İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARININ BENZERLİK ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Hale AYTAÇ

Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Programı : **MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ**

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARININ BENZERLİK ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Hale AYTAÇ

(509051005)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2008

Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Haziran 2008

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nalan ANTAR

Diğer Jüri Üyeleri Yrd. Doç. Dr. İlkay BAKIRTAŞ AKAR (İ.T.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Güler GAYGUSUZOĞLU (N.K.Ü.)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında desteğini her zaman arkamda hissettiğim danışman hocam sayın Doç. Dr. Nalan ANTAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Gülçin M. MUSLU, Arş. Gör. Ali DEMİRCİ, Arş. Gör. Derya ŞAHİN, Arş. Gör. Ali DİNLER, Arş. Gör. Şenay PASİNLİOĞLU, Arş. Gör. Sevgi HARMAN'a her zaman yanımda oldukları ve tez çalışmam sırasında maddi-manevi desteklerini benden esirgemedikleri için çok teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde, şüphesiz en büyük payın sahibi olan değerli ve çok sevgili aileme teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında bana gerekli ortamı sağlayan İTÜ Matematik Bölümüne, değerli hocalarıma ve meslektaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2008 Hale AYTAÇ

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **v**
ŞEKİLLER LİSTESİ **vi**
SEMBOL LİSTESİ **vii**
ÖZET **viii**
SUMMARY **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNMAYAN YER ÇEKİMİ AKIMLARI **5**
2.1. İçerisinde Parçacık Bulunmayan Yer Çekimi Akımı İçin Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Elde Edilmesi 5
2.2. Boyutsuzlaştırma 9
2.3. Sınır Koşulları 9
2.4. Boyut Analizi Altında Benzerlik Çözümlerinin Elde Edilmesi 10

3. İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARI **15**
3.1. İçerisinde Parçacık Bulunan Yer Çekimi Akımı İçin Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Elde Edilmesi 15
3.2. Boyutsuzlaştırma 17
3.3. Sınır Koşulları 18
3.4. Hidrostatik Yaklaşım 18
3.5. Hidrostatik Olmayan Yaklaşım 19
3.6. Ortalama Alan Denklemleri 21

4. İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARI İÇİN BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ **23**
4.1. Boyut Analizi Yaklaşımı 23
4.2. Asimptotik Yaklaşım 27
4.2.1. Yaklaşım I 27
4.2.2. Yaklaşım II 30
4.3. Sınır Koşulları 34
4.4. Benzerlik Çözümlerinin Elde Edilmesi 35

5. SONUÇLAR **41**

KAYNAKLAR **42**

EKLER **44**

A. LEGENDRE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ **44**

ÖZGEÇMİŞ **50**

KISALTMALAR

Fr : Froude Sayısı
Re : Reynolds Sayısı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Parçacıksız Tek Tabakalı Yer Çekimi Akımı 6
Şekil 3.1 : Parçacıklı Tek Tabakalı Yer Çekimi Akımı 15
Şekil 4.1 : h_1 benzerlik çözümünün ζ'ya göre değişimi 40
Şekil 4.2 : φ_1 benzerlik çözümünün ζ'ya göre değişimi 40

SEMBOL LİSTESİ

ρ_1, ρ_2, ρ_3	:	yoğunluk
$\mathbf{u}$	:	Hız vektörü
U	:	Akışkanın karakteristik hızı
H	:	Akışkanın karakteristik derinliği
L	:	Akışkanın karakteristik uzunluğu
u	:	Yatay hız bileşeni
w	:	Eksenel yöndeki hız bileşeni
h	:	Yükseklik fonksiyonu
φ	:	Parçacık konsantrasyonu
$\mathbf{P}, \mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}$	:	Basınç fonksiyonları
$\frac{D}{Dt}$	:	Maddesel türev
ζ	:	Benzerlik değişkeni
$\tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{\varphi}$	:	Benzerlik çözümleri
G	:	Yer çekimi kuvveti
g	:	Yer çekimi ivmesi
g'	:	İndirgenmiş yer çekimi ivmesi
δ	:	Sığ su parametresi
λ, t	:	Boyutsal homojenlik parametreleri
v_d	:	Akışkan hacmi
x_N	:	Akımın önü
P_n	:	Birinci tür Legendre fonksiyonları
Q_n	:	İkinci tür Legendre fonksiyonları

İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARININ BENZERLİK ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLMESİ

ÖZET

Yoğunlukları birbirinden farklı iki akışkandan birinin diğerinin içine doğru yer çekiminin etkisiyle akması sonucu oluşan yer çekimi akımları bir çok doğal olay ya da insanlık etkisiyle ortaya çıkmaktadır. Yer çekimi akımları yoğunluk farkı, ısıl etkiler ya da maddenin erimesi nedeniyle oluşabilir. Fırtınalar, yoğun soğuk havanın atmosferde oluşturduğu yer çekimi akımlarıdır ve okyanuslardaki tuzlu suyun yoğunluğu diğer suyun yoğunluğuna göre daha büyük olduğundan okyanus üzerindeki akışkanın hareketi bir yer çekimi akımı oluşturur. İçerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımlarına örnek olarak ise volkanik patlamalar sonucu ortaya çıkan lavlar ve nehirlere karışan fabrika atık suları verilebilir.

İçerisinde parçacık bulunan yer çekimi probleminde akım hareketi süspansiyon yoğunluğu ile içine bırakıldığı çevreleyen akışkanın yoğunluğu arasındaki farktan kaynaklanmaktadır. Süspansiyonun yoğunluğu, karışıma katılan parçacık ve akışkanın karışıma katılma oranlarına bağlı olarak belirlenmektedir. Ancak süspansiyonda bulunan parçacıklar yer çekimi kuvvetinin etkisiyle zaman içinde tabana çökmeye başlamaktadır, yani akımı terk etmektedir. Dolayısıyla süspansiyonun yoğunluğu ve akım hareketine sebep olan yoğunluk farkı azalmaktadır. Bu nedenle, parçacıkların yer değiştirmesi ile akımın dinamiği arasında önemli bir bağlantı bulunmaktadır.

Yer çekimi akımlarının hareketini analiz etmek için genellikle sığ su teorisi kullanılır ve bu bağlamda sığ su denklemlerinden yararlanılır. Sığ su denklemleri hiperbolik tipte diferansiyel denklemlerdir. Başlangıç koşulu düzgün bile olsa hiperbolik tipte diferansiyel denklemlerin çözümünde belli bir t zamanından sonra süreksizlikler oluşabileceğinden sığ su denklemlerinde de süreksizliğin söz konusu olduğu durumlarda çözüme ulaşmak için sayısal çözüm yönteminin bu süreksizliği ortadan kaldıracak şekilde uygulanması gerekir.

Benzerlik çözümlerini analitik olarak elde etmek için boyut analizi literatürde sık kullanılan bir yöntemdir. Boyut analizi altında yapılan tüm calışmalarda benzerlik değişkeni $\zeta = \frac{x}{bt^{\delta}}$ formunda ele alınmıştır. Burada δ sayısal bir sabittir. Bu benzerlik değişkeni kullanılarak yapılan dönüşüm neticesinde orijinal diferansiyel denklem sisteminin özel bir formda indirgenmiş olan yapısı elde edilmektedir.

Bu tez çalışmasında, içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımının benzerlik çözümleri, parçacıksız durumda boyut analizi tekniğiyle analitik olarak elde edilen benzerlik çözümleri üzerinden asimptotik açılım uygulamak suretiyle yaklaşık olarak bulunacaktır.

FINDING SIMILARITY SOLUTIONS OF PARTICLE DRIVEN GRAVITY CURRENTS VIA ASYMPTOTIC METHODS

SUMMARY

Gravity currents which consist of fluid of one density flowing under the influence of gravity into fluid of another density, occur in many natural and man-made situations. The density difference in gravity currents can be caused by thermal effects or as the result of dissolved material. Storms are the gravity currents that caused by the dense cold air in the atmosphere and the salt water drives a motion being more dense then water in the ocean. Volcanic eruptions and industrial waste waters that get into the rivers are the examples of particle-driven gravity currents.

Particle-driven gravity currents occur because of the density differences of the suspension and the ambient fluid. The bulk density of the suspension depends on the concentration of the particles. However particles in the suspension settle out in time. Thus the bulk density of the suspension and also the density difference which drives the motion decay with time. Hence there is an important relation between the particle concentration and the dynamics of the current.

Shallow water equations are usually used to analyze the motion of the gravity currents. Shallow water equations are hyperbolic differential equations. In hyperbolic equations there would be discontinuities even if the initial conditions are smooth. In that case, numerical methods are used in a convenient way so that these discontinuities are removed.

In the literature, dimensional analysis is widely used to determine similarity solutions. The similarity variable in all related studies is usually considered as $\zeta = \frac{x}{bt^{\delta}}$ where δ is a numerical constant. After the change of variables directed to this similarity variable gives a special reduced form of the original governing equations.

In this thesis, the similarity solutions of the particle-driven gravity currents will be determined by using asymptotic methods to derive the solutions from the similarity solutions of homogeneous gravity currents determined by dimensional analysis.

1. GİRİŞ

Yoğunlukları birbirinden farklı iki akışkandan birinin diğerinin içine doğru yer çekiminin etkisiyle akması sonucu oluşan yer çekimi akımları yoğunluk akımları olarak da adlandırılmaktadır ve bir çok doğal olay ya da insanlık etkisiyle ortaya çıkmaktadır. Yer çekimi akımları yoğunluk farkı, ısıl etkiler ya da maddenin erimesi nedeniyle oluşabilir. Fırtınalar, yoğun soğuk havanın atmosferde oluşturduğu yer çekimi akımlarıdır ve okyanuslardaki tuzlu suyun yoğunluğu diğer suyun yoğunluğuna göre daha büyük olduğundan okyanus üzerindeki akışkanın hareketi bir yer çekimi akımı oluşturur. İçerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımlarına örnek olarak ise volkanik patlamalar sonucu ortaya çıkan lavlar ve nehirlere karışan fabrika atık suları verilebilir. Sıvılar üzerinde yer çekimi etkisiyle oluşan akım hareketi incelenmek istenirse barajlar ve su bendleri deneysel olarak yeterli gözlem olanağı sağlamaktadır.

Birçok deneysel ve teorik çalışmada sabit hacimli bir sıvı tarafından üretilen yer çekimi akımlarının davranışları incelenmektedir. Yer çekimi akımlarıyla ilgili en geniş kapsamlı gözlemleri Simpson [1] elde etmiştir. Yer çekimi akımlarının hareketini analiz etmek için genellikle sığ su teorisi kullanılır ve bu bağlamda sığ su denklemlerinden yararlanılır. Sığ su denklemleri hiperbolik tipte diferansiyel denklemlerdir. Başlangıç koşulu düzgün bile olsa hiperbolik tipte diferansiyel denklemlerin çözümünde belli bir t zamanından sonra süreksizlikler oluşabileceğinden sığ su denklemlerinde de süreksizliğin söz konusu olduğu durumlarda çözüme ulaşmak için sayısal çözüm yönteminin bu süreksizliği ortadan kaldıracak şekilde uygulanması gerekir. Sığ su denklemlerinin çözümleri elde edilirken sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, spektral metodlar [2] gibi birçok sayısal çözüm yöntemi kullanılmaktadır. Ayrıca McCormack'ın [3] ve [4] Godunov'un metodları standart olarak kullanılan sayısal metodlardır. Korunum yasaları şeklinde ifade edilen denklem sistemlerinin çözümünü elde etmek için Jin ve Xin [5] tarafından kullanılan sonlu farklar yöntemi olan

rölaksasyon yöntemi kullanılan yöntemlerden birisidir. D'Alessio ve diğerleri [6], belli miktarda bir ağırlığa sahip sıvıyı dikdörtgen bir kanalda yatay bir şekilde serbest bırakarak oluşan yer çekimi akımı problemini McCormak yöntemini kullanarak incelemişlerdir ve hiperbolik sistemi sayısal olarak integre ederek çözümün deneylerden elde edilen verilerle uygun sonuçlar verdiğini gözlemlemişlerdir.

Parçacıklı yer çekimi akımları, içerisinde yoğunluğu karışıma katılan akışkanın yoğunluğundan büyük olan parçacıklar bulunan bir süspansiyonun, kendi yoğunluğundan daha düşük yoğunluklu başka bir akışkan içine bırakılmasıyla meydana gelen yer çekimi akımlarıdır. Akım hareketi süspansiyon yoğunluğu ile içine bırakıldığı çevreleyen akışkanın yoğunluğu arasındaki farktan kaynaklanmaktadır. Süspansiyonun yoğunluğu, karışıma katılan parçacık ve akışkanın karışıma katılma oranlarına bağlı olarak belirlenmektedir. Ancak süspansiyonda bulunan parçacıklar yer çekimi kuvvetinin etkisiyle zaman içinde tabana çökmeye başlamaktadır, yani akımı terk etmektedir. Dolayısıyla süspansiyonun yoğunluğu ve akım hareketine sebep olan yoğunluk farrkı azalmaktadır. Bu nedenle, parçacıkların yer değiştirmesi ile akımın dinamiği arasında önemli bir bağlantı bulunmaktadır [7, 8].

Literatürde, içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımları ile ilgili birçok sayıda çalışma yer almaktadır ve bu çalışmaların büyük bir kısmında akımın yatay bir düzlem üzerinde seyrettiği kabul edilmektedir [7–9]. Ayrıca vizkoziteler ihmal edilmektedir. Akımın ön kısmında hareket durağan değildir. K*árm*á*n* [10] akımın ön kısmının dinamiğini Bernoulli denklemlerinden yararlanmak suretiyle incelemiş; elde edilen sonuçlar daha sonra Benjamin [11] tarafından düzeltilmiştir. Her ikisi de akımın ön kısmındaki hızını gösteren u_N ile akımın buradaki yüksekliğine karşı gelen h_N arasında şu şekilde bir ilişki olduğunu göstermiştir: $u_N = Fr(g'h_N)^{1/2}$ [7]. Burada Fr, Froude sayısını göstermekte ve sabit olarak alınmaktadır. Benjamin, Fr sayısının akışkanın ön kısmının yüksekliğinin çevreleyen akışkanın derinliğine oranına bağlı olduğunu ve çok derin sıvı içine daldırılan akımlar için teorik olarak $\sqrt{2}$ değerini aldığını göstermiştir [11]. Huppert ve Simpson ise bu değeri yarı deneysel olarak $Fr = 1.19$ şeklinde bulmuşlardır [12]. Bu çalışma içerisinde de $Fr = 1.19$ değeri kullanılacaktır.

Bonnecaze ve diğerleri tek tabakalı ve iki tabakalı model üzerinde parçacıklı yer çekimi akımı problemini ele almışlar, ortaya çıkan hiperbolik tipte diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmüşler ve deneysel çalışmalarla uyumlu sonuçlar elde etmişlerdir [7, 8]. Sayısal çözümleri elde etmek için iki adımlı Lax-Wendroff yöntemini kullanmışlardır [7]. Hogg ve diğerleri [8] parçacıklı yer çekimi akımı problemini asimptotik ve kutu modeli kullanarak incelemişlerdir.

Bu çalışmada yapılmak istenen içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımlarını modellemek ve bunların benzerlik çözümlerini elde etmektir. Ancak, bunun için öncelikle parçacıksız durum ele alınmakta ve parçacıksız durumda benzerlik çözümleri boyut analizi tekniği kullanılarak bulunmaktadır.

Benzerlik analizindeki temel yaklaşım, orijinal denklem veya denklem sisteminin adi türevli bir denklem veya denklem sistemine indirgenmesini sağlayacak olan benzerlik değişkeninin elde edilmesidir. Benzerlik değişkeni, orijinal denklemin bağımsız değişkenlerini içeren belirli bir fonksiyon yapısındadır. Boyut analizi yardımı ile bu fonksiyonun biçimi açık olarak elde edilebilmekte ve bu fonksiyon yardımı ile orijinal denkleme ait diğer bağımlı değişkenlerin benzerlik formları bulunabilmektedir. Sonuç olarak, bağımlı ve bağımsız değişkenlere ait benzerlik yapılarından hareketle orijinal denklemin basamağı bir mertebe düşürülebilmektedir. Buna ek olarak problemde yer alan sınır koşulları da elde edilen benzerlik dönüşümleri altında yeniden oluşturulmaktadır. Bu sayede problem artık basamağı bir mertebe düşürülmüş yeni hareket denklemleri yardımıyla ve dönüşmüş sınır koşulları altında incelenmektedir.

Boyut analizi altında yapılan tüm calışmalarda benzerlik değişkeni $\zeta = \dfrac{x}{bt^{\delta}}$ formunda ele alınmıştır. Burada δ sayısal bir sabittir [13]. Benzerlik değişkeninin bu formu boyut analizi yaklaşımından gelmektedir ve bu benzerlik değişkeni kullanılarak yapılan dönüşüm neticesinde orijinal diferansiyel denklem sisteminin özel bir formda indirgenmiş olan yapısı elde edilmektedir. Hogg ve diğerleri [8], içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımı problemi için benzerlik çözümlerinin bulunamadığını söylemişlerdir. Ancak bu tez çalışmasında benzerlik dönüşümleri boyut analizi yöntemiyle elde edilmekte ve asimptotik yöntemlerle elde edilen çözümlerle uygun düştüğü gösterilmektedir.

2. bölümde parçacıksız yer çekimi akımları modellenecek ve boyut analizi yardımıyla benzerlik çözümleri elde edilecektir. 3. bölümde ise bu tez çalışmasının konusu olan parçacıklı yer çekimi akımı için model oluşturulacaktır. Bu bağlamda 3.1. kısımda içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımları için tek tabakalı sığ su denklemleri elde edilecek; kısım 3.2'de boyutsuz büyüklükler cinsinden denklemler bulunacak; kısım 3.3 ve 3.4'te sırasıyla hidrostatik olan ve olmayan yaklaşımlardan bahsedilip, kısım 3.5'te ortalama alan denklemleri oluşturulacaktır. Buna bağlı olarak elde edilen hareket denklemlerinin benzerlik çözümlerini bulmak için 4. bölümde boyut analizi yaklaşımı ve asimptotik yaklaşım kullanılacaktır. Kısım 4.2' de yer alan asimptotik yaklaşım için de iki farklı yol izlenecektir. Birincisi β belirli bir parçacığın yere çökme hızını göstermek üzere ve $\beta \ll 1$ kabulu altında, alan değişkenlerine β parametresine bağlı bir asimptotik açılım uygulamaktır. İkinci durumda ise Hogg ve diğerlerinin makalesinde olduğu gibi $\tau = \beta K t^{5/3}$ parametresine göre bir asimptotik açılım uygulamaktır [8]. Kısım 4.3'te parçacıklı yer çekimi akımı problemi için geçerli olan sınır koşulları elde edilmekte ve kısım 4.4'te çözümler bulunmaktadır. Bu kısımda çözümler bulunmaya çalışılırken 2. mertebeden adi türevli bir diferansiyel denklem ile karşılaşılmaktadır. Bu denklem uygun bir dönüşüm altında Legendre diferansiyel denklemine dönüştürülmekte ve denklemin çözümü literatürde yer alan standart yöntemlerle Legendre fonksiyonları cinsinden elde edilmektedir [14, 15].

2. İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNMAYAN YER ÇEKİMİ AKIMLARI

2.1 İçerisinde Parçacık Bulunmayan Yer Çekimi Akımı İçin Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Elde Edilmesi

Akışkanlar mekaniğinin en temel belirleyici denklemleri, kütlenin korunumu, momentumun korunumu ve enerjinin denkliği yasalarından gelmektedir. x konum vektörü ve t zaman değişkeni olmak üzere, $u(x,t)$ fonksiyonu akışkanın herhangi bir noktadaki hızını, $\rho(x,t)$ yoğunluğunu, $P(x,t)$ ise basıncını göstermektedir. $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ ve $P(x,t)$ fonksiyonları diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. $G(x,t)$ fonksiyonu akışkanın birim kütlesine etki eden kuvveti göstermek üzere, G korunumlu bir kuvvet ise $G \equiv \nabla\varphi$ olacak şekilde bir φ potansiyel fonksiyonu vardır [16]. Akışkanlar mekaniğinin en temel denklemlerinden olan kütle korunum yasalarını temsil eden süreklilik denklemleri

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla.\mathbf{u} = 0 \tag{2.1}$$

ve momentum korunum yasalarını temsil eden denklemler

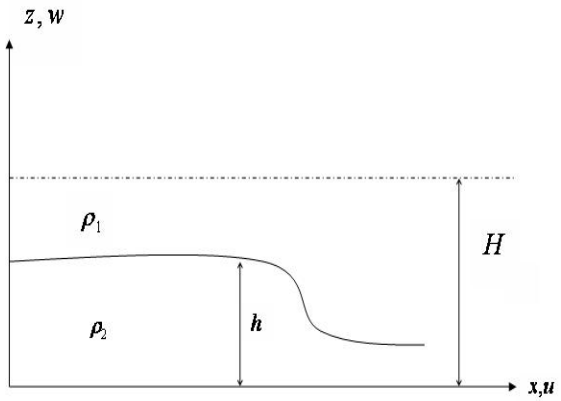
$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \rho\nabla\varphi + F(\mathbf{u}) \tag{2.2}$$

şeklindedir. (2.2) denkleminde yer alan F($\mathbf{u}$) terimi, akışkana etkiyen korunumsuz bir kuvveti temsil etmektedir. Bu çalışmada, F($\mathbf{u}$)$\equiv$ 0 olarak alınacaktır. Denklemlerde görülen $\frac{D}{Dt}$ ifadesi maddesel türeve karşılık gelmekte olup

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\nabla \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu çalışmada, sabit hacimli ρ_1 yoğunluklu bir akışkanın içerisine $\rho_1 < \rho_2$ olacak şekilde ρ_2 yoğunluklu bir akışkan girişi yapıldığı ve akışkanların birbirine karışmadığı varsayılmıştır.



Şekil 2.1: Parçacıksız Tek Tabakalı Yer Çekimi Akımı

Yukarıdaki şekilde, H toplam derinliği, h tabandaki akışkanın derinliğini, $\mathbf{u} = (u, w)$ olmak üzere u akışkan hızının yatay bileşenini, w ise eksenel yöndeki bileşenini göstermektedir. Ayrıca, P_1 yüzeydeki basınç ve P_2 akışkanlar arasındaki basınç olmak üzere P toplam basıncı göstermek için kullanılacaktır.

Yüzeyde her yerde basınç aynı ve sabit olduğundan, akışkanın yüzeyi denge konumundadır. Yer çekimi akımlarında akışkanın birim kütlesine etki eden kuvvet yer çekimidir; bu nedenle, $G \equiv (0, 0, -g)$ olarak alınmalıdır. $\Delta\rho$, iki akışkan arasındaki yoğunluk farkını göstermek üzere, $\frac{\Delta\rho}{\rho} g$ ifadesine indirgenmiş yer çekimi denir ve g' ile gösterilir. Ayrıca ele alınan model için her iki akışkan da sıkıştırılamaz kabul edildiğinden akışkan yoğunluğu her yerde sabittir.

Yer çekimi akımlarının incelenmesi sırasında, yapılan gözlemlere dayanarak hiperbolik sığ su denklemlerinden yararlanılmaktadır [17, 18]. Sığ su teorisinde, akışkanın derinliğinin uzunluğuna oranı oldukça küçük kabul edilir. Bu yaklaşım, h_0 akışkanın derinliği, L akışkanın olarak uzunluğu olmak üzere $\delta = (\frac{h_0}{L})^2$, $\delta << 1$ şeklinde tanımlanarak ifade edilebilir. Elde edilen δ parametresi sığ su parametresi olarak isimlendirilir. Bu çalışmada da değişken akımlı olmayan yer çekimi akımları tek tabakalı sığ su denklemleri ele alınarak incelenmiştir. Ayrıca, viskosite ve yüzeydeki gerilmeler ihmal edilmiştir. Bu durumda söz konusu yer çekimi akımının kütle korunumu denkleminde akışkanın sıkıştırılamaz olduğu kabulu kullanılırsa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.4}$$

olacağından,

$$\nabla . \mathbf{u} = 0 \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.5) denklemi $u(x,t)$ ve $w(x,t)$ cinsinden

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.6}$$

şeklindedir.

Basıncın hidrostatik olması kabulüne bağlı olarak akışkanın yatay hız bileşeni $u=u(x,t)$, z'den bağımsızdır. (2.6) denklemi z'ye göre integre edilecek olursa

$$w(x,z,t)=-z\frac{\partial u}{\partial x}+\tilde{w}(x,t) \tag{2.7}$$

elde edilir.

Akışkanın $z=h$' deki kinematik koşulu

$$w(x,h,t)=\frac{Dh}{Dt} \tag{2.8}$$

ve $z=0$'daki kinematik koşulu

$$w(x,0,t)=0 \tag{2.9}$$

şeklindedir. (2.9) kinematik koşulu kullanılacak olursa, (2.7) denkleminde görülen $\tilde{w}(x,t)$ ifadesi

$$\tilde{w}(x,t)=0 \tag{2.10}$$

şeklinde bulunur. $z=h$ için (2.7) denklemi (2.8)'de yerine konulduğu takdirde

$$-h\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial t}+u.\nabla h \tag{2.11}$$

bulunur. Bu denklem, $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}$ olmak üzere,

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Momentum korunum denklemleri ise $u=(u,w)$ olmak üzere,

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\nabla P-\rho g \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\nabla P-g \tag{2.14}$$

şeklindedir.

Yer çekimi akımlarında akışkanların yoğunluk farklarının küçük varsayıldığı Boussinesq yaklaşımına göre, yoğunluk farkını gösteren $\Delta\rho$ terimi ihmal edilirken bu terimin yer çekimi ivmesi g ile çarpımıyla elde edilen $(\Delta\rho)g$ teriminin dikkate alınması gerekmektedir [19].

Daha önce de belirtildiği üzere Şekil 2.1 ile gösterilen yer çekimi akımı için yüzeydeki basıncın her yerde aynı olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca ele alınan modelde akışkanlar arasında oluşan tabakadaki basınç $P_2(x,z,t)$ ile gösterildiğinde, hidrostatik yaklaşım kullanılarak

$$P_2(x,z,t) = -\rho_2 gz + \tilde{P}_2(x,t) \tag{2.15}$$

elde edilir. Burada $\tilde{P}_2(x,t)$ dinamik basıncı göstermektedir. $z = h$ için, basıncın hidrostatik olması nedeniyle dinamik koşul $P_2 = P_1$ şeklinde olacağından

$$P_2(x,h,t) = -\rho_1 gh \tag{2.16}$$

olmak üzere $\tilde{P}_2(x,t)$ dinamik basıncı

$$-\rho_2 gh + \tilde{P}_2(x,t) = -\rho_1 gh \tag{2.17}$$

$$\tilde{P}_2(x,t) = (\rho_2 - \rho_1)gh \tag{2.18}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $(\rho_2 - \rho_1)g$ ifadesi yerine $\dfrac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g\rho_2$ yazıldığı takdirde

$$\tilde{P}_2(x,t) = \rho_2 g' h \tag{2.19}$$

olduğu görülür.

Ayrıca hidrostatik basınç altında akışkan hızının yatay bileşeni u, z'den bağımsız olduğundan $u = u(x,t)$ şeklindedir. Bu durumda, momentum denklemi (2.13) ifadesi kullanılarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial x} \tag{2.20}$$

şeklinde yazılabilir ve (2.15) ifadesi kullanılarak (2.19) denkleminden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g'\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{2.21}$$

elde edilir.

Dolayısıyla (2.12) ve (2.21) denklemlerinden oluşan bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi tek tabakalı sığ su denklemleri olarak isimlendirilir [13].

2.2 Boyutsuzlaştırma

Akışkanlar mekaniği, fizik ve mühendislik gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak, kullanılan birim sistemlerinin çok çeşitli olması hesaplarda karışıklığa neden olabilmektedir. Bu karışıklığı önlemek amacıyla boyutsuzlaştırma işlemi yapılmaktadır. Bu işlemde, boyutsuz değişkenler adı verilen parametreler yardımıyla yönetici denklemlerde yer alan değişkenler boyutsuz hale getirilir. Sonuç olarak, elde edilen denklemler boyutsuz olacağından tüm birim sistemlerinde sorunsuzca kullanılabilir. Bu bağlamda, tek tabakalı sığ su denklemlerini boyutsuzlaştırmak için, yönetici denklemlerde yer alan tüm değişkenler boyutsuz değişkenler cinsinden yazılmalıdır. Bu boyutsuz büyüklükler

$$\begin{gathered} u = U\tilde{u}, \qquad x = L\tilde{x}, \qquad z = h_0\tilde{z}, \qquad h = h_0\tilde{h} \\ t = \frac{L}{U}\tilde{t}, \qquad P_i^* = U^2\rho_i\tilde{P}_i^*, \quad w = \frac{Uh_0}{L}\tilde{w}, \qquad U^2 = g'h_0 \end{gathered} \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlansın [20]. Tek tabakalı sığ su denklemleri, (2.22) ile gösterilen boyutsuz büyüklükler cinsinden yazılarak boyutsuzlaştırılabilir.

(2.12) ve (2.21) denklemlerinin boyutsuzlaştırılması sonucunda

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{2.24}$$

hareket denklemleri elde edilir.

2.3 Sınır Koşulları

$x_N(t)$ akımın önü olarak adlandırılan ön cephesini gösteren boyutsuz bir büyüklük olmak üzere, hareket denklemleri $0 \leq x \leq x_N(t)$ için ve aşağıda verilecek olan sınır koşulları altında geçerlidir.

Akımı ihtiva eden akışkan hacmi sabit ve başlangıçta verilen boyutsuz büyüklük v_d'ye eşit kabul edilmektedir. Bu sebeple

$$\int_0^{x_N} h(x,t)dx = v_d \tag{2.25}$$

olmalıdır [8].

Ele alınan problemde değişken bir akımın olmadığı kabul edildiğinden

$$u(0,t) = 0 \tag{2.26}$$

şeklinde alınmaktadır.

Akımın ön kısmında hareketler üç boyutlu ve düzensiz olduğu için, bu kısımda hareketi temsil etmek için sığ su teorisi kullanılamaz. Ancak literatürde yer alan çalışmalarda, akımın buradaki hızı ile sığ su denklemlerinden elde edilen yerel dalga hızı arasında şu şekilde bir ilişki olduğu gösterilmiştir ve bu koşul dinamik koşul olarak isimlendirilir [8]:

$$u(x_N,t) = Fr[h(x_N,t)]^{1/2} \tag{2.27}$$

Son olarak, akımın ön kısmında

$$\frac{d}{dt}x_N(t) = u(x_N,t) \tag{2.28}$$

kinematik koşulu sağlanmalıdır.

2.4 Boyut Analizi Altında Benzerlik Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda yapılmak istenen, sabit hacimli yer çekimi akımlarının benzerlik çözümlerini boyut analizini kullanarak belirlemektir. Boyut analizi altında yapılan tüm calışmalarda benzerlik değişkeni, δ sabit bir sayı olmak üzere, $\zeta = \frac{x}{bt^{\delta}}$ biçiminde ele alınmıştır [13]. Bu şekilde, problemi temsil eden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi adi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş olur.

Fiziksel problemleri modellemede kullanılan matematiksel ifadelerin geçerli olabilmesi için, problemde yer alan bütün faktörlerin boyut bakımından uyumlu hale getirilmesi gerekir. Aksi takdirde matematiksel işlem yapmak imkansızlaşır.

Boyut analizi, bu gibi durumlarda kullanılan, bir denklemin boyut bakımından uygunluğunu test etmeye yarayan bir yöntemdir [21].

Boyut analizinin önemli bir diğer özelliği de problemle ilişkilendirilecek bağımsız değişken sayısını azaltmaya ve çözümü elde edilmeye çalışılan bağımlı değişkeni daha az karmaşık bir formda ifade etmeye yaramasıdır. Eğer bir olay n adet boyutlu değişkene dayanıyorsa boyut analizi kullanılarak bu olay $k < n$ olmak üzere k adet boyutsuz değişkene indirgenebilir [20].

Boyut analizi tekniği boyutsal homojenlik kanununa dayanır [20]. Boyutsal homojenlik kanununa göre fiziksel bir olayı ifade eden bir bağıntı boyut bakımından homojen olmalıdır. Yani, denklemde yer alan bütün terimlerin boyutu aynı olmalıdır. Ayrıca olayla ilgili tüm değişkenler sonuç bağıntıda mevcut olmalıdır.

Akışkanlar mekaniğinde sonsuz sayıda boyutsuz değişken üretilebilir. Bunlardan İngiliz deniz subayı William Froude ve oğlu Robert Edmund Froude'un buldukları Froude sayısı, bu çalışma çerçevesinde ele alınan modelde olduğu gibi, yer çekimi akımlarının etkisi altındaki problemlerde kullanılmaktadır ve eylemsizlik kuvvetlerinin yer çekimi kuvvetlerine oranı şeklinde ifade edilmektedir. Froude sayısı, U akışkanın karakteristik hızı, g yer çekimi ivmesi, H akışkanın karakteristik derinliğini göstermek üzere

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanmış olup akımlarda serbest yüzey etkileri için çok önemlidir [13, 22].

Froude sayısının dışında sıkça kullanılan boyutsuz değişkenlerden Reynolds sayısı, 1880'lerde İngiliz mühendis Osborne Reynolds tarafından bulunmuştur ve sürtünme kuvvetlerinin önemli olduğu durumlarda kullanılır. Eylemsizlik kuvvetlerinin vizkosite kuvvetlerine oranını gösteren Reynolds sayısı, U akışkanın karakteristik hızı, L uzunluğu, ν akışkanın kinematik hızını göstermek üzere

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilir [13, 22].

Boyut analizi tekniği ile, ele alınan sistemin benzerlik dönüşümleri elde edilir ve bu benzerlik dönüşümleri kullanılarak problemin benzerlik çözümleri araştırılır.

Bu kısımda benzerlik değişkeni, c bir sabit sayı olmak üzere $\zeta = \dfrac{x}{Kt^{1/c}}$ biçiminde alınarak tek tabakalı sığ su denklemlerinin benzerlik çözümleri elde edilmeye çalışılmaktadır. Bu bağlamda, seçilen benzerlik değişkenine bağlı olarak değişken dönüşümü yardımıyla tek tabakalı sığ su denklemlerinin değişmez denklemleri elde edilmiştir.

(2.23) ve (2.24) denklemleri için $0 < \lambda < \infty$ ve a,b,c boyutsuz sayılar olmak üzere $\tilde{u}(\zeta) = \lambda^a u(x,t)$, $\tilde{h}(\zeta) = \lambda^b h(x,t)$, $t' = \lambda^c t$, $x' = \lambda x$ şeklinde değişken dönüşümü yapıldığında (2.21)'den,

$$\lambda^{-b+c}\frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial t'} + \lambda^{-a-b+1}\tilde{u}(\zeta)\frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial x'} + \lambda^{-a-b+1}\tilde{h}(\zeta)\frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial x'} = 0 \tag{2.31}$$

eşitliği elde edilir. (2.31) eşitliğinin sağlanabilmesi için boyutsal homojenlik kanununa göre, λ'ların kuvvetleri birbirine eşit olmalıdır. Dolayısıyla a, b, c sabitleri için

$$-b+c = -a-b+1 \tag{2.32}$$

$$a+c = 1 \tag{2.33}$$

bağıntıları elde edilir. Aynı şekilde (2.24)'den,

$$\lambda^{-a+c}\frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial t'} + \lambda^{-a-a+1}\tilde{u}(\zeta)\frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial x'} + \lambda^{-b+1}\frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial x'} = 0 \tag{2.34}$$

bulunur ve buradan

$$-a+c = -2a+1 = -b+1 \tag{2.35}$$

$$b+c-a = 1 \tag{2.36}$$

elde edilir. (2.33) ifadesi (2.36)'de yerine konduğunda ise

$$b = 2a \tag{2.37}$$

bulunur.

Uygulanan benzerlik dönüşümleri yardımıyla boyut analizinde alınan benzerlik değişkenlerinin genel formuna ulaşılabilmektedir. Benzerlik değişkeni $\zeta = \dfrac{x}{Kt^{1/c}}$

olarak alınsın. Bu durumda $\tilde{u}(\zeta)=\lambda^a u(x,t)$, $\tilde{h}(\zeta)=\lambda^b h(x,t)$ ifadelerinden $u(x,t)$, $h(x,t)$ fonksiyonları yeni değişkenler cinsinden yazılacak olursa

$$u(x,t)=t^{a/c}\tilde{u}(\frac{x}{Kt^{1/c}}),\quad h(x,t)=t^{b/c}\tilde{h}(\frac{x}{Kt^{1/c}}) \tag{2.38}$$

denklemleri elde edilmiş olur.

$b=-1$ için (2.36) ve (2.37) eşitliklerinden faydalanılarak $c=\frac{3}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$ bulunur ve (2.38)'den

$$u(x,t)=t^{-1/3}\tilde{u}(\frac{x}{Kt^{2/3}}),\quad h(x,t)=t^{-2/3}\tilde{h}(\frac{x}{Kt^{2/3}}),\quad \zeta=\frac{x}{Kt^{2/3}} \tag{2.39}$$

elde edilir.

$u(x,t)$ ve $h(x,t)$'nin x ve t'ye göre kısmi türevleri, $'$ sembolü ζ'ya göre türevi göstermek üzere, aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{3}t^{-4/3}\tilde{u}-\frac{2}{3}t^{-4/3}\zeta\tilde{u}\,',\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{K}t^{-1}\tilde{u}\,' \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}=-\frac{2}{3}t^{-5/3}\tilde{h}-\frac{2}{3}t^{-5/3}\zeta\tilde{h}\,',\quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{K}t^{-4/3}\tilde{h}\,' \tag{2.41}$$

(2.40)-(2.41) türevleri (2.23) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$t^{-5/3}[-\frac{2}{3}\tilde{h}(\zeta)-\frac{2}{3}\zeta\tilde{h}'(\zeta)+\frac{1}{K}\tilde{h}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta)+\frac{1}{K}\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}'(\zeta)]=0 \tag{2.42}$$

elde edileceğinden

$$-\frac{2}{3}\frac{d}{d\zeta}(\zeta\tilde{h}(\zeta))+\frac{1}{K}\frac{d}{d\zeta}(\tilde{u}(\zeta)\tilde{h}(\zeta))=0 \tag{2.43}$$

bulunur ve (2.43) denklemi, (2.26) sınır koşulu altında incelendiği takdirde

$$\tilde{u}(\zeta)=\frac{2}{3}K\zeta \tag{2.44}$$

olarak bulunur. O halde $u(x,t)$'nin benzerlik çözümü

$$u(x,t)=\frac{2}{3}K\zeta \tag{2.45}$$

şeklinde elde edilir.

(2.40)-(2.41) ve (2.44) denklemlerinden yararlanılarak (2.24) denklemi

$$t^{-4/3}[-\frac{1}{3}\tilde{u}(\zeta)-\frac{2}{3}\zeta\tilde{u}'(\zeta)+\frac{1}{K}\tilde{u}(\zeta)\tilde{u}'(\zeta)+\frac{1}{K}\tilde{h}'(\zeta)]=0 \tag{2.46}$$

olduğundan,

$$-\frac{2}{3}K\zeta - \frac{4}{9}K\zeta + \frac{4}{9}K\zeta + \frac{1}{K}\tilde{h}'(\zeta) = 0 \tag{2.47}$$

denkleminden (2.26) koşulu altında

(2.48)

$$\tilde{h}(\zeta) = \frac{1}{9}K^2(\zeta^2 + C) \tag{2.49}$$

çözümü elde edilir. (2.27) ile verilen dinamik koşul kullanılacak olursa (2.49) çözümünde yer alan C sabiti; $x_N = Kt^{2/3}$ ve $\zeta_N = \frac{x_N}{Kt^{2/3}} = 1$ olduğundan,

$$\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}.1 = Fr^2t^{-2/3}\frac{1}{9}K^2(\zeta^2 + C) \tag{2.50}$$

denkleminden

$$C = \frac{4}{Fr^2} - 1 \tag{2.51}$$

olarak bulunur. O halde, $\widetilde{h}(\zeta)$ benzerlik çözümü için

$$\tilde{h}(\zeta) = \frac{1}{9}K^2(\zeta^2 + \frac{4}{Fr^2} - 1) \tag{2.52}$$

ya da

$$\tilde{h}(\zeta) = \frac{4}{9}K^2(\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4}) \tag{2.53}$$

yazılabilir. Bu durumda $h(x,t)$ çözümünün,

$$h(x,t) = \frac{1}{9}K^2t^{-2/3}(\zeta^2 + \frac{4}{Fr^2} - 1)$$

ya da

$$h(x,t) = \frac{4}{9}K^2t^{-2/3}(\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4}) \tag{2.54}$$

şeklinde olduğu görülebilir. Ayrıca (2.25) koşulundan

$$\int_0^{x_N} t^{-2/3}\frac{4}{9}K^2(\frac{x^2}{K^2t^{4/3}} + \frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4})dx = \nu_d \tag{2.55}$$

yazılabilir ve buradan

$$K = (\frac{27Fr^2\nu_d}{12 - 2Fr^2})^{1/3} \tag{2.56}$$

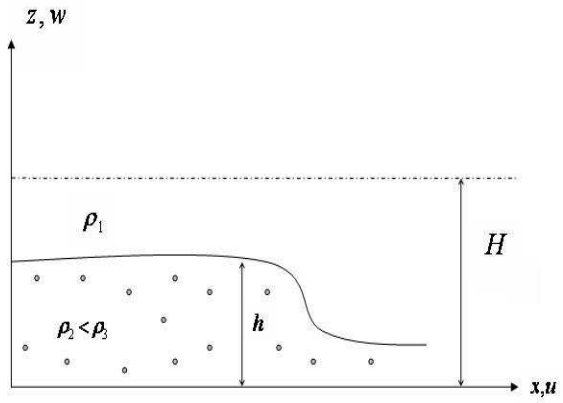
olduğu görülür. Bundan sonra çözümlerde yer alan K sabitinin, (2.56) şeklinde olduğu kabul edilmelidir.

Sonuç olarak (2.23), (2.24) denklemlerinden oluşan denklem sisteminin (2.25)-(2.28) sınır koşullarını sağlayan (2.45) ve (2.54) şeklinde benzerlik çözümleri elde edilmiş olur.

3. İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARI

3.1 İçerisinde Parçacık Bulunan Yer Çekimi Akımı İçin Tek Tabakalı Sığ Su Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bu bölümde, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ olmak üzere, ρ_2 yoğunluklu akışkan ve ρ_3 yoğunluklu parçacıklardan oluşan iyi karışmış süspansiyonun, ρ_1 yoğunluklu akışan içerisine nüfuz etmesiyle oluşan yer çekimi akımının modellenmesi üzerinde durulacaktır. Burada süspansiyonun yoğunluğu ρ ile gösterilecektir. $\mathbf{u} = (u, w)$, akışkanın kartezyen koordinatlardaki hızını; $\mathbf{x} = (x, z)$ ise konum vektörünü göstermektedir. Akışkanın hareketi, iyi karışmış süspansiyonun yoğunluğu olan ρ ile çevreleyen akışkanın yoğunluğu olan ρ_1 arasındaki farktan kaynaklanmaktadır.



Şekil 3.1: Parçacıklı Tek Tabakalı Yer Çekimi Akımı

φ, karışımdaki parçacık hacminin süspansiyon hacmine oranını göstermek üzere $\varphi = \varphi(x, z, t)$ şeklindedir ve buna bağlı olarak süspansiyonun yoğunluğu

$$\rho(\varphi) = \rho_3 \varphi + (1 - \varphi)\rho_2 \tag{3.1}$$

şeklinde bulunur. Süspansiyonun çok seyrek olduğu kabulüne bağlı olarak $0 < \varphi \ll 1$ olarak alınması gerekir. Süspansiyonun iyi karışmış olduğu kabulünden φ' nin yalnızca x' in ve t'nin fonksiyonu olduğu sonucu çıkmaktadır [8, 23].

Süspansiyonun yoğunluğu olan ρ'nun, φ'nin bir fonksiyonu olduğu göz önünde bulundurularak, bu akışkan için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\varphi)] + \frac{\partial}{\partial x}[\rho(\varphi)u] + \frac{\partial}{\partial z}[\rho(\varphi)w] = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde elde edilir [23].

Bu çalışma çerçevesinde Reynolds sayısı, vizkoziteyi ihmal edebilecek ölçüde büyük alınmaktadır. Buna bağlı olarak, akışkanın hareketi yer çekimi kuvveti ve kaldırma kuvvetleri arasındaki etkileşimden kaynaklanmaktadır [8, 23].

Çevreleyen akışkan için toplam basınç, p_1^* dinamik basınç alanını göstermek üzere,

$$p_1 = -\rho_1 g z + p_1^* \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Modelde ele alınan, içerisinde parçacık bulunan akışkan için momentum denklemleri,

$$\rho(\varphi)[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}] = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\rho(\varphi)[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}] = -\frac{\partial p_2^*}{\partial z} - \varphi g(\rho_3 - \rho_2) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki toplam basınç ise

$$p_2 = \rho_1 g H - \rho_2 g z + p_2^* \tag{3.6}$$

şeklindedir ve $p_2^* = p_2^*(x,z,t)$ yine dinamik basınç alanını göstermektedir.

Akışkan akımındaki parçacık bileşimi çökmeye bağlı olarak zamanla değişim gösterir. Bu nedenle, tabakada yer alan parçacıkların korunumunu ifade etmek üzere bir denkleme gereksinim duyulmaktadır. Genel olarak parçacık korunum denklemi şu şekildedir [7, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^{h(x,t)} \varphi(x,z,t)dz) + \frac{\partial}{\partial x}(\int_0^{h(x,t)} \varphi(x,z,t)u(x,z,t)dz) + \varphi(x,0,t)\beta = 0 \tag{3.7}$$

3.2 Boyutsuzlaştırma

İçerisinde parçacık bulunan tek tabakalı sığ su denklemlerinin terimleri boyutsuzlaştırılmak istenirse süreklilik, momentum ve parçacığı yöneten hareket denklemlerinde kullanılan değişkenlerin yeni boyutsuz değişkenler cinsinden yazılması gerekir. Bu durumda aşağıdaki şekilde boyutsuz büyüklükler tanımlansın [23]:

$$x = L\widetilde{x}, \quad z = H\widetilde{z}, \quad t = \frac{L}{U}\widetilde{t}, \quad h = H\widetilde{h},$$
$$u = U\widetilde{u}, w = H\frac{U}{L}\widetilde{w}, \quad (p_1^*, p_2^*) = U^2(\rho_1\widetilde{p}_1^*, \rho_2\widetilde{p}_2^*), \quad U \equiv (g_1' H)^{1/2}, \tag{3.8}$$
$$\varphi \equiv \varepsilon\widetilde{\varphi}, \quad \beta \equiv \delta\widetilde{\beta}, \quad g_1' \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g, \quad g_2' \equiv \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2} g.$$

Bu boyutsuz değişkenler kullanılarak modeli ifade eden yönetici denklemler yeniden yazılacak olursa, (3.2), (3.4), (3.5) ve (3.7) denklemlerinden

$$\varepsilon\frac{g_2'}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi u) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi w)\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{3.9}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon\varphi\frac{g_2'}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x}, \tag{3.10}$$
$$\delta^2\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \varepsilon\delta^2\frac{g_2'}{g}\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_2^*}{\partial z} - \frac{\varepsilon\varphi g_2'}{g_1'} \tag{3.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h \varphi dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^h \varphi u dz\right) + \varphi(x,0,t)\frac{\beta}{U} = 0 \tag{3.12}$$

elde edilir. Burada, $\delta = (H/L)^2$ olup sığ su parametresi olarak isimlendirilmektedir. ε parametresi ise, $\varepsilon \equiv \varphi_0 \ll 1$ olup başlangıçta süspansiyon içinde bulunan parçacık yoğunluğunu göstermektedir [23].

$\gamma \equiv g_1'/g$ ve $\alpha \equiv \varepsilon g_2'/g$ şeklinde tanımlanacak olursa (3.9)-(3.12) denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\gamma\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi u) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi w)\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.13}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \gamma\alpha\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x} \tag{3.14}$$
$$\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \gamma\alpha\delta\varphi\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_2^*}{\partial z} - \varphi\alpha \tag{3.15}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h \varphi dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^h \varphi u dz\right) + \varphi(x,0,t)\frac{\beta}{u} = 0 \tag{3.16}$$

3.3 Sınır Koşulları

2. bölüm kısım 2.3'te verilen sınır koşullarına benzer olarak, parçacıklı yerçekimi akımları için aşağıdaki şekilde sınır koşulları verilmektedir [8]. $x_N(t)$ akımın önü olarak adlandırılan ve ön cephesini gösteren boyutsuz bir büyüklük olmak üzere, hareket denklemleri $0 \leq x \leq x_N(t)$ için bu koşullar altında geçerlidir.

Akımı ihtiva eden akışkan hacmi sabit ve başlangıçta verilen boyutsuz büyüklük v_d'ye eşit kabul edilmektedir. Bu sebeple

$$\int_0^{x_N} h(x,t)dx = v_d \tag{3.17}$$

olmalıdır [8].

Ele alınan problemde değişken bir akımın olmadığı kabul edildiğinden

$$u(0,t) = 0 \tag{3.18}$$

şeklinde alınmaktadır [8].

Akımın ön kısmında hareketler üç boyutlu ve düzensiz olduğu için, bu kısımda hareketi temsil etmek için sığ su teorisi kullanılamaz. Akımın buradaki hızı ile sığ su denklemlerinden elde edilen yerel dalga hızı arasındaki ilişkiyi gösteren dinamik koşul şu şekildedir [8, 10, 11]:

$$u(x_N,t) = Fr[h(x_N,t)\varphi(x_N,t)]^{1/2} \tag{3.19}$$

Akımın ön kısmında

$$\frac{d}{dt}x_N(t) = u(x_N,t) \tag{3.20}$$

kinematik koşulu sağlanmalıdır [8].

3.4 Hidrostatik Yaklaşım

Bu kısımda, Moodie'nin çalışmasında olduğu gibi $\alpha \sim \delta \ll 1$ alınacak; yani karışımın seyrek olduğu varsayılacak ve bu durumda hidrostatik olmayan etkileri göz ardı etmek amacıyla Gladstone ve diğerlerinin yaptığı deneysel çalışmaların sonucu olan, $\varphi_0 = O(10^{-4})$ değerine karşılık gelen $\alpha \sim \delta \sim O(10^{-2})$ sonucu ele alınacaktır [23, 24].

(3.13)-(3.16) alan denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial p_2^*}{\partial z} = 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h \varphi dz\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^h \varphi u dz\right)+\varphi(x,0,t)\frac{\beta}{u} = 0 \tag{3.24}$$

(3.23) denklemi, akışkanın hidrostatik denge basıncı altında olduğunu ve alan değişkenlerinin z'den bağımsız olduğunu göstermektedir. Yani, $u=u(x,t)$, $h=h(x,t)$ ve $\varphi=\varphi(x,t)$ şeklindedir. Yukarıda verilen kinematik ve dinamik sınır koşulları kullanılacak olursa, içerisinde parçacık bulunan tek tabakalı sığ su denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)=0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\beta}{u}=0 \tag{3.27}$$

Bu durumda, alan denklemlerinin ve parçacık denklemlerinin kuple olmadığı görülmektedir.

3.5 Hidrostatik Olmayan Yaklaşım

Eğer hacim içerisinde parçacığın yoğunluğu artırılacak olursa, yani $\delta \ll 1$ ve $\alpha = O(1)$ alınırsa alan değişkenleri z'den bağımsız olamaz [8]. Bu durumda $u=u(x,z,t)$, $w=w(x,z,t)$ olur. $\delta \ll 1$, $\gamma \ll 1$ ve $\alpha = O(1)$ kabul edilip alan denklemlerinde kullanılırsa, (3.15) denkleminden

$$\frac{\partial p_2^*}{\partial z} = -\alpha\varphi \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28) ifadesi z'ye göre integre edilecek olursa

$$p_2^* = -\alpha\varphi z+\phi(x,t) \tag{3.29}$$

bulunur ki burada $\phi(x,t)$ keyfi bir integrasyon fonksiyonudur.

$z=h$'de dinamik sınır koşulu kullanılacak olursa,

$$p_1^* = p_2^*, \quad z=h, \quad p_1^* = p_0 \tag{3.30}$$

$$-\alpha\varphi h+\phi(x,t)=p_0 \tag{3.31}$$

bulunur. Buradan

$$\phi(x,t) = \alpha\varphi h + p_0 \tag{3.32}$$

ve

$$\begin{aligned} p_2^* &= -\alpha\varphi z + \alpha\varphi h + p_0 \\ p_2^* &= p_0 + \alpha\varphi(h-z) \end{aligned} \tag{3.33}$$

şeklinde elde edilir.

$\delta \ll 1, \quad \gamma \ll 1$ ve $\alpha = O(1)$ koşulları altında (3.13), (3.14) ve (3.16) denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x} \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h \varphi dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^h \varphi u dz\right) + \varphi(x,0,t)\beta = 0 \tag{3.36}$$

Akışkanın yatay hız bileşeni olan $u = u(x,z,t)$ için aşağıdaki şekilde bir kuvvet serisi ifadesinin karşılık geldiği kabul edilsin [23].

$$u(x,z,t) = \Gamma_0 + z\Gamma_1 + z^2\Gamma_2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(x,t) z^n \tag{3.37}$$

Bu durumda düşey hız bileşenini gösteren $w = w(x,z,t)$ ifadesi (3.34) denkleminden

$$w = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \Gamma_0(x,t)}{\partial x} \frac{z^n + 1}{n+1} + \phi(x,t) \tag{3.38}$$

şeklinde elde edilir ve $z = 0$'da $w = 0$ kinematik koşulu kullanılırsa $\phi(x,t) = 0$ olarak bulunur.

Akışkanın $z = h$'deki kinematik koşulu $w(x,z,t) = \dfrac{Dh}{Dt}$ kullanılacak olursa, hidrostatik olmayan alan denklemleri

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[h(\Gamma_0 + \Gamma_1\frac{h}{2} + \Gamma_2\frac{h^2}{3})\right] = 0 \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}\Gamma_0^2 + \alpha\varphi h) = 0 \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} + \Gamma_0\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} - \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{4}\Gamma_1^2 + \Gamma_0\Gamma_2) - 2\Gamma_2\frac{\partial \Gamma_0}{\partial x} = 0 \tag{3.42}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\Gamma_0 + \Gamma_1\frac{h}{2} + \Gamma_2\frac{h^2}{2})\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varphi\beta}{h} = 0 \tag{3.43}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler, içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımı probleminin hidrostatik olmayan basınç altındaki hareket denklemleridir.

3.6 Ortalama Alan Denklemleri

Bu kısımda, ortalama alan denklemleri elde edilmeye çalışılacaktır.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3.44}$$

denklemi derinlik boyunca integre edilecek olursa

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}dz+\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z}dz=0 \tag{3.45}$$

bulunur. Buradan

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}dz+w(h)-w(0)=0 \tag{3.46}$$

denklemi elde edilir.

$z=h$'deki kinematik koşul

$$w(h)=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.47}$$

şeklinde elde edilmişti. (3.47) koşulu (3.46) denkleminde yazılır ve $w(0)=0$ koşulu da kullanılırsa

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}dz+\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3.48}$$

bulunur. (3.48) denkleminden, $u=u(x,t)$ şeklinde olması gerektiği görülür ve sonuç olarak

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uh)=0 \tag{3.49}$$

süreklilik denklemi elde edilir.

Momentum korunum denklemi derinlik boyunca integre edilecek olursa

$$\begin{aligned}\int_0^h (\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x})dz &= 0\\ h\frac{\partial u}{\partial t}+hu\frac{\partial u}{\partial x}+\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x}dz &= 0\end{aligned} \tag{3.50}$$

bulunur.

$$p=\alpha\varphi(h-z) \tag{3.51}$$

olduğundan

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}(\varphi h)-\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x}z \tag{3.52}$$

şeklinde elde edilir. (3.52) ifadesi (3.50) denkleminde yazılır ve integral alınırsa

$$h\frac{\partial u}{\partial t}+hu\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha h\frac{\partial}{\partial x}(\varphi h)-\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{h^2}{2}=0 \tag{3.53}$$

bulunur. (3.49) denkleminin her iki tarafı u ile çarpılacak olursa

$$u\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+u^2\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.53) ile (3.54) denklemleri taraf tarafa toplanacak olursa

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh)+\frac{\partial}{\partial x}(u^2h)+\frac{1}{2}\alpha h^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\alpha\varphi h\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3.55}$$

denklemi elde edilir. (3.55) denkleminde $\alpha=1$ alınacak olursa

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh)+\frac{\partial}{\partial x}(u^2h)+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\varphi h\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3.56}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}h\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{3.57}$$

momentum denklemine ulaşılır.

Parçacık korunum denklemi ise

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+u\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\beta\varphi}{h} \tag{3.58}$$

şeklindedir.

4. İÇERİSİNDE PARÇACIK BULUNAN YER ÇEKİMİ AKIMLARI İÇİN BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımının benzerlik çözümleri boyut analizi kullanılarak elde edilmeye çalışılacaktır. Boyut analizi altında, içerisinde parçacık olmayan sığ su denklemlerinin benzerlik dönüşümü $\zeta = \dfrac{x}{Kt^s}$ olarak alınmıştır. Bu bölümde de aynı benzerlik dönüşümü göz önüne alınarak içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımlarının benzerlik çözümleri elde edilecektir.

4.1 Boyut Analizi Yaklaşımı

$0 < t < \infty$ parametre; p,q,r,s boyutsuz sayılar ve $\zeta = \dfrac{x}{Kt^s}$ benzerlik değişkeni olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x,t) &= t^p \tilde{u}(\zeta), \\ h(x,t) &= t^q \tilde{h}(\zeta), \\ \varphi(x,t) &= t^r \tilde{\varphi}(\zeta) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılsın. Bu durumda

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -s\frac{x}{K}t^{-s-1} = -st^{-1}\zeta, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{Kt^s} \tag{4.3}$$

olacağından (3.49), (3.57) ve (3.58) hareket denklemlerinde yer alan t ve x değişkenine göre kısmi türevler, benzerlik değişkeni cinsinden

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pt^{p-1}\tilde{u}(\zeta) - t^{p-1}s\zeta\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t^{p-s}}{K}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, $h(x,t)$ ve $u(x,t)$'nin t ve x değişkenlerine göre ζ cinsinden kısmi türevleri

$$\frac{\partial h}{\partial t} = qt^{q-1}\tilde{h}(\zeta) - t^{q-1}s\zeta\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{t^{q-s}}{K}\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} \tag{4.7}$$

ve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = rt^{r-1}\tilde{\varphi}(\zeta) - t^{r-1}s\zeta\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{t^{r-s}}{K}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} \tag{4.9}$$

şeklinde bulunur.

(4.4)-(4.9) ile verilen türev ifadeleri ve (4.1) ile verilen ifadeler (3.49), (3.57) ve (3.58) hareket denklemlerinde yerine yazıldığında, yeni değişkenler cinsinden hareket denklemleri

$$qt^{q-1}\tilde{h}(\zeta) - st^{q-1}\zeta\frac{d\tilde{h}(\zeta)}{d\zeta} + t^{p+q-s}\frac{d}{d\zeta}(\tilde{u}\tilde{h}) = 0 \tag{4.10}$$

$$pt^{p-1}\tilde{u} - s\zeta t^{p-1}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} + t^{2p-s}\frac{1}{K}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta}\tilde{u} + \frac{1}{2K}t^{q+r-s}\tilde{h}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}t^{q+r-s}\tilde{\varphi}\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} = 0 \tag{4.11}$$

$$rt^{r-1}\tilde{\varphi} - st^{r-1}\zeta\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}t^{p+r-s}\tilde{u}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} = -\beta t^{r-q}\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{h}} \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir. (4.10) denklemi t^{-q} ve (4.12) denklemi de t^{-r} ile çarpılacak olursa,

$$qt^{-1}\tilde{h} - st^{-1}\zeta\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} + t^{p-s}\frac{d}{d\zeta}(\tilde{u}\tilde{h}) = 0 \tag{4.13}$$

$$pt^{p-1}\tilde{u} - s\zeta t^{p-1}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} + t^{2p-s}\frac{1}{K}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta}\tilde{u} + \frac{1}{2K}t^{q+r-s}\tilde{h}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}t^{q+r-s}\tilde{\varphi}\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} = 0 \tag{4.14}$$

$$rt^{-1}\tilde{\varphi} - st^{-1}\zeta\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}t^{p-s}\tilde{u}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} = -\beta t^{-q}\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{h}} \tag{4.15}$$

denklemlerine ulaşılır. Boyutsal homojenlik kanununa göre, yukarıdaki denklemlerde yer alan t parametresinin kuvvetleri eşit alındığı takdirde, uygunluk sağlanmış olur. Buna göre (4.13) denkleminden

$$p - s = -1 \tag{4.16}$$

olması gerektiği görülür. Benzer şekilde (4.14) denkleminden

$$p-1=2p-s=q+r-s \tag{4.17}$$

ve (4.15) denkleminden

$$-1=p-s=-q \tag{4.18}$$

ilişkisi elde edilir.

Dikkat edilecek olursa (4.18) denklem takımında birinci ve üçüncü ifadelerin eşitliğinden

$$q = 1 \tag{4.19}$$

olduğu görülür; birinci ve ikinci ifadelerin eşitliği ise

$$p-s=-1 \tag{4.20}$$

olduğundan, (4.16) ile uygun düşmektedir. Benzer şekilde, (4.17) denklem takımında birinci ve üçüncü ifadelerin eşitliğinden

$$q+r-s=p-1 \tag{4.21}$$

$q=1$ ve (4.16) ifadesinden

$$2s-r=3 \tag{4.22}$$

ilişkisi elde edilir; birinci ve ikinci ifadelerin eşitliği ise

$$p-s=-1 \tag{4.23}$$

olduğundan, yine (4.16) ile uygun düşmektedir. Son olarak ikinci ve üçüncü ifadelerin eşitliğinden

$$2p-s=q+r-s \tag{4.24}$$

olduğu görülür ki $q=1$'den ve (4.16) ilişkisinden

$$2s-r=3 \tag{4.25}$$

(4.22) ifadesine eşit olduğu görülmektedir.

Bütün bu eşitliklerden geriye kalan (4.16), (4.19) ve (4.22) ifadeleridir. (4.16) ile (4.22) ifadeleri aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} p-s &= -1 \\ 2s-r &= 3 \end{aligned}$$

3-bilinmeyen ve 2 denklemden oluşan bir denklem sistemi belirlediğinden aranan sayılar, bir parametreye bağlı olarak belirlenebilir. $s = \frac{2}{3}$ olarak seçilirse, (4.16) ifadesinden

$$p = -\frac{1}{3} \tag{4.26}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde s değerine bağlı olarak (4.22) denkleminden

$$r = -\frac{5}{3} \tag{4.27}$$

şeklinde elde edilir. $q = 1$ ile $s = \frac{2}{3}$ seçimine karşılık gelen $p = -\frac{1}{3}$, $r = -\frac{5}{3}$ değerleri (4.13)-(4.15) hareket denklemlerinde yerine yazılır ve denklemler düzenlenirse,

$$\tilde{h} - \frac{2}{3}\zeta\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}(\tilde{u}\tilde{h}) = 0 \tag{4.28}$$

$$-\frac{1}{3}\tilde{u} - \frac{2}{3}\zeta\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} + \frac{1}{K}\tilde{u}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} + \frac{1}{2K}\tilde{h}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}\tilde{\varphi}\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} = 0 \tag{4.29}$$

$$-\frac{5}{3}\tilde{\varphi} - \frac{2}{3}\zeta\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}\tilde{u}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} = -\beta\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{h}} \tag{4.30}$$

elde edilir. Bu şekilde, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin boyut analizi yaklaşımı kullanılarak adi türevli bir diferansiyel denklem sistemine indirgendiği görülür. (3.19) ve (3.20) ile verilen sınır koşullarında (4.1) ile verilen değişken dönüşümleri kullanılırsa, $x_N = Kt^{2/3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u^2(x_N,t) &= Fr^2[h(x_N,t)\varphi(x_N,t)] \\ t^{-2/3}\tilde{u}(1) &= Fr^2[t\tilde{h}(1)\ t^{-5/3}\tilde{\varphi}(1)] \\ \Rightarrow \tilde{u}(1) &= Fr^2[\tilde{h}(1)\tilde{\varphi}(1)] \end{aligned} \tag{4.31}$$

ve

$$\frac{dx_N}{dt} = u(x_N,t) \Rightarrow \tilde{u}(1) = \frac{2}{3}K \tag{4.32}$$

bulunur.

İkinci bir durum olarak, $r = 0$ seçilirse (4.22) denkleminden

$$s = \frac{3}{2} \tag{4.33}$$

ve buna bağlı olarak (4.16) denkleminden

$$p = \frac{1}{2} \tag{4.34}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda ise benzer şekilde, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin

$$\tilde{h} - \frac{3}{2}\zeta\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}(\tilde{u}\tilde{h}) = 0 \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{2}\tilde{u} - \frac{3}{2}\zeta\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} + \frac{1}{K}\tilde{u}\frac{d\tilde{u}}{d\zeta} + \frac{1}{2K}\tilde{h}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}\tilde{\varphi}\frac{d\tilde{h}}{d\zeta} = 0 \tag{4.36}$$

$$-\frac{3}{2}\zeta\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} + \frac{1}{K}\tilde{u}\frac{d\tilde{\varphi}}{d\zeta} = -\beta\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{h}} \tag{4.37}$$

adi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgendiği görülür. Benzer şekilde, (4.1) ile verilen yeni değişkenler cinsinden sınır koşulunda yazılacak olursa, $x_N = Kt^{2/3}$ olmak üzere sınır koşulları elde edilebilir. (4.31)'deki sınır koşuluna ek olarak

$$\tilde{u}(1) = \frac{3}{2}K \tag{4.38}$$

koşulu bulunur.

(4.28)-(4.30) ile (4.35)-(4.37) denklemleri lineer olmayan kuple adi türevli diferansiyel denklem sistemleridir. Bu denklem sistemleri, $\varphi = 1$ olduğu durumda, içerisinde parçacık olmayan yer çekimi akımının benzerlik çözümlerine indirgenmekte ve bu denklemler analitik olarak çözülebilmektedir. $\varphi \neq 1$ olduğu durumda ise bu denklemleri analitik olarak çözmek mümkün değildir. Bu nedenle, ilgili sınır koşulları kullanılarak bu denklemler sayısal olarak çözülebilir.

4.2 Asimptotik Yaklaşım

Bu kısımda iki farklı asimptotik yaklaşım kullanılarak benzerlik çözümleri elde edilmeye çalışılacaktır.

4.2.1 Yaklaşım I

$\beta \ll 1$ parametre olmak üzere alan değişkenleri için aşağıdaki şekilde asimptotik seri açılımı yapılabilir:

$$u = u_0 + \beta u_1 + \cdots \tag{4.39}$$

$$h = h_0 + \beta h_1 + \cdots \tag{4.40}$$

$$\varphi = 1 + \beta\varphi_1 + \cdots \tag{4.41}$$

Buna göre, hareket denklemlerinden $O(\beta^0)$ mertebesinde denklemler,

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_0 h_0) = 0 \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial h_0}{\partial x} = 0 \tag{4.43}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, $O(\beta)$ mertebesinde denklemler,

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_0 h_1 + u_1 h_0) = 0 \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{1}{2} h_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \varphi_1 = 0 \tag{4.45}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{1}{h_0} \tag{4.46}$$

şeklinde elde edilir. $O(\beta^0)$ mertebesindeki denklemlere dikkat edilecek olursa, bu denklemler ikinci bölümde parçacıksız yer çekimi akımı probleminden elde edilen denklemleri vermektedir. Yani parçacıkların yere çökme hızı sıfır olduğunda problem, içerisinde parçacık bulunmayan yer çekimi akımı problemine indirgenmektedir [12]. Bu durumda, (4.42) ve (4.43) denklemlerinin benzerlik çözümleri, $\zeta = \dfrac{x}{Kt^{2/3}}$ olmak üzere, boyut analizi kullanılarak

$$u_0(x,t) = \frac{2}{3} K t^{-1/3} \tilde{u}_0(\zeta) \tag{4.47}$$

$$h_0(x,t) = \frac{4}{9} K^2 t^{-2/3} \tilde{h}_0(\zeta) \tag{4.48}$$

olarak bulunur. Burada $\tilde{u}_0(\zeta)$ ve $\tilde{h}_0(\zeta)$ ifadeleri 2. bölümde (2.44), (2.53) ile verilen biçimdedir.

$O(\beta)$ mertebesindeki denklemlerin benzerlik çözümleri ise aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

(4.44) denkleminde gerekli türetmeler yapılırsa,

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h_0}{\partial x} = 0 \tag{4.49}$$

bulunur. u_1 ve h_1 çözümleri şu şeklide tanımlansın:

$$u_1(x,t) = \frac{2}{3} K^{-1} t^p \tilde{u}_1(\zeta), \tag{4.50}$$

$$h_1(x,t) = \frac{4}{9} t^q \tilde{h}_1(\zeta) \tag{4.51}$$

(4.47) ve (4.48) çözümleri ve $\tilde{u}_0(\zeta)=\zeta$ olduğu (4.49) denkleminde yazılırsa

$$\frac{4}{9}qt^{q-1}\tilde{h}_1-\frac{2}{3}t^{q-1}\zeta\frac{d\tilde{h}_1}{d\zeta}+\frac{2}{3}Kt^{-1/3}\zeta\frac{4}{9}t^q\frac{d\tilde{h}_1}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}$$
$$+\frac{4}{9}t^q\tilde{h}_1\frac{2}{3}Kt^{-1/3}\frac{1}{Kt^{2/3}}+\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}\tilde{h}_0\frac{2}{3}K^{-1}t^p\frac{d\tilde{u}_1}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}$$
$$+\frac{2}{3}t^pK^{-1}\tilde{u}_1\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}\frac{d\tilde{h}_0}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}=0 \qquad (4.52)$$

elde edilir. (4.52) denkleminde boyutsal homojenlik kanununa göre, t'lerin kuvvetlerinin eşit olması gerektiğinden

$$q=1,\quad p=\frac{4}{3} \qquad (4.53)$$

alınabilir. O halde u_1 ve h_1 çözümleri,

$$u_1(x,t) = \frac{2}{3}K^{-1}t^{4/3}\tilde{u}_1(\zeta), \qquad (4.54)$$
$$h_1(x,t) = \frac{4}{9}t\tilde{h}_1(\zeta) \qquad (4.55)$$

şeklinde olacaktır. (4.54), (4.55) benzerlik çözümleri (4.49) denkleminde yazılırsa

$$\frac{4}{9}[\tilde{h}_1+\frac{2}{3}\tilde{h}_1+\frac{2}{3}\frac{d}{d\zeta}(\tilde{h}_0\tilde{u}_1)]=0 \qquad (4.56)$$

elde edilir. $\frac{d}{d\zeta}$ ifadesi $'$ kullanılarak gösterilmek üzere, sonuç olarak

$$5\tilde{h}_1+2(\tilde{h}_0\tilde{u}_1)'=0 \qquad (4.57)$$

denklemine ulaşılır.

$\varphi_1=K^{-2}t^r\tilde{\varphi}_1(\zeta)$ olarak alındığı takdirde, (4.47)-(4.48) ve (4.54)-(4.55) ile verilen çözümleri (4.45) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{2}{3}K^{-1}\frac{4}{3}t^{1/3}\tilde{u}_1+\frac{2}{3}K^{-1}t^{4/3}\frac{d\tilde{u}_1}{d\zeta}(-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta)$$
$$+\frac{2}{3}K^{-1}t^{1/3}\tilde{u}_0\frac{2}{3}K^{-1}t^{4/3}\frac{d\tilde{u}_1}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}+\frac{2}{3}K^{-1}t^{4/3}\tilde{u}_1\frac{2}{3}K^{-1}t^{-1/3}\frac{d\tilde{u}_0}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}\tilde{h}_0k^{-2}t^r\frac{d\tilde{\varphi}_1}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}+\frac{4}{9}K^{-2}t\frac{d\tilde{h}_1}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}$$
$$+\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}\frac{d\tilde{h}_0}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}K^{-2}t^r\tilde{\varphi}_1=0 \qquad (4.58)$$

bulunur. (4.58) denklemi, gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$\frac{4}{3}t^{1/3}\tilde{u}_1+\frac{2}{9}t^{r-4/3}\tilde{h}_0\tilde{\varphi}_1'+\frac{4}{9}t^{1/3}\tilde{h}_1'+\frac{4}{9}t^{r-4/3}\tilde{h}_0'\tilde{\varphi}_1=0 \qquad (4.59)$$

halini alır. Boyutsal homojenlik kanununa uygunluk sağlanması için $r-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$ olması gerektiğinden

$$r=\frac{5}{3} \tag{4.60}$$

bulunur. Bulunan r değeri (4.59) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$3\tilde{u}_1+\frac{1}{2}\tilde{h}_0\tilde{\varphi}_1'+\tilde{h}_1'+\tilde{h}_0'\tilde{\varphi}_1=0 \tag{4.61}$$

elde edilir.

$\varphi_1=K^{-2}t^{5/3}\varphi_1\tilde{(\zeta)}$ ifadesi (4.46) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{5}{3}K^{-2}t^{2/3}\tilde{\varphi}_1+K^{-2}t^{5/3}\frac{d\tilde{\varphi}_1}{d\zeta}(-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta) + \frac{2}{3}Kt^{-1/3}\zeta K^{-2}t^{5/3}\frac{d\tilde{\varphi}_1}{d\zeta}\frac{1}{Kt^{2/3}}=-\frac{1}{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}\tilde{h}_0} \tag{4.62}$$

bulunur ve yapılan sadeleştirmeler sonucu

$$\tilde{\varphi}_1 \;=\; -\frac{27}{20}\frac{1}{\tilde{h}_0} \tag{4.63}$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa $r=\frac{5}{3}$ değeri (4.46) denkleminde de boyutsal homojenlik kanununa uygunluğu sağlamaktadır.

Sonuç olarak, (4.57), (4.61) ve (4.63) denklemleri çözülmesi gereken denklemlerdir.

4.2.2 Yaklaşım II

Bu kısımda asimptotik açılım $\tau=\beta K^{-2}t^{5/3}$ şeklinde alınıp, alan değişkenlerine bu τ parametresi cinsinden aşağıdaki şekilde bir asimptotik açılım uygulansın [8,25]:

$$x_N=Kt^{2/3}[1+\tau X_1+\tau^2X_2+...] \tag{4.64}$$

$$u=\frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+\tau^2u_2(\zeta)+...] \tag{4.65}$$

$$h=\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+\tau^2h_2(\zeta)+...] \tag{4.66}$$

$$\varphi=1+\tau\varphi_1(\zeta)+\tau^2\varphi_2(\zeta)... \tag{4.67}$$

$\zeta=\frac{x}{Kt^{2/3}}$ benzerlik değişkeni kullanılarak yeni koordinatlara geçilirse, $\frac{\partial}{\partial t}$ ve $\frac{\partial}{\partial x}$ diferansiyel operatörleri,

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=K^{-1}t^{-2/3}\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{4.69}$$

olarak bulunur. (4.68) ve (4.69) ifadeleri hareket denklemlerinde yazılırsa,

$$\frac{\partial h}{\partial t}+(K^{-1}t^{-2/3}u-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial h}{\partial \zeta}+K^{-1}t^{-2/3}h\frac{\partial u}{\partial \zeta}=0 \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(K^{-1}t^{-2/3}u-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+K^{-1}t^{-2/3}(\varphi\frac{\partial h}{\partial \zeta}+\frac{h}{2}\frac{\partial h}{\partial \zeta})=0 \tag{4.71}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+(K^{-1}t^{-2/3}u-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}=-\frac{\beta\varphi}{h} \tag{4.72}$$

ifadeleri elde edilir.

(4.64)-(4.67) ifadeleri kullanılarak (4.70)denkleminden,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}\\
&+\{K^{-1}t^{-2/3}\frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta\}\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}\\
&+K^{-1}t^{-2/3}\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}\frac{\partial}{\partial \zeta}\{\frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]\}=0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

(4.71) denkleminden,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]\}\\
&+\{K^{-1}t^{-2/3}\ \frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta\}\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\{\frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]\}\\
&+K^{-1}t^{-2/3}(1+\tau\varphi_1(\zeta)+...)\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}\\
&+\frac{1}{2}\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}\ \frac{\partial}{\partial \zeta}\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}=0
\end{aligned} \tag{4.74}$$

ve (4.72) denkleminden,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(1+\tau\varphi_1(\zeta)+...)\\
&+\{K^{-1}t^{-2/3}\ \frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]-\frac{2}{3}t^{-1}\zeta\}\ \frac{\partial}{\partial \zeta}(1+\tau\varphi_1(\zeta)+...)\\
&=-\beta(1+\tau\varphi_1(\zeta)+...)\{\frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

ifadeleri elde edilir.

(4.73)-(4.75) denklemlerinde t'ye göre kısmi türevler hesaplanırken $\tau = \beta K^{-2} t^{5/3}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{4}{9}K^2 t^{-2/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]\} = \frac{4}{9}K^2 t^{-5/3}(-\frac{2}{3}h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...) \tag{4.76}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0(\zeta)+\tau u_1(\zeta)+...]\} = \frac{2}{3}Kt^{-4/3}(-\frac{1}{3}u_0(\zeta)+\frac{4}{3}\tau u_1(\zeta)+...) \tag{4.77}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{1+\tau\varphi_1(\zeta)+\cdots\} = \frac{5}{3}t^{-1}\tau\varphi_1(\zeta)+... \tag{4.78}$$

ifadeleri elde edilir [8]. (4.76)-(4.78) türevleri (4.73)-(4.75) denklemlerinde yerine yazılır; (4.75) denkleminde eşitliğin sağ tarafında bulunan $\beta K^{-2} t^{2/3}$ ifadesinin yerine $t^{-1}\tau$ ve $[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]^{-1}$ ifadesinin yerine de binom açılımı uygulanarak

$$[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]^{-1} = \frac{1}{h_0(\zeta)}[1-\tau\frac{h_1(\zeta)}{h_0(\zeta)}+...] \tag{4.79}$$

alınırsa denklemler şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}K^2 t^{-5/3}[-\frac{2}{3}h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...]+\frac{8}{27}K^2 t^{-5/3}[\tau u_1(\zeta)+...][h_0'(\zeta)+\tau h_1'(\zeta)+...]\\ +\frac{8}{27}K^2 t^{-5/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...][u_0'(\zeta)+\tau u_1'(\zeta)+...]=0\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}Kt^{-4/3}[-\frac{1}{3}u_0(\zeta)+\frac{4}{3}\tau u_1(\zeta)+...]+\frac{4}{9}Kt^{-4/3}[\tau u_1(\zeta)+...][u_0'(\zeta)+\tau u_1'(\zeta)+...]\\ +\frac{4}{9}Kt^{-4/3}[1+\tau\varphi_1(\zeta)+...][h_0'(\zeta)+\tau h_1'(\zeta)+...]\\ +\frac{4}{18}Kt^{-4/3}[h_0(\zeta)+\tau h_1(\zeta)+...][\tau\varphi_1'(\zeta)+...]=0\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\frac{5}{3}t^{-1}\tau\varphi_1(\zeta)+... = -\frac{9}{4}t^{-1}\frac{1}{h_0(\zeta)}[\tau-\tau^2\frac{h_1(\zeta)}{h_0(\zeta)}+...] \tag{4.82}$$

Buna göre, $O(\tau^0)$ mertebesinde denklemler

$$\frac{4}{9}K^2 t^{-5/3}[-\frac{2}{3}h_0(\zeta)+\frac{2}{3}h_0(\zeta)u_0'(\zeta)] = 0 \tag{4.83}$$

$$\frac{2}{3}Kt^{-4/3}[-\frac{1}{3}u_0(\zeta)+\frac{2}{3}h_0'(\zeta)] = 0 \tag{4.84}$$

olarak bulunur.

$O(\tau^1)$ mertebesinde denklemler ise

$$\frac{4}{9}K^2t^{-5/3}[h_1(\zeta)+\frac{2}{3}u_1(\zeta)h_0'(\zeta)+\frac{2}{3}h_0(\zeta)u_1'(\zeta)+h_1(\zeta)u_0'(\zeta)] = 0 \quad (4.85)$$

$$\frac{2}{3}Kt^{-4/3}[\frac{4}{3}u_1(\zeta)+\frac{2}{3}u_1(\zeta)u_0'(\zeta)+\frac{2}{3}(h_1'(\zeta)+\varphi_1(\zeta)h_0'(\zeta)) + \frac{2}{6}h_0(\zeta)\varphi_1'(\zeta)] = 0 \quad (4.86)$$

$$\frac{5}{3}t^{-1}\varphi_1(\zeta) = -\frac{9}{4}t^{-1}\frac{1}{h_0(\zeta)} \quad (4.87)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki denklemlerde $u_0'(\zeta)=1$ olduğu dikkate alınarak (4.85) denkleminden

$$h_1+\frac{2}{3}(h_0u_1)'+\frac{2}{3}h_1=0$$

ve sonuç olarak

$$5h_1+2(h_0u_1)'=0 \quad (4.88)$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde (4.86) denkleminde

$$\frac{4}{3}u_1+\frac{2}{3}u_1+\frac{2}{3}(h_1'+\varphi_1h_0')+\frac{2}{6}h_0\varphi_1'=0$$

olacağından

$$3u_1+h_1'+h_0'\varphi_1+\frac{1}{2}h_0\varphi_1'=0 \quad (4.89)$$

bulunur.

(4.87) denkleminden ise

$$\varphi_1=-\frac{27}{20}\frac{1}{h_0} \quad (4.90)$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak (4.88)-(4.90) eşitlikleri $O(\tau^1)$ mertebesinde denklemleri göstermektedir. Bu denklemlerin uygun sınır koşulları altında çözümleri analitik olarak elde edilecektir.

4.3 Sınır Koşulları

Bu kısımda (4.88),(4.89) ve (4.90) alan denklemlerinin çözülebilmesi için gerekli olan sınır koşulları elde edilecektir. $x=0$'da akım olmaması koşulu $u(0,t)=0$ ve (4.65) ile verilen asimptotik açılım kullanılacak olursa

$$u_0(0)=0, \quad u_1(0)=0 \tag{4.91}$$

sınır koşulları elde edilir. $\zeta = \dfrac{x}{Kt^{2/3}}$ benzerlik dönüşümü ve (4.64) asimptotik açılımı kullanılacak olursa,

$$\zeta_N = 1+\tau X_1+\tau^2 X_2+... \tag{4.92}$$

bulunur. $x=x_N$'de verilen

$$u(x_N,t) = Fr\ [h(x_N,t)\varphi(x_N,t)]^{1/2} \tag{4.93}$$

dinamik koşulu için (4.65)-(4.67) asimptotik açılımları ve (4.92) ifadesi de dikkate alınırsa

$$u_0(1)+\tau X_1 u_0'(1)+\tau u_1(1)+\cdots = Fr\left[(h_0(1)+\tau X_1 h_0'(1)+\tau h_1(1)+\cdots)(1+\tau\varphi_1(1)+\cdots)\right]^{1/2} \tag{4.94}$$

elde edilir. τ'nun çeşitli mertebelerine göre denklemler düzenlenecek olursa, aşağıdaki şekilde verilen sınır koşulları elde edilir:

$O(\tau^0)$ mertebesinde

$$u_0(1) = Fr[h_0(1)]^{1/2}, \tag{4.95}$$

$O(\tau)$ mertebesinde

$$X_1+u_1(1) = \frac{1}{2}Fr^2[X_1 h_0'(1)+h_1(1)+h_0(1)\varphi_1(1)] \tag{4.96}$$

bulunur. $x=x_N$'de

$$\frac{d}{dt}x_N(t) = u(x_N,t) \tag{4.97}$$

ile verilen kinematik sınır koşulunda (4.65)-(4.67) asimptotik açılımlar yazılır ve τ'nun mertebelerine göre denklemler düzenlenecek olursa, $O(\tau)$ mertebesinde

$$X_1 = \frac{2}{5}u_1(1) \tag{4.98}$$

ve $O(\tau^2)$ mertebesinde

$$X_2 = \frac{1}{6}[X_1 u_1'(1) + u_2(1)] \tag{4.99}$$

elde edilir. (4.98) ifadesi (4.96)'da yazılır ve $h_0'(1) = \frac{1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{14 - Fr^2}{5} u_1(1) = Fr^2 h_1(1) + \varphi_1(1) \tag{4.100}$$

elde edilir. (4.90) ifadesinde $\zeta = 1$ olarak alınırsa,

$$\varphi_1(1) = -\frac{27}{20} Fr^2 \tag{4.101}$$

bulunur. (4.89) ile verilen hareket denklemi $\zeta = 1$'de yazılacak olursa,

$$3u_1(1) + h_1'(1) + h_0'(1)\varphi_1(1) + \frac{1}{2} h_0(1)\varphi_1'(1) = 0 \tag{4.102}$$

elde edilir. Denklemde yer alan $\varphi_1(1)$, $\varphi_1'(1)$, $h_0(1)$ ve $h_0'(1)$ değerleri şu şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= -\frac{27}{20} \frac{1}{\frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\zeta^2}, \quad \varphi_1'(\zeta) = \frac{27}{20} \left(\frac{\frac{1}{2}\zeta}{\frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\zeta^2}\right)^2, \\ h_0(\zeta) &= \frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\zeta^2, \qquad h_0'(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta \end{aligned} \tag{4.103}$$

(4.103) ifadeleri $\tau = 1$'de değerlendirilecek olursa şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \varphi_1(1) &= -\frac{27}{20} Fr^2, \quad \varphi_1'(1) = \frac{27}{80} Fr^2, \\ h_0(1) &= \frac{1}{Fr^2}, \qquad h_0'(1) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.104}$$

4.4 Benzerlik Çözümlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda 4.3'te elde edilen sınır koşulları kullanılarak (4.88) ve (4.89) denklemlerinin analitik çözümleri elde edilmeye çalışılacaktır.

Kısım 4.2'de elde edilen (4.90) ifadesi (4.89) denkleminde yerine yazılır ve ifadeler düzenlenirse

$$u_1 = -\frac{1}{3}\{h_1' - \frac{27}{80} \frac{\zeta}{\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4}}\} \tag{4.105}$$

olarak bulunur ve bulunan bu eşitlik (4.88) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$(\frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{Fr^2} - \frac{1}{4})h_1'' + \frac{1}{2}\zeta h_1' - \frac{15}{2} h_1 = \frac{27}{80} \tag{4.106}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir.

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere

$$\xi = i\zeta(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1/2} \tag{4.107}$$

dönüşümü altında

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = i(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\xi} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} = i^2(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{4.108}$$

olduğundan (4.106) denklemi ξ parametresine göre yeniden yazılacak olursa,

$$\zeta = \frac{1}{i}\xi(\frac{4}{Fr^2}-1)^{1/2} \quad , \quad \zeta^2 = -\xi^2(\frac{4}{Fr^2}-1) \tag{4.109}$$

ifadeleri ve (4.108) diferansiyel operatörlerine bağlı olarak

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{Fr^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}[-\xi^2(\frac{4}{Fr^2}-1)]\right\} & i^2(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1}\frac{\partial^2 h_1}{\partial\xi^2} \\ & +\frac{1}{2}\frac{1}{i}\xi(\frac{4}{Fr^2}-1)^{1/2}i(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1/2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi}-\frac{15}{2}h_1=\frac{27}{80}\end{aligned} \tag{4.110}$$

denklemi elde edilir ve (4.121) denkleminde

$$\left\{\frac{1}{Fr^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}[-\xi^2(\frac{4}{Fr^2}-1)]\right\} = (\frac{1}{Fr^2}-\frac{1}{4})(1-\xi^2) \tag{4.111}$$

ve

$$(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1} = \frac{1}{4}(\frac{1}{Fr^2}-\frac{1}{4})^{-1} \tag{4.112}$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}-(\frac{1}{Fr^2}-\frac{1}{4})(1-\xi^2)\frac{1}{4}(\frac{1}{Fr^2}-\frac{1}{4})^{-1} & \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}h_1 \\ & +\frac{1}{2}\xi(\frac{4}{Fr^2}-1)^{1/2}(\frac{4}{Fr^2}-1)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\xi}h_1-\frac{15}{2}h_1=\frac{27}{80}\end{aligned} \tag{4.113}$$

denklemine ve buradan

$$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)\frac{\partial^2 h_1}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\xi\frac{\partial h_1}{\partial\xi}-\frac{15}{2}h_1=\frac{27}{80} \tag{4.114}$$

denklemine ulaşılır [8].

Kısım 4.3'te elde edilen (4.104) ifadeleri (4.102) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$u_1(1) = \frac{1}{3}[-h_1'(1)+\frac{27}{80}Fr^2] \tag{4.115}$$

bulunur. (4.115) olarak elde edilen sınır koşulu (4.100)'de yerine yazılırsa, $h_1(\zeta)$ için $\zeta = 1$'deki sınır koşulu

$$h_1(1) + \frac{14 - Fr^2}{15Fr^2} h_1'(1) = \frac{27}{20}[1 + \frac{14 - Fr^2}{60}] \tag{4.116}$$

şeklinde bulunur. $\zeta = 0$' daki diğer bir sınır koşulu ise (4.89) denkleminden hareketle

$$3u_1(0) + h_1'(0) + h_0'(0)\varphi_1(0) + \frac{1}{2} h_0(0)\varphi_1'(0) = 0 \tag{4.117}$$

şeklinde bulunur. $u_1(0) = 0$, $h_0'(0) = 0$ ve $\varphi_1'(0) = 0$ koşulları kullanılacak olursa

$$h_1'(0) = 0 \tag{4.118}$$

olması gerektiği görülür. (4.107) dönüşümü altında (4.116) ve (4.118) koşulları için, $\zeta = 0$ iken $\xi_0 = 0$; $\zeta = 1$ iken $\xi_1 = i(\frac{4}{Fr^2} - 1)^{-1/2}$ olacağından

$$h_1'(0) = 0 \tag{4.119}$$

$$h_1(\xi_1) + \frac{14 - Fr^2}{15Fr^2} h_1'(\xi_1) = \frac{27}{20}[1 + \frac{14 - Fr^2}{60}] \tag{4.120}$$

yazılabilir.

Dikkat edilecek olursa (4.114) denklemi $\gamma = 5$ olmak üzere

$$(1 - \xi^2)\frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \gamma(\gamma + 1)h_1 = 0 \tag{4.121}$$

homojen olmayan Legendre denklemi yapısındadır. Bu Legendre denkleminin homojen çözümü

$$h_1(\xi) = c_1 P_5(\xi) + c_2 Q_5(\xi) \tag{4.122}$$

şeklinde olup, $P_5(\xi)$ 5. dereceden bir polinomdur ve (A.36) Rodrigues formülü yardımıyla

$$P_5(\xi) = \frac{1}{2^5 5!} \frac{d^5}{d\xi^5}(\xi^2 - 1)^5 \tag{4.123}$$

ifadesinden elde edilmektedir. (4.123) ifadesinde yer alan türevler

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}(\xi^2 - 1)^5 &= 10\xi(\xi^2 - 1)^4 \\
\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi^2 - 1)^5 &= 10[(\xi^2 - 1)^4 + 8\xi^2(\xi^2 - 1)^3] \\
\frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 - 1)^5 &= 10[24\xi(\xi^2 - 1)^3 + 48\xi^3(\xi^2 - 1)^2] \\
\frac{d^4}{d\xi^4}(\xi^2 - 1)^5 &= 240[(\xi^2 - 1)^3 + 12\xi^2(\xi^2 - 1)^2 + 8\xi^4(\xi^2 - 1)] \\
\frac{d^5}{d\xi^5}(\xi^2 - 1)^5 &= 480(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)
\end{aligned} \tag{4.124}$$

şeklinde hesaplanıp (4.123)'de yazılacak olursa $P_5(\xi)$ ifadesi

$$P_5(\xi) = \frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) \tag{4.125}$$

şeklinde elde edilir.

İkinci bağımsız çözüm olan Q_5 ifadesi ise (A.40) denkleminde $n = 5$ için

$$Q_5(\xi) = \frac{1}{2}P_5(\xi)\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} - \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}P_{k-1}(\xi)P_{5-k}(\xi) \tag{4.126}$$

olarak alınabilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}P_{k-1}(\xi)P_{5-k}(\xi)$ toplam ifadesini elde etmek için (A.37) ifadeleri yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}P_{k-1}(\xi)P_{5-k}(\xi) = \frac{63}{8}\xi^4 - \frac{49}{8}\xi^2 + \frac{8}{15} \tag{4.127}$$

olarak bulunur. (4.127) toplamı ve $P_5(\xi)$ ifadesi (4.126) denkleminde yerine yazılırsa

$$Q_5(\xi) = \frac{1}{16}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{63}{8}\xi^4 - \frac{49}{8}\xi^2 + \frac{8}{15} \tag{4.128}$$

olacaktır.

Böylece (4.114) Legendre denkleminin h_{1_h} ile gösterilecek olan homojen çözümü için

$$\begin{aligned} h_{1_h} &= c_1\frac{1}{8}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi) \\ &+ c_2\left(\frac{1}{16}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{63}{8}\xi^4 - \frac{49}{8}\xi^2 + \frac{8}{15}\right) \end{aligned} \tag{4.129}$$

yazılabilir. (4.119) koşulunun sağlanabilmesi için $c_1 = 0$ seçilerek çözüm

$$h_{1_h} = c_2\left(\frac{1}{16}(63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi)\ln\frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{63}{8}\xi^4 - \frac{49}{8}\xi^2 + \frac{8}{15}\right) \tag{4.130}$$

şeklinde alınmalıdır.

(4.114) denkleminin h_{1_o} şeklinde gösterilen özel çözümü, belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak

$$h_{1_o} = C = sabit \tag{4.131}$$

şeklinde aranabilir [26]. Buna göre, bu özel çözüm (4.114) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$(1-\xi^2)\frac{\partial^2 C}{\partial\xi^2} - 2\xi\frac{\partial C}{\partial\xi} + 30C = -\frac{27}{20} \tag{4.132}$$

ifadesi elde edilir ve buna göre

$$C = -\frac{9}{200} \tag{4.133}$$

olarak bulunur. (4.114) denkleminin çözümü

$$h_1 = h_{1_h} + h_{1_o} \tag{4.134}$$

olduğundan

$$h_1(\xi) = c_2 Q_5(\xi) - \frac{9}{200} \tag{4.135}$$

şeklinde elde edilir.

Çözümdeki c_2 katsayısı (4.120) koşulundan $\xi = \xi_1 = i(\frac{4}{Fr^2} - 1)^{-1/2}$ için

$$h_1(\xi_1) = c_2 Q_5(\xi_1) - \frac{9}{200} \tag{4.136}$$

ve

$$h_1'(\xi_1) = c_2 Q_5'(\xi_1) \tag{4.137}$$

olduğundan

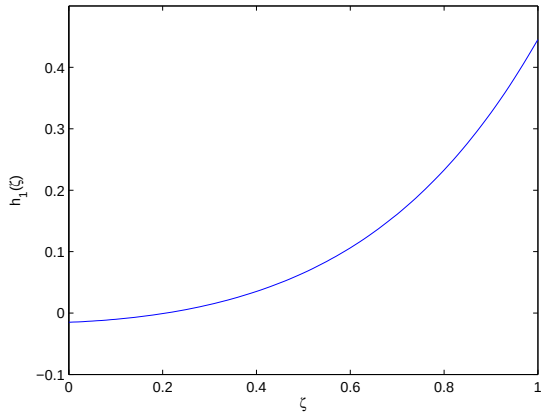
$$c_2 Q_5(\xi_1) - \frac{9}{200} + \frac{14 - Fr^2}{15Fr^2} c_2 Q_5'(\xi_1) = \frac{27}{20}[1 + \frac{14 - Fr^2}{60}] \tag{4.138}$$

denkleminden

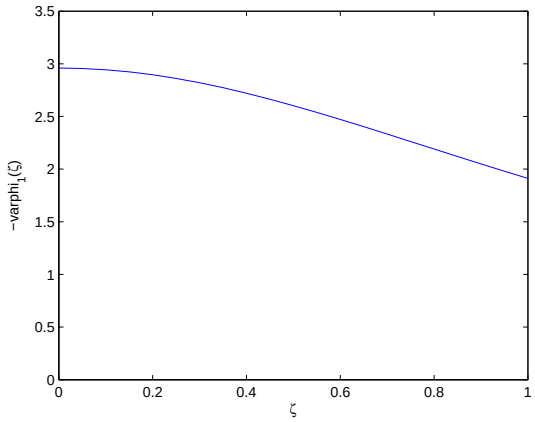
$$c_2 = \frac{9 + 270\left[1 + \dfrac{14 - Fr^2}{60}\right]}{200\left[Q_5(\xi_1) + \dfrac{14 - Fr^2}{15Fr^2} c_2 Q_5'(\xi_1)\right]} \tag{4.139}$$

şeklinde Fr sayısına bağlı olarak elde edilir. $Fr = 1.19$ değerine karşılık $c_2 = -0.05623$ olarak bulunur [8].

Asimptotik açılım kullanılarak boyut analizi yöntemiyle elde edilen $h_1(\zeta)$,$u_1(\zeta)$ ve $-\varphi_1(\zeta)$ benzerlik çözümlerinin grafikleri aşağıda görüldüğü gibidir:



Şekil 4.1: h_1 benzerlik çözümünün ζ'ya göre değişimi



Şekil 4.2: φ_1 benzerlik çözümünün ζ'ya göre değişimi

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışması kapsamında içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımı problemi için model oluşturulmuş, basıncın hidrostatik olmaması koşulu altında alan denklemleri elde edilmiştir. Çeşitli kabuller altında basıncın hidrostatik olduğu kabul edilmiş ve ortalama alan denklemleri elde edilmiştir. Ortalama alan denklemleri kullanılarak, boyut analizi yaklaşımı ile lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi, benzerlik değişkeni cinsinden adi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenmiştir. Bu denklemlerin çözümünü analitik olarak bulmak mümkün olmadığından asimptotik yöntemler kullanılarak benzerlik çözümleri yaklaşık olarak elde edilmiştir. Ayrıca, boyut analizi tekniği kullanılarak içerisinde parçacık bulunan yer çekimi akımı problemi için benzerlik çözümlerini verecek diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Lineer olmayan bu diferansiyel denklem sistemi hiperbolik tiptedir ve analitik olarak çözümü mümkün değildir. Bu sebeple, uygun sayısal yöntemler kullanılarak benzerlik çözümlerinin yaklaşık olarak bulunabileceği görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] **Simpson, J.E.**, 1997. Gravity currents in the environment and the laboratory, Cambridge University Press.

[2] **Vreugdenhil, C.**, 1994. Numerical methods for shallow-water flow, Kluwer, Dordrecht.

[3] **Leveque, R.**, 1992. Numerical methods for conservation laws, Birkhauser.

[4] **Godlewski, E. and Raviart, P.**, 1996. Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws, Springer-Verlag, Newyork.

[5] **Xin, S. and Jin, Z.**, 1995. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions, *Commun. Pure Appl. Math.*, **48**, 235–276.

[6] **D'Alessio, S.J.D.**, **Moodie, T.**, **Pascal, J. and Swaters, G.E.**, 1996. Gravity currents produced by sudden releases of a fixed volume of heavy fluid, *J. Fluid Mech.*, **135**, 95–110.

[7] **Bonnecaze, R.T.**, **Huppert, H.E. and Lister, J.R.**, 1993. Particle-driven gravity currents, *J. Fluid Mech.*, **250**, 339–369.

[8] **Hogg, A.J.**, **Ungarish, M. and Huppert, H.E.**, 2000. Particle-driven gravity currents: asymptotic and box model solutions, *Eur. J. Mech. B-Fluids*, **19**, 139–165.

[9] **Bonnecaze, R.T.**, **Hallworth, M.A.**, **Huppert, H.E. and Lister, J.R.**, 1995. Axisymmetric particle-driven gravity currents, *J. Fluid Mech.*, **294**, 93–121.

[10] **K*á*rm*á*n, T.V.**, 1940. The engineer grapples with nonlinear problems, *Bull. Am. Math. Soc.*, **46**, 615–683.

[11] **Benjamin, T.B.**, 1968. Gravity currents and releated phenomena, *J. Fluid Mech.*, **88**, 223–240.

[12] **Huppert, H.E. and Simpson, J.E.**, 1980. The slumping of gravity currents, *J. Fluid Mech.*, **99**, 785–799.

[13] **Gratton, J. and Vigo, C.**, 1994. Self-similar gravity currents with variable inflow revisited: plane currents, *J. Fluid Mech.*, **258**, 77–104.

[14] **Güngör, F.**, 2007. Diferansiyel Denklemler, ARGEM A.Ş. Yayınları I.

[15] **Arfken, G.B. and Weber, H.J.**, 2001. Mathematical methods for physicists, Academic Press.

[16] **Şuhubi, E.S.**, 1993. Akışkanlar Mekaniği, İTÜ yayınları.

[17] **Johnson, R.S.** A modern introduction to the mathematical theory of water waves, Cambridge texts in applied mathematics.

[18] **Marsden, C.** A mathematical introduction to fluid mechanics, Springer-Verlag.

[19] **Grundy, R.E. and Rottman, J.W.**, 1985. The approach to self-similarity of the solutions of the shallow-water equations representing gravity currents releases, *J. Fluid Mech.*, **156**, 39–53.

[20] **Taylor, E.S.** Dimensional analysis for engineers, OXFORD, Clarendon.

[21] **Simpson, J. and Rottman, J.W.**, 1983. Gravity currents produced by instantaneous releases of heavy fluid in a rectangular channel, *J. Fluid Mech.*, **135**, 95–100.

[22] **Rottman, J.W. and Grundy, R.E.**, 1986. Self-similar solutions of the shallow-water equations representing gravity currents with variable inflow, *J. Fluid Mech.*, **169**, 337–351.

[23] **Moodie, T.B.**, 2002. Gravity currents, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **144**.

[24] **Gladstone, C.**, **Phillips, J.C. and Sparks, R.S.J.**, 1998. Experiments on bidisperse, constant-volume gravity currents: propagation and sediment deposition, *Sedimentology*, **45**, 833–843.

[25] **Hinch, E.J.**, 1992. Perturbation methods, Cambridge University Press.

[26] **Edwards, C.H. and Penney, D.E.**, 2008. Differential equations and boundary value problems, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

A. LEGENDRE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

γ bir sabit olmak üzere

$$(1-x^2)y''-2xy'+\gamma(\gamma+1)y=0 \tag{A.1}$$

şeklindeki ikinci mertebe diferansiyel denklem, Legendre denklemi olarak adlandırılır.

A.1. Sıradan bir nokta civarında seri çözümü

$$y''+\frac{2x}{x^2-1}y'-\frac{\gamma(\gamma+1)}{x^2-1}y=0 \tag{A.2}$$

Legendre denklemi

$$y''+\frac{1}{x-1}\frac{2x}{x+1}y'-\frac{1}{(x-1)^2}\frac{\gamma(\gamma+1)(x-1)}{x+1}y=0 \tag{A.3}$$

şeklinde ifade edilsin. Burada

$$P(x)=-\frac{2x}{1-x^2},\quad Q(x)=\frac{\gamma(\gamma+1)}{1-x^2} \tag{A.4}$$

katsayı fonksiyonları orijinde analitik olduğundan, orijin (A.1) denkleminin sıradan noktasıdır. O halde,

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{A.5}$$

biçiminde bir kuvvet serisi çözümünün olabileceği düşünülebilir [14]. (A.5) serisi ve

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \tag{A.6}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \tag{A.7}$$

türevleri verilen denklemde yerine konur ve x^nnin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n-1)na_n-2na_n+\gamma(\gamma+1)a_n=0 \tag{A.8}$$

olacağından

$$a_{n+2}=-\frac{(\gamma-n)(\gamma+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n,\qquad n=0,1,2,... \tag{A.9}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı yardımıyla a_n katsayıları, a_0 ve a_1 türünden bulunabilir:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}a_0 \\ a_3 &= -\frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{2.3}a_1 \\ a_4 &= -\frac{(\gamma-2)(\gamma+3)}{3.4}a_2 = \frac{\gamma(\gamma-2)(\gamma+1)(\gamma+3)}{4!}a_1 \\ a_5 &= -\frac{(\gamma-3)(\gamma+4)}{4.5}a_3 = \frac{(\gamma-1)(\gamma-3)(\gamma+2)(\gamma+4)}{5!}a_1 \\ &... \end{aligned}$$

Burada a_0 ve a_1 katsayıları keyfi kalır. Eğer $a_1 = 0$ ise (A.9) bağıntısından $a_3 = a_5 = ... = 0$ olur ve Legendre denkleminin bir çözümü keyfi sıfır olmayan bir a_0 için

$$y_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x^{2k} \tag{A.10}$$

dır. Diğer çözüm $a_0 = 0$ seçilip, a_1 keyfi bırakılarak sıfırdan farklı a_1 için

$$y_2 = a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} \tag{A.11}$$

şeklinde yazılabilir. y_1 ve y_2 çözümlerinde yer alan katsayılar (A.9) rekürans bağıntısının ardışık olarak uygulanması yoluyla hesaplanmalıdır [14].

Bu şekilde Legendre denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= a_0[1 - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!}x^2 + \frac{\gamma(\gamma-2)(\gamma+1)(\gamma+3)}{4!}x^4 - ...] \\ &+ a_1[x - \frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{3!}x^3 + \frac{(\gamma-1)(\gamma-3)(\gamma+2)(\gamma+4)}{5!}x^5 - ...] \end{aligned} \tag{A.12}$$

serileri şeklinde bulunmuş olur. Yani a_0 ve a_1 keyfi sabitler olmak üzere genel çözüm iki kuvvet serisinin toplamı şeklinde yazılabilir.

Genel çözümde yer alan serilerin yakınsaklık aralığını bulmak için, (A.9) rekürans bağıntısında n yerine $2n$ yazılırsa, birinci seri için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(\gamma-2n)(\gamma+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right||x^2| = |x^2| < 1 \tag{A.13}$$

ve benzer şekilde ikinci seri için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(\gamma-2n-1)(\gamma+2n+2)}{(2n+2)(2n+3)}\right||x^2| = |x^2| < 1 \tag{A.14}$$

bulunur. Buradan seriler için yakınsaklık yarıçapının $R = 1$ olduğu söylenebilir [14].

Sonuç olarak, (A.12) serisi a_0 ve a_1 sabitlerinin her seçimi için (A.1) denkleminin kabul edilebilir bir çözümü olur. Dolayısıyla parantezler içindeki seriler birer özel çözümdür. Ayrıca bu seriler lineer bağımsız olduğundan (A.12) serisi $|x| < 1$

aralığında Legendre denkleminin genel çözümüdür. (A.12) denklemiyle verilen fonksiyonlara Legendre fonksiyonları denmektedir ve genel olarak elemanter fonksiyonlarla ifade edilemez. Ancak, γ negatif olmayan bir tamsayı iken, örneğin $\gamma = 2m$(çift) olduğunda, (A.12) çözümündeki birinci seri sonlu diğeri sonsuz olurken, $\gamma = 2m+1$(tek) iken ikinci seri sonlu, diğer seri sonsuz olur. Sonlu kalan seriler birer polinom olduğundan Legendre polinomları ismini alır ve $P_n(x)$ ile gösterilir. $x = \pm 1$ için ıraksak olan diğer sonsuz seriler ikinci tür Legendre fonksiyonları olarak adlandırılır [14].

A.2. Düzenli Tekil Nokta Civarında Seri Çözümünün Elde Edilmesi

$$y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' - \frac{\gamma(\gamma+1)}{x^2-1}y = 0 \tag{A.15}$$

ya da

$$y'' + \frac{1}{x-1}\frac{2x}{x+1}y' - \frac{1}{(x-1)^2}\frac{\gamma(\gamma+1)(x-1)}{x+1}y = 0 \tag{A.16}$$

biçiminde yazılsın. Açıkça görüldüğü üzere denklemin $x = 1$'de tekilliği bulunmaktadır; ancak

$$\begin{aligned}(x-1)P(x) = \frac{2x}{x+1} &= \frac{1+(x-1)}{1+\frac{1}{2}(x-1)} \\ &= 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+...\end{aligned} \tag{A.17}$$

ve

$$\begin{aligned}(x-1)^2Q(x) &= -\gamma(\gamma+1)\frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\frac{x-1}{1+\frac{1}{2}(x-1)} \\ &= -\frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+...]\end{aligned} \tag{A.18}$$

fonksiyonları $x = 1$'de analitik olduğundan denklemin $x = 1$'de düzgün tekil noktası olduğu söylenebilir. Benzer şekilde $x = -1$ noktasının da düzgün tekil noktası olduğu görülebilir.

Sonsuzdaki noktasını incelemek için $x = 1/t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$y''(t) + \frac{2t}{t^2-1}y'(t) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{t^2(t^2-1)}y(t) = 0 \tag{A.19}$$

denklemi elde edilir. Dikkat edilirse $t = 0$ bu denklemin düzgün tekil noktasıdır; yani $x = \infty$ (A.1) denkleminin düzenli tekil noktasıdır. Buna karşılık gelen indis denklemi

$$(m-\gamma-1)(m+\gamma) = 0 \tag{A.20}$$

dır [14]. Bu üç nokta haricindeki tüm noktalar (A.1) Legendre denkleminin sıradan noktalarıdır.

$x = 1$ komşuluğunda çözümü bulmak için $t = (1-x)/2$ dönüşümü uygulanırsa

$$t(1-t)y''(t) + (1-2t)y'(t) + \gamma(\gamma+1)y(t) = 0 \tag{A.21}$$

hipergeometrik denklemi bulunur. Bu denklem için $\alpha = \gamma+1, \beta = -\gamma$ ve $\gamma = 1$dir ve bir çözüm

$$y_1(x) = \quad {}_2F_1(\gamma+1,-\gamma,1;t) = \quad {}_2F_1[\gamma+1,-\gamma,1;\frac{1}{2}(1-x)] \tag{A.22}$$

olur. Eğer $\gamma = n$ pozitif bir tamsayı ise bu çözüm n. dereceden bir polinom olur ve $y(1) = 1$ şartını sağlar. Burada $\gamma = 1$ olduğundan indis denklemi $m^2 = 0$ olur. Bu sebeple ikinci çözümü bulmak için mertebe indirgeme yöntemi uygulanabilir. Buna göre ikinci bağımsız çözüm

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dt} dt = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{\int -\frac{1-2t}{t(1-t)} dt} \\ &= y_1 \int \frac{1}{t} (\frac{1}{y_1^2} \frac{dt}{1-t}) dt \end{aligned} \tag{A.23}$$

olarak elde edilir. y_1^2, sabit terimi 1 olan bir polinom olduğundan parantez içindeki ifade orijinde analitiktir ve

$$1 + a_1 t + a_2 t^2 + ... \tag{A.24}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$y_2 = y_1(\ln t + a_1 t + ...) \tag{A.25}$$

veya

$$y_2 = y_1 \ln t + y_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n \tag{A.26}$$

olarak bulunur. Logaritmik terimden ötürü, Legendre denkleminin $\gamma = n$ için $t = 0$ noktasında, yani $x = 1$ komşuluğunda sınırlı çözümü olamaz. Sonuç olarak, (A.1) denkleminin $x = 1$'de sınırlı olan tek çözümü ${}_2F_1[-n, n+1, 1; \frac{1}{2}(1-x)]$ polinomunun sabit katlarıdır. Bu polinomlara Legendre polinomları denir ve

$$P_n(x) = {}_2F_1[-n, n+1, 1; \frac{1}{2}(1-x)] \tag{A.27}$$

ile gösterilir [14]. Legendre polinomlarını daha kolay elde edilir bir hale getirmek için, (A.9) rekürans bağıntısında $\gamma = n$ için $a_{n+2} = 0$, dolayısıyla $a_{n+4} = 0$, $a_{n+6} = 0, ...$ ve genel olarak $a_{n+2j} = 0 (j = 1, 2, ...)$ sonucuna ulaşılır. Bu şekilde n. dereceden $P_n(x)$ polinomları elde edilmiş olur. (A.12) çözümünden görüleceği üzere bu polinomlar, n'nin çift ya da tek olmasına bağlı olarak x'in ya çift ya da tek kuvvetlerini içermektedir [14]. Buradan hareketle,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{n-2k} x^{n-2k} = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + ... \tag{A.28}$$

yazılabilir. Buna göre, $n = 2m$(çift) ise toplamın son terimi a_0, $n = 2m+1$(tek) ise $a_1 x$ olacaktır.

Legendre polinomlarının hipergeometrik fonksiyonlarla tanımında $x = 1$ alınarak,

$$P_n(1) = {}_2F_1(-n, n+1, 1; 0) = 1 \tag{A.29}$$

elde edilir ve (A.28) ifadesinden $P_n(-1) = (-1)^n$ bulunur. Bu sonuçlar, Legendre polinomşarının standart tanımında kullanılmaktadır.

(A.9) rekürans bağıntısında $\gamma = n$ olmak üzere n yerine $k-2$ alınarak

$$a_{k-2} = -\frac{k(k-1)}{(n-k+2)(n+k-1)} a_k \tag{A.30}$$

elde edilir.

$P_n(1) = 1$ şartı sağlanacağından,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}, \quad n = 1,2,... \\ a_0 &= 1 \end{aligned} \tag{A.31}$$

alınmalıdır. (A.9) rekürans bağıntısında $k = n, n-2, n-4, ...$ alınarak,

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} . \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}, \\ a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}, \\ &... \end{aligned} \tag{A.32}$$

ve genel olarak

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \tag{A.33}$$

elde edilir. Burada $n-2k \geq 0$ olduğundan, $n \geq 0$ için pozitif k değerleri $0 \leq k \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında olmalıdır.

(A.33) ifadesi (A.28) bağıntısında yerine yazılırsa, $P_n(x)$ polinomları için

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \tag{A.34}$$

bağıntısına ulaşılır. Bu bağıntıyı basitleştirmek için

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^2)^{n-k} (-1)^k \end{aligned} \tag{A.35}$$

yazılsın. Son satırdaki üst sınırda $[\frac{n}{2}]$ yerine n almak sonucu değiştirmez; çünkü, eklenen terimlerin derecesi n'den küçük olacağı için bunların n. türevleri sıfır olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{n-k} (-1)^k \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \end{aligned} \tag{A.36}$$

bağıntısı elde edilir ki (A.36) ifadesi Rodrigues formülü olarak adlandırılır.

Bu formül yardımıyla ardışık Legendre polinomları kolay bir şekilde hesaplanabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= (3x^2-1)/2, \\ P_3(x) &= (5x^3-3x)/2, \\ P_4(x) &= (35x^4-30x^2+3)/8 \end{aligned} \tag{A.37}$$

olarak bulunur [14].

$\gamma = n$ tamsayı olduğunda ikinci çözüm $x = \pm 1$ noktalarında sınırlı değildir. Bu durumda ikinci tür Legendre fonksiyonu olarak adlandırılan ve $Q_n(x)$ ile gösterilen bu ikinci çözüm mertebe düşürülerek şu şekilde verilebilir:

$$Q(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2} \tag{A.38}$$

(A.37) ifadeleri yardımıyla, $|x| < 1$ için

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \tanh^{-1} x, \\ Q_1(x) &= x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \\ Q_2(x) &= \frac{1}{2} P_2(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2} x \end{aligned} \tag{A.39}$$

olarak bulunabilir. Genel halde ise,

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P_{k-1}(x) P_{n-k}(x) \tag{A.40}$$

olarak ifade edilebilir [14]. (A.40) ifadesinde toplam sembolüyle gösterilen terim n. dereceden bir polinom olacaktır. $|x| > 1$ için sabit farkıyla

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \coth^{-1} x$$

bağıntısı geçerlidir. Diğerleri de benzer şekilde hesaplanabilir. Sonuç olarak, $\gamma = n$ negatif olmayan bir tamsayı ise Legendre denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x) \tag{A.41}$$

şeklindedir ve $|x| < 1$ aralığında analitik bir fonksiyondur [14, 15].

ÖZGEÇMİŞ

Hale AYTAÇ, 1983 yılında Afyon ilinin Dazkırı ilçesinde dünyaya gelmiştir. 2001 yılında Haydarpaşa Süper Lisesi'ni bitirmiştir. 2005 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nden mezun olmuş ve aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başlamıştır. 2005 yılından itibaren İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.