İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİNDE BİR VE İKİ BOYUTLU UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Murat Özbulut

508061020

Anabilim Dalı: Gemi İnşaatı Mühendisliği

Programı: Gemi İnşaatı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖREN

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİNDE BİR VE İKİ BOYUTLU UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Murat ÖZBULUT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Haziran 2008

Tezin Savunulduğu Tarih: 27 Haziran 2008

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ömer GÖREN**

Diğer Jüri Üyeleri: **Prof.Dr. A. Yücel ODABAŞI (İ.T.Ü)**

Prof.Dr. Serdar BEJİ (İ.T.Ü)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında değerli öngörüleri, cesaret ve güven veren desteğiyle bu çalışmaya en önemli katkıyı yapan hocam Prof. Dr. Ömer GÖREN' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca iki boyutlu daimi akım probleminin FLUENT programında modellenmesinde ve çözülmesinde emeği geçen Dr. Oral Ünal, Evrim Alözkan ve Tolga Karacadal'a teşekkür ederim.

Haziran 2008 Murat ÖZBULUT

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ **i**
TABLO LİSTESİ **iv**
ŞEKİL LİSTESİ **v**
ÖZET **vi**
SUMMARY **vii**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Ağ Esaslı Sistemler 2
1.1.1 Lagrange Ağ Sistemi 3
1.1.2 Euler Ağ Sistemi 4
1.2 İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği Yöntemi (İPH) veBazı Uygulamalar 6
1.3 İPH Yönteminin Getirdiği Bazı Avantajlar 7
1.4 Tezin Amacı 8
2. İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİ YÖNTEMİ **9**
2.1 Giriş 9
2.2 İPH Yönteminde Temel Formülasyonlar 10
2.2.1 Bir Fonksiyonun İntegral Tanımı 10
2.2.2 Bir Fonksiyonun Türevinin İntegral Tanımı 11
2.2.3 Parçacık Yaklaşımı 12
2.3 Korunum Denklemlerinin İPH Yöntemindeki Karşılıkları 13
2.3.1 Yoğunluk İçin Parçacık Yaklaşımı 14
2.3.2 Momentum Denklemleri İçin Parçacık Yaklaşımı 15
2.3.3 Enerji Denklemleri İçin Parçacık Yaklaşımı 16
2.4 Yapay Viskozite 17
2.5 Yapay Sıkıştırılabilirlik 17
2.6 Sınır Elemanlarının Oluşturulması 18
2.7 İnterpolasyon Uzunluğu 19
2.8 Bir Varyasyonel Prensibi Olarak İPH Yöntemi 21
3. ÇEKİRDEK FONKSİYONLARI **24**
3.1 Giriş 24
3.2 Bir Fonksiyon İçin Çekirdek Yaklaşımı 25
3.3 Bazı Çekirdek Fonksiyonu Örnekleri 27
4. İPH YÖNTEMİNDE PROGRAMLAMA SÜRECİ VE İKİ UYGULAMA **31**
4.1 İPH Yönteminde Programlama 31
4.2 Bir Boyutlu Problem Örneği: Şok-Tüp Problemi 33
4.2.1 Problemin Tanımlanması 33
4.2.2 Sonuçların Karşılaştırılması 35
4.3 İki Boyutlu Bir Kanal İçinde Bulunan Yarım Daire Etrafındaki Akım 37
4.3.1 Problemin Tanımlanması 37
4.3.2 Sonuçların Karşılaştırılması 39
5. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMALAR **42**
KAYNAKLAR **43**
ÖZGEÇMİŞ **45**

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.1: Euler ve Lagrange Yaklaşımlarındaki Korunum Denklemleri 2

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1: Lagrange Ağ Sistemi 3
Şekil 1.2: Lagrange Ağ Sisteminde Eğri Yüzeylerde Yaşanan Sorunlar 4
Şekil 1.3: Euler Ağ Sistemi 5
Şekil 1.4: İPH Yönteminde Bir Geometrinin modellenmesi 8
Şekil 2.1: Bir Parçacığın Komşuluklarının Belirlenmesi 20
Şekil 3.1.(a): Sonlu İntegral Yaklaşımı 23
Şekil 3.1.(b): Sonlu Seri Yaklaşımı 23
Şekil 3.1.(c): Sonlu Farklar Yaklaşımı 23
Şekil 3.2: Lucy (1977) Tarafından Önerilen Çekirdek Fonksiyonu ve Türevi 26
Şekil 3.3: Gauss Tipi Çekirdek Fonksiyonu ve Türevi..... 27
Şekil 3.4: Kübik eğri çekirdek fonksiyonu ve türevi..... 28
Şekil 3.5: 5. Dereceden (Quintic) çekirdek fonksiyonu ve türevi 30
Şekil 4.1: Yazılan İPH programının akış diyagramı..... 33
Şekil 4.2: Şok-tüp problemindeki parçacıkların başlangıç konumları..... 34
Şekil 4.3: Konum-Hız Grafiği 35
Şekil 4.4: Yoğunluk, Hız ve Basınç Değişiminin Birarada Gösterimi 36
Şekil 4.5: Konum-Hız grafiği için analitik çözüm, G.R.Liu, Liu (2003) Sph çözümü ve bu çalışma sonucunda çıkan sonuçların karşılaştırılması..... 36
Şekil 4.6: Konum-Basınç grafiği için analitik çözüm, G.R.Liu, Liu (2003) Sph çözümü ve bu çalışma sonucunda çıkan sonuçların karşılaştırılması 37
Şekil 4.7: İki Boyutlu Bir Kanal İçinde Bulunan Yarım Daire Etrafındaki Akım 38
Şekil 4.8: Düşey kesit üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması 39
Şekil 4.9: y=0.15 Yatay kesiti üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması. 40
Şekil 4.10: y=0.20 Yatay kesiti üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması40
Şekil 4.11: y=0.25 Yatay kesiti üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması41
Şekil 4.12: Parçacıkların Yoğunluk Salınımlarının Gösterimi 41

İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİNDE BİR VE İKİ BOYUTLU UYGULAMALAR

ÖZET

Hidrodinamik olayların sayısal olarak çözülmesi, bilgisayar teknolojisinin gelişmesinin de etkisiyle günümüzde daha çok ilgilenilen ve sürekli olarak geliştirilmeye çalışılan bir problem olmaktadır. Günümüze kadar oldukça yaygın bir şekilde kullanılan Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (CFD) yöntemi, bugün de hala değişik problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Bununla birlikte, hem yöntemin kendi içindeki zorlukları ve sınırları aşmak hem de probleme farklı bir yaklaşımla bakabilmek için farklı yöntemler de geliştirilmeye çalışılmaktadır. İşte bu farklı ve görece yeni sayılabilecek yöntemlerden biri olan *"İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği"* yöntemine, bu tez kapsamında bir giriş yapılacaktır.

Yöntemin astrofizikçiler tarafından 1970'li yılların sonuna doğru bulunmasıyla, çeşitli alanlarda uygulamaları olmuştur. Ancak hidrodinamik alanında uygulanmaya başlanması 1990'lı yıllara dayanmaktadır. Yöntem bugün için hala geliştirilme aşamasında sayılmaktadır ve bu yüzden üzerine yazılmış olan fazla paket program da bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasında FORTRAN 90 programı kullanılarak, yöntemin uygulanabileceği basit bir ve iki boyutlu problemlere çözüm aranmıştır.

Bu programlar, ilerideki çalışmalarda çözülmesi planlanan bir gemi etrafındaki akımı modelleyebilmek için hem bir başlangıç sayılacak, hem de daha karmaşık ve üç boyutlu sistemlerin İPH yöntemiyle çözümüne kılavuzluk edeceklerdir.

ONE AND TWO DIMENSIONAL IMPLEMENTATIONS IN SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS

SUMMARY

Today, numerical solutions to hydrodynamic problems become more interesting and continously developing area, which is affected by the great improvements in computer technology and computer power. Computational Fluid Dynamics (CFD) has still been in use for solving these problems. On the other hand, research people are continiously investigating different methods for solving hydrodynamic problems not only to overcome the difficulties and limitations in CFD methods but also to find different solution techniques. Accordingly, in this thesis an attempt is made to introduce one of those different and relatively new solution techniques which is called *"Smoothed Particle Hydrodynamics"* method.

After the invention of the method by astrophysicists in the late 70s, there were several implementations in different engineering areas. However, the begining of the usage of the method in hydrodynamic problems occurs at the beginning of 1990s. It is assumed that the method is still in development and consequently there are not well-established commercial computer programs which is based on SPH method. In this work, a numerical solution is sought to solve one and two dimensional simple problems, by writing the necessary codes in FORTRAN 90.

The codes developed in the present study can be regarded as a starting point for modeling and solving the flow over a ship body, but also they can be used to pave the way to more complex three dimensional hydrodynamic problems.

1. GİRİŞ

Günümüzde, mühendislik problemlerinin çözümü için çok farklı sayısal yöntemler, yoğun olarak kullanılmaktadır. Bilgisayar teknolojisinin de oldukça hızlı bir şekilde gelişmesinin etkisiyle, sayısal yöntemler hem matematik dünyasının mevcut sınırlarını zorlamaya başladı hem de analitik yöntemlerle çözülmesi mümkün olmayan problemlerin çözülmesine katkı sağladı. Örneğin işlem kolaylığı sağlaması açısından ihmal edilen terimlerin artık göz önüne alınmaya başlanmasıyla, matematik dünyasında yeni sayısal yöntemlerin oluşturulmasına ve bu yöntemler sayesinde çözümünde sorunlar olan mühendislik problemlerinin daha hızlı ve daha iyi bir yaklaşıklıkla çözülmesine olanak sağlanmıştır.

Sayısal yöntemler, analitik çözümler ile deneysel veriler arasında çözülmesi istenen olaya farklı bir bakış açısı sağlamaktadır. Analitik çözümün mümkün olmadığı veya deneysel veri elde etmenin çok zor olduğu durumlarda sayısal yöntemler hem bir öngörü hem de belli bir yaklaşıklıkla bir sonuç vermektedir. Fiziksel bir problemin sayısal olarak çözümü ve simulasyonu, problemin fiziksel görünümünü matematiksel olarak ayrıklaştırıp, problemi yeni duruma göre tekrar oluşturur ve çözümü bilgisayar ortamında yaptıktan sonra sonuçları analiz yapan kişinin ihtiyaçlarına göre düzenler (Liu, Liu 2003).

Günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde uygulanan sayısal yöntemler, genellikle çözülmesi gereken bölge içinde bir ağ (mesh) ve ağ sistemi (grid) oluşturup, bu sistemlerdeki noktaların her bir adımda belli kurallara bağlı olarak güncellenmesi ile çözüme ulaşmaktadırlar. Bu tip yöntemlere genel olarak "ağ esaslı yöntemler" (grid based methods) " denilmektedir.

Bu tezin konusu olan "İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği (Smoothed Particle Hydrodynamics) " gibi yöntemlerde ise herhangi bir ağ oluşturmadan, bölge içerisinde, bölgenin yoğunluk, basınç, hız, kütle, enerji gibi tüm özelliklerini üzerinde taşıyan parçacıkların integrasyonu ile çözüm sağlanmaktadır. Bu tip yöntemlere genel olarak orijinali "Meshless" veya "Mesh-Free" olan ve Türkçe' ye "Ağsız" olarak çevirebileceğimiz yöntemler denilmektedir.

Bu bölümde, yukarıda bahsedilen “Ağ Esaslı” yöntemlerden kısaca bahsedilecek, daha sonra serbest ağlı “İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği” yöntemine bir giriş yapılacak ve tarihsel gelişimi anlatılacaktır. Son olarak da İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yöntemi ile “Ağ Esaslı" yöntemlerinin birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları irdelenecektir.

1.1 Ağ Esaslı Yöntemler

Bilindiği gibi mühendislik problemlerinde fiziksel olarak geçerli olan denklemleri tanımlamak için Euler veya Lagrange yaklaşımları temel olarak kullanılmaktadır. Euler yaklaşımı uzaysal koordinatlarda tanımlı olup bu yaklaşıma örnek olarak oldukça yoğun bir şekilde kullanılan “Sonlu Farklar Yöntemi” verilebilir. Lagrange yaklaşımı ise maddesel koordinatlarda tanımlıdır ve bu yaklaşıma günümüzde en popüler yöntemlerden biri olarak bilinen “Sonlu Elemanlar Yöntemi” örnek olarak verilebilir. İki yaklaşım arasında korunum denklemleri farklılıklar göstermektedir ve bu farklılıklar Tablo 1.1 de gösterilmektedir (Liu, Liu 2003).

Tablo 1.1 : Euler ve Lagrange yaklaşımlarındaki korunum denklemleri

Korunan Büyüklük	**Lagrange Yaklaşımı**	**Euler Yaklaşımı**
Kütle	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} = -\rho \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}$
Momentum	$\frac{Dv_\beta}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\beta}$	$\frac{\partial v_\beta}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_\beta}$
Enerji	$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}$	$\frac{\partial e}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial e}{\partial x_\beta} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}$

Bu tablodaki denklemlerde ρ, e, ν ve x sırasıyla yoğunluk, iç enerji, hız ve konum vektörüdür. α ve β ise koordinat bileşenlerini göstermektedir.

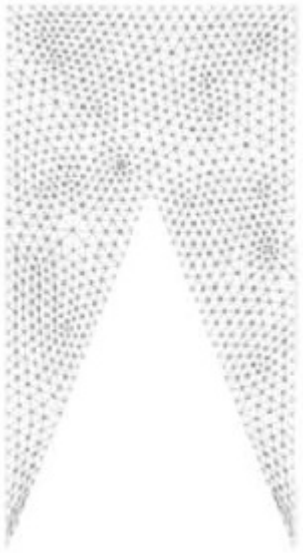
İki denklem sistemi arasındaki fark, zamana göre toplam türev ifadesinin tanımından kaynaklanmaktadır. D/Dt zamana göre toplam türev ya da maddesel türev olarak adlandırılmakta olup yerel ve taşınım (konvektif) türev bileşenlerinden oluşur. Bu

denklemlerden, Lagrange yaklaşımında direk olarak parçacığın takip edildiği, Euler yaklaşımında ise parçacığın sabit bir noktaya göre ve farklı konumlardaki durumuna göre türevlerinin alınması gerektiği sonucu çıkmaktadır.

Denklemlerin tanımlanmasındaki bu farklılıklar kullanılan yöntemlerde oluşturulan ağ sistemlerine de yansımaktadır.

1.1.1 Lagrange Ağ Sistemi

Lagrange ağ sistemlerinde ağ, fiziksel işlemlerin yapıldığı madde üzerine yerleştirilir ve böylece ağ sistemi madde ile birlikte hareket eder. Şekil 1.1'de Lagrange yönteminde hazırlanmış bir ağ sistem bulunmaktadır (Liu, Liu 2003).

