İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇERİSİNDE PARÇACIKLI VİSKOZ AKIŞKAN BULUNAN ÖNGERİLMELİ LİFLİ VİSKOELASTİK KALIN TÜPLERDE HARMONİK DALGA YAYILIMI

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Rahmiye ERGÜN

Anabilim Dalı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

ŞUBAT 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇERİSİNDE PARÇACIKLI VİSKOZ AKIŞKAN BULUNAN ÖNGERİLMELİ LİFLİ VİSKOELASTİK KALIN TÜPLERDE HARMONİK DALGA YAYILIMI

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Rahmiye ERGÜN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05 Ekim 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 01 Şubat 2008

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ali ERCENGİZ (İTÜ)**

Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY (Işık Ü.)**

Prof. Dr. Ayşe SOYUÇOK (YTÜ)

Prof. Dr. M. Orhan KAYA (İTÜ)

Doç. Dr. Nalan ANTAR (İTÜ)

ŞUBAT 2008

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında değerli fikir ve yardımları ile bana ışık tutan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Ali ERCENGİZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Tez İzleme Komitesi Üyeleri olan Sayın Doç. Dr. Nalan ANTAR ve Prof. Dr. Metin Orhan KAYA ile beni destekleyen anne ve babama çok teşekkür ederim.

Ekim, 2007 Rahmiye ERGÜN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ **iv**
SEMBOL LİSTESİ **vii**
ÖZET **viii**
SUMMARY **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. ALAN DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI **11**

2.1. Akışkanın Hareket Denklemleri 11
2.2. Viskoelastik Lifli Katı Malzeme İçin Alan Denklemleri 13
2.2.1. Lifli Viskoelastik Katı İçin Bünye Denklemleri 13
2.2.2. Büyük Ön Şekil Değiştirmeler Üzerine Sonsuz Küçük Yer Değiştirmelerin Süperpoziyonu 20
2.2.2.1. Artımsal Hareket Denklemleri 25
2.2.2.2. Artımsal Bünye Denklemleri 27
2.3. Silindirik Koordinatlarda Alan Denklemleri 30
2.3.1. Akışkan İçin Alan Denklemleri 30
2.3.2. Viskoelastik Malzeme İçin Alan Denklemleri 32
2.4. Katı Ortama Ait Ön Şekil Değiştirmenin Belirlenmesi 34

3. ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ **44**

3.1. Akışkanın Alan Denklemlerinin Çözümü 44
3.2. Katı Ortamın Alan Denklemlerinin Çözümü 47
3.2.1. Uzun Dalga Yaklaşımı ve Viskoz Olmayan Akışkanla Dolu İnce Tüp Durumu 55
3.2.2. Uzun Dalga Yaklaşımı ve Viskoz Akışkanla Dolu Kalın Tüp Durumu 60

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **68**
KAYNAKLAR **71**
EKLER **74**
ÖZGEÇMİŞ **110**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Büyük ön şekil değiştirmeler üzerine sonsuz küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu.....20

Şekil 2.2 : P_i iç basıncı ve N eksenel kuvvetinin etkisi altındaki silindir.....35

Şekil 2.3 : Damar modelinde lif doğrultularının gösterilimi.....36

Şekil A.1 : $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....74

Şekil A.2 : $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....75

Şekil A.3 : $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....76

Şekil A.4 : $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi....77

Şekil A.5 : $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....78

Şekil A.6 : $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....79

Şekil A.7 : $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi....80

Şekil A.8 : $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi...81

Şekil A.9 : $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....82

Şekil A.10 : $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....83

Şekil A.11 : $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....84

Şekil A.12 : $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....85

Şekil A.13 : $\bar{\alpha}=5,\ \gamma_1=0.5,\ f=0.3,\ \omega\tau=1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....86
Şekil A.14 : $\bar{\alpha}=5,\ \gamma_1=0.5,\ f=0.3,\ \omega\tau=1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....87
Şekil A.15 : $\bar{\alpha}=5,\ \gamma_1=0.5,\ f=0.3,\ \omega\tau=1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....88
Şekil A.16 : $\bar{\alpha}=5,\ \gamma_1=0.5,\ f=0.3,\ \omega\tau=1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi.....89
Şekil A.17 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken λ ve f'nin farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....90
Şekil A.18 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken λ ve f'nin farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....91
Şekil A.19 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken λ ve f'nin farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....92
Şekil A.20 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken λ ve f'nin farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....93
Şekil A.21 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ f=0.5,\ \omega\tau=1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....94
Şekil A.22 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ f=0.5,\ \omega\tau=1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....95
Şekil A.23 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ f=0.5,\ \omega\tau=1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....96
Şekil A.24 : $\gamma_1=0.5,\ \gamma_3=0.01,\ f=0.5,\ \omega\tau=1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi.....97
Şekil A.25 : $\lambda=1.4,\ \gamma_3=0.02,\ f=0.5,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....98
Şekil A.26 : $\lambda=1.4,\ \gamma_3=0.02,\ f=0.5,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....99
Şekil A.27 : $\lambda=1.4,\ \gamma_3=0.02,\ f=0.5,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....100
Şekil A.28 : $\lambda=1.4,\ \gamma_3=0.02,\ f=0.5,\ \hat{\beta}=60^\circ,\ \omega\tau=1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....101

Şekil A.29 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....102
Şekil A.30 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....103
Şekil A.31 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....104
Şekil A.32 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....105
Şekil A.33 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken f'nin farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....106
Şekil A.34 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken f'nin farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....107
Şekil A.35 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken f'nin farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....108
Şekil A.36 : $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken f'nin farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi.....109

SEMBOL LİSTESİ

$\hat{t}_{kl}$: Akışkanın gerilme tansörü
ρ_0 : Akışkanın yoğunluğu
$\hat{p}$: Akışkana ait hidrostatik basınç terimi
$\hat{\mu}$: Akışkanın viskozite katsayısı
λ : Eksenel germe
P_i : İç basınç
α, β, k_1, k_2 : Katı ortama ait malzeme sabitleri
μ : Katı ortama ait viskozite katsayısı
t_{kl}^0 : Katı ortamın öngerilme tansörü
$\overline{T}_{kl}$: Artımsal Piola-Kirchhoff tansörü
$\tilde{t}_{kl}(\overline{t}_{kl})$: Artımsal Cauchy gerilme tansörü
$\overline{p}$: Artımsal hidrostatik basınç terimi
a_{01_K}, a_{02_K} : Katı ortamda bulunan lifler doğrultularındaki birim vektörler
$\hat{\beta}$: Katı ortamda bulunan iki farklı lif doğrultusu arasındaki açı
ρ : Katı ortamın yoğunluğu
c_{kl}^{-1} : Finger şekil değiştirme tansörü
I_1, I_4, I_6 : İnvaryantlar
$\overline{P}^0$: Katı ortama ait hidrostatik basınç terimi
$\hat{u}, \hat{w}$: Akışkanın radyal ve eksenel doğrultulardaki hız bileşenleri
$\hat{u}_s, \hat{w}_s$: Akışkandaki parçacıkların radyal ve eksenel doğrultudaki hız bileşenleri
u, w : Katı ortamın radyal ve eksenel artımsal yer değiştirme bileşenleri
N : Akışkanın birim hacmindeki tanecik sayısı
φ : Akışkanın birim hacminde bulunan parçacıkların oluşturduğu hacim
m : Akışkandaki bir parçacığın kütlesi
r_i, r_d : Tüpün ön şekil değiştirmeden sonraki iç ve dış yarıçapları
R_i, R_d : Tüpün ön şekil değiştirmeden önceki iç ve dış yarıçapları
$\overline{R}, \overline{r}$: Tüpün ön şekil değiştirmeden önce ve sonraki ortalama yarıçapı
$\overline{\alpha}$: Womersley parametresi
f : Parçacık konsantrasyonu
γ_1 : Katı malzemenin lifli yapısının etkinliğini gösteren büyüklük
γ_2 ve γ_3 : Katı malzemenin vizkozitesi ile ilgili büyüklükler
v_1, v_2 : Birincil ve ikincil dalga hızları
χ_1, χ_2 : Birincil ve ikincil dalga hızlarına ait taşıma katsayıları

İÇERİSİNDE PARÇACIKLI VİSKOZ AKIŞKAN BULUNAN ÖNGERİLMELİ LİFLİ VİSKOELASTİK KALIN TÜPLERDE HARMONİK DALGA YAYILIMI

ÖZET

Bu tez çalışmasında, içinde parçacıklı, viskoz bir akışkan bulunan, lifli yapıda, öngerilmeli viskoelastik tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Uygulama açısından da önemli olan problem kan damarlarında dalga yayılımı problemi olarak ele alınmıştır.

Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimi üzerinde durularak bu çerçevedeki çalışmalardan kısaca söz edilmiş, genel açıklamalar ve tanımlar yapılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümü, temel alan denklemlerinin elde edilmesine ve sınır koşullarının incelenmesine ayrılmıştır. Newtonyen olarak ele alınan akışkanın (kanın) sıkışmaz ve viskoz olduğu, ayrıca içinde parçacıklar bulundurduğu düşünülmüş ve silindirik koordinatlarda genel hareket denklemleri elde edilmiştir. Viskoelastik, lifli ve sıkışmaz bir malzeme olarak ele alınan tüpün (damarın) hareket denklemlerini elde etmek için ise, "Büyük statik ön şekil değiştirmeler üzerine küçük şekil değiştirmelerin süperpoze edilmesi" teorisi kullanılmış ve ortaya çıkan dinamik durumu karakterize eden artımsal hareket ve artımsal bünye denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler silindirik koordinatlarda yazılmış ve sağlatılması gerekli sınır koşulları verilmiştir. Daha sonra, silindirik kabuğun (damarın) dengede bir başlangıç durumu olarak, sabit eksenel germe ve iç basınç etkisinde olduğu kabul edilerek, bu öngerilme durumu için artımsal hareket denklemleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde akışkanın ve tüpün katı malzemesinin hareket denklemlerinin çözümü eksenel simetrik hareket durumu için elde edilmiştir. Akışkana ait diferansiyel denklemlere kapalı çözüm bulmak mümkün olabilmiş, fakat tüpün alan denklemlerinin katsayılarının karmaşık bir şekilde radyal koordinatın fonksiyonları olmaları nedeniyle, katı malzemeye ait denklemlere kapalı çözümler vermek mümkün olamamıştır. Bu nedenle, katı fazı yöneten diferansiyel denklemler ile sınır koşullarına ilişkin denklemlere, dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde etmek için, sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözüm aranmıştır. Daha sonra, uzun dalga yaklaşımında, viskoz olmayan akışkanla dolu öngerilmesiz ince tüp önce elastik, sonra viskoelastik olarak göz önüne alınarak dispersiyon bağıntıları incelenmiş, dalga hızları ve taşıma katsayıları bulunmuştur. Son olarak ise yine uzun dalga yaklaşımında, bu defa viskoz akışkanla dolu, öngerilmeli, kalın duvarlı, viskoelastik tüp için dispersiyon bağıntısı elde edilmiş, dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanarak, lif etkinliği parametresi, viskoelastisite parametresi, eksenel germe, akışkandaki parçacıkların kütle yoğunluğu, Womersley parametresi ve liflerin doğrultuları arasındaki açının farklı değerlerine göre grafikleri verilmiştir. Elde edilen sonuçların önceki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırması yapılarak uyum sağladıkları görülmüştür.

Dördüncü bölümde, çalışmada varılan sonuçlar özetlenmiş, yorumlanmış ve önerilerde bulunulmuştur.

PROPAGATION OF HARMONIC WAVES IN PRESTRESSED FIBER VISCOELASTIC THICK TUBES FILLED WITH A VISCOUS DUSTY FLUID

SUMMARY

In this thesis the harmonic wave propagation problem in fibrous, prestressed viscoelastic tubes filled with a viscous fluid that has dusty particles, is investigated. The problem which is important also for the application point of view, is considered as wave propagation in blood vessels.

In the first chapter, dwelling upon the historical evaluation of the subject the works on this framework are shortly mentioned, the general methodology and the basic definitions are given.

The second chapter of the work is devoted to obtain the basic field equations and the evaluation of the boundary conditions. The fluid (blood) is considered as incompressible and Newtonian, and has dusty paticles in it then the general equations of the motion is obtained in cylindrical coordinates. On the other hand, equations of motion of the tube (vessel) that is considered as viscoelastic, fibrous and incompressible are obtained employing the theory of "Superposing small deformations on large initial static deformations" and then equations of motion and constitutive equations both as incremental equations that characterize the dynamical state are obtained. These equations are given in cylindrical coordinates along with the boundary conditions that must be satisfied. Then, as an initial state in equilibrium, the cylindrical shell (vessel) is assumed has both uniform, axial stretch and inner pressure and incremental equations of motion are obtained.

In the third chapter solutions of the equations of motion of the fluid and the solid material of the tube are obtained for the case of axial symmetric motion. For this case it could be possible to obtain closed form of solutions to the equations of the fluid phase but, because the coefficients are functions of the radial coordinate complexly, it could not be possible to obtain closed solutions to the equations belonging to the solid phase. For this reason and additionally for to obtain the effect of the tube's thickness on the wave characteristics, , numerical solution with the method of finite differences is sought for the differential equations that govern the solid phase and the equations corresponding to the boundary conditions. Then, in the long wave approximation, dispersion relations are obtained and investigated for the initially free thin tube of first elastic then viscoelastic material, filled with non-viscous fluid and the wave velocities and the transmission coefficients are obtained. Finally, again in the long wave approximation, this time for a prestressed, thick walled viscoelastic tube filled with viscous fluid, the dispersion relation is obtained and calculating the wave velocities and the transmission coefficients their graphs are given for the various values of the fiber activity parameter, viscoelasticity parameter, axial stretch, mass density of the dusty particles in the fluid, Womersley's parameter and the angle between the directions of the fibres. Comparing the obtained results with results of the works in the literature, it is observed that they are in good agreement.

In the fourth chapter, the results obtained in the work are summarized, interpreted and suggestions are given.

1. GİRİŞ

İçi viskoz veya viskoz olmayan akışkanla dolu öngerilmeli veya öngerilmesiz elastik veya viskoelastik tüpler içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemi mühendisliğin birçok dalında önemli uygulama alanı bulmuştur. Sözü edilen problem bu çalışmada büyük kan damarlarındaki pulsatif kan akımına ilişkin dalga yayılımının incelenmesi şeklinde ele alınmıştır. Bu problemin biyomühendislik açısından önemi, dalga hızlarının ve taşıma katsayılarının damardaki elastik veya viskoelastik özelliklere bağlı olmasından dolayı bunları ölçmek suretiyle malzeme özelliklerinde ne gibi değişimlerin olduğunu gözlemeye izin vermesindendir. Bununla birlikte, bu değişimleri dikkate alarak fizyolojik bakımdan ne gibi değişmelerin olduğu bu sayede incelenebilir. Gerçekçi bir inceleme yapabilmek için, hem kanın hem damarın mekanik özellikleri dikkate alınmalıdır.

İçerisinde akışkan bulunan öngerilmeli veya öngerilmesiz silindirik tüpler içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemi Thomas Young (1773-1829) [1] zamanından beri üzerinde çalışılan ilginç bir konu olarak kendini göstermektedir. Bilindiği kadarıyla Thomas Young 1808'de insan atardamarlarında (arterlerde) puls dalgalarının hızını hesaplayan ilk bilim insanıdır. Daha sonraları Weber kardeşlerin bu konular üzerinde çalıştığı görülmektedir. Wilhelm Eduard (1804-1896) fizikçi olup, anatomist Ernest Heinrich (1795-1878) ile çalışmış, birlikte dalgaların damarların dallanma noktalarındaki yansıma ve dalganın aktarılması konuları üzerindeki bulguları ile biyofiziğin ilk uygulamalarını vermişlerdir. Weber'lerin çalışmalarını Moens'in deneysel çalışmaları ile Korteweg ve Relal'in teorik çalışmaları izlemiştir. Moens ve Korteweg viskoz olmayan sıkışmaz bir akışkan ile dolu elastik tüp içerisindeki dalga yayılımı ve hızı problemlerini incelemişlerdir. Viskozitenin dalga hızına etkisini ilk defa modelleyen ve dalga hızını yaklaşık hesaplayan bilim insanı Witzig'dir [2]. Tüpü ince, elastik, akışkanı lineeer Navier-Stokes akışkanı olarak kabul etmiştir.

1927'de Crandall [3] sonsuz uzunluklu rijit bir tüp içerisindeki pulsatif akımın hız profilini elde etmiştir. Bu arada Otto Frank'ın (1865-1944) [4] dolaşım sistemi için

ortaya attığı Windkessel modelinden önemli bir gelişme olarak söz edilebilir. Bu modelde, ana atardamarlar elastik bir oda, bunun devamı olan damarlar ise sabit dirençli rijit borular şeklinde düşünülmüştür. 1950 yılına kadar olan gelişmeleri Lambossy'nin [5] derleme makalesinde bulmak mümkündür.

1950'li yıllarda özellikle Amerika Birleşik Devletleri'nde uzay programlarına ağırlık verilmesi ile biyomühendislik konularındaki çalışmalar hız kazanmıştır. Iberall [6] elastik tüplerde dalga yayılımı problemi üzerine ayrıntılı bir çalışma yapmıştır. Iberall sadece radyal doğrultudaki hareketin varlığını kabul etmiş, eksenel doğrultudaki hareketi ihmal etmiştir. Tüplerde dalga yayılması ile ilgili diğer iki önemli inceleme de, Morgan ve Kiely [7] ve Womersley'in [8-10] çalışmalarıdır. Morgan ve Kiely lineerleştirilmiş tüp denklemlerini ve akışkan için de Navier-Stokes denklemlerini kullanmışlardır. Elde ettikleri denklemin iki kökü olup düşük değerli olanı akışkan içindeki basınç dalgasını karakterize eder ve Young modu olarak bilinir, daha yüksek olanı ise Lamb moduyla anılır ve tüp içerisindeki dalgayı karakterize etmektedir. Womersley [8] de hemen hemen aynı modelden hareketle dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Daha sonra Womersley [9], ilk formülasyonunu, damarın içinde bulunduğu yatağın etkisini hesaba katarak geliştirmiştir.

1962 yılında Klip [11], kalın duvarlı viskoelastik tüp içerisinde bulunan sıkışabilir Newtonyen akışkanın, simetrik olmayan dalga hareketini, daha sonra da [12] böyle bir ortamda yer alan burulma dalgalarını incelemiştir.

Birbirinden bağımsız olarak Whirlow ve Rouleau [13] ve Jager [14] 1965 yılında sıkışmaz bir akışkan ile dolu elastik kalın tüp içerisinde harmonik dalga hareketini incelemişlerdir.

Anliker ve Maxwell [15] 1966 yılında, elastik ince bir tüp içerisindeki viskoz akışkanın çevrisiz fakat simetrik olmayan hareketini dikkate alarak dalga yayılımı hareketini incelemişlerdir.

Buraya kadar yapılan çalışmalarda, damarların etkisinde olduğu ön şekil değiştirme pek dikkate alınmamıştır. 1966'da Atabek ve Lew [16] viskoz ve sıkışmaz akışkanla dolu elastik, izotrop ve ince bir tüpün bir ön gerilme (radyal ve eksenel) etkisinde kaldığını kabul edip, bunun üzerine küçük yer değiştirmeler süperpoze ederek hareket denklemlerini elde etmişler ve bu denklemlerin dalga çözümünü aramışlardır. Ön şekil değiştirme hariç bu model Womersley modelinden başka

birşey değildir. Daha sonra Atabek [17] ortotropik viskoelastik bir tüp içerisinde hareket eden viskoz, sıkışmaz akışkandaki dalga hareketini ve ön gerilmenin dalga karakteristiklerine olan etkisini incelemiştir. Sözü edilen son iki çalışmada, ön gerilme hesaba katılmışsa da, çalışılan malzemeye ait bünye bağıntısı bulunmadığından ön gerilme ile ön şekil değiştirme arasında ve başlangıç gerilmesi ile artımsal gerilme arasında fonksiyonel bir ilişki bulunmamaktadır.

1967 yılında Mirsky [18] bu modelleri geliştirerek, damar duvarlarının ortotrop yapısını da işin içine katmıştır. Mirsky [19] daha sonra 1968'de yaptığı bir çalışmada büyük başlangıç şekil değiştirmesini hesaba katmış ve dalga hızını ön şekil değiştirmeye bağlı olarak hesaplayıp sonucu sayısal olarak yorumlamıştır.

Chow ve Apter [20], viskoz, sıkışmaz akışkanla dolu viskoelastik tüplerdeki dalgaların sönüm ve dispersiyonunu bünye denklemini iki farklı şekilde ele alarak incelemiştir (Voigt malzemesi ve lineer standart katı malzeme). Faz hızı ve sönüm etkisinin viskoelastik tüp ve akışkanı karakterize eden çeşitli parametrelere bağlı olduğunu göstermiştir. Elastik tüplerle karşılaştırıldığında viskoelastik tüplerin daha yüksek faz hızı ve sönüm katsayısına sahip olduklarını göstermiştir.

Cox [21], içerisinde akışkan bulunan kalın duvarlı, viskoelastik tüpteki harmonik dalga yayılımını damarlardaki kan akımının bir modeli olarak düşünmüştür. Akışkanı homojen ve Newtonyen olarak ele almış ve hareketi laminer ve eksenel simetrik olarak kabul etmiştir. Tüp duvarını ise izotropik, sıkışmaz, lineer ve viskoelastik olarak ele almıştır. Akışkan için lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemlerini, tüp hareketi için de klasik elastisite teorisini kullanmıştır. Tüpün mekanik özelliklerinin frekansa bağlılığını üç parametreli bir modelle temsil etmiştir. Sınır koşullarını da kullanarak modele ait denklem sisteminin açık sonuçlarını elde etmiş, dispersiyon bağıntısını sayısal olarak incelemiştir. Womersley'in elastik tüp modeline göre, yayılma hızının genel olarak daha yavaş ve dalga boyu başına taşıma katsayısının daha küçük olduğu sonucuna ulaşmıştır. Yayılma hızının duvar viskoelastisitesindeki değişimlere çok duyarlı olduğunu bulmuştur. Daha sonra [22] bu modeli geliştirerek duvar malzemesinin sıkışabilme özelliğini de işin içine katmıştır.

Klip W. , Van Loon ve Klip D.A. [23], daha önce kurdukları modeli kullanarak dalga sayısı için yaklaşık bir ifade elde etmişlerdir.

1971'de Rubinow ve Keller [24], içi sıkışabilir bir Newton akışkanı ile dolu viskoelastik bir malzemeden yapılmış ve dış yüzeyi tutulmuş kalın bir tüp içerisindeki eksenel simetrik dalga hareketini incelemişler ve dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu genellikte dispersiyon bağıntısının incelenmesi oldukça karmaşık olduğundan, viskoz etkilerin ihmal edildiği ince tüp hali detaylı bir şekilde incelenmiş ve çok sayıda dalga modu elde edilmiştir. Aynı problem daha sonra tekrar incelenmiş [25] ve viskoz etkilerin dikkate alındığı durumlarda dalga sayısının frekans cinsinden asimptotik değerleri elde edilmiş ve yine sonsuz sayıda dalga modu bulunmuştur.

Atabek ve Lew'in [16] dışında damarlardaki ön gerilmeyi dikkate alan pek olmamıştır. Rachev [26], içi sıkışmaz ve viskoz akışkan ile dolu ve ön gerilme etkisinde elastik bir tüp içerisindeki eksenel simetrik ve harmonik dalga yayılımı problemini incelemiştir. Damarı saran kas aktivitesinin dalga hareketine etkisini uygun bir şekilde hesaba katmış ve dalga hızının iç basınç, eksenel germe ve yaşlılık ile değişimini vermiştir.

Moodie ve çalışma arkadaşları [27] içerisinde viskoz olmayan bir akışkan bulunan yarı sonsuz viskoelastik tüp için sınır değer problemini incelemişlerdir. Sawatzky ve Moodie [28] aynı problemi viskoz akışkan için de ele almışlardır. Dispersiyon bağıntısını uzun dalga boyu ve yüksek frekans halleri için elde edip viskoz olmayan hal ile karşılaştırmışlardır. Kuiken [29], öngerilmeli, ortotrop ve viskoelastik ince bir tüp içerisinde bulunan Newtonyen akışkanda dalga yayılımı problemini inceleyerek dispersiyon bağıntısını elde etmiştir ve eksenel başlangıç germesinin dalga hızını artırdığını göstermiştir. Liepsch ve çalışma arkadaşları [30], hem deneysel hem teorik olarak yaptıkları çalışmada, içinde Newton akışkanı bulunan ince elastik bir tüpte dalga yayılması problemini incelemişlerdir.

Bütün bu çalışmaların büyük bir kısmında damarların ön şekil değiştirmesi ihmal edilmiş, öngerilmeyi dikkate alan çok az sayıdaki çalışmada ise tüp malzemesinin bünye denklemi bilinmediğinden, başlangıç gerilmesi ile artımsal gerilme arasında fonksiyonel bir ilişki kurulamamıştır. Örneğin ön gerilmeden bağımsız olarak artımsal gerilmede Hooke yasasının geçerliliği kabul edilmiş ve Young modülü sabit varsayılmıştır. Halbuki sözü edilen modül Young modülü olmayıp, artımsal elastisite modülüdür ve ön şekil değiştirmenin bir fonksiyonudur. Bu yaklaşımı gören Demiray [31], "Büyük statik ön şekil değiştirmeler üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin

süperpozisyonu teorisi" ni büyük damarlarda dalga yayılması probleminde kullanmış ve oldukça doyurucu sonuçlar elde etmiştir. [31]' de büyük ön basınç ve eksenel germe etkisindeki ince tüp içerisinde bulunan viskoz akışkanda harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiş, iç basıncın ve eksenel germenin dalga karakteristiklerine olan etkisi gösterilmiştir. Ön şekil değiştirmenin sıfır olması durumunda literatürde var olan teoriler ile karşılaştırması yapılmıştır. Daha sonra bu formülasyon kalın kabuk haline genişletilerek [32-34] viskoz olmayan ve viskoz akışkan halleri için ayrı ayrı ele alınarak dispersiyon bağıntısı analitik ve sayısal durumlar için incelenmiştir.

Demiray ve Vito [35] te, sonlu elastisite teorisini kullanarak damar için iki tabakalı silindirik bir kabuk modeli sunmuşlardır. Morfolojik yapılarını dikkate alarak medya için ortotropik, adventisya için ise izotropik elastik bir model sunmuşlar ve teorik model ile deneysel sonuçları karşılaştırarak modele ait maddesel sabitleri hesaplamışlardır. Ayrıca bu modeli kullanarak iki tabakadan oluşan silindirik bir kabuğun fizyolojik kuvvetlerin etkisi altında eksenel uzama ve radyal şişme problemini incelemişlerdir.

Demiray ve Ercengiz [36] içinde akışkan olan elastik tüplerdeki akım üzerine başlangıç gerilmelerinin etkisinin iyi bir analizinin, başlangıçta bir iç basınçla genişletilmiş ve eksenel olarak gerilmiş kalın silindirik kabuktaki harmonik dalga yayılımı ile açıklanabileceğini ifade etmişlerdir. Bunun için başlangıç şekildeğişimini statik kabul ederek, akışkanı sıkışmaz Newtonyen olarak ele alıp, tüp malzemesini ise sıkışmaz, izotropik ve elastik malzeme olarak düşünmüşlerdir. Burada büyük başlangıç şekil değiştirmeleri üzerine eklenen küçük şekil değiştirmeler teorisini kullanmışlar ve eksenel simetrik hareketler için silindirik koordinatlarda alan denklemlerini elde etmişlerdir. Katı cisme ait diferansiyel denklemlerin katsayılarının değişken olmasından dolayı alan denklemleri kuvvet serisi metodu ile çözülmüştür. Sınır koşullarını uyguladıktan sonra iç basınç, eksenel germe ve kalınlık oranına bağlı olarak dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında genel durum kadar özel durumları da sayısal olarak incelemişlerdir.

Demiray ve Ercengiz [37] diğer bir çalışmalarında, içinde viskoz olmayan akışkan bulunan öngerilmeli elastik tüpte harmonik dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Kanın gerçekte Newtonyen olmayan bir akışkan olarak bilinmesine karşılık, matematik analizde basitlik için onu viskoz olmayan Newtonyen kabul

etmiş ve tüp malzemesi için de sıkışmaz, izotrop ve elastik kabulü yapmışlardır. Ayrıca büyük başlangıç statik şekil değiştirmeleri üzerine eklenen küçük şekil değiştirmeler teorisini kullanarak simetrik olmayan hareket için silindirik koordinatlarda alan denklemlerini elde etmişlerdir. Katı cisme ait diferansiyel denklemlerin katsayılarının değişken olmasından dolayı alan denklemlerini kuvvet serisi metodu ile çözmüşlerdir. Sınır koşullarını uyguladıktan sonra iç basınç, eksenel germe ve kalınlık oranına bağlı olarak dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında simetrik olmayan dalganın hızının simetrik durum ile karşılaştırıldığında daha büyük olduğunu gözlemlemişlerdir.

Demiray [38] de fizyolojik şartlar altında büyük başlangıç statik şekil değiştirmesine sahip ve bu şekil değiştirmenin üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpoze olduğu durumdaki damarı göz önüne almış ve viskoelastik Kelvin-Voight modelini kullanmıştır. Buradaki analiz için bazı basitleştirici kabuller yaparak, malzemenin sıkışmaz ve izotrop ve bünyesel olarak şekil değiştirme hızı tansörüne göre lineer, Finger şekil değiştirme tansörüne göre nonlineer olduğunu kabul etmiştir. Bünye denklemlerinde görülen malzeme sabitlerinin sayısal değerlerini açıklamak için iki problem çözmüştür, bunlardan birincisi radyal genleşmesi ve eksenel germesi olan bir silindirik tüp problemi, diğeri de öngerilmeli silindirik bir çubukta burulma dalgaları yayılımı problemidir. Simon ve arkadaşlarının [39] deneysel sonuçları ile ilk problemin sonuçlarını karşılaştırarak elastik katsayıların sayısal değerlerini belirlemiştir. İkinci problemde ise viskoelastik katsayıların hesabı için bir metot ileri sürmüştür.

Demiray ve Ercengiz [40] ta, büyük statik ön şekil değiştirme üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisini kullanarak, öngerilmeli ve içi viskoz bir akışkan ile dolu viskoelastik tüp içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Akışkana ait hareket denklemlerine kapalı bir çözüm vermek mümkün olduğu halde, katsayıların değişken olması nedeniyle katıya ait hareket denklemlerine kuvvet serisi yöntemi ile çözüm verilebilmiştir. Uygun sınır koşulları kullanarak başlangıç şekildeğişimi ve geometrik özelliklerin bir fonksiyonu olarak dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Buldukları sayısal sonuçlar tüp malzemesinin viskoelastik karakterinin dispersiyon bağıntısını büyük ölçüde etkilediğini göstermiştir. Ayrıca yüksek frekanslarda akışkanın viskozitesinin oldukça önemli olduğunu vurgulamışlardır.

Demiray ve Antar [41] de, viskoz akışkanla dolu, öngerilmeli, ince, elastik tüpte dalga yayılımının teorik bir analizini yapmışlardır. Akışkanı sıkışmaz ve Newtonyen, tüp malzemesini ise sıkışmaz, izotrop ve elastik kabul etmişlerdir. Tüpün başlangıçta bir ortalama basınca ve eksenel germeye sahip olduğu şeklindeki fizyolojik koşul altında başlangıç statik şekildeğişiminin üzerine küçük yer değiştirmeler süperpoze ederek akışkan ve tüp için artımsal hareket denklemlerini elde etmişlerdir. Bu denklemlere harmonik dalga çözümü araştırarak dispersiyon bağıntısını vermişlerdir.

Demiray ve Akgün [42] de, ince duvarlı, viskoz akışkanla dolu, öngerilmeli, viskoelastik tüpte dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Akışkanı sıkışmaz ve Newtonyen, tüp malzemesini ise sıkışmaz, izotrop ve viskoelastik kabul etmişlerdir. Tüpün başlangıçta bir ortalama basınca ve eksenel germeye sahip olduğu varsayımı altında, başlangıç statik şekildeğişiminin üzerine küçük yer değiştirmeler süperpoze ederek akışkan ve tüp için artımsal hareket denklemlerini elde etmişlerdir. Denklemlerin harmonik dalga çözümünü araştırarak dispersiyon bağıntısını vermişlerdir.

Şengel [43] çalışmasında Newton akışkanı ile dolu, ince cidarlı, silindirik kompozit tüplerde dalga yayılması problemini incelemiştir. Tüp, içerisinde lifler bulunan katmanlı kompozit olarak ele alınırken, içindeki akışkan viskoz olmayan sıkışmaz olarak ele alınmıştır. Kompozit malzeme ve akışkan için alan denklemleri ön iç basınç sabit kabul edilerek elde edilmiştir. Kompozit elastik ortama ait yönetici diferansiyel denklemler "Büyük başlangıç şekil değiştirmelerinin üzerine küçük şekil değiştirmelerin süperpozisyonu" teorisi kullanılarak silindirik koordinatlarda elde edilmiştir. Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu olarak hem biyolojik dokular, hem de mühendislik malzemeleri için kullanılabilen ortak bir fonksiyon kullanılmıştır. Bulunan alan denklemleri için harmonik dalga çözümleri araştırılmıştır. Akışkan hareketini yöneten diferansiyel denklemlere kesin analitik çözümler verilebilirken, katsayıların değişken olması nedeniyle elastik kompozit malzemeye ait diferansiyel denklemler kuvvet serileri kullanılarak çözülmüştür.

Nayfeh [44], kanı plazma ve kan hücrelerinden oluşan ikili bir sistem olarak ele almış ve rijit bir tüpteki iki fazlı viskoz akışkanın titreşimini incelemiştir. Nag ve Jana [45], gerilmesiz ince duvarlı, elastik tüpteki içerisinde parçacıklar barındıran akışkanın hareketini incelemişlerdir. Ercengiz [46] ise, öngerilmeli kalın bir elastik tüpte parçacıklı akışkanın pulsatif akımını incelemiştir. Çalışmada izotrop ve

sıkışmaz özellikte kabul edilen tüpün λ eksenel germesine ve üniform P_i iç basıncına sahip olduğu varsayılmıştır. Parçacıklı akışkanın ise sıkışmaz Newtonyen olduğu düşünülmüştür. Büyük başlangıç şekildeğişimi üzerine süperpoze edilen küçük şekil değiştirmeler teorisinden yararlanılarak eksenel simetrik hareket için silindirik koordinatlarda alan denklemleri elde edilmiştir. Akışkan ve parçacıkları yöneten diferansiyel denklemlere kapalı formda çözümler bulunabilirken, tüp duvarı için diferansiyel denklemin katsayılarının değişken olmasından dolayı bulunamamıştır. Bu nedenle tüp malzemesi için çözüm, sayısal olarak sonlu farklar metodu ile bulunmuştur. Dispersiyon bağıntısı iç basınç, eksenel germe, kalınlık parametresi ve parçacıklara ilişkin parametreler cinsinden elde edilmiştir.

Holzapfel, Gasser ve Ogden [47] de, damar dokusu için yeni bir bünye denklemi geliştirmişlerdir. Damarın, medya ve adventisya denen tabakalara karşı gelen iki katmandan oluştuğunu kabul etmişler ve onu kalın duvarlı, lineer olmayan elastik, dairesel silindirik tüp şeklinde modellemişlerdir. Her katmanı, silindir eksenine göre simetrik olarak yerleşmiş ve malzemenin kolajen bileşenlerine karşı gelen liflerle zenginleştirilmiş olarak ele almışlardır. Bünye denklemi her katman için ortotropik yapıda alınmıştır. Her katman için üç malzeme parametresi içeren bünye denklemini, eksenel uzama, genişleme ve burulmadan oluşan şekil değiştirmeler altında damarı incelemek için kullanmışlardır. Artık gerilme tanımı yaparak hesapladıkları artık gerilmelerin şekil değiştirmiş damar duvarındaki gerilme dağılımına etkisini incelemişlerdir.

Buraya kadar sözü edilen süperpozisyon teorisinin damarlardaki harekete uygulanması ile ilgili olarak şunlar söylenebilir: Sağlıklı bir insanda sistolik kan basıncının $120\,mm\,Hg$ ve diastolik basıncın da $80\,mm\,Hg$ civarında olduğu gözönünde bulundurulacak olursa, kalbe yakın yerlerdeki büyük atardamarların ortalama iç basıncının $100\,mm\,Hg$ civarında olduğu söylenebilir. Ayrıca bu damarlar üzerinde yapılan deneyler, fizyolojik koşullarda damarların $\lambda \cong 1.3 \sim 1.7$ mertebesinde bir eksenel germenin etkisinde kaldıklarını göstermektedir. Kalbin uyguladığı periyodik basınç hareketiyle oluşan dolaşım sırasında ise basınç değişimi $\pm 20\,mm\,Hg$ civarında olmaktadır. Genel olarak denilebilir ki, vücuttaki atardamarlar ortalama $P_i = 100\,mm\,Hg$ civarında bir iç basıncın ve $\lambda \sim 1.6$ mertebesinde eksenel bir germenin etkisi altındadır. Bu iç basınç ve eksenel kuvvet damarlar içerisinde

büyükçe sayılabilecek bir ön gerilme oluşturur. Kanın periyodik hareketi ise, bu öngerilme üzerine süperpoze edilen $\pm 20\,mm\,Hg$ lık basınç sayesinde sağlanır ve yer değiştirme alanı ön şekil değiştirmeye göre oldukça küçüktür [48].

Yakın zamana kadar yapılan çalışmalarda damar malzemesi sıkışmaz, homojen elastik veya viskoelastik ve izotrop (bazı hallerde anizotrop) olarak kabul ediliyor, böyle bir modele dayalı bazı problemler çözülüyordu. Gerçekte morfolojik yapıları dikkate alındığında, damarların homojen bir yapıya sahip olmayıp, mekanik özellikleri hem eksenel hem de radyal doğrultuda değişmektedir. Genel olarak bir damar duvarı içten dışa doğru sıralanmak kaydıyla intima, medya ve adventisya olmak üzere üç tabakadan meydana gelmiştir. İntima damarın en iç tabakası olup yük taşıma özelliğinden çok koruma özelliğine sahiptir. Bu nedenle mekanik açıdan damar duvarının medya ve adventisya olarak iki kısımdan oluştuğunu düşünmek mümkündür. Medya, elastik membran ve kas liflerinden meydana gelmiştir, kolajen lifleri oldukça azdır. Halbuki en dıştaki adventisya tabakası bağ dokularıyla sarılı kolajen liflerden oluşmaktadır. Medya ve adventisya tabakaları bünyelerinde bulundurdukları lifler vasıtasıyla yük taşıma özelliği göstermektedirler. Bu çalışmada büyük ön statik şekildeğişimine uğramış lifli ortamlarda dalga yayılımı problemi, kolajen liflerle güçlendirilmiş damarın tek tabakalı kabul edildiği durum için incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında büyük statik ön şekil değiştirme üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisi kullanılarak büyük damarlardaki harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Çalışmanın ikinci bölümü, temel alan denklemlerine ve sınır koşullarının incelenmesine ayrılmıştır. Kanın gerçekte Newtonyen olmayan bir davranış gösterdiği bilinse de, akışkan Newtonyen olarak ele alınmıştır. Ayrıca akışkanın sıkışmaz özellikte ve viskoz olduğu ve içerisinde parçacıklar bulundurduğu düşünülmüş ve silindirik koordinatlarda genel hareket denklemleri elde edilmiştir. Akışkan için alan denklemleri elde edilirken ön iç basınç sabit kabul edilmiş, dolayısıyla başlangıç konumunun dengede olduğu varsayılmıştır. Viskoelastik, lifli ve sıkışmaz bir malzeme olarak kabul edilen tüpün (damarın) hareket denklemlerini elde etmek için ise, büyük statik ön şekil değiştirmeler üzerine küçük şekil değiştirmeler süperpoze edildiğinde ortaya çıkan dinamik durumu karakterize eden artımsal hareket ve artımsal bünye denklemleri verilmiştir. Büyük ön şekil değiştirmede tüp malzemesinin davranışının elastik olduğu, küçük

şekildeğişiminde izotrop, büyük şekildeğişiminde anizotrop davranış gösterdiği kabul edilmiştir. Viskoelastik etkilerin dinamik yer değiştirmeler sırasında ortaya çıktığı ve bu durumda malzemenin lineer izotrop olduğu varsayılmıştır. Sözü edilen hareket ve bünye denklemleri silindirik koordinatlarda yazılmış ve sağlanması gereken sınır koşulları ifade edilmiştir. Daha sonra ise silindirik kabuğun (damarın) λ eksenel germesi ve sabit P_i iç basıncı etkisinde kaldığı ve böylece radyal genleşme ve eksenel uzama ile ön şekildeğişimine uğramış olduğu kabul edilerek, bu öngerilme durumu için artımsal hareket denklemleri verilmiştir. Dinamik küçük yer değiştirmeleri eklemeden önce bu öngerilme durumu katı malzeme için denge konumu varsayılmıştır. Üçüncü bölümde hem akışkan hem de katı malzemenin hareket denklemlerinin çözümü eksenel simetrik hareket durumu için elde edilmiştir. Akışkana ait diferansiyel denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olabilmiş, fakat tüpün alan denklemlerinin katsayılarının radyal koordinatın karmaşık bir fonksiyonu olmaları nedeniyle katı malzemeye ilişkin denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olamamıştır. Bu nedenle katı fazı yöneten diferansiyel denklemler ile sınır koşullarına ilişkin denklemlere, dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde etmek için sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözüm aranmıştır. Daha sonra ise uzun dalga yaklaşımında, viskoz olmayan akışkanla dolu, öngerilmesiz, ince tüp önce elastik, sonra viskoelastik kabul edilerek dispersiyon bağıntısı incelenmiş, dalga hızları ve taşıma katsayıları bulunmuştur. Son olarak ise uzun dalga yaklaşımında, viskoz akışkanla dolu, öngerilmeli, kalın duvarlı, viskoelastik tüp için dispersiyon bağıntısı elde edilmiş ve dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırması yapılarak onlarla uyum sağladığı belirtilmiştir. Sayısal hesaplamalarda 'Mathematica' bilgisayar yazılımından yararlanılmıştır. Dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. ALAN DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI

Bu bölümde akışkan ve tüp için ayrı ayrı alan denklemleri elde edilmiştir. Çalışmanın esası damar içerisinde kanın hareketine dayandırılmıştır. Gerçekte pulsatif hareket kalp tarafından kana uygulanmakta ise de, kanın damara uyguladığı iç basınç ve viskozitenin çeperde oluşturduğu sürtünme nedeniyle kandakine benzer bir hareket de damarda oluşur. Şimdi bu hareketleri incelemek amacıyla kanın ve damarın hareketini yöneten diferansiyel denklemler elde edilecektir.

2.1. Akışkanın Hareket Denklemleri

Bilindiği gibi kan yapı olarak plazma ve hücrelerden oluşmaktadır. Plazmanın %90' ını su, %7' sini protein ve geri kalanını da organik ve inorganik maddeler oluşturmaktadır. Hücresel kısmı ise alyuvarlar, akyuvarlar ve trombositler oluşturmaktadır. Kanda alyuvarlar 5 milyon/mm^3, akyuvarlar 5000-8000/mm^3, trombositler 250000/mm^3 oranında bulunmaktadır. Hücresel kısmın hareketi kılcal damarlarda önem kazandığından daha büyük yarıçaplı damarlar ele alındığında hücresel hareket dikkate alınmayıp plazma ile birlikte düşünülebilir. Çalışmada önce bu duruma, sonra da hücresel kısmın dikkate alındığı duruma ilişkin denklemler verilecektir.

Damara üniform bir ön basıncın etkidiği, dolayısıyla bir ön hızın bulunmadığı varsayılacaktır. Kalbin periyodik hareketi sırasında kanda oluşacak pulsatif basınç nedeniyle kanda küçük hız değişimleri olacaktır.

Gerçekte Newtonyen olmayan bir akışkan olan kan, bu çalışmada Newtonyen viskoz olarak ele alınacak ve bu tip akışkanlara ait denklemler incelenmekte olan kan için de geçerli olacaktır.

Bu çalışmada ayrıca akışkan sıkışmaz olarak ele alınacaktır. Hareket denklemleri aşağıda özet olarak sunulmuştur.

a) Kütlenin Korunumu:

Belirli bir hacim içerisindeki toplam kütlenin zamanla değişmediğini ifade eden bu ilke, sıkışmaz bir akışkan için aşağıdaki şekli alır,

$$Div\,\hat{\mathbf{v}} = 0 \text{ veya } \hat{v}^{k}_{;k} = 0, \quad \rho_f = \rho_0 = \text{sabit} . \tag{2.1}$$

Burada $\hat{\mathbf{v}}$ akışkanın hızını, $\rho_f = \rho_0$ akışkanın sabit olan kütle yoğunluğunu ve noktalı virgül kovaryant türevi göstermektedir.

b) Lineer ve Açısal Momentumun Denkliği:

Bir sürekli ortama ait lineer momentumun denkliği ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\hat{t}^{kl}_{;k} + \rho_0(\hat{f}^{l} - \hat{a}^{l}) = 0, \qquad \hat{t}^{kl} = \hat{t}^{lk} . \tag{2.2}$$

Burada $\hat{t}^{kl}$ akışkanın gerilme tansörünü, $\hat{\mathbf{f}}$ birim kütleye gelen hacim kuvvetini, $\hat{\mathbf{a}}$ ise akışkana ait ivmeyi göstermektedir. Gerilme tansörünün simetrik olması açısal momentumun denkliğinin doğal sonucudur.

c) Bünye denklemleri:

Termal etkilerin dikkate alınmadığı sıkışmaz bir akışkana ait en genel bünye denklemi

$$\hat{t}^{k}_{\ l} = -\hat{p}\delta^{k}_{\ l} + \alpha_1 d^{k}_{\ l} + \alpha_2 d^{k}_{\ m} d^{m}_{\ l} \tag{2.3}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\hat{p}$ bulunması gereken hidrostatik basınç terimini göstermekte olup d_{kl} şekil değiştirme hızı tansörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$d^{k}_{\ l} \equiv \frac{1}{2}(\hat{v}^{k}_{;l} + \hat{v}^{l}_{;k}) . \tag{2.4}$$

(2.3) ifadesinde görülen α_1 *ve* α_2 fonksiyonları

$$\alpha_i = \alpha_i(II_d, III_d), \ (I_d = \hat{v}^{k}_{;k} = 0), \ (i = 1,2) \tag{2.5}$$

şeklindedir. Burada II_d ve III_d büyüklükleri **d** şekil değiştirme hızı tansörünün ikinci ve üçüncü invaryantlarını göstermektedir.

P_i üniform ön basıncına karşı gelen hız büyüklüğü sıfır olduğundan ve kanın hareketi sırasında oluşan $\hat{\mathbf{v}}$ hızı ve hız gradyanının küçük olduğu düşünülürse (2.3) ifadesi lineerleşir ve aşağıdaki şekli alır,

$$\hat{t}^k_{\ l} = -\hat{p}\delta^k_{\ l} + 2\hat{\mu}d^k_{\ l}. \tag{2.6}$$

Burada $\alpha_1 = 2\hat{\mu}$ ve $\alpha_2 = 0$ yazılmıştır. $\hat{\mu}$ akışkanın viskozite katsayısıdır.

(2.6) ifadesi (2.2) de yerine konacak olursa küçük hız değişimleri için akışkanın hareket denklemleri

$$\rho_0 \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial t} = \rho_0 \hat{f}_k - \hat{p}_{,k} + \hat{\mu}\hat{v}_{k\ ;l}^{\ \ l} \tag{2.7}$$

şeklini alır. Burada, tekrarlanan indisler üzerinde toplama işlemi uygulanmaktadır.

2.2. Viskoelastik Lifli Katı Malzeme İçin Alan Denklemleri

Çalışmada damar dokusunun, mekanik davranışının tanımlanmasında, tek tabakalı olarak ele alınan damarın, liflerle güçlendirilmiş malzemeden oluştuğu varsayılmıştır. Burada lifler malzemenin kolajen bileşenlerine karşılık gelmektedir. Şimdi damar malzemesinin viskoelastik ve lifli bir katı olduğunu varsayarak elde edilmiş olan artımsal hareket denklemleri sunulacaktır. Bunun için öncelikle lifli yapıya sahip viskoelastik katı için bünye denklemleri verilecektir. Daha sonra ise "Büyük Ön Şekil Değiştirmeler Üzerine Sonsuz Küçük Yer Değiştirmelerin Süperpozisyonu" teorisi ve onun aracılığıyla viskoelastik, lifli katı malzeme için artımsal bünye ve artımsal hareket denklemleri verilecektir.

2.2.1. Lifli Viskoelastik Katı İçin Bünye Denklemleri

Biyolojik yumuşak dokulara uygulanabilen bünye denklemlerini elde etmek için, bağımlı bünye değişkenleri, şekil değiştirme gradyanı $F_{kK} \equiv \partial x_k / \partial X_K$ ve onun zamana göre türevi ile lif doğrultularını gösteren ve referans konumunda tanımlanan $\mathbf{a}_{01}(\mathbf{X})$ ve $\mathbf{a}_{02}(\mathbf{X})$ vektörlerine bağlı olarak alınacaktır,

$$
\begin{aligned}
t_{kl} &= f_{kl}(F_{kK}, \dot{F}_{kK}, a_{01_K}, a_{02_K}, \theta) \\
q_k &= g_k(F_{kK}, \dot{F}_{kK}, a_{01_K}, a_{02_K}, \theta) \\
\psi &= \varphi(F_{kK}, \dot{F}_{kK}, a_{01_K}, a_{02_K}, \theta) \\
\eta &= \mathcal{N}(F_{kK}, \dot{F}_{kK}, a_{01_K}, a_{02_K}, \theta).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Burada t_{kl} ile Cauchy gerilme tansörü, q_k ile ısı akısı vektörü, ψ ile Helmholtz serbest enerji yoğunluğu, η ile entropi yoğunluğu ve θ ile sıcaklık gösterilmektedir. Bu ifadeler termodinamiğin ikinci yasası olan

$$
-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + t_{kl} d_{lk} - \frac{q_k \theta_{,k}}{\theta} \geq 0 \tag{2.9}
$$

eşitsizliğinde yerine yazılarak ve $\dot{\mathbf{a}}_{01} = \dot{\mathbf{a}}_{02} = 0$ olacağı göz önünde tutularak

$$
-\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial F_{kK}}\dot{F}_{kK} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{F}_{kK}}\ddot{F}_{kK} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\dot{\theta} + \eta\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2} t_{kl}(v_{k,l} + v_{l,k}) - \frac{q_k \theta_{,k}}{\theta} \geq 0 \tag{2.10}
$$

elde edilir. Burada ρ ile ortamın yoğunluğu, d_{kl} ile şekil değiştirme hızı tansörü gösterilmektedir. (2.10) dan

$$
-\rho\left(\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \dot{F}_{kK}}\ddot{F}_{kK} + \left(t_{kl} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial F_{lK}}F_{kK}\right)v_{l,k} - \frac{q_k \theta_{,k}}{\theta} \geq 0 \tag{2.11}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\dot{\theta}$, $\theta_{,k}$ ve $\ddot{F}_{kK}$ ya göre lineerdir. Eşitsizliğin bu değişkenlerin keyfi tüm değerleri için geçerli olması ancak onların katsayılarının sıfır olmasıyla mümkündür:

$$
\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad q_k = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \dot{F}_{kK}} = 0. \tag{2.12}
$$

O halde serbest enerji yoğunluğu $\dot{F}_{kK}$ dan bağımsızdır, yani

$$
\psi = \varphi(F_{kK}, \mathrm{a}_{01_K}, \mathrm{a}_{02_K}, \theta) \tag{2.13}
$$

şeklindedir. Ayrıca (2.11) den eşitsizliğin geri kalanı

$$\left(t_{kl} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial F_{lK}} F_{kK} \right) v_{l,k} \geq 0 \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. Bünye denklemleri objektivite aksiyomu tarafından da sınırlanır. Bu aksiyom gereğince, bünye denklemleri C_{KL} ve $\dot{C}_{KL}$ nin fonksiyonu şeklinde yazılabilir.

$$C_{KL} = F_{kK} F_{kL}, \quad \dot{C}_{KL} = 2 d_{kl} F_{kK} F_{lL} \tag{2.15}$$

şeklindedir. Böylece

$$\left(t_{kl} - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} F_{kK} F_{lL} \right) d_{lk} \geq 0 \tag{2.16}$$

sonucuna ulaşılır. ${}_D t_{kl}$ gerilme tansörünün disipatif kısmını göstermek üzere

$${}_D t_{kl} = t_{kl} - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} F_{kK} F_{lL} \tag{2.17}$$

tanımlanırsa

$${}_D t_{kl} d_{lk} \geq 0 \tag{2.18}$$

yazılabilir.

Giriş bölümünde de belirtildiği gibi büyük statik şekil değiştirmeler üzerine dinamik küçük yer değiştirmeler eklendiğinde viskoelastik etkilerin ortaya çıkacağı kabul edildiği için ${}_D t_{kl}$ nin d_{kl} ye bağlılığı lineer olarak alınabilir. O halde

$${}_D t_{kl} = \sigma_{klmn} d_{mn} \tag{2.19}$$

yazılabilir. Burada σ_{klmn} büyüklüğü viskozite tansörünü göstermektedir. Ayrıca liflerin sadece büyük statik şekil değiştirmede etkin olduğu kabul edildiğinden σ_{klmn} tansörü izotrop tansör olacaktır. Bu varsayımlar altında

$$\sigma_{klmn} = \bar{\lambda} \delta_{kl} \delta_{mn} + \bar{\mu} (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \tag{2.20}$$

yazılabilir. Burada $\bar{\lambda}$ ve $\bar{\mu}$ viskozite katsayıları olup C_{KL} şekil değiştirme tansörüne bağlıdırlar. Böylece gerilme tansörü (2.17) den

$$t_{kl} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} F_{kK} F_{lL} + \bar{\lambda} d_{rr} \delta_{kl} + 2\bar{\mu} d_{kl} \tag{2.21}$$

şeklinde bulunur.

Gerilme potansiyeli (şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu) $\Sigma = \bar{\rho}_0 \psi$ şeklinde tanımlanır ($\bar{\rho}_0$ maddesel koordinatlardaki yoğunluğu gösterir). Bu durumda

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \theta) \tag{2.22}$$

şeklinde yazılabilir. Bundan sonra $\theta = \theta_0 (\text{sabit})$ alınacaktır.

Maddesel simetri ilkesi gereği, Σ fonksiyonu, $\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}$ ve $\mathbf{a}_{02}$ büyüklüklerinin invaryantlarının fonksiyonu olmalıdır. Damarın küçük şekil değiştirmelerinde kolajen liflerin etkisi olmayacağından damar izotrop elastik malzeme olarak gözönüne alınabilir. Şekildeğişimi büyüdükçe kolajen lifler yük taşıyacağından damar malzemesi anizotrop yapıya sahip olacaktır. Bu nedenlerden dolayı, bu çalışmada gerilme potansiyeli [47] de önerildiği gibi

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = \Sigma_{izo}(\mathbf{C}) + \Sigma_{anizo}(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) \tag{2.23}$$

olarak alınmıştır. Burada Σ_{izo} malzemenin izotrop, Σ_{anizo} ise anizotrop davranışını karakterize etmektedir. Σ fonksiyonu,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_{0i} \otimes \mathbf{a}_{0i}, \quad i = 1, 2 \tag{2.24}$$

olmak üzere, aşağıda verilen invaryantların fonksiyonu olacaktır,

$$\begin{aligned}
&I_1(\mathbf{C}) = tr\,\mathbf{C}, \qquad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\left[(tr\,\mathbf{C})^2 - tr\,\mathbf{C}^2\right], \qquad I_3(\mathbf{C}) = \det \mathbf{C}, \\
&I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_1, \qquad I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) = \mathbf{C}^2 : \mathbf{A}_1, \\
&I_6(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) = \mathbf{C} : \mathbf{A}_2, \qquad I_7(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) = \mathbf{C}^2 : \mathbf{A}_2, \\
&I_8(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = (\mathbf{a}_{01}.\mathbf{a}_{02})\mathbf{a}_{01}.\mathbf{C}\,\mathbf{a}_{02}, \quad I_9(\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) = (\mathbf{a}_{01}.\mathbf{a}_{02})^2.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

O halde

$$\Sigma(\mathbf{C},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)=\Sigma_{izo}(I_1,I_2,I_3)+\Sigma_{anizo}(I_1,I_2,I_3,I_4,...,I_8) \tag{2.26}$$

yazılabilir. Burada I_9 sabit olduğu için göz önüne alınmamıştır. I_4 ve I_6 invaryantları ise $\mathbf{a}_{01}$ ve $\mathbf{a}_{02}$ yönlerindeki germelerin karesini göstermektedir. İşlemleri basitleştirmek amacıyla, anizotrop kısım için, sadece, açık fiziksel anlamlara sahip I_4 ve I_6 invaryantlarına ve izotrop kısım için de I_1 ve I_3'e bağlılığın olduğu kabul edilecektir. Buna göre

$$\begin{gathered}\Sigma(\mathbf{C},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)=\Sigma_{izo}(I_1,I_3)+\Sigma_{anizo}(I_4,I_6)\\ \Sigma=\Sigma(I_1,I_3,I_4,I_6).\end{gathered} \tag{2.27}$$

yazılabilir. (2.22) nin (2.21) de kullanılmasıyla

$$t_{kl}=2\frac{\rho}{\overline{\rho}_0}\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}F_{kK}F_{lL}+\overline{\lambda}d_{rr}\delta_{kl}+2\overline{\mu}d_{kl} \tag{2.28}$$

ifadesi elde edilir. (2.27) den de yararlanarak

$$t_{kl}=2\frac{\rho}{\overline{\rho}_0}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial C_{KL}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial C_{KL}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_4}\frac{\partial I_4}{\partial C_{KL}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I_6}\frac{\partial I_6}{\partial C_{KL}}\right)F_{kK}F_{lL}+\overline{\lambda}d_{rr}\delta_{kl}+2\overline{\mu}d_{kl} \tag{2.29}$$

sonucu elde edilir. İnvaryantların

$$\begin{aligned}&I_1=tr\,\mathbf{C},\quad I_2=\frac{1}{2}\left[(tr\,\mathbf{C})^2-tr\,\mathbf{C}^2\right],\quad I_3=\det\mathbf{C},\\ &I_4(\mathbf{C},\mathbf{a}_{01})=\mathbf{C}:\mathbf{A}_1=C_{MN}A_{1_{MN}}=C_{MN}a_{01_M}a_{01_N},\\ &I_6(\mathbf{C},\mathbf{a}_{02})=\mathbf{C}:\mathbf{A}_2=C_{MN}A_{2_{MN}}=C_{MN}a_{02_M}a_{02_N}\end{aligned} \tag{2.30}$$

ve türevlerin

$$\begin{aligned}&\frac{\partial I_1}{\partial C_{KL}}=\delta_{KL},\qquad \frac{\partial I_3}{\partial C_{KL}}=C_{KM}C_{ML}-I_1C_{KL}+I_2\delta_{KL},\\ &\frac{\partial I_4}{\partial C_{KL}}=a_{01_K}a_{01_L},\quad \frac{\partial I_6}{\partial C_{KL}}=a_{02_K}a_{02_L}\end{aligned} \tag{2.31}$$

şeklinde olduğu göz önüne alındığında gerilme ifadesi için

$$t_{kl} = 2\frac{\rho}{\bar{\rho}_0}\left(I_3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_3}\delta_{kl} + c_{kl}^{-1}\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + d_{1_{kl}}\frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} + d_{2_{kl}}\frac{\partial \Sigma}{\partial I_6}\right) + \bar{\lambda} d_{rr}\delta_{kl} + 2\bar{\mu} d_{kl} \tag{2.32}$$

elde edilir. Burada $c_{kl}^{-1} = F_{kK}F_{lK}$ Finger şekil değiştirme tansörü olup, $\mathbf{d}_1$ ve $\mathbf{d}_2$ ise

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{F}\mathbf{A}_1\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{F}\mathbf{A}_2\mathbf{F}^T \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanmış tansörlerdir. Biyolojik yumuşak dokular üzerine yapılan çalışmalar onların sıkışmaz olarak kabul edilebileceğini göstermektedir. Malzeme sıkışmaz kabul edildiğinde

$$I_3 = 1 \quad \text{ve} \quad d_{rr} = 0 \tag{2.34}$$

olmaktadır. Bu durumda

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_4, I_6) \tag{2.35}$$

şeklini alır. Aslında $\Sigma = \Sigma(I_1, I_4, I_6)$ fonksiyonu, dört invaryanta bağlı bir $\bar{\Sigma}(I_1, I_3, I_4, I_6)$ fonksiyonunun limiti olarak

$$\Sigma(I_1, I_4, I_6) = \lim_{I_3 \to 1} \bar{\Sigma}(I_1, I_3, I_4, I_6) \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanabilir. Dolayısıyla (2.32) ifadesinde limite geçip

$$t_{kl} = \lim_{I_3 \to 1} 2\frac{\rho}{\bar{\rho}_0}\left(I_3 \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_3}\delta_{kl} + c_{kl}^{-1}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_1} + d_{1_{kl}}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_4} + d_{2_{kl}}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_6}\right) + 2\bar{\mu} d_{kl} \tag{2.37}$$

yazıldığında,

$$\lim_{I_3 \to 1}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_1} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}, \qquad \lim_{I_3 \to 1}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_4} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4}, \qquad \lim_{I_3 \to 1}\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_6} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \tag{2.38}$$

limitleri sıkışmaz ortamın gerilme potansiyelinden belirlenir. Ancak I_3 invaryantına bağlılık bilinmediği için $\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{I_3 \to 1} 2\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial I_3} = \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \tag{2.39}$$

yazılması gerekir. Bu durumda (2.37) den bünye denklemi

$$t_{kl} = \wp\delta_{kl} + 2\left(c_{kl}^{-1}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_1} + d_{1_{kl}}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_4} + d_{2_{kl}}\frac{\partial\Sigma}{\partial I_6}\right) + 2\bar{\mu}d_{kl} \tag{2.40}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\frac{\bar{\rho}_0}{\rho} = \sqrt{I_3}$ eşitliği de kullanılmıştır.

Bu çalışmada, izotrop kısım için [49] da , anizotrop kısım için ise [47] de önerilmiş olan şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları kullanılacaktır. Bu fonksiyonlardan ilki biyolojik yumuşak dokular için Demiray tarafından önerilmiştir; ikincisi ise bünyesinde kolajen liflerin bulunduğu durumu yansıtmakta olup Holzapfel, Gasser ve Ogden tarafından kullanılmıştır. Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu izotrop ve anizotrop şekil değiştirmeler için sırasıyla aşağıdaki şekillerdedir,

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{izo}(I_1) = \frac{\beta}{2\alpha}\left\{\exp\left[\alpha(I_1-3)\right]-1\right\}, \\
&\Sigma_{anizo}(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2}\sum_{i=4,6}\left\{\exp[k_2(I_i-1)^2]-1\right\}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Burada α, β, k_1 ve k_2 malzeme sabitlerini göstermektedir. Tüm damar malzemesi için de,

$$\Sigma = \frac{\beta}{2\alpha}\left\{\exp\left[\alpha(I_1-3)\right]-1\right\} + \frac{k_1}{2k_2}\left\{\exp\left[k_2(I_4-1)^2\right] + \exp\left[k_2(I_6-1)^2\right]-2\right\} \tag{2.42}$$

olmaktadır. (2.42) nin (2.40) ta kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
t_{kl} = {} & \wp\delta_{kl} + (\beta c_{kl}^{-1} + 2\mu d_{kl})\exp\left[\alpha(I_1-3)\right] \\
& + 2k_1(I_4-1)\exp\left[k_2(I_4-1)^2\right]d_{1_{kl}} + 2k_1(I_6-1)\exp\left[k_2(I_6-1)^2\right]d_{2_{kl}}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

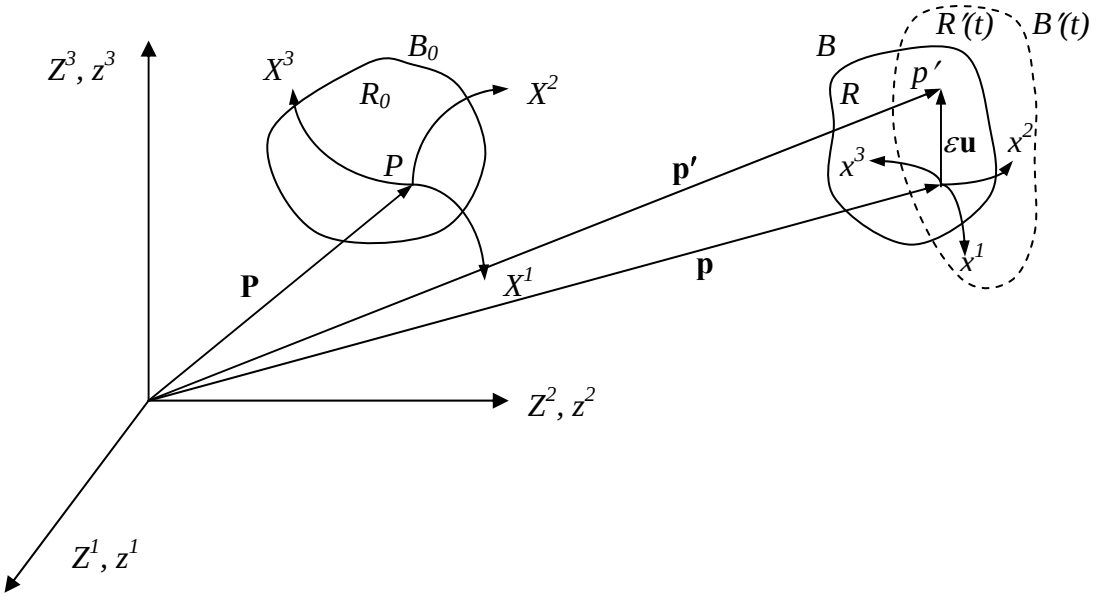
sonucu elde edilir. Burada

$$\bar{\mu} = \mu\exp\left[\alpha(I_1-3)\right] \tag{2.44}$$

şeklinde alınmış olup μ ile sabit viskozite katsayısı gösterilmiştir.

2.2.2. Büyük Ön Şekil Değiştirmeler Üzerine Sonsuz Küçük Yer Değiştirmelerin Süperpozisyonu:

Bazı problemlerde cismin son şekil değiştirmiş durumu, sonlu statik başlangıç şekildeğişimi ve üzerine küçük yer değiştirmelerin süperpoze edilmesi ile karakterize edilebilir. Başlangıç şekildeğişimi bilindiğinde, süperpoze edilmiş yer değiştirmeleri belirlemek için lineer diferansiyel denklem sistemi elde etmek mümkündür. Bu denklemlerin katsayıları başlangıç şekil değiştirmesinin fonksiyonu olacaktır. Başlangıç zamanı olarak kabul edilen t_0 anında B_0 konumunda bulunan ve uzayın R_0 bölgesini işgal eden bir cisim göz önüne alınsın (Şekil 2.1). Bu durumda cisimde herhangi bir gerilmenin bulunmadığı varsayılacaktır. Bu konumdaki cisme ait bir P noktasının yer vektörü $\mathbf{P}$, eğrisel koordinatları ise



Şekil 2.1: Büyük ön şekil değiştirmeler üzerine sonsuz küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu

X^K, $(K=1,2,3)$ ile gösterilecektir. Maddenin ilk konumunu belirleyen bu koordinatlara maddesel koordinatlar, B_0 konumuna da maddesel konum adı verilir. Cisme etkiyebilecek dış kuvvetlerin etkisi ile cisim B_0 konumundan B konumuna geçecek ve uzayın R bölgesini işgal edecektir. B konumunun cisim için bir denge konumu olduğu varsayılacaktır. Bu durumda $P \in B_0$ daki bir maddesel nokta $p \in B$ ye gidecektir. p nin yer vektörü $\mathbf{p}$, bu noktadaki eğrisel koordinatlar da

x^k, $(k=1,2,3)$ ile gösterilecektir. Buradaki x^k koordinatlarına p nin uzaysal koordinatları adı verilir. Buna göre P yi p ye dönüştüren statik şekildeğişimi

$$x^k = x^k(X^L) \tag{2.45}$$

ile ifade edilebilir. $F^k_{\ K} = \dfrac{\partial x^k}{\partial X^K}$ (şekil değiştirme gradyanı) ve $j^0 = \det F^k_{\ K} \neq 0$ olmak üzere şekildeğişiminin tersi vardır ve

$$X^K = X^K(x^l) \tag{2.46}$$

şeklinde verilebilir. Şekilde görülen Z^K, $(K=1,2,3)$ ve z^k, $(k=1,2,3)$ ile de kartezyen koordinat takımında maddesel ve uzaysal koordinatlar gösterilmiştir.

B konumunda cismin etkisinde kaldığı gerilme t^{0kl} tansörü ile gösterilecek olursa bu tansör

$$t^{0kl}_{\ ;k} + \rho f^{0l} = 0 \qquad (R \text{ içerisinde}) \tag{2.47}$$

denge denklemlerini sağlamalıdır. Burada ρ viskoelastik cismin kütle yoğunluğunu, f^{0l} ise hacim kuvvetini göstermektedir.

Ayrıca (2.47) ile verilen t^{0kl} gerilme bileşenlerinin S sınır bölgesi üzerinde

$$t^{0kl} n_k = t^{0l} \qquad (S \text{ üzerinde}) \tag{2.48}$$

sınır koşulunu sağlaması gerekir. Burada t^{0l} sınır (yüzey) gerilmesini, n_k ise S maddesel yüzeyinin birim dış normal vektörünü göstermektedir.

Ortamın B denge (statik) konumuna karşı gelen $x^k = x^k(X^L)$ şekil değiştirme alanı (2.47) ve (2.48) denklemleri yardımıyla tam olarak belirlenebilir, yeter ki gerilme ile şekil değiştirme arasındaki ilişki uygun bir şekilde verilebilsin.

B denge konumunu belirleyen $x^k = x^k(X^L)$ şekil değiştirme alanı üzerine eklenecek olan küçük dinamik yer değiştirme $\varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ ile gösterilsin, burada ε küçük bir parametre ve $\mathbf{u}$ artımsal yer değiştirme vektörüdür. Bu ek yer değiştirmeler sonucu cisim B denge konumundan yeni bir $B'(t)$ konumuna geçecek

ve uzayın $R'(t)$ bölgesini işgal edecektir. O halde yeni konumdaki bir maddesel noktanın yer vektörü

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{2.49}$$

şeklini alacaktır.

B' deki toplam gerilmeyi çeşitli referans konumlarına göre ifade etmek mümkündür. B konumuna göre ölçülmüş toplam Piola-Kirchhoff tansörü T_{kl} ile ve $B'(t)$ konumunda ölçülen Cauchy gerilme tansörü t'_{kl} ile gösterilirse, bunlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir [50],

$$t'_{kl} = j^{-1} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} T_{ml} \ . \tag{2.50}$$

Burada

$$j = \det\left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \right) \tag{2.51}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu noktadan itibaren bütün türetimler kartezyen koordinat takımında yapılacak, ileride ihtiyaç duyulduğunda genel koordinatlara geçilecektir.

B konumunda ölçülen t^0_{kl} Cauchy gerilme tansörü dikkate alındığında, $B'(t)$ deki gerilme artımını çeşitli şekillerde ifade etmek mümkündür. Örneğin B ye göre ölçülmüş Piola-Kirchhoff tansöründeki artım $\varepsilon \overline{T}_{kl}$ ile gösterilirse

$$T_{kl}(\mathbf{x}, t) = t^0_{kl}(\mathbf{x}) + \varepsilon \overline{T}_{kl}(\mathbf{x}, t) \tag{2.52}$$

bağıntısı geçerlidir. Buradaki $\overline{T}_{kl}(\mathbf{x}, t)$ gerilme artışı B referans konumuna göre ölçülmüş bir büyüklük olduğundan simetrik bir tansör değildir.

Küçük yer değiştirmeyi karakterize eden denklemleri elde edebilmek için hem bünye denklemlerini, hem de hareket denklemlerini lineerleştirmek gerekecektir. Bunun için, ε küçük bir parametre olmak üzere, çeşitli alan büyüklükleri ε un lineer serisine açılacaktır. Bu durumda Jakobiyen aşağıdaki şekilde ifade edilebilir,

$$j = \det(\delta_{kl} + \varepsilon u_{k,l}) \cong 1 + \varepsilon u_{k,k} \ . \tag{2.53}$$

Benzer şekilde $j^{-1} \cong 1 - \varepsilon u_{k,k}$ biçiminde yazılabileceği gösterilebilir. Diğer yandan $B'(t)$ konumundaki t'_{kl} Cauchy gerilme tansörü

$$t'_{kl} = t^0_{kl} + \varepsilon \bar{t}_{kl} \tag{2.54}$$

olarak yazılabilir. Burada $\bar{t}_{kl}$ Cauchy gerilme tansöründeki artış olup simetrik bir tansördür. Ayrıca bu gerilme artışının $B'(t)$ konumundaki birim alana göre hesaplandığını hatırlatmakta yarar vardır.

Piola-Kirchhoff gerilme tansöründeki $\bar{T}_{kl}$ artımı ile Cauchy gerilmesindeki $\bar{t}_{kl}$ artımı birbirinden bağımsız olmayıp aralarında aşağıdaki bağıntı vardır,

$$\bar{t}_{kl} = \bar{T}_{kl} + u_{k,m}\, t^0_{ml} - t^0_{kl}\, u_{m,m}. \tag{2.55}$$

Burada (2.55) ifadesi elde edilirken (2.52), (2.53) ve (2.54) denklemleri (2.50) de kullanılmıştır.

Şimdi sonsuz küçük yer değiştirmeler sonucu oluşan artımsal gerilmeler için sınır koşulları elde edilecektir. $\mathbf{n}$, B konumunu sınırlayan S yüzeyi ve $\mathbf{n}'$ de $B'(t)$ konumunu sınırlayan $S'(t)$ yüzeyi üzerindeki birim dış normali göstermek üzere

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} + \varepsilon \bar{\mathbf{n}} \tag{2.56}$$

biçiminde yazılabilir. S ve S' yüzey elemanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir,

$$da'_k = j\left(\frac{\partial x_l}{\partial x'_k}\right) da_l\,, \qquad \frac{da'}{da} = j(C^{-1'}_{kl} n_k n_l)^{1/2}. \tag{2.57}$$

Burada $\mathbf{C}^{-1'}$ Piola şekil değiştirme tansörü

$$C^{-1'}_{kl} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_m}\frac{\partial x_l}{\partial x'_m}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Alan elemanları için

$$da'_k = da'\, n'_k\ ,\ da_k = da\, n_k$$

yazılabileceğini kullanarak (2.57) den

$$n'_k = n_l \left(\frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \right) (C_{ij}^{-1\prime} n_i n_j)^{-1/2} \tag{2.58}$$

elde edilir. Diğer yandan (2.49) ifadesi yardımıyla

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_k} = \delta_{kl} - \varepsilon u_{l,k} \tag{2.59}$$

yazılabilir ve bunun kullanılması ile

$$C_{kl}^{-1\prime} = \delta_{kl} - \varepsilon (u_{k,l} + u_{l,k}) = \delta_{kl} - 2\varepsilon \tilde{e}_{kl} \tag{2.60}$$

bulunur. Burada $\tilde{e}_{kl}$, **u** yer değiştirme vektörüne karşı gelen sonsuz küçük birim şekil değiştirme tansörüdür. (2.60) ifadesinden hemen

$$C_{ij}^{-1\prime} n_i n_j \cong 1 - 2\varepsilon \tilde{e}_{ij} n_i n_j \cong 1 - 2\varepsilon \tilde{e}_{(\mathbf{n})} \tag{2.61}$$

yazılabilir. $\tilde{e}_{(\mathbf{n})}$, **n** doğrultusundaki sonsuz küçük birim uzamadır. Buna göre,

$$(C_{ij}^{-1\prime} n_i n_j)^{-1/2} = 1 + \varepsilon \tilde{e}_{(\mathbf{n})}$$

olup (2.58) den

$$\begin{aligned} n'_k &= n_l (\delta_{lk} - \varepsilon u_{l,k})(1 + \varepsilon \tilde{e}_{(\mathbf{n})}) \\ &= n_k + \varepsilon (\tilde{e}_{(\mathbf{n})} \delta_{lk} - u_{l,k}) n_l \end{aligned} \tag{2.62}$$

elde edilir. Bu son ifade ile (2.56) ifadesi karşılaştırılacak olursa

$$\overline{n}_k = \tilde{e}_{(\mathbf{n})} n_k - u_{l,k} n_l \tag{2.63}$$

bulunur. O halde S üzerindeki sınır koşulları

$$(t_{kl}^0 + \varepsilon \overline{t}_{kl})(n_k + \varepsilon \overline{n}_k) = t_l^0 + \varepsilon \overline{t}_l \tag{2.64}$$

şeklini alacaktır. Burada $\overline{t}_l$, eklenen küçük yer değiştirme nedeniyle yüzey üzerinde oluşan ve en son şekil değiştirmiş alana göre ifade edilmiş ek sınır gerilmesi vektörüdür. (2.48) ifadesi göz önünde bulundurularak

$$\overline{t}_{kl}\, n_k + t^0_{kl}\, \overline{n}_k = \overline{t}_l \quad (S \text{ üzerinde}) \tag{2.65}$$

yazılabilir. (2.63) ifadesi (2.65) te kullanılırsa

$$\overline{t}_{kl} n_k = \overline{t}_l - t^0_l \tilde{e}_{(\mathbf{n})} + t^0_{kl}\, u_{m,k} n_m \tag{2.66}$$

bulunur. (2.55) ve (2.66) ifadeleri yardımıyla artımsal Piola-Kirchhoff gerilme tansörü üzerindeki sınır koşulları

$$\overline{T}_{kl} n_k = \overline{t}_l + (u_{k,k} - \tilde{e}_{(\mathbf{n})}) t^0_l \tag{2.67}$$

şeklinde elde edilir.

2.2.2.1. Artımsal Hareket Denklemleri :

B' konumundaki hareket denklemleri, kütle kuvvetleri ihmal edildiğinde

$$\frac{\partial t'_{kl}}{\partial x'_k} = \rho\left(\ddot{x}_l + \varepsilon \ddot{u}_l\right) \tag{2.68}$$

şeklindedir. B konumunun denge konumu olduğu göz önüne alındığında

$$\frac{\partial t'_{kl}}{\partial x'_k} - \varepsilon\rho\ddot{u}_l = 0 \tag{2.69}$$

olmalıdır. (2.59) ve (2.54) ifadelerini kullanarak artımsal Cauchy gerilme tansörü cinsinden hareket denklemleri

$$\overline{t}_{kl,k} - t^0_{ml,k} u_{k,m} - \rho\ddot{u}_l = 0 \tag{2.70}$$

şeklinde elde edilir. Burada ε a göre lineer terimler alınmıştır. Malzeme sıkışmaz kabul edildiğinde (2.53) ten

$$u_{k,k} = 0 \tag{2.71}$$

olacaktır ve bu durumda (2.70) ifadesi

$$\left(\overline{t}_{kl} - t^0_{ml} u_{k,m}\right)_{,k} - \rho \ddot{u}_l = 0 \tag{2.72}$$

şeklini alır. (2.55) ten sıkışmaz malzeme durumunda artımsal Piola-Kirchhoff tansörü

$$\overline{T}_{kl} = \overline{t}_{kl} - u_{k,m}\, t^0_{ml} \tag{2.73}$$

olarak yazılabilir. Böylece (2.73) ün (2.72) de kullanılmasıyla artımsal hareket denklemleri

$$\overline{T}_{kl,k} - \rho \ddot{u}_l = 0 \tag{2.74}$$

şeklinde bulunur.

t'_{kl} tansörünün bileşenleri, B' konumundaki baz vektörlerine göre ifade edilmiştir. Bununla birlikte, tüm değişkenler bir $\mathbf{x}$ ara değişkeninin fonksiyonu olarak varsayılır. Sınır koşulları B konumunda ifade edildiği için t'_{kl} nin B konumundaki dönüşmüşünü bilmek gerekir. İkinci mertebe tansörlerin dönüşüm kuralından

$$t'_{kl} = t_{mn} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} \frac{\partial x'_l}{\partial x_n} \tag{2.75}$$

yazılabilir. Burada t_{mn}, B deki baz vektörlerine göre toplam gerilme tansörü bileşenleridir.

$$t_{mn} = t^0_{mn} + \varepsilon \tilde{t}_{mn} \tag{2.76}$$

tanımı yapılarak, (2.76) ve (2.54) yardımıyla, ε a göre lineer terimleri alarak (2.75) ten

$$\overline{t}_{kl} = t^0_{km} u_{l,m} + t^0_{ml} u_{k,m} + \tilde{t}_{kl} \tag{2.77}$$

sonucuna ulaşılır. Burada geçen $\tilde{t}_{kl}$ artımsal gerilme tansörü Green ve Zerna [51] formülasyonundaki ile aynıdır. (2.55) ve (2.77) den

$$\bar{T}_{kl} = t^0_{km} u_{l,m} + \tilde{t}_{kl} \tag{2.78}$$

elde edilir.

2.2.2.2. Artımsal Bünye Denklemleri:

Şimdiye kadar elde edilen denklemler malzemenin bünyesinden bağımsızdı, yani iç yapıdan hiç söz edilmedi. Gerilme ile şekil değiştirme arasındaki fonksiyonel bağıntı bilindikten sonra $\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{t}}$ ve $\tilde{\mathbf{t}}$ nin artımsal yer değiştirme ile olan ilişkisi açık olarak belirlenebilir.

Biyolojik yumuşak dokuların mekanik davranışlarını karakterize etmek için geliştirilmiş elastik ve viskoelastik modeller literatürde bulunmaktadır. Genel olarak, fizyolojik koşullar altında şekil değiştirme hızı küçük olduğundan (kaslar hariç) viskoelastik etkiler ihmal edilmektedir. Bu çalışmada ise viskoelastik etkiler de göz önüne alınmıştır.

B ve B' konumlarındaki bünye bağıntıları (2.40) tan sırasıyla

$$t^0_{kl} = \bar{P}^0 \delta_{kl} + 2\left(c^{-1^0}_{kl} \frac{\partial \Sigma}{\partial I^0_1} + d^0_{1_{kl}} \frac{\partial \Sigma}{\partial I^0_4} + d^0_{2_{kl}} \frac{\partial \Sigma}{\partial I^0_6} \right), \tag{2.79a}$$

$$t'_{kl} = P' \delta_{kl} + 2\left(c^{-1'}_{kl} \frac{\partial \Sigma}{\partial I'_1} + d'_{1_{kl}} \frac{\partial \Sigma}{\partial I'_4} + d'_{2_{kl}} \frac{\partial \Sigma}{\partial I'_6} \right) + 2\bar{\mu} d'_{kl} \tag{2.79b}$$

şeklinde yazılabilir. Burada B konumundaki hız sıfır ve dolayısıyla $d^0_{kl} = 0$ olarak kabul edilmiştir. $\bar{P}^0$ hidrostatik basınç terimi, $d^0_{1_{kl}}$ ve $d^0_{2_{kl}}$ B konumunda hesaplanan büyüklüklerdir. I^0_1, I^0_4 ve I^0_6 ifadeleri ise B konumunda ölçülen invaryantları göstermektedir. B' konumuna ait ifadeler

$$P' = \bar{P}^0 + \varepsilon \bar{p} \quad \text{ve} \quad d'_{kl} = d^0_{kl} + \varepsilon \bar{d}_{kl} \tag{2.80}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\bar{p}$ ile artımsal hidrostatik basınç ve $\bar{d}_{kl}$ ile de artımsal şekil değiştirme hızı tansörü gösterilmiştir. Ayrıca $c^{-1'}_{kl}$ tansörü B' konumundaki Finger şekil değiştirme tansörü olup

$$c_{kl}^{-1'} = \frac{\partial x_k'}{\partial X_K}\frac{\partial x_l'}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k'}{\partial x_m}\frac{\partial x_l'}{\partial x_n}\frac{\partial x_m}{\partial X_K}\frac{\partial x_n}{\partial X_K} = \frac{\partial x_k'}{\partial x_m}\frac{\partial x_l'}{\partial x_n}c_{mn}^{-1^0} \tag{2.81}$$

şeklinde elde edilir. Burada $c_{mn}^{-1^0}$, B konumunda tanımlanmış Finger şekil değiştirme tansörüdür.

$$\frac{\partial x_k'}{\partial x_m} = \delta_{km} + \varepsilon u_{k,m} \tag{2.82}$$

ifadesi yardımıyla ve ε a göre lineer terimleri alarak (2.81) den

$$c_{kl}^{-1'} = c_{kl}^{-1^0} + \varepsilon\left(c_{kn}^{-1^0}u_{l,n} + c_{ml}^{-1^0}u_{k,m}\right) \tag{2.83}$$

elde edilir. I_1', I_4' ve I_6' büyüklükleri B' konumunda ölçülen invaryantları göstermek üzere

$$\begin{aligned} I_1' &= tr\,\mathbf{c}^{-1'} = tr\,c_{kl}^{-1'}, \\ I_4' &= \mathbf{C}' : \mathbf{A}_1 = C_{KL}'A_{1_{KL}} = C_{KL}'a_{01_K}a_{01_L}, \\ I_6' &= \mathbf{C}' : \mathbf{A}_2 = C_{KL}'A_{2_{KL}} = C_{KL}'a_{02_K}a_{02_L} \end{aligned} \tag{2.84}$$

şeklinde bulunurlar. C_{KL}' büyüklüğü B' konumunda ölçülen Green şekil değiştirme tansörü olup ε a göre lineer terimleri alarak

$$\begin{aligned} C_{KL}' &= \frac{\partial x_k'}{\partial X_K}\frac{\partial x_k'}{\partial X_L} = \frac{\partial x_k'}{\partial x_m}\frac{\partial x_k'}{\partial x_n}\frac{\partial x_m}{\partial X_K}\frac{\partial x_n}{\partial X_L} = \frac{\partial x_m}{\partial X_K}\frac{\partial x_n}{\partial X_L}\left(\delta_{km} + \varepsilon u_{k,m}\right)\left(\delta_{kn} + \varepsilon u_{k,n}\right) \\ &= C_{KL}^0 + \varepsilon\frac{\partial x_k}{\partial X_K}\frac{\partial x_n}{\partial X_L}u_{k,n} + \varepsilon\frac{\partial x_m}{\partial X_K}\frac{\partial x_k}{\partial X_L}u_{k,m} \end{aligned} \tag{2.85}$$

şeklinde bulunur. Burada C_{KL}^0 büyüklüğü B konumunda ölçülen Green şekil değiştirme tansörüdür. (2.84) ten

$$\begin{aligned} I_1' &= I_1^0 + 2\varepsilon c_{mk}^{-1^0}\tilde{e}_{mk} \\ I_4' &= C_{KL}'A_{1_{KL}} = I_4^0 + 2\varepsilon d_{1_{kn}}^0 u_{k,n} \\ I_6' &= C_{KL}'A_{2_{KL}} = I_6^0 + 2\varepsilon d_{2_{kn}}^0 u_{k,n} \end{aligned} \tag{2.86}$$

bulunur. Şimdi B' konumunda tanımlı $\mathbf{d}_1'$ ve $\mathbf{d}_2'$ tansörleri elde edilecektir. (2.33) ten yararlanarak bu tansörler

$$\mathbf{d}_1' = \mathbf{F}'\mathbf{A}_1\mathbf{F}'^T, \quad \mathbf{d}_2' = \mathbf{F}'\mathbf{A}_2\mathbf{F}'^T \tag{2.87}$$

şeklinde yazılır. Burada $F'_{kK} = \partial x'_k / \partial X_K$ şeklinde tanımlanmıştır. ε a göre lineer terimleri alarak

$$\begin{aligned} d'_{1_{kl}} &= \frac{\partial x'_k}{\partial X_K} A_{1_{KL}} \frac{\partial x'_l}{\partial X_L} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_m}\frac{\partial x'_l}{\partial x_n}\frac{\partial x_m}{\partial X_K}\frac{\partial x_n}{\partial X_L} A_{1_{KL}} \\ &= \left(\delta_{km} + \varepsilon u_{k,m}\right)\left(\delta_{ln} + \varepsilon u_{l,n}\right) F_{mK} F_{nL} A_{1_{KL}} = d^0_{1_{kl}} + d^0_{1_{kn}} u_{l,n}\varepsilon + d^0_{1_{ml}} u_{k,m}\varepsilon \end{aligned} \tag{2.88}$$

ve

$$\begin{aligned} d'_{2_{kl}} &= \frac{\partial x'_k}{\partial X_K} A_{2_{KL}} \frac{\partial x'_l}{\partial X_L} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_m}\frac{\partial x'_l}{\partial x_n}\frac{\partial x_m}{\partial X_K}\frac{\partial x_n}{\partial X_L} A_{2_{KL}} \\ &= \left(\delta_{km} + \varepsilon u_{k,m}\right)\left(\delta_{ln} + \varepsilon u_{l,n}\right) F_{mK} F_{nL} A_{2_{KL}} = d^0_{2_{kl}} + d^0_{2_{kn}} u_{l,n}\varepsilon + d^0_{2_{ml}} u_{k,m}\varepsilon \end{aligned} \tag{2.89}$$

elde edilir. (2.54) ifadesi ile bulunan bu sonuçlar (2.79b) nin açık hali olan

$$\begin{aligned} t'_{kl} &= P'\delta_{kl} + (\beta c^{-1'}_{kl} + 2\mu d'_{kl}) \exp\left[\alpha(I'_1 - 3)\right] \\ &+ 2k_1(I'_4 - 1)\exp\left[k_2(I'_4 - 1)^2\right] d'_{1_{kl}} + 2k_1(I_6{}' - 1)\exp\left[k_2(I'_6 - 1)^2\right] d'_{2_{kl}} \end{aligned} \tag{2.90}$$

denkleminde kullanıldığında ve B konumunda hızın sıfır olduğu kabul edildiğinde

$$\begin{aligned} \bar{t}_{kl} &= \bar{p}\delta_{kl} + \left[2\alpha\beta c^{-1^0}_{kl} c^{-1^0}_{mn}\tilde{e}_{mn} + 2\mu\bar{d}_{kl}\right]\exp\left[\alpha(I^0_1 - 3)\right] \\ &+ \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(I^0_4 - 1\right)^2\right]\exp\left[k_2(I^0_4 - 1)^2\right] d^0_{1_{rs}} u_{r,s} d^0_{1_{kl}} \\ &+ \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(I^0_6 - 1\right)^2\right]\exp\left[k_2(I^0_6 - 1)^2\right] d^0_{2_{rs}} u_{r,s} d^0_{2_{kl}} \\ &+ t^0_{kn}u_{l,n} - \bar{P}^0 u_{l,k} + t^0_{ml}u_{k,m} - \bar{P}^0 u_{k,l} \end{aligned} \tag{2.91}$$

sonucuna ulaşılır. (2.77) den yararlanarak

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{kl} &= \bar{p}\delta_{kl} - 2\bar{P}^0\tilde{e}_{kl} + \left[2\alpha\beta c^{-1^0}_{kl} c^{-1^0}_{mn}\tilde{e}_{mn} + 2\mu\bar{d}_{kl}\right]\exp\left[\alpha\left(I^0_1 - 3\right)\right] \\ &+ \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(I^0_4 - 1\right)^2\right]\exp\left[k_2\left(I^0_4 - 1\right)^2\right] d^0_{1_{rs}} d^0_{1_{kl}}\tilde{e}_{rs} \\ &+ \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(I^0_6 - 1\right)^2\right]\exp\left[k_2\left(I^0_6 - 1\right)^2\right] d^0_{2_{rs}} d^0_{2_{kl}}\tilde{e}_{rs} \end{aligned} \tag{2.92}$$

bulunur. B konumundaki gerilme tansörü ise (2.79a) dan

$$t_{kl}^0 = \bar{P}^0 \delta_{kl} + \beta c_{kl}^{-1^0} \exp\left[\alpha\left(I_1^0 - 3\right)\right] + 2k_1\left(I_4^0 - 1\right)\exp\left[k_2\left(I_4^0 - 1\right)^2\right] d_{1_{kl}}^0 + 2k_1\left(I_6^0 - 1\right)\exp\left[k_2\left(I_6^0 - 1\right)^2\right] d_{2_{kl}}^0 \tag{2.93}$$

şeklinde elde edilir.

2.3. Silindirik Koordinatlarda Alan Denklemleri

Bu bölümde akışkan (kan) ve viskoelastik malzeme (damar) için önceki bölümlerde verilmiş olan denklemler ve sınır koşulları, seçilen geometri nedeniyle silindirik koordinat takımında ifade edilecektir.

2.3.1. Akışkan İçin Alan Denklemleri:

Ön hızın sıfır olduğu lineerleştirilmiş alan denklemleri genel koordinatlarda

$$\rho_0 \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial t} = \rho_0 \hat{f}_k - \hat{p}_{,k} + \hat{\mu}\hat{v}_{k\ ;l}^{\ l} \tag{2.94}$$

ve

$$\hat{v}_{;k}^{k} = 0 \tag{2.95}$$

şeklinde verilmişti. Genel olarak bir vektörün ve ikinci mertebe bir tansörün kovaryant türevleri

$$\begin{aligned} u_{;k}^{m} &= \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^{m} u^l \\ A_{;m}^{kl} &= \frac{\partial A^{kl}}{\partial x^m} + \Gamma_{mn}^{k} A^{nl} + \Gamma_{mn}^{l} A^{kn} \end{aligned} \tag{2.96}$$

şeklinde ifade edilir. Burada Γ_{lm}^{k} ikinci tipten Christoffel sembollerini göstermektedir. (r,θ,z) ile tanımlı silindirik koordinatlarda sıfırdan farklı Christoffel sembolleri aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\Gamma_{\theta\theta}^{r} = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}. \tag{2.97}$$

Bu tanımlar kullanılarak (2.94) hareket denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilirler:

$$\rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \rho_0 \hat{f}_r - \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta} \right),$$
$$\rho_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \rho_0 \hat{f}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \theta^2} - \frac{\hat{v}}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \right), \qquad (2.98)$$
$$\rho_0 \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = \rho_0 \hat{f}_z - \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right).$$

Burada, $\hat{u}$, $\hat{v}$ ve $\hat{w}$, sırasıyla hızın radyal, teğetsel ve eksenel doğrultulardaki bileşenlerini göstermektedir. $\hat{f}_r$, $\hat{f}_\theta$ ve $\hat{f}_z$ ise silindirik koordinatlardaki kütle kuvveti bileşenleridir. Bunlara ek olarak sıkışmazlık koşulunun da silindirik koordinatlardaki ifadesi (2.95) ten aşağıdaki gibidir,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0. \qquad (2.99)$$

Büyük damarlarda kan akımını daha gerçekçi modellemeyi amaçlayan bu çalışmada, kan içinde bulunan hücresel kısmın etkisi de göz önüne alınacaktır. Bu nedenle akışkanın rijit parçacıklar içerdiği kabul edilmiştir. Dengede bulunan parçacıklı akışkana küçük bir $\hat{p}(r,z,t)$ basınç artımı verildiğinde, kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği, eksenel simetrinin var olduğu durum için hareket denklemleri Nayfeh [44] tarafından silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$(1-\varphi)\rho_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (1-\varphi)\left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau}(\hat{u}_s - \hat{u}),$$
$$(1-\varphi)\rho_0 \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = (1-\varphi)\left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau}(\hat{w}_s - \hat{w}),$$
$$Nm\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = \varphi\left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau}(\hat{u} - \hat{u}_s), \qquad (2.100)$$
$$Nm\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial t} = \varphi\left[-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \hat{\mu}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{Nm}{\tau}(\hat{w} - \hat{w}_s).$$

Burada $(\hat{u}, \hat{w})$ ve $(\hat{u}_s, \hat{w}_s)$, sırasıyla akışkan ve parçacıkların radyal ve eksenel doğrultudaki hız bileşenleridir. $\hat{\mu}$ viskoziteyi, φ karışımın her bir birim hacminde bulunan parçacıkların oluşturduğu hacmi, ρ_0 akışkanın yoğunluğunu, m bir

parçacığın kütlesini, N birim hacimdeki parçacıkların sayısını göstermektedir. τ gevşeme zamanıdır ve $\tau = m/K$, $K = 6\pi\hat{\mu}a$ olup a parçacıkların yarıçapıdır.

Akışkanın sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \tag{2.101}$$

ile verilmektedir. Parçacıklar için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(N\hat{w}_s) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN\hat{u}_s) = 0 \tag{2.102}$$

şeklindedir. Sınır koşullarında kullanılacak olan gerilme bileşenleri (2.6) dan

$$\hat{t}_{rr} = -\hat{p} + 2\hat{\mu}\frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \quad \hat{t}_{rz} = \hat{\mu}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial r}\right) \tag{2.103}$$

ile verilir.

2.3.2. Viskoelastik Malzeme İçin Alan Denklemleri:

Viskoelastik malzeme (damar) için önceki bölümlerde elde edilen artımsal yer değiştirme ile ilgili hareket denklemleri, kütle kuvvetlerinin sıfır olduğu durum için genel koordinatlarda aşağıdaki gibidir,

$$\overline{T}^{kl}_{;k} = \rho\frac{\partial^2 u^l}{\partial t^2} \tag{2.104}$$

ve

$$\overline{T}^{kl} = t^{0km}u^l_{;m} + \tilde{t}_{kl}. \tag{2.105}$$

(2.104) denklem takımı fiziksel bileşenler cinsinden silindirik koordinatlarda yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{T}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{T}_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\overline{T}_{rr} - \overline{T}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \overline{T}_{zr}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \overline{T}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{T}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\overline{T}_{r\theta} + \overline{T}_{\theta r}) + \frac{\partial \overline{T}_{z\theta}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
&\frac{\partial \overline{T}_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{T}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\overline{T}_{rz} + \frac{\partial \overline{T}_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

denklemleri elde edilir. Burada u, v ve w sırasıyla radyal, teğetsel ve eksenel doğrultulardaki artımsal yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. Sonsuz küçük birim şekil değiştirme tansörünün bileşenleri ise

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k;l} + u_{l;k}) \tag{2.107}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} &\tilde{e}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}\ , \quad \tilde{e}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}\ , \quad \tilde{e}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}\ , \\ &\tilde{e}_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right), \quad \tilde{e}_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad \tilde{e}_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \end{aligned} \tag{2.108}$$

şeklinde bulunur.

Ortalama P_i kan basıncının damar ekseni boyunca değişmediği (üniform olduğu) ve eksenel yönde sabit λ germesini yaratacak eksenel bir N kuvvetinin silindirik kabuğa etkidiği varsayılırsa, silindirik koordinatlarda $t^0_{rr}, t^0_{\theta\theta}$ ve t^0_{zz} gerilmelerinin dışındaki bütün ön gerilme bileşenlerinin sıfır olduğu gösterilebilir (Bkz. 2.4.). Bu durumda $\bar{T}_{kl}$ artımsal gerilme tansörünün bileşenleri, bu ön gerilmeler ve $\tilde{t}_{kl}$ cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir,

$$\begin{aligned} &\bar{T}_{rr} = t^0_{rr}\frac{\partial u}{\partial r} + \tilde{t}_{rr}\ , \quad \bar{T}_{\theta\theta} = t^0_{\theta\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) + \tilde{t}_{\theta\theta}\ , \\ &\bar{T}_{zz} = t^0_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + \tilde{t}_{zz}\ , \quad \bar{T}_{r\theta} = t^0_{rr}\frac{\partial v}{\partial r} + \tilde{t}_{r\theta}\ , \\ &\bar{T}_{\theta r} = t^0_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}\right) + \tilde{t}_{\theta r}\ , \\ &\bar{T}_{rz} = t^0_{rr}\frac{\partial w}{\partial r} + \tilde{t}_{rz}\ , \quad \bar{T}_{zr} = t^0_{zz}\frac{\partial u}{\partial z} + \tilde{t}_{zr}\ , \\ &\bar{T}_{\theta z} = t^0_{\theta\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \tilde{t}_{\theta z}\ , \quad \bar{T}_{z\theta} = t^0_{zz}\frac{\partial v}{\partial z} + \tilde{t}_{z\theta}\ . \end{aligned} \tag{2.109}$$

Sınır koşulları ise (2.67) den aşağıdaki şekle gelir,

$$\begin{aligned} &\bar{T}_{rr}\,|_{r=r_i} = (\hat{t}_{rr} - t^0_{rr}\frac{\partial u}{\partial r})\,|_{r=r_i}\ , \\ &\bar{T}_{r\theta}\,|_{r=r_i} = \hat{t}_{r\theta}\,|_{r=r_i}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overline{T}_{rz}\,|_{r=r_i} = \hat{t}_{rz}\,|_{r=r_i}\,, \\ &\overline{T}_{rr}\,|_{r=r_d} = \overline{T}_{r\theta}\,|_{r=r_d} = \overline{T}_{rz}\,|_{r=r_d} = 0. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Burada r_i ve r_d sırasıyla, damarın ön şekil değiştirmeden sonraki iç ve dış yarıçaplarını göstermektedir. Sınır koşulları bulunurken, damarın iç yüzeyinde kan ve damara ait gerilmelerin eşit olduğu, dış yüzeyinde ise gerilme olmadığı kabul edilmiştir. Aslında, silindirik olarak varsayılan damar, viskoelastik denebilecek bir ortam içinde uzanmaktadır. Literatürde bu ortamın damara olan etkileri belirli bir yaklaşımla dış yüzeyde ek atalet kuvveti, yay kuvveti ve viskoz kuvvet olarak verilebilmektedir. Bu ek kuvvetlerin damar hareketine olan etkileri burada ihmal edilecektir.

Bu koşullara ek olarak $r = r_i$ de kan ve damarın hız bileşenleri eşit olacaktır. Buna göre,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{r=r_i} = \hat{u}\big|_{r=r_i}\,,\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{r=r_i} = \hat{v}\big|_{r=r_i}\,,\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{r=r_i} = \hat{w}\big|_{r=r_i} \tag{2.111}$$

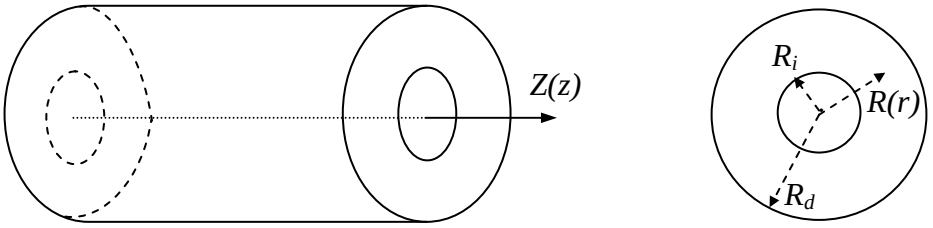
olmalıdır.

Bu denklemlerin çözümünden önce viskoelastik lifli katı ortama ait ön şekil değiştirmenin belirlenmesi gerekmektedir. Ancak ön şekildeğişiminde viskoelastik etkiler göz önüne alınmayacaktır.

2.4. Katı Ortama Ait Ön Şekil Değiştirmenin Belirlenmesi

Bu bölümde radyal genleşme ve eksenel uzamaya sahip damardaki ön gerilme dağılımı bulunacaktır. Dolaşım bakımından sorunu olmayan sağlıklı bir insanda ortalama statik kan basıncının $100\,mmHg$ civarında, kalbin pompalama hareketi sırasındaki basınç sapmasının da $\pm 20\,mmHg$ civarında olduğu hatırlanacak olursa, damarın fizyolojik işlevini yerine getirirken büyükçe bir statik ön basıncın etkisinde kalacağı hemen görülebilir. Aynı şekilde, yapılan deneyler, fizyolojik koşullarda damarın ayrıca eksenel bir λ germesinin etkisinde kaldığını göstermektedir. Bu germe miktarı damardan damara farklılık göstermekle birlikte fizyolojik koşullarda $\lambda = 1.3 \sim 1.7$ mertebesindedir. Bu oranın ise mühendislik malzemelerinin sahip olduğu germeye göre oldukça büyük olduğu söylenebilir. Sonuç olarak damar hem

radyal, hem eksenel doğrultuda büyük ön şekil değiştirmeye uğramakta, kanın hareketi sırasında ise bu değerlere küçük fakat dinamik yer değiştirmeler eklenmektedir. Şimdi öncelikle bu ön şekildeğişiminin oluşturduğu gerilme alanı verilecektir.



Şekil 2.2: P_i iç basıncının ve N eksenel kuvvetinin etkisi altındaki silindir.

Ön şekil değiştirmeden önceki iç yarıçapı R_i, dış yarıçapı R_d olan sonsuz uzunluklu dairesel silindirik kalın bir kabuk ele alınsın (Şekil 2.2). Böyle bir kalın kabuk P_i iç basıncının ve N eksenel kuvvetinin etkisinde kalsın. Bu kuvvetler altında kabuk radyal doğrultuda genişlerken eksenel doğrultuda da sabit bir germenin etkisinde kalacaktır. Buna göre, şekil değiştirmeden önceki silindirik koordinatları (R,Θ,Z) olan maddesel bir parçacık şekil değiştirmeden sonra (r,θ,z) noktasına gidecektir. Eksenel simetri dikkate alınarak, böyle bir şekil değiştirme alanı,

$$r = r(R), \quad \theta = \Theta, \quad z = \lambda Z \tag{2.112}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada λ eksenel doğrultudaki germeyi göstermektedir. Buna göre Finger şekil değiştirme tansörü ($\mathbf{c}^{-1}$) bileşenleri

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} (r')^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \qquad r' \equiv \frac{dr}{dR} \tag{2.113}$$

ile belirlenir. Damar malzemesi sıkışmaz varsayıldığından

$$I_3 = \det(\mathbf{c}^{-1}) = (r'\frac{r}{R}\lambda)^2 = 1 \tag{2.114}$$

sağlanmalıdır. Buradan

$$r = \left(\frac{R^2}{\lambda} + B \right)^{\frac{1}{2}}, \quad B = sbt \tag{2.115}$$

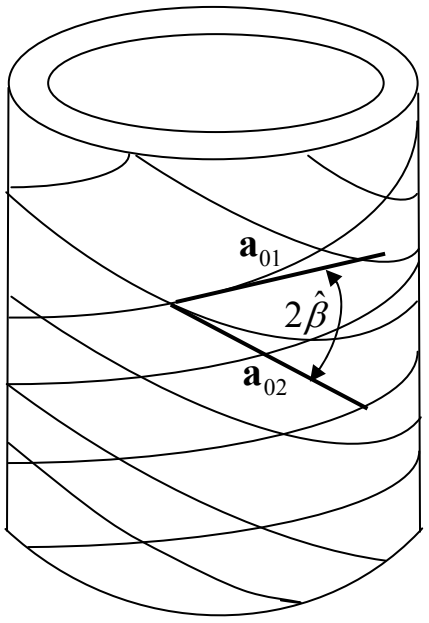
bulunabilir. Burada B bir integral sabiti olup sınır koşullarından elde edilmesi gereken bir büyüklüktür. Bu ifade yardımıyla Finger şekil değiştirme tansörünün bileşenleri aşağıdaki şekilde verilebilir,

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad x \equiv \frac{R}{r} \ . \tag{2.116}$$

(2.24) ile tanımlanmış olan $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ tansörleri elde edilirken liflerin doğrultularını gösteren vektörler (Şekil 2.3)

$$\mathbf{a}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\hat{\beta} \\ \sin\hat{\beta} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\hat{\beta} \\ -\sin\hat{\beta} \end{bmatrix} \tag{2.117}$$

olarak yazılır ve (2.24) ten



Şekil 2.3: Damar modelinde lif doğrultularının gösterilimi

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \cos^2\hat{\beta} & \cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta}\\ 0 & \cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta} & \sin^2\hat{\beta}\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \cos^2\hat{\beta} & -\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta}\\ 0 & -\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta} & \sin^2\hat{\beta}\end{bmatrix} \tag{2.118}$$

elde edilir. Burada $\hat{\beta}$ lif doğrultuları arasındaki açıdır ve Şekil 2.3 te gösterilmiştir. (2.33) ten

$$\mathbf{d}_1=\mathbf{F}\mathbf{A}_1\mathbf{F}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} & \frac{\lambda}{x}\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta}\\ 0 & \frac{\lambda}{x}\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta} & \lambda^2\sin^2\hat{\beta}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_2=\mathbf{F}\mathbf{A}_2\mathbf{F}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} & -\frac{\lambda}{x}\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta}\\ 0 & -\frac{\lambda}{x}\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta} & \lambda^2\sin^2\hat{\beta}\end{bmatrix} \tag{2.119}$$

ve (2.79a) dan gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned}
t^0_{rr}&=\bar{P}^0+2\frac{x^2}{\lambda^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_1},\\
t^0_{\theta\theta}&=\bar{P}^0+2\left[\frac{1}{x^2}\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_1}+\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_4}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_6}\right)\right],\\
t^0_{zz}&=\bar{P}^0+2\left[\lambda^2\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_1}+\lambda^2\sin^2\hat{\beta}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_4}+\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_6}\right)\right],\\
t^0_{z\theta}&=2\frac{\lambda}{x}\cos\hat{\beta}\sin\hat{\beta}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_4}-\frac{\partial\Sigma}{\partial I^0_6}\right),\\
t^0_{r\theta}&=t^0_{rz}=0
\end{aligned} \tag{2.120}$$

şeklinde bulunur. Bu gerilme bileşenlerini açık olarak elde edebilmek için B konumunda tanımlı invaryantlar da bulunmalıdır. (2.30) tanımlarından yararlanarak, bu özel tipteki şekil değiştirme için

$$I_1^0 = tr\,\mathbf{C} = tr\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{1}{x^2} + \lambda^2$$
$$I_4^0 = \mathbf{C} : \mathbf{A}_1 = \frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2\hat{\beta}, \qquad (2.121)$$
$$I_6^0 = \mathbf{C} : \mathbf{A}_2 = \frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} + \lambda^2 \sin^2\hat{\beta},$$

şeklinde bulunur. Burada I_4^0 ile I_6^0 invaryantı birbirine eşit olduğundan $I_4^0 = I_6^0 = \tilde{I}$ alınacaktır. (2.120) veya (2.93) ten gerilme bileşenleri

$$t_{rr}^0 = \bar{P}^0 + \frac{\beta x^2}{\lambda^2}\exp\left[\alpha\left(\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{1}{x^2} + \lambda^2 - 3\right)\right],$$
$$t_{\theta\theta}^0 = \bar{P}^0 + \frac{1}{x^2}\left\{\beta\exp\left[\alpha\left(\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{1}{x^2} + \lambda^2 - 3\right)\right]\right.$$
$$\left. + 4k_1\cos^2\hat{\beta}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} + \lambda^2\sin^2\hat{\beta} - 1\right)\exp\left[k_2\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} + \lambda^2\sin^2\hat{\beta} - 1\right)^2\right]\right\},$$
$$t_{zz}^0 = \bar{P}^0 + \lambda^2\left\{\beta\exp\left[\alpha\left(\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{1}{x^2} + \lambda^2 - 3\right)\right]\right. \qquad (2.122)$$
$$\left. + 4k_1\sin^2\hat{\beta}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} + \lambda^2\sin^2\hat{\beta} - 1\right)\exp\left[k_2\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta} + \lambda^2\sin^2\hat{\beta} - 1\right)^2\right]\right\},$$
$$t_{r\theta}^0 = t_{rz}^0 = t_{\theta z}^0 = 0$$

olarak elde edilir. Kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda (2.47) denge denklemleri silindirik koordinatlarda, var olan gerilme bileşenleri cinsinden

$$\frac{dt_{rr}^0}{dr} + \frac{1}{r}\left(t_{rr}^0 - t_{\theta\theta}^0\right) = 0 \qquad (2.123)$$

biçimindedir. Ayrıca gerilme bileşenlerinin tüpün (damarın) iç ve dış yüzeyinde sağlaması gereken koşullar

$$t_{rr}^0\Big|_{x=x_i} = -P_i\,, \quad t_{rr}^0\Big|_{x=x_d} = 0 \qquad (2.124)$$

olup (i) ve (d) indisleri ilgili büyüklüğün tüpün iç ve dış yüzeyinde aldığı değerleri göstermektedir.

$$F_1(x)=\exp\left[\alpha(I_1^0-3)\right],\quad F_2(x)=\exp\left[k_2(\tilde{I}-1)^2\right] \tag{2.125}$$

olmak üzere (2.122) denklemlerinden

$$t_{rr}^0-t_{\theta\theta}^0=\beta F_1(x)\left(\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{4}{x^2}k_1\cos^2\hat{\beta}\left(\tilde{I}-1\right)F_2(x) \tag{2.126}$$

yazılabilir. Ayrıca (2.115) ten de yararlanarak

$$\frac{dt_{rr}^0}{dr}=\frac{dt_{rr}^0}{dx}\frac{dx}{dr}=\frac{dt_{rr}^0}{dx}\frac{1}{r}\left(\frac{\lambda}{x}-x\right) \tag{2.127}$$

bulunur. Bu son ifadenin de yardımıyla (2.123) denkleminden

$$\begin{aligned} t_{rr}^0=&\frac{\beta}{\lambda^2}\int_{x_d}^{x}\left(\zeta+\frac{\lambda}{\zeta}\right)F_1(\zeta)d\zeta \\ &+4k_1\cos^2\hat{\beta}\int_{x_d}^{x}\frac{1}{\zeta\left(\lambda-\zeta^2\right)}\left(\frac{1}{\zeta^2}\cos^2\hat{\beta}+\lambda^2\sin^2\hat{\beta}-1\right)F_2(\zeta)d\zeta \end{aligned} \tag{2.128}$$

bulunur. (2.128) ifadesi elde edilirken $x=x_d$ de (dış yüzeyde) radyal gerilmenin sıfır olduğu göz önüne alınmıştır. Diğer gerilme bileşenleri ve $\overline{P}^0$ hidrostatik basınç terimi de aşağıdaki şekilde bulunur,

$$\begin{aligned} \overline{P}^0&=t_{rr}^0-\frac{\beta}{\lambda^2}x^2F_1(x), \\ t_{\theta\theta}^0&=t_{rr}^0+\frac{\beta}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2}{x^2}-x^2\right)F_1(x)+4k_1\cos^2\hat{\beta}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta}+\lambda^2\sin^2\hat{\beta}-1\right)F_2(x), \\ t_{zz}^0&=t_{rr}^0+\frac{\beta}{\lambda^2}\left(\lambda^4-x^2\right)F_1(x)+4\lambda^2k_1\sin^2\hat{\beta}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\hat{\beta}+\lambda^2\sin^2\hat{\beta}-1\right)F_2(x). \end{aligned} \tag{2.129}$$

Ayrıca $x=x_i$ de radyal gerilmenin negatif işaretle P_i iç basıncına eşit olması gerektiğinden

$$\begin{aligned} P_i=&\frac{\beta}{\lambda^2}\int_{x_i}^{x_d}\left(\zeta+\frac{\lambda}{\zeta}\right)F_1(\zeta)d\zeta \\ &+4k_1\cos^2\hat{\beta}\int_{x_i}^{x_d}\frac{1}{\zeta\left(\lambda-\zeta^2\right)}\left(\frac{1}{\zeta^2}\cos^2\hat{\beta}+\lambda^2\sin^2\hat{\beta}-1\right)F_2(\zeta)d\zeta \end{aligned} \tag{2.130}$$

olarak elde edilir. P_i nin ifadesi şekildeğişimi ile iç basınç arasındaki ilişkiyi vermektedir. Eğer iç basınç-şekildeğişimi ilişkisi deneysel olarak verilmişse, deney ile teoriyi en iyi şekilde uyuşturacak biçimde maddesel sabitler bulunabilir. (2.130) da bulunan α ve β ile k_1 ve k_2 sabitleri sırasıyla [52] ve [47] nolu kaynaklardaki şekilde alınmışlardır. Demiray [52] α ve β sabitlerini, Simon ve arkadaşları [39] tarafından in vitro germesi $\lambda = 1.53$ olan bir köpeğin karın aortu üzerinde yapılan eksenel çekme ve radyal şişme deney sonuçlarını kullanarak bulmuştur ($\alpha = 1.948,\ \beta = 9.9\times10^4\,\text{din/cm}^2$). Holzapfel, Gasser ve Ogden [47] ise malzeme sabitlerini çalışmalarında $k_1 = 5620\,\text{din/cm}^2$ ve $k_2 = 0.7112$ şeklinde elde etmişlerdir.

Artık başlangıç gerilme tansörü bileşenleri bilindiğine göre artımsal gerilme tansörleri de bulunabilir.

$$u_1 = u(r,z,t),\quad u_2 = 0,\quad u_3 = w(r,z,t) \tag{2.131}$$

olduğu kabul edilecek, yani tüp için eksenel simetrik artımsal hareket göz önüne alınacaktır. Bu durumda (2.92) den silindirik koordinatlarda Cauchy artımsal gerilme tansörü bileşenleri

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{rr} &= \bar{p} + 2\left(\bar{\alpha}_1\frac{u}{r} + \bar{\alpha}_2\frac{\partial u}{\partial r} + \bar{\alpha}_3\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\bar{\alpha}_{10}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}\,,\\
\tilde{t}_{\theta\theta} &= \bar{p} + 2\left(\left(\bar{\alpha}_4+\bar{\alpha}_5\right)\frac{u}{r} + \bar{\alpha}_1\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\bar{\alpha}_6+\bar{\alpha}_7\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\bar{\alpha}_{10}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,,\\
\tilde{t}_{zz} &= \bar{p} + 2\left(\left(\bar{\alpha}_6+\bar{\alpha}_7\right)\frac{u}{r} + \bar{\alpha}_3\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\bar{\alpha}_8+\bar{\alpha}_9\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\bar{\alpha}_{10}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial z}\,,\\
\tilde{t}_{rz} &= \tilde{t}_{zr} = -\bar{P}^0\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \bar{\alpha}_{10}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial r}\right),\\
\tilde{t}_{\theta z} &= \tilde{t}_{z\theta} = 0,\quad \tilde{t}_{r\theta} = \tilde{t}_{\theta r} = 0
\end{aligned} \tag{2.132}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_1 &= \alpha\beta F_1(x)\frac{1}{\lambda^2}\,,\\
\bar{\alpha}_2 &= -\bar{P}^0 + \alpha\beta F_1(x)\frac{x^4}{\lambda^4}\,,\\
\bar{\alpha}_3 &= \alpha\beta F_1(x)x^2\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\alpha}_4 = \alpha\beta F_1(x)\frac{1}{x^4} - \bar{P}^0 \ , \\
&\bar{\alpha}_5 = \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(\tilde{I}-1\right)^2 \right] F_2(x)\frac{\cos^4\hat{\beta}}{x^4} \ , \\
&\bar{\alpha}_6 = \alpha\beta F_1(x)\frac{\lambda^2}{x^2}, \\
&\bar{\alpha}_7 = \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(\tilde{I}-1\right)^2 \right] F_2(x)\frac{\lambda^2}{x^2}\cos^2\hat{\beta}\sin^2\hat{\beta} \ , \\
&\bar{\alpha}_8 = -\bar{P}^0 + \alpha\beta F_1(x)\lambda^4 \ , \\
&\bar{\alpha}_9 = \left[4k_1 + 8k_1k_2\left(\tilde{I}-1\right)^2 \right] F_2(x)\lambda^4\sin^4\hat{\beta} \ , \\
&\bar{\alpha}_{10} = \mu F_1(x)
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Artımsal Piola-Kirchhoff tansörünün bileşenleri ise (2.109) dan

$$
\begin{aligned}
&\bar{T}_{rr} = \tilde{t}_{rr} + t^0_{rr}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \bar{T}_{\theta\theta} = \tilde{t}_{\theta\theta} + t^0_{\theta\theta}\frac{u}{r}, \\
&\bar{T}_{zz} = \tilde{t}_{zz} + t^0_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \bar{T}_{rz} = \tilde{t}_{rz} + t^0_{rr}\frac{\partial w}{\partial r}, \\
&\bar{T}_{zr} = \tilde{t}_{zr} + t^0_{zz}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \bar{T}_{r\theta} = \bar{T}_{\theta r} = \bar{T}_{\theta z} = \bar{T}_{z\theta} = 0
\end{aligned}
\tag{2.134}
$$

olarak bulunur. (2.106) ile verilen yönetici diferansiyel denklemler silindirik koordinatlarda

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{T}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\bar{T}_{rr} - \bar{T}_{\theta\theta}) + \frac{\partial \bar{T}_{zr}}{\partial z} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{\partial \bar{T}_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{T}_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\bar{T}_{rz} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned}
\tag{2.135}
$$

şeklini alır. (2.71) sıkışmazlık koşulunun silindirik koordinatlarda ifadesi ($u^k_{;k} = 0$ dan)

$$
\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.136}
$$

olarak yazılabilir. (2.132) ve (2.134) ifadelerinin (2.135) te kullanılması ve (2.136) sıkışmazlık koşuluyla desteklenmesiyle

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial r}+\overline{\beta}_1(r)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\overline{\beta}_2(r)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\overline{\beta}_3(r)\frac{u}{r^2}+\overline{\beta}_4(r)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\overline{\alpha}_{10}\frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial t}+\overline{\alpha}_{10}\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial t}$$
$$+\left(2\frac{d\overline{\alpha}_{10}}{dr}+\frac{\overline{\alpha}_{10}}{r}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial t}-\frac{\overline{\alpha}_{10}}{r^2}\frac{\partial u}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,,$$

(2.137)

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}+\overline{\beta}_5(r)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\overline{\beta}_6(r)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\overline{\beta}_7(r)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}+\overline{\beta}_8(r)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\overline{\alpha}_{10}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial t}+\overline{\alpha}_{10}\frac{\partial^3 w}{\partial z^2\partial t}$$
$$+\left(\frac{d\overline{\alpha}_{10}}{dr}+\frac{\overline{\alpha}_{10}}{r}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial t}+\frac{d\overline{\alpha}_{10}}{dr}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada kullanılmış olan $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2,...,\overline{\beta}_8$ katsayıları ise aşağıdaki şekildedir,

$$\begin{aligned}
&\overline{\beta}_1=\overline{P}^0+t_{rr}^0+2\left(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_3\right),\\
&\overline{\beta}_2=\overline{P}^0+t_{\theta\theta}^0+\frac{d}{dr}\left[2r\left(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_3\right)\right]+2\left(\overline{\alpha}_6-\overline{\alpha}_3\right)+2\overline{\alpha}_7\,,\\
&\overline{\beta}_3=-\overline{P}^0-t_{\theta\theta}^0-2\left(\overline{\alpha}_4-\overline{\alpha}_6\right)-2\left(\overline{\alpha}_5-\overline{\alpha}_7\right)+2r\frac{d}{dr}\left(\overline{\alpha}_1-\overline{\alpha}_3\right),\\
&\overline{\beta}_4=t_{zz}^0-\overline{P}^0,\quad \overline{\beta}_5=t_{rr}^0-\overline{P}^0,\quad \overline{\beta}_6=t_{\theta\theta}^0-\frac{d}{dr}\left(r\overline{P}^0\right),\\
&\overline{\beta}_7=-r\frac{d\overline{P}^0}{dr}+2\left(\overline{\alpha}_6+\overline{\alpha}_7\right)-2\overline{\alpha}_3\,,\\
&\overline{\beta}_8=2\left(\overline{\alpha}_8+\overline{\alpha}_9\right)+t_{zz}^0+\overline{P}^0-2\overline{\alpha}_3\,.
\end{aligned}$$

(2.138)

Bu denklemler (2.110-111) ile verilen

$$\overline{T}_{rr}\,|_{r=r_i}=(\hat{t}_{rr}-t_{rr}^0\frac{\partial u}{\partial r})\,|_{r=r_i}\,,\quad \overline{T}_{rz}\,|_{r=r_i}=\hat{t}_{rz}\,|_{r=r_i}\,,$$
$$\overline{T}_{rr}\,|_{r=r_d}=0,\qquad \overline{T}_{rz}\,|_{r=r_d}=0\,.$$

(2.139)

ve

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{r=r_i}=\hat{u}\big|_{r=r_i}\,,\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{r=r_i}=\hat{w}\big|_{r=r_i}$$

(2.140)

sınır koşullarını sağlamalıdır. Bu koşullar açık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$
\begin{aligned}
&\overline{p}(r_i,t)+2\left(\overline{\alpha}_1\frac{u}{r}+\overline{\alpha}_2\frac{\partial u}{\partial r}+\overline{\alpha}_3\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=r_i}+2\overline{\alpha}_{10}(r_i)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}\Bigg|_{r=r_i}+t_{rr}^0(r_i)\frac{\partial u}{\partial r}\Bigg|_{r=r_i}\\
&\qquad\qquad=\hat{t}_{rr}(r_i,t)-t_{rr}^0(r_i)\frac{\partial u}{\partial r}\Bigg|_{r=r_i},\\
&-\overline{P}^0(r_i)\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=r_i}+\overline{\alpha}_{10}(r_i)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_i}+t_{rr}^0(r_i)\frac{\partial w}{\partial r}\Bigg|_{r=r_i}=\hat{t}_{rz}(r_i,t),\\
&\overline{p}(r_d,t)+2\left(\overline{\alpha}_1\frac{u}{r}+\overline{\alpha}_2\frac{\partial u}{\partial r}+\overline{\alpha}_3\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=r_d}+2\overline{\alpha}_{10}(r_d)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial r}\Bigg|_{r=r_d}+t_{rr}^0(r_d)\frac{\partial u}{\partial r}\Bigg|_{r=r_d}=0,\\
&-\overline{P}^0(r_d)\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{r=r_d}+\overline{\alpha}_{10}(r_d)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_d}+t_{rr}^0(r_d)\frac{\partial w}{\partial r}\Bigg|_{r=r_d}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(r_i,t)=\hat{u}(r_i,t),\qquad\frac{\partial w}{\partial t}(r_i,t)=\hat{w}(r_i,t).
\end{aligned}
\tag{2.141}
$$

Sınır koşullarında kullanılacak olan akışkan için gerilme bileşenleri (2.103) ile

$$
\hat{t}_{rr}=-\hat{p}+2\hat{\mu}\frac{\partial\hat{u}}{\partial r},\quad \hat{t}_{rz}=\hat{\mu}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial z}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial r}\right)
$$

şeklinde daha önce verilmişti.

3. ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde viskoz bir akışkan (kan) ile ön gerilme etkisindeki viskoelastik kalın silindirik bir kabuğun (damar) içerisinde oluşacak harmonik dalga tipinden hareketler incelenecektir. Şimdi önce parçacıklı viskoz akışkana, daha sonra ise lifli yapıya sahip viskoelastik tüpe ait alan denklemlerinin harmonik dalga çözümü elde edilecektir.

3.1. Akışkanın Alan Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde, (2.3) bölümünde verilmiş olan lineerleştirilmiş hareket denklemleri aracılığıyla, kalbin kanı pompalama hareketinin periyodik olduğu da dikkate alınarak, akışkan denklemlerinin zaman içerisinde ve eksenel doğrultudaki harmonik dalga hareketi incelenecektir. Daha önce de belirtildiği gibi, hareket denklemlerinin lineerleşmesi, ön statik şekildeğişimine sahip damardaki kanın ilk hızını sıfır kabul etmekle gerçekleşmektedir.

(2.100) ile verilmiş olan, parçacıklı akışkanın silindirik koordinatlardaki hareket denklemleri için

$$\begin{aligned}(\hat{u},\hat{w},\hat{p}) &= \left[\hat{U}(r),\hat{W}(r),\hat{P}(r)\right]\exp\left[i(\omega t-kz)\right],\\ (\hat{u}_s,\hat{w}_s) &= \left[\hat{U}_s(r),\hat{W}_s(r)\right]\exp\left[i(\omega t-kz)\right]\end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde harmonik çözüm aranacaktır. Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını $\hat{U}(r),\hat{W}(r),\hat{P}(r),\hat{U}_s(r)$ ve $\hat{W}_s(r)$ ise dalga genliklerini göstermektedir. (3.1) ifadelerini (2.100-101) denklem takımında yerleştirerek

$$(1-\varphi)\rho_0 i\omega\hat{U} = (1-\varphi)\left[-\frac{d\hat{P}}{dr}+\hat{\mu}\left(\frac{d^2\hat{U}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\hat{U}}{dr}-k^2\hat{U}-\frac{1}{r^2}\hat{U}\right)\right]+\frac{Nm}{\tau}(\hat{U}_s-\hat{U}),$$

$$(1-\varphi)\rho_0 i\omega\hat{W} = (1-\varphi)\left[ik\hat{P}+\hat{\mu}\left(\frac{d^2\hat{W}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\hat{W}}{dr}-k^2\hat{W}\right)\right]+\frac{Nm}{\tau}(\hat{W}_s-\hat{W}),$$

$$
\begin{aligned}
Nmi\omega\hat{U}_s &= \varphi\left[-\frac{d\hat{P}}{dr}+\hat{\mu}\left(\frac{d^2\hat{U}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\hat{U}}{dr}-k^2\hat{U}-\frac{1}{r^2}\hat{U}\right)\right]+\frac{Nm}{\tau}(\hat{U}-\hat{U}_s),\\
Nmi\omega\hat{W}_s &= \varphi\left[ik\hat{P}+\hat{\mu}\left(\frac{d^2\hat{W}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\hat{W}}{dr}-k^2\hat{W}\right)\right]+\frac{Nm}{\tau}(\hat{W}-\hat{W}_s),\\
\frac{d\hat{U}}{dr}&+\frac{1}{r}\hat{U}-ik\hat{W}=0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler arasında $\hat{U}, \hat{U}_s, \hat{W}$ ve $\hat{W}_s$ elimine edilerek ilk olarak $\hat{P}$ fonksiyonu için

$$\hat{P}''+\frac{1}{r}\hat{P}'-k^2\hat{P}=0 \tag{3.3}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Ayrıca (3.2) den bazı ara işlemlerden sonra

$$\hat{U}_s = l^2\hat{U}, \tag{3.4a}$$

$$\hat{W}_s = l^2\hat{W}, \tag{3.4b}$$

$$\hat{W}''+\frac{1}{r}W'+s^2\hat{W}=-\frac{ik}{\hat{\mu}}\hat{P}, \tag{3.4c}$$

$$\hat{U}''+\frac{1}{r}\hat{U}'+\left(s^2-\frac{1}{r^2}\right)\hat{U}=\frac{1}{\hat{\mu}}\hat{P}' \tag{3.4d}$$

$$\frac{d\hat{U}}{dr}+\frac{1}{r}\hat{U}=ik\hat{W} \tag{3.4e}$$

eşitlikleri de bulunabilir. $\hat{P}(r)$ fonksiyonunun $r=0$ da sonlu kalacak çözümü (3.3) ten

$$\hat{P}(r)=I_0(kr)A_0 \tag{3.5}$$

olarak elde edilir. (3.4c) ve (3.4d) denklemlerinden

$$\hat{W}(r)=-\frac{ik}{\hat{\mu}(k^2+s^2)}I_0(kr)A_0+J_0(sr)B_0 \tag{3.6}$$

ve

$$\hat{U}(r) = \frac{k}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_1(kr) A_0 + J_1(sr) D_0 \tag{3.7}$$

şeklinde bulunur. (3.4e) sıkışmazlık koşulundan yararlanarak da

$$D_0 = \frac{ik}{s} B_0$$

şartının sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır. Böylece (3.7) den

$$\hat{U}(r) = \frac{k}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_1(kr) A_0 + \frac{ik}{s} J_1(sr) B_0 \tag{3.8}$$

olarak bulunur. (3.4a) ve (3.4b) den de sırasıyla $\hat{U}_s$ ve $\hat{W}_s$ fonksiyonları

$$\hat{U}_s = l^2 \left[\frac{k}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_1(kr) A_0 + \frac{ik}{s} J_1(sr) B_0 \right] \tag{3.9}$$

ve

$$\hat{W}_s = l^2 \left[-\frac{ik}{\hat{\mu}(k^2 + s^2)} I_0(kr) A_0 + J_0(sr) B_0 \right] \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerdeki $J_n(sr)$ ve $I_n(kr)$ fonksiyonları sırasıyla, *n.* mertebeden birinci tür Bessel ve modifiye Bessel fonksiyonlarıdır ve

$$\begin{aligned} f &= \frac{Nm}{\rho_0}, \quad \nu = \frac{\hat{\mu}}{\rho_0}, \\ s^2 &= -k^2 - \frac{i\omega}{\nu} \frac{\left[(1 + i\omega\tau)(1 - \varphi) + f\right]}{i\omega\tau(1 - \varphi) + 1}, \\ l^2 &= \frac{f + \varphi(1 - \varphi) i\omega\tau}{f\left[1 + (1 - \varphi) i\omega\tau\right]} \end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ifadelerde geçen A_0, B_0 ve D_0 büyüklükleri keyfi integral sabitlerini göstermektedir. (2.103) denklemlerinden bu ifadeler yardımıyla gerilme bileşenleri için

$$\hat{t}_{rr} = \left\{ \left[-I_0(kr) + \frac{2k}{r(k^2+s^2)}\left(-I_1(kr) + krI_0(kr)\right) \right] A_0 \right.$$
$$\left. + \frac{2i\hat{\mu}k}{sr}\left(-J_1(sr) + srJ_0(sr)\right) B_0 \right\} \exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right], \qquad (3.12)$$
$$\hat{t}_{rz} = \left\{ -\frac{2ik^2}{(k^2+s^2)} I_1(kr) A_0 - \frac{\hat{\mu}}{s}(s^2-k^2) J_1(sr) B_0 \right\} \exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right]$$

elde edilir. Bu gerilme ifadeleri ise sınır koşullarında kullanılacaktır.

3.2. Katı Ortamın Alan Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde (2.137) de tüp için verilen denklemlerin çözümü elde edilecektir. Akışkanda oluşan harmonik hareketin benzeri tüpte de oluşacağı için yer değiştirme ve basınç fonksiyonları aşağıdaki şekilde alınmıştır,

$$(u, w, \overline{p}) = \left[\overline{U}(r), \overline{W}(r), \overline{P}(r)\right] \exp\left[i(\omega t - kz)\right]. \qquad (3.13)$$

Bu ifadeler (2.136) sıkışmazlık koşulu ve (2.137) denklemlerinde kullanıldığında $\overline{U}$, $\overline{W}$ ve $\overline{P}$ için aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir,

$$\frac{d\overline{P}}{dr} + \overline{\beta}_1(r)\frac{d^2\overline{U}}{dr^2} + \overline{\beta}_2(r)\frac{1}{r}\frac{d\overline{U}}{dr} + \overline{\beta}_3(r)\frac{\overline{U}}{r^2} - \overline{\beta}_4(r)k^2\overline{U} + \overline{\alpha}_{10}\frac{d^2\overline{U}}{dr^2} i\omega$$
$$- \overline{\alpha}_{10} i\omega k^2 \overline{U} + \left(2\frac{d\overline{\alpha}_{10}}{dr} + \frac{\overline{\alpha}_{10}}{r}\right)\frac{d\overline{U}}{dr} i\omega - \frac{\overline{\alpha}_{10}}{r^2}\overline{U} i\omega = -\rho\omega^2\overline{U},$$

$$-ik\overline{P} + \overline{\beta}_5(r)\frac{d^2\overline{W}}{dr^2} + \overline{\beta}_6(r)\frac{1}{r}\frac{d\overline{W}}{dr} - \overline{\beta}_7(r)\frac{ik}{r}\overline{U} - \overline{\beta}_8(r)k^2\overline{W} + \overline{\alpha}_{10}\frac{d^2\overline{W}}{dr^2} i\omega \qquad (3.14)$$
$$- \overline{\alpha}_{10} i\omega k^2 \overline{W} + \left(\frac{d\overline{\alpha}_{10}}{dr} + \frac{\overline{\alpha}_{10}}{r}\right)\frac{d\overline{W}}{dr} i\omega - \frac{d\overline{\alpha}_{10}}{dr} ik\omega\overline{U} = -\rho\omega^2\overline{W},$$

$$\frac{d\overline{U}}{dr} + \frac{\overline{U}}{r} - ik\overline{W} = 0.$$

Tüpün ön şekil değiştirmeden sonraki iç ve dış yarıçapları r_i ve r_d olmak üzere ön şekildeğişiminden sonraki ortalama $\overline{r}$ yarıçapı

$$\overline{r} = \frac{r_i + r_d}{2} \qquad (3.15)$$

olarak tanımlanabilir. Eğer

$$r = \bar{r}\xi \tag{3.16}$$

şeklinde yeni bir ξ değişkeni tanımlanırsa (3.14) denklemleri yeni değişken cinsinden

$$\begin{aligned}
&\frac{dP}{d\xi} + \bar{\bar{\beta}}_1 \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{\bar{\bar{\beta}}_2}{\xi}\frac{dU}{d\xi} + \left[\frac{\bar{\bar{\beta}}_3}{\xi^2} + \left(\Omega^2 - \bar{\bar{\beta}}_4\eta^2\right)\frac{1}{\bar{x}^2}\right]U = 0, \\
&-i\eta P\frac{1}{\bar{x}} + \bar{\bar{\beta}}_5\frac{d^2W}{d\xi^2} + \frac{\bar{\bar{\beta}}_6}{\xi}\frac{dW}{d\xi} - i\eta\frac{1}{\bar{x}\xi}\bar{\bar{\beta}}_7 U + \frac{1}{\bar{x}^2}\left(\Omega^2 - \bar{\bar{\beta}}_8\eta^2\right)W = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ve

$$\frac{dU}{d\xi} + \frac{U}{\xi} - i\eta\frac{1}{\bar{x}}W = 0. \tag{3.18}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
&\bar{U} = \bar{r}U, \quad \bar{W} = \bar{r}W, \quad \bar{P} = \beta P, \\
&\eta = k\bar{R}, \quad \bar{\beta}_j = \beta\beta_j, \quad j = 1,...8, \\
&\bar{\alpha}_{10} = \sqrt{\beta\rho}\,\bar{R}\alpha_{10}, \quad \omega = \frac{c_0}{\bar{R}}\Omega, \; c_0 = \sqrt{\beta/\rho} \\
&\bar{x} = \bar{R}/\bar{r}, \quad \left(\bar{R} = \frac{R_i + R_d}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde boyutsuzlaştırma yapılmıştır. Burada R_i ve R_d sırasıyla damarın ön şekildeğişiminden önceki iç ve dış yarıçapları olmak üzere, $\bar{R}$ ön şekildeğişiminden önceki ortalama yarıçapı göstermektedir. $\bar{\bar{\beta}}_i$ $(i = 1,..,8)$ katsayıları ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{\beta}}_1 = \beta_1 + i\Omega\alpha_{10}, && \bar{\bar{\beta}}_2 = \beta_2 + 2i\Omega\xi\frac{d\alpha_{10}}{d\xi} + i\Omega\alpha_{10}, \\
&\bar{\bar{\beta}}_3 = \beta_3 - i\Omega\alpha_{10}, && \bar{\bar{\beta}}_4 = \beta_4 + i\Omega\alpha_{10}, \\
&\bar{\bar{\beta}}_5 = \beta_5 + i\Omega\alpha_{10}, && \bar{\bar{\beta}}_6 = \beta_6 + i\Omega\xi\frac{d\alpha_{10}}{d\xi} + i\Omega\alpha_{10}, \\
&\bar{\bar{\beta}}_7 = \beta_7 + i\Omega\xi\frac{d\alpha_{10}}{d\xi}, && \bar{\bar{\beta}}_8 = \beta_8 + i\Omega\alpha_{10}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

(2.141) sınır koşulları ise, (3.13) ifadesini kullanarak ve ξ değişkenine bağlı olarak

$$
\begin{aligned}
&\left[P+2\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\frac{U}{\xi}+\left(\beta_1+\beta_5+2i\Omega\alpha_{10}\right)\frac{dU}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_i}\\
&\quad-\left[-\frac{\overline{f}(\xi_i)}{\eta}+\frac{2\eta\overline{x}}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\xi_i}\left(\frac{\overline{f}(\xi_i)\xi_i}{\overline{x}}-1\right)\right]A+\left[\frac{2i\eta}{\gamma\xi_i}\left(1-\frac{\overline{g}(\xi_i)\xi_i}{\overline{x}}\right)\right]B=0,\\
&\left[\left(\beta_5+i\Omega\alpha_{10}\right)\frac{dW}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_i}+\left[\frac{\eta}{\overline{x}}\left(iP^0+\Omega\alpha_{10}\right)U\right]_{\xi=\xi_i}+\frac{2i\eta^2}{\eta^2+\gamma^2}A+\frac{\gamma^2-\eta^2}{\gamma}B=0,\\
&\left[P+2\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\frac{U}{\xi}+\left(\beta_1-P^0\right)\frac{dU}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_d}+2i\alpha_{10}\Omega\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_d}=0,\\
&\left[\left(\beta_5+i\Omega\alpha_{10}\right)\frac{dW}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_d}+\left[\frac{\eta}{\overline{x}}\left(iP^0+\Omega\alpha_{10}\right)U\right]_{\xi=\xi_d}=0,\\
&i\frac{\Omega^2}{\overline{x}^2}U(\xi_i)-\frac{\eta q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A-\frac{i\eta q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0,\\
&i\frac{\Omega^2}{\overline{x}^2}W(\xi_i)+\frac{i\overline{f}(\xi_i)q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A-\frac{\overline{g}(\xi_i)q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&A=\frac{A_0}{\beta}I_1\left(\eta\xi_i/\overline{x}\right),\quad B=\frac{B_0\hat{\mu}}{\beta\overline{R}}J_1\left(\gamma\xi_i/\overline{x}\right),\\
&\overline{f}(\xi)=\frac{\eta I_0\left(\eta\xi/\overline{x}\right)}{I_1\left(\eta\xi/\overline{x}\right)},\quad \overline{g}(\xi)=\frac{\gamma J_0\left(\gamma\xi/\overline{x}\right)}{J_1\left(\gamma\xi/\overline{x}\right)}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

şeklinde olup

$$
\begin{aligned}
&\gamma=s\overline{R},\qquad q=\frac{\rho}{\rho_0},\qquad \overline{\alpha}^2=\frac{\omega\overline{R}^2}{\nu},\\
&\overline{\alpha}_1=\beta\alpha_1,\quad \overline{\alpha}_3=\beta\alpha_3,\quad \overline{P}^0=\beta P^0,\\
&r_i=\overline{r}\,\xi_i,\qquad r_d=\overline{r}\,\xi_d
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

tanımlamalarıyla boyutsuzlaştırma yapılmıştır. $\overline{\alpha}$ büyüklüğü Womersley parametresi olarak bilinir ve viskoz etkilerle ilişkili olarak pulsatif akım frekansının boyutsuz bir ifadesidir.

$$
\phi(\xi)=\int_0^{\xi}\zeta W(\zeta)\,d\zeta \tag{3.24}
$$

şeklinde bir $\phi(\xi)$ fonksiyonu tanımlanırsa (3.18) denkleminin sağlanabilmesi için

$$U(\xi)=\frac{i\eta}{\xi\overline{x}}\phi(\xi),\quad W(\xi)=\frac{1}{\xi}\frac{d\phi}{d\xi} \tag{3.25}$$

olması gerektiği hemen görülebilir. Bu ifadelerin (3.17) ve (3.21) de yerlerine yazılmasıyla yönetici diferansiyel denklemler

$$\begin{aligned}
&\frac{dP}{d\xi}+\overline{\overline{\beta}}_1\frac{i\eta}{\overline{x}\xi}\frac{d^2\phi}{d\xi^2}+\left(\overline{\overline{\beta}}_2-2\overline{\overline{\beta}}_1\right)\frac{i\eta}{\overline{x}\xi^2}\frac{d\phi}{d\xi}\\
&\quad+\left[2\overline{\overline{\beta}}_1-\overline{\overline{\beta}}_2+\overline{\overline{\beta}}_3+\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_4\eta^2\right)\frac{1}{\overline{x}^2}\xi^2\right]\frac{i\eta}{\overline{x}\xi^3}\phi=0,\\
&-i\eta P\frac{1}{\overline{x}}+\overline{\overline{\beta}}_5\frac{1}{\xi}\frac{d^3\phi}{d\xi^3}+\left(\overline{\overline{\beta}}_6-2\overline{\overline{\beta}}_5\right)\frac{1}{\xi^2}\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\\
&\quad+\left[\frac{1}{\overline{x}^2}\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_8\eta^2\right)\xi^2+2\overline{\overline{\beta}}_5-\overline{\overline{\beta}}_6\right]\frac{1}{\xi^3}\frac{d\phi}{d\xi}+\frac{\eta^2}{\overline{x}^2\xi^2}\overline{\overline{\beta}}_7\phi=0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned}
&\left[P+2\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\frac{1}{\xi^2\overline{x}}i\eta\phi+\left(\beta_1+\beta_5+2i\Omega\alpha_{10}\right)\left(-\frac{1}{\xi^2}\phi+\frac{1}{\xi}\frac{d\phi}{d\xi}\right)\frac{i\eta}{\overline{x}}\right]_{\xi=\xi_i}\\
&\quad-\left[-\frac{\overline{f}(\xi_i)}{\eta}+\frac{2\eta\overline{x}}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\xi_i}\left(\frac{\overline{f}(\xi_i)\xi_i}{\overline{x}}-1\right)\right]A+\left[\frac{2i\eta}{\gamma\xi_i}\left(1-\frac{\overline{g}(\xi_i)\xi_i}{\overline{x}}\right)\right]B=0,\\
&\left[\left(\beta_5+i\Omega\alpha_{10}\right)\left(-\frac{1}{\xi^2}\frac{d\phi}{d\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)\right]_{\xi=\xi_i}+\left[\frac{\eta}{\overline{x}}\left(iP^0+\Omega\alpha_{10}\right)\frac{1}{\xi\overline{x}}i\eta\phi\right]_{\xi=\xi_i}\\
&\quad+\frac{2i\eta^2}{\eta^2+\gamma^2}A+\frac{\gamma^2-\eta^2}{\gamma}B=0,\\
&\left[P+2\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\frac{1}{\xi^2\overline{x}}i\eta\phi+\left(\beta_1-P^0+2i\alpha_{10}\Omega\right)\left(-\frac{1}{\xi^2}\phi+\frac{1}{\xi}\frac{d\phi}{d\xi}\right)\frac{i\eta}{\overline{x}}\right]_{\xi=\xi_d}=0,\\
&\left[\left(\beta_5+i\Omega\alpha_{10}\right)\left(-\frac{1}{\xi^2}\frac{d\phi}{d\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)\right]_{\xi=\xi_d}+\left[\frac{\eta}{\overline{x}}\left(iP^0+\Omega\alpha_{10}\right)\frac{1}{\xi\overline{x}}i\eta\phi\right]_{\xi=\xi_d}=0,\\
&i\frac{\Omega^2}{\overline{x}^2}\left(\frac{1}{\overline{x}\xi}i\eta\phi\right)_{\xi_i}-\frac{\eta q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A-\frac{i\eta q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0,\\
&i\frac{\Omega^2}{\overline{x}^2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi_i}+\frac{i\overline{f}(\xi_i)q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A-\frac{\overline{g}(\xi_i)q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

olarak elde edilir. (3.26-27) nin analitik çözümünü katsayıların değişken olması nedeniyle elde etmek genellikle mümkün değildir. Dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde edebilmek için denklemlerin çözümü sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak aranacaktır [46].

Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü, bilinmeyen fonksiyonun, düğüm noktaları denen bazı ayrık noktalardaki değerlerinin elde edilmesi şeklindedir. Bunun için fonksiyonun bir nokta civarındaki değişik mertebe türevleri, sonlu fark operatörleri yardımıyla bilinmeyen fonksiyonun bazı değerlerine bağlı olarak ifade edilir. Bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine koyulduğunda diferansiyel denklem bir cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda bilinmeyen fonksiyonun çeşitli noktalardaki değerleri elde edilir. Sonlu farklar yöntemini uygulayabilmek için tüp kalınlığını gösteren

$$\bar{h} = r_d - r_i \tag{3.28}$$

büyüklüğü n eşit aralığa bölünür. Böylece, ξ_j tüp kalınlığı üzerindeki düğüm noktalarını göstermek üzere

$$\begin{aligned} &\xi_j = \xi_0 + jh, \quad j = 0,1,...,n \\ &\xi_0 = \xi_i = 1 - \frac{nh}{2}, \quad \xi_n = \xi_d, \ h = \frac{\bar{h}}{n\bar{r}} \end{aligned} \tag{3.29}$$

yazılabilir. Bir ξ_j noktasında fonksiyonun değeri j alt indisi ile gösterildiğinde ve ileri fark operatörleri yardımı ile yazılan

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dP}{d\xi}\right)_j \approx \frac{1}{h}\left(P_{j+1} - P_j\right), \\ &\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_j \approx \frac{1}{h}\left(\phi_{j+1} - \phi_j\right), \\ &\left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)_j \approx \frac{1}{h^2}\left(\phi_{j+2} - 2\phi_{j+1} + \phi_j\right), \\ &\left(\frac{d^3\phi}{d\xi^3}\right)_j \approx \frac{1}{h^3}\left(\phi_{j+3} - 3\phi_{j+2} + 3\phi_{j+1} - \phi_j\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

ifadeleri (3.26) ve (3.27) denklemlerinde kullanıldığında

$$h\left(P_{j+1}-P_j\right)+\overline{\overline{\beta}}_{1j}\frac{i\eta}{\overline{x}\xi_j}\phi_{j+2}+\frac{i\eta}{\overline{x}}z_{1j}\phi_{j+1}+\frac{i\eta}{\overline{x}}\left[z_{2j}+h^2\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_{4j}\eta^2\right)\frac{1}{\overline{x}^2\xi_j}\right]\phi_j=0,$$

$$-i\eta P_j\frac{h^3}{\overline{x}}+\overline{\overline{\beta}}_{5j}\frac{1}{\xi_j}\phi_{j+3}+z_{3j}\phi_{j+2}+\left[z_{4j}+\frac{h^2}{\overline{x}^2}\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_{8j}\eta^2\right)\frac{1}{\xi_j}\right]\phi_{j+1}$$
$$+\left[z_{5j}-\frac{h^2}{\overline{x}^2}\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_{8j}\eta^2\right)\frac{1}{\xi_j}\right]\phi_j=0,$$

$$P_0+\left(\overline{\overline{\beta}}_{10}+\overline{\overline{\beta}}_{50}\right)\frac{i\eta}{\xi_0\overline{x}h}\phi_1+\left[\frac{2\left(\alpha_{10}-\alpha_{30}\right)}{\xi_0}-\left(\overline{\overline{\beta}}_{10}+\overline{\overline{\beta}}_{50}\right)\left(\frac{1}{\xi_0}+\frac{1}{h}\right)\right]\frac{i\eta}{\xi_0}\phi_0$$
$$-\left[-\frac{\overline{f}(\xi_0)}{\eta}+\frac{2\eta\overline{x}}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\xi_0}\left(\frac{\overline{f}(\xi_0)\xi_0}{\overline{x}}-1\right)\right]A+\left[\frac{2i\eta}{\gamma\xi_0}\left(1-\frac{\overline{g}(\xi_0)\xi_0}{\overline{x}}\right)\right]B=0,$$

$$\frac{1}{\xi_0}\overline{\overline{\beta}}_{50}\phi_2-\frac{\overline{\overline{\beta}}_{50}}{\xi_0}\left(\frac{h}{\xi_0}+2\right)\phi_1+\frac{1}{\xi_0}\left[\frac{\overline{\overline{\beta}}_{50}}{\xi_0}h+\overline{\overline{\beta}}_{50}+\frac{\eta^2}{\overline{x}^2}\left(iP_0^0+\Omega\alpha_{100}\right)ih^2\right]\phi_0 \qquad (3.31)$$
$$+\frac{2i\eta^2h^2}{\eta^2+\gamma^2}A+\frac{\left(\gamma^2-\eta^2\right)h^2}{\gamma}B=0,$$

$$P_n+\left(\overline{\overline{\beta}}_{1n}-P_n^0+i\alpha_{10n}\Omega\right)\frac{i\eta}{\xi_nh\overline{x}}\phi_{n+1}+\left[-\left(\overline{\overline{\beta}}_{1n}-P_n^0+i\alpha_{10n}\Omega\right)\frac{1}{\xi_n}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{h}\left(\overline{\overline{\beta}}_{1n}-P_n^0+i\alpha_{10n}\Omega\right)+2\frac{\alpha_{1n}-\alpha_{3n}}{\xi_n}\right]\frac{i\eta}{\xi_n\overline{x}}\phi_n=0,$$

$$\frac{1}{\xi_n}\overline{\overline{\beta}}_{5n}\phi_{n+2}-\overline{\overline{\beta}}_{5n}\frac{1}{\xi_n}\left(\frac{h}{\xi_n}+2\right)\phi_{n+1}+\frac{1}{\xi_n}\left[\frac{h}{\xi_n}\overline{\overline{\beta}}_{5n}+\overline{\overline{\beta}}_{5n}+\frac{\eta^2i}{\overline{x}^2}\left(iP_n^0+\Omega\alpha_{10n}\right)h^2\right]\phi_n=0,$$

$$\frac{\Omega^2}{\overline{x}^3}\frac{\eta}{\xi_0}\phi_0+\frac{\eta q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A+\frac{i\eta q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0,$$

$$i\frac{\Omega^2}{\overline{x}}\frac{1}{\xi_0}\frac{1}{h}\left(\phi_1-\phi_0\right)+\frac{i\overline{f}(\xi_0)q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A-\frac{\overline{g}(\xi_0)q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0$$

fark denklemleri elde edilir. Burada

$$z_{1j}=\left[-2\overline{\overline{\beta}}_{1j}\xi_j+h\left(\overline{\overline{\beta}}_{2j}-2\overline{\overline{\beta}}_{1j}\right)\right]\frac{1}{\xi_j^2},$$

$$z_{2j}=\left[\overline{\overline{\beta}}_{1j}\xi_j^2-h\left(\overline{\overline{\beta}}_{2j}-2\overline{\overline{\beta}}_{1j}\right)\xi_j+h^2\left(2\overline{\overline{\beta}}_{1j}-\overline{\overline{\beta}}_{2j}+\overline{\overline{\beta}}_{3j}\right)\right]\frac{1}{\xi_j^3},$$

$$z_{3j}=-3\overline{\overline{\beta}}_{5j}\frac{1}{\xi_j}+h\left(\overline{\overline{\beta}}_{6j}-2\overline{\overline{\beta}}_{5j}\right)\frac{1}{\xi_j^2},$$

$$
\begin{aligned}
z_{4j} &= 3\overline{\overline{\beta}}_{5j}\frac{1}{\xi_j} - 2h\left(\overline{\overline{\beta}}_{6j} - 2\overline{\overline{\beta}}_{5j}\right)\frac{1}{\xi_j^2} + h^2\left(2\overline{\overline{\beta}}_{5j} - \overline{\overline{\beta}}_{6j}\right)\frac{1}{\xi_j^3},\\
z_{5j} &= -\overline{\overline{\beta}}_{5j}\frac{1}{\xi_j} + h\left(\overline{\overline{\beta}}_{6j} - 2\overline{\overline{\beta}}_{5j}\right)\frac{1}{\xi_j^2} - h^2\left(2\overline{\overline{\beta}}_{5j} - \overline{\overline{\beta}}_{6j}\right)\frac{1}{\xi_j^3} + \frac{\eta^2 h^3}{\overline{x}^2\xi_j^2}\overline{\overline{\beta}}_{7j},\\
\beta_{ij} &= \beta_i(x_j),\ \ \overline{\overline{\beta}}_{ij} = \overline{\overline{\beta}}_i(x_j),\\
\alpha_{ij} &= \alpha_i(x_j),\ \ P_j^0 = P^0(x_j)\\
x_j &= \frac{\left[\lambda\left(\overline{r}^2\xi_j^2 - r_i^2\right) + R_i^2\right]^{1/2}}{\overline{r}\xi_j}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemler daha önce tanımlanan

$$
\alpha_{10} = \frac{\mu F_1}{\sqrt{\beta\rho}\overline{R}} \quad \text{ve} \quad \Omega = \frac{\omega\overline{R}}{c_0}
$$

büyüklükleri arasındaki

$$
\Omega\alpha_{10} = \gamma_2 F_1(\xi), \qquad \gamma_2 = \frac{\omega\mu}{\beta}
\tag{3.33}
$$

ilişkiyi göz önünde tutarak ve $\overline{\overline{\beta}}_i$ katsayılarını yeniden

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{\beta}}_1 &= \beta_1 + i\gamma_2 F_1,\\
\overline{\overline{\beta}}_2 &= \beta_2 + 2i\gamma_2\xi\frac{dF_1}{d\xi} + i\gamma_2 F_1,\\
\overline{\overline{\beta}}_3 &= \beta_3 - i\gamma_2 F_1,\\
\overline{\overline{\beta}}_4 &= \beta_4 + i\gamma_2 F_1,\\
\overline{\overline{\beta}}_5 &= \beta_5 + i\gamma_2 F_1,\\
\overline{\overline{\beta}}_6 &= \beta_6 + i\gamma_2\xi\frac{dF_1}{d\xi} + i\gamma_2 F_1,\\
\overline{\overline{\beta}}_7 &= \beta_7 + i\gamma_2\xi\frac{dF_1}{d\xi},\\
\overline{\overline{\beta}}_8 &= \beta_8 + i\gamma_2 F_1
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

şeklinde tanımlayarak

$$h\left(P_{j+1}-P_j\right)+\overline{\overline{\beta}}_{1j}\frac{i\eta}{\overline{x}\xi_j}\phi_{j+2}+\frac{i\eta}{\overline{x}}z_{1j}\phi_{j+1}+\frac{i\eta}{\overline{x}}\left[z_{2j}+h^2\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_{4j}\eta^2\right)\frac{1}{\overline{x}^2\xi_j}\right]\phi_j=0,$$

$$-i\eta P_j\frac{h^3}{\overline{x}}+\overline{\overline{\beta}}_{5j}\frac{1}{\xi_j}\phi_{j+3}+z_{3j}\phi_{j+2}+\left[z_{4j}+\frac{h^2}{\overline{x}^2}\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_{8j}\eta^2\right)\frac{1}{\xi_j}\right]\phi_{j+1}$$
$$+\left[z_{5j}-\frac{h^2}{\overline{x}^2}\left(\Omega^2-\overline{\overline{\beta}}_{8j}\eta^2\right)\frac{1}{\xi_j}\right]\phi_j=0,$$

$$P_0+\left(\overline{\overline{\beta}}_{10}+\overline{\overline{\beta}}_{50}\right)\frac{i\eta}{\xi_0\overline{x}h}\phi_1+\left[\frac{2\left(\alpha_{10}-\alpha_{30}\right)}{\xi_0}-\left(\overline{\overline{\beta}}_{10}+\overline{\overline{\beta}}_{50}\right)\left(\frac{1}{\xi_0}+\frac{1}{h}\right)\right]\frac{i\eta}{\xi_0}\phi_0$$
$$-\left[-\frac{\overline{f}(\xi_0)}{\eta}+\frac{2\eta\overline{x}}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\xi_0}\left(\frac{\overline{f}(\xi_0)\xi_0}{\overline{x}}-1\right)\right]A+\left[\frac{2i\eta}{\gamma\xi_0}\left(1-\frac{\overline{g}(\xi_0)\xi_0}{\overline{x}}\right)\right]B=0,$$

$$\frac{1}{\xi_0}\overline{\overline{\beta}}_{50}\phi_2-\frac{\overline{\overline{\beta}}_{50}}{\xi_0}\left(\frac{h}{\xi_0}+2\right)\phi_1+\frac{1}{\xi_0}\left[\frac{\overline{\overline{\beta}}_{50}}{\xi_0}h+\overline{\overline{\beta}}_{50}+\frac{\eta^2}{\overline{x}^2}\left(iP_0^0+\gamma_2F_1(x_0)\right)ih^2\right]\phi_0$$
$$+\frac{2i\eta^2h^2}{\eta^2+\gamma^2}A+\frac{\left(\gamma^2-\eta^2\right)h^2}{\gamma}B=0, \qquad (3.35)$$

$$P_n+\left(\overline{\overline{\beta}}_{1n}-P_n^0+i\gamma_2F_1(x_n)\right)\frac{i\eta}{\xi_nh\overline{x}}\phi_{n+1}+\left[-\left(\overline{\overline{\beta}}_{1n}-P_n^0+i\gamma_2F_1(x_n)\right)\left(\frac{1}{\xi_n}+\frac{1}{h}\right)\right.$$
$$\left.+2\frac{\alpha_{1n}-\alpha_{3n}}{\xi_n}\right]\frac{i\eta}{\xi_n\overline{x}}\phi_n=0,$$

$$\frac{1}{\xi_n}\overline{\overline{\beta}}_{5n}\phi_{n+2}-\overline{\overline{\beta}}_{5n}\frac{1}{\xi_n}\left(\frac{h}{\xi_n}+2\right)\phi_{n+1}$$
$$+\frac{1}{\xi_n}\left[\frac{h}{\xi_n}\overline{\overline{\beta}}_{5n}+\overline{\overline{\beta}}_{5n}+\frac{\eta^2i}{\overline{x}^2}\left(iP_n^0+\gamma_2F_1(x_n)\right)h^2\right]\phi_n=0,$$

$$\frac{\Omega^2}{\overline{x}^3}\frac{\eta}{\xi_0}\phi_0+\frac{\eta q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A+\frac{i\eta q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0,$$

$$i\frac{\Omega^2}{\overline{x}}\frac{1}{\xi_0}\frac{1}{h}\left(\phi_1-\phi_0\right)+\frac{i\overline{f}(\xi_0)q\overline{\alpha}^2}{\left(\eta^2+\gamma^2\right)\overline{x}}A-\frac{\overline{g}(\xi_0)q\overline{\alpha}^2}{\gamma\overline{x}}B=0.$$

olarak yazılabilir. Bu denklemlerde yer alan ve ileri bölümlerdeki sayısal incelemede önem kazanan $\overline{\alpha}$ ve γ_2 parametreleri arasında

$$\gamma_2=\overline{\alpha}^2\gamma_3 \qquad (3.36)$$

ilişkisi vardır. Burada

$$\gamma_3 = \frac{\nu\mu}{\overline{R}^2\beta} \tag{3.37}$$

olarak tanımlanmıştır.

(3.35) homojen denklem sisteminin P_j, ϕ_j $(j = 0,1,...,n)$, A ve B bilinmeyenlerine göre sıfır olmayan çözüme sahip olabilmesi için, katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu gereklilik dalga hareketine ait dispersiyon bağıntısını verecektir. Genel hale ait dispersiyon bağıntısından önce aşağıda bazı özel durumlar incelenecektir.

3.2.1. Uzun Dalga Yaklaşımı Ve Viskoz Olmayan Akışkanla Dolu İnce Tüp Durumu:

Büyük atardamarlarda bile, dalga boyu atardamarın ortalama yarıçapından çok daha büyüktür. Böylece k dalga sayısı çok küçük ve $\eta \ll 1$ olacaktır. Bu limit durumda ve ince tüp için (3.22) ile verilen $\overline{f}$ fonksiyonunun 2'ye yaklaştığı gösterilebilir. Ayrıca $\gamma = s\overline{R}$ ve $\overline{\alpha}^2 = \omega\overline{R}^2/\nu$ olduğu hatırlanarak ve (3.11) de

$$s^2 = -k^2 - \frac{i\omega}{\nu}\frac{\left[(1+i\omega\tau)(1-\varphi)+f\right]}{i\omega\tau(1-\varphi)+1}, \quad \left(\nu = \frac{\hat{\mu}}{\rho_0}\right)$$

şeklinde verilen ifadeden yararlanarak

$$\gamma^2 \approx \overline{\alpha}^2\overline{m}, \quad \overline{m} = m_1 + im_2 \tag{3.38}$$

$$m_1 = \frac{1}{\overline{x}}\frac{\tau\omega(\varphi-1)(f-\varphi)}{\omega^2\tau^2(1-\varphi)^2+1}, \qquad m_2 = \frac{1}{\overline{x}}\frac{\varphi - f - \tau^2\omega^2(\varphi-1)^2 - 1}{\omega^2\tau^2(1-\varphi)^2+1}$$

olarak yazılabilir.

İnce tüp limit durumu için tüp kalınlığının tek aralıktan oluştuğu kabul edildiğinde (n=1) olmalıdır. Buna göre

$$h = \frac{\overline{h}}{\overline{r}} \ll 1 \quad \text{ve} \quad \xi_0 = 1 - \frac{h}{2} \approx 1 \tag{3.39}$$

olacaktır.

Düşük viskozite limit durumu için $\gamma \to \infty$ olacağından $\overline{g}(\xi) \to \infty$ olacaktır. Bu varsayımlar altında elastik ve viskoelastik tüp durumları ayrı ayrı incelenecektir.

Yukarıda verilmiş olan kabuller altında (3.35) denklem sistemi ($j = 0$ alınarak) $P_0, P_1, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, A$ ve B bilinmeyenleri için sekiz adet cebirsel bağıntı verir. Sıfır olmayan çözümü elde etmek için bu denklem sisteminin katsayılarının determinantı sıfıra eşitlendiğinde Ω/η kompleks faz hızının kuvvetleri cinsinden dispersiyon bağıntısı

$$A_1\left(\frac{\Omega}{\eta}\right)^4 + A_2\left(\frac{\Omega}{\eta}\right)^2 + A_3 = 0 \tag{3.40}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki A_1, A_2 ve A_3 katsayıları β_{ij}, α_{ij}, q, $\overline{x}$, P_j^0, $\overline{m}$, γ_2 ve h büyüklüklerine bağlıdır.

i) Elastik tüp durumu: Viskoelastik etkilerin olmadığı durumu elde etmek için $\gamma_2 = 0$ almak yeterli olacaktır.

Elde edilen denklemlerin daha önceki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmasını yapabilmek için başlangıç şekildeğişimi sıfır olarak alındığında

$$\lambda = 1, \quad r_i = R_i, \quad r_d = R_d, \quad \overline{x} = 1 \tag{3.41}$$

olacağından (3.32) den

$$x_0 = x_1 = 1 \tag{3.42}$$

bulunur. Ayrıca $x_i = x_0$, $x_d = x_n$ olarak tanımlandığından

$$x_i = x_d = 1, \tag{3.43}$$

olacaktır. Bu değerler kullanılarak (2.128-129), (2.133) ve (2.138) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&\beta_{10} = \beta_{11} = 1, \\
&\beta_{20} = 1 + 8\gamma_1 \cos^2\hat{\beta} \sin^2\hat{\beta}, \\
&\beta_{30} = -1 - 8\gamma_1 \cos^2\hat{\beta} \cos 2\hat{\beta}, \\
&\beta_{40} = 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_{50} = \beta_{51} = 1, \\
&\beta_{60} = 1, \\
&\beta_{70} = 8\gamma_1 \cos^2 \hat{\beta} \sin^2 \hat{\beta}, \\
&\beta_{80} = 1 + 8\gamma_1 \sin^4 \hat{\beta}, \\
&\alpha_{10} = \alpha_{11} = \alpha, \\
&\alpha_{30} = \alpha_{31} = \alpha, \\
&P_0^0 = P_1^0 = -1
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

olarak elde edilir. Burada $\gamma_1 = \dfrac{k_1}{\beta}$ şeklinde tanımlanmış boyutsuz büyüklüktür. Böylece (3.41-44) sonuçlarını kullanarak, dispersiyon bağıntısı (3.40)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -2\bar{m}qh - 6\bar{m}qh^2, \\
a_2 &= 8\bar{m}qh\left(1 + 2\gamma_1 \sin^4 \hat{\beta}\right) \\
&\quad + qh^2\left(20\bar{m} + 16\gamma_1\bar{m} - 4iq - 3i\gamma_1 q - 4\gamma_1(6\bar{m} + iq)\cos 2\hat{\beta} + \gamma_1(8\bar{m} - iq)\cos 4\hat{\beta}\right), \\
a_3 &= 4iq^2h^2(3 + 5\gamma_1 + 3\gamma_1 \cos 4\hat{\beta})
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

olmak üzere

$$
a_1\left(\frac{\Omega}{\eta}\right)^4 + a_2\left(\frac{\Omega}{\eta}\right)^2 + a_3 = 0 \tag{3.46}
$$

denklemine indirgenir. h çok küçük olduğundan kökler yaklaşık olarak

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = -\frac{1}{2\bar{m}(1 + 2\gamma_1 \sin^4 \hat{\beta})}\Big[&-8\bar{m} + 4h\bar{m} + iqh + 4\gamma_1 h \cos^2 \beta\left(4\bar{m} + 3\gamma_1\bar{m} + 2qi\right. \\
&\left. -4\gamma_1\bar{m}\cos 2\hat{\beta} + \gamma_1\bar{m}\cos 4\hat{\beta}\right)\sin^2 \hat{\beta} + 8\gamma_1(h-4)\bar{m}\sin^4 \hat{\beta} \\
&+ 16i\gamma_1^2 hq \cos^4 \hat{\beta}\sin^4 \hat{\beta} - 32\gamma_1^2\bar{m}\sin^8 \hat{\beta}\Big] + O(h^2)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

ve

$$
\left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = -\frac{iqh(3 + 5\gamma_1 + 3\gamma_1 \cos 4\hat{\beta})}{2\bar{m}(1 + 2\gamma_1 \sin^4 \hat{\beta})} + O(h^2) \tag{3.48}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\dfrac{c}{c_0} = \dfrac{\Omega}{\eta}$ dır.

Lifli yapı göz ardı edildiğinde $\gamma_1 = 0$ olacaktır. Bu durumda

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4 + O(h) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = -\frac{3iqh}{2\bar{m}} + O(h^2) \tag{3.49}$$

elde edilir. Bu sonuçlar gösteriyor ki akışkan içerisindeki parçacıklarla ilişkili olan $\bar{m}$ parametresi sadece ikincil dalganın hızını ve taşıma katsayısını etkilemektedir. Akışkanın parçacık içermediği düşünüldüğünde ise $\tau = \varphi = f = m_1 = 0$ ve $m_2 = -1$ olacaktır. Bu durumda dalga hızları

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4 + O(h) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = \frac{3qh}{2} + O(h^2) \tag{3.50}$$

olur. Bu sonuçlar [46] da verilen sonuçlarla uyumludur. Atabek ve Lew [16] tarafından önerildiği gibi boyutsuz kompleks faz hızı

$$\frac{c}{c_0} = X + iY \tag{3.51}$$

olarak gösterildiğinde, dalga hızları ve taşıma katsayıları

$$v = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad \chi = \exp[-2\pi \frac{Y}{X}] \tag{3.52}$$

şeklinde elde edilir. Bu tanımlara göre

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 4, \qquad \chi_1 = 1, \\ v_2^2 &= \frac{3}{2} qh \ , \ \chi_2 = 1 \end{aligned} \tag{3.53}$$

olacaktır. Gerçek fiziksel büyüklükleri kullanarak ve E tüp malzemesinin Young modülünü göstermek üzere $\beta = E/3$ olduğu göz önüne alınarak

$$v_1 = \frac{\bar{v}_1}{c_0} \ , \quad v_2 = \frac{\bar{v}_2}{c_0} \tag{3.54}$$

olmak üzere dalga hızları

$$\overline{v}_1^2 = \frac{4E}{3\rho} \quad , \quad \overline{v}_2^2 = \frac{E\overline{h}}{2\rho_0 \overline{r}} \tag{3.55}$$

şeklinde bulunur. Bu dalga hızları sırasıyla Lamb modu ve Moens-Korteweg hızına karşı gelir.

ii) Viskoelastik tüp durumu: Tüp malzemesi viskoelastik olarak ele alındığında $\gamma_2 \neq 0$ olacaktır.

Yine elde edilen denklemlerin daha önceki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmasını yapabilmek için başlangıç şekildeğişimi sıfır olarak alındığında ve malzemenin lif içermediği varsayıldığında $(\gamma_1 = 0)$, (3.40) tan yararlanarak dispersiyon bağıntısı

$$a_1\left(\frac{\Omega}{\eta}\right)^4 + a_2\left(\frac{\Omega}{\eta}\right)^2 + a_3 = 0$$

için katsayılar

$$\begin{aligned} a_1 &= h\left[2(\gamma_2 - i)^2 \overline{m} q\right] + h^2\left[6(\gamma_2 - i)^2 \overline{m} q\right], \\ a_2 &= h\left[-8i(\gamma_2 - i)^3 \overline{m} q\right] + h^2\left[-4i(\gamma_2 - i)^3 (5\overline{m} - iq) q\right], \\ a_3 &= \left[12i(\gamma_2 - i)^4 q^2\right] h^2 \end{aligned} \tag{3.56}$$

olmaktadır. h çok küçük olduğundan kökler yaklaşık olarak

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4(1 + i\gamma_2) + O(h) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = \frac{3qh(\gamma_2 - i)}{2\overline{m}} + O(h^2) \tag{3.57}$$

şeklinde elde edilir. Akışkanın parçacık içermediği durumda

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4(1 + i\gamma_2) + O(h) \quad \text{ve} \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = \frac{3qh(1 + i\gamma_2)}{2} + O(h^2) \tag{3.58}$$

ifadeleri bulunur. Gerçek fiziksel büyüklükleri kullanarak ise dalga hızları

$$c_1^2 = \frac{4E}{3\rho}\left(1 + \frac{3\omega\mu i}{E}\right) + O(h) \quad \text{ve} \quad c_2^2 = \frac{E\overline{h}}{2\rho_0 \overline{r}}\left(1 + \frac{3\omega\mu i}{E}\right) + O(h^2) \tag{3.59}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu sonuçlar [40] ta verilenlerle uyumludur. Bu çalışmanın özel hallerde daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarını vermesi teorinin doğruluk mertebesi hakkında fikir elde etmek bakımından önemlidir.

3.2.2. Uzun Dalga Yaklaşımı Ve Viskoz Akışkanla Dolu Kalın Tüp Durumu:

Genel duruma ait dispersiyon bağıntısını analitik olarak incelemenin mümkün olmadığı daha önce belirtilmişti. Bu nedenle uzun dalga yaklaşımında denklemler sayısal olarak (sonlu farklar yöntemiyle) incelenmiş ve sonuçlar Ekler bölümünde Şekil A.1-A.36 arasında verilmiştir.

Sonlu farklar yöntemini uygularken tüp kalınlığına ait alt aralık sayısı $n=4$ olarak alınmıştır. Başlangıç şekildeğişiminin de var olduğu düşünülmüş ve ayrıca

$$\begin{gathered} R_i = 0.31\text{cm}, \quad R_d = 0.38\text{cm}, \quad r_i = 0.32\text{cm}, \quad \alpha = 1.948, \quad \eta = 0.01 \\ k_2 = 0.7112, \quad \varphi = 0.01, \quad \omega\tau = 1, \quad q = 1 \end{gathered} \tag{3.60}$$

şeklindeki sayısal değerler kullanılmıştır. Damar duvarı dokusunun yoğunluğu ile kanın yoğunluğu birbirine çok yakın olduğundan $q \approx 1$ alınmıştır. Bu kabuller altında (3.35) denklem sistemi ($j = 0,1,2,3$ alınarak) P_j $(j = 0,..,4)$, ϕ_j $(j = 0,..,6)$, A ve B bilinmeyenleri için 14 adet cebirsel bağıntı vermektedir. Sıfır olmayan çözümleri elde etmek için bu denklem sisteminin katsayılarının determinantı sıfıra eşitlenmiş, Ω/η kompleks faz hızının kuvvetleri cinsinden dispersiyon bağıntısı bulunmuştur. Atabek ve Lew [16] tarafından önerilen ve (3.52) ile verilmiş tanıma göre dalga hızları ve taşıma katsayıları elde edilmiştir.

Dalga yayılım hızları ve taşıma katsayıları, liflerin etkinliğini gösteren $\gamma_1 = k_1/\beta$ büyüklüğü, viskoelastisiteyle ilgili γ_3 büyüklüğü, germe (λ), parçacık konsantrasyonu (f), Womersley parametresi $(\bar{\alpha})$ ve liflerin doğrultuları arasındaki açının $(\hat{\beta})$ farklı değerlerine göre hesaplanmış ve grafikler ile gösterilmiştir.

Şekil A.1-A.4'te $\gamma_3 = 0.02$, $f = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ alınarak λ ve γ_1'in farklı değerleri için dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimleri verilmiştir.

Şekil A.1, liflerle ilgili parametre olan γ_1 ve λ eksenel germesi arttıkça v_1 dalga hızının arttığını göstermektedir. Womersley parametresi $\bar{\alpha}$'ya göre değişime

bakıldığında ise, v_1'in $\bar{\alpha}$'nın küçük değerlerinde değişmediği, ancak büyük değerlerinde $\bar{\alpha}$ ile birlikte arttığı görülmektedir.

Şekil A.2, v_2 dalga hızının $\bar{\alpha} < 3$ için λ arttıkça azaldığını, $\bar{\alpha} > 3$ için arttığını göstermektedir. Şekilden ayrıca γ_1 parametresinin ve $\bar{\alpha}$'nın artımı ile v_2 hızının arttığı görülmektedir. Ayrıca $\bar{\alpha} < 3$ için tüm germe değerlerinde $\bar{\alpha}$ ile artımın hızlı olduğu, küçük germe değerlerinde $\bar{\alpha} > 3$ için $\bar{\alpha}$ ile artımın küçük kaldığı anlaşılmaktadır. Bu durum da, v_2 dalga hızına küçük germe değerlerinde viskoelastisitenin etkisinin daha az olmasından kaynaklanmaktadır. (Bkz. Şekil A.6)

Şekil A.3, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in değişimini göstermektedir. Buna göre $\bar{\alpha} < 3$ için χ_1 $\bar{\alpha}$ arttıkça azalmakta, $\bar{\alpha} > 3$ için ise γ_1 parametresinin küçük değerlerinde azalmakta, büyük değerlerinde artmaktadır. Bu sonuç liflerin etkinliğinin artmasının Şekil A.7'ye ilişkin açıklamada anlatılmış olan viskoelastisitenin yarattığı sönüm etkisini azalttığını göstermektedir. Ayrıca şekilden $\bar{\alpha} > 3$ için γ_1 ve λ arttıkça χ_1'in de arttığı görülmektedir.

Şekil A.4, ikincil dalganın taşıma katsayısı χ_2'nin λ arttıkça azaldığını göstermektedir. Bundan başka χ_2'nin γ_1 arttıkça $\lambda = 1.3$ için azaldığını, $\lambda = 1.4$ için ise $\bar{\alpha} < 3$ için azaldığını, $\bar{\alpha} > 3$ için arttığını göstermektedir. Ayrıca, χ_2 $\bar{\alpha}$ arttıkça $\lambda = 1.3$ değerinde $\bar{\alpha} < 4$ için artmakta, $\bar{\alpha} > 4$ için azalmaktadır ve $\lambda = 1.4$ değerinde $\bar{\alpha} < 3$ için artmakta, $\bar{\alpha} > 3$ için azalmaktadır. χ_2 katsayısının Womersley parametresi ile birlikte sıfıra gittiği de şekilden görülmektedir. $\bar{\alpha}$'nın yüksek değerlerinde χ_2'nin azalması Şekil A.8'in açıklamasında anlatılmış olan, γ_3'ün χ_2 için bir sönüm faktörü olmasından dolayıdır.

Şekil A.5-A.8'de $\gamma_1 = 0.5$, $f = 0.5$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ alınarak λ ve γ_3'ün farklı değerleri için dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimleri verilmiştir.

Şekil A.5'ten viskoelastisiteyi gösteren γ_3 parametresi ile λ ve $\bar{\alpha}$ arttıkça v_1 dalga hızının arttığı görülmektedir. Dalga hızı tüp malzemesinin viskoelastik karakterinden $\bar{\alpha}$'nın büyük değerlerinde büyük ölçüde etkilenirken, küçük değerlerinde etkilenmemektedir.

Şekil A.6'da γ_3 ve $\bar{\alpha}$ arttıkça v_2 dalga hızının da arttığı görülmektedir. $\bar{\alpha}$'nın küçük değerlerinde $\bar{\alpha}$ ile hızlı bir artım olduğu, $\bar{\alpha} > 3$ için ise küçük germe değerinde $\bar{\alpha}$ ile artımın küçük olduğu görülmektedir. Ayrıca elastik durum ($\gamma_3 = 0$) dışında, v_2 hızı λ ile $\bar{\alpha} > 4$ için artmaktadır. Bir önceki şekilde olduğu gibi tüp malzemesinin viskoelastik karakteri yüksek frekanslarda ($\bar{\alpha}$'nın büyük değerleri) dalga hızını oldukça dispersif yapmaktadır. Düşük frekanslarda ise viskoelastisite dalga hızını çok fazla etkilememektedir. Elastik duruma karşı gelen dalga hızının ise Womersley parametresinin yüksek değerlerinden etkilenmediği görülmektedir. Ayrıca germenin artmasının viskoelastisitenin etkisini artırdığı gözlemlenmektedir.

Şekil A.7'ye göre, χ_1 $\bar{\alpha} < 3$ için $\bar{\alpha}$ arttıkça azalmakta, $\bar{\alpha} > 3$ için ise elastik durumda artmakta, viskoelastik durumda viskoelastisitenin büyüklüğüne bağlı olarak azalmaktadır. $\bar{\alpha} > 3$ için χ_1 taşıma katsayısının γ_3 arttıkça hızlı bir şekilde azaldığı, viskoelastisitenin χ_1 için bir sönüm faktörü olduğu anlaşılmaktadır. Görüldüğü gibi düşük frekanslarda viskoelastisitenin etkisi önemsiz kalmaktadır. Ayrıca $\bar{\alpha} > 3$ için elastik durum dışında, χ_1'in λ ile arttığı görülmektedir.

Şekil A.8'de ikincil dalganın taşıma katsayısı χ_2'nin elastik durumda $\bar{\alpha}$ arttıkça arttığı, viskoelastik durumda ise belli bir $\bar{\alpha}$ değerinden sonra hızlı bir şekilde azaldığı ve γ_3 arttıkça bu azalmanın daha büyüdüğü gösterilmektedir. Buradan viskoelastisitenin χ_2 için bir sönüm faktörü olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca λ arttıkça χ_2 azalmakta ve Womersley parametresi sıfıra giderken χ_2 taşıma katsayısı da sıfıra gitmektedir.

Bu sonuçlar, Demiray ve Ercengiz [40] , Cox [21] ile Chow ve Apter'in [20] çalışmalarındaki sonuçlarla uyumludur.

Şekil A.9-A.12'de $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ alınarak dalga hızları ve taşıma katsayılarının $\hat{\beta}$ açısına göre değişimleri λ ve γ_1'in farklı değerlerine göre verilmiştir.

Şekil A.9'dan, liflerin yatay doğrultuyla (tüp eksenine dik olan doğrultu) yaptığı açının $0^\circ - 20^\circ$ arasındaki artışının v_1 dalga hızına katkısı olmadığı, fakat $20^\circ - 90^\circ$ arasındaki artışının dalga hızını artırdığı ve 90°'de maksimum dalga hızına ulaşıldığı

görülmektedir. $\hat{\beta} = 90^{\circ}$ açısı, lif doğrultularının tüpün ekseninin doğrultusu ile aynı olduğu duruma karşı gelen açıdır. Bu da gösteriyor ki, tüpün ekseni doğrultusunda lifler olması halinde, v_1 dalga hızı maksimuma ulaşmaktadır. Buna ek olarak, $\hat{\beta}$ açısı $20^{\circ} - 90^{\circ}$ arasında arttıkça, yüksek germe değerindeki v_1 hızı daha fazla artış göstermektedir ve bu artış lif parametresi γ_1'in değeri yüksek olduğunda daha büyük olmaktadır. $\hat{\beta} = 0^{\circ}$ olduğunda ise hız minumum olmaktadır. Bunların dışında, 20° den büyük $\hat{\beta}$ değerlerinde, γ_1 ve λ arttıkça v_1 dalga hızı artmaktadır.

Şekil A.10, v_2 dalga hızının $\hat{\beta}$ açısının yaklaşık olarak $0^{\circ} - 55^{\circ}$ arasında olduğu bölgede azaldığını, $55^{\circ} - 90^{\circ}$ arası bölgede arttığını, 90°'de yerel bir maksimuma sahip olduğunu göstermektedir. $\hat{\beta}$'nın $0^{\circ} - 55^{\circ}$ arasında olduğu bölgede düşük germedeki azalma daha büyük olmakta, $55^{\circ} - 90^{\circ}$ arası olduğu bölgede ise yüksek germedeki artma büyük olmaktadır. $\hat{\beta}$'nın $0^{\circ} - 55^{\circ}$ arasında olduğu bölgede, γ_1 lif parametresinin büyük değerlerindeki azalma büyük olup, $55^{\circ} - 90^{\circ}$ arası olduğu bölgede ise v_2'nin artımına γ_1'in bir etkisi olmamaktadır. Ayrıca şekilden v_2 dalga hızının maksimum olduğu durumların, liflerin yatay doğrultu ile 0°'lik (ya da 180°) açı yaptığı durumlar olduğu anlaşılmaktadır. Bunların dışında, tüm $\hat{\beta}$ değerlerinde γ_1 arttıkça v_2 dalga hızı artmaktadır. $\hat{\beta}$'nın $0^{\circ} - 55^{\circ}$ arasında olduğu bölgede düşük germedeki v_2 dalga hızı büyük olurken, $55^{\circ} - 90^{\circ}$ arasındaki bölgede yüksek germedeki büyüktür.

Şekil A.11, χ_1 taşıma katsayısının $\hat{\beta}$'nın $0^{\circ} - 30^{\circ}$ arasında olduğu bölgede azaldığını, $30^{\circ} - 90^{\circ}$ arası olduğu bölgede ise arttığını ve $\hat{\beta} = 90^{\circ}$'de maksimuma ulaştığını göstermektedir. $0^{\circ} - 30^{\circ}$ arası bölgedeki azalma düşük germe değerlerinde daha hızlıdır, $30^{\circ} - 90^{\circ}$ arası bölgede ise düşük germe değerlerindeki artma daha hızlıdır. Lif parametresinin yüksek değerlerinde $0^{\circ} - 30^{\circ}$ arası bölgede azalma daha hızlı olup, $30^{\circ} - 90^{\circ}$ arası bölgede ise artma daha hızlıdır. Ayrıca görüldüğü gibi, χ_1 taşıma katsayısının da liflerin tüp ekseni doğrultusunda olması durumunda maksimuma sahip olduğu sonucuna varılmaktadır. Bunların dışında $\hat{\beta}$ nın $35^{\circ} - 90^{\circ}$ arasında olduğu bölgede, γ_1 arttıkça χ_1 taşıma katsayısı artmakta, $50^{\circ} - 90^{\circ}$ arası

olduğu bölgede ise $\gamma_1 = 1.5$ için germe arttıkça χ_1 taşıma katsayısı azalmaktadır. Tüm $\hat{\beta}$ değerlerinde $\gamma_1 = 0.5$ için ise germe arttıkça χ_1 artmaktadır.

Şekil A.12'ye göre, χ_2 taşıma katsayısı, düşük germe değerlerinde $0^\circ - 30^\circ$ arası bölgede artmakta, $30^\circ - 90^\circ$ arası bölgede ise azalmakta, 90°'de minumuma ulaşmaktadır. Yüksek germe değerlerinde ise χ_2, $0^\circ - 60^\circ$ arasında azalmakta, $60^\circ - 90^\circ$ arasında ise fazla bir değişim göstermemektedir. Düşük germede $30^\circ - 90^\circ$, yüksek germede ise $30^\circ - 60^\circ$ arası bölgedeki azalma lif parametresinin daha büyük olduğu durumda daha hızlıdır. Şekilden lif doğrultularının tüp ekseni doğrultusu olduğu durumda χ_2 taşıma katsayısının en küçük değerini aldığı görülmektedir. Bunların dışında, $\lambda = 1.4$ için $\hat{\beta}$'nın $0^\circ - 70^\circ$ arasında olduğu bölgede, $\lambda = 1.3$ için ise $\hat{\beta}$'nın $10^\circ - 55^\circ$ arasında olduğu bölgede, γ_1 arttıkça χ_2 artmaktadır. $\hat{\beta}$'nın tüm değerlerinde germe arttıkça χ_2 azalmaktadır.

Şekil A.13-A.16'da, $\bar{\alpha} = 5$, $\gamma_1 = 0.5$, $f = 0.3$, $\omega\tau = 1$ alınarak dalga hızları ve taşıma katsayılarının $\hat{\beta}$ açısına göre değişimleri λ ve γ_3'ün farklı değerlerine göre verilmiştir.

Burada Şekil A.9-A.12'ye göre farklı olan sonuçlardan söz edilecektir.

Şekil A.13, $\hat{\beta}$'nın herhangi bir bölgede değişmesi durumunda, v_1 dalga hızındaki artış hızına viskoelastisitenin etkisi olmadığını göstermektedir. Ayrıca $\hat{\beta}$'nın $0^\circ - 40^\circ$ arasında olması durumunda yüksek viskoelastisite değerlerinde dalga hızı daha büyüktür.

Şekil A.14, viskoelastisitenin, v_2 dalga hızının $\hat{\beta}$ açısının değişimine göre artma ve azalma hızlarına etkisi olmadığını göstermektedir. Ayrıca tüm $\hat{\beta}$ değerlerinde viskoelastisite arttıkça v_2 dalga hızı artmaktadır.

Şekil A.15, $\hat{\beta}$ ' nın $30^\circ - 90^\circ$ arasında olduğu bölgede, χ_1' in artışının yüksek viskoelastisite durumunda daha fazla olduğunu göstermektedir. Ayrıca tüm $\hat{\beta}$ değerlerinde viskoelastisite arttıkça χ_1 taşıma katsayısı azalmaktadır.

Şekil A.16, viskoelastisitenin χ_2 taşıma katsayısının $\hat{\beta}$'nın değişimine göre artma ve azalma hızlarına etkisi olmadığını göstermektedir. Ayrıca tüm $\hat{\beta}$ değerlerinde viskoelastisite arttıkça χ_2 taşıma katsayısı azalmaktadır.

Bu sonuçlar damarda dalga yayılımının incelenmesinde, kolajen liflerin doğrultularının oldukça etkili olduğunu göstermektedir.

Şekil A.17-A.20'de $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ alınmış olup dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimleri λ ve f'nin farklı değerleri için verilmiştir.

Burada önceki şekillerde anlatılanlara ek olarak f parçacık konsantrasyonunun etkisinden söz edilecektir.

Şekil A.17'de $\bar{\alpha} < 2$ için v_1 dalga hızının f arttıkça azaldığı, $\bar{\alpha} > 2$ için ise f'nin artımının dalga hızını fazla değiştirmediği gösterilmektedir. Bu sonuç parçacık konsantrasyonunun birincil dalga hızına etkisinin ancak Womersley parametresinin küçük değerlerinde var olduğunu göstermektedir.

Şekil A.18, v_2 dalga hızının f arttıkça azaldığını göstermektedir. Bu sonuç parçacık konsantrasyonunun ikincil dalga hızına etkisini açıkça ortaya koymaktadır.

Şekil A.19'da f arttıkça χ_1'in azaldığı gösterilmiştir. $\bar{\alpha}$'nın küçük değerlerinde parçacık konsantrasyonunun χ_1'e etkisi büyük olmaktadır.

Şekil A.20, f arttıkça χ_2 taşıma katsayısının azaldığını göstermektedir.

Bu sonuçlar parçacıklı akışkan yaklaşımının önemini vurgulamaktadır. Parçacık konsantrasyonunun dalga hızı ve taşıma katsayılarına etkisi Nag ve Jana [45] ile Ercengiz'in [46] çalışmalarında elde ettikleri sonuçlar ile uyumludur.

Şekil A.21-A.24'te $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.5,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimleri verilmiştir.

Şekil A.25-A.28'de $\lambda = 1.4,\ \gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimlerinin ince ve kalın tüp yaklaşımı için karşılaştırması yapılmıştır.

Şekil A.25'ten v_1 dalga hızının tüm lif parametresi ve tüm $\bar{\alpha}$ değerleri için ince tüp durumunda kalın tüpe göre daha küçük olduğu ve aradaki farkın $\bar{\alpha}$'nın küçük ve büyük değerlerinde arttığı, ayrıca lif parametresi γ_1'in değeri arttıkça bu farkın arttığı görülmektedir.

Şekil A.26'da v_2 dalga hızının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkı gösterilmektedir. Lif parametresinin tüm değerlerinde, $\bar{\alpha} < 6$ için ince tüpe ait hız değerleri büyük iken, $\bar{\alpha} > 6$ durumunda kalın tüp için elde edilen hız değerleri büyük olmaktadır. Lif parametresinin artımının bu farka katkısı görülmemektedir.

Şekil A.27'de χ_1 taşıma katsayısının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkı gösterilmekte olup, lif parametresinin tüm değerlerinde, $3 < \bar{\alpha} < 5$ için bu farkın çok az olduğu ve diğer $\bar{\alpha}$ değerlerinde ince tüpe ait değerlerin daha küçük olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca lif parametresinin artışının bu farka katkısı görülmemektedir.

Şekil A.28'de χ_2 taşıma katsayısının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkı gösterilmekte olup, $\bar{\alpha} < 1$ için bu fark çok küçük kalmaktadır. Lif parametresi ve $\bar{\alpha}$'nın her değerinde ince tüp değerleri kalın tüpten büyük olmaktadır. Lif parametresinin artımının, ince ve kalın tüp durumu arasındaki farka katkısı gözükmemektedir.

Şekil A.29-A.32 arasında $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimlerinin ince ve kalın tüp yaklaşımı için karşılaştırması yapılmıştır.

Şekil A.29'da, v_1 dalga hızının ince ve kalın tüp durumlarındaki farkına viskoelastisitenin katkısı gösterilmektedir. Şekle göre viskoelastisite arttıkça, ince ve kalın tüp arasındaki v_1 dalga hızı farkında bir değişim olmamaktadır. Ayrıca γ_3'ün ve $\bar{\alpha}$'nın tüm değerlerinde ince tüp değerleri kalın tüpten küçük olmaktadır.

Şekil A.30'da, v_2 dalga hızının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkına viskoelastisitenin katkısı gösterilmektedir. Viskoelastisitenin küçük değerlerinde ince tüpe ait hız değerleri daha büyük iken, viskoelastisite ve $\bar{\alpha}$'nın büyük değerlerinde kalın tüpe ait hız değerleri büyük olmaktadır.

Şekil A.31, χ_1 taşıma katsayısının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkına viskoelastisitenin etkisini göstermektedir. Bu farkı viskoelastisitenin yüksek oluşu $\bar{\alpha}$'nın büyük değerlerinde artırmaktadır. Ayrıca γ_3'ün tüm değerlerinde $3 < \bar{\alpha} < 5$ için bu fark çok küçük kalmakta, diğer $\bar{\alpha}$ değerlerinde ince tüpe ait değerler daha küçük olmaktadır.

Şekil A.32, χ_2 taşıma katsayısının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkına viskoelastisitenin etkisini göstermektedir. $\bar{\alpha} < 1$ için bu fark çok küçük kalmaktadır. Yüksek viskoelastisite durumunda χ_2'de ince ve kalın tüp arasındaki fark daha az olmaktadır. Ayrıca γ_3'ün ve $\bar{\alpha}$'nın tüm değerlerinde, ince tüp değerleri kalın tüpten büyük olmaktadır.

Şekil A.33-A.36'da $\lambda = 1.4$, $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_3 = 0.01$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken f'nin farklı değerleri için, dalga hızı ve taşıma katsayılarının $\bar{\alpha}$'ya göre değişimlerinin ince ve kalın tüp yaklaşımı için karşılaştırması yapılmıştır.

Şekil A.33'te, v_1 dalga hızının ince ve kalın tüp durumlarındaki farkı gösterilmiş olup, bu farkın $\bar{\alpha}$'nın çok küçük değerlerinde f arttıkça arttığı görülmektedir. Ayrıca, tüm f ve tüm $\bar{\alpha}$ değerlerinde ince tüpe ait v_1 hızı kalın tüpünkinden küçük olmaktadır.

Şekil A.34'te, v_2 dalga hızının ince ve kalın tüp durumlarındaki farkını f'nin artmasının fazla değiştirmediği görülmektedir. Ayrıca tüm f ve tüm $\bar{\alpha}$ değerlerinde ince tüpe ait v_2 hızı kalın tüpünkinden büyük olmaktadır.

Şekil A.35'te, χ_1 taşıma katsayısının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkı gösterilmiş olup bu farkı f'nin artmasının etkilemediği gösterilmiştir. Ayrıca tüm f ve tüm $\bar{\alpha}$ değerlerinde kalın tüp değerleri ince tüp değerlerinden büyük olmakta ve $4 < \bar{\alpha} < 6$ için fark çok küçük kalmaktadır.

Şekil A.36'da, χ_2 taşıma katsayısının ince ve kalın tüp yaklaşımlarındaki farkı gösterilmiştir. Ayrıca şekilden f'nin artışıyla farkın azaldığı görülmektedir. Bunun yanında, tüm f ve tüm $\bar{\alpha}$ değerlerinde ince tüp değerleri kalın tüpten büyük olmaktadır. Ayrıca $\bar{\alpha} < 1$ için bu fark çok küçük kalmaktadır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında büyük statik ön şekil değiştirme üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisi kullanılarak viskoelastik lifli tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi incelenmiştir.

Kalın duvarlı, öngerilmeli, viskoelastik, sıkışmaz, lifli tüpün içerisinde bulunan akışkanın, sıkışmaz özellikte, viskoz, Newton akışkanı olduğu ve içerisinde parçacıklar bulundurduğu kabul edilmiştir. Tüpün bir eksenel germe ve sabit bir iç basınç etkisinde kaldığı ve böylece radyal genleşme ve eksenel uzama ile ön şekildeğişimine uğramış olduğu varsayılmıştır. Tüm alan denklemleri silindirik koordinatlarda elde edilmiştir. Yönetici diferansiyel denklemlerin harmonik dalga çözümleri eksenel simetrik hareket durumu için ele alınmıştır. Akışkana ait diferansiyel denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olabilmiş, fakat tüpün alan denklemlerinin katsayılarının karmaşık bir şekilde radyal koordinatın fonksiyonu olmaları nedeniyle katı malzemeye ilişkin denklemlere kapalı bir çözüm vermek mümkün olamamıştır. Bu nedenle katı fazı yöneten diferansiyel denklemler ile sınır koşullarına ilişkin denklemlere, dalga karakteristiklerine tüp kalınlığının etkisini de elde etmek için sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözüm aranmıştır.

Daha sonra ise uzun dalga yaklaşımında, viskoz olmayan akışkanla dolu, öngerilmesiz, ince tüp önce elastik, sonra viskoelastik kabul edilerek dispersiyon bağıntısı incelenmiş, dalga hızları ve taşıma katsayıları bulunmuştur. Son olarak ise uzun dalga yaklaşımında, viskoz akışkanla dolu, öngerilmeli, kalın duvarlı, viskoelastik tüp için dispersiyon bağıntısı elde edilmiş ve dalga hızları ve taşıma katsayıları hesaplanmıştır. Elde edilen bu sonuçların daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırması yapılarak onlarla uyum sağladığı belirtilmiştir.

İçi viskoz ve ya viskoz olmayan akışkanla dolu öngerilmeli veya öngerilmesiz elastik veya viskoelastik tüpler içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemi mühendisliğin birçok dalında önemli uygulama alanı bulmuştur. Bu çalışmada ele alınan büyük kan damarlarındaki pulsatif kan akımına ilişkin dalga yayılımının

incelenmesi probleminin biyomühendislik açısından önemi, dalga hızının ve taşıma katsayılarının damardaki elastik veya viskoelastik özelliklere bağlı olmasından dolayı bunları ölçmek suretiyle malzeme özelliklerinde ne gibi değişimlerin olduğunu gözlemeye izin vermesindendir. Bununla birlikte, bu değişimleri dikkate alarak fizyolojik bakımdan ne gibi değişmelerin olduğu bu sayede incelenebilir.

Bu çalışmada tüp malzemesi damarı daha gerçekçi modelleyebilmek için viskoelastik ve lifli yapıda ele alınmıştır. Yakın zamana kadar yapılan çalışmalarda damar sıkışmaz, homojen elastik veya viskoelastik ve izotrop (bazı hallerde anizotrop) olarak kabul ediliyor, böyle bir modele dayalı bazı problemler çözülüyordu. Aslında morfolojik yapıları dikkate alındığında, damarların homojen bir yapıya sahip olmadıkları, mekanik özelliklerinin hem eksenel hem de radyal doğrultuda değiştiği gözlenir. Damarlar bünyelerinde bulundurdukları lifler vasıtasıyla yük taşıma özelliği göstermektedirler. Bu çalışmada dalga yayılması problemi, kolajen liflerle güçlendirilmiş damarın tek tabakalı kabul edildiği durum için incelenmiştir.

Ayrıca kanın yapısını da gerçeğe uygun alabilmek amacıyla paraçacıklı akışkan yaklaşımı kulanılmıştır. Bilindiği gibi kan gerçekte plazma ve kan hücreleri denilen alyuvar, akyuvar ve trombositlerden oluşmaktadır. Sözü edilen yaklaşımın kullanılmasıyla hücresel kısmın hareketi de göz önüne alınmıştır.

Ayrıca ince tüp yaklaşımının yanında, büyük damarlarda dalga yayılımını inceleyebilmek amacıyla, tüpün kalın olduğu durum da incelenmiştir.

Bu çalışmada matematiksel açıdan kolaylık sağlama gerekçesiyle, kanın ve damarın hareketi eksenel simetrik olarak ele alınmış olup alan büyüklükleri θ açısından bağımsız kabul edilmiştir. Gerçekte ise kalpten damara zaman içerisinde periyodik olarak kan pompalandığında kalp kapakçığı azar azar açıldığı için ana damarın kalbe bağlandığı uç noktalardaki koşulları θ açısından bağımsız değildir. Bunun yanında damarın içinde bulunduğu dış ortamla olan etkileşimi ihmal edilmiştir. Yatak ortamı denen bu ortamın, damarın davranışına olan etkileri de bir şekilde modellenerek hesaba katılabilir.

Şu anda literatürde büyük damarlarda kan akımını modelleyen çalışmalarda, damarı öngerilmeli, kalın, lifli, viskoelastik tüp ve kanı parçacıklı akışkan olarak bir arada göz önüne alan çalışma bulunamamıştır. Bu nedenle bu çalışmada elde edilen sonuçların, özel haller için diğer çalışma sonuçları ([20], [21], [40], [45], [46]) ile

karşılaştırmaları yapılmış ve tam bir uyum gözlenmiştir. Birçok çalışmada göz önüne alınmayan damarın lifli ve kanın parçacıklı yapısının dalga karakteristiklerini ihmal edilemeyecek mertebede etkilediği gösterilmiştir.

Bu çalışmanın deneysel çalışmalarla desteklenmesi halinde biyomalzemeler konusunda çalışan araştırmacılara ipuçları verebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Young, T.**, 1809. On the functions of the hearth and arteries: The croonian lecture, *Phil. Trans. Roy. Sos.*, **99**, 1-31.

[2] **Witzig, K.**, 1914. Über erzwungene wellenbewegungen zaber, inkompressibler Flussigkeitten in elastischen Rohren, University of Bern.

[3] **Crandall, I.**, 1927. Theory of Vibrating Systems and Sound, Van Nostrand, New York.

[4] **Frank, O.**, 1899. Die grundform des arteriellen pulses, Erste Abhandlung, *Mathematische Analyse, Z. Biol.*,**3**, 483-526.

[5] **Lambossy, P.**, 1951. Aperçu historique et critique sur le probleme de la propagation de ondes dans un liquide compressible enferme dans un tuber elastique, *Helv. Physiol. Acta.*, **9**, 145-161.

[6] **Iberall, A.S.**, 1950. Attenuation of oscillatory pressure in instrument lines, *J. Res. Natn. Bur. Stand.*, **45**, 85-108.

[7] **Morgan, G.W. ve Kiely, J.P.**, 1954. Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube, *J. Acoust. Soc. Am.*, **26**, 323-328.

[8] **Womersley, J.R.**, 1955. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube-I: The linear approximation for long waves, *Phil. Mag. (seri 7)*, **46**, 199-219.

[9] **Womersley, J.R.**, 1957. The mathematical analysis of the arterial circulation in a state of oscillatory motion, Wright Air Development Centre, Technical Report WADC-TR, 56-614.

[10] **Womersley, J.R.**, 1957. Oscillatory flow in arteries: The constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission, *Phys. in Med. Biol.*, **2**, 178-187.

[11] **Klip, W.**, 1962. Velocity and Damping of the Pulse Wave. Martinus Nijhoff, The Hague.

[12] **Klip, W. ve Klip D.A.**, 1964. Phase velocity and damping of torsional waves in thin-walled tubes of infinite lenght, *in Pulsatile Blood Flow* (Edited by E.O. Attinger) pp. 323-333, Mc Graw Hill, New York.

[13] **Whirlow, D.K. ve Rouleau, W.T.**, 1965. Periodic flow of a viscous liquid in a thick walled elastic tube, *Bull. Math. Biophysics*, **27**, 355-370.

[14] **Jager, G.**, 1965. Electrical models of the human systemicarterial tree, *Doctoral Dissertation*, University of Utredit.

[15] **Anliker, M. ve Maxwell, J.A.**, 1966. The dispersion of waves in blood vessels, *Biomechanics Symposium*(Edited by Y.C.Fung), N.Y. ASME, pp. 47-67.

[16] **Atabek, H.B. ve Lew, H.S.**, 1966. Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube, *Biophys. J.*, **6**, 481-503.

[17] **Atabek, H.B.**, 1968. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed orthotropic elastic tube, *Biophys. J.*, **8**, 626-649.

[18] **Mirsky, I.**, 1967. Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube, *Biophys. J.*, **7**, 165-186.

[19] **Mirsky, I.**, 1968. Pulse velocities in initially stressed cylindrical rubber tubes, *Bull. Math. Biophysics*, **30**, 299-308.

[20] **Chow**, **J.C.F. ve Apter J.T.**, 1968. Wave propagation in a viscous incompressible fluid contained in flexible viscoelastic tubes, *J.Acoust.Soc.America*, **44**, 437-443.

[21] **Cox, R.H.**, 1968. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick walled viscoelastic tube, *Biophys. J.* , **8**, 691-709.

[22] **Cox, R.H.**, 1969. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick walled viscoelastic tube: The influence of wall compressibility, *J. Biomech.*, **3**, 317-335.

[23] **Klip, W., Van Loon, P. ve Klip, D.A.**, 1967. Formulas for phase velocity and damping of longitudinal waves in thick walled viscoelastic tubes, *J. Appl. Phys.*, **38**, 3745-3755.

[24] **Rubinow, S.I. ve Keller, J.B.**, 1971. Wave propagation in a fluid-filled tube, *J.Acoust.Soc.America*, **50**, 198-223.

[25] **Rubinow, S.I. ve Keller, J.B.**, 1978. Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid, *J. Fluid Mech.*, **88**, 181-203.

[26] **Rachev, A.I.**, 1980. Effect of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, *J. Biomech. Engng.*, ASME, **102**, 119-123.

[27] **Moodie, T.B., Barclay, D.W. ve Tait, R.J.,** 1983. A boundary value problem for fluid-filled viscoelastic tubes, *Math. Modelling*, **4**, 145-207.

[28] **Sawatzky, R.P. ve Moodie, T.B.**, 1988. On the propagation of pressure pulses through a viscous fluid contained in a viscoelastic tube, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **41**, 33-50.

[29] **Kuiken, G.D.C.**, 1984. Wave propagation in a thin-walled liquid-filled initially stressed tube, *J. Fluid Mech.*, **141**, 289-308.

[30] **Liepsch, D., Seemann, A. ve Siekmann, J.**, 1985. Note on wave propagation in a thin elastic tube containing a viscous fluid, *J. Biomech.*, **18**, 685-694.

[31] **Demiray, H.**, 1985. Effect of transmural pressure on pulse waves in arteries, *METU, J. Pure and Appl. Sci.*, **18**, 1-22.

[32] **Demiray, H., Erbay, H.A. ve Erbay, S.**, 1987. Pulse waves in prestressed arteries, *Bulletin of Math. Biology*, **49**, 289-305.

[33] **Demiray, H., Erbay, H.A. ve Erbay, S.**, 1987. Effects of prestress on pulse wave in arteries, *ZAMM*, **67**, 473-485.

[34] **Demiray, H. ve Dost, S.**, 1990. Pulse waves in a prestressed elastic tube, *Int. J. Eng.*, **28**, 1-9.

[35] **Demiray, H. ve Vito R.P.**, 1989. Arterilerin mekanik davranışları için tabakalı bir model, *VI.Ulusal Mekanik Kongresi*, Kirazlıyayla, Eylül 1989, 287-298.

[36] **Demiray, H. ve Ercengiz A.**, 1991. Wave propagation in a prestressed elastic tube filled with a viscous fluid, *Int. J. of Eng. Sci.*, **29**, 575-585.

[37] **Demiray, H. ve Ercengiz A.**, 1994. Non-symmetrical waves in a prestressed elastic tube filled with an inviscid fluid, *Int. J. of Eng. Sci.*, **32**, 605-616.

[38] **Demiray, H.**, 1994. A viscoelastic model for arterial wall materials, *Int. J. of Eng. Sci.*, **32**, 1567-1578.

[39] **Simon, B.R., Kobayashi, A.S., Strandness, D.E. ve Wiederhielm, C.A.,** 1972. Re-evaluation of arterial constitutive laws. *Circ. Res.*, **30**, 491-500.

[40] **Demiray, H. ve Ercengiz A.**, 1995. Harmonic waves in a prestressed viscoelastic tube filled with a viscous fluid, *Int. J. of Eng. Sci.*, **33**, 105-117.

[41] **Demiray, H. ve Antar, N.,** 1997. Harmonic waves in a prestressed thin elastic tube filled with a viscous fluid, *J. of Eng. Math.*, **32**, 305-320.

[42] **Demiray, H. ve Akgün, G.,** 1997. Wave propagation in a viscous fluid contained in a prestressed viscoelastic thin tube, *Int. J. of Eng. Sci.*, **35**, 1065-1079.

[43] **Şengel, H.S.**, 2003. İçi sıvı dolu ince cidarlı kompozit tüplerde dalga yayılması, *Doktora Tezi*, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bil. Enstitüsü, Eskişehir.

[44] **Nayfeh, A.H.**, 1966. Oscillating two-phase flow through a rigid pipe, *A.I.A.A.J.*, **4**, 1868-1870.

[45] **Nag, S.K. ve Jana, R.N.**, 1981. Oscillating two-phase flow in an elastic tube, *Acta Mech.*, **41**, 121-128.

[46] **Ercengiz, A.**, 2005. Oscillating two-phase flow in a prestressed thick elastic tube, *Acta Mech.*, **179**, 169-185.

[47] **Holzapfel, G.A., Gasser, T.C. ve Ogden, R.W.**, 2000. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *J. Of Elasticity*, **61**, 1-48.

[48] **Ercengiz, A.**, 1992. İçerisinde akışkan bulunan öngerilmeli elastik tüplerde harmonik dalga yayılımı, *Doktora Tezi*, İTÜ, Fen-Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

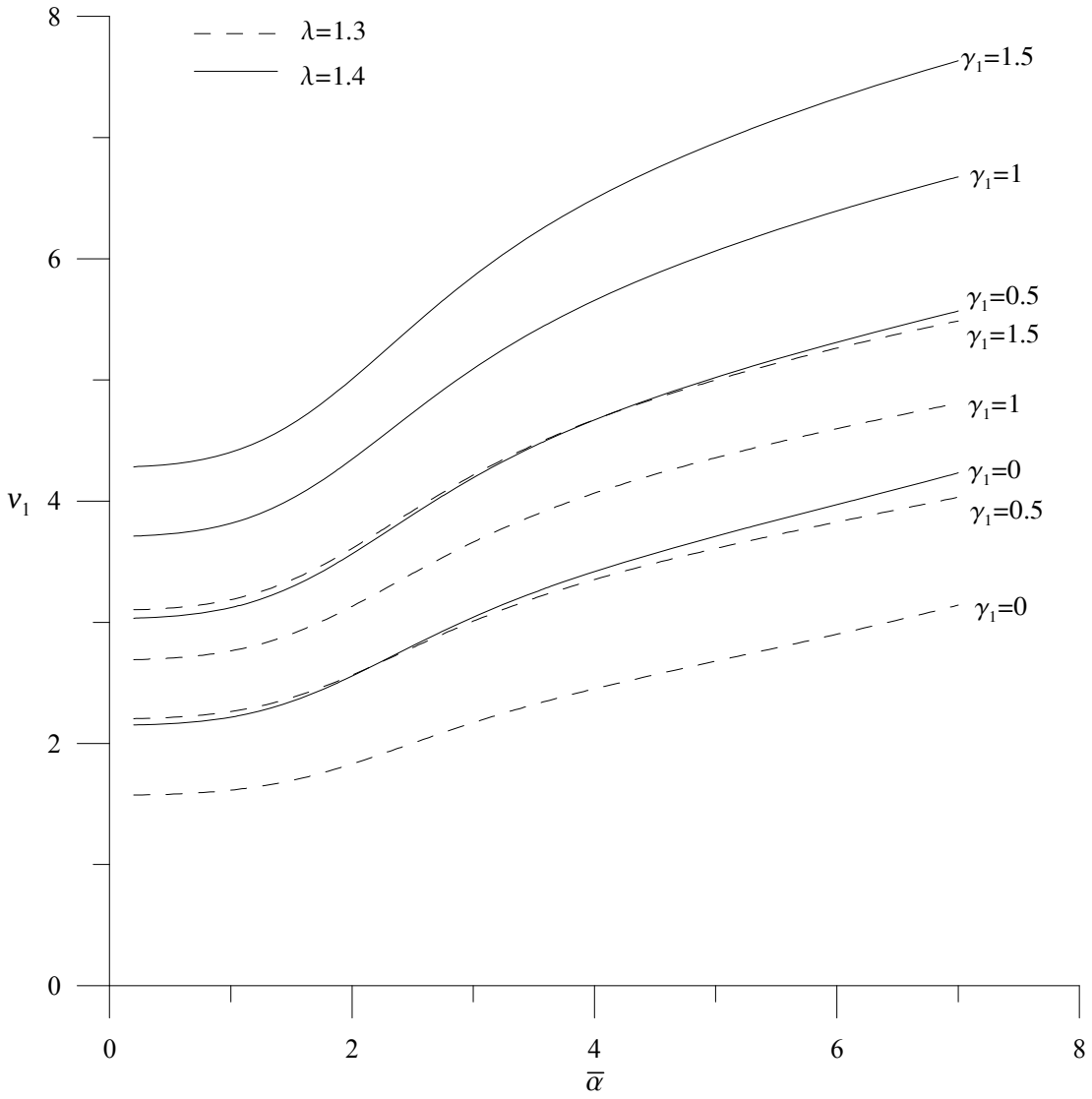
[49] **Demiray, H.**, 1972. A note on the elasticity of soft biological tissues, *J.Biomech.*, **5**, 309-311.

[50] **Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S.**, 1974. Elastodynamics, *Vol I*, pp. 246-259, Pergamon Press, New York.

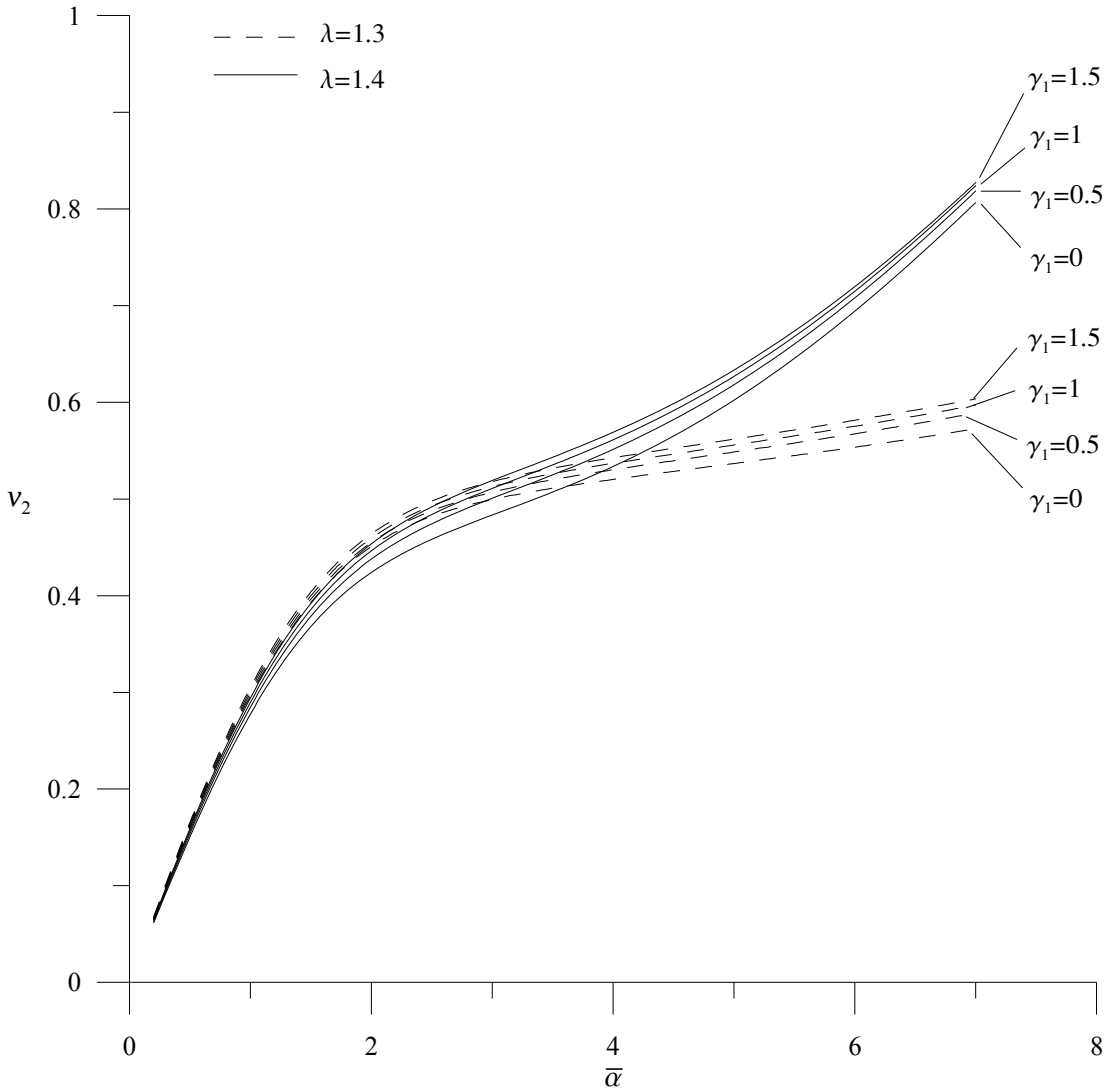
[51] **Green, A.E. ve Zerna, W.,** 1968. Theoretical Elasticity, Oxford Clarendon Press .

[52] **Demiray, H.,** 1976. Large deformation analysis of some basic problems in biophysics, *Bull. of Math. Biology*, **38**, 701-712.

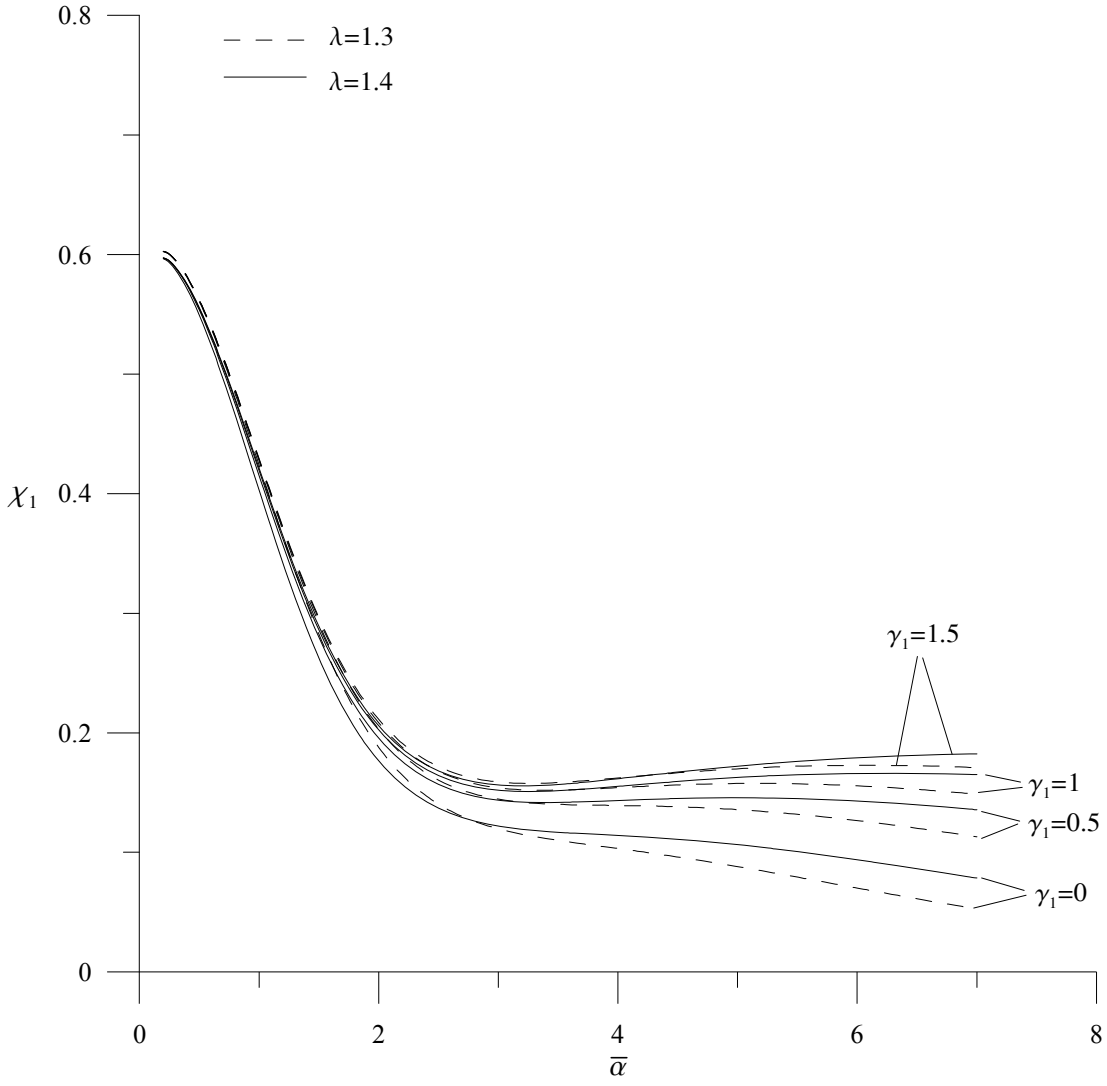
EKLER



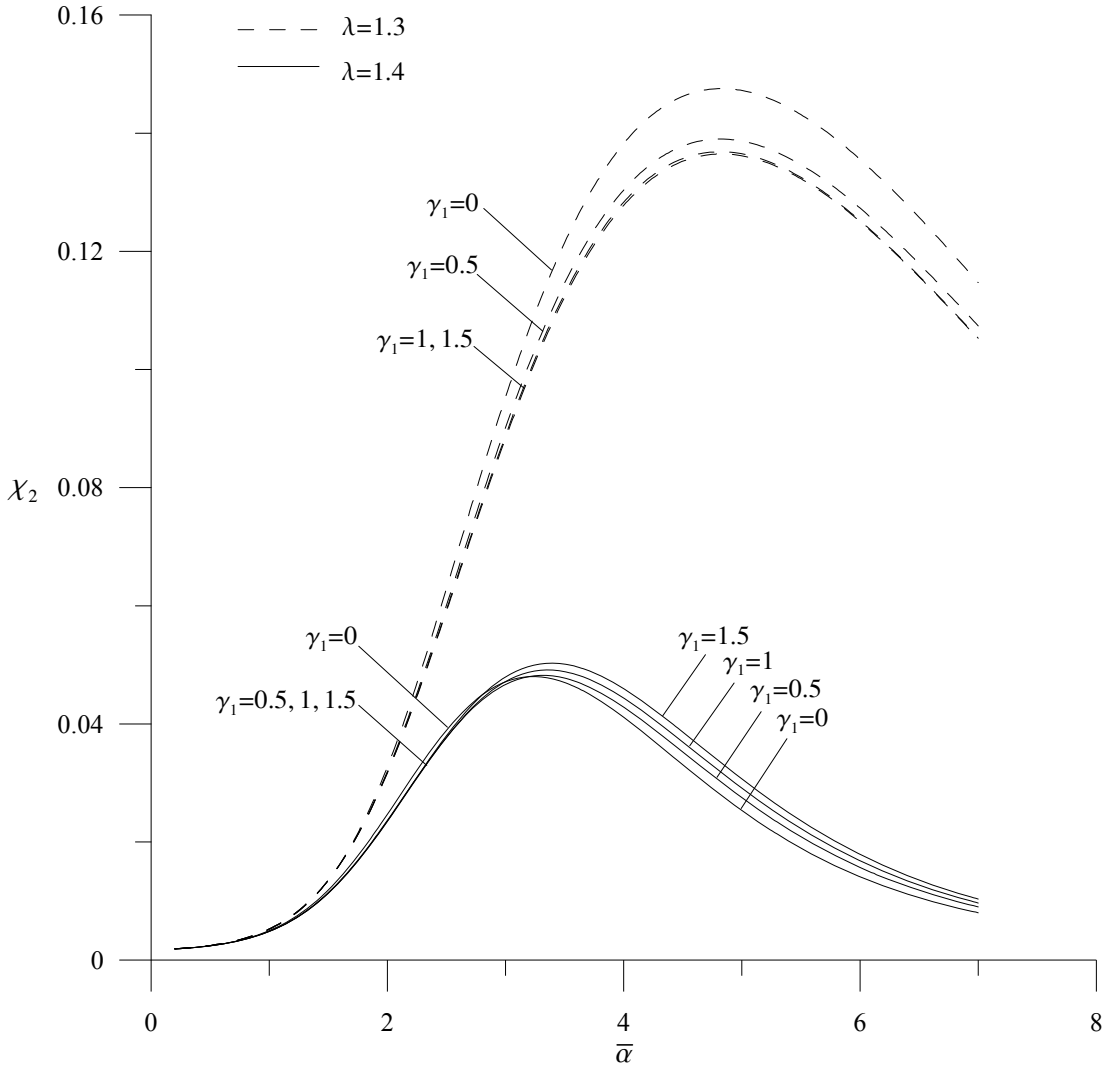
Şekil A.1: $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi



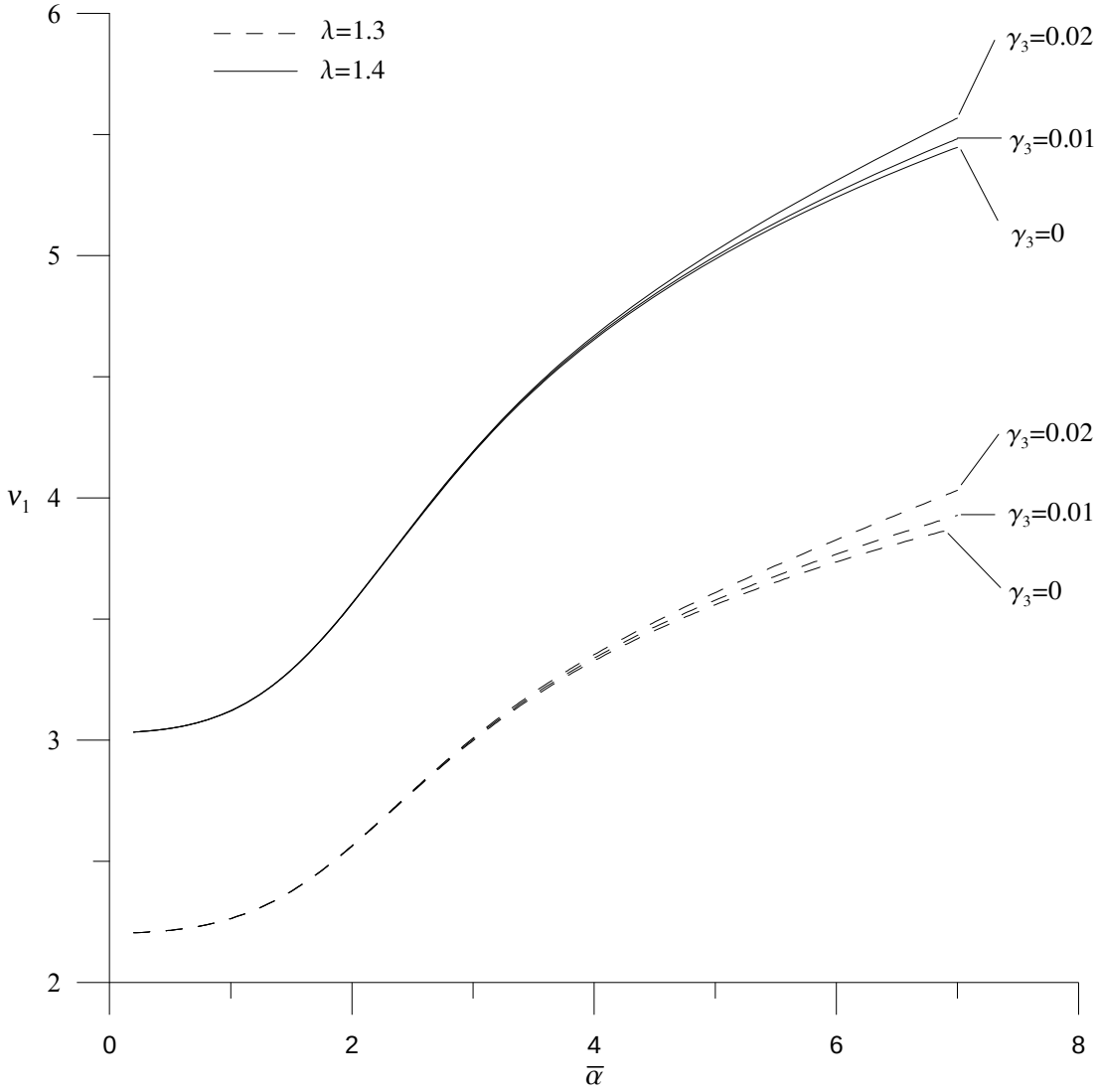
Şekil A.2: $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



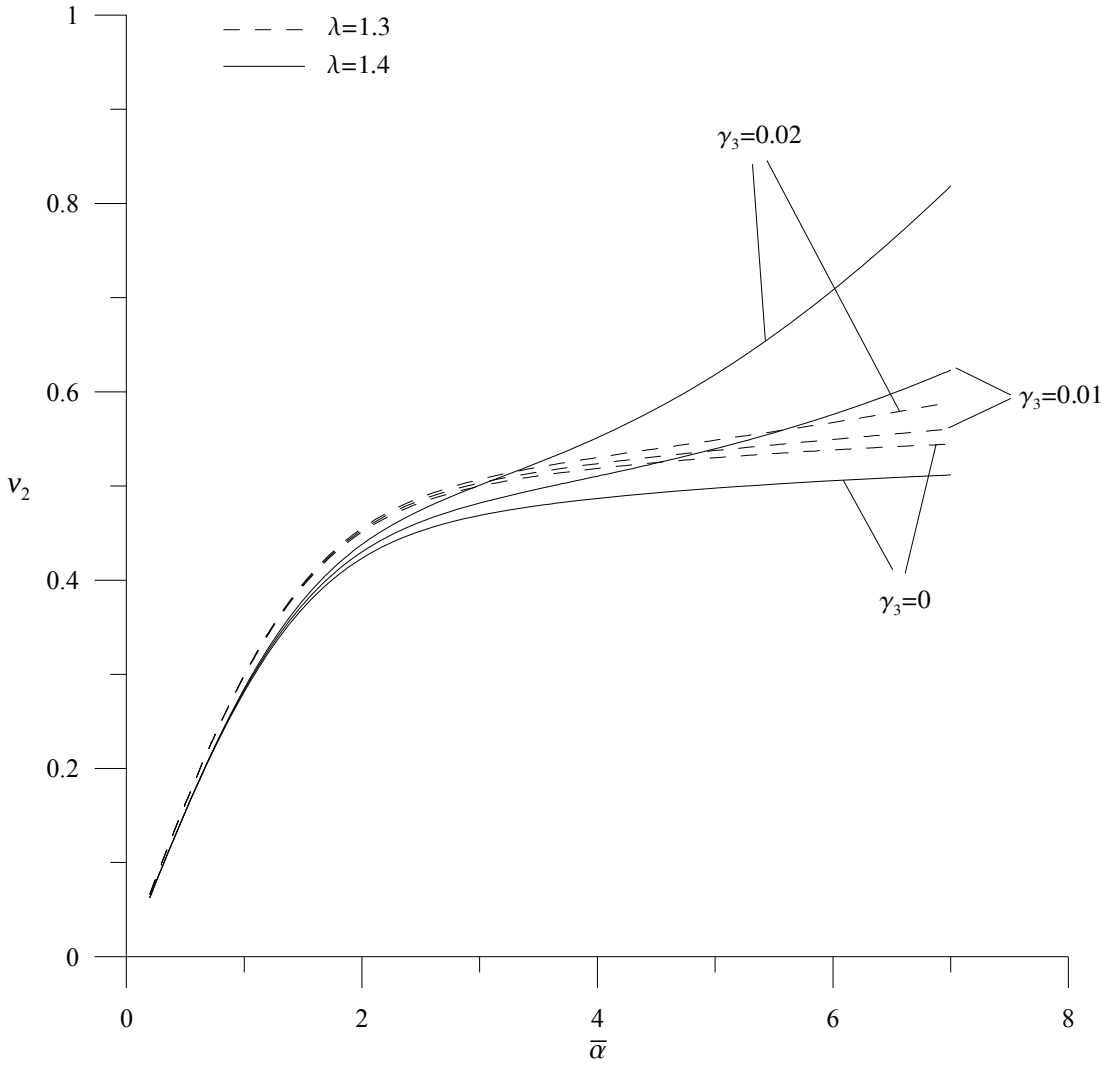
Şekil A.3: $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



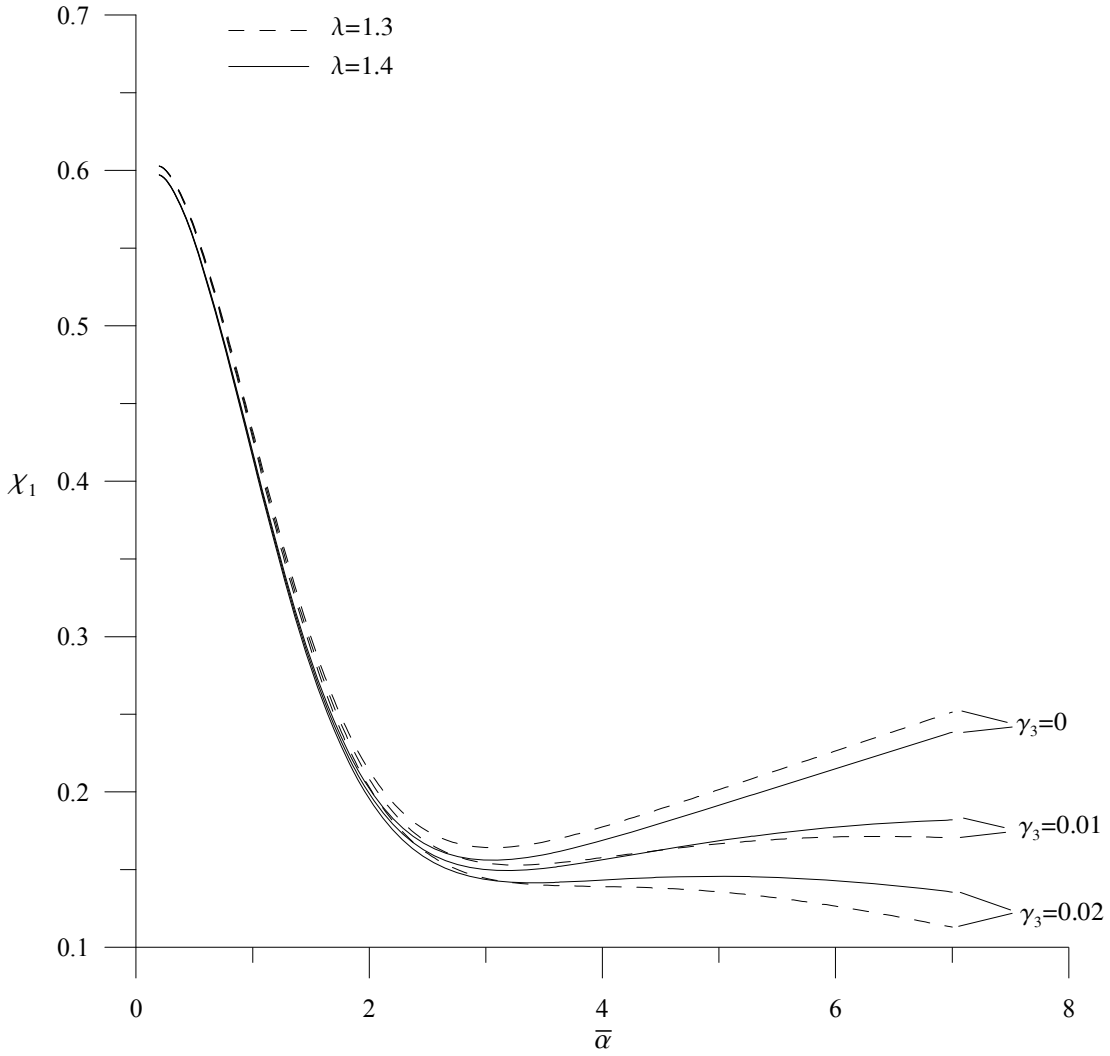
Şekil A.4: $\gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



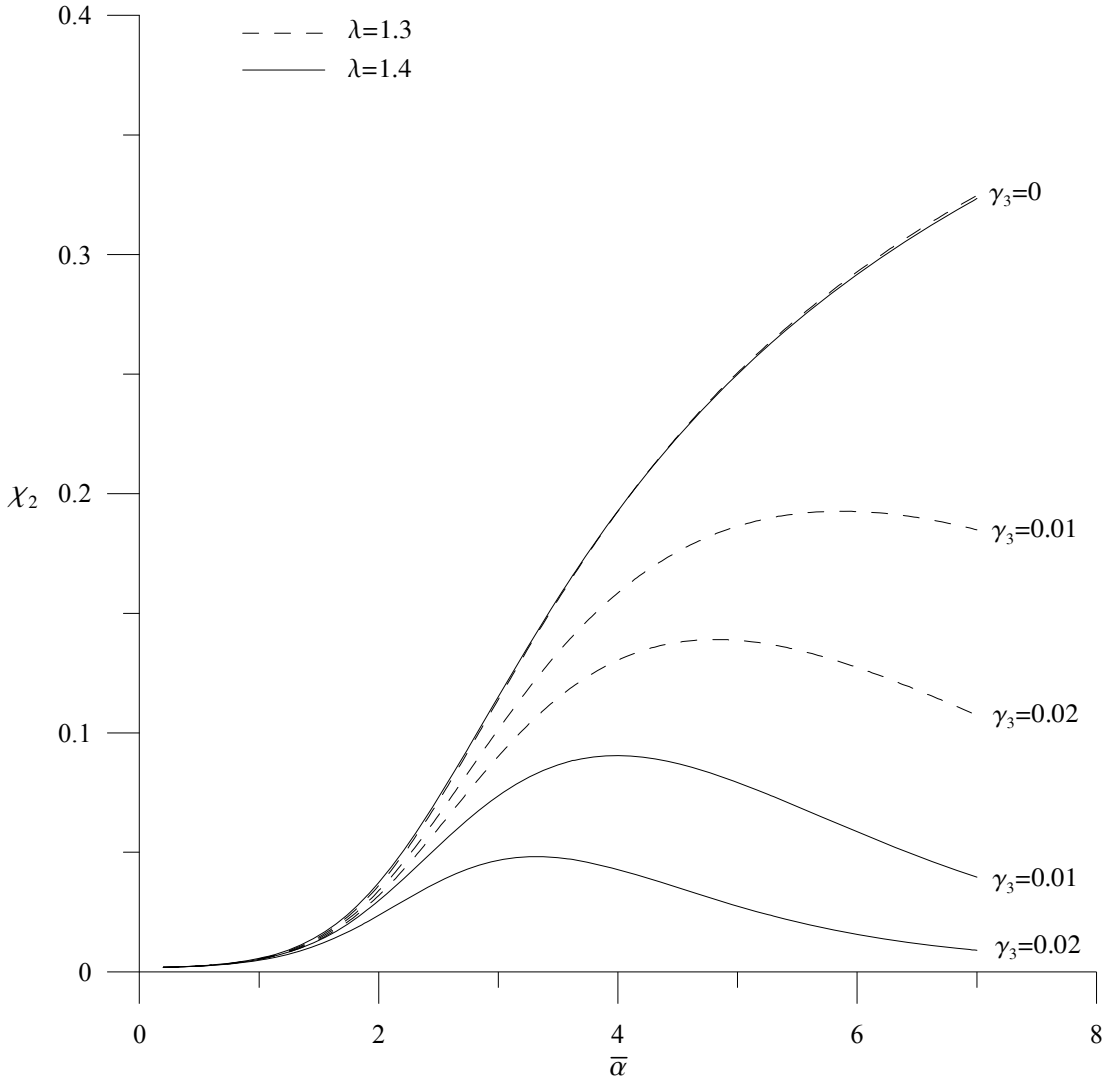
Şekil A.5: $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi



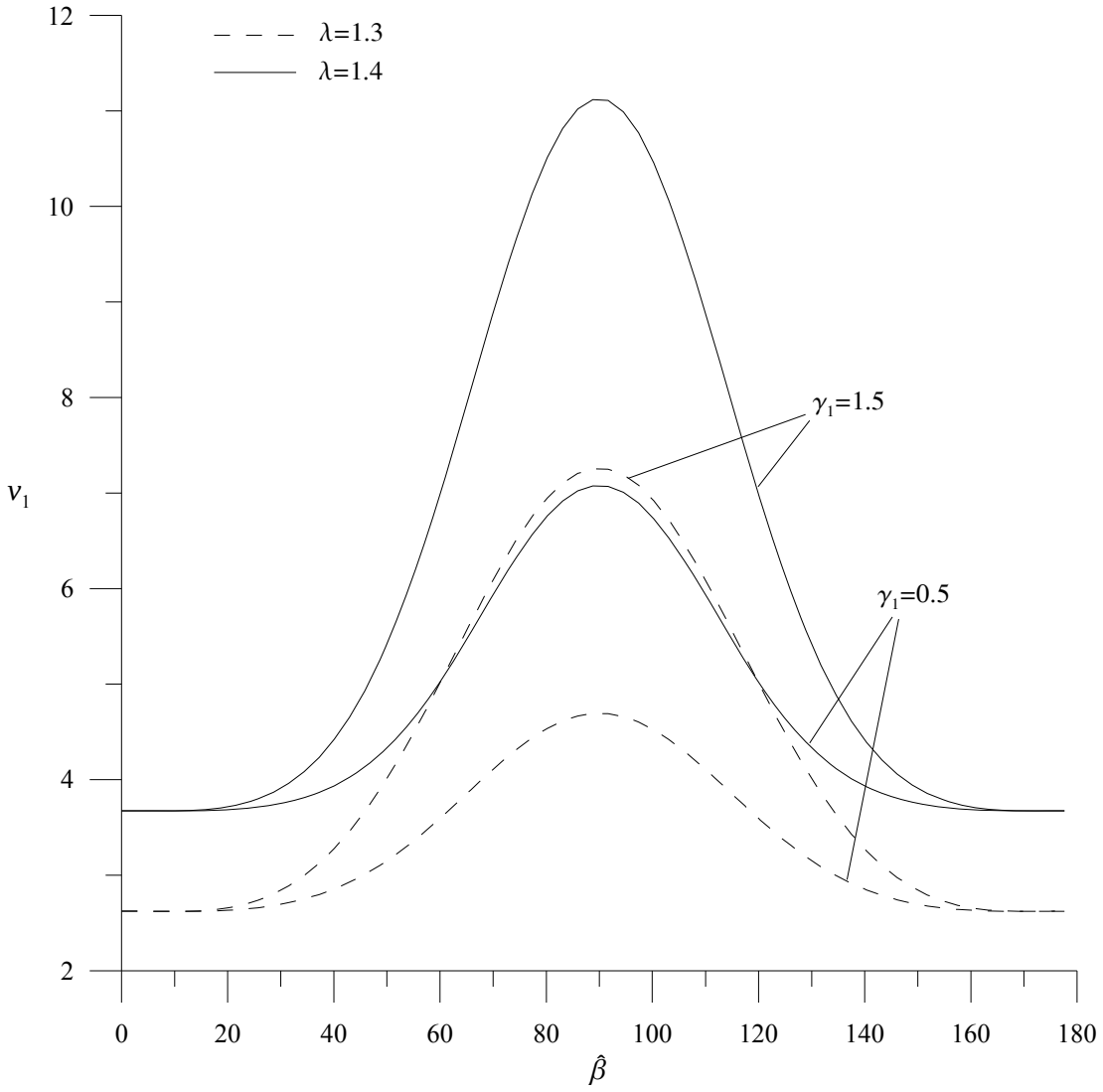
Şekil A.6: $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi



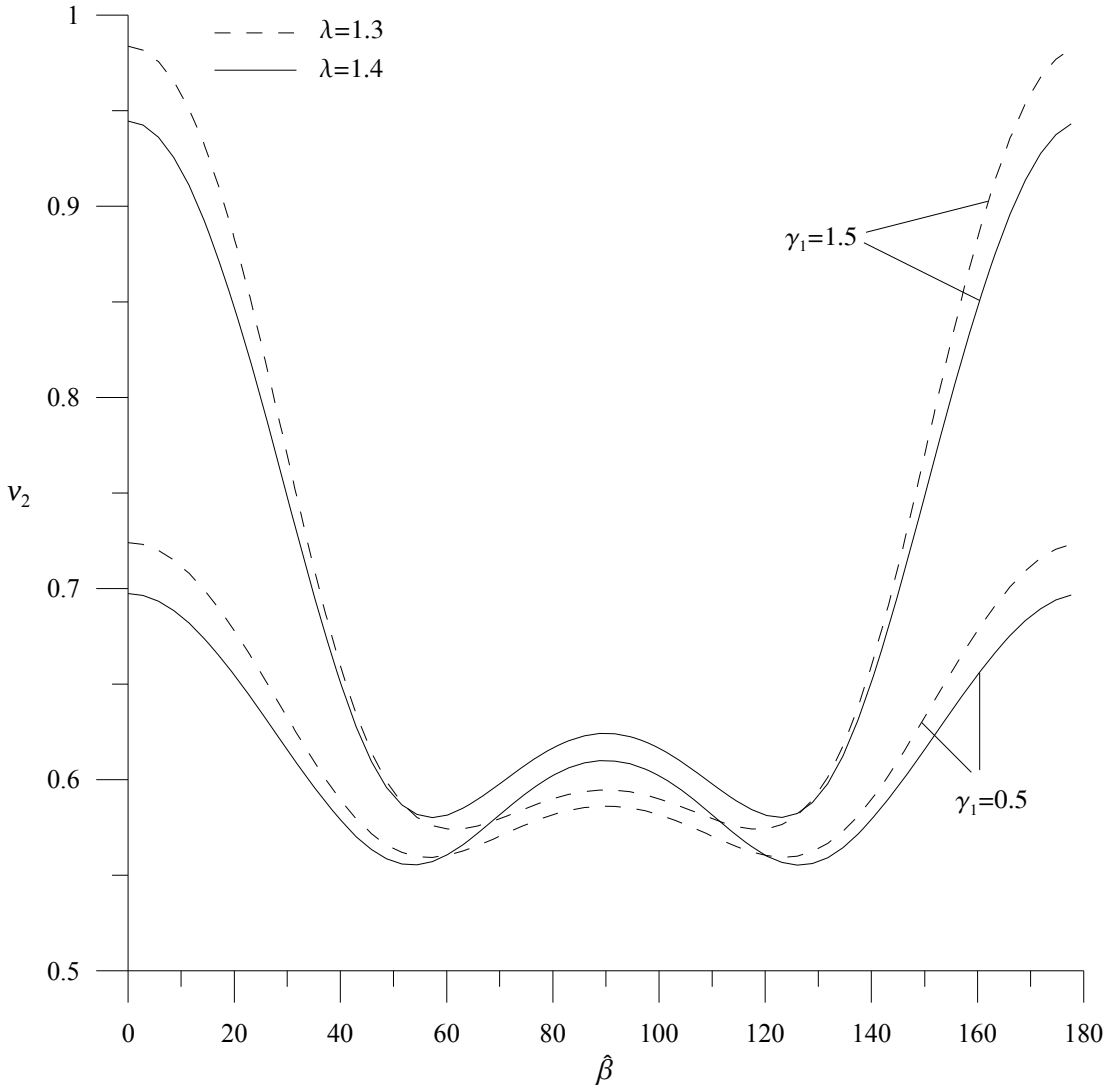
Şekil A.7: $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



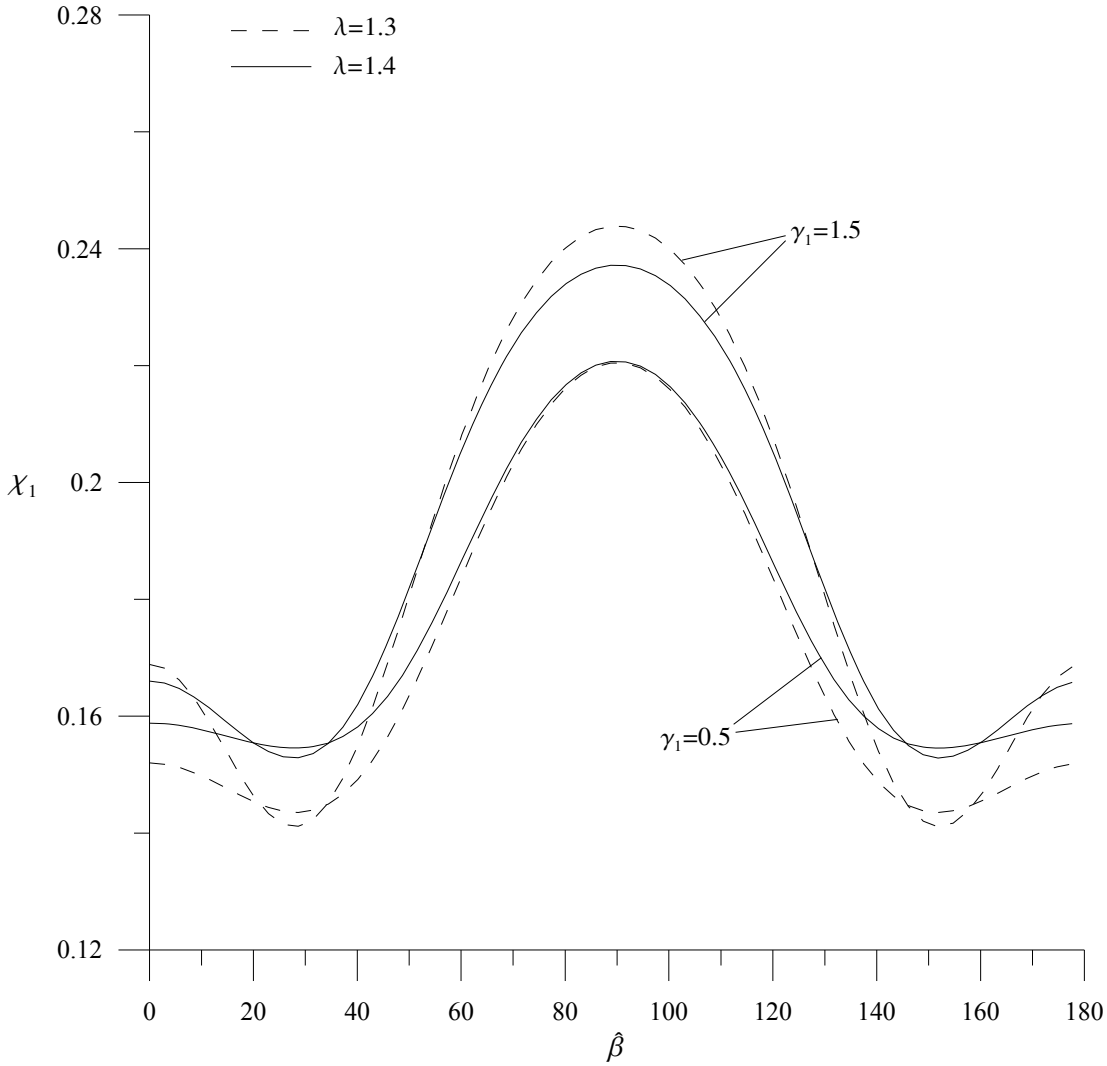
Şekil A.8: $\gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



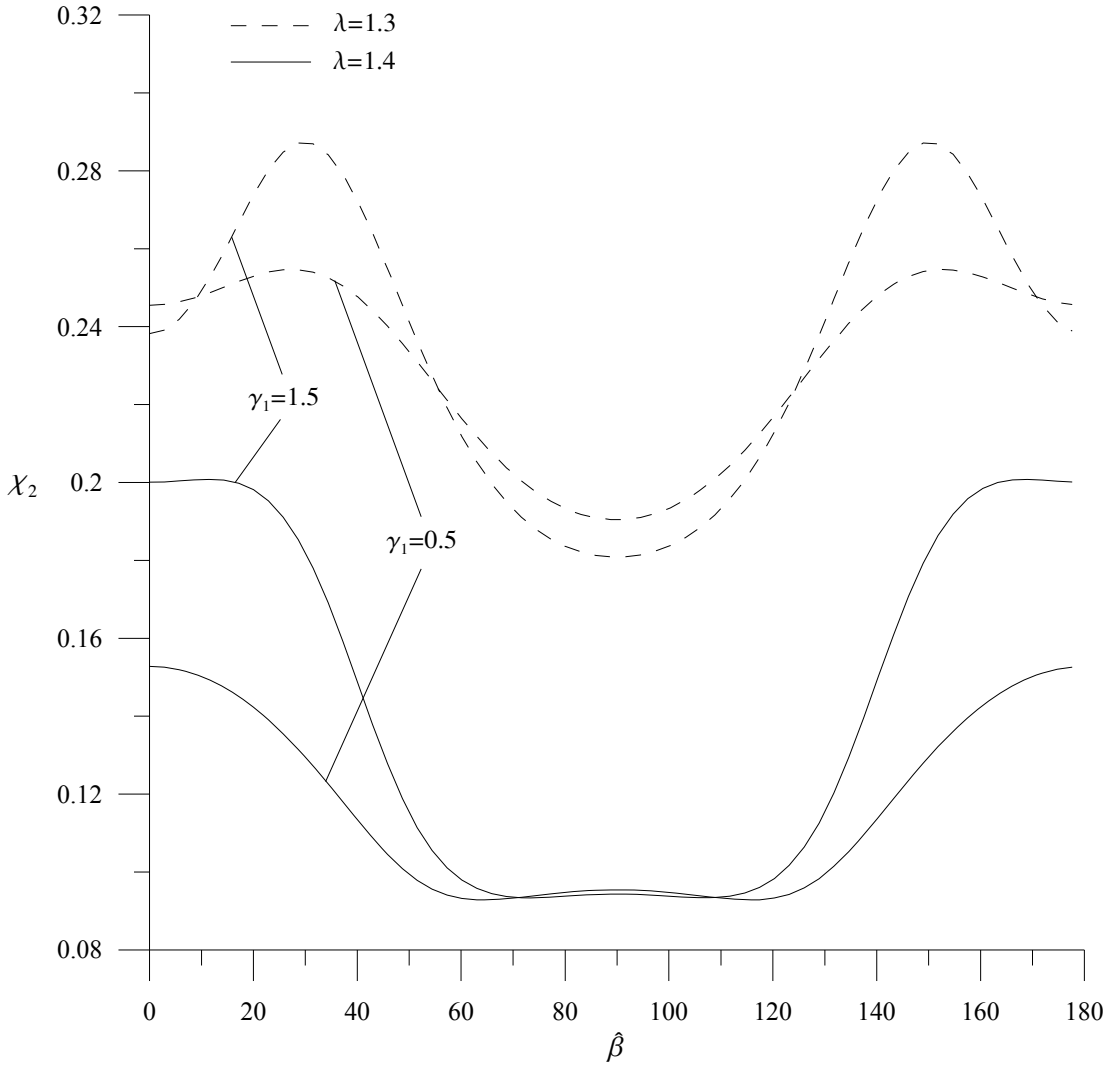
Şekil A.9: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



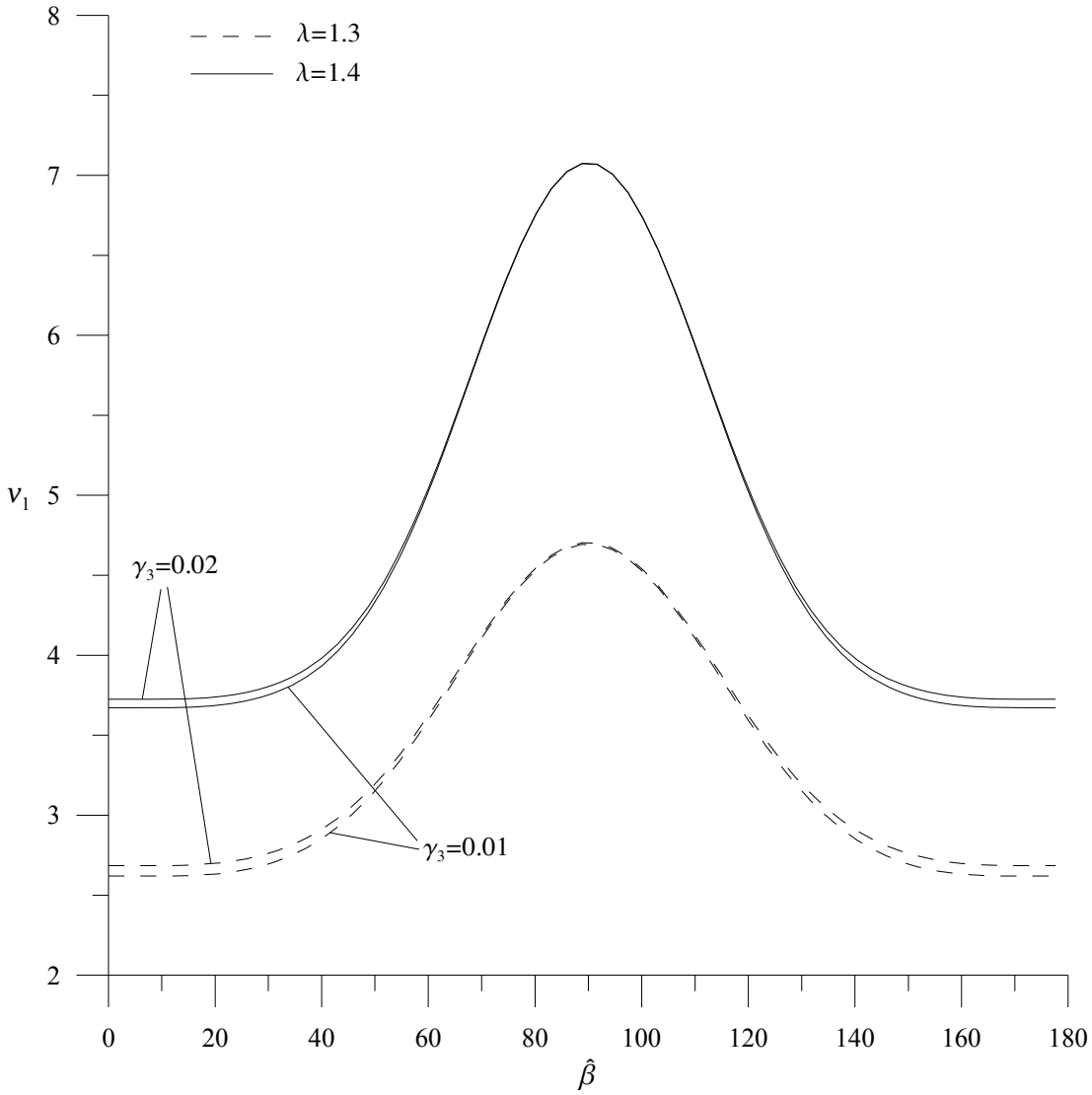
Şekil A.10: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



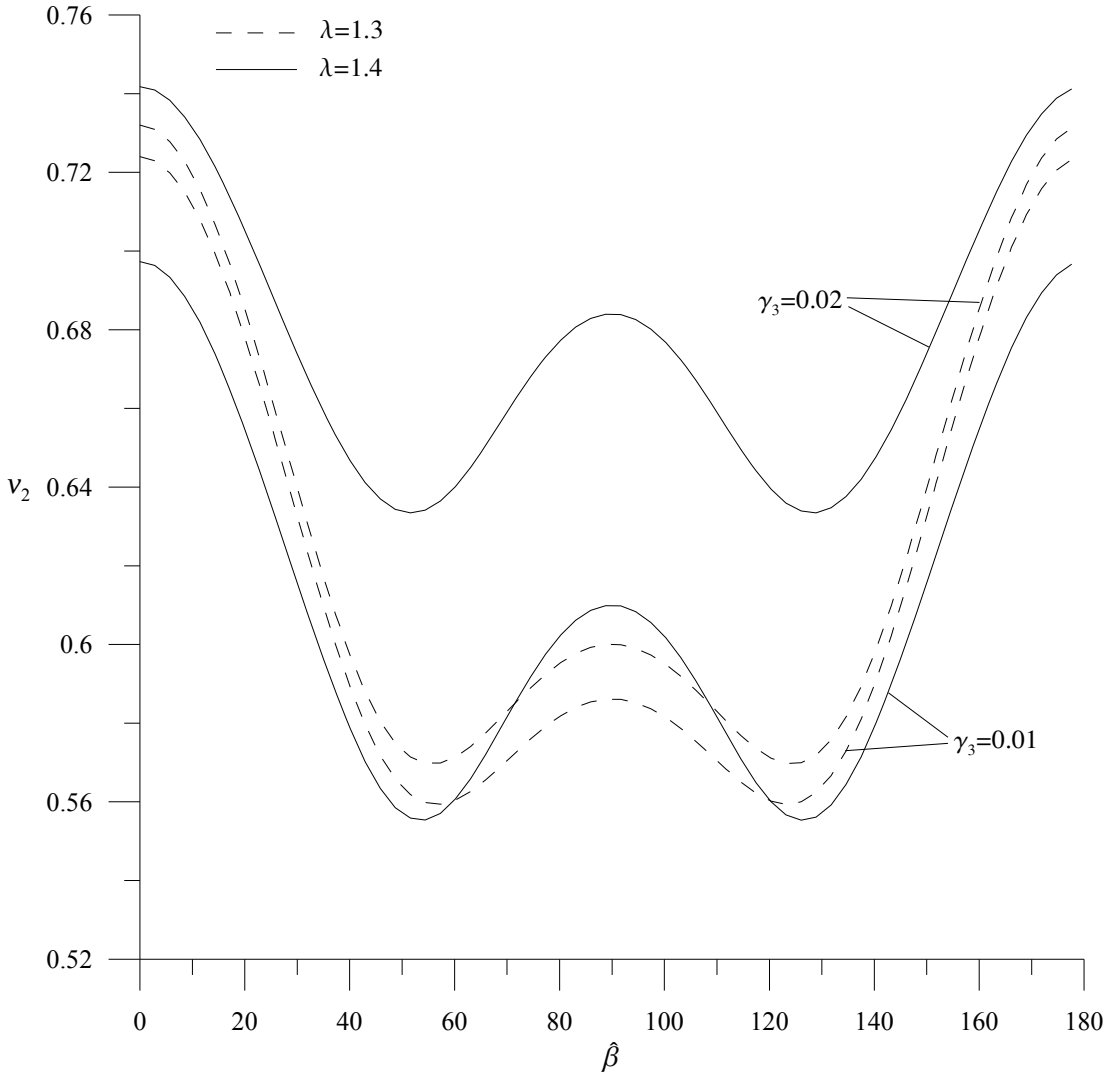
Şekil A.11: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



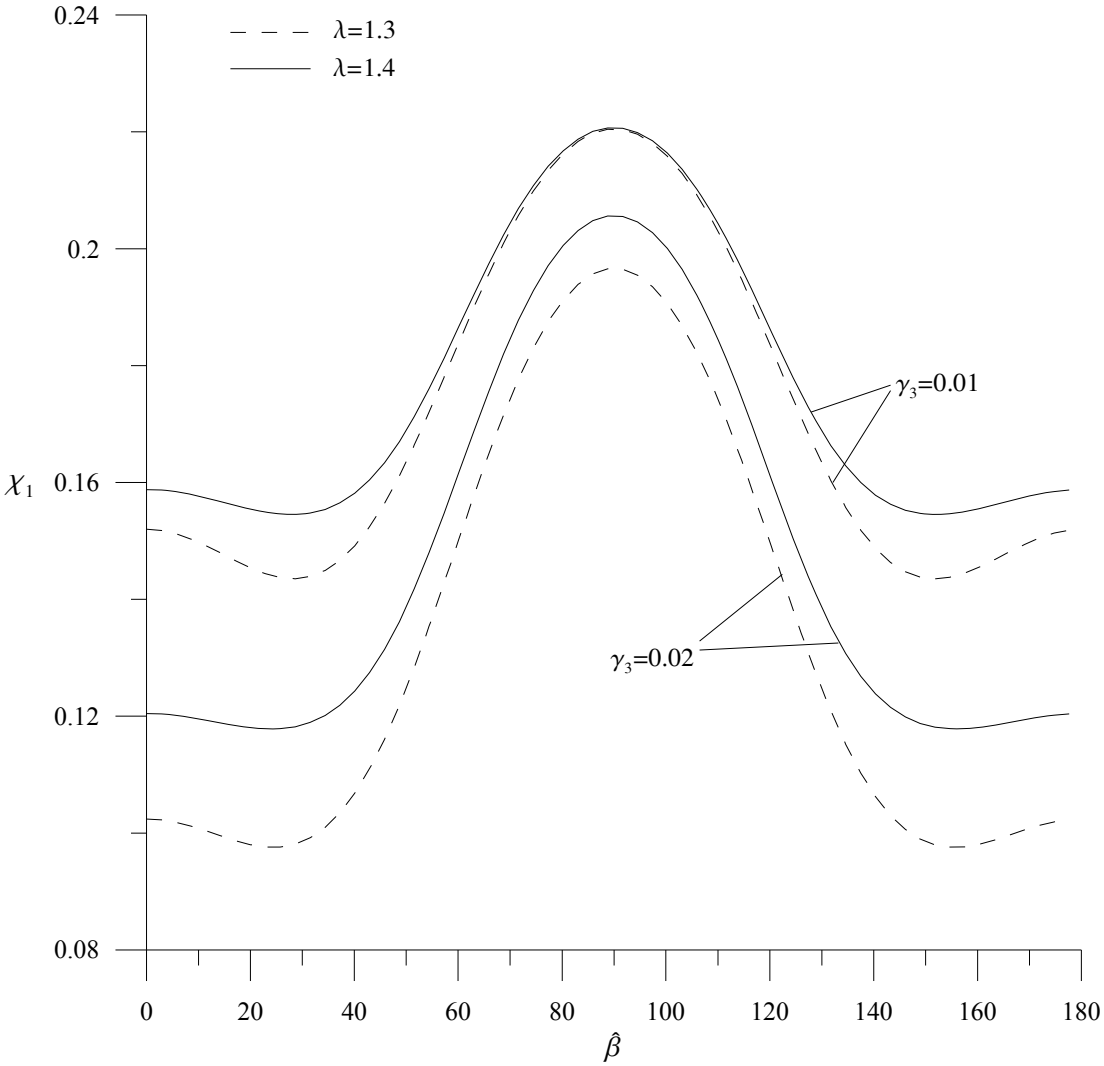
Şekil A.12: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



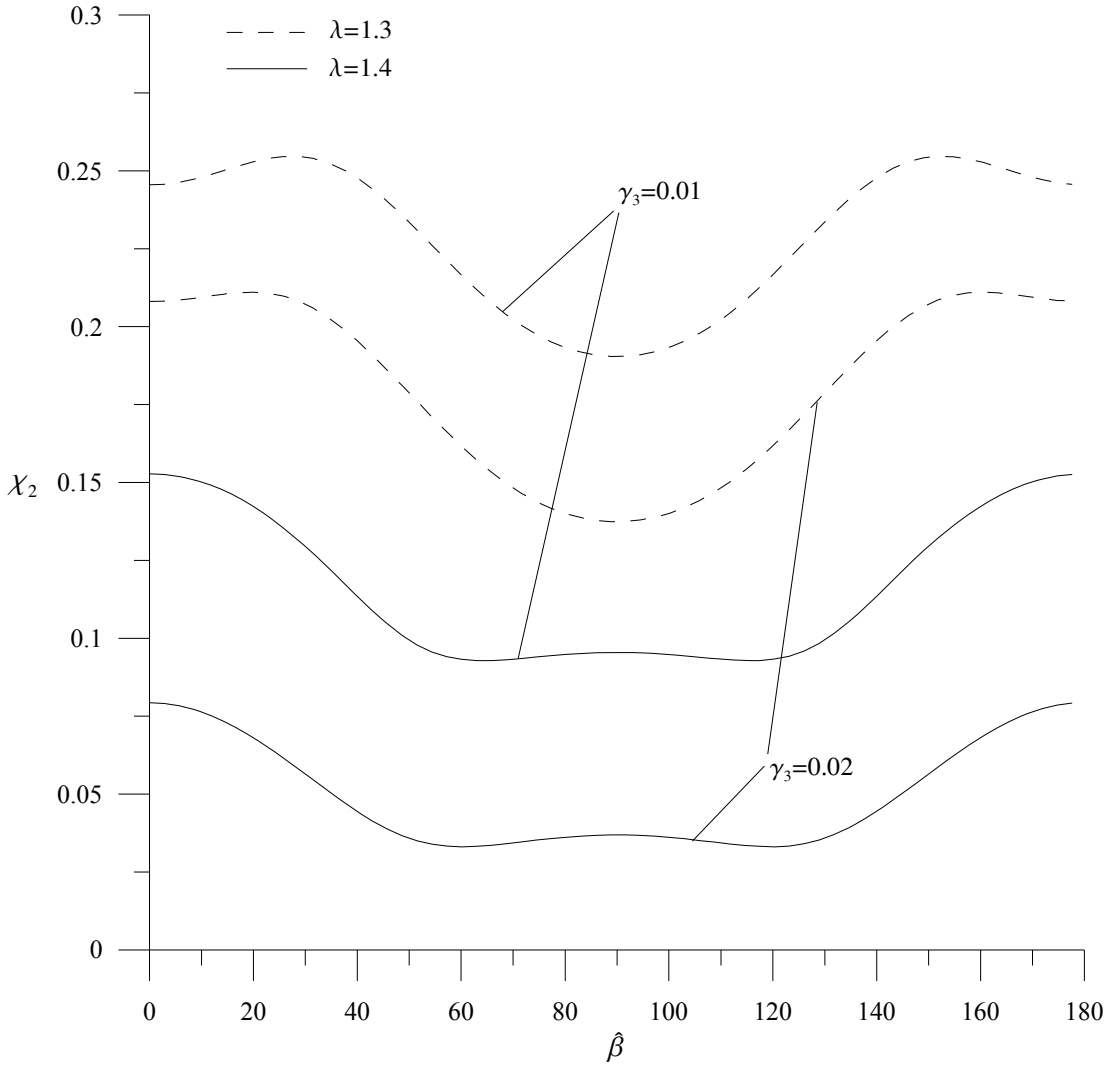
Şekil A.13: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



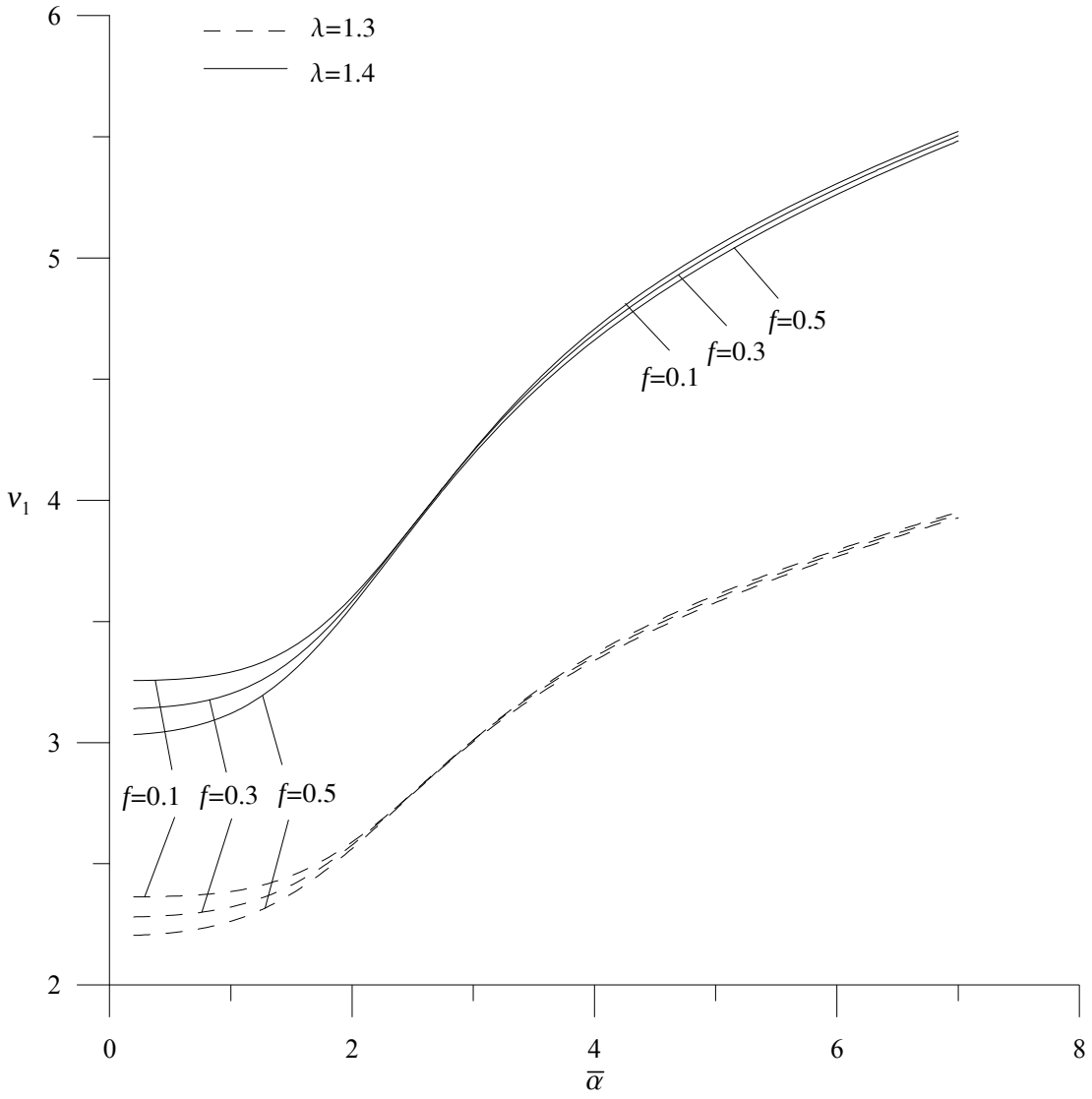
Şekil A.14: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



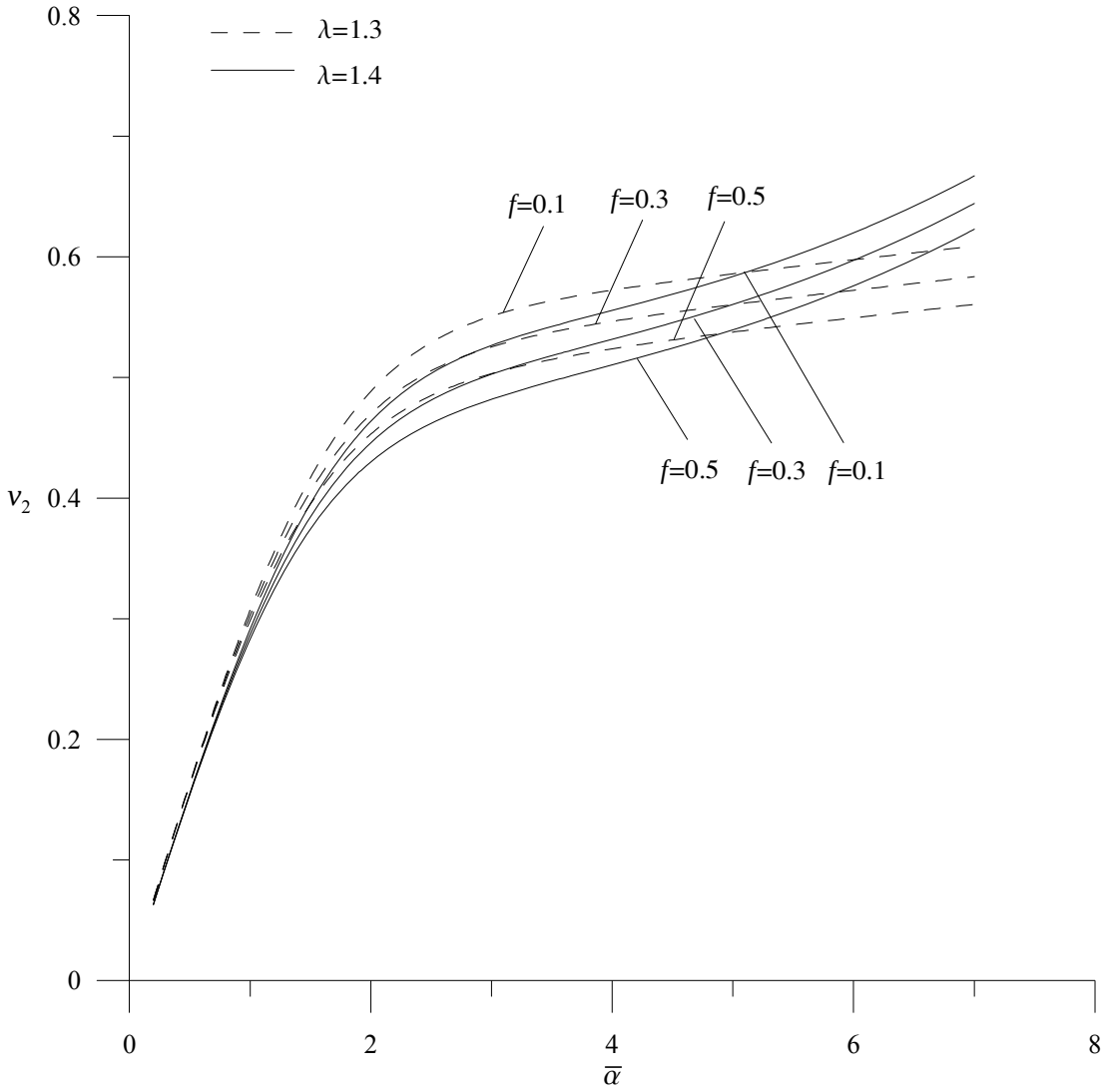
Şekil A.15: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



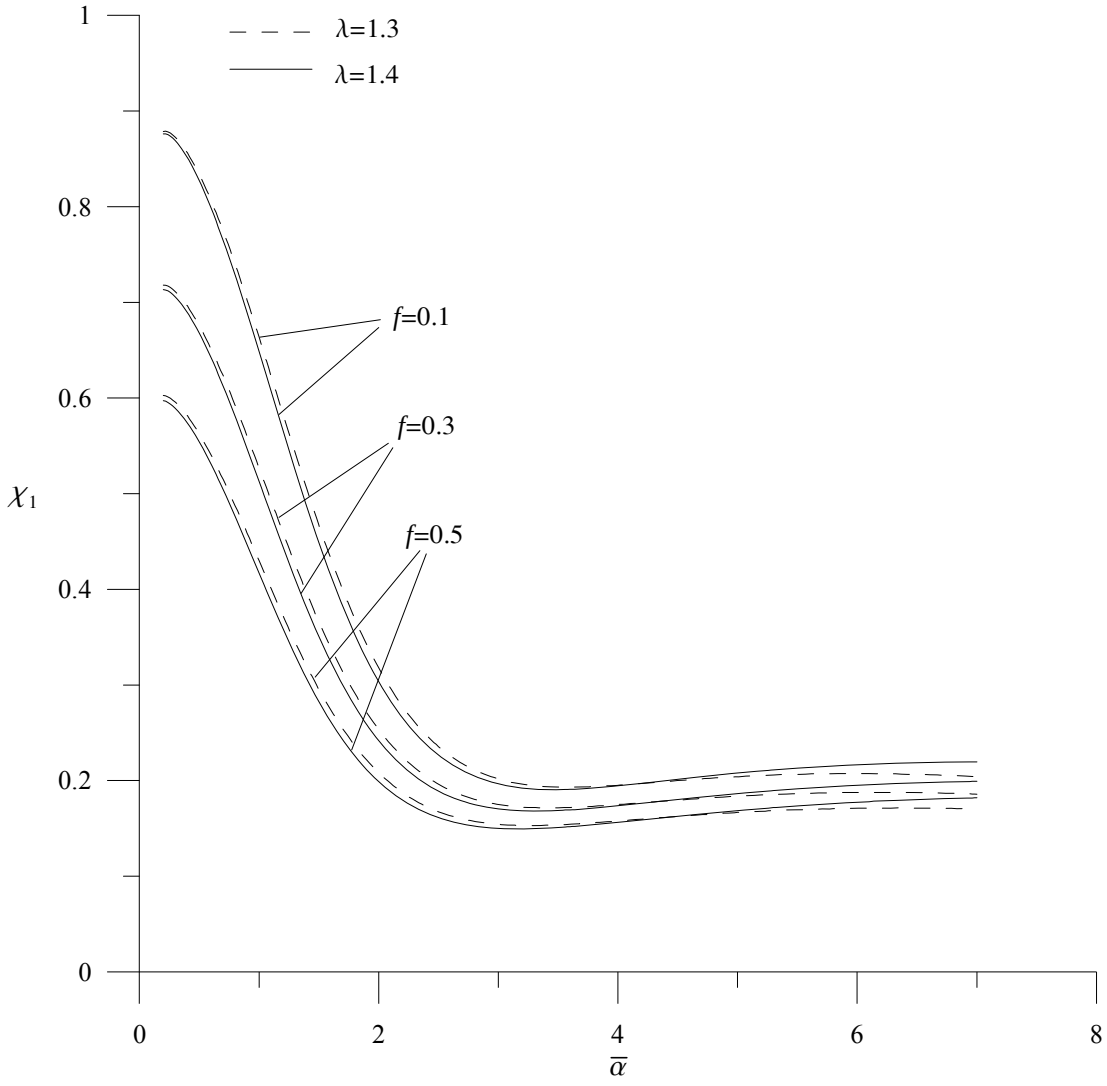
Şekil A.16: $\bar{\alpha} = 5,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.3,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\hat{\beta}$ açısına göre değişimi



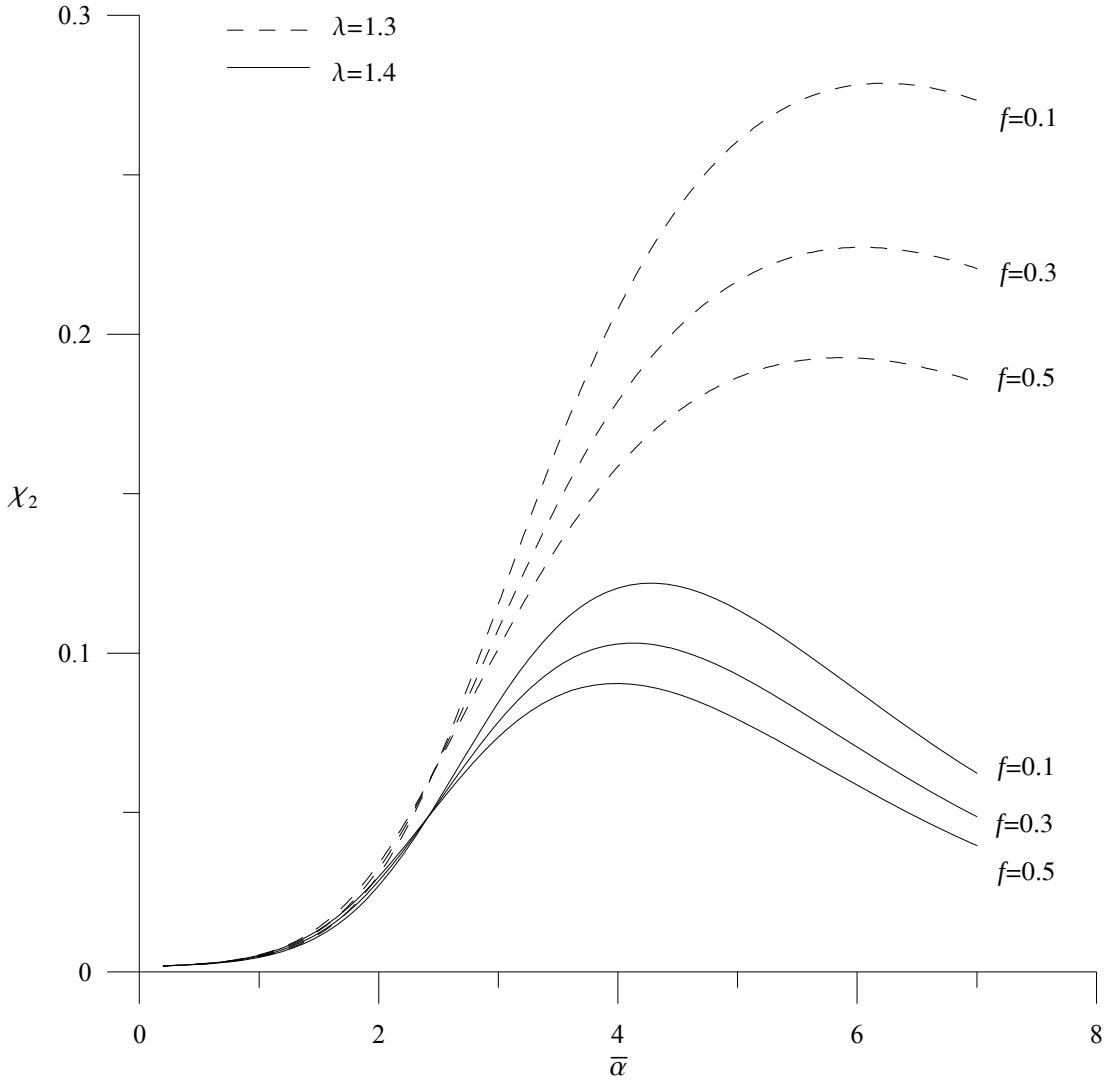
Şekil A.17: $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



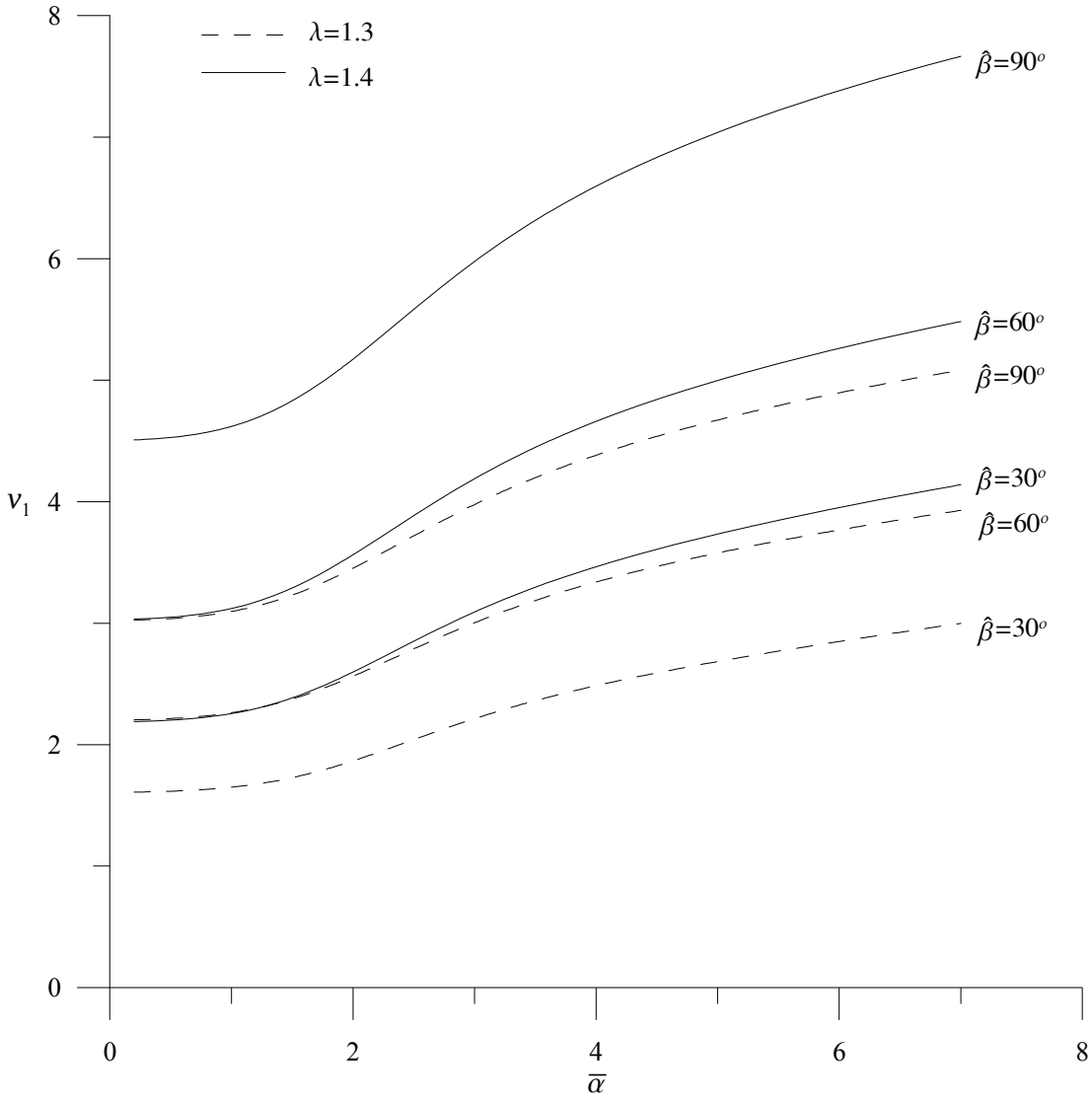
Şekil A.18: $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2 'nin $\overline{\alpha}$ 'ya göre değişimi



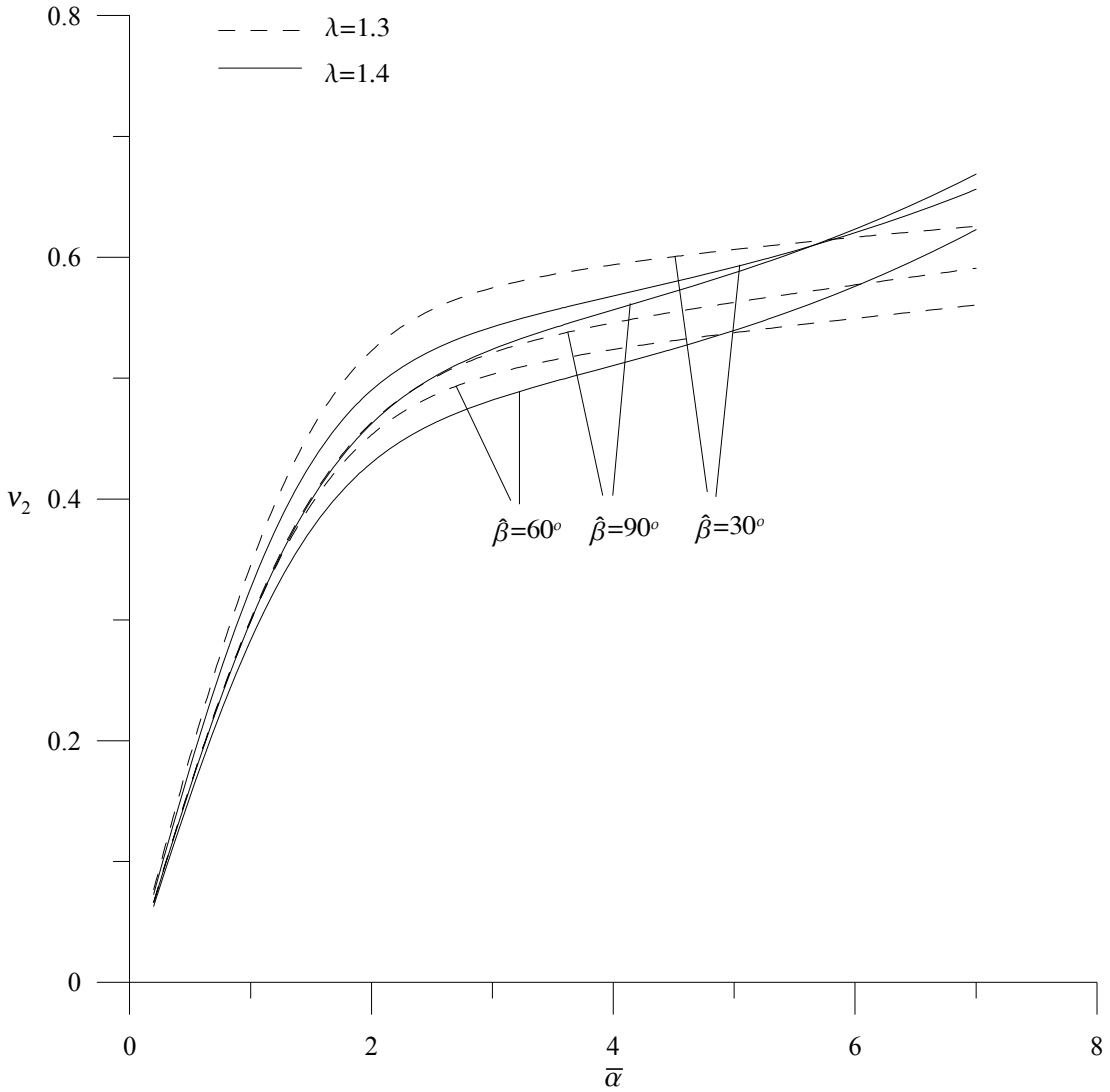
Şekil A.19: $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1 'in $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi



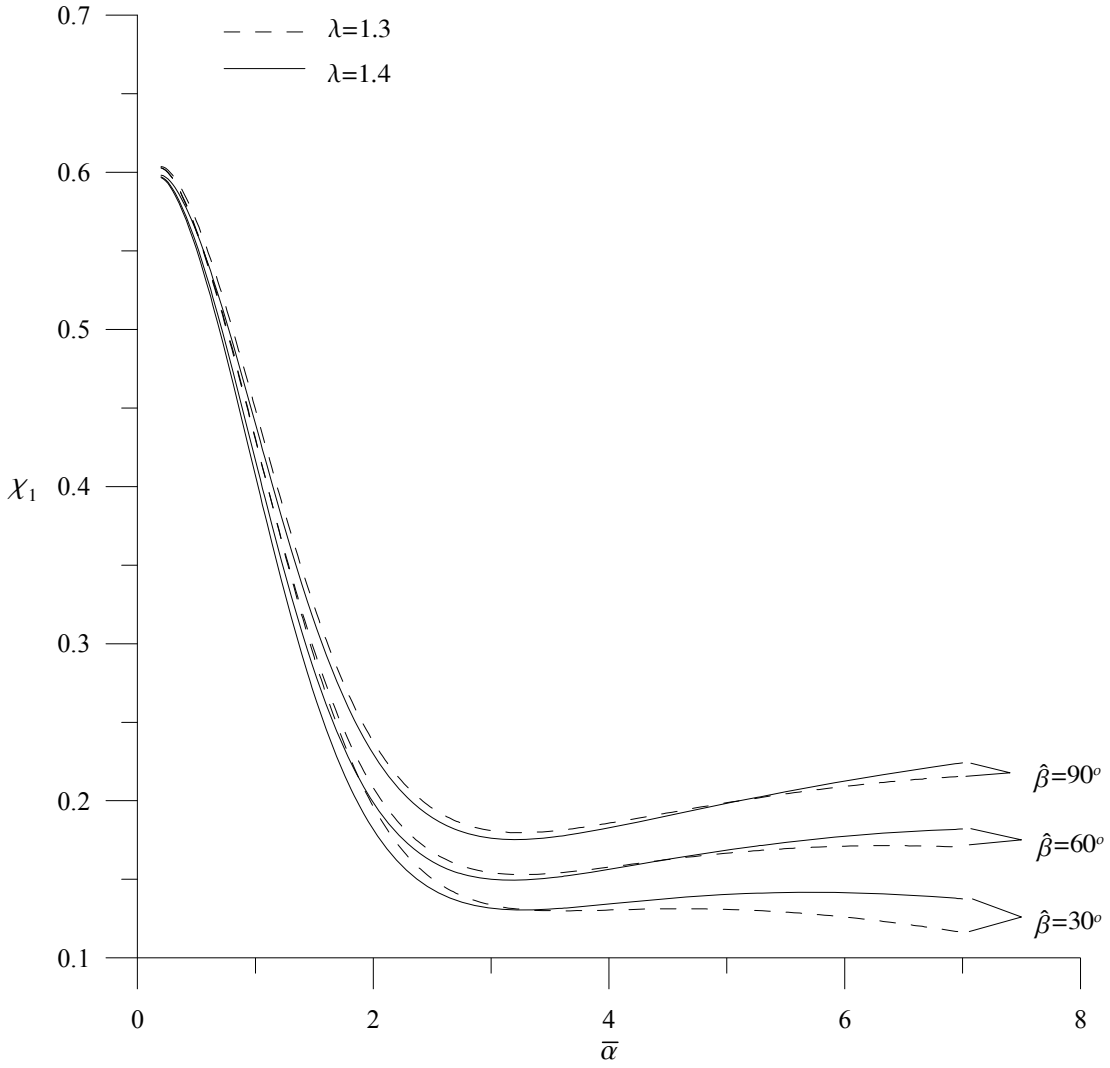
Şekil A.20: $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_3 = 0.01$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve f 'nin farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2 'nin $\bar{\alpha}$ 'ya göre değişimi



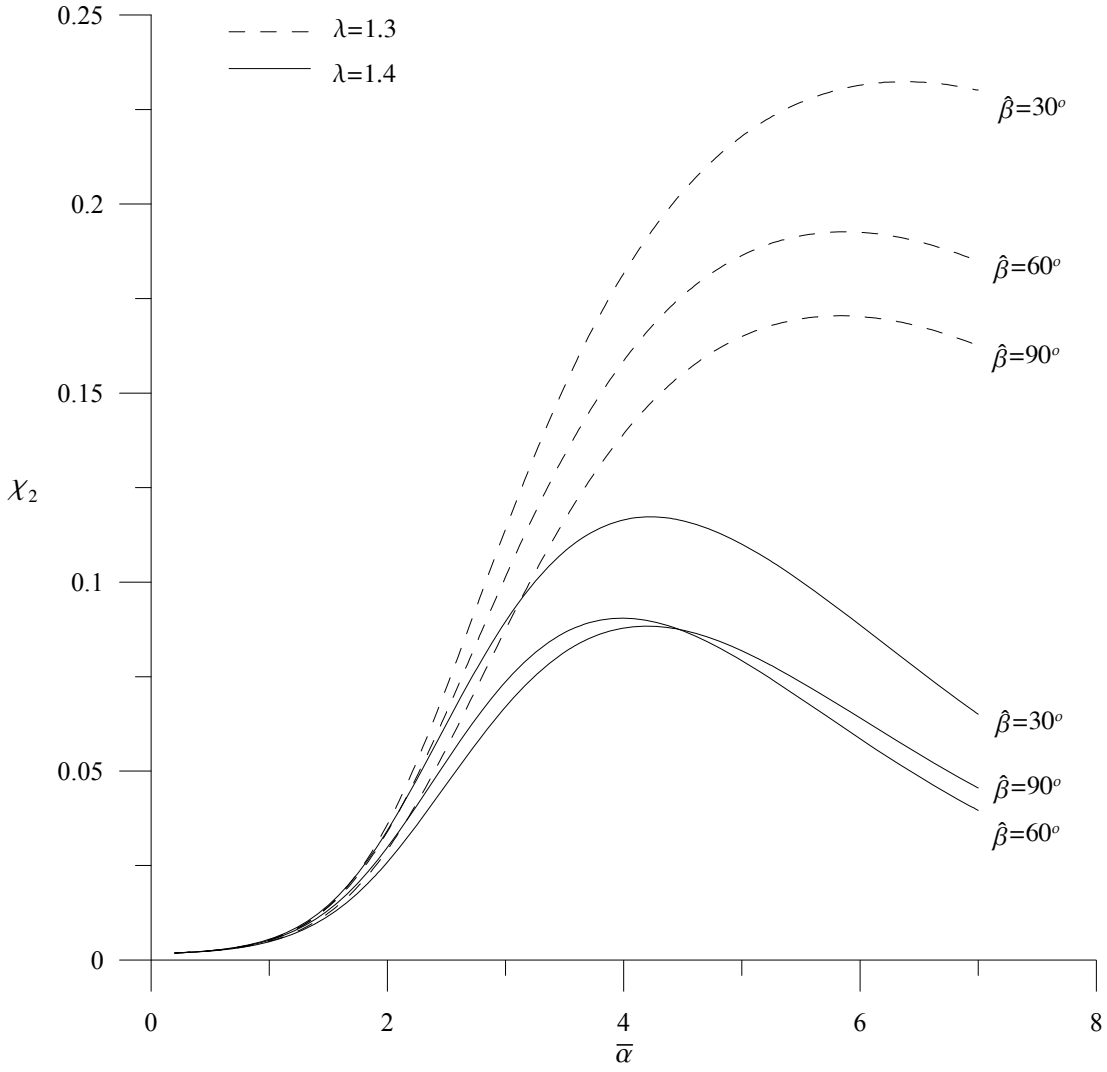
Şekil A.21: $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_3 = 0.01$, $f = 0.5$, $\omega\tau = 1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişimi



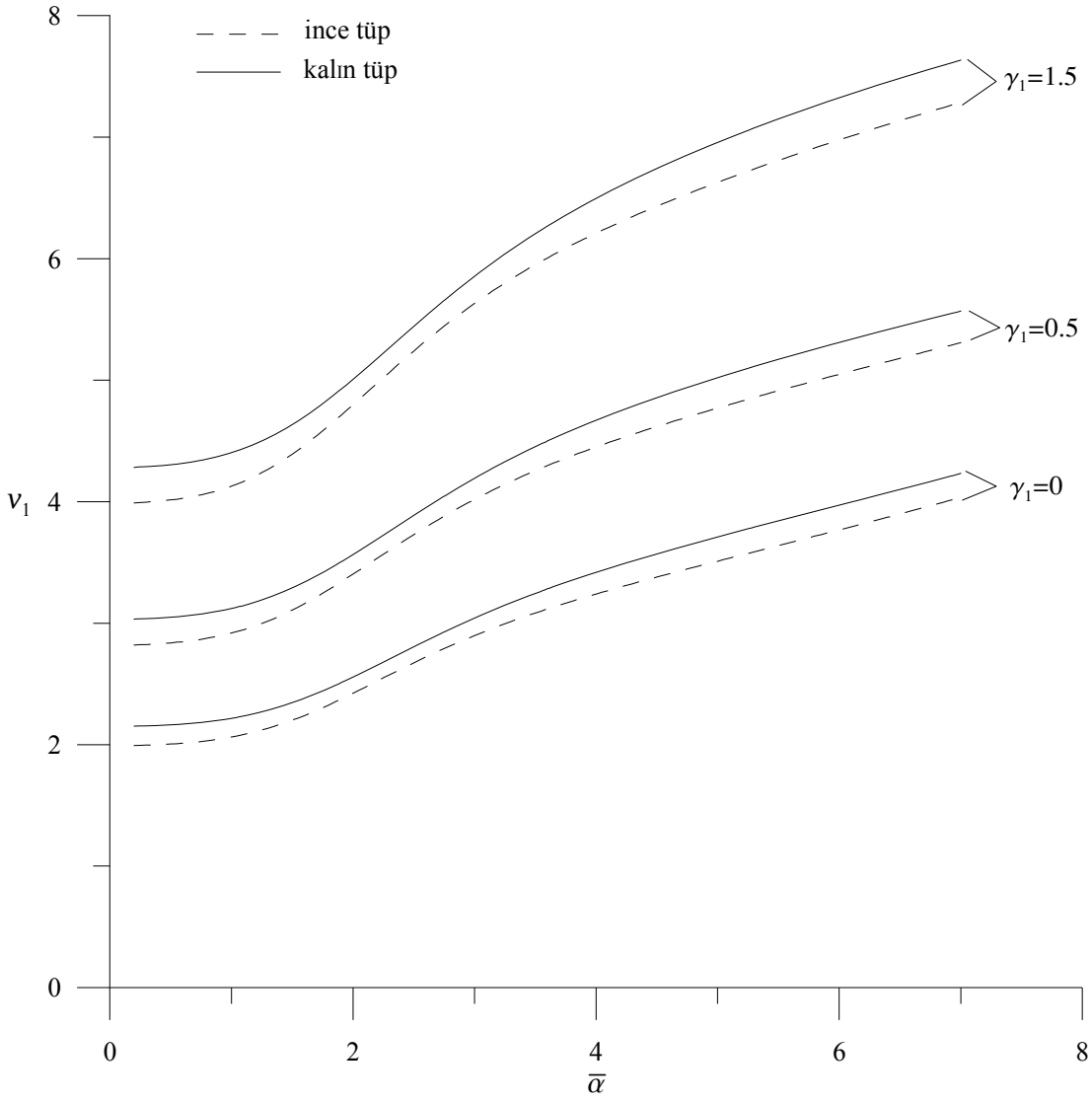
Şekil A.22: $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.5,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



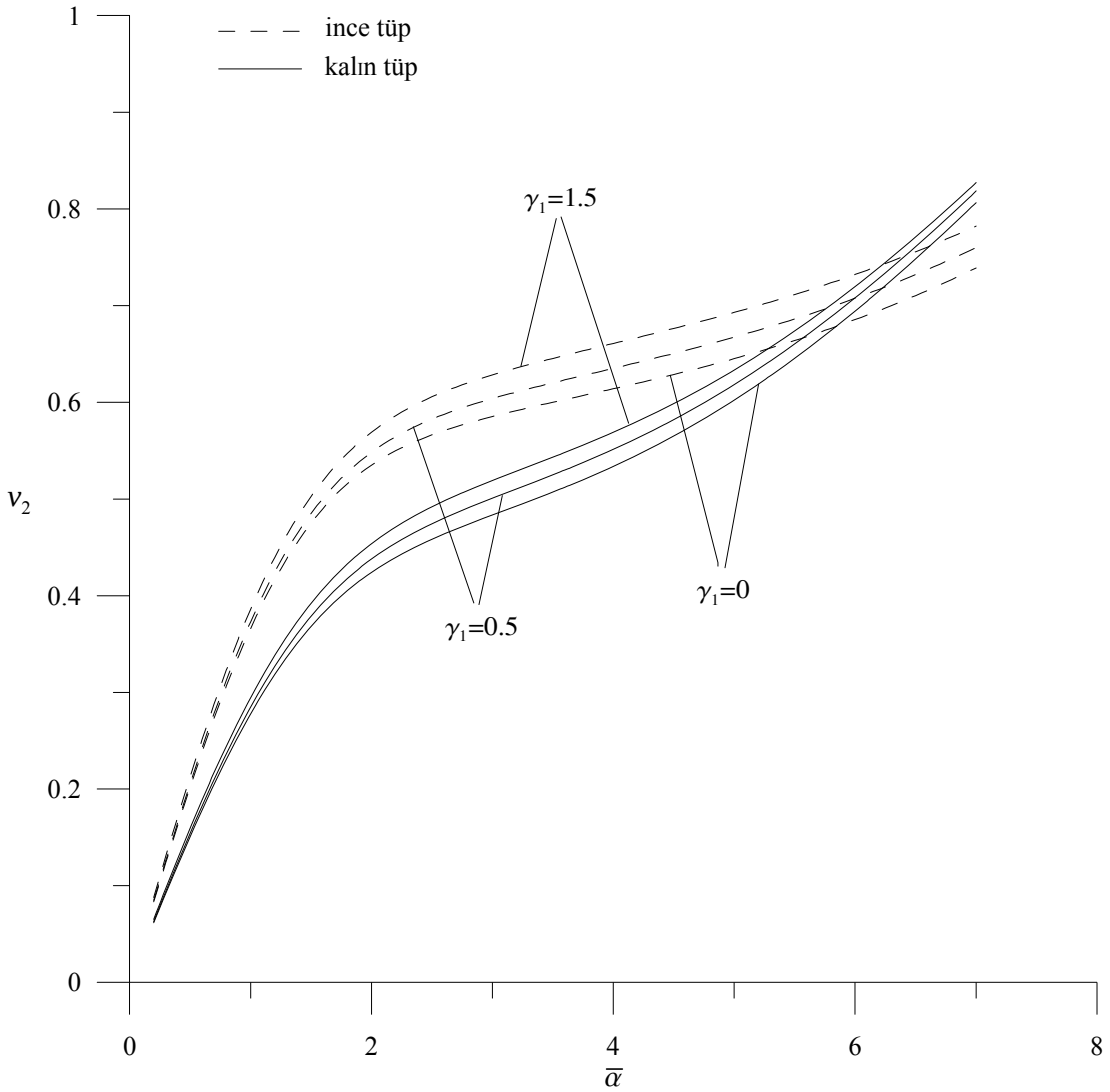
Şekil A.23: $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.5,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



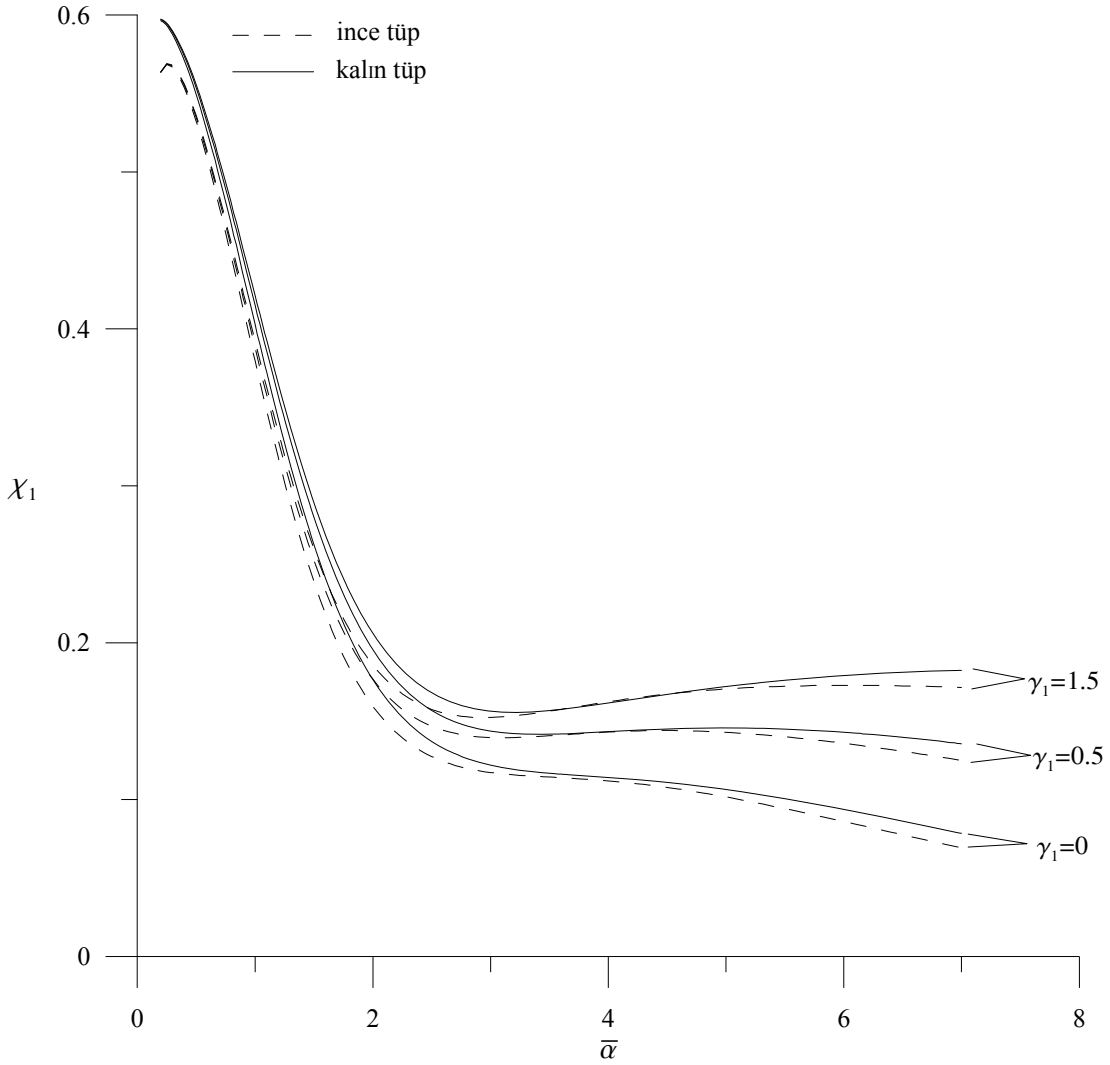
Şekil A.24: $\gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ f = 0.5,\ \omega\tau = 1$ iken λ ve $\hat{\beta}$'nın farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişimi



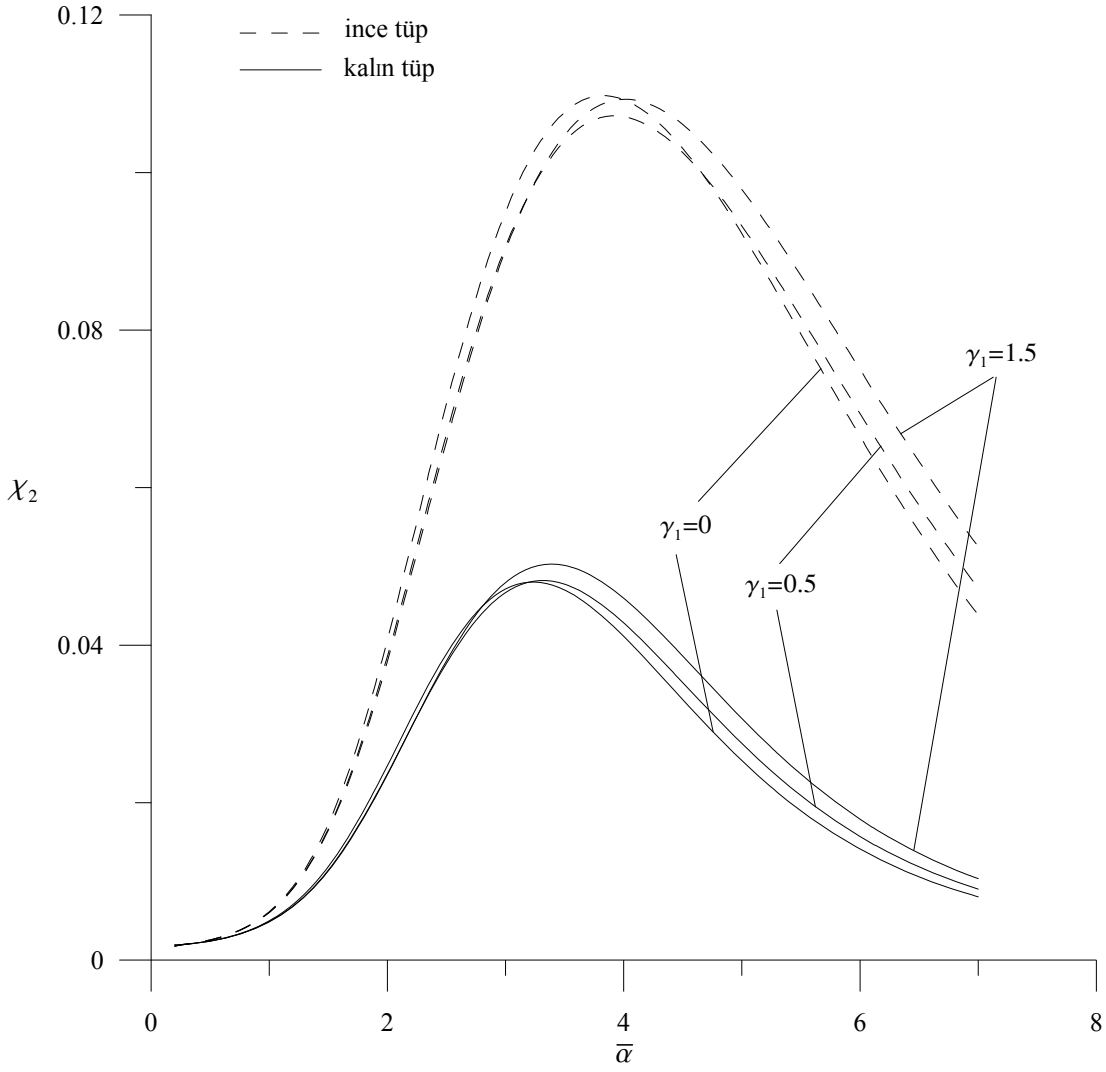
Şekil A.25: $\lambda = 1.4,\ \gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



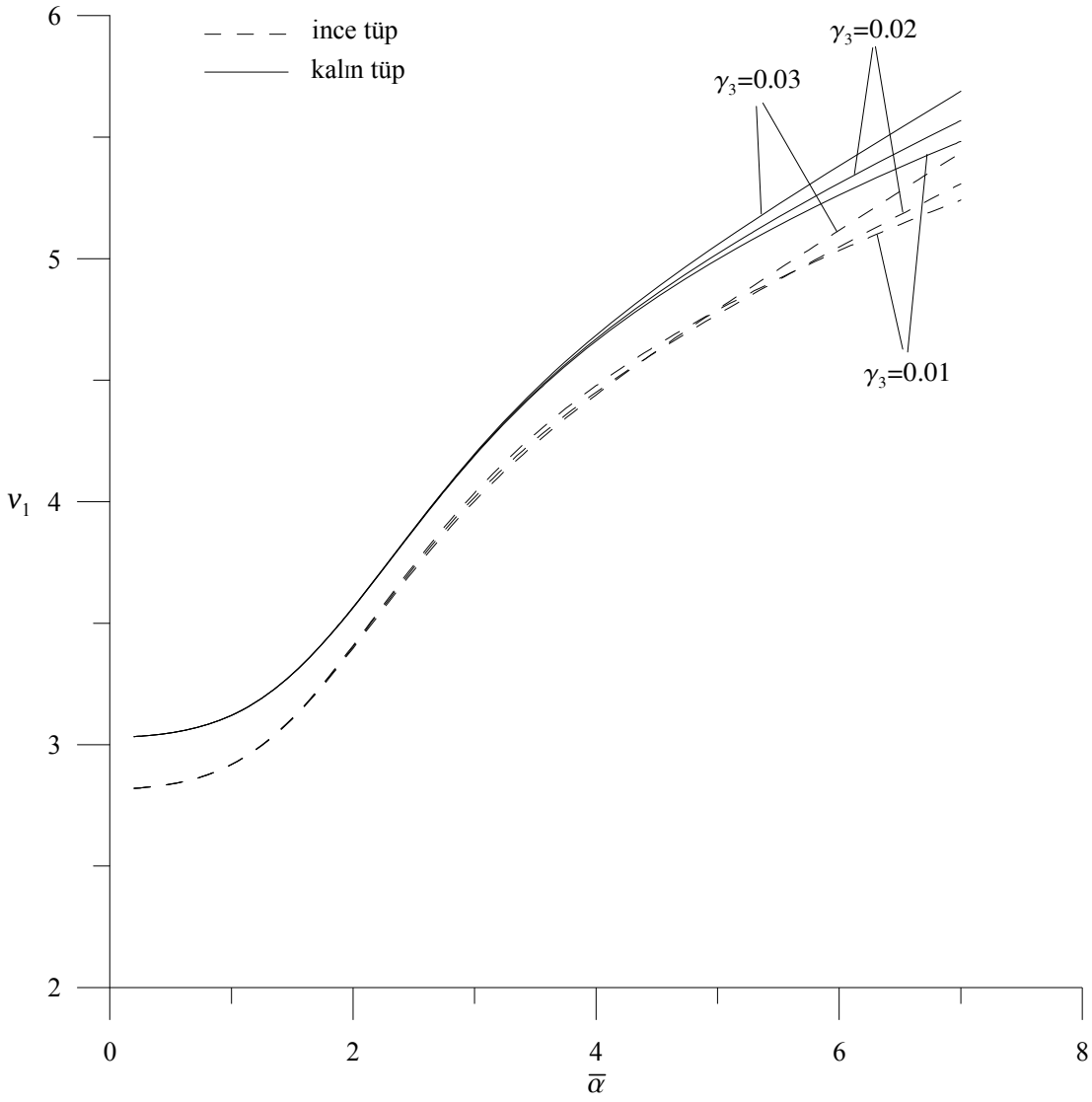
Şekil A.26: $\lambda = 1.4,\ \gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



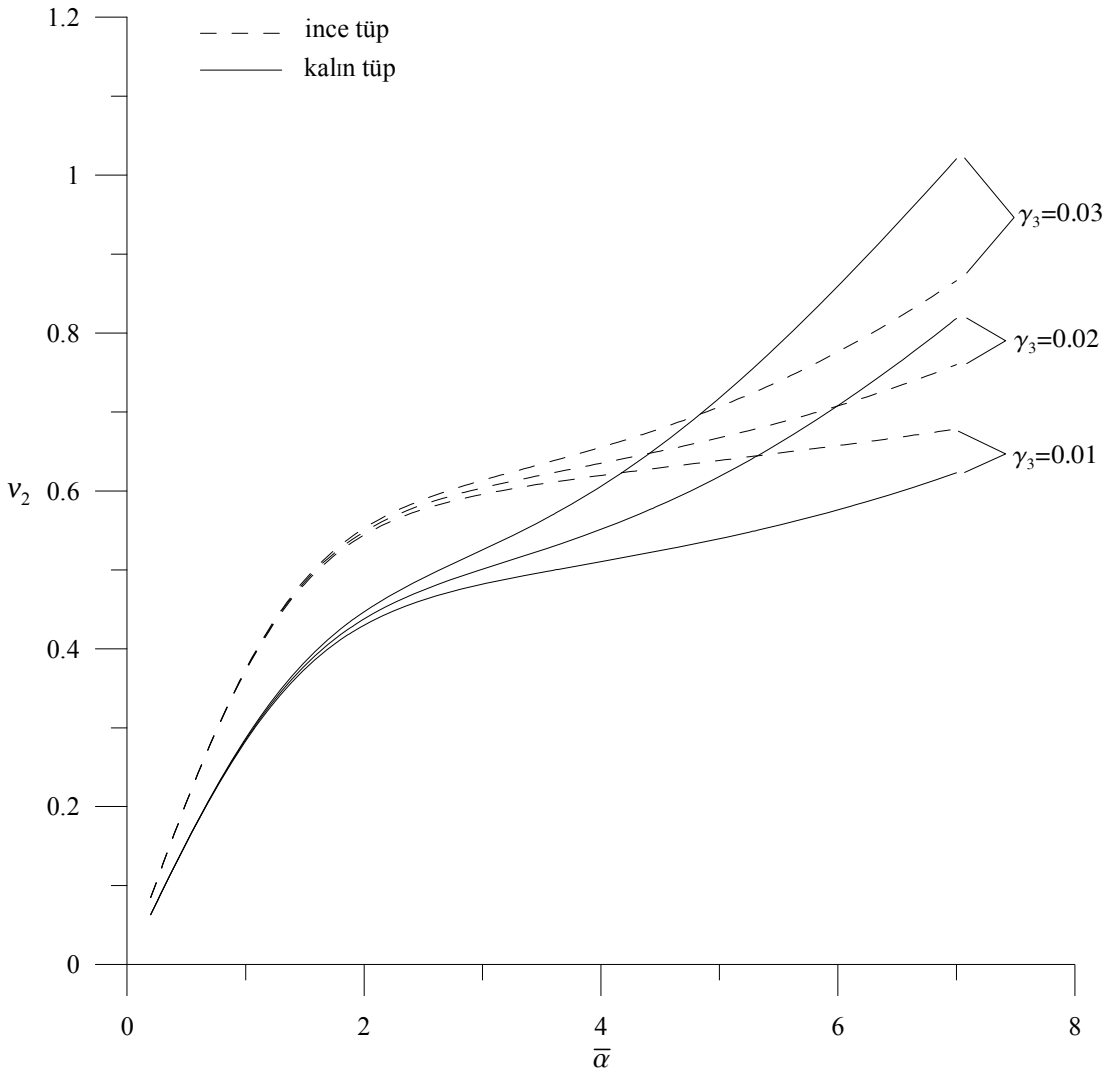
Şekil A.27: $\lambda = 1.4,\ \gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



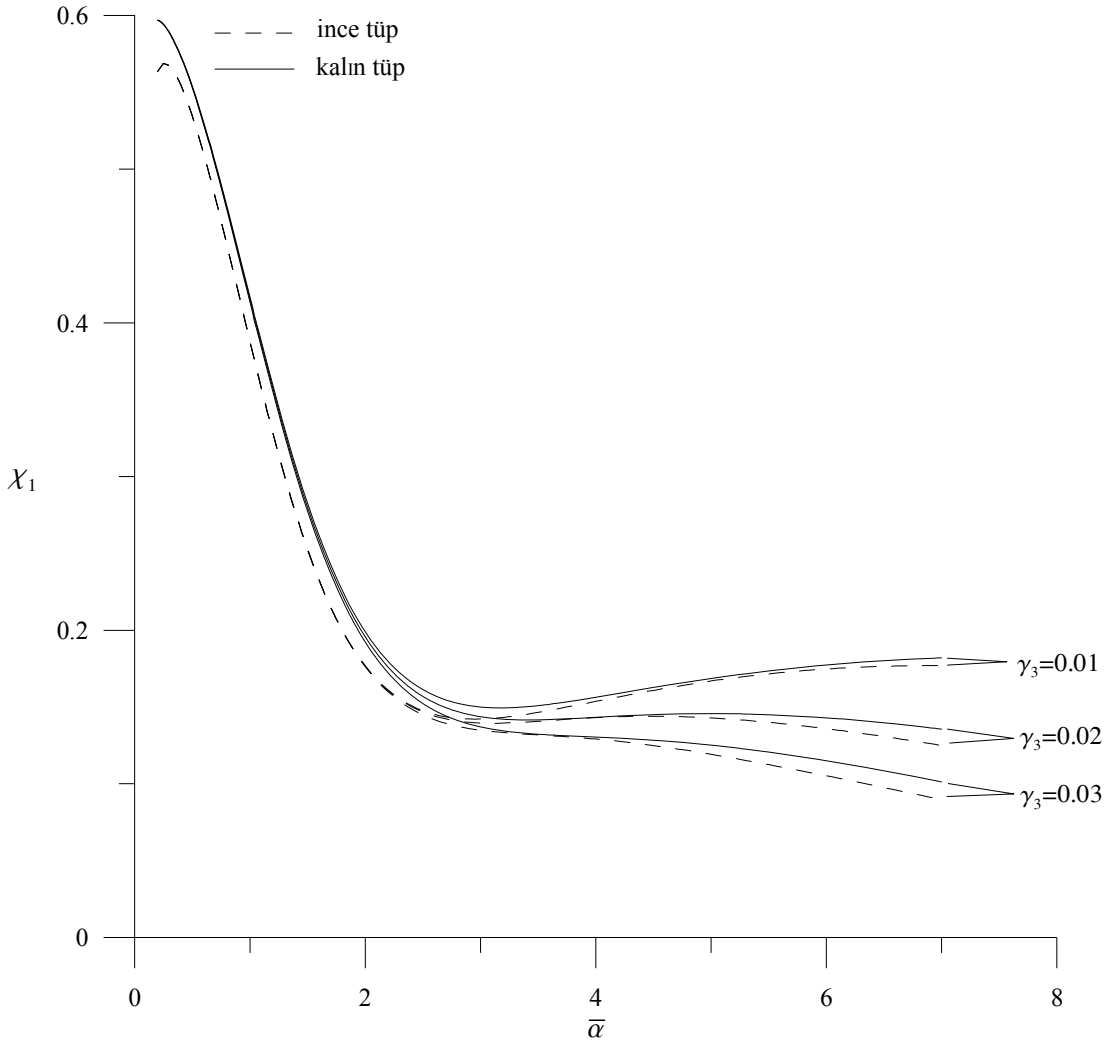
Şekil A.28: $\lambda = 1.4,\ \gamma_3 = 0.02,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_1'in farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



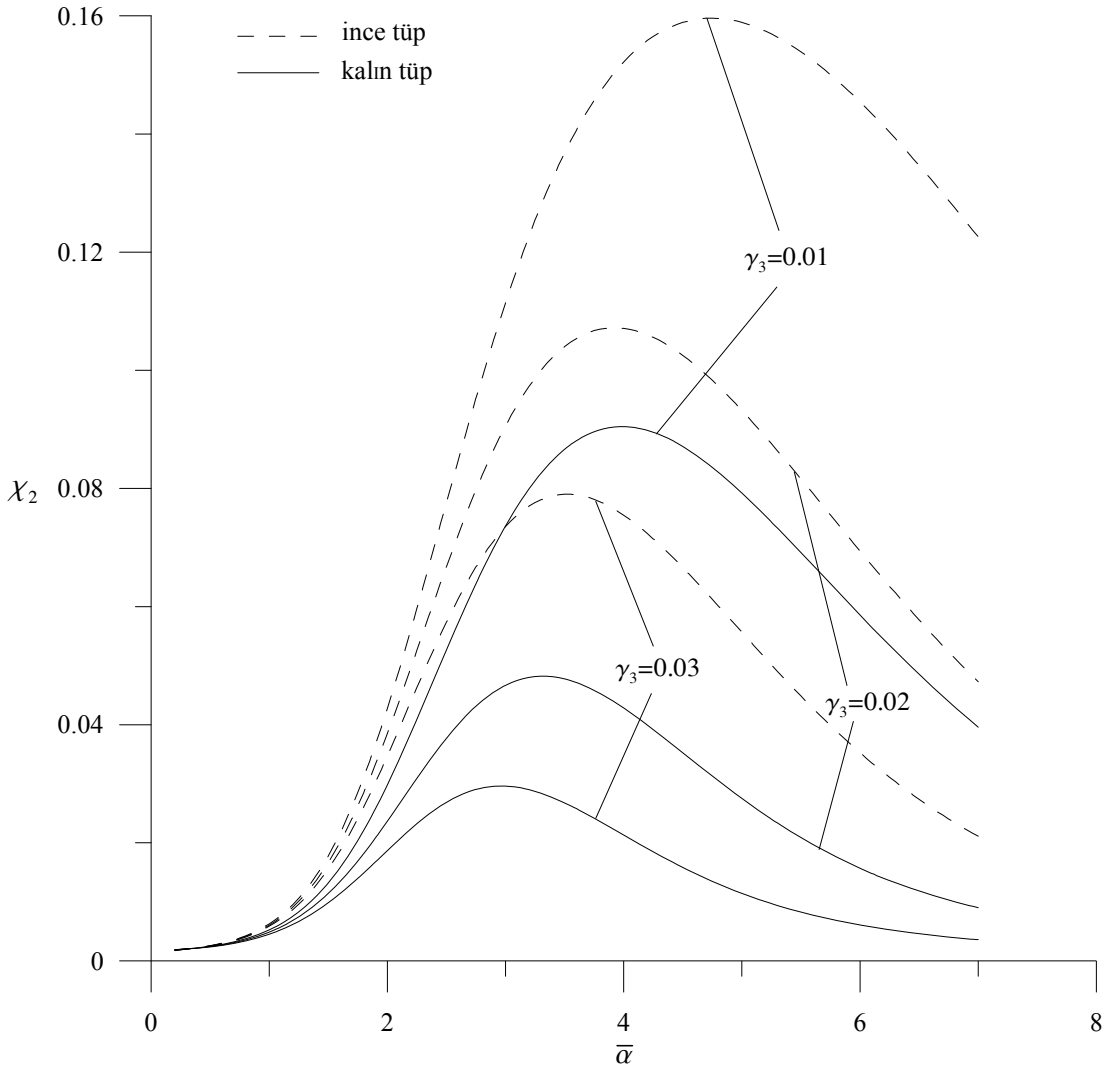
Şekil A.29: $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



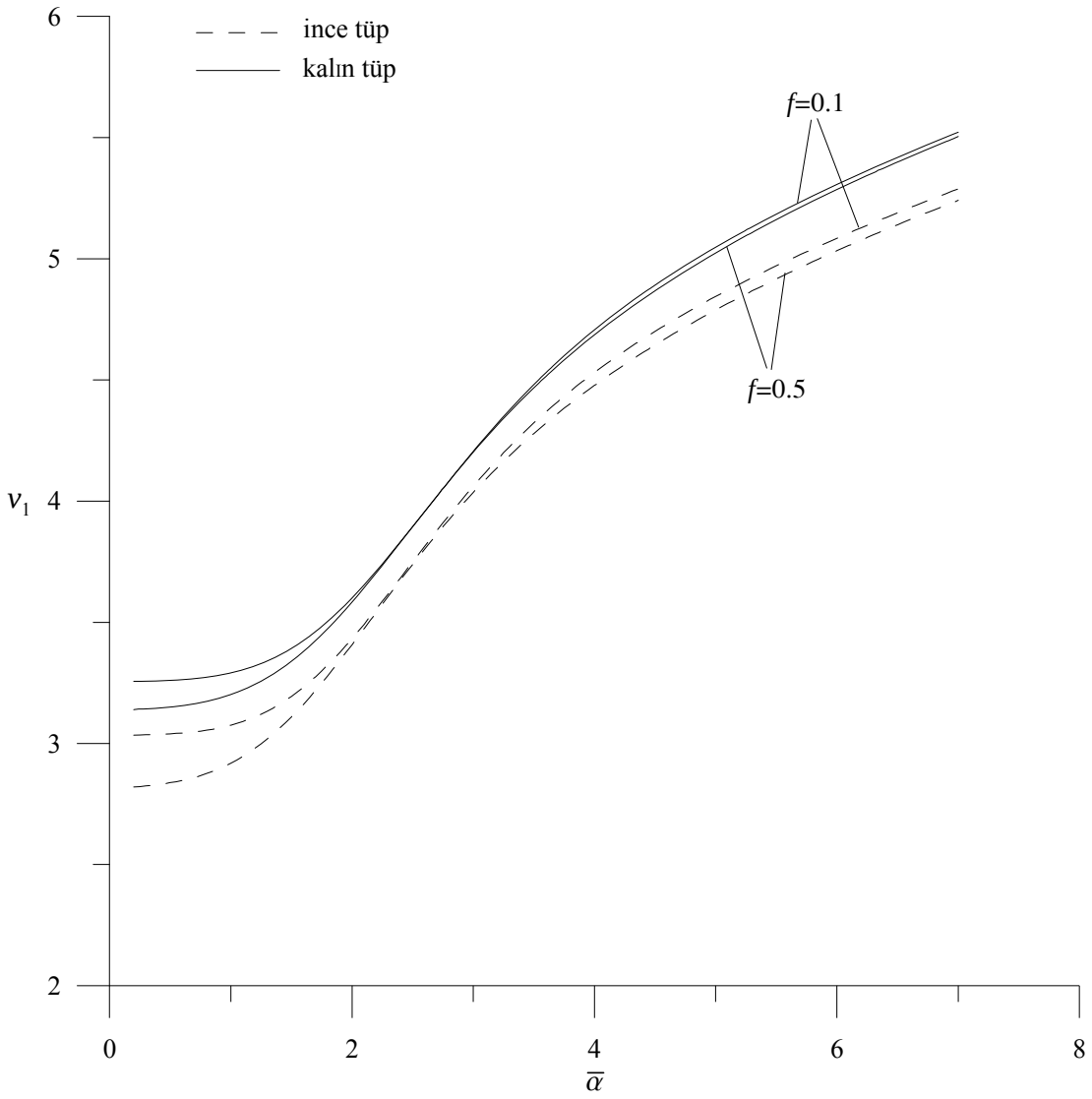
Şekil A.30: $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\bar{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



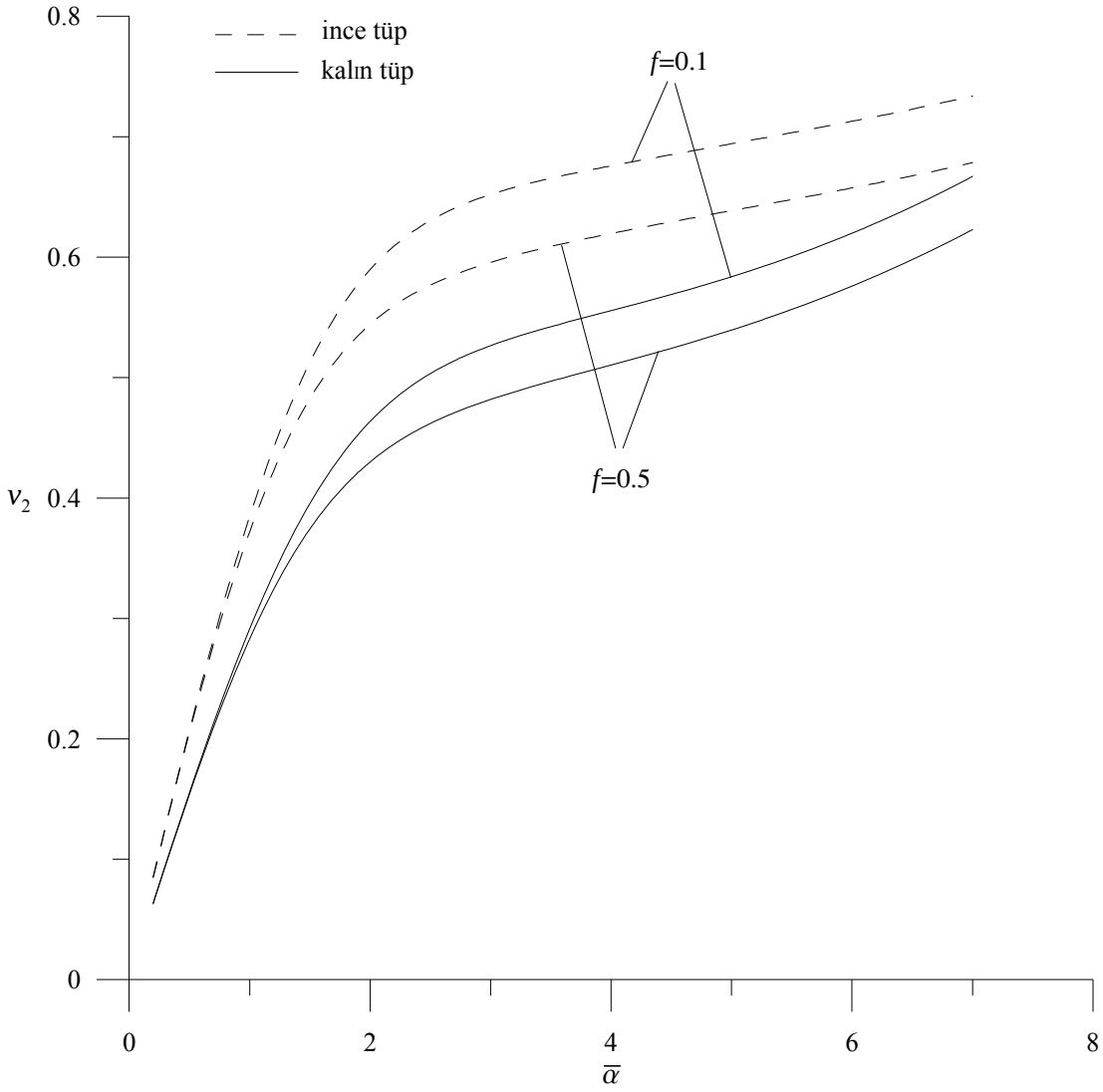
Şekil A.31: $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



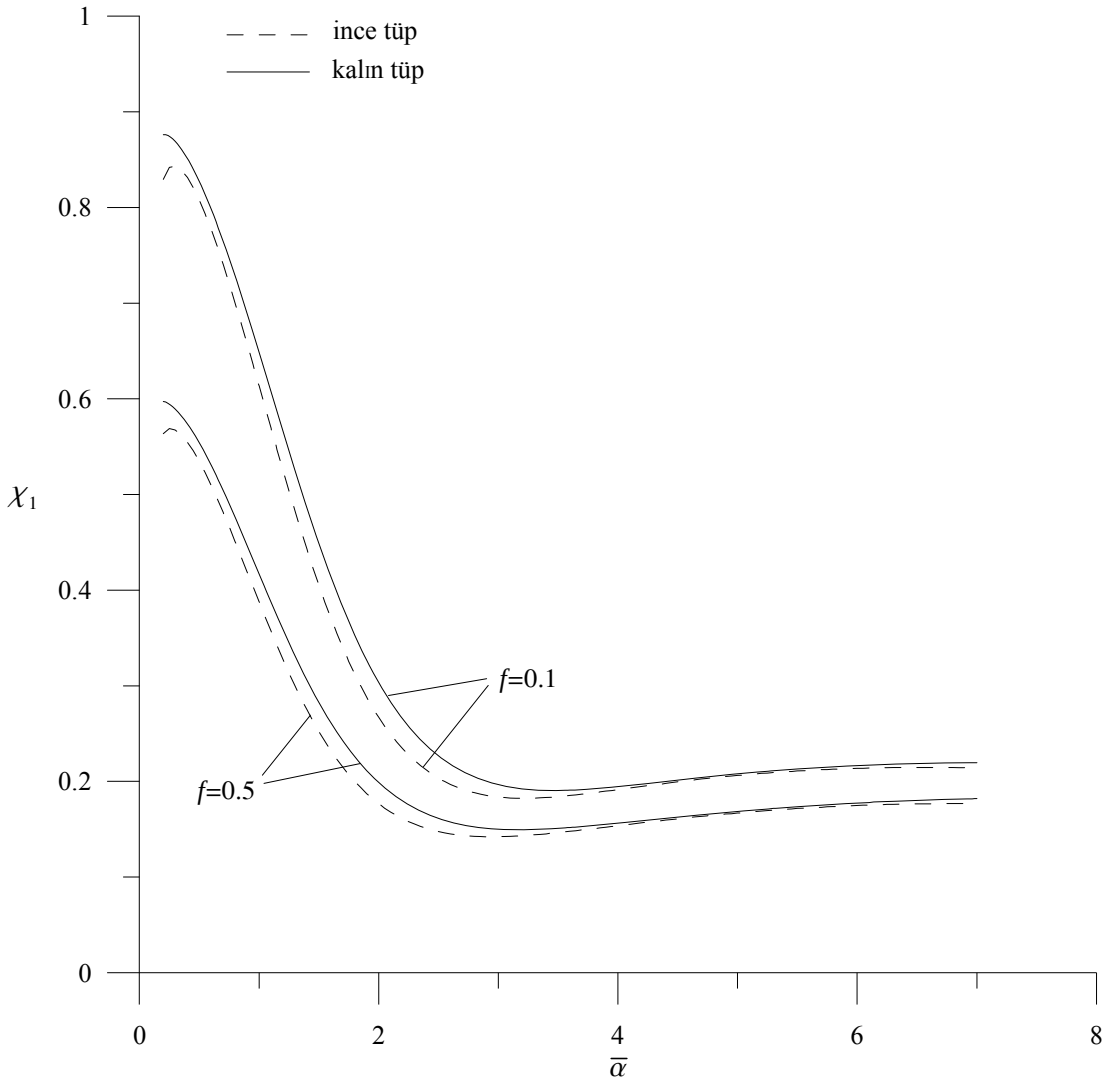
Şekil A.32: $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ f = 0.5,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken γ_3'ün farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



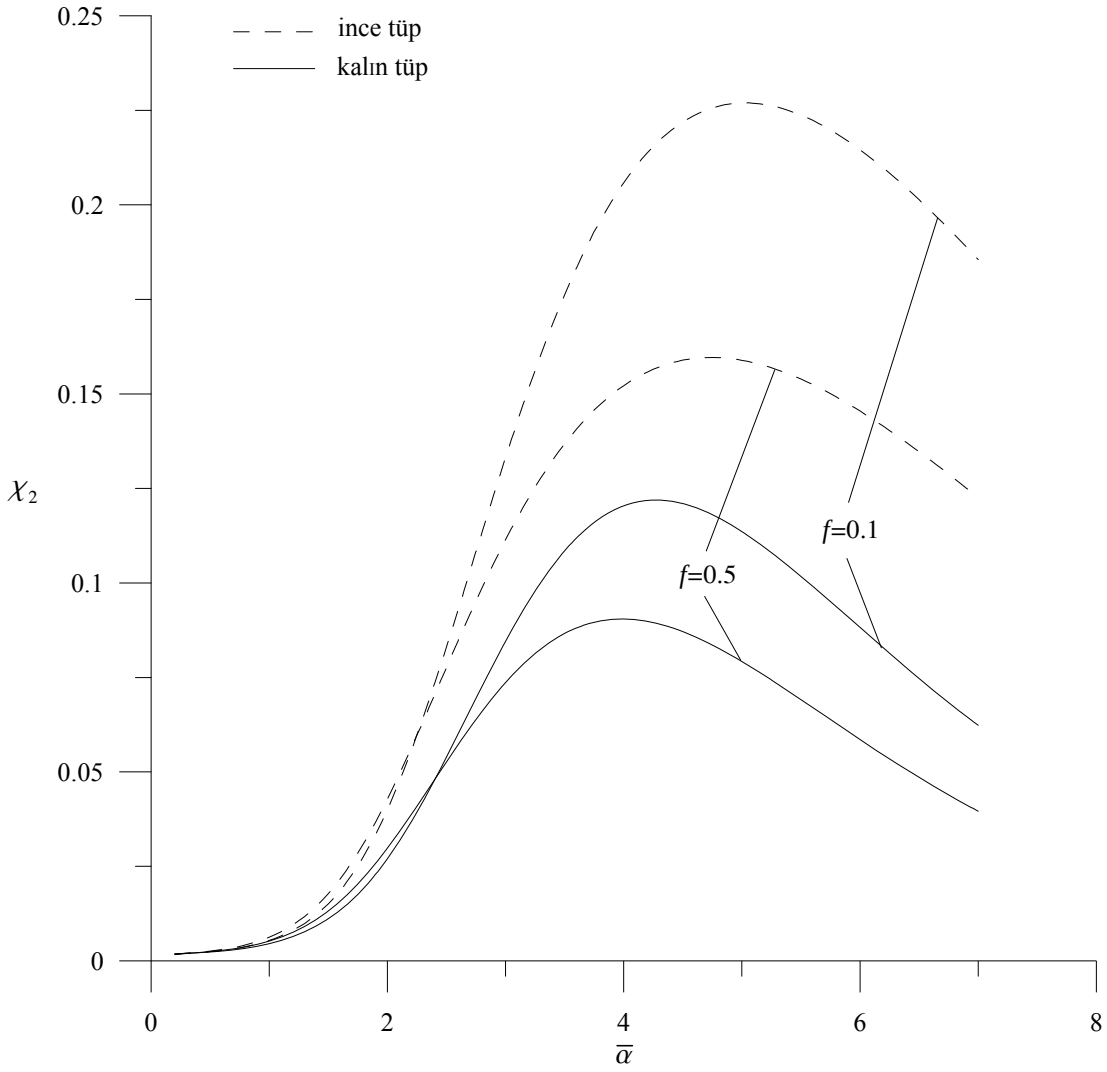
Şekil A.33: $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^\circ,\ \omega\tau = 1$ iken f 'nin farklı değerleri için, birincil dalga hızı v_1 'in $\overline{\alpha}$ 'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



Şekil A.34: $\lambda = 1.4,\ \gamma_1 = 0.5,\ \gamma_3 = 0.01,\ \hat{\beta} = 60^{\circ},\ \omega\tau = 1$ iken f 'nin farklı değerleri için, ikincil dalga hızı v_2'nin $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



Şekil A.35: $\lambda = 1.4$, $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_3 = 0.01$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken f 'nin farklı değerleri için, birincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_1'in $\overline{\alpha}$'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi



Şekil A.36: $\lambda = 1.4$, $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_3 = 0.01$, $\hat{\beta} = 60^\circ$, $\omega\tau = 1$ iken f 'nin farklı değerleri için, ikincil dalgaya ait taşıma katsayısı χ_2 'nin $\overline{\alpha}$ 'ya göre değişiminin ince ve kalın tüp için gösterilimi

ÖZGEÇMİŞ

İstanbul doğumlu olan Rahmiye ERGÜN, İstanbul Çamlıca Kız Lisesinden mezundur. Daha sonra İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği lisans ve ardından aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü, Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı, Sistem Analizi yüksek lisans programlarından mezun olmuştur. Doktora öğrenimini ise İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında tamamlamıştır. Hâlen İTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi Mühendislik Bilimleri Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.