İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAVADAN GÖNDERİLEN DÜZLEMSEL BİR DALGANIN, TOPRAK İÇİNE GÖMÜLÜ MÜKEMMEL İLETKEN BİR KÜREDEN SAÇILMASI

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Bayram ESEN
(504972031)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Ocak 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 24 Nisan 2003

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İnci AKKAYA
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Ercan TOPUZ
Doç. Dr. Sedef KENT
Prof. Dr. H. Ergun BAYRAKÇI (Bahçeşehir Ü.)
Prof. Dr. Selim ŞEKER (Boğaziçi Ü.)

NİSAN 2003

ÖNSÖZ

Öncelikle, bu tezin hazırlanması sırasında desteğini gördüğüm insanların burada sayamayacağım kadar çok olduğunu belirtmek isterim.

Tez danışmanlığımı kabul etme özverisinde bulunan, her türlü maddi ve manevi desteğini her zaman gördüğüm saygıdeğer hocam Prof. Dr. İnci AKKAYA'ya, bu çalışmanın bitmeyecek gibi geldiği zamanda beni yeniden aydınlatan ve yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. H. Ergun BAYRAKÇI'ya, yine büyük bir zamanını benimle beraber kullanan önce dostum sonra hocam olan Yard. Doç Dr. Ali YAPAR'a teşekkürü borç bilirim. Aynı anabilimdalında çalışan tüm arkadaşlarıma, özellikle Dr. Funda AKLEMAN'a, verdikleri destek ve güvenden dolayı teşekkür ederim.

Sevgili eşim ve çocuklarımın, çalışmam bitinceye kadar, gösterdikleri sabır, verdikleri güç için teşekkürlerimi sunarım.

Adını anmadan geçemeyeceğim, eğitim hayatımı yönlendiren ve yol gösteren sayın ağabeyim Mehmet ESEN'e de teşekkür ederim.

Nisan, 2003. Bayram ESEN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ v

ŞEKİL LİSTESİ vi

ÖZET x

SUMMARY xv

1. GİRİŞ 1

1.1. Toprağa Nüfuz Eden (Ground Penetrating) Radar 1

1.2. Mayın Araştırmaları 4

1.2.1 Genel Bilgi 4
1.2.2 Mayınların Sınıflandırılması 4
1.2.3 Sezici (Sensör) Teknolojisi 6
1.2.4 İşaret ve Görüntü İşleme Teknikleri 9

1.3. Tezin Konusu ve Yakın Tarihteki Benzer Araştırmalarla Karşılaştırılması 10

2. TOPRAK İÇİNDE GÖMÜLÜ MÜKEMMEL İLEKEN BİR KÜREDEN SAÇILMANIN TEORİSİ 13

2.1. Yaklaşık Çözüm ve Uygun Frekansın Seçilmesi 13

2.2. Problemin Formülasyonu ve Kesin Çözüm 16

2.2.1 Homojen bir Toprağa Gelen Düzlemsel bir Dalganın Kırılma ve Yansıması 16
2.2.2 Toprak İçinde Küre Varken Oluşan Alanlar 17
2.2.3 Alanların Küresel koordinatlarla İfadeleri ve Çözümler 23
2.2.4 $z = D$ düzleminden Kırılma ve Yansıma 36
2.2.5 b_n ve c_n Saçılma Katsayılarının Hesabı 42

3. SONUÇLAR 49

4. İLERDE YAPILABİLECEK DİĞER ÇALIŞMALAR 55

4.1. İletken Olmayan Küresel Hedefler 55

4.2. Silindirik Hedefler 55

4.3. Hedef Tipinin Tespiti 58

KAYNAKLAR **59**

EKLER **63**

ÖZGEÇMİŞ **96**

TABLO LİSTESİ

		Sayfa No
Tablo 2.1.	Seçilmesi uygun olan frekans bölgeleri …….....….....	15
Tablo 3.2.	Farklı frekans değerlerinde $\left\|E_y\right\|$'nin aldığı maksimum değerler (μV/m)……......	49
Tablo 3.2.	Farklı frekans değerlerinde $\left\|E_y\right\|$'nin maksimum olduğu ρ_0 değerleri (cm).....	53

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 : Yer-yüzünün bir kısmında tanımlanmış koordinat sistemi…….7
Şekil 2.1 : Toprak içinde zayıflama sabitinin frekansla değişimi……... 13
Şekil 2.2 : Kayıpsız bir ortamda bulunan a yarıçaplı iletlen bir kürenin radar kesitinin $2\pi a/\lambda$ ile değişimi……....…....14
Şekil 2.3 : Gelen, yansıyan ve kırılan alanlar……..16
Şekil 2.4 : Problemin Geometrisi…… 18
Şekil 2.5 : Problemdeki çeşitli alanlar……21
Şekil 2.6 : Problemin Geometrisine ait $z = 0$ kesiti…..……...34
Şekil 2.7 : $r = a$ ve $z = D$ 'de sınır koşullarının uygulanması……...37
Şekil 3.1 :a=15 cm, f=1 GHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının y -bileşeni (kuru toprak)……... 50
Şekil 3.2 :a=15 cm, f=170 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının y -bileşeni (nemli toprak)…….…….. 50
Şekil 3.3 :a=15 cm, f=100 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının y -bileşeni (çamur)……... 51
Şekil 3.4 :a=15 cm, f=1 GHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının x -bileşeni (kuru toprak)…….. 51
Şekil 3.5 :a=15 cm, f=170 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının x :bileşeni (nemli toprak)……..…...52
Şekil 3.6 :a=15 cm, f=100 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının x :bileşeni (çamur)…….…….….52
Şekil 3.7 : $\Delta z = sabit$ düzleminde alıcı antenler, besledikleri göstericiler (☋) ve göstericileri maksimum işaretle uyarılmış olan (✹.) 4 antenin merkezindeki hedefin (x, y) koordinatlarının bulunması ……54
Şekil 4.1 : Toprak içindeki R_0-yarıçaplı, h-kalınlıklı silindirik hedefin kesit görünümü …….……..55
Şekil 4.2 :Küresel hedef tespitinde kullanılan alıcı anten dizilerini, R_0 yarıçaplı silindirik hedef için kullanılması ……...58
Şekil A.1a :a=15 cm, f=1 GHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının z -bileşeni (kuru toprak)……..63
Şekil A.1b :a=15 cm, f=1 GHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının genliği (kuru toprak)……....63
Şekil A.2a :a=15 cm, f=170 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının z -bileşeni (nemli toprak)……..…….64
Şekil A.2b :a=15 cm, f=170 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının genliği (nemli toprak)……..……...64
Şekil A.3a :a=15 cm, f=100 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının z -bileşeni (çamur)…….65
Şekil A.3b :a=15 cm, f=100 MHz, için Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının genliği (çamur)…….……..65

Şekil A.4a : Kuru toprakta f=100 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 66

Şekil A.4b : Kuru toprakta f=100 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 66

Şekil A.4c : Kuru toprakta f=100 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....67

Şekil A.4d : Kuru toprakta f=170 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....67

Şekil A.4e : Kuru toprakta f=170 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....68

Şekil A.4f : Kuru toprakta f=170 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....68

Şekil A.4g : Kuru toprakta f=1 GHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....69

Şekil A.4h : Kuru toprakta f=1 GHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....69

Şekil A.4i : Kuru toprakta f=1 GHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir.
($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$,
$\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$).....70

Şekil A.5a : Nemli toprakta f=100 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 70

Şekil A.5b : Nemli toprakta f=100 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 71

Şekil A.5c : Nemli toprakta f=100 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 71

Şekil A.5d : Nemli toprakta f=170 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 72

Şekil A.5e : Nemli toprakta f=170 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 72

Şekil A.5f : Nemli toprakta f=170 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 73

Şekil A.5g : Nemli toprakta f=1 GHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 73

Şekil A.5h : Nemli toprakta f=1 GHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 74

Şekil A.5i : Nemli toprakta f=1 GHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 74

Şekil A.6a : Çamurda f=100 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 75

Şekil A.6b : Çamurda f=100 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 75

Şekil A.6c : Çamurda f=100 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 76

Şekil A.6d : Çamurda f=170 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 76

Şekil A.6e : Çamurda f=170 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 77

Şekil A.6f : Çamurda f=170 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 77

Şekil A.6g : Çamurda f=1 GHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 78

Şekil A.6h : Çamurda f=1 GHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 78

Şekil A.6i : Çamurda f=1 GHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \mp 2^o, 135^o \mp 2^o, 225^o \mp 2^o, 315^o \mp 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \mp 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \mp 6^o$, $\phi_V = 45^o \mp 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \mp 10^o$)..... 79

HAVADAN GÖNDERİLEN DÜZLEMSEL BİR DALGANIN, TOPRAK İÇİNE GÖMÜLÜ MÜKEMMEL İLETKEN BİR KÜREDEN SAÇILMASI

ÖZET

Bu tezin konusu, düzlemsel bir dalganın kayıplı dielektrik içindeki mükemmel iletken bir küreden saçılması'dır. Tomografi, jeoloji, arkeoloji ve askeri araştırmalarda bu konudan çokça bahsedilir. Daha önceki çalışmalarda, integral denklemler çözülmüş ve moment metod kullanılmıştır. Böylece çözüm çok uzun zaman almakta ve hassasiyet önemli derecede azalmaktadır.

Bu çalışmada, moment metodu ya da herhangi bir integral denklem kullanılmadan kesin bir çözüm elde edilmiştir. Hem istenen doğruluk seviyesine ulaşılmış hem de hesaplama süresi kısalmıştır.

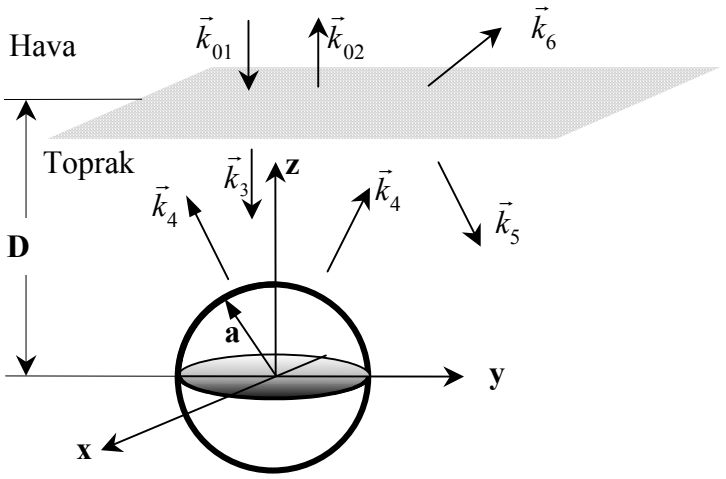
Varılan sonuçlar, birbirine dik iki yatay eksen boyunca, toplam $m \times n$ ölçüm alması gereken, toprağa nüfuz eden ve C-tarama yapan bir radarın sonuçları ile karşılaştırılabilir. Bu çalışmanın sonuçları kullanılarak, düzlemsel dipollerden oluşan bir dizi ile gömülü hedef, bir veya iki işlemle, dedekte edilebilir.

Boş-uzayda bulunan iletken bir kürenin radar-kesiti kesin formüllerle bulunmuştur. Bu sonuçlardan, belli frekans bölgeleri için radar-kesitinin gerçek değerinden (πa^2) daha büyük olduğu görülmüştür. Bu frekans bandları şu şekildedir (Tablo 1):

Tablo 1. Bir küreden geri-saçılma için frekans bantları .

1. tepe	$2.86 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 7.16 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
2. tepe	$9.55 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 12.89 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
3. tepe	$15.25 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 18.7 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
4. tepe	$21 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 24.11 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
5. tepe	$26.26 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 30.56 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$

Burada ε_r küreyi çevreleyen ortamın bağıl geçirgenlik katsayısı, ve a kürenin yarıçapıdır.



Şekil 1- Problemin geometrisi

Geometrisi Şekil 1'de verilen problemde, düzlemsel bir dalga toprağa doğru gönderilmektedir. Gelen dalga ($\vec{E}_1, \vec{H}_1$), toprak yüzeyinden, yansıyan ($\vec{E}_2, \vec{H}_2$) ve kırılan ($\vec{E}_3^t, \vec{H}_3^t$) düzlemsel dalgalarının oluşmasına neden olur. Bu dalgaların $\vec{E}$ alanları,

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{-ik_0 z} \cdot \vec{u}_x \tag{1}$$

$$\vec{E}_2 = E_{02} e^{ik_0 z} \cdot \vec{u}_x \tag{2}$$

$$\vec{E}_3^t = E_{03} e^{-ikz} \cdot \vec{u}_x \tag{3}$$

şeklindedir. $\vec{E}_3^t$, küresel TE ve TM dalgalarının toplamı olarak, küresel koordinatlarda ifade edilebilir. ($\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t$) küreden toprağın içine saçılan toplam alanı, ($\vec{E}_5^t, \vec{H}_5^t$) ve ($\vec{E}_3^t, \vec{H}_3^t$) havadan toprağa geçen toplam alanları oluşturur. ($\vec{E}_6^t, \vec{H}_6^t$) ve ($\vec{E}_2, \vec{H}_2$) ise, topraktan havaya geçen toplam alanları oluşturur. ($\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t$), ($\vec{E}_5^t, \vec{H}_5^t$) ve ($\vec{E}_6^t, \vec{H}_6^t$) peşpeşe yansıma ve kırılmalardan meydana gelir.

($\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t$) de küresel TE ve küresel TM dalgalarının seri toplamı olarak aşağıdaki şekilde yazılır: TE modu bileşenleri

$$E_r = 0 \tag{4}$$

$$E_\theta = E_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} m h_n^{(1)}(kr) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \left[c_{nm}^+ \sin m\phi - c_{nm}^- \cos m\phi \right] \tag{5}$$

$$E_\phi = E_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} h_n^{(1)}(kr) \frac{d}{d\theta} \left[P_n^m(\cos\theta) \right] \cdot \left[c_{nm}^+ \cos m\phi + c_{nm}^- \sin m\phi \right] \tag{6}$$

TM modu bileşenleri

$$H_r' = 0 \tag{7}$$

$$H_\theta' = H_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} m h_n^{(1)}(kr) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \left[b_{nm}^+ \sin m\phi - b_{nm}^- \cos m\phi \right] \tag{8}$$

$$H_\phi' = H_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} h_n^{(1)}(kr) \frac{d}{d\theta} \left[P_n^m(\cos\theta) \right] \cdot \left[b_{nm}^+ \cos m\phi + b_{nm}^- \sin m\phi \right] \tag{9}$$

Burada $h_n^{(1)}(kr)$; $n.$ mertebeden birinci nev'i küresel Hankel fonksiyonudur ve $P_n^m(\cos\theta)$ assosiye Legendre polinomunu göstermektedir. b_{nm}^+ , b_{nm}^- , c_{nm}^+ ve c_{nm}^- bilinmeyen saçılma katsayılarıdır. Herhangi bir alanın silindirik bileşenleri, küresel bileşenlerinden, dönüşümler kullanılarak, türetilebilir:

Oluşan silindirik bileşenlere,

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^q(\cos\theta) = i^{q-n}\int_C J_q(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^q(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \qquad (10)$$

formülü uygulanırsa,

$$\vec{E}_4 = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{c_{nm}^+\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{41} + f_2(\alpha)\vec{e}_{42}\right]d(\cos\alpha) + c_{nm}^-\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{43} + f_2(\alpha)\vec{e}_{44}\right]d(\cos\alpha)\right\} \qquad (11)$$

$$\vec{H}_4' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{b_{nm}^+\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{h}_{41}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{42}'\right]d(\cos\alpha) + b_{nm}^-\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{h}_{43}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{44}'\right]d(\cos\alpha)\right\} \qquad (12)$$

elde edilir. Burada C integral yolu karmaşık $\cos\alpha$ düzleminde $\cos\alpha = i\infty$'dan $\cos\alpha = 1$'e kadar olan yoldur, $\vec{e}_{4j}$ ve $\vec{h}_{4j}'$ ($j = 1,2,3,4$) silindirik TE ve TM modlarıdır ve $f_1(\alpha) = \cot\alpha P_n^m(\cos\alpha)$, $f_2(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[P_n^m(\cos\alpha)\right]$ şeklinde tanımlı fonksiyonlardır. $\vec{e}_{4j}$ ve $\vec{h}_{4j}'$ silindirik modları, düzlemsel dalgaların integralleri olarak şu yolla yazılabilir:

Ox ve Ox' eksenleri arasındaki açı ψ olsun. Düzlemsel bir dalganın propagasyon vektörü

$$\vec{k} = k_z\vec{u}_z + \vec{k}_t$$

olsun. Burada $\vec{k}_t$ Ox' eksenine paraleldir. Alanın yatay ψ açısına göre 2π peryotlu olması nedeniyle, m bir tamsayı olmak üzere, bu düzlemsel dalganın genliği, genel olarak, $\cos(m\psi)d\psi$ veya $\sin(m\psi)d\psi$ yazılabilir. Bu düzlemsel dalganın integre edilmesiyle, silindirik modlar bulunur. Böylece (11) ve (12) denklemlerinden küresel TE ve TM modları, düzlemsel dalgaların iki katlı integrali olarak elde edilir.

Toprak–hava sınır düzleminde, silindirik modların yansıma ve kırılması içerdikleri düzlemsel dalgaların yansıma ve kırılma kurallarına göre olacaktır. ($\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t$) toprak-hava sınırına gelen alanı, ($\vec{E}_5^t, \vec{H}_5^t$) ve ($\vec{E}_6^t, \vec{H}_6^t$) bu düzlemden, sırasıyla, yansıyan ve kırılan alanı oluşturur. $\vec{E}_4^t$, $\vec{e}_{4j}$ ($j = 1,2,3,4$) modlarından meydana gelmektedir. $\vec{e}_{41}$ ve $\vec{e}_{43}$ $\vec{H}$ magnetik alanının sınır düzlemine paralel olması durumundaki düzlemsel dalgaların integralleridir. Bu tip dalgaların yansıma katsayısı

$$R_1(\alpha) = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}e^{i(k\cos\alpha)2D} \qquad (13)$$

ve kırılma katsayısı da

$$T_1(\alpha)=\frac{2\cos\alpha e^{ik_0(\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha-\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D}}{\cos\alpha+\sqrt{\hat{\varepsilon}_r-\hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}} \tag{14}$$

olur. Bu nedenle, $\vec{e}_{41}$ alanı yansıyan $\vec{e}_{51}$ alanını

$$\vec{e}_{51}=R_1(\alpha)e^{-ik_z z}(-e_{41\rho}\vec{u}_\rho-e_{41\phi}\vec{u}_\phi+e_{41z}\vec{u}_z) \tag{15}$$

ve kırılan $\vec{e}_{61}$ alanını

$$\vec{e}_{61}=T_1(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{41\rho}\vec{u}_\rho+e_{41\phi}\vec{u}_\phi+\frac{k_z}{k_{0z}}e_{41z}\vec{u}_z) \tag{16}$$

oluşturur. Benzer şekilde, $\vec{e}_{43}$ alanı, $\vec{e}_{53}$ ve $\vec{e}_{63}$ alanlarını

$$\vec{e}_{53}=R_1(\alpha)e^{-ik_z z}(-e_{43\rho}\vec{u}_\rho-e_{43\phi}\vec{u}_\phi+e_{43z}\vec{u}_z) \tag{17}$$

$$\vec{e}_{63}=T_1(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{43\rho}\vec{u}_\rho+e_{43\phi}\vec{u}_\phi+\frac{k_z}{k_{0z}}e_{43z}\vec{u}_z) \tag{18}$$

oluşturur. Burada $k_{0z}=k_0\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha}$ 'dır.

Diğer taraftan, $\vec{e}_{42}$ ve $\vec{e}_{44}$, $\vec{E}$ elektrik alanlarının sınır düzlemine paralel olması halindeki düzlemsel dalgalarından meydana gelmekte olup yansıma katsayıları

$$R_2(\alpha)=\frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha-\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha}}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha+\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha}}e^{i(k\cos\alpha)2D} \tag{19}$$

ve kırılma katsayıları da

$$T_2(\alpha)=\frac{2\hat{\varepsilon}_r\cos\alpha e^{ik_0(\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha-\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D}}{\hat{\varepsilon}_r\cos\alpha+\sqrt{\hat{\varepsilon}_r-\hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}} \tag{20}$$

dır. Böylece, $\vec{e}_{42}$ alanı $\vec{e}_{52}$ ve $\vec{e}_{62}$ alanlarını oluşturur,

$$\vec{e}_{52}=R_2(\alpha)e^{-ik_z z}(e_{42\rho}\vec{u}_\rho+e_{42\phi}\vec{u}_\phi) \tag{21}$$

$$\vec{e}_{62}=T_2(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{42\rho}\vec{u}_\rho+e_{42\phi}\vec{u}_\phi) \tag{22}$$

ve $\vec{e}_{44}$ alanı da $\vec{e}_{54}$ ve $\vec{e}_{64}$ alanlarını oluşturur.

$$\vec{e}_{54}=R_2(\alpha)e^{-ik_z z}(e_{44\rho}\vec{u}_\rho+e_{44\phi}\vec{u}_\phi) \tag{23}$$

$$\vec{e}_{64}=T_2(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{44\rho}\vec{u}_\rho+e_{44\phi}\vec{u}_\phi)\,. \tag{24}$$

$\vec{E}_5^t$ ve $\vec{E}_6^t$'nin silindirik ifadelerinden, küresel bileşenler yazılır.

Mükemmel iletken küre yüzeyindeki ($r=a$) sınır koşulları, toplam E_ϕ ve toplam E_θ alan bileşenlerinin sıfır olmasını gerektirir. Yani

$$E_{3\theta}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{4\theta}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{5\theta}^t(r=a,\theta,\phi)=0 \tag{25}$$

$$E_{3\phi}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{4\phi}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{5\phi}^t(r=a,\theta,\phi)=0\,. \tag{26}$$

Bu iki denklemin değişkenleri θ ve ϕ'dir. Her denklem ϕ'ye göre bir Fourier serisidir. Bu serilerin katsayılarının analizi ile

$$c_{n1}^{+}=0 \tag{27}$$

$$b_{n1}^{-}=0 \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(\theta)c_{n1}^{-} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\theta)b_{n1}^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\theta)a_n \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n'(\theta)c_{n1}^{-} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n'(\theta)b_{n1}^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n'(\theta)a_n \tag{30}$$

bulunur.

Son adımı, değişkeni θ ve bilinmeyenleri $b_{n1}^{+} = b_n$ ve $c_{n1}^{-} = c_n$ (29)-(30) denklem sisteminin çözümü oluşturacaktır. θ'nın Bessel fonksiyonları ve Legendre polinomlarının argümanlarında bulunması, bu fonksiyonlara ait bazı ortogonallik bağıntıların kullanılması söz konusu olamamaktadır. Bu durumda $0 < \theta < \pi$ bölgesini N_0 tane aralığa ayıralım. Her bir ayrık θ_j ($j = 1,2,...,N_0$) değeri için b_n ve c_n'e ait bir lineer denklem elde edilir. N_0 istenen doğruluğu yakalamak için belirlenir. Böylece

$$[L]\cdot\left[c_{n1}^{-}\right] + [M]\cdot\left[b_{n1}^{+}\right] = [A] \tag{31}$$

$$[L']\cdot\left[c_{n1}^{-}\right] + [M']\cdot\left[b_{n1}^{+}\right] = [B] \tag{32}$$

denklem sistemi oluşturulur. Burada L, M, L' ve M' matrisleri $N_0 \times N_0$ boyutlarında kare, A ile B matrisleri de $1 \times N_0$ boyutlarında kolon matrislerdir. Bu denklem sisteminden $\vec{E}_6^t$'nin silindirik bileşenleri bulunur. Kartezyen bileşenlere

$$E_{6x}^t = E_{6\rho}^t \cos\phi - E_{6\phi}^t \sin\phi \tag{33}$$

$$E_{6y}^t = E_{6\rho}^t \sin\phi + E_{6\phi}^t \cos\phi \tag{34}$$

denklemleri ile geçilir.

Bütün sayısal sonuçlar $z = D + \Delta z = 1.1a + 20$ *cm* yatay düzleminde elde edilmiştir. $f_1 = 100$ *MHz*, $f_2 = 170$ *MHz* ve $f_3 = 1$ *GHz* frekanslarında, kuru toprak, nemli toprak ve çamurda gömülü iletken küre için elektrik alan bileşenleri $|E_x|$, $|E_y|$ ve $|E_z|$'in genlikleri incelenmiştir.

($x = 0, y = 0$) noktasında gelen alan ile aynı polarizasyona sahip saçılan alanın genliğinde bir maksimum olduğu, buna karşın, gelen alana dik polarizasyonlu saçılan alan bileşeninin genliğinin bir minimuma sahip olduğu gözlenmiştir. Dik polarizasyonlu saçılan alan bileşeninin $y = \mp x$ doğruları üzerinde, *Ox* ve *Oy* eksenlerine göre simetrik olan, maksimumlar olduğu görülmüştür.

Alıcı dipol antenlerin oluşturduğu düzlemsel diziler kullanılarak, iletken küresel hedef tespit edilebilir. $|E_y|$'nin 4-maksimumu hedefin yerini verir.

Daha ileri bir çalışma için silindirik hedefler göz önüne alınabilir.

SCATTERING OF A PLANE WAVE FROM A PERFECTLY CONDUCTING SPHERE BURIED IN SOIL

SUMMARY

This thesis studies the scattering of a plane wave from a perfectly conducting sphere buried in a lossy dielectric. This subject has been referred to in tomography, in geology, in archeology and in military researches. In previous works, integral equations are solved and method of moment (MoM) is applied. Therefore, the solutions became time consuming and the accuricies became rather rough.

In this paper, a rigorous solution is obtained without making use of any integral equation or MoM. Thus the accuracy is improved to any desired level and the computation time is shortened.

The result of this work can be compared with that of a C-scan ground penetrating radar (GPR), which has to make $m \times n$ sonde measurements, m in one horizontal direction and n in the other horizontal direction which is perpendicular to the first one. Making use of this thesis, a buried target can be detected, by applying a planar array of dipole antennas and making one or two measurements.

The radar cross-section (RCS) of a conducting sphere in free-space has been found with accurate formulae. From these results, it is observed that there are certain regions of frequencies where the RCS shows values greater than the actual cross-section (πa^2). These frequency bands are tabulated in Table 1.

Table 1- Frequency bands for the back-scattering of a sphere

1st region	$2.86 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 7.16 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
2nd region	$9.55 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 12.89 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
3rd region	$15.25 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 18.7 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
4th region	$21 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 24.11 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
5th region	$26.26 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 30.56 \cdot 10^7 / (a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$

where ε_r is the relative dielectric permittivity of the surrounding medium and a is the radius of the sphere.

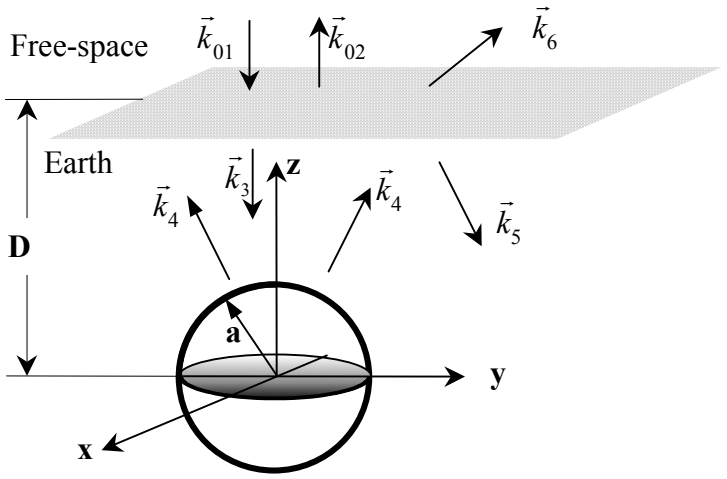


Figure 1-Geometry of the problem

In Figure 1, a plane wave is travelling towards the earth. The incident wave $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$, causes the reflected wave $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ and the refracted wave $(\vec{E}_3^t, \vec{H}_3^t)$, whose $\vec{E}$ fields are

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{-ik_0 z} \cdot \vec{u}_x \tag{1}$$

$$\vec{E}_2 = E_{02} e^{ik_0 z} \cdot \vec{u}_x \tag{2}$$

$$\vec{E}_3^t = E_{03} e^{-ikz} \cdot \vec{u}_x \tag{3}$$

$\vec{E}_3^t$ can be expressed with spherical coordinates as the summation of spherical TE and TM waves. $(\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t)$ is the total field scattered by the sphere into the earth. The fields $(\vec{E}_5^t, \vec{H}_5^t)$ and $(\vec{E}_3^t, \vec{H}_3^t)$ form the total field which enters the earth from the free-space. $(\vec{E}_6^t, \vec{H}_6^t)$ and $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ form the total field which enters the free-space from the earth. $(\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t)$, $(\vec{E}_5^t, \vec{H}_5^t)$ and $(\vec{E}_6^t, \vec{H}_6^t)$ are built by successive reflections and refractions.

$(\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t)$ can also be expressed as the summation of some spherical TE and TM waves: for the TE modes, where

$$E_r = 0 \tag{4}$$

$$E_\theta = E_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} m h_n^{(1)}(kr) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \left[c_{nm}^+ \sin m\phi - c_{nm}^- \cos m\phi \right] \tag{5}$$

$$E_\phi = E_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} h_n^{(1)}(kr) \frac{d}{d\theta} \left[P_n^m(\cos\theta) \right] \cdot \left[c_{nm}^+ \cos m\phi + c_{nm}^- \sin m\phi \right] \tag{6}$$

and for TM modes, where

$$H_r' = 0 \tag{7}$$

$$H_\theta' = H_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} m h_n^{(1)}(kr) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \left[b_{nm}^+ \sin m\phi - b_{nm}^- \cos m\phi \right] \tag{8}$$

$$H_\phi' = H_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} h_n^{(1)}(kr) \frac{d}{d\theta} \left[P_n^m(\cos\theta) \right] \cdot \left[b_{nm}^+ \cos m\phi + b_{nm}^- \sin m\phi \right] \tag{9}$$

where $h_n^{(1)}(kr)$; is the spherical Hankel function of the first type of order n. and $P_n^m(\cos\theta)$ is an associate Legendre polynomial. The coefficients b_{nm}^+ , b_{nm}^- , c_{nm}^+ and c_{nm}^- need to be determined. The cylindrical components of any field can be derived from its spherical components with transformations.

To these expressions the formula

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^q(\cos\theta) = i^{q-n}\int_C J_q(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^q(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \tag{10}$$

is applied to obtain

$$\vec{E}_4 = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{c_{nm}^+\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{41} + f_2(\alpha)\vec{e}_{42}\right]d(\cos\alpha) + c_{nm}^-\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{43} + f_2(\alpha)\vec{e}_{44}\right]d(\cos\alpha)\right\} \tag{11}$$

$$\vec{H}_4' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{b_{nm}^+\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{h}_{41}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{42}'\right]d(\cos\alpha) + b_{nm}^-\int_C \left[f_1(\alpha)\vec{h}_{43}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{44}'\right]d(\cos\alpha)\right\} \tag{12}$$

where the integral path C is in the complex $\cos\alpha$ -plane and runs from $\cos\alpha = i\infty$ to $\cos\alpha = 1$, and $f_1(\alpha) = \cot\alpha P_n^m(\cos\alpha)$, $f_2(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[P_n^m(\cos\alpha)\right]$. $\vec{e}_{4j}$ and $\vec{h}_{4j}'$ ($j = 1,2,3,4$) denote the cylindrical TE and TM modes. The cylindrical modes, $\vec{e}_{4j}$ and $\vec{h}_{4j}'$, can be represented by the intgerals of plane waves as follows:

Let the angle between Ox and Ox' be ψ. Let there be a plane wave with the propagation vector

$$\vec{k} = k_z\vec{u}_z + \vec{k}_t$$

where $\vec{k}_t$ is parallel to Ox'. The amplitude of this plane wave can, in general, be $\cos(m\psi)d\psi$ or $\sin(m\psi)d\psi$, where m is an integer; because the field has 2π periodicity with respect to the azimuthal angle. By integrating the expressions of these plane waves, one obtains the expressions of cylindrical modes. Accordingly, one obtains, from equations (11) and (12), the double integral representation of spherical TE and TM modes in terms of plane waves.

At the boundary plane of the earth and the free-space, the transmission and the reflection of the cylindrical modes will satisfy the laws of the transmission and reflection of plane waves contained. $(\vec{E}_4^t, \vec{H}_4^t)$ is the incident field to the earth-free-space boundary. $(\vec{E}_5^t, \vec{H}_5^t)$ is the reflected field, and $(\vec{E}_6^t, \vec{H}_6^t)$ is the refracted field. $\vec{E}_4^t$ is composed of $\vec{e}_{4j}$ ($j = 1,2,3,4$). $\vec{e}_{41}$ and $\vec{e}_{43}$ are integrals of plane waves which have their $\vec{H}$ field parallel to the boundary plane. These types of waves have reflection coefficient as

$$R_1(\alpha) = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}e^{i(k\cos\alpha)2D} \tag{13}$$

and transmission coefficient as

$$T_1(\alpha)=\frac{2\cos\alpha e^{ik_0(\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha-\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D}}{\cos\alpha+\sqrt{\hat{\varepsilon}_r-\hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}} \tag{14}$$

Therefore, $\vec{e}_{41}$ gives rise to a reflected field $\vec{e}_{51}$ as

$$\vec{e}_{51}=R_1(\alpha)e^{-ik_z z}(-e_{41\rho}\vec{u}_\rho-e_{41\phi}\vec{u}_\phi+e_{41z}\vec{u}_z) \tag{15}$$

and a refracted field $\vec{e}_{61}$ as

$$\vec{e}_{61}=T_1(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{41\rho}\vec{u}_\rho+e_{41\phi}\vec{u}_\phi+\frac{k_z}{k_{0z}}e_{41z}\vec{u}_z) \tag{16}$$

Similarly, $\vec{e}_{43}$ gives rise to $\vec{e}_{53}$ and $\vec{e}_{63}$ which are

$$\vec{e}_{53}=R_1(\alpha)e^{-ik_z z}(-e_{43\rho}\vec{u}_\rho-e_{43\phi}\vec{u}_\phi+e_{43z}\vec{u}_z) \tag{17}$$

$$\vec{e}_{63}=T_1(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{43\rho}\vec{u}_\rho+e_{43\phi}\vec{u}_\phi+\frac{k_z}{k_{0z}}e_{43z}\vec{u}_z) \tag{18}$$

where $k_{0z}=k_0\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha}$.

On the other hand, $\vec{e}_{42}$ and $\vec{e}_{44}$ are composed of plane waves whose $\vec{E}$ fields are parallel to the boundary surface with reflection coefficient

$$R_2(\alpha)=\frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha-\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha}}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha+\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha}}e^{i(k\cos\alpha)2D} \tag{19}$$

and transmission coefficient

$$T_2(\alpha)=\frac{2\hat{\varepsilon}_r\cos\alpha e^{ik_0(\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha-\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D}}{\hat{\varepsilon}_r\cos\alpha+\sqrt{\hat{\varepsilon}_r-\hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}} \tag{20}$$

Therefore, $\vec{e}_{42}$ gives rise to $\vec{e}_{52}$ and $\vec{e}_{62}$ which are

$$\vec{e}_{52}=R_2(\alpha)e^{-ik_z z}(e_{42\rho}\vec{u}_\rho+e_{42\phi}\vec{u}_\phi) \tag{21}$$

$$\vec{e}_{62}=T_2(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{42\rho}\vec{u}_\rho+e_{42\phi}\vec{u}_\phi) \tag{22}$$

and $\vec{e}_{44}$ gives rise to $\vec{e}_{54}$ and $\vec{e}_{64}$ which are

$$\vec{e}_{54}=R_2(\alpha)e^{-ik_z z}(e_{44\rho}\vec{u}_\rho+e_{44\phi}\vec{u}_\phi) \tag{23}$$

$$\vec{e}_{64}=T_2(\alpha)e^{ik_{0z}z}(e_{44\rho}\vec{u}_\rho+e_{44\phi}\vec{u}_\phi). \tag{24}$$

From the cylindrical expressions of $\vec{E}_5^t$ and $\vec{E}_6^t$ one obtains their spherical expressions.

The boundary condition on the perfectly conducting sphere requires that the total E_ϕ and the total E_θ be zero at $r=a$. Namely one has

$$E_{3\theta}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{4\theta}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{5\theta}^t(r=a,\theta,\phi)=0 \tag{25}$$

$$E_{3\phi}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{4\phi}^t(r=a,\theta,\phi)+E_{5\phi}^t(r=a,\theta,\phi)=0. \tag{26}$$

These two equations have variables θ and ϕ. Each of these equations is a Fourier series in terms of ϕ. With the analysis of the coefficients of these series, one obtains

$$c_{n1}^+=0 \tag{27}$$

$$b_{n1}^-=0 \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(\theta) c_{n1}^{-} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\theta) b_{n1}^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\theta) a_n \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n'(\theta) c_{n1}^{-} + \sum_{n=1}^{\infty} M_n'(\theta) b_{n1}^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n'(\theta) a_n \tag{30}$$

The last step is the solution of the above equations each of which include the set of unknown coefficients $b_{n1}^{+} = b_n$, $c_{n1}^{-} = c_n$ and the variable θ. θ appears in arguments of Bessel functions of various orders and Legendre polynomials of various orders; therefore, the application of some orthogonality relations seems impossible. For this reason, the region $0 < \theta < \pi$ is divided to N_0 intervals. For each discrete θ, from these intervals, linear equations of b_n and c_n are obtained. N_0 is determined to attain the desired level of accuracy. Thus the system of equations

$$[L] \cdot [c_{n1}^{-}] + [M] \cdot [b_{n1}^{+}] = [A] \tag{31}$$

$$[L'] \cdot [c_{n1}^{-}] + [M'] \cdot [b_{n1}^{+}] = [B] \tag{32}$$

is obtained; where the matrices L, M, L' and M' have dimensions of $N_0 \times N_0$ and A and B have dimensions $1 \times N_0$. From the solution of this set of equations $\vec{E}_6^t$ is derived with cylindrical components. Its cartesian components are

$$E_{6x}^t = E_{6\rho}^t \cos\phi - E_{6\phi}^t \sin\phi \tag{33}$$

$$E_{6y}^t = E_{6\rho}^t \sin\phi + E_{6\phi}^t \cos\phi \tag{34}$$

All of the numerical results are obtained for the horizontal plane with $z = D + \Delta z = 1.1a + 20 \ \ cm$. For $f_1 = 100 \ \ MHz$, $f_2 = 170 \ \ MHz$ and $f_3 = 1 \ \ GHz$ frequencies and three different sphere raidii, we assumed the soil be dry, loamy wet and sandy wet. The magnitude of electric field components $|E_x|$, $|E_y|$ and $|E_z|$ are examined.

It is observed that the magnitude of the co-polarized scattered electric field has a maximum at the origin, ($x = 0, y = 0$); whereas the magnitude of the cross-polarized scattered electric field has a minimum at the same point. The maxima of the magnitude of the cross-polarized electric field take place on the lines $y = \mp x$, and are symmetrical with respect to the axes Ox and Oy.

By making use of a planar array of receiving dipole antennas, one can determine the presence of the conducting spherical target. The four-peaks of $|E_y|$ furnishes the criterion.

As a further study, cylindrical targets can be considered.

1 GİRİŞ

1.1 Toprağa Nüfuz Eden (Ground Penetrating) Radar

Gerek tomografide, gerek jeoloji ve arkeolojide, gerek askeri amaçlarla, kayıplı dielektrik bir yapı içinde gömülü bir hedefin dışardan elektromagnetik dalgalar göndererek tespiti pek çok araştırmaya konu olmuştur.

Toprak araştırma radarlarının hedefleri küçük ve büyük olarak iki tiptir. Küçük hedefler; gömü, mayın, yer altında gömülü anten veya kablolar, ve tomografik hedefler, en az iki boyutta sınırlı büyüklükte olan hedeflerdir. Bir uydu radarı ile gözetlenen buzullar ve denizaltılar da, (uydu radarının ayak izi kendilerine göre çok büyük oldukları için) küçük hedefler sayılabilir.

Büyük hedeflere örnek olarak; yer altındaki maden yatakları, yer-altı boşlukları, yer-altı gölleri, faklı gezegen tabakaları gibi, radar huzmesinin tamamından daha büyük olan hedefler, verilebilir. Bu durumda, radar demetinin tümü geri yansıtılacaktır. Önemli olan, toprağın içindeki zayıflamanın minimum olmasıdır. Bunun için mümkün olan en küçük radar frekansı kullanılır.

Bu tip problemler iki-ortamlı saçılma problemledir. Saçılma problemleri, "düz" ve "ters" saçılma olmak üzere iki ana gruba ayrılır. Elektromagnetik düz saçılma probleminde, verilen uyarıcı (kaynak) alanı ile özellikleri bilinen saçıcı cisime (hedefe) ait saçılan alan, Maxwell denklemlerinin çözümünden bulunur. Yani gelen alan ile hedef bilinmekte ve gelen alanın hedeften saçılması incelenir. Ters saçılma problemi ise, gömülü ya da yanına yaklaşılamayan hedefin geometrik ve fiziksel özelliklerini, saçılan alandaki etkiyi inceleyerek belirlemekten ibarettir.

GPR'ın tarihçesini şöyle özetleyebiliriz (Annan, 2002):

1900-1950: Bu zaman diliminde, yer yüzeyinin üstünde ve yer yüzeyi boyunca radyo dalgalarının yayılımı hakkında birçok araştırma yapılmıştır. Haberleşme, yön bulma ve radar konuları hakkında sayılamayacak kadar yayın yapıldı.Yer-altını araştırmak

için radyo dalgalarının kullanımı ile ilgili birkaç muhtemel ipucu zikredilmekle beraber, bu tip bir ölçümün başarılı bir şekilde yapıldığına dair herhangi bir rapor yoktur.

1950-1955: Radyo dalgası işaretleriyle yer-altı özelliklerinin ölçümündeki ilk denemenin kayıtlara geçtiği zaman zarfıdır. El Said (1956), su masasının derinlik haritasını çıkarmak için, havadan iletilen direk işaretler ile su masasından yansıyan işaretlerin arasındaki girişimi kullanmayı denedi.

1955-1960: Waite ve Schmidt (1961), USAF'ın Grönland buz tabakası üzerine hava taşıtı indirmeye dair çalışması sırasında farkedilen yükseklik hataları, radyo frekansı ile jeolojik yapıların derinliğinin ölçülmesinde görülen ikinci kayıt oldu.

1960-1965: Bu zaman aralığında, yapılan araştırmaların çoğu buz içinde radyo yansıması sondajı ile bağlantılıdır.

1965-1970: Bu zaman zarfında da, buz içinde radyo yansıması sondajı devam etti. Ek olarak, diğer uygun jeolojik yapılardaki uygulamalar araştırılmaya başlandı. Bazı durumlarda kömürün düşük kayıplı dielektrik malzeme olmasından dolayı, kömür mayınlarının kullanımı incelendi (Cook, 1973). Benzer nedenlerden, yer-altı tuz tabakalarında hesaplamalar yapıldı (Holser ve diğ. 1972, Unterberger, 1978 ve Tierbach, 1973).

Elektriksel karakteri buzunkine benzer olduğuna inanılan ayın yüzey-altını incelemek için birkaç deney tasarlandı.

1970-1975: Bu peryot içinde sayısız ilerlemeler görüldü. Girişim kavramının kullanıldığı, El Said (1956)'in yaptığı çalışmaya benzer, yüzeyin elektriksel özellikleri deneyi Apollo-17 ay keşif programı kapsamına alındı. Ek olarak, jeolojik yapıların elektriksel özellikleri daha iyi anlaşılmaya başlandı. Bu çalışmalar, doğada meydana gelen jeolojik yapıların elektriksel karakteri ve bu yapıların dielektrik polarizasyonu ile iletkenliği arasındaki bağıntının çok daha iyi kavranmasına rehberlik etti (Olhoeft, 1975, 1987).

1975-1980: Jeolojinin daha iyi anlaşılması ve teknolojinin kullanılabilir hale gelmesi nedeniyle, uygulamalar büyümeye başladı. GPR büyük umutlar vadeden bir cihaz oldu (Annan ve Davis, 1976).

Bu zaman aralığında, ılık buzullar içindeki radyo yansıma sondajında oluşan saçılmanın etkileri daha iyi anlaşıldı. Saçılmanın etkisi ve düşük frekanslı radarlara olan ihtiyaç ortaya çıktı (Watts ve England, 1976). Stanford Araştırma Enstitüsü'nde arkeolojik uygulamalar için GPR ile deneyler yapıldı. Ek olarak, kaya kalitesinin araştırılması için, kuyu radarının kullanımı ilgi konusu olmuştur. Bu iş için ticari birimler kullanıldı ve yapılan faaliyetlerin sayısı ticari alakayı ortaya çıkardı.

1980-1985: GPR'a olan ilgi, bu zaman diliminde, bir dereceye kadar azaldı. Teknolojideki başlangıç iyimserliği, birçok çevrenin GPR için müsait olmadığı gerçeğine dönüştü. Başarısız deneylerin, cihaz kaynaklı mı yoksa malzemenin doğal tepkisinden mi olduğu üzerinde büyük şaşkınlık vardı. Ayrıca, teknoloji gelişmesi için çok az para ayrıldı. Yol araştırması gibi GPR'ın diğer uygulamaları da yapıldı. Teknoloji, genellikle, çok yeni idi ve bu uygulamalar için en uygun hale getirilmemişti. Ticari olmayan gelişmeler elde edildi. Bu gelişmeler taşınabilirlik, sayısal kayıt ve fiber optik kablolarının kullanılmasını içeriyordu.

1985-1990: Bu zaman aralığı, GPR'ın kendini bulmaya başladığı zamandır. Başarılı ve başarısız hususları daha iyi anlaşıldı. GPR artık yüksek-çözünürlüklü yer-altı haritalama için gösterilen en uygun cihazdı ve bunun sonucu olarak, güçlü ticari istekliler görünmeye başladı. Ek olarak, önceki uygulamaların çoğu araştırılmaya devam edildi ve ticari ürünlerde tamamen dijital kayıt yapan daha düşük frekanslı GPRlar görüldü. Tarım ihtiyaçları için toprak sınıflandırılması gibi uygulamalar yapıldı (Doolittle ve Asmussen, 1992).

1990-1995: GPR ilerlemesinde gerçek bir patlamanın olduğu dönemdir. Evrensel birçok grup bu teknoloji ile ilgilendi. Hem elektrik hem de jeofizik mühendisliğinin oluşturduğu topluluklar GPRa daha çok alaka göstermeye başladı.

1995-2000: Bilgisayarlardaki gelişmeler GPRı tümden etkiledi. 3-boyutlu problemlerin tamamen sayısal modellenmesi (Bergman ve diğ. 1999, Lampe ve Holliger, 2000) büyük bilgisayarlar gerektirdi. Sayısal formda büyük hacimli bilginin hızlı bir şekilde işlenmesi sıradan bir iş oldu. Sonuç olarak, bilginin ağ biçiminde elde edilmesi, haritalamayı ve 3-boyutlu resmetmeyi mümkün kıldı (Grasmueck, 1996 ve Annan ve diğ. 1997).

1.2 Mayın Araştırmaları (Paik ve diğ. 2002)

1.2.1 Genel Bilgi

Her 20 dakikada bir, bir insanın ya sakatlanmasına ya da ölmesine, toprak-altına yerleştirilmiş mayınlar neden olmaktadır. Mayın belasına düşmüş ülkelerin çoğunun yoksulluk felaketi yaşıyor olması ve patlamalar sonucu ölen insanların bir kısmının çocuk olması ise en çok üzüntü veren durumdur. Mesela, Mısır, Irak ve İran'da yılda 6000'in üstünde mayın kazası olmaktadır. Angola'da insan sayısından fazla mayın olması ise düşündürücüdür.

İstemeyerek meydana gelen mayın kazalarının mevcut felaketli sonuçlarından dolayı, mayınların tespit edilip çıkarılması işlemi çok önem arzetmektedir. Mayının elle tespiti ve çıkarılması yüksek tehlike arzeden bir durumdur, her 2000 mayında bir çalışan bu yolla ölmektedir.

İnsan-öldürme amacıyla yerleştirilecek tipik bir mayının satın alınıp yerleştirilmesinin 3 dolar ile 30 dolar arasında bir maliyeti varken, bir tek mayının etkisiz hale getirilmesi 300 dolar ile 1000 dolar arasında bir bedeli olmaktadır.

Mayınların hem metalden hem plastikten yapılabiliyor olması nedeniyle, bilinen metal dedektörlerle yapılan araştırmalar çok umut vermemektedir. Kaynaklar, aynı zamanda, daha önce savaş yapılan alanlarda harp gereçlerinin kırılmış küçük parçaları bulunması nedeni ile metal dedektörlerin bir çok yanlış alarm verebildiğini göstermektedir. Mayınların bir çok çeşidi elle tespit edilebildiği halde, yüksek çalışma ücreti ve çok yavaş adımlar içermesi nedeni ile başka tekniklerin gelişmesi için büyük destek verilmektedir.

Mayın tarama tekniklerinin çoğu, sezici, işaret işleme ve karar verme aşamalarından oluşur. Sezici kısmı için, toprağa nüfuz eden radar (GPR), kızıl-ötesi (IR) ve ses-ötesi (US) sensörler kullanılır. İşaret işleme ve karar verme kısımları; filtreleme, iyileştirme, şekil çıkarma ve bölümlere ayırma aşamalarından oluşur.

1.2.2 Mayınların Sınıflandırılması:

Mayınlar farklı tiplerde üretilip, yerleştirilmektedir. Muhtemel hedefe göre, mayınlar tank-savar (ATM) ve insan-öldürücü (APM) olarak sınıflandırıabilir.

Tank-Savar Mayın (**A**nti-**T**ank **M**ine):

Tank-Savar mayınların çoğu metal malzemeden yapılır, boyutları 13 cm ile 40 cm arasında bir çapta değişir. Araç yok etmek için düzenlendiğinden infilak basıncı yüksektir, patladıktan sonra büyük metal parçaları saçarlar.

İnsan-Öldürücü Mayın (**A**nti-**P**ersonnel **M**ine):

Tespit edilip ve çıkarılması en zor olan mayın türü İnsan-Öldürücü mayınlardır. Bu tip mayınlar nedeni ile bir çok sivil ya hayatını kaybetmektedir ya da sakat kalmaktadır. Bu mayınlar metal olmayan malzemelerden üretilirler, silindirik yapıya sahiptirler, boyutları Tank-Savar mayınlarınkine nazaran daha küçüktür; çapı 6 cm ile 24 cm arasındadır. 10 kg dan daha küçük bir basınçta bile patlayabilen bir hassasiyete sahiptir. İnsan-Öldürücü mayınlar üç gruba ayrılabilir; (a) patlamalı, (b) sıçratmalı parçalanma, (c) yönlü parçalanma. Patlamalı mayın en çok araştırılan türdür.

Patlamalı mayın diğer tiplere göre daha küçük ve hafiftir. Genellikle toprak-altına yerleştirilir, bazı modelleri bir uçakla yüzeye saçılabilir ya da bir nehir yüzünde yüzmeye bırakılabilir. Basit yapısı ve düşük malzeme maliyetinden dolayı, küçük askeri gruplar bile bu tip mayınları üretebilir.

Sıçratmalı parçalanma mayın tipleri ise biraz daha büyüktür. Patlamalı mayın türü snırlı mesafedeki bir hedefe zarar verirken, bu tür bir mayın daha büyük bir alanı tahrip edebilir. Toprak-altına ya da yüzeye yerleştirilebilir. Direk basınç ya da bir tel infilak mekanizmasını aktif hale getirebilir. Tetiklenir tetiklenmez, verilen yüksekliğe zıplatır ve 30 m yarıçaplık bir alanda öldürücü parçacıklarını saçarak patlar.

Yönlü parçalanma mayın tipleri çoğunlukla yüzeye yerleştirilir, patlama sırasında parçacıklarını belirli bir yönde saçar. Bazı modellerin öldürücü menzili 200 m'nin üzerindedir.

Mayınlar yapılarının geometrisine göre, ya basık silindir ya da küre şeklinde olurlar. Elektriksel özelliklerine göre, mayınlar, kauçuk, plastik veya çelikten üretilirler.

1.2.3 Sezici (Sensör) Teknolojisi:

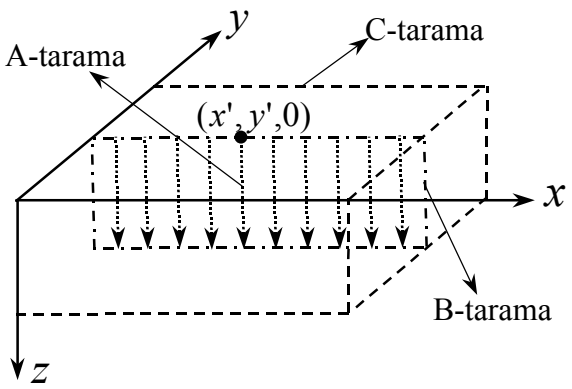
Toprağa Nüfuz Eden Radar (**G**round **P**enetrating **R**adar):

Toprağa nüfuz eden radar geniş bantlı bir anten aracılığıyla elektromagnetik (EM) dalgaları yayan ve çevresindeki cisimlerden yansıyan işaretleri toplayan (alan) aktif bir sensörden (sezici) ibarettir. GPR'ın en çok kullanılan frekans bandı 100 MHz.– 100 GHz. arasındadır. Yayılan işaret, elektriksel bakımdan faklı olan iki malzemenin ara-yüzeyine çarpması sonucu yansır. Yansımanın yönü ve şiddeti ara-yüzeyin pürüzlülüğüne ve ortamın elektriksel özelliklerine bağlıdır. Pürüzlü bir yüzey, gelen dalgayı dağınık bir şekilde yansıtırken, düzgün yüzey, saçılma yasalarına uygun bir şekilde saçar. Ortamın elektriksel özellikleri EM dalgaların kırılma ve yutulma miktarını, dolayısıyla yansımanın yönünü ve şiddetini belirler. Toprağa giren dalganın nüfuz derinliği genellikle iki faktöre bağlıdır; toprağın nem oranına ve EM dalganın dalgaboyuna. Daha kısa dalgaboyuna sahip bir dalganın nüfuz derinliğini, toprak içindeki su miktarı önemli derecede azaltır. Yansıma ve nüfuz özelliklerine göre, kuru kumda, GPR "en iyi" düşük-frekanslı EM dalgalarla çalışır. Ama düşük frekanslı işaretler, mayın tespitinde doğruluğu azaltan düşük çözünürlüklü bilgi haritalarını oluştururlar. EM dalgalar suya nüfuz edemediklerinden, GPR su-altı mayınlarını dedekte edemez.

GPR mayınların varlığı ve yeri ile ilgili bilgi verir. GPR bilgisi, tarama boyutuna göre, A, B ve C-tarama diye üç farklı biçimde sunulabilir. Şekil 1.1 yer-yüzeyinin bir kısmında tanımlanmış koordinat sistemini göstermektedir. Burada xy düzlemi toprak yüzeyi olarak ve z-ekseni de toprağın içine doğru dik yönde seçilmiştir.

A-tarama işareti, koordinatları $(x', y', 0)$ gibi olan belirli bir noktanın üstüne yerleştirilmiş anten ölçümlerinden elde edilir. Anten z doğrultusunda ilerleyen işaret gönderir. Geri alınan işaret, bir grup işaret şiddetinin zamanla değişimi şeklindedir.

Geri alınan darbenin dönüş zamanı, hedefin z derinliğiyle orantılıdır. Bu grafikte oluşan maksimumlar anten ile, z-ekseni boyunca karşılaşılan, yansıma yüzeyleri arasındaki mesafelere denk gelmektedir. Anten ile toprak yüzeyi arasında bir engel yoksa, oluşan ilk maksimum hava-toprak yüzeyinden yansımayı gösterir.



Şekil 1.1- Yer-yüzünün bir kısmında tanımlanmış koordinat sistemi

$(x', y', 0)$ noktasında ölçülen A-taramalı işaret 1-boyutlu olup, matematiksel olarak,

$$f_A(z) = f(x, y, z)\big|_{x=x',\ y=y'}$$

yazılabilir.

B-tarama işareti, x-ekseni boyunca alınan A-taramalarının yatay toplamından elde edilir. Alınan işaret, x boyunca taranan genişlik ile zaman gecikmesinin oluşturduğu düzlemdeki işaretin şiddeti olarak verilir. O halde, $y = y'$'de ölçülen B-taramalı işaret 2-boyutlu kabul edilir, matematiksel ifadesi de,

$$f_B(x, z) = f(x, y, z)\big|_{y=y'}$$

olur. Başka bir deyişle, f_B işareti bir-çok x noktasında ölçülmüş f_A işaretinden ibarettir.

C-tarama işareti, tahmin edilebileceği gibi, y-ekseni boyunca ölçülen B-taramalarından oluşur, 3-boyutludur,

$$f_C(x, y, z)$$

x ve y eksenleri, Şekil 1.1'den de görüleceği gibi, hedefin toprak düzlemindeki koordinatlarına ve z-ekseni de hedefin derinliğine ait bilgiyi içerir. 3-boyutlu bilgiyi resmetmek (bilgi 4. boyut olmak üzere) kolay olmadığı için, C-tarama genellikle, birçok z-sabit düzlemlerinde gösterilir. Her bir z-sabit düzlemi, belirli derinlik seviyelerini göstermektedir.

Görüldüğü gibi, bir GPRın hedefi tespit etmesi için bir y=sabit düzleminde peşpeşe yapılan A-taramaları, farklı y=sabit düzleminde tekrarlanarak sonuca varılmaktadır.

Kızılötesi Sezici (**I**nfra-**R**ed Sensor):

Kızılötesi radyasyon, EM spektrumun görünen ışık ile mikrodalgalar bölgeleri arasında kalan kısmıdır. 0.75 μm ile 1mm arasında dalgaboyuna sahip olan bölgesidir. Bütün EM radyasyonları ısı ürettiği halde, IR radyasyon, ısı formunda çok daha kolay dedekte edilebilmektedir. Isınan malzemeler IR radyasyonuna iyi kaynaklar oluştururlar. Diğer sezicilerden daha kolay görüntüleme yapılabildiğinden, mayın taramada, IR daha geniş kullanım alanına sahiptir.

IR dalgalarını almak için iki metod kullanılır: Pasif IR sistemi sadece hedefin doğal radyasyonunu alır. Aktif sistemde ayrı bir ısı kaynağı vardır ve bu ısı kaynağından hedefte meydana gelen suni radyasyon alınır.

IR dedektörü, EM radyasyon enerjisini elektrik işaretine çeviren bir dönüştürücüden ibarettir. İki çeşidi vardır; foton ve termal dedektörler. Termal dedektör enerjinin yutulması hızını ölçerken, foton dedektör, temel olarak, kuantum yutulma hızını ölçer (Ederra, 1999). O halde, foton dedektörü, yeterince küçük dalgaboyuna sahip fotonlara cevap veren seçici bir IR dedektörüdür. Diğer dalgaboylarına sahip fotonlara cevap verme, fotonların yutulma hızıyla orantılıdır. Termal dedektör, yutulan ısı gücünün şiddetine cevap verir. Isı enerjisine sahip bütün dalgaboylarına eşit bir sekilde cevap verir.

Ses-ötesi Sezici (**U**ltra-**S**ound Sensor):

Ses dalgaları frekans aralığı 20 ile 20000 Hz. dir. Ses-ötesi dalgalarının frekans bandı duyulabilen bu aralığın üstündedir. Ses-ötesi alıcı sistemlerinin prensibi, GPR sistemindeki frekans dalgalarından çok daha düşük bir frekans kullanması dışında GPR sistemlerine çok benzer.

Ses-ötesi sistem, ses-ötesi işaretleri yayar ve çevresindeki cisimlerden yansıyan işaretleri toplar (alır). Bir radar işareti ortamda bir fiziksel bozulma yapmazken, bir ses dalgası, dalgaların mertebesindeki moleküllerin mekanik bozulması gibi yayılır. (Ekstein, 1997). Bir ses dalgası, bir ortamın içinde yayılırken, dalga, ortamdaki denge konumu civarında rezonansa gelmiş moleküllerden oluşur.

Uniform homojen bir ortamda, ses-ötesi dalga bir doğru boyunca yayılır ve faklı iki ortamın sınırı ile karşılaşınca kırılır ve yansır. Sınırda, dalganın hızı ve ortamın

kırılma indisi yayılımın davranışını etkiler. GPR'da olduğu gibi, mayın tespitinde ses-ötesi dalgasının frekansı nüfuz derinliğini belirler. Alçak frekanslı dalga, yüksek frekanslı dalgaya göre, daha iyi bir derinliğe nüfuz eder (Ekstein, 1997).

Ses-ötesi dalgalar, çok nemli toprakta ya da su-altı şartlarında iyi yayıldığı halde, havada önemli derecede zayıflarken, GPR'da EM dalga, aynı şartlar altında, tam tersi bir davranış sergiler. Bunu 2.Bölümün başında toprak için verilen α zayıflama sabitinin ifadesinden kolayca görmek mümkündür. Ses-ötesi işaret, GPR'da olduğu gibi, A, B veya C-taramaları kullanılarak görüntülenebilir.

1.2.4 İşaret ve Görüntü İşleme Teknikleri:

Genel mayın tespit yöntemlerinde en önemli bilgi, mayın yeri için, 2-boyutlu bilgidir. Hangi sezici kullanılırsa kullanılsın, sezici çıkışı, bir görüntü olarak kabul edilebilen, 2-boyutlu bilgi formunda verilebilir.

Sezicilerden gelen 2-boyutlu bilgi, bir kaç nedenden dolayı sadeleştirilmeye tabi tutulur; (i) hesaba katılmayan toprak bileşimlerinin oluşturduğu gürültü, (ii) sezicinin sınırlı performansından kaynaklanan düşük-çözünürlük ve (iii) sezici çıkışındaki sınırlı dinamik alanın sebeb olduğu düşük-değişim. Bu nedenle bilgi, değişik işaret ve görüntü teknikleri kullanılarak, düzenlenmelidir.

Gürültü, hemen hemen bütün sezici çıkışlarında kaçınılmazdır. Gürültüyü ayıklama amacıyla Wiener-filtresi yerleştirilir. Wiener-filtresi, asıl işaretle tahmin edilen işaret arasındaki ortalama karesel hatayı küçülterek, asıl işareti tekrar elde eden işaret-bağımlı bir filtredir.

GPR seziciler, C-taramalı görüntü dizileri için çok büyük miktarda bilgi oluşturur. İki ya da daha çok sezicinin kullanılması, çoklu, heterojen bilgi ile sonuçlanır. Büyük-boyutlu, heterojen bilgiden istenilen özelliklerin çıkartılması çok teferruatlı araştırma gerektiren bir iştir.

Büyük-boyutlu bilgiden, gürültü ve kargaşanın (clutter) ayıklanması için ortogonal dönüşümler kullanılır. Örneğin, ayrık kosinüs dönüşümü, görüntü ve resim sıkıştırmasında kullanılır.

Hedef mayın ile içinde bulunduğu ortamın (elektriksel özelliklerinin) birbirinden yeterince farklı olmaması nedeniyle, seziciden gelen işlenmemiş görüntünün tatmin edici bilgi vermesi zordur. Mayın ile içinde bulunduğu ortamı birbirinden ayırmak için, aralarındaki farkı artırma amacı ile iyileştirme kullanılır.

1.3 Tezin Konusu ve Yakın Tarihteki Benzer Araştırmalarla Karşılaştırılması

Bu tezde, havadan gönderilen bir düzlemsel dalganın toprak içinde bulunan bir iletken küreden saçılarak yer-yüzüne geri dönmesi incelenmiştir. Bu problem 3-boyutlu bir problemdir. Bu tip 3-boyutlu problemlerin çözümleri, 2-boyutlu benzer problemlerden daha zor olduğu için, literatürde yoğun olarak bulunmamaktadır. Bugüne kadar yapılan yayınlardan, problemi, akustik açıdan, Gaunard ve Huang (1996) görüntü yöntemi ile çözerken, hem küresel yüzeydeki hem de düzlemsel yüzeydeki sınır koşullarının kolay kullanılabilmesi için "additional theorem"i kullanmışlardır. Daha sonra kürenin elastik yüzeye sahip olması durumunu da ayrıca incelemişlerdir (Gaunard ve Huang 1997). Hamid ve Hamid (2000), sonsuz iletken olarak kabul ettikleri yer ile üstündeki, ya da yere kısmen gömülü iletken bir küreden elektromagnetik saçılmayı yine "additional teorem"i görüntü yöteminde kullanarak yapmışlardır. Lee (1983), küre ile onu çevreleyen ortamın iletkenliklerinin farklı olması durumunda, yarıçapı küreninkine göre daha büyük bir çerçeve anten kaynak olarak almış ve gömülü küre problemini zaman domeninde çözmüştür. Rumeliotis ve Fikioris (1981), dielektrikle eksantrik olarak kaplanmış iletken bir küreden, eksen kaymasının saçılmaya etkisini araştırmışlardır. Sahin ve Miller (1998), T-matris metodunu kullanarak birden fazla metal ya da dielektrik nesne olması durumunda saçılmanın çözümünü vermişlerdir. Thio ve Gleeson (1979), Lee'nin daha önce doktora tezi olarak çözdüğü probleme matematiksel bir yaklaşım yaparak; küre ile onu çevreleyen ortamın magnetik geçirgenliklerinin farklı olması durumunda, incelemişler. Bu incelemede, lokal elemanların dönüşümü (Transformation of Local Elements = TOLE) metodu kullanılmış ve kaynak olarak, akımı zamanla değişen, çapı araştırılacak kürenin çapı ve derinliği mertebesinde bir çerçeve anten alınmıştır.

Cui ve diğ. (1998a ve 1998b), gömülü herhangi bir yöndeki elektrik dipolünden ışınlanan elektrik alanların formülasyonunu yapmışlardır: Sonra bu formüllerden faydalanarak gömülü dielektrik/iletken hedef mevcut olduğu durumlarda elektrik alan integral denklemleri oluşturulmuştur. İntegral denklemin çözümünden yukarı-

ortamdaki saçılan elektrik alanı ifade edilmiştir. İkinci kısımda ise, integral denklemler, Moment Metodu (MoM) kullanılarak sayısal uygulamalar için geliştirilmiştir. İlgili bir kaç sayısal sonuç sunulmuştur.

Yine 3-boyutlu gömülü cisimlerden radyasyon ve EM saçılmada karşılaşılan Sommerfeld integrallerinin hızlı hesabı MoM ile incelenmiştir (Cui ve Chew, 1999a). Burada komşu iki-ortam için olan Green fonksiyonuna ait simetrik bir ifade türetilmiştir. Konjuge gradyen hızlı Foruier dönüşümü (CG-FFT) metodu ile, 3-boyutlu gömülü, dalgaboyuna göre büyük, dielektrik cisimlerden EM saçılma için hızlı bir algoritma geliştirilmiştir (Cui ve Chew, 1999b). Elektrik alan integral denklemleri ayrıştırmak için Galerkin metodu kullanılmıştır.

Son olarak, en dik iniş yolu hızlı çok-kutup metodu (Steepest Descent Fast Multipole Method = SDFMM) kullanılarak, düzgün olmayan bir yüzeyin altına gömülü mükemmel iletken veya içine nüfuz edilebilen cisimlerden EM saçılmanın 3-boyutlu yüzey-altı analizi yapılmıştır (El-Shenawee ve diğ. 2001). Sınır yüzeylerinin ikisi de düzensiz olması nedeni ile, her iki sınır için de, elektrik alan, integral denklemleri oluşturulup, MoM ile çözülmüştür.

Bütün bu