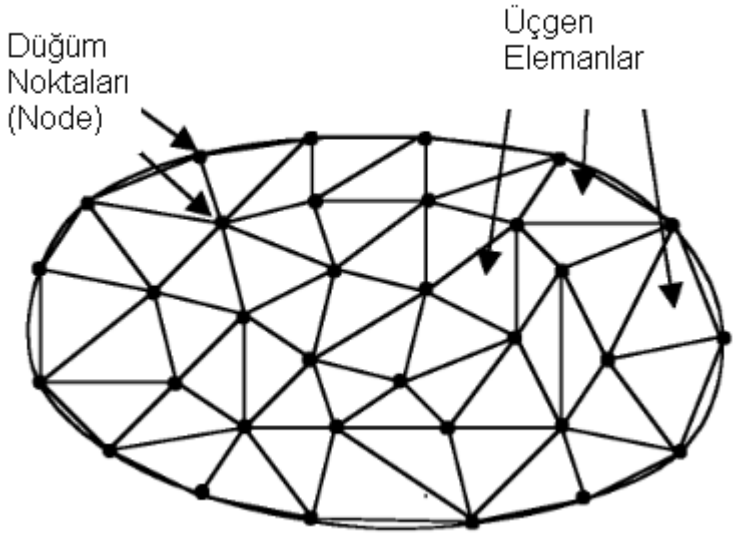


Şekil 1.1: Lagrange Ağ Sistemi

Lagrange denklemlerinin kullanıldığı sistemlerde, konvektif türevlerin olmaması hem programlamayı kolaylaştırmakta hem de bilgisayarın hesap zamanını kısaltmaktadır. Lagrange tipi sistemlerin bir başka avantajı da ağ sisteminin yalnızca problemin geçerli olduğu sınırlarda kurulmasıdır. Bu sayede modelleme ve çözüm için daha az zaman harcanmaktadır. Ayrıca ağ sisteminin malzemenin üzerinde olmasından dolayı bütün alan değişkenlerinin zamana göre değişimi kolaylıkla saptanabilmektedir.

Bu avantajlarının yanı sıra, Lagrange temelli ağ sistemlerinin bazı handikapları da bulunmaktadır. Örneğin büyük şekil değiştirmelerin olduğu problemlerde

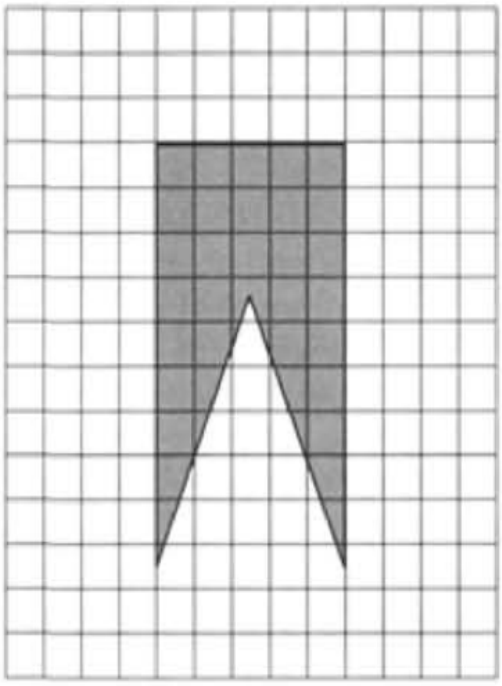
uygulanabilirlikleri zorlaşmaktadır. Çünkü tüm sistem "ağ" elemanları üzerine kuruludur ve bu elemanlar büyük deformasyonlarda kullanılan formülasyon geçerliliğini yitirmektedir. Bir diğer dezavantajı ise eğri yüzeylerde ağ sistemi oluşturmakta yaşanan zorluklardır. Ağ sistemi oluşturulurken genellikle lineer elemanlar kullanılır ve eğri yüzeylerde bu lineer elemanlar tam olarak yüzeyden geçmez. Şekil 1.2' de bu duruma bir örnek gösterilmektedir (Liu, 2003)



Şekil 1.2: Lagrange ağ sistemlerinde eğri yüzeylerde yaşanan sorunlar

1.1.2 Euler Ağ Sistemi

Lagrange ağ sisteminin tersine Euler ağ sistemi uzayda sabitlenmiş şekilde bulunmaktadır. Modellenen cisim sabitlenmiş ağ sistemin içine yerleştirilir ve yine bu sistem içinde hareket eder. Böylece bütün düğüm noktaları uzaysal koordinatlarda sabit kalır ve zamanla değişmezler. Kütle, momentum, enerji akışı bu noktalardan geçen kütle, hız ve enerji miktarları ile hesaplanır (Liu, Liu 2003). Şekil 1.3'te Euler ağ sistemiyle ayrıklaştırılmış bir sistem gösterilmektedir.



Şekil 1.3: Euler Ağ Sistemi

Euler ağ sistemi uzayda sabit olarak yerleştirildiği için, Lagrange ağ sistemlerinde olduğu gibi büyük deformasyonlar elemanlar üzerinde bir değişikliğe sebep olmaz. Çünkü bu "ağ" elemanlar problemin başında tanımlanmıştır ve zamana göre değişiklik göstermezler. Bu özelliklerinden dolayı Euler ağ sistemleri, hesaplamalı akışkanlar mekaniği problemlerinde (CFD) oldukça yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.

Ancak Euler ağ sistemlerinin kullanılmasıyla hem modelleme hem de hesaplama sırasında birçok problemle karşılaşılmaktadır. Örneğin karmaşık geometrilere sahip olan cisimleri Euler ağ sistemi içerisinde modellemek oldukça zor olabilir. Ayrıca Euler denklemlerinin doğası gereği, modelleme sırasında sadece çözümü istenen yüzeyleri veya hacimleri değil, bu yüzeylerden çok daha büyük bir alanı/hacmi kapsayacak bir ağ sistemi oluşturulmalıdır. Bu da modelleme ve çözüm için ek bir süre harcanmasına yol açmaktadır. Bunların dışında, alan değişkenlerinin zaman içerisindeki değişimini izleyebilmek de oldukça zordur. Çünkü baştan sabitlenmiş bir ağ sisteminde sadece belirlenen noktalardaki değişim saptanabilmektedir (Liu, Liu 2003).

1.2 İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği Yöntemi (İPH) ve Bazı Uygulamalar

İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği (Smoothed Particle Hydrodynamics), akışkanlar mekaniği denklemlerini, problemin çözüleceği bölgeyi parçacıklar yardımıyla tanımlayarak çözmeye çalışan sayısal bir yaklaşım yöntemidir (Monaghan, 2005i). Monaghan'a göre bu parçacıklar, matematikçiler için sadece akışkanın özelliklerinin hesaplanabileceği birer interpolasyon noktasını ifade ederken, fizikçiler için ise diğer bütün parçacık yöntemlerinde olduğu gibi malzemenin tüm özelliklerini taşıyan ve malzemedeki değişime göre kendini güncelleyen noktaları belirtmektedir.

Buradan anlaşılabileceği üzere İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği (İPH) yöntemi, parçacığın zaman içindeki değişimini inceleyen ya da başka bir ifadeyle parçacığı takip eden ve Lagrange denklemlerini çözümde kullanan bir yöntemdir. Von Neumann (1944), parçacık yöntemlerinin şok problemlerinde kullanılması üzerine yazdığı makalesinde; parçacık yöntemlerinin, sadece sürekli akışkan denklemlerinin yaklaşık çözümünde değil; alt yapısında moleküler dinamik sistemlerini de barındıran, zorlu parçacık sistemi denklemlerini ortaya koyan ve bu haliyle süreklilik denklemlerinden daha temel bir yaklaşım olduğunu belirtmektedir.

İPH yöntemi ilk olarak üç boyutlu astrofizik problemlerinin çözümü için Gingold & Monaghan, 1977 ve Lucy 1977 tarafından eş zamanlı olarak kullanıldı. Gingold ve Monaghan (1977), eşit kütleli akışkan parçacıklarının birim hacimdeki sayılarının yoğunlukla doğru orantılı olması gerekeceğini ve simetri durumunun parçacıkların sadece başlangıçtaki pozisyonları simetrik olarak yerleştirilirse olabileceğini, hareket başladıktan sonra herhangi bir simetri durumunun olmayacağını belirtmişlerdir. Bu mevcut durumdan hareketle Gingold ve Monaghan, parçacıkların herhangi bir andaki pozisyonları yoğunluğa bağlı olarak rastgele dağıtılması gerektiğini varsaymışlardır. Bu durumun doğal sonucu olarak da parçacıkların bilinen dağılımından yoğunluğu hesaplamak, bir numune örneğinden olasılık dağılımı hesaplamaya eşdeğer bir problem olmaktadır. Bu problemin çözümü için de istatistikçiler, bir integral yaklaşımı olan Monte Carlo prosedüründen hareketle, düzgünleştirilmiş çekirdek yöntemi (smoothing kernel method, Barlett 1963, Parzen 1962) ve delta spline yöntemi (Boneva, Kendal & Stepanov,1971) olmak üzere iki farklı çözüm

geliştirmişlerdir. Bu çözüm yöntemlerinden hareketle Monaghan ve Gingold, İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği (Smoothed Particle Hydrodynamics) adını verdikleri yöntemi geliştirmişlerdir.

Yöntem daha sonra şok (Monaghan & Gingold,1983, Monaghan 1997, Price & Monaghan 2004), çarpışma (G.R. Johnson & S.R. Beissel,1998), su altı patlaması (Swegle & Attaway, 1995) problemleri gibi büyük deformasyonların olduğu durumlarda olduğu gibi akışkanlar mekaniği problemlerinde, kırılma ve elastisite (Libersky & Petschek, 1991) problemlerinde de kullanılmıştır. Ayrıca bio-mekanik alanında kan akış simulasyonu (M. Mueller, S. Schirm, M.Teschner, 2004), sıvı metal kalıplama simulasyonu (Clary & Ha, 2002), metal şekil verme (Bonet J.,Kulasegaram S., 2000) gibi değişik mühendislik problemleri çözümünde yine İPH yöntemi kullanılmıştır.

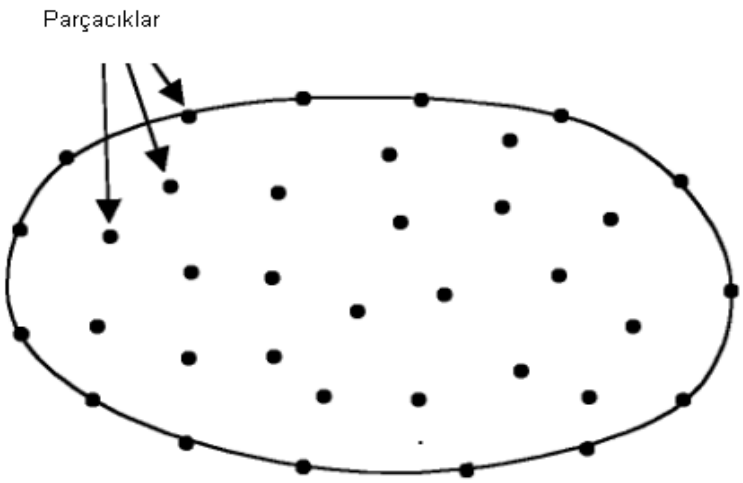
1.3 İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği Yönteminin Getirdiği Bazı Avantajlar

Yöntemin karakteristik özelliğinden dolayı Lagrange özelliklere sahip olması beraberinde birçok kolaylığı da getirmektedir. En önemli avantajı yöntemin kolay adapte edilebilir bir yapısının olmasıdır. Çünkü herhangi bir alan değişkeni, her zaman aralığında o anki rastgele dağılmış parçacıkların konumuna bağlı olarak güncellenmektedir. Bu özelliğinden dolayı da İPH yöntemi başlangıçta parçacıkların dağılımından etkilenmez ve yine bu özelliği nedeniyle büyük deformasyonların olduğu problemlerin çözümü mümkün olabilmektedir (Liu, Liu 2003).

Yöntemin bir diğer önemli avantajı da Lagrange formülleri ile parçacık yaklaşımının harmonik bir birliktelik oluşturmasıdır. Yani parçacıklar sadece birer integrasyon noktası değil de malzemenin tüm özelliklerini taşıyabilen, iç etkileşimler ve dış kuvvetler etkisiyle hareket edebilen elemanları temsil etmektedir.

Serbest ağlı bir yöntem olma özelliğinden dolayı, önceden bir ağ oluşturma işlemine gerek duyulmaz. Dolayısıyla modelleme süresi önemli ölçüde düşebilmektedir. Bu özelliğine bağlı olarak sonlu elemanlar yöntemi gibi mesh elemanları oluşturulmadığı için büyük yer değiştirmelerin olduğu problemlerde mesh elemanların bozulması gibi bir sorun oluşmamaktadır (Liu, 2003).

Ağ temelli yöntemlerde anlatılan eğri yüzeylerin modellenmesinde yaşanan sorunlar, İPH yöntemi için bir sorun teşkil etmemektedir. Çünkü bu yöntemde sınır geometrileri de parçacıklarla belirlendiği için herhangi bir geometrik şekil kolaylıkla parçacıklarla tam olarak modellenebilmektedir. Şekil 1.4'te İPH yönteminde bir geometri modellenmesi gösterilmektedir.



Şekil 1.4: İPH yönteminde bir geometrinin modellenmesi

1.4 Tezin Amacı

Bu tezde öncelikli olarak İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yönteminde genel olarak akışkanlar mekaniğinde kullanılan denklemlerin (korunum denklemleri) ifade ediliş biçimleri, kullanılan çekirdek fonksiyonlarının çıkarılış biçimleri ve özellikleri, interpolasyon uzunluğu özellikleri, denge denklemleri, parçacıklar arası etkileşimin koşulları, suni sıkıştırılabilirlik ve sınır koşullarının uygulanış biçimi gibi özellikler detaylı olarak açıklanacaktır. Buradan hareketle gemi hidrodinamiğinde yeni gelişmekte ve gelişmeye açık bir yöntem olan interpolasyonlu parçacık hidrodinamiği yöntemini özümsemek ve böylece bir ve iki boyutlu uygulamalar için çalışan kodlar geliştirmek bu tezin başlıca amaçlarıdır. Bu şekilde, giderek global özellikleri olan ve serbest su yüzeyi hidrodinamiğinin üç boyutlu uygulamaları için bir altyapı teşkil edilmiş olacaktır.

2. İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİ YÖNTEMİ

2.1 Giriş

İPH yöntemi, genel olarak kısmi diferansiyel denklemler halinde olan alan değişkenlerine ait hidrodinamik problemlerinin çözümünde kullanılabilmektedir. Bunun için öncelikle problemin geçerli olduğu alanın ayrıklaştırılması, daha sonra da alan fonksiyonları ve bu fonksiyonların türevlerini sağlayacak bir yaklaşım ile bu kısmi diferansiyel denklemler, sadece zamana bağlı olan adi diferansiyel denklemlere dönüştürülür. Son olarak da bu adi diferansiyel denklemler herhangi bir integrasyon yöntemi ile çözülür. İPH yönteminde ise bu adımlar aşağıdaki şekilde gerçekleşir (Liu, Liu 2003):

- Parçacıklar birbirine bağlantısı olmaksızın rastgele bir şekilde alan içine dağıtılır.
- Alan içinde geçerli olan fonksiyonun yaklaşık olarak çözülmesi için bir integral tanımlanması metodu kullanılır. Bu metot bir sonraki bölümde detaylı olarak anlatılacak olup, literatürde *"çekirdek yaklaşımı (kernel approximation)"* olarak adlandırılmaktadır.
- Çekirdek yaklaşımından sonra parçacıkların kullanıldığı bir yaklaşım daha yapılır ve buna da *"parçacık yaklaşımı (particle approximation)"* adı verilir. Bu adımda, integral tanımlamasında kullanılacak olan alan içinde dağıtılmış olan parçacıkların fonksiyon ve türev değerleri, her bir parçacığın belli uzaklıktaki komşuluklarının ortalaması alınarak hesaplanır.
- Parçacık yaklaşımı her zaman adımında tekrarlanır ve fonksiyon değerleri her adımda güncellenir. Bu durum bir önceki bölümde anlatılan "kolay adapte olabilme" özelliğini açıklamaktadır.
- Kısmi diferansiyel denklemler halinde bulunan alan değişkenleri fonksiyonları parçacık yaklaşımından sonra adi diferansiyel denklemlere dönüşmüş olur. Bu adımdan sonra adi diferansiyel denklemlerin çözümü

yapılır. Buradaki en önemli avantajlardan biri de *"açık" (explicit)* integrasyon algoritması ile çözümün yapılabilmesidir. Yani her bir adımda, alan fonksiyonlarının zamana göre değişimlerini hesaplamak için bir önceki adımda elde edilen değerler kullanılır.

2.2 İPH Yönteminde Temel Formülasyonlar

2.2.1 Bir Fonksiyonun İntegral Tanımı

İnterpolasyonlu parçacık hidrodinamiği yönteminin temeli aslında bir interpolasyon teorisine dayanmaktadır. Genel olarak yöntem parçacık ve çekirdek yaklaşımı olmak üzere iki kısma bölünebilir. Sürekli akışkanlar dinamiğindeki korunum yasaları, bir takım interpolasyon fonksiyonları kullanılarak integral denklemlere dönüştürülür ve alan değişkenleri için yukarıda da açıklanan "çekirdek yaklaşımı" gerçekleştirilmiş olur (Schlatter B.,1999). Çekirdek terimi, bir ağırlık fonksiyonunu ifade etmektedir ve her bir alan değişkeninin kendisinden *"x"* kadar uzaklıktaki bir başka alan değişkenine ne kadar katkıda bulunacağını belirlemektedir. Bir **A(x)** fonksiyonunun çekirdek yaklaşımı aşağıdaki gibi yapılmaktadır:

$$A(x) = \int_{\Omega} A(x')\delta(x - x')\, dx' \tag{2.1}$$

Bu denklemde *A* yer değiştirme vektörü **x**' e bağlı herhangi bir alan değişkeni fonksiyonu (yoğunluk, hız, basınç vb), δ(*x-x'*) ise denklem (2.2) de verilen Dirac delta fonksiyonudur. İşte (2.1) denklemi bize bir fonksiyonun integral olarak tanımlanmış halini belirtmektedir.

$$\int_{\Omega} \delta(x - x')\, dx' = \begin{cases} 1, & x = x' \\ 0, & x \neq x' \end{cases} \tag{2.2}$$

Eğer (2.1) denkleminde Dirac delta fonksiyonu yerine *W(x-x',h)* çekirdek fonksiyonu yazılırsa integral tanımlaması aşağıdaki şekilde olur:

$$A(x) \cong \int_{\Omega} A(x')W(x - x', h)dx' \tag{2.3}$$

W(x-x',h) fonksiyonuna interpolasyon fonksiyonu da denilmekte olup, bu fonksiyondaki *"h"* interpolasyon uzunluğunu (smoothing length) yani *W* fonksiyonunun etkilediği uzunluktur. Görüldüğü gibi *W* fonksiyonu, Dirac delta fonksiyonuna eşit değildir. Ancak *h=0* olurken Dirac delta fonksiyonu gibi davranmaktadır. Böylece (2.3) denklemi, (2.1) ifadesine bir yaklaşım olarak kabul edilmektedir. Bu denklemdeki Ω, interpolasyon uzunluğu (*h*) tarafından belirlenecek olan alan veya hacmi ifade etmektedir.

İPH terminelojisine göre "< >" braket işareti çekirdek yaklaşımı operatörünü göstermektedir. Böylece (2.3) denklemi şu hali almaktadır:

$$\langle A(x)\rangle = \int_{\Omega} A(x')W(x-x',h)dx' \tag{2.4}$$

Bu integral tanımlamasının geçerli olabilmesi için interpolasyon fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır (Liu, 2003):

- Ω bölgesi içinde, $W(x-x',h) > 0$ olmalıdır (Pozitif olma özelliği).
- Ω bölgesi dışında, $W(x-x',h) = 0$ olmalıdır (Tam desteklenme özelliği).
- $\int_{\Omega} W(x-x',h)dx' = 1$ olmalıdır (Birim özelliği).
- *W* fonksiyonu konuma göre monoton olarak azalan bir fonksiyon olmalıdır.
- $\lim_{h\to 0} W(x-x',h) = \delta(x-x')$ olmalıdır (Delta fonksiyonu özelliği).

İPH literatüründe bu çekirdek yaklaşımının, genellikle h^2 yaklaşıkla yani 2. derece yakınsaklıkta olduğu belirtilmektedir (Schlatter Brian, 1999).

$$\langle A(x)\rangle = A(x) + r(h^2) \tag{2.5}$$

2.2.2 Bir Fonksiyonun Türevinin İntegral Tanımı

İnterpolasyonlu parçacık hidrodinamiğinde bir fonksiyonun türevini bulmak için (2.4) denkleminin türevi alınır.

$$\langle \nabla . A(x)\rangle = \int_{\Omega} \nabla . [A(x')W(x-x',h)]dx' - \int_{\Omega} A(x')\nabla . W(x-x',h)dx' \tag{2.6}$$

(2.6) denkleminin sağ tarafındaki ilk integrasyon diverjans teoremi kullanılmasıyla aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\langle \nabla . A(x) \rangle = \int_S [A(x')W(x-x',h)] . \boldsymbol{n} . dS - \int_\Omega A(x) \nabla . W(x-x',h) dx' \qquad (2.7)$$

Bu denklemde **n** vektörü S yüzeyinin birim normal vektörüdür.

W interpolasyon fonksiyonu sadece problemin tanımlı olduğu alanda, tam desteklenmiş bir bölgede tanımlıysa (2.7) denklemindeki yüzey integrasyonu sıfır olur (Liu, Liu 2003). Burada tam desteklenmiş (compact support) bölge kavramı, interpole edilen parçacığın, komşuluklarının interpolasyon uzunluğuna bağlı olarak belirlendiği bölge anlamına gelmektedir. Eğer parçacık sınıra yakın bir bölgede ise *W* fonksiyonu sınırın dışında bir bölgeyi de kapsar ve o zaman bu integral sıfır olmayabilir. Ancak bu durum özel bir haldir ve bunun için bir takım ayrı işlemler yapılmalıdır. Sonuç olarak problem sınırının içinde geçerli olan *W* fonksiyonları için türev ifadesi:

$$\langle \nabla . A(x) \rangle = -\int_\Omega A(x') \nabla . W(x-x',h) dx' \qquad (2.8)$$

2.2.3 Parçacık Yaklaşımı

İPH yönteminin önemli noktalarından birisi de parçacık yaklaşımıdır. Bir önceki bölümde açıklanan sürekli fonksiyonların integral denklemleri bu yaklaşım ile ayrıklaştırılmaktadır. (2.4) ve (2.8) denklemlerindeki "j" parçacığını temsil eden sonsuz küçük hacim ***dx'*** yerine ΔV_j yazılır ve bu parçacığın kütlesi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$m_j = \Delta V_j \rho_j \qquad (2.9)$$

Bu denklemde ρ_j parçacığın yoğunluğudur (j=1,2,…,N). N ise "j" parçacığının etki bölgesi içinde kalan parçacık sayısını ifade etmektedir. Buradan hareketle parçacık yaklaşımı aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$A(x) = \int_\Omega A(x')W(x-x',h)dx' \cong \sum_{j=1}^{N} A(x_j)W(x-x',h)\Delta V_j \qquad (2.10)$$

(2.10) denkleminde ΔV_j yerine (2.9) denklemi yazılırsa;

$$A(x) \cong \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j}(x_j)W(x-x',h) \qquad (2.11)$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak herhangi bir "i" parçacığının yaklaşık olarak fonksiyon değeri şu şekilde yazılmış olur:

$$\langle A(x_i)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} A(x_j) W_{ij} \tag{2.12}$$

$$W_{ij} = W(x - x_i, h) \tag{2.13}$$

Aynı şekilde herhangi bir "i" parçacığa ait fonksiyonun türev değerleri de aşağıdaki gibi bulunur:

$$\langle \nabla . A(x_i)\rangle = -\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} A(x_j) \nabla . W_{ij} \tag{2.14}$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \tag{2.15}$$

2.3 Korunum Denklemlerinin İPH Yöntemindeki Karşılıkları

Bu bölümde hidrodinamik problemleri için gereken korunum denklemlerinin İPH yöntemindeki karşılıkları irdelenecektir. Bunun için yoğunluk, momentum ve enerji denklemlerinin parçacık yaklaşımındaki ifadeleri gösterilecektir. Bu noktada öncelikle süreklilik, momentum ve enerji denklemlerini hatırlamak faydalı olacaktır.

Bu denklemlerde kullanılan α, β ve γ simgeleri koordinat eksenlerini belirtmektedir.

Süreklilik denklemi,

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla . \boldsymbol{v} \tag{2.16}$$

Momentum denklemi,

$$\frac{Dv_\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + F_\beta \tag{2.17}$$

Olduğu bilinmektedir. (2.17) denkleminde "σ" toplam gerilmeyi, "F" ise dış kuvvetleri göstermektedir. Toplam gerilme ise izotropik basınç ve viskoz kayma gerilmesi olmak üzere iki bileşenden oluşmaktadır.

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \tag{2.18}$$

Viskoz kayma gerilmesi ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.19}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3}(\nabla.\mathbf{v})\delta_{\alpha\beta} \tag{2.20}$$

Son olarak da enerji denklemini yazacak olursak,

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho}\nabla.\boldsymbol{v} + \frac{\mu}{2\rho}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.21}$$

2.3.1 Yoğunluk İçin Parçacık Yaklaşımı

Yoğunluk fonksiyonunun değişimi, İPH yönteminde iki farklı yaklaşımla yapılmaktadır. Birinci yaklaşıma *"toplam yoğunluk" (summation density)* adı verilmekte olup, (2.12) denklemindeki *A(x)* fonksiyonu yerine yoğunluğun yazılmasıyla elde edilmektedir.

$$\langle\rho\rangle_i = \sum_{j=1}^{N} m_j W_{ij} \tag{2.22}$$

Bu denkleme göre, *"i"* noktasındaki bir parçacığın yoğunluğu, kendisine komşu olan tüm parçacıkların ağırlıklı ortalaması alınarak hesaplanmaktadır. Daha öncede belirtildiği gibi parçacıkların komşu olarak adlandırılmasını, iki parçacık arasındaki interpolasyon uzaklığı belirlemektedir.

İkinci bir yaklaşım ise *"sürekli yoğunluk" (continuity density)* adı verilen ve yoğunluğun değişimini hesaplamak için (2.16)'daki süreklilik denklemini kullanan yaklaşımdır. Süreklilik denkleminin, İPH operatörü kullanılarak yazılan ifadesi aşağıda verilmiştir:

$$\langle \frac{D\rho}{Dt} \rangle_i = \rho_i \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} (\boldsymbol{v_i} - \boldsymbol{v_j}) \nabla_i . W_{ij} \tag{2.23}$$

Her iki yaklaşımın da bazı avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır. Toplam yoğunluk yaklaşımında kütle tam olarak korunurken, sürekli yoğunluk yaklaşımında kütle korunumu tam olarak gerçekleşmemektedir. Buna karşı, toplam yoğunluk yaklaşımında, akışkanın sınıra yakın bölgelerinde *"kenar etkisi"* adı verilen ve yoğunluğun tamamen yok olmasına ve dolayısıyla çok büyük yer değiştirme ve hız değerlerine sebep olan bir etkisi olabilmektedir (Liu, 2003). Ancak kenar etkisi olayı, sanal sınır elemanları veya bazı farklı yöntemlerle engellenebilmektedir (Liu, Liu 2003). Ayrıca toplam yoğunluk yaklaşımı, her bir zaman adımında, diğer alan değişkenlerini hesaplayabilmek için öncelikle tüm parçacıkların yoğunluğunu ve ağırlık fonksiyonu değerlerini hesapladığı için bilgisayar çözüm süresi, sürekli yoğunluk yaklaşımına göre daha uzun sürmektedir (Liu, 2003).

2.3.2 Momentum Denklemleri İçin Parçacık Yaklaşımı

Yukarıda verilen 2.17 momentum korunum denklemini viskoz etkileri ihmal ederek ve dış kuvvetlerin olmadığı durum için tekrar yazacak olursak, denklem Euler denklemine dönüşür:

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla . P \tag{2.24}$$

Momentum denkleminin sağ tarafında, İPH yöntemi gösterimi için Schlatter B. (1999), basınç gradyantını aşağıdaki gibi iki bölüme ayırmıştır:

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \tag{2.25}$$

2.25 denkleminin sağ tarafındaki, ilk terim için şu ifade yazılabilir:

$$\nabla_i \left(\frac{p_i}{\rho_i} \right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{p_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} \tag{2.26}$$

İkinci terim ise

$$\nabla_i \rho_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \nabla_i W_{ij} \tag{2.27}$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki ifadeyi toplarsak, momentum ifadesi aşağıdaki gibi olur (Schlatter Brian, 1999)

$$\frac{D\boldsymbol{v}_i}{Dt} = -\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{p_{\boldsymbol{i}}}{\rho_i^2} + \frac{p_{\boldsymbol{j}}}{\rho_j^2}\right) \nabla_i W_{ij} \tag{2.28}$$

Momentum denklemindeki en önemli özellik, denklemin *"i"* ve *"j"* parçacıkları için simetrik olmasıdır. Bu özelliği sayesinde momentumun korunumu tam olarak sağlanmaktadır.

2.3.3 Enerji Denklemleri için Parçacık Yöntemi

Bu bölümde, 2.21 denkleminde verilen iç enerji denkleminin, momentum denkleminde olduğu gibi yine viskoz gerilmelerin ihmal edildiği Euler kabulüyle, İPH yöntemindeki karşılığı tanımlanacaktır. Bunun için öncelikle aşağıdaki eşitliği göstermek yararlı olacaktır (Liu, Liu 2003).

$$-\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} = \frac{p}{\rho^2}\left(-\rho \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}\right) = \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \tag{2.29}$$

Bu denklemdeki yoğunluğun zamana göre türevi (süreklilik denklemi) (2.23) denkleminden aynen yazılabilir.

$$-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_\beta}{\partial \boldsymbol{x}_\beta}\right)_i = \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^{N} m_j \, \boldsymbol{v}_{ij} \frac{\partial W_{\boldsymbol{ij}}}{\partial \boldsymbol{x}_i} \tag{2.30}$$

Basıncın yaptığı iş miktarını göstermenin bir yolu da aşağıdaki gibi olabilir:

$$-\frac{p}{\rho}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{P v_\beta}{\rho}\right) + v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{2.31}$$

(2.31) denkleminin İPH yöntemindeki ayrıklaştırılmış ifadesi ise aşağıdaki gibi olur:

$$-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_\beta}{\partial \boldsymbol{x}_\beta}\right)_i = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{p_j}{\rho_j^2} \boldsymbol{v}_{ij} \frac{\partial W_{\boldsymbol{ij}}}{\partial \boldsymbol{x}_i} \tag{2.32}$$

(2.30) ve (2.32) denklemlerini toplarsak enerji denklemi aşağıdaki halde ifade edilir:

$$-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_\beta}{\partial \boldsymbol{x}_\beta}\right)_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2}+\frac{p_i}{\rho_i^2}\right)\boldsymbol{v}_{ij}\frac{\partial W_{\boldsymbol{ij}}}{\partial x_i} \tag{2.33}$$

(2.33) denkleminin en önemli özelliği "i" ve "j" parçacıklarına göre simetrik olmasıdır. Bu durumda enerji korunumu tam olarak gerçekleşebilmektedir. Çünkü iki parçacığın birbirine olan etkisi denklemin simetrik olmasından dolayı eşit olacaktır. Bu özellik yukarıda çıkarılmış olan momentum denklemi için de geçerlidir.

2.4 Yapay Viskozite

Yapay viskozite (artificial viscosity), İPH yönteminde genel olarak şok problemlerini çözmek ve parçacıkların fiziksel olmayan sızmalarını önlemek için kullanılmaktadır (Liu, 2003). Eğer yapay bir viskozite terimi kullanılmazsa, şok olayının gerçekleştiği bölgelerde nümerik olarak fiziki bir karşılığı olmayan salınımlar oluşmaktadır. Bu salınımları önlemek için, bu tip problemlerde momentum ve enerji denklemlerindeki basınç terimine ek olarak yapay bir viskozite terimi eklenmektedir. İPH literatüründe en çok kullanılan yapay viskozite formülasyonu, *"Monaghan Tipi Yapay Viskozite"* olarak adlandırılan yaklaşımdır (Monaghan, 1992). Bu yaklaşımın formülasyonu aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_\pi c_{ij}\theta_{ij}+\beta\theta_{ij}^2}{\overline{\rho_{ij}}}, & v_{ij}.x_{ij} < 0 \\ 0, & v_{ij}.x_{ij} \geq 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\theta_{ij} = \frac{h_{ij}v_{ij}.x_{ij}}{r_{ij}^2+\eta^2} \tag{2.35}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\left(c_i + c_j\right) \tag{2.36}$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2}\left(\rho_i + \rho_j\right) \tag{2.37}$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}\left(h_i + h_j\right) \tag{2.38}$$

(2.34) denklemindeki α, β ve η sabit büyüklükler olup, genellikle sırasıyla 1, 1, $0.1h_{ij}$ olarak verilmektedir (Liu, 2003). Ayrıca c_i ve c_j "i" ve "j" parçacıklarına ait ses hızlarını, Π_{ij} ise Navier-Stokes denklemlerindeki viskoz terimleri belirtmektedir.

2.5 Yapay Sıkıştırılabilirlik

İPH yönteminde, parçacıkların hareketi, sıkıştırılabilir akışkanlar için basınç gradyantı ile hesaplanmaktadır. Basınç ise, parçacıkların yerel yoğunluk ve iç enerji değerlerinin yukarıda bahsedilen yaklaşımlarla hesaplandıktan sonra, hal (durum) denklemlerinde yerine konulması ile bulunmaktadır. Ancak sıkıştırılamaz akışkanlar için bir hal denklemi yoktur (Liu, 2003). Bu durumda, bütün akışkanların teorik olarak az da olsa sıkıştırılabileceği varsayımından hareketle, yapay bir sıkıştırılabilirlik denklemi oluşturulmaktadır. Böyle bir denge denklemini sağlamanın koşulu ise yoğunluk değişimlerinin ihmal edilebilecek düzeyde (Monaghan (2005i)'ye göre yoğunluk salınımları %1 düzeyinde olmalıdır) olabilmesi için ses hızının, parçacıkların hızından çok büyük olması gerekmektedir. Buna göre literatürde kullanılmakta olan iki farklı hal denklemi bulunmaktadır:

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - 1\right] \tag{2.39}$$

$$P = c^2\rho \tag{2.40}$$

(2.39) denkleminde, ρ_0 referans alınan başlangıç yoğunluğu, γ ise 7 olarak alınmaktadır (Batchelor, 1967). B sayısı ise, Monaghan (2005i) ses hızının yoğunluk değişimlerinin çok küçük kalabilmesi için yaklaşık olarak aşağıdaki gibi alınmasını tavsiye ettiği bir sabittir:

$$B = 100\rho_0 v^2\gamma \tag{2.41}$$

(2.41) denkleminde tek bulunması gereken bölge içindeki v maksimum hızıdır. Bu değerde problemin başlangıcında büyük bir yaklaşıklıkla tahmin edilebilmektedir (Monaghan, J.J., 2005i).

(2.40) denklemindeki ses hızının tayini ise, yine yoğunluk değişiminin %1 civarında olabilmesi için Mach sayısına (M) bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunabilinir (Liu, Liu 2003):

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{|\rho - \rho_0|}{\rho_0} = \frac{v_b^2}{c^2} = M^2 \tag{2.42}$$

Görüldüğü gibi δ=0.01 için Mach sayısı 0.1 olmalıdır ve bu da denge denkleminde belirlenecek olan ses hızının, akışkan hızından yaklaşık olarak 10 kat daha büyük olmasının gerektirmektedir. Bu noktada seçilecek olan ses hızının zaman adımı sayısını doğrudan etkileyeceğini belirtmek gerekiyor. Çünkü ses hızının, yapay olarak çok az bir miktar sıkıştırılabilirliği sağlamaya yetecek kadar büyük olması gerekirken, öte yandan zaman adımının kabul edilebilir bir değerde olacağı kadar küçük bir değerde olmalıdır. Yani ses hızı saptanırken, problemin çözümü için gerekli olan sıkıştırılabilme oranını sağlayacak ve aynı anda zaman adımının çok küçük olmasına yol açmayacak optimum bir hız değeri bulunmalıdır (Liu, Liu 2003).

2.6 Sınır Elemanların Oluşturulması

İPH yönteminde sınır elemanları, diğer alan elemanları gibi yine parçacıklardan oluşmaktadır. Ancak sınırdaki elemanların, problemin tipine göre kendi karakteristik özellikleri bulunmaktadır. Sınır elemanları, tek bir hat üzerinde, geometrinin sadece çevre elemanları ile temsil edilebildiği gibi alanı dolduracak şekilde konumlandırılmış parçacıklarla da belirlenebilir. Literatürde, problemlerin sınır şartlarına bağlı olarak her iki şekilde de sınır elemanları belirlenmektedir.

Sınır elemanları ile alanda tanımlı elemanlar arasındaki etkileşimi Monaghan (1994) aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

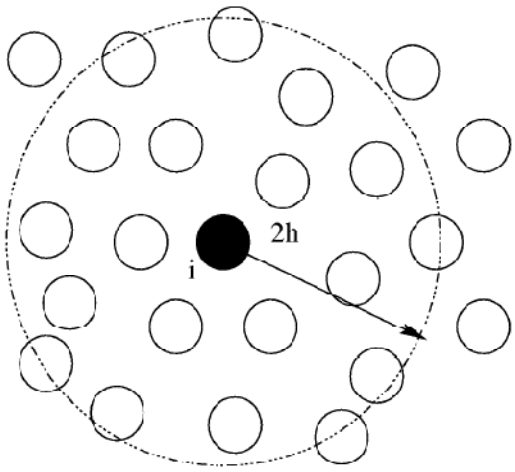
$$f(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} D\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}\left[\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{p_1} - \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{p_2}\right], & r > r_0 \\ 0, & r \le r_0 \end{cases} \tag{2.43}$$

Yukarıdaki denklemde r, sınır elemanı ile serbest eleman arasındaki mesafeyi, r_0 ise bu iki eleman arasındaki kesme uzunluğunu (cut-off distance) göstermektedir. Buna göre *"r"* değeri, *"r_0"* değerinden büyük olursa herhangi bir etkileşim olmamaktadır. Denklemdeki D sabiti, hızın karesi *(v^2)* mertebesinde olup, Monaghan' a göre (1994),

sistemin fiziksel dizilişine göre belirlenmektedir. Bu değer sıvı yüksekliği "*H"*, yer çekimi ivmesi *"g"* olmak üzere, D=5gH veya D=10gH olarak alınabilmektedir (Monaghan J.J., 1994). Son olarak denklemdeki p_1 ve p_2 sabitleri sırasıyla 12 ve 4 olarak alınmaktadır (Liu, Liu 2003).

2.7 İnterpolasyon Uzunluğu

İnterpolasyon uzunluğu (smoothing length), çekirdek fonksiyonunun geçerli olduğu bölgeyi veya başka bir ifadeyle, herhangi bir parçacığın, civarındaki diğer parçacıklar ile etkileşime girebileceği maksimum uzaklığı belirleyen bir parametredir. *"h"* harfi ile gösterilmektedir. Bir parçacık için, herhangi bir alan fonksiyonunun hesaplanabilmesi için öncelikle o parçacığın, hangi parçacıklarla etkileşime girebileceğinin, yani *"komşuluklarının"* belirlenmesi gerekmektedir. Daha sonra bu komşuluklarındaki alan değişkenlerinin ağırlıklı ortalaması alınarak (çekirdek fonksiyonu ile çarpılarak), o parçacığın fonksiyon değeri hesaplanır. Dolayısıyla interpolasyon uzunluğu parametresi, interpolasyonlu parçacık hidrodinamiği yönteminde oldukça önemli bir yere sahiptir. Çünkü eğer bu değer çok küçük alınırsa, yeterince parçacık etkileşime giremez ve sistemin yakınsaklığı düşer. Öte yandan bu değer çok büyük alınırsa, parçacığa ait tüm detaylar interpole edilir (smoothed out) ve yine sistemin yakınsaklığı kötüleşir. İnterpolasyon uzunluğunu belirlerken, göz önünde tutulması gereken faktörlerden birisi de hesap süresi ve bilgisayar yükü olacağı için yaklaşık olarak bir parçacığın komşu parçacık sayısı yaklaşık olarak, bir, iki ve üç boyutlu problemler için sırasıyla 5, 21 ve 57 olarak alınması tavsiye edilmektedir (Liu, Liu 2003). Şekil 2.1'de *"i"* parçacığının interpolasyon uzunluğu sınırı içinde kalan bölgedeki *"komşu parçacıkları"* gösterilmektedir.



Şekil 2.1: Bir parçacığın komşuluklarının belirlenmesi

İnterpolasyon uzunluğu sabit bir değer olabileceği gibi parçacıkların konumuna göre sürekli olarak güncellenebilen bir uzunluk da olabilir. Böylece parçacıkların çözünürlükleri arttırılmış olur (Monaghan, 1992).

2.8 Bir Varyasyonel Prensibi Olarak İPH Yöntemi

Bu bölümde, yukarıda çıkarılmış olan İPH denklemlerinin, Monaghan ve Price (2001) çalışmasından yararlanarak, bir varyasyonel prensibi olarak çıkarılması gösterilecektir.

İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yöntemindeki *"toplam yoğunluk"* yaklaşımı, direk olarak parçacıkların hareket denklemlerinde kullanılan konumlarının bir fonksiyonu olarak tanımlandığı için, varyasyonel prensipleri uygulama açısından, yoğunluğun süreklilik denkleminde tanımlandığı *"sürekli yoğunluk"* yaklaşımından daha kolaydır. Öncelikle Lagrange mekaniğinde bağıl olmayan hareketler için tanımlanan Lagrangian ifadesini hatırlatalım (Monaghan, J.J., Price D.J., 2001):

$$L = \int \rho \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} - u(\rho, s) \right] dV \tag{2.44}$$

Bu denklemde ρ yoğunluk, s entropi ve u birim kütle için termal enerjiyi belirtmekte olup, entegrasyon ise hacim üzerinde yapılmaktadır. Daha önce de belirtildiği gibi İPH yönteminde yoğunluk, parçacıkların kütleleri ve koordinatlarına bağlı olarak yazılabilmekteydi (2.22). Bu özelliği sayesinde İPH hareket denklemlerinin bir

varyasyonel prensibi olarak yazılabilmesi kolaylaşmaktadır. (2.44) entegrali aşağıdaki gibi ayrıklaştırılırsa:

$$L = \sum_i m_i \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_i^2 - u(\rho_i, s_i)\right] \tag{2.45}$$

Burada

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \tag{2.46}$$

olarak verilmektedir.

Lagrange denklemlerinin standart formunu Greenwood (1988) *"Dinamiğin Prensipleri"* kitabında aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r_i}} = 0 \tag{2.47}$$

Standart momentum ifadesi ise Lagrangian (L) ifadesinin hıza göre kısmi türevi olarak tanımlanmaktadır (Monaghan J.J., Price D.J., 2001)

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} = m_i \boldsymbol{v}_i \tag{2.48}$$

(2.47) denklemindeki ikinci türev ifadesi aşağıdaki gibi yazılırsa:

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\sum_j m_j \frac{\partial u_j}{\partial \rho_j}\frac{\partial \rho_j}{\partial r_i} \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial r_i} = \sum_k m_k \frac{\partial W_{jk}}{\partial r_i}\left(\delta_{ij} - \delta_{ik}\right) \tag{2.50}$$

olarak çıkarılır. (2.49) denklemindeki diğer türev ifadesi ise termodinamiğin birinci yasası gereği aşağıdaki gibidir (Monaghan, J.J., Price D.J., 2001):

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\boldsymbol{P}}{\rho^2} \tag{2.51}$$

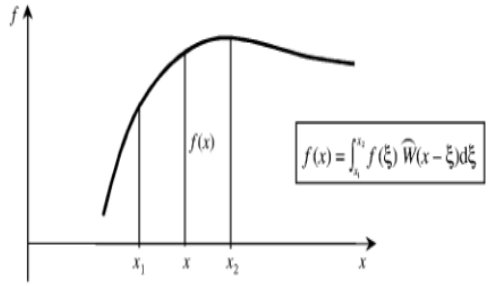
(2.49), (2.50) ve (2.51) denklemleri (2.47)'de yerine koyulursa, (2.28) denkleminde elde ettiğimiz formülasyona ulaşmış oluruz. Aynı şekilde enerji denklemleri için elde ettiğimiz denklemler de oluşturulabilir[1].

[1] Bu konuda daha detaylı bilgi için J.J. Monaghan ve D.J. Price'ın (2001) makalesine bakılabilir.

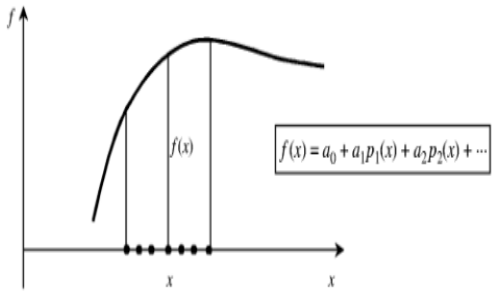
3. ÇEKİRDEK FONKSİYONLARI

3.1 Giriş

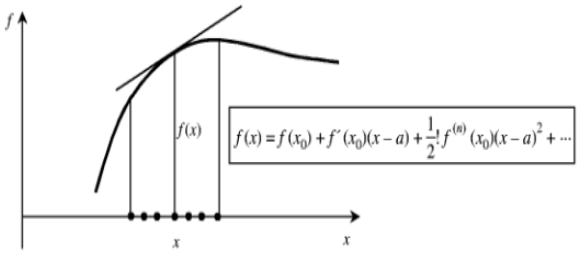
İnterpolasyonlu parçacık hidrodinamiği yönteminin en önemli noktalarından biri de çekirdek fonksiyonlarının seçilmesidir. Çünkü bu fonksiyonlar, yöntemin sayısal olarak yakınsaklığını doğrudan belirlemektedir. Önceki bölümde çekirdek fonksiyonlarının sağlaması gereken asgari koşullar belirtilmişti. Bu koşulları sağlayacak şekilde, çekirdek fonksiyonları hem analitik, hem de noktalara bağlı olarak oluşturulabilmektedir. Çekirdek fonksiyonlarının oluşturulmasında önemli bir nokta da fonksiyon yaklaşımı biçimidir. Liu (2003), bu yaklaşım biçimlerini üç ana grupta toplamıştır: 1) Sonlu Entegral Yaklaşımı, 2) Sonlu Seri Yaklaşımı, 3) Sonlu Farklar Yaklaşımı. Şekil 3.1 (a), (b) ve (c)' de bu üç yaklaşım grafik olarak gösterilmektedir.



Şekil 3.1 (a): Sonlu Entegral Yaklaşımı



Şekil 3.1 (b): Sonlu Seri Yaklaşımı



Şekil 3.1 (c): Sonlu Farklar Yaklaşımı

İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yöntemi, bir sonlu entegral yaklaşımı olarak ortaya çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi bir sonlu seri yaklaşımına, isminden de anlaşılacağı gibi sonlu farklar yöntemi de sonlu farklar yaklaşımına birer örnek olarak verilebilir (Liu, 2003).

Bu bölümde, herhangi bir alan fonksiyonuna yaklaşım için çekirdek fonksiyonunun oluşturulma koşulları anlatıldıktan sonra literatürde sık kullanılan çekirdek fonksiyonları örnek olarak gösterilecektir.

3.2 Bir Fonksiyon İçin Çekirdek Yaklaşımı

İPH yöntemi daha önce de belirtildiği gibi bir fonksiyonu tanımlarken, o fonksiyonu bir çekirdek fonksiyonu ile çarptıktan sonra bu çarpımı tanımlı olduğu alan üzerinde entegre etmekteydi.

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x')W(x - x', h)dx' \tag{3.1}$$

Eğer *f (x')* fonksiyonu *x* noktası civarında Taylor serisine açılırsa:

$$\begin{aligned} f(x') &= f(x) + f'(x)(x' - x) + \frac{1}{2}f''(x)(x' - x) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}}{k!}\left(\frac{x - x'}{h}\right) + r_n\left(\frac{x - x'}{h}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bu açılımı 3.1 denkleminde yerine koyacak olursak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\Omega} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x)}{k!}\left(\frac{x - x'}{h}\right)^k (W(x - x', h)dx' + r_n\left(\frac{x - x'}{h}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k h^k f^{(k)}(x)}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{x - x'}{h}\right)^k (W(x - x', h)dx' + r_n\left(\frac{x - x'}{h}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k f^{(k)}(x) + r_n\left(\frac{x - x'}{h}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Burada

$$A_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k h^k}{k!} \int_{\Omega} \left(\frac{x - x'}{h} \right)^k (W(x - x', h) dx' \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.3) denkleminin sağ ve sol tarafları karşılaştırıldığında, aynı dereceden terimlerin birbirine eşit olması gerektiği görülür ve böylece aşağıdaki denklem sistemi oluşur:

$$A_0 = \int_{\Omega} W(x - x', h) dx' = 1$$

$$A_1 = -h \int_{\Omega} \left(\frac{x - x'}{h} \right) W(x - x', h) dx' = 0$$

$$A_2 = \frac{h^2}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{x - x'}{h} \right)^2 W(x - x', h) dx' = 0$$

$$A_n = -\frac{(-1)^n h^n}{n!} \int_{\Omega} \left(\frac{x - x'}{h} \right)^n W(x - x', h) dx' = 0 \tag{3.5}$$

Yukarıdaki denklemler daha sade biçimde yazılırsa çekirdek fonksiyonlarının *n.* dereceden moment ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$M_0 = \int_{\Omega} W(x - x', h) dx' = 1 \tag{3.6}$$

$$M_n = \int_{\Omega} (x - x')^n W(x - x', h) dx' = 0 \tag{3.7}$$

Moment denklemlerine bakıldığında, ilk denklem, ikinci bölümde çekirdek fonksiyonlarının sağlaması gereken özelliklerden biri olan *"birim olma (unity)"* özelliği olduğunu görüyoruz. Seçilen çekirdek fonksiyonu bu denklemlerden "n" tanesini sağlıyorsa, çekirdek fonksiyonu (n-1)'inci dereceden fonksiyon olur. Aynı şekilde birinci ve ikinci türev ifadeleri için de moment ifadeleri çıkarılabilir.

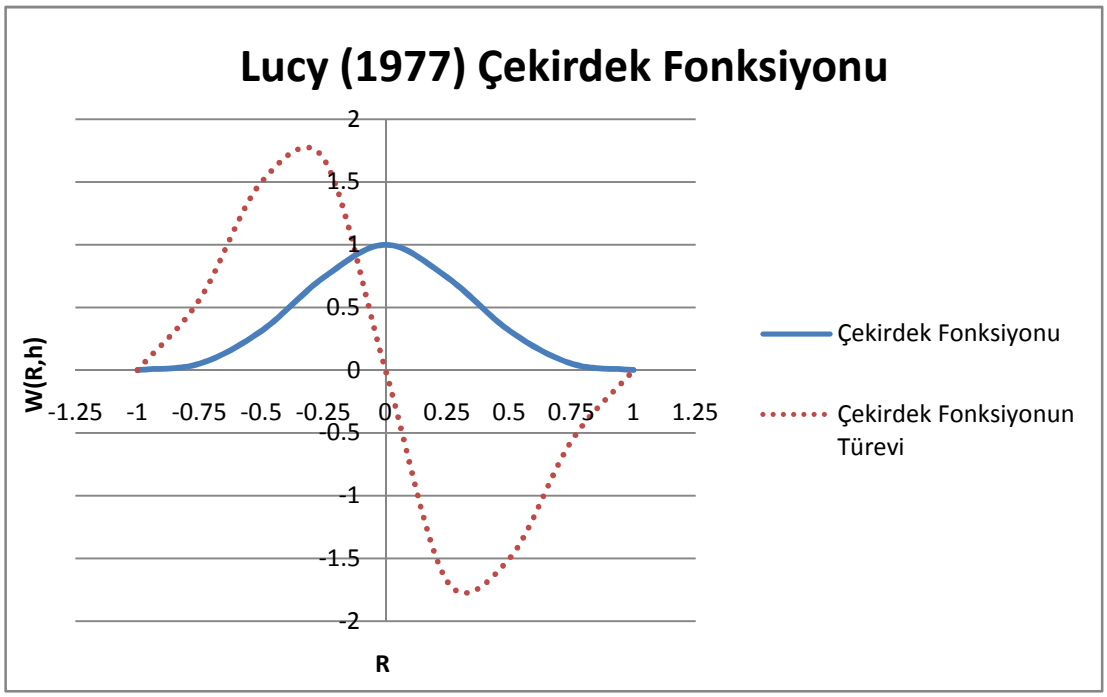
3.3 Bazı Çekirdek Fonksiyonu Örnekleri

Çekirdek fonksiyonu geliştirilmesi, İPH yöntemi ilk olarak uygulanmaya başladığı tarihten itibaren süregelen bir uğraştır. Kullanılan her bir fonksiyonun belli problemler için kendine özgü avantajları ve dezavantajları bulunabilmektedir. Daha yüksek dereceden bir fonksiyon kullanmak, bütün sayısal yöntemlerde olduğu gibi İPH yönteminde de daha iyi bir yakınsaklık sağlamaktadır. Ancak yüksek dereceden bir çekirdek fonksiyonu kullanmanın da gerekli olup olmadığı sorusunun yanı sıra çözüm süresi açısından süreci uzatan bir parametre olduğu unutulmamalıdır.

İlk olarak Lucy'nin (1977) ortaya koyduğu çan eğrisi şeklindeki fonksiyonunu örnek olarak verebiliriz:

$$W(x-x',h) = W(R,h) = \alpha_d \begin{cases} (1+3R)(1-3R)^3 & , \quad R \leq 1 \\ 0 & , \quad R > 1 \end{cases} \qquad (3.8)$$

(3.8) denklemindeki α_d katsayısı bir, iki ve üç boyutlu problemler için sırasıyla $5/(4h)$, $5/(\pi h^2)$ ve $105/(16\pi h^3)$, R ise parçacıklar arasındaki bağıl uzaklık olup $R = \frac{|x-x'|}{h}$ olarak verilmektedir. Şekil 3.2'de bu fonksiyonunun ve türev ifadesinin grafikleri gösterilmiştir.

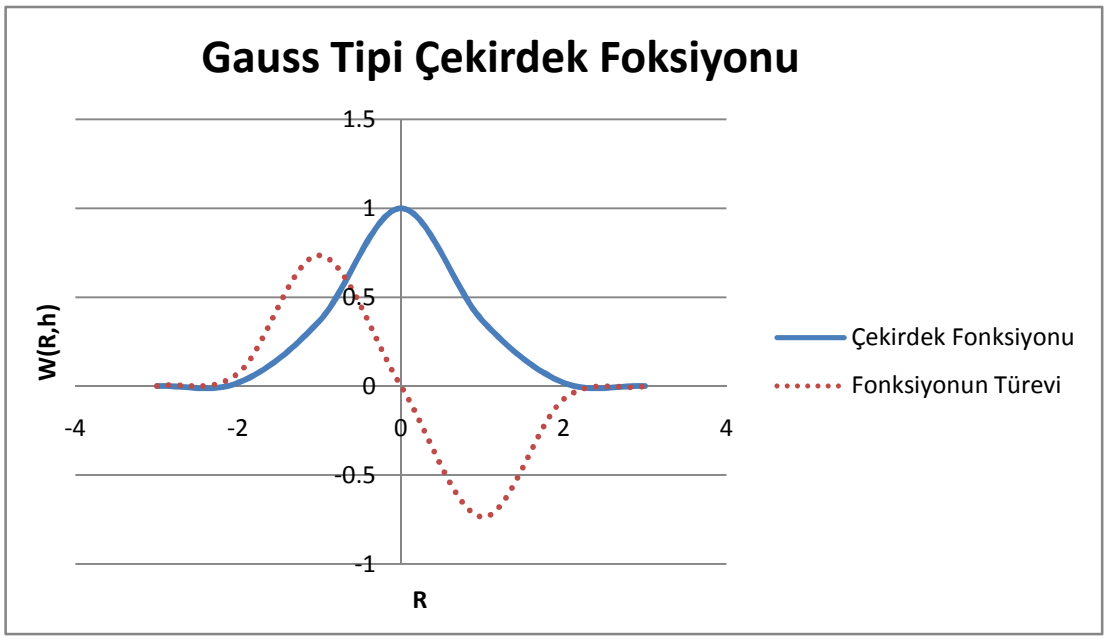


Şekil 3.2: Lucy(1977) tarafından önerilen çekirdek fonksiyonu ve türevi

Bir diğer çekirdek fonksiyonu örneği için Monaghan'nın (1992), Gauss tipi çekirdek fonksiyonunu gösterebiliriz. Bu makalesinde Monaghan çekirdek fonksiyonunun Gauss tipinde seçilmesinin, çok yüksek dereceden türev ifadelerinde bile rastgle dağıtılmış parçacık problemlerinde, sayısal stabilite ve yakınsaklık açısından en iyi çözümü verdiğini iddia etmektedir. Aşağıda Monaghan'nın önerdiği çekirdek fonksiyonunun üç boyutlu problemler için denklemi verilmektedir:

$$W(R,h) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}h}\left(\frac{5}{2h^2} - R^2\right)\exp(-R^2) \qquad (3.9)$$

Gauss tipi çekirdek fonksiyonu, teorik olarak *R* değeri sonsuza gittiğinde sıfır olduğu için geçerli olduğu bölge, tam olarak belirlenememektedir. Burada hata mertebesi $O(h^2)$ olarak verilmektedir (Monaghan J.J., 1992). Ancak fonksiyon sıfıra çok hızlı bir şekilde yakınsadığı için pratik olarak bu bölge kolaylıkla tanımlanabilmektedir. Bu fonksiyonun tek dezavantajı, fonksiyonun yüksek derecelerde türevlerini hesaplama süresinin uzun sürmesidir (Liu, Liu 2003). Şekil 3.3'te bu fonksiyonunun ve türev ifadesinin grafikleri gösterilmiştir.



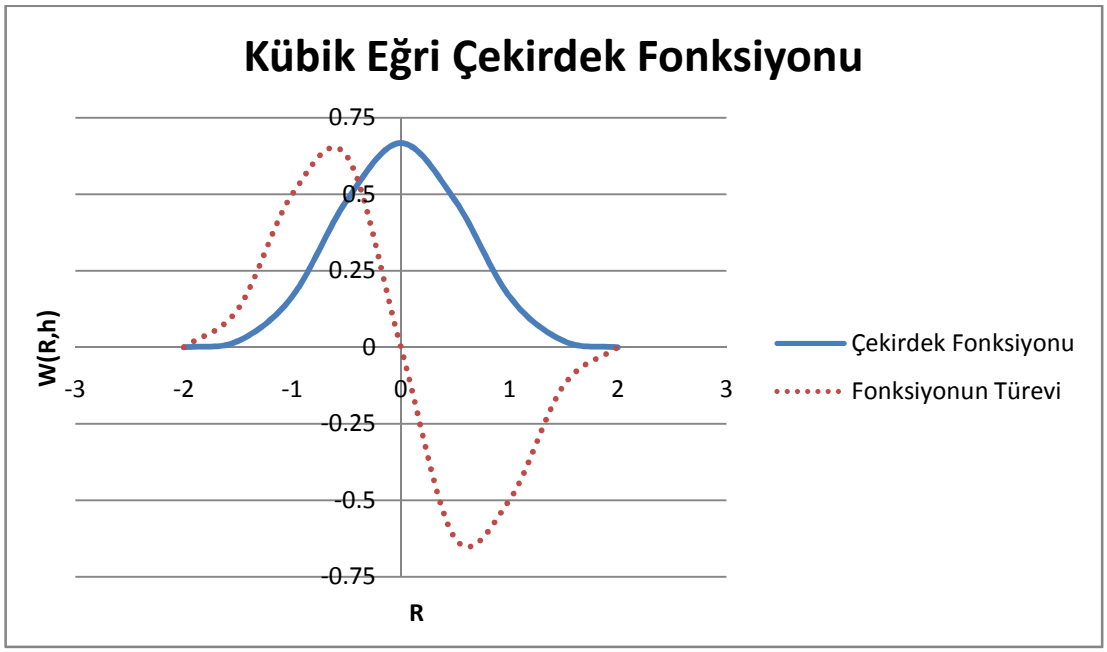
Şekil 3.3: Gauss tipi çekirdek fonksiyonu ve türevi

Bir diğer çekirdek fonksiyonu örneği olarak da Monaghan ve Lottanzio (1985), B-spline eğrilerinden yararlanarak oluşturdukları kübik-eğri (cubic-spline) çekirdek fonksiyonlarını örnek olarak göstereceğiz. Monaghan ve Lottanzio makalelerinde,

eğer üçüncü mertebeden bir hata terimi isteniyorsa tiriz (B-spline) eğrilerinin kullanılmasının uygun olacağını belirttikten sonra aşağıdaki çekirdek fonksiyonunu önermektedirler:

$$W(R,h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 & , \quad 0 \le R < 1 \\ \frac{1}{6}(2-R)^3 & , \quad 1 \le R < 2 \\ 0 & , \quad R > 2 \end{cases} \tag{3.10}$$

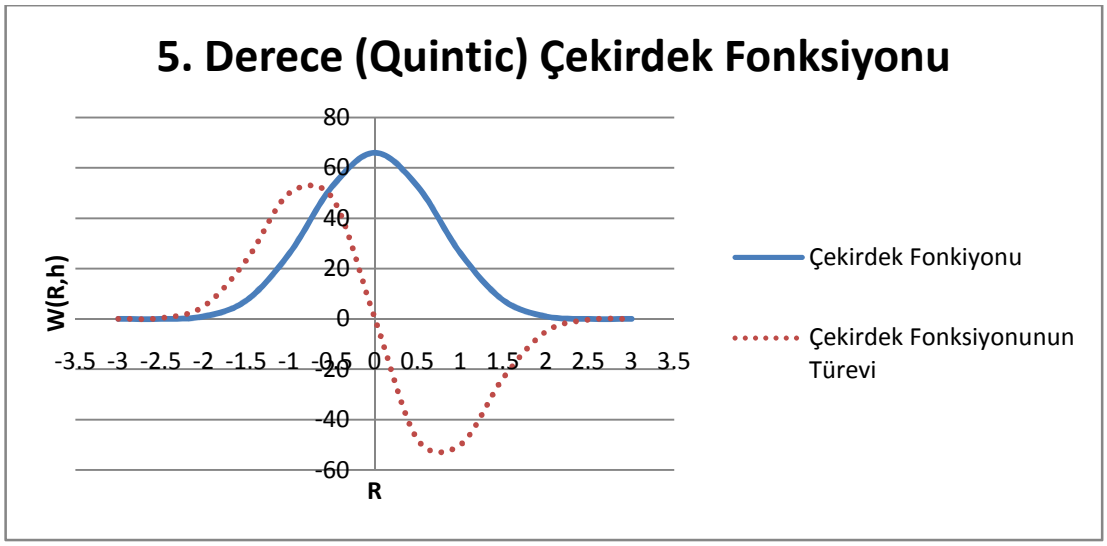
Şekil 3.4'te bu fonksiyon ve türev ifadesi grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.4: Kübik eğri çekirdek fonksiyonu ve türevi

Son olarak da bu çalışmanın uygulamalarından biri olan, bir kanal içinde iki boyutlu daimi akım problemi çözümünde kullanılan beşinci dereceden (quintic) bir çekirdek fonksiyonu örnek olarak göstereceğiz. (3.11) denkleminde bu fonksiyon ve Şekil 3.5'te bu fonksiyona ve türevine ait grafik gösterilmektedir. Fonksiyon R>3 koşulu için sıfıra eşit olmaktadır.

$$W(R,h) = \alpha_d \begin{cases} (3-R)^5 - 6(2-R)^5 + 15(1-R)^5, & 0 \le R < 1 \\ (3-R)^5 - 6(2-R)^5, & 1 \le R < 2 \\ (3-R)^5, & 2 \le R < 3 \end{cases} \tag{3.11}$$



Şekil 3.5: 5. Dereceden (Quintic) çekirdek fonksiyonu ve türevi

Grafiklerden de görüldüğü gibi *R* değeri sıfıra yaklaştıkça, fonksiyon değeri artarken, türev değeri azalmaktadır. Bu durum, daha önce de bahsedilen fonksiyonunun Dirac Delta fonksiyonuna yakınsaması özelliğinden kaynaklanmaktadır. Ayrıca fonksiyon sıfırdan uzaklaştıkça monoton olarak azalmakta ve belli bir değerden sonra sıfır olmaktadır. Böylece belli bir interpolasyon uzunluğundan daha büyük mesafedeki parçacıkların etkileşimi engellenmektedir.

4. İPH YÖNTEMİNDE PROGRAMLAMA SÜRECİ VE İKİ UYGULAMA

Bu bölümde İnterpolasyonlu parçacık hidrodinamiği yönteminde, bir bilgisayar programı oluşturmak için izlenmesi gereken adımlar ve programın kendi içindeki alt programlarının amaçları ve sırası anlatılacaktır. Daha sonra Liu ve Liu (2003) çalışmasından yararlanarak Euler denklemini çözebilen bir program yazılımı üzerinde çalışılmıştır. Bu programın daha sonra 3-Boyutlu problemler için de kullanılabilir olmasına dikkat edilmiştir. FORTRAN 90 dilinde yazılan bu program 1-Boyutlu şok-tüp problemi ile 2-Boyutlu bir daimi akış probleminde kullanılmış ve sonuçlar grafik halinde verilmiştir.

4.1 İPH Yönteminde Programlama

Liu ve Liu (2003), İPH yönteminin temel formülasyonunu kullanarak, farklı problem tipleri için bir bilgisayar programı geliştirmişlerdir. Bu çalışmaya göre programlama prosedürü aşağıdaki şekilde işlemektedir (Liu, 2003):

1. Başlangıç Modülü: Bu modül ana programın bir alt programı olup, başlangıç koşullarının, parçacıkların dağılımının, malzeme özelliklerinin ve zaman adımının belirlenmektedir.
2. Ana İPH Programı: Bu program zamana göre entegre edilecek bütün değişkenlerinin toplandığı ana programdır. Bu programın çağırdığı zaman entegrasyonu alt programına bağlı bütün modüller her zaman adımında güncellenir ve bir sonraki zaman adımına aktarılır. Ana programa bağlı zaman entegrasyonu alt programı sırasıyla aşağıdaki işlemleri yapmaktadır.

   2.1 Sınır elemanlarının oluşturulması.

   2.2 Her bir parçacığın komşuluklarının belirlenmesi. Bu işlem için *"Direk Arama (direct searching)", "Bağlantılı Liste (Linked List)"* ve *"Arama Ağacı (Tree Search)"* gibi çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu programda en basit komşuluk arama şekli olan direk arama yöntemi kullanılmıştır.

   2.3 Çekirdek fonksiyonları ve bu fonksiyonların türevlerinin her bir parçacık için hesaplanması.

2.4 Toplam yoğunluk yaklaşımı kullanılıyorsa, yoğunluğun her bir parçacık için güncellenmesi. Bu programda toplam yoğunluk yaklaşımı kullanılmıştır.

2.5 Problem tipine göre yapay viskozite kullanılacaksa, yapay viskozite kuvvetlerinin hesaplanması. Şok-tüp ve daimi akış problemlerinde yapay viskozite kullanılmıştır.

2.6 Parçacıklar arasındaki iç kuvvetlerin momentum ve enerji denklemleri kullanılarak hesaplanması. Şok-tüp problemi için denge denkleminden basınç değerlerinin hesaplanabilmesi için parçacıkların yoğunluk ve enerji değerlerinin bulunması gerekmektedir. Daimi akış problemi için ise parçacıkların sadece yoğunluk değerlerinin bulunması gerekmektedir.

2.7 Dış kuvvetlerin hesaplanması. Bu kuvvetler içine sınır elemanlarının etkisi, yer çekimi kuvveti eğer varsa herhangi bir dış kuvvet girmektedir. Şok tüp probleminde herhangi bir dış kuvvet bulunmamaktadır.

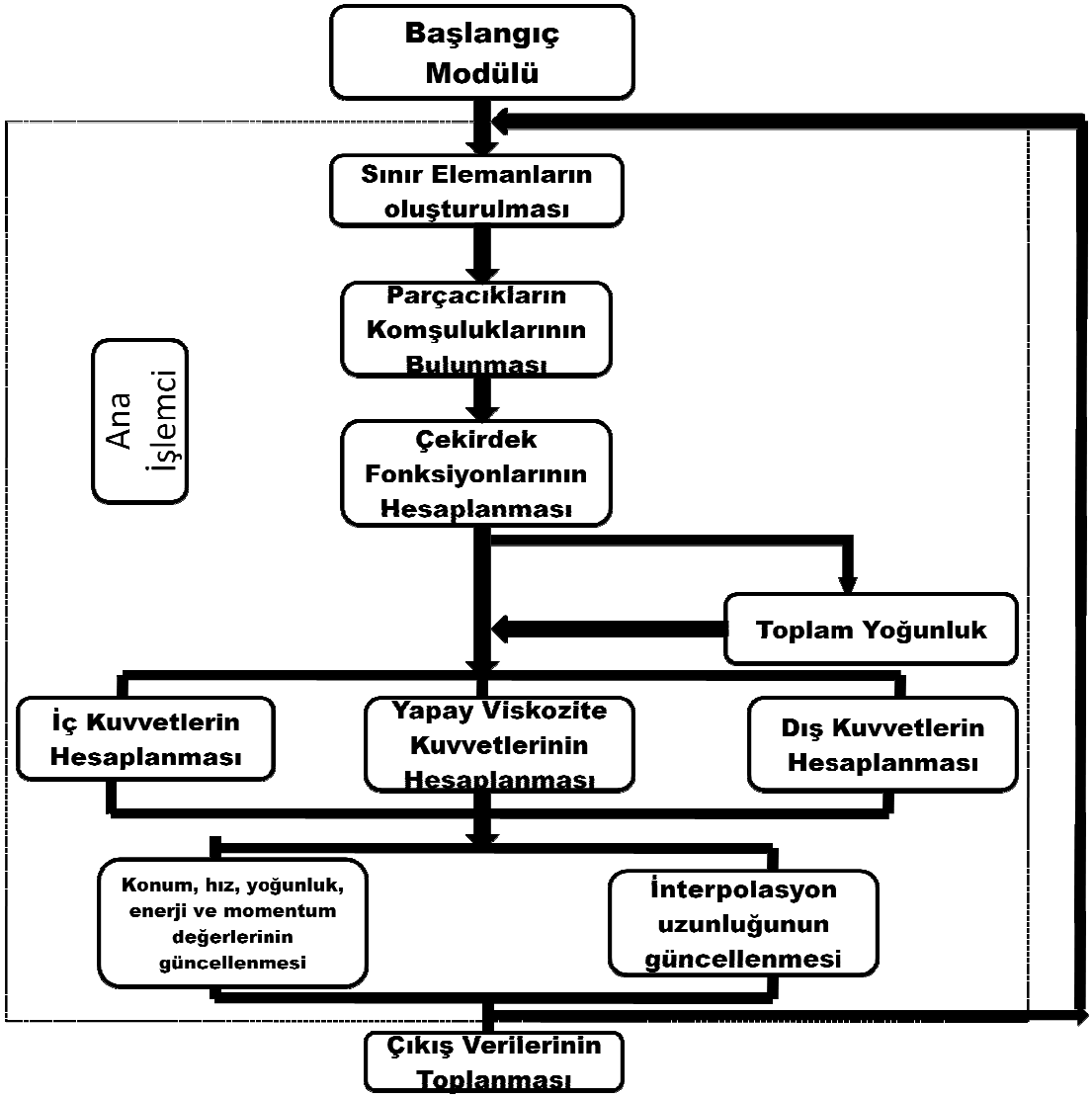
2.8 Eğer sürekli yoğunluk yaklaşımı kullanılıyorsa, her adımda toplam momentum, enerji ve yoğunluğun güncellenmesi.

2.9 Eğer sabit interpolasyon uzunluğu kullanılmıyorsa, interpolasyon uzunluğunun parçacıkların yeni konumlarına göre yeniden güncellenmesi. Şok-tüp ve daimi akış problemlerinde sabit interpolasyon uzunluğu kullanıldığı için bu adıma gerek kalmamaktadır.

3. Belli bir zaman adımı sayısına ulaşıldığında, o zamana kadar elde edilen değerlerin bir çıkış dosyasına kaydedilmesi.

Bu veriler daha sonra herhangi bir sayısal entegrasyon yöntemiyle (Leap-Frog, Runge-Kutta..vb.) entegre edilir.

Görüldüğü gibi programlama hiyerarşisinde, ana programa bağlı olarak çalışan birçok alt program bulunmaktadır. Her bir zaman adımı için ve her bir parçacık için bu adımlar sırasıyla uygulanmakta ve sonuçta bütün parçacıklar için konum, hız, yoğunluk, basınç ve iç enerji gibi tüm alan değişkenleri hesaplanmaktadır. Bu işlemler parçacık sayısına da bağlı olarak oldukça zahmetli gibi görünse de komşulukların bulunmasında farklı yöntemlerin kullanılması, paralel programlama tekniklerinin geliştirilebilmesi gibi uygulamalarla İPH yöntemi bilgisayar yükü açısından daha kolay ve hızlı bir yöntem olabilmektedir. Şekil 4.1'de İPH yönteminde programlama akış diyagramı gösterilmektedir.



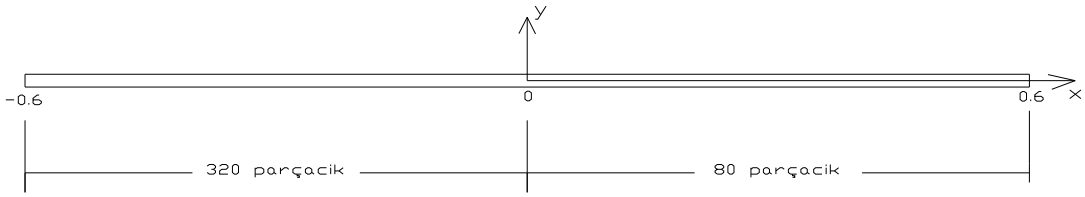
Şekil 4.1: Yazılan İPH programının akış diyagramı

4.2 Bir Boyutlu Problem Örneği: Şok-Tüp Problemi

4.2.1 Problemin Tanımlanması

Şok-tüp problemi, İPH üzerine çalışan birçok araştırmacı için yararlı bir sayısal örnek olmuştur. Problem, bir zar tarafından ikiye bölünmüş, uzun ve ince bir tüp içinde denge halinde bulunan, iki farklı yoğunluk, basınç ve enerjideki gazların, zarın aniden ortadan kaldırılmasıyla ortaya çıkan şok dalgasıyla birlikte modellenmesi ve gazların yeni durumdaki konum, yoğunluk, basınç ve enerjilerinin tespit edilmesidir. Burada, tüpün çok ince olduğu ve dolayısıyla problemin bir boyutlu olduğu kabul edilmektedir. Tahmin edilebileceği gibi şok dalgası çok yoğun ortamdan, az yoğun

ortama doğru olacaktır. Probleme ait parçacıkların başlangıç konumları Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2: Şok-tüp problemindeki parçacıkların başlangıç konumları

Parçacıkların başlangıç hız, enerji, yoğunluk ve basınç değerleri ise aşağıdaki gibidir:

$$x \leq 0 \quad \rho_1 = 1 \quad \boldsymbol{v_1} = 0 \quad e_1 = 2.5 \quad p_1 = 1 \quad \Delta x_1 = 0.001875$$

$$x > 0 \quad \rho_2 = 0.25 \quad \boldsymbol{v_2} = 0 \quad e_2 = 1.795 \quad p_2 = 0.1795 \quad \Delta x_2 = 0.0075$$

Problemin tamamı [-0.6,0.6] aralığında tanımlanmış olup, [-0.6,0.0] bölgesinde 320, [0.0,0.6] aralığında 80 parçacık olmak üzere toplam 400 parçacık ile problem tanımlanmaktadır. Başlangıç koşullarına bakıldığında, çok yoğun olan bölgenin, az yoğun olan bölgeden dört kat daha fazla parçacıkla temsil edildiği görülecektir. Başlangıç dağılımının bu şekilde seçilmesinin sebebi, süreksiz yoğunluk profilini ortaya çıkarabilmektir.

Problemin çözümünde, hareket denklemleri olarak Euler denklemleri kullanılmıştır. Yani momentum denklemlerindeki viskoz terimler ihmal edilmiştir.

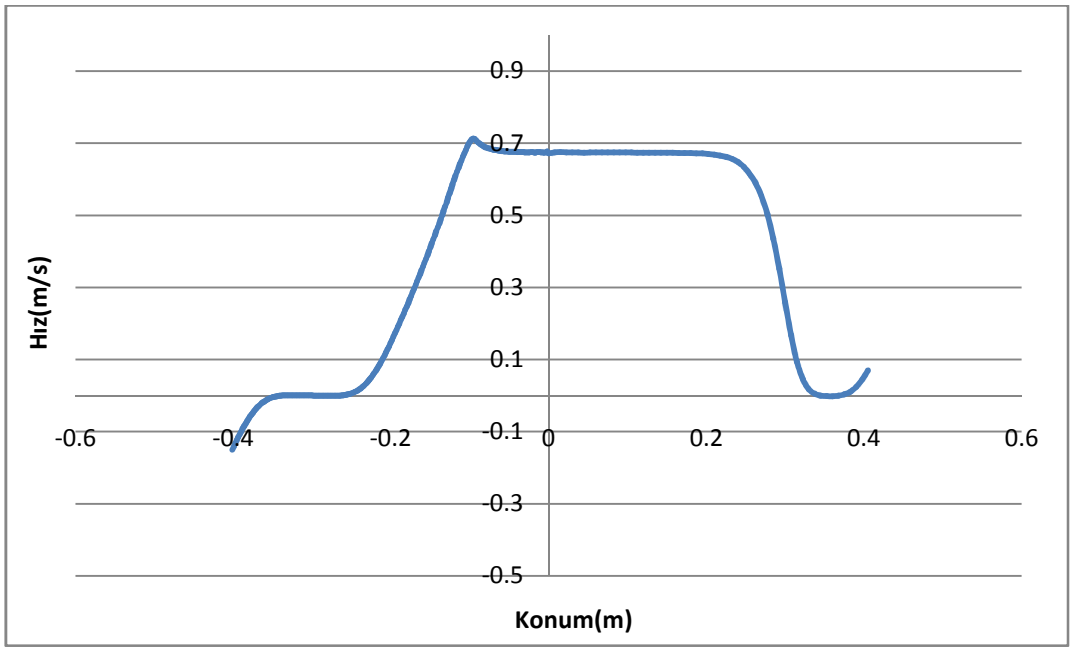
Problemin çözümü için gerekli olan hal denklemi için ideal gazlar için kullanılan aşağıdaki ifade kullanılmıştır:

$$p = (\gamma - 1)\rho e \tag{4.1}$$

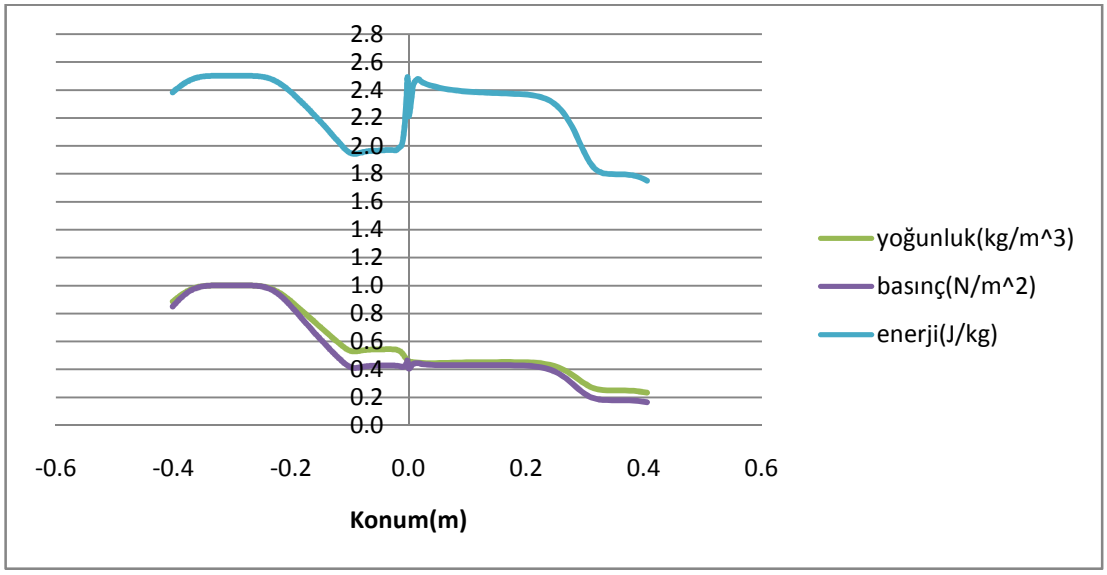
Burada γ=1.4 olarak alınmıştır. Zaman adımı 0.005s olup, program 40 adım çalıştırılmıştır. Bu problemin çözümünde çekirdek fonksiyonu olarak üçüncü bölümde anlatılan kübik eğri fonksiyonu, yapay viskozite için Monaghan (1992) formülasyonu kullanılmıştır.

4.2.2 Sonuçların Karşılaştırılması

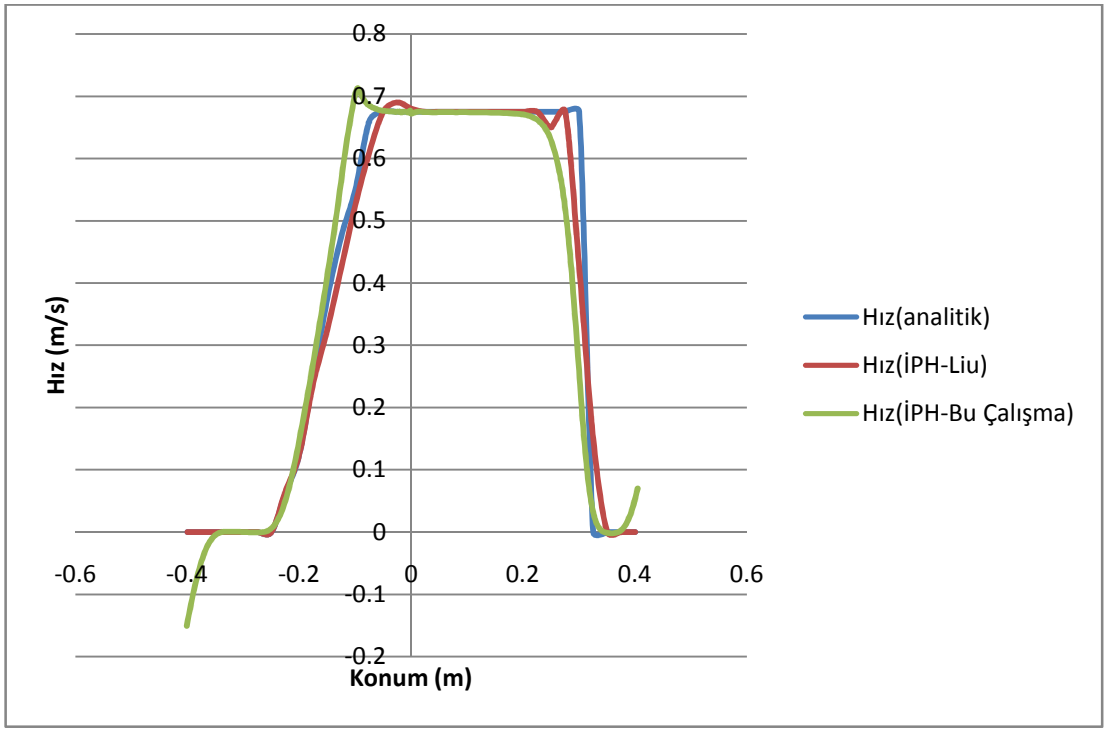
Bu tez kapsamında, Liu ve Liu (2003) tarafından verilen koddan yararlanarak bir ve iki boyutlu akımlar için Euler denklemini kullanan bir FORTRAN 90 programı geliştirilmiştir. Öncelikle geliştirilen koddan elde edilen konum-hız (Şekil4.2) ve yoğunluk, basınç, enerji (Şekil 4.3) değişimleri verilmiştir.



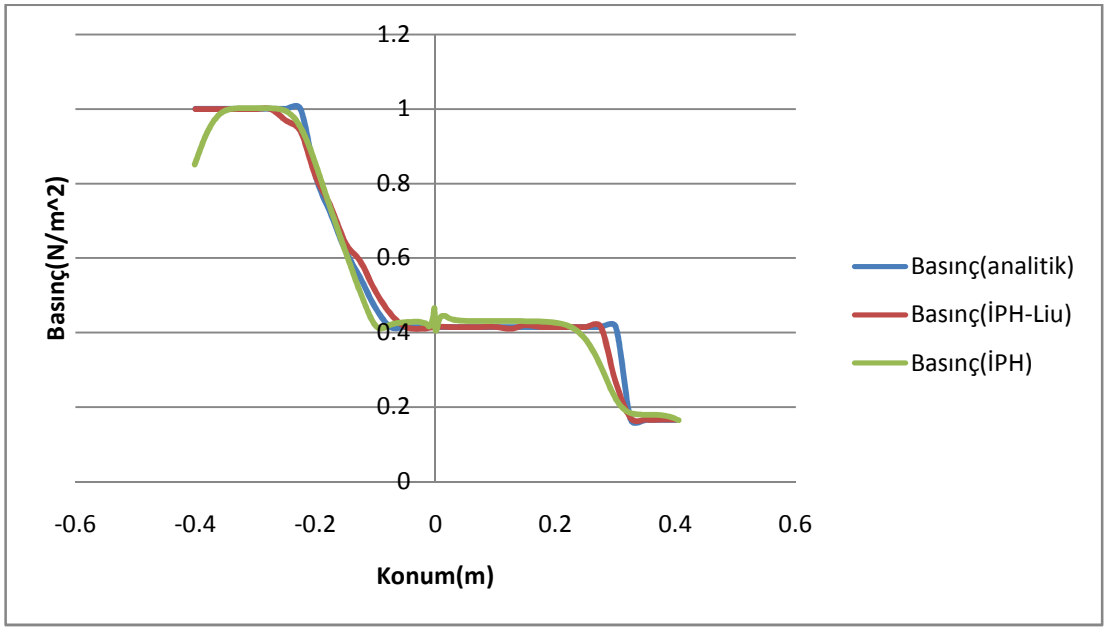
Şekil 4.3: Konum-Hız Grafiği



Şekil 4.4: Yoğunluk, Basınç ve Enerji değişiminin bir arada gösterimi



Şekil 4.5: Konum-Hız grafiği için analitik çözüm, Liu, Liu (2003) İph çözümü ve bu çalışma sonucunda çıkan sonuçların karşılaştırılması.



Şekil 4.6: Konum-Basınç grafiği için analitik çözüm, Liu, Liu (2003) İph çözümü ve bu çalışma sonucunda çıkan sonuçların karşılaştırılması.

Şekil 4.5'te hızlar, Şekil 4.6'da ise basınçlar, aynı problemin analitik çözümleri Monaghan (2005i) ve diğer bir İPH çözümü (Liu, Liu, 2003) ile karşılaştırmalı olarak verilmektedir. Bu şekilde bakıldığında, belirlenen bölgeler için bu çalışmadan elde edilen sonuçların tutarlı olduğunu görmekteyiz.

4.3 İki Boyutlu Bir Kanal İçinde Bulunan Yarım Daire Etrafındaki Akım

Bu bölümde İPH yöntemi ile bir kanal içindeki yarım daire etrafındaki akım probleminin iki boyutlu olarak çözülmesi ve elde edilen sonuçlar verilecektir. Daha sonra çıkan sonuçların aynı problemin bir paket programı ile edilen sonuçlarıyla karşılaştırılması yapılacak ve son olarak da bu çalışmada oluşturulmaya çalışılan iki boyutlu kodun geliştirilmesi gereken yönleri belirtilecektir.

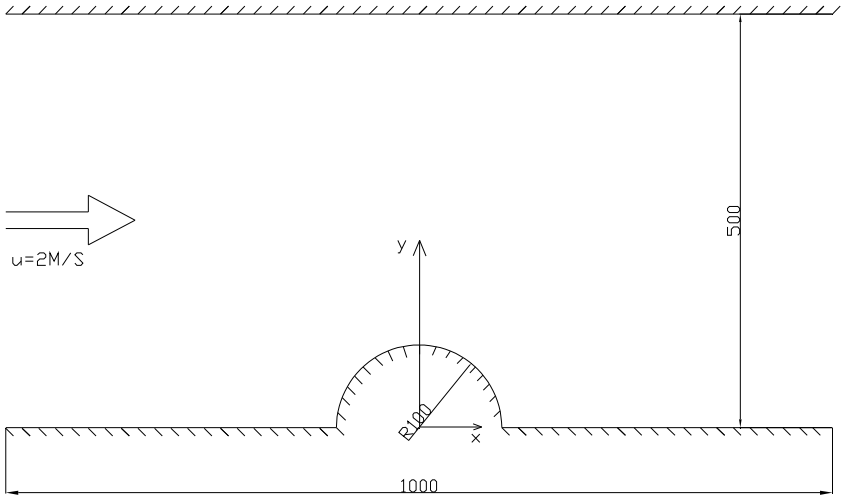
4.3.1 Problemin Tanımlanması

Bu çalışmada iki boyutlu bir uygulama olarak boyutları Şekil 4.6' da verilen bir kanal içindeki akım incelenmiştir. Burada koordinat ekseni merkezi olarak dairenin merkezi alınmıştır. Bu problemin İPH yöntemi ile çözülmesi için gerekli olan parçacıklar tüm kanal içinde genişlik yönünde 40 ve boy yönünde 84 adet olacak şekilde dağıtılmıştır. Her bir parçanın kütlesi 0.015 olarak alınmıştır. Böylece başlangıç için toplam 3360 adet parçacık kullanılmıştır. Ancak sistemin sürekli olarak beslenmesi gerektiği için bir sıra parçacığın önündeki sıraya gelebilmesi için gerekli zaman adımı hesaplanmalı ve bu zaman adımına ulaşıldığında sisteme bir sıra (40 adet) daha parçacık eklenmektedir. Dolayısıyla sistemdeki parçacık sayısı sürekli olarak artmaktadır.

İki boyutlu daimi akış probleminin hareket denklemleri olarak, ikinci bölümde açıklanan momentum denklemleri Euler kabulüyle (viskoz terimler ihmal edilerek) birlikte kullanılmıştır.

Bir başka göz önünde bulundurulan husus da parçacık hareketlerinin ne şekilde başlatılacağı, yani başlangıç koşullarıdır. Bu çalışmada parçacıkların ilk hız değerleri olarak, bir daire etrafındaki potansiyel akım denklemlerinden yararlanılmış ve buradan her bir parçacık için hesaplanan hız değerleri başlangıç koşulu olarak kabul edilmiştir.

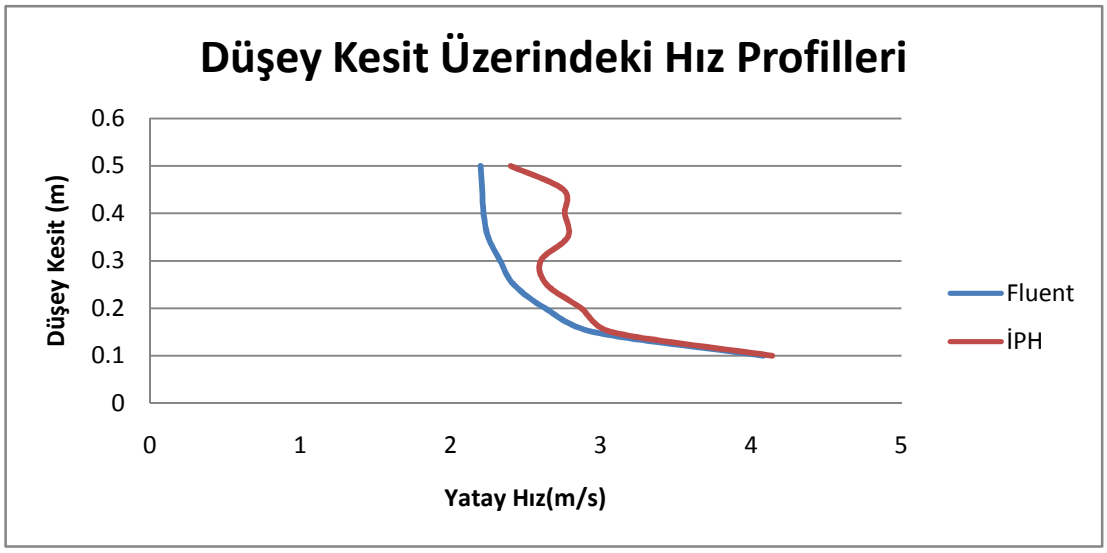
Problemin çözümünde gerekli olan yapay viskozite denklemleri bir önceki örnekte kullanılan denklemleri, yapay sıkıştırılabilirlik için gerekli olan hal denklemi için de (2.40) denklemi kullanılmıştır. Çekirdek fonksiyonu olarak ise beşinci dereceden (quintic) bir çekirdek fonksiyonu kullanılmıştır (Liu, Liu 2003). Böylece parçacık sisteminin sayısal olarak stabilitesinin arttırılması hedeflenmiştir.



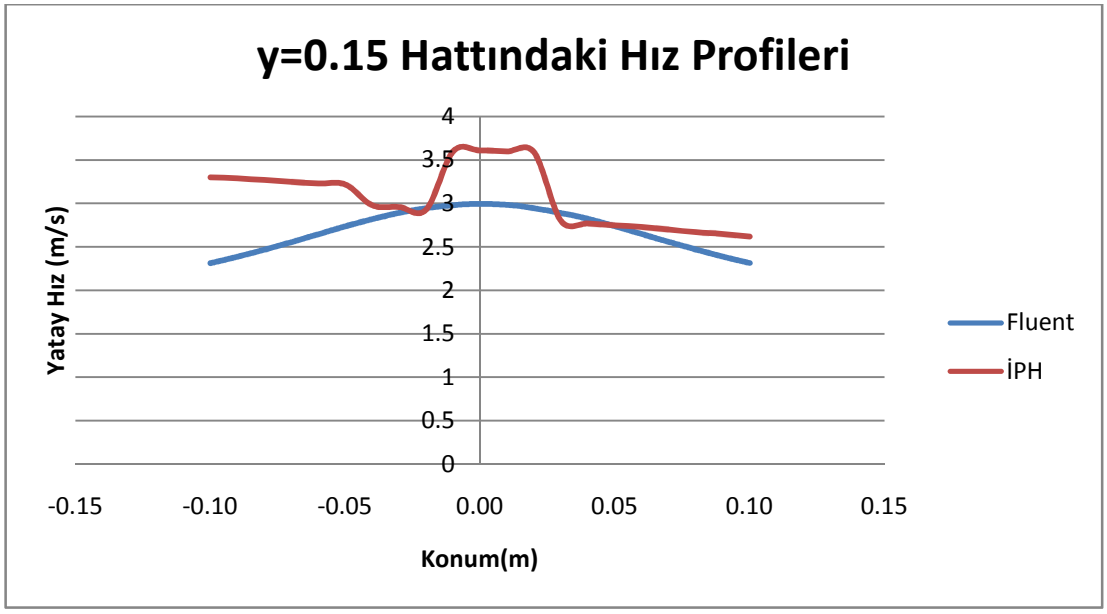
Şekil 4.7: İki Boyutlu Bir Kanal İçinde Bulunan Yarım Daire Etrafındaki Akım

4.3.2 Sonuçların Karşılaştırılması

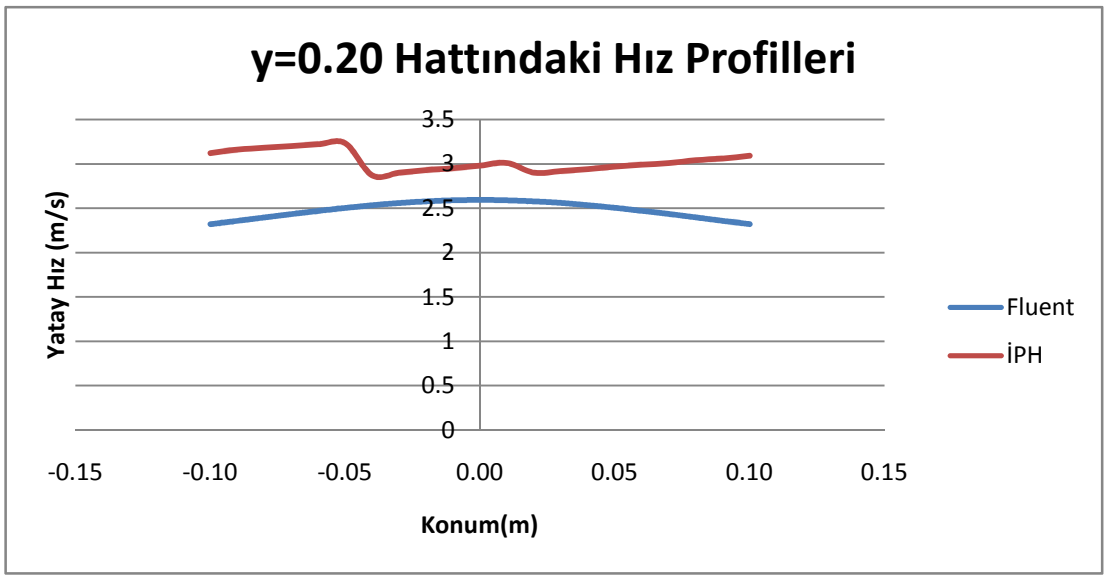
Problemin çözümünün kontrol edilebilmesi için aynı problemin FLUENT paket programında çözümü yapılmıştır ve karşılaştırma yapabilmek için problemin tanımlı olduğu alan içinde bazı düşey ve yatay kesitler alınmıştır. Düşey kesit olarak dairenin merkezinden geçen ve kanalın üst sınırına kadar olan bir doğru alınmıştır. Yatayda ise dairenin başlangıç ve bitiş noktaları arasında ($-0.1<x<0.1$) ve sırasıyla $y=0.15$, $y=0.20$ ve $y=0.25$ yüksekliklerinden kesitler alınmıştır. Bu kesitler üzerinde oluşan yatay hız bileşeni profillerinin, $t=0.025s$ anındaki FLUENT (Euler denklemleri çözümüyle) ve İPH yöntemlerindeki çözümleri Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'de verilmiştir.



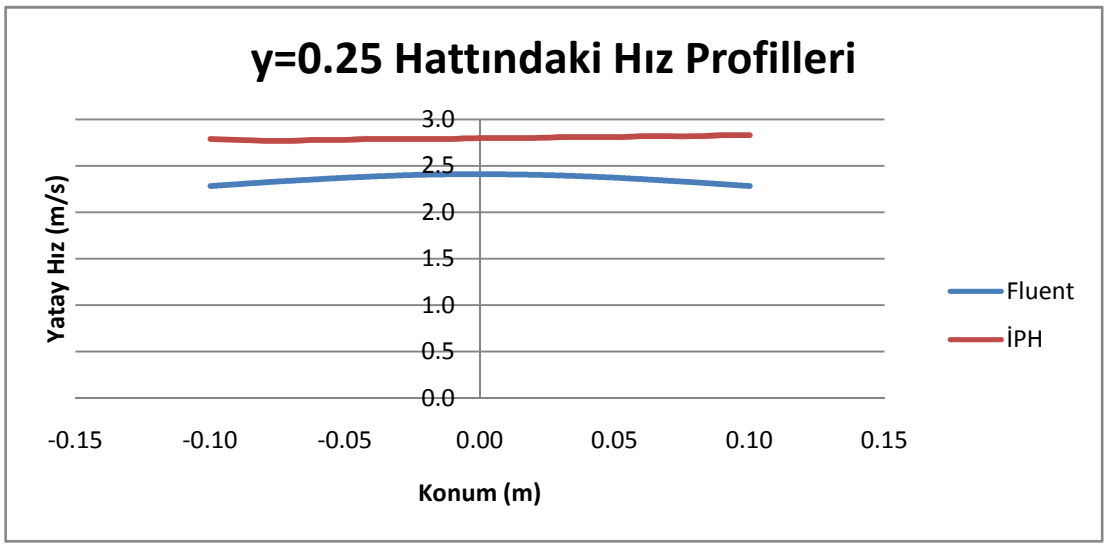
Şekil 4.8: Düşey kesit üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.9: y=0.15 Yatay kesiti üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması

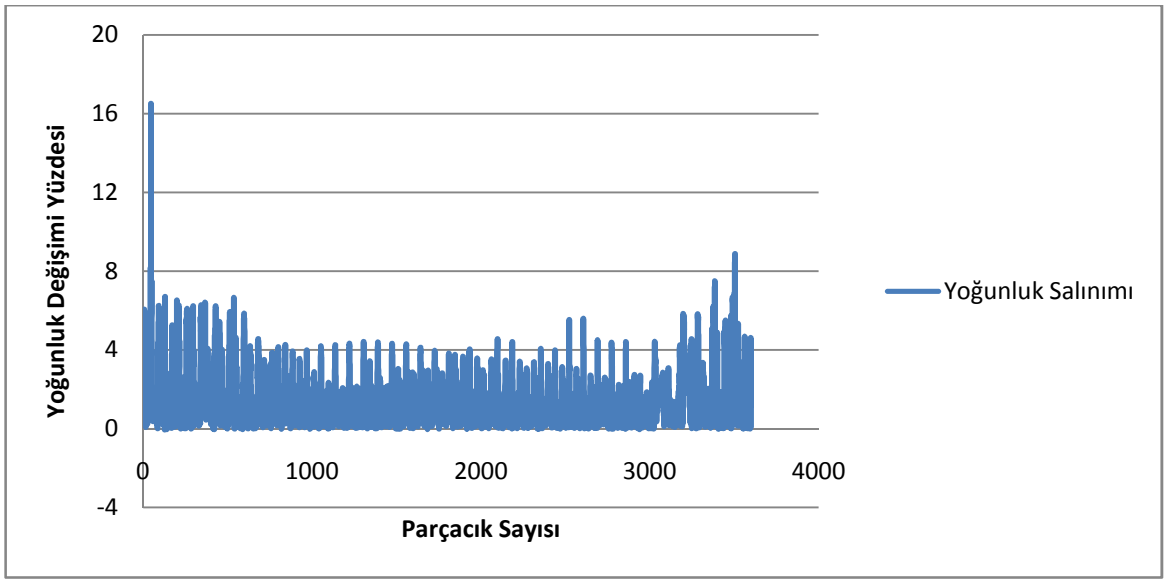


Şekil 4.10: y=0.20 Yatay kesiti üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.11: y=0.25 Yatay kesiti üzerindeki yatay hız bileşenlerinin karşılaştırılması

Bir başka sağlanması gereken özellik olan ve yapay sıkıştırılabilirliğin sınırlarını belirleyen kıstas da yoğunluk salınımlarıdır. Bu değer için literatürde önerilen maksimum değer %1 ile %3 arasındadır. Bu çalışmada elde edilen yoğunluk değişimi grafiği de Şekil 4.12'de verilmektedir.



Şekil 4.12: Parçacıkların Yoğunluk Salınımlarının Gösterimi

Şekil 4.12'den görüleceği gibi yoğunluk salınımları ortalama %3 seviyesinde kalmakta ancak bazı parçacıklar için bu sınır aşılmaktadır.

5. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMALAR

Bu çalışma, İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yönteminin anlaşılmasına ve uygulanmasına bir giriş niteliği taşımaktadır. Dolayısıyla yöntemin temel yaklaşımları, momentum denklemlerinin bu yaklaşım ile ifade ediliş biçimleri anlatılmaya çalışılmış ve çekirdek fonksiyonlarının tanımlanması gösterilmiştir. Yönteme dair bu temel yaklaşımların tanımlanmasından sonra, bir boyutlu görece basit bir problem üzerinde yöntemin bir uygulaması sunulmuştur. Ancak iki ve üç boyutlu problemler için yöntem üzerinde daha detaylı bilgi ve tecrübe birikimi gerekmektedir. Bunun yanı sıra, sınır elemanların tanımlanması, sayısal stabilite sorunlarının giderilmesi, denge denklemleri üzerinden tanımlanan basınç değerlerinin irdelenmesi, interpolasyon uzunluğu ve zaman adımı gibi problemin çözümünü direk olarak etkileyen parametrelerin doğru olarak tayin edilmesi gibi sorunlar hala devam etmektedir. Yöntem, bilim dünyasında hala geliştirilmekte olan bir süreçten geçtiği için, belli bazı iyileştirilmeler olmasına rağmen, henüz bu sorunlara tam bir çözüm bulunamamıştır.

Bu yöntem ile ilgili olarak gelecekte ise, öncelikle sayısal stabilite sorunlarının giderilmesi üzerinde çalışılması gerekmektedir. Bu problemin çözümünden sonra, probleme serbest su yüzeyi etkisinin de katılması ve daha sonra üç boyutlu bir cisim üzerine gelen akımın modellenebilmesi planlanmaktadır. Ulaşılması hedeflenen nihai nokta ise bir gemi etrafında oluşan akımın İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yöntemiyle modelleyebilmek ve şiddetli akım problemlerinde (çalkantı, dalga kırılması ve şok gibi) sayısal modeller sunabilmektir.

KAYNAKLAR

Batchelor, G.K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics, *Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.*

Barlett, M.S., 1963. Statistical Estimation of Density Functions, *Shankaya:The Indian Journal of Statistics,* **25**, 245-254

Bonet, J. and Kulasegaram S., 2000. Correction and stabilization of smoothed particle hydrodynamics method with applications in metal forming simulations, *International Journal for Numerical Methods İn Engineering,* **47,** 1189-1214

Boneva, L.I., Kendall, D. and Stepanov, I. 1971. *Journal of Royal Statistical Society,* **33,** 1-71

Greenwood, D.T., 1988. Principles of Dynamics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey

Johnson, G.R. and Beissel, S.R., 1998. Normalised Smoothing Functions for SPH İmpact Computations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **39,** 2725-2741

Libersky, L. and Petschek, A.G., 1991. Smoothed Particle Hydrodynamics with Strength of Materials, *in H. Trease, J. Fritts and W. Crowley (ed): Proceedings of The Next Free Language Conference, Springer-Verlag, NY*, **395,** 248-257

Liu, G.R. and Liu, M.B., 2003. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method, World Scientific

Liu, G.R., 2003. Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method, CRC Press, New York

Lucy, L.B., 1977. Numerical Approach to Testing The Fission Hypothesis, *Astronomical Journal,* **82,** 1013-1024

Monaghan, J.J., 1992. Smoothed Particle Hydrodynamics, *Annual Reviews of Astronomical and Astrophysics*, **30**, 543-574

Monaghan, J.J., 1994. Simulating Free Surface Flow with SPH, *Journal of Computational Physics,* **110,** 399-406

Monaghan, J.J., 1997. SPH and Riemann Solvers, *Journal of Computational Physics,* **52,** 374-389

Monaghan, J.J., 2005(i). Smoothed Particle Hydrodynamics, *Reports on Progress in Physics,* **68,** 1703-1759

Monaghan, J.J., 2005(ii). Smoothed Particle Hydrodynamics Notes, School of Mathematical Sciences Monash University

Monaghan, J.J. and Gingold, R.A., 1977. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical Stars, *Monthly Notices of The Royal Astronomical Society,* **181,** 375-389

Monaghan, J.J. and Lottanzio, J.C., 1985. A Refined Particle Method for Astrophysical Problems, *Astronomy and Astrophysics,* **149,** 135-143

Monaghan, J.J. and Price D.J., 2001. Variational Principles for Relativistic Smoothed Particle Hydrodynamics, *Monthly Notices of The Royal Astronomical Society,* **328,** 381-392

Müller, M., Schirm, S. and Teschner, M., 2004., Interactive Blood Simulation for Virtual Surgery Based On Smoothed Particle Hydrodynamics, Technology and Health Care, **12,** 25-31

Natanson, I.P., 1960, Theory of Functions of a Real Variable, New York: Ungar

Parzen, E., 1962. On Estimation of a Probability Density Function and Mode, *The Annals of Mathematical Statistics,* **33,** 1065-1076

Price, D.J. and Monaghan, J.J., 2004a. Smoothed Particle Magnetohydrodynamics: I. Algorithms and Tests in One Dimension, *Monthly Notices of Royal Astronomy Society,* **348,** 123-138

Swegle, J.W. and Attaway, S.W., 1995. On the Feasibility of Using SPH, for underwater explosion calculations, *Computational Mechanics*, **17,** 151-168

Von Neumann, 1944. Proposal and Analysis of a New Numerical Method For Treatment Hydrodynamical Shock Problems, *Von Neumann Collected Works ed A Taub (Oxford:Pergamon)*

ÖZGEÇMİŞ

Murat Özbulut, 1983 yılında İstanbul'da doğmuştur. İlköğrenimini Acıbadem İlkokulu'nda gördükten sonra orta öğrenimini Ümraniye Anadolu Lisesi ve lise öğrenimini de Özel Eyüboğlu Fen Lisesi'nde tamamlamıştır. 2001 yılında girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği bölümünden 2006 senesinde mezun olmuştur. Halen aynı fakültede araştırma görevlisi olarak çalışmakta ve lisansüstü eğitimini sürdürmektedir.