \tag{B.37}$$

faz teriminin semer noktasında aldığı değer

$$\psi(\omega_{q,i}) = -\omega_{q,i}\left(t - t_d\right) \tag{B.38}$$

şeklinde ifade edilebilir. Faz teriminin kendisinin ve 2. türevinin semer noktasında aldığı değerler (B.32) eşitliğinde yerine koyulursa ve bu ifade düzenlenecek olunursa

$$\hat{A}^d_{q,i}(t) = \frac{c k_{\rho q,i}^{3/2}}{4\pi d_z \sqrt{2\pi}\, k_{q,i} R_d} \frac{\sqrt{-j}}{|\alpha_q|\sqrt{\rho}} \frac{F(\delta^2_{q,i})}{\left[\cos(\beta_i) - \cos(\theta)\right]} e^{j\omega_{q,i}\left(t - t_d\right)} \tag{B.39}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede $k_{\rho q,i} = k_{q,i}\sin(\beta_i)$ ve $k_{q,i} = \omega_{q,i}/c$ yazılırsa, kırınan dalgalara ait zaman domeni ifadesi için daha önce (4.33) ile verilmiş olan eşitlik bulunur:

$$\hat{A}^d_{q,i}(t) = \frac{\sqrt{-j\omega_{q,i}}}{4\pi d_z \sqrt{2\pi} R_d} \frac{\sqrt{c}}{|\alpha_q|\sqrt{\rho}} \frac{\sin^{3/2}(\beta_i)}{\left[\cos(\beta_i) - \cos(\theta)\right]} F(\delta^2_{q,i}) e^{j\omega_{q,i}\left(t - t_d\right)} \tag{B.40}$$

Ancak sonsuz uzunluklu, çizgisel diziye ait çözümlerin bulunmasında olduğu gibi burada da q=0 için faz teriminin ω'ya doğrusal bağımlılığından dolayı, semer noktası yaklaşıklığı geçerli olmayacak ve (B.40) eşitliği $q \neq 0$ için geçerli olacaktır. O halde q=0 için zaman domeninde kırınan dalgaların ayrıca incelenmesi gerekmektedir. q=0 indeksli kırınan dalganın zaman domenindeki ifadesi (4.31) eşitliğinde q=0 alınarak ve ters Fourier dönüşümü direk hesaplanarak bulunur:

$$\hat{A}^d_0(t) = \frac{c}{4\pi d_z R_d} \frac{1}{\left[\cos(\beta_0) - \cos(\theta)\right]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t - R_d/c)}}{j\omega} F(\delta_0^2) d\omega \tag{B.41}$$

Aşağıdaki gibi bir $\hat{I}(t)$ fonksiyonu tanımlanarak,

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t - R_d/c)}}{j\omega} F(\delta_0^2) d\omega \tag{B.42}$$

$\hat{A}_0^d(t)$, $\hat{I}(t)$ fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\hat{A}_0^d(t) = \frac{c}{4\pi d_z R_d} \frac{\hat{I}(t)}{\left[\cos(\beta_0) - \cos(\theta)\right]} \tag{B.43}$$

δ_q 'nun (3.38b) eşitliği ile verilen ifadesinde q=0 koyularak ve k dalga sayının yerine $k = \omega / c$ yerleştirildikten sonra $t_d = R_d / c$ ifadesi hesaba katılarak δ_0^2 ,

$$\delta_0^2 = 2kR_d \sin^2\left(\frac{\beta_0 - \theta}{2}\right) = 2\omega t_d \sin^2\left(\frac{\beta_0 - \theta}{2}\right) \tag{B.44}$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki gibi bit t_δ ifadesi tanımlanarak,

$$t_\delta = 2t_d \sin^2\left(\frac{\beta_0 - \theta}{2}\right) \tag{B.45}$$

δ_0^2 değişkeni aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\delta_0^2 = \omega t_\delta \tag{B.46}$$

t_δ , $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ özdeşliği kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$t_\delta = t_d - t_d \cos(\beta_0 - \theta) \tag{B.47}$$

(A.17) eşitliğinde *q*=0 alınarak

$$k_{\rho 0}\,\rho + k_{z0} z = kR_d \cos(\beta_0 - \theta) \tag{B.48}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte k_{z0} ve $k_{\rho 0}$ dalga sayılarının yerine (B.25) eşitliklerinde verilen değerleri yerleştirildikten sonra bu eşitlik bir de ω'ya bölünürse,

$$\sqrt{1-\eta_z^2}\,\frac{\rho}{c} + \frac{\eta_z z}{c} = \frac{R_d}{c}\cos(\beta_0 - \theta) \tag{B.49}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafının (4.9) eşitlikleri uyarınca t_0 'a eşit olduğu ve R_d / c ifadesinin t_d 'ye eşit olduğu dikkate alınarak,

$$t_0 = t_d \cos(\beta_0 - \theta) \tag{B.50}$$

elde edilir. t_0 'ın bu değeri (B.47) eşitliğinde yerine konarak,

$$t_\delta = t_d - t_0 \tag{B.51}$$

bulunur. (B.42) eşitliğindeki $F(\delta_0^2) = F(\omega t_\delta)$ değerinin yerine aşağıda tanımlanan $F(.)$ fonksiyonunun integral gösterilimi yerleştirilirse,

$$F(x) = \frac{jx}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^2 + jx} ds \tag{B.52}$$

ve integral işlemlerinin sırası değiştirilirse, $\hat{I}(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{I}(t) = \frac{t_\delta}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t-t_d)}}{s^2 + j\omega t_\delta} d\omega}_{\hat{I}_2(t)} ds \tag{B.53}$$

Yukarıda tanımlanan $\hat{I}_2(t)$ integralinin kutupları $\omega = js^2 / t_\delta$, kompleks ω düzleminin üst yarısında bulunmaktadır. $t - t_d < 0$ ise integrasyon eğrisi, sonsuzda alt-yarı ω düzleminde bir yarım daire ile kapatılabilir ve hiçbir tekil nokta içerilmediğinden Cauchy teoremi uyarınca $\hat{I}_2(t)$ integrali 0 çıkar. Ancak $t - t_d > 0$ ise integrasyon eğrisi, sonsuzda üst-yarı ω düzleminde bir yarım daire ile kapatılabilir ve $\hat{I}_2(t)$ integrali $\omega = js^2 / t_\delta$ kutbundan gelen rezidü katkısı cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\hat{I}_2(t) = 2\pi j \left[\left(\omega - j\frac{s^2}{t_\delta} \right) \frac{e^{j\omega(t-t_d)} U(t-t_d)}{j t_\delta \left(\omega - j\frac{s^2}{t_\delta} \right)} \right]_{\omega = js^2/t_\delta} \tag{B.54}$$

$\hat{I}_2(t)$ integrali sadece $t - t_d > 0$ için mevcut olduğundan, yukarıdaki eşitliğinde birim basamak fonksiyonu $U(t - t_d)$ eklenmiştir. Bu eşitlik biraz düzenlenecek olunursa,

$$\hat{I}_2(t) = \frac{2\pi}{t_\delta} e^{-s^2 (t-t_d)/t_\delta} U(t-t_d) \tag{B.55}$$

elde edilir. $\hat{I}_2(t)$'nin bu değeri (B.53) eşitliğinde yerine koyulursa,

$$\hat{I}(t) = \frac{U(t-t_d)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2\left[\frac{t-t_d}{t_\delta}+1\right]} ds \tag{B.56}$$

elde edilir. t_δ değişkeni yerine $t_\delta = t_d - t_0$ yazılırsa,

$$\hat{I}(t) = \frac{U(t-t_d)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2\left[\frac{t-t_0}{t_d-t_0}\right]} ds \tag{B.57}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikteki integrali hesaplayabilmek için $x = s\sqrt{(t-t_0)/(t_d-t_0)}$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\hat{I}(t) = \sqrt{\frac{t_d-t_0}{t-t_0}} \frac{U(t-t_d)}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\frac{t_d-t_0}{t-t_0}} \frac{U(t-t_d)}{2} erfc(-\infty) \tag{B.58}$$

elde edilir. $erfc(-\infty) = 2$ olduğu dikkate alınarak, $\hat{I}(t)$ fonksiyonu

$$\hat{I}(t) = \sqrt{\frac{t_d-t_0}{t-t_0}} U(t-t_d) \tag{B.59}$$

şeklinde yazılabilir. $\hat{I}(t)$'nin bu değeri (B.43) eşitliğinde yerine koyularak daha önce (4.34) ile verilmiş olan $\hat{A}_0^d(t)$ ifadesi elde edilir :

$$\hat{A}_0^d(t) = \frac{c}{4\pi d_z R_d} \frac{U(t-t_d)}{[\cos(\beta_0) - \cos(\theta)]} \sqrt{\frac{t_d-t_0}{t-t_0}} \tag{B.60}$$

EK C

Bu ekte dikdörtgen periyodik bir dipol dizisinin frekans domeninde ışıma diyagramının elde etmek için yazılmış MatLab kodlarına yer verilmiştir.

```
clear all; clc
c=3e8; lambda=1; k=2*pi/lambda;
dx=.25*lambda;   etax=0;      Nx=3;
dz=1*lambda;     etaz=0.25;   Nz=3;
RR=100;   xobs=0;    x=xobs;
% **********  Eleman-Eleman Toplama  **********
nn=1;
for thetad=.1:1:180
   theta=thetad*pi/180;
   Thetar(nn)=thetad;
   z=RR*cos(theta);  y=RR*sin(theta);

   Azz=0;
   for m=0:(Nx-1)
      for n=0:(Nz-1)
         Rnm=sqrt((x-m*dx)^2+y^2+(z-n*dz)^2);
         P1=exp(-j*k*Rnm)/(4*pi*Rnm);
         P2=exp(-j*(k*etax*m*dx+k*etaz*n*dz));
         Azz=Azz+P1*P2;
      end
   end
   Az(nn)=Azz;
   nn=nn+1;
end
A1=20*log10(abs(Az));
% *****************  Floquet Dalgalar *****************
nn=1;
for thetad=.1:1:180
   theta=thetad*pi/180;
   Thetarr(nn)=thetad;
   xobs=0;  zobs=RR*cos(theta);  y=RR*sin(theta);
   Aztot=0;
   for m=0:(Nx-1)
      x=xobs-m*dx;
      ro=sqrt(x^2+y^2);
      for ii=1:2
         if ii==1
            z=zobs;
         elseif ii==2
            z=zobs-Nz*dz;
         end
         Rd=sqrt(z^2+ro^2);
         Betad=acos(z/Rd);
         Azz=0;
         for q=-20:20;
            kzq=k*etaz+2*pi*q/dz;
            if abs(k)-abs(kzq)>1e-10;
               BetaSBq=acos(kzq/k);
```

```
                kroq=sqrt(k^2-kzq^2);
                if Betad<BetaSBq
                   P1=2*dz*sqrt(2*pi*kroq*ro);
                   P2=exp(-j*(kroq*ro+kzq*z))*exp(-j*pi/4);
                   Azz=Azz+P2/P1;
                elseif Betad==BetaSBq
                   Azz=Azz+0.5*P2/P1;
                end
             end
          end
          Azfq=Azz;
          % ***************  Kırınan Dalgalar  ***************
          P1=exp(-j*k*Rd)/(4*pi*Rd);
          P2=1/(1-exp(j*k*dz*(z/Rd-etaz))); %cos(Beta0)=etaz;  cos(Betad)=z/Rd;
          P3=0;
          for q=-20:20;
             kzq=k*etaz+2*pi*q/dz;
             if abs(k)-abs(kzq)>=0
                kroq=sqrt(k^2-kzq^2);
                Betaq=acos(kzq/k);
                deltaq=sqrt(2*k*Rd)*sin((Betaq-Betad)/2);
                if real(deltaq*exp(j*pi/4))>=0
                   Fdeltaq=sqrt(pi)*exp(j*pi/4)*exp(j*deltaq^2)*deltaq*(1-
erfz(exp(j*pi/4)*deltaq));
                elseif real(deltaq*exp(j*pi/4))<0
                   Fdeltaq=-sqrt(pi)*exp(j*pi/4)*exp(j*deltaq^2)*deltaq*(1-erfz(-
exp(j*pi/4)*deltaq));
                end
                P3=P3+(Fdeltaq-1)/(j*k*dz*(cos(Betaq)-cos(Betad)));
             end
          end
          Ad=P1*(P2+P3);
          if ii==1
             Az1=Azfq+Ad;
          elseif ii==2
             Az2=(Azfq+Ad)*exp(-j*k*etaz*Nz*dz);
          end
       end %for ii=1:2 döngüsünün sonu
       Aztot=Aztot+(Az1-Az2)*exp(-j*k*etax*m*dx);
    end %for m=0:(Nx-1) döngüsünün sonu
    Azpln(nn)=Aztot;
    nn=nn+1;
end
B1=20*log10(abs(Azpln));
plot(Thetar,A1,'Linewidth',2); hold on
plot(Thetarr,B1,'r:','Linewidth',2.5)
legend('Referans Çözüm','Floq.D.+Kirinan D.',0)
```

ÖZGEÇMİŞ

Çağatay ULUIŞIK 08.11.1974'de Ankara'da doğdu. Orta öğrenimini Haziran 1993'te İstanbul Özel Alman Lisesinde tamamladı. Lisans ve yüksek lisans öğrenimini sırasıyla 1998 ve 2002'de ve İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümünde tamamladı. 2002'de İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim dalı, Telekomünikasyon Mühendisliği programında doktora çalışmalarına başladı.

1997 senesinde İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı / Savunma Araştırmaları Merkezinde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve Başbakanlık Denizcilik Müsteşarlığı için "Türk Boğazları Gemi Trafik ve Yönetim Bilgi Sistemi" Projesinde ve Deniz Kuvvetleri için Gözetleme ve İstihbarat Sistemi "Uzun Ufuk" Projesinde yer aldı. 2002 senesinde Doğuş Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve halen bu görevine devam etmektedir. 2007 senesinde L.B. Felsen Vakfı tarafından verilen "Elektrodinamikte Mükemmeliyet" ödülüne layık görüldü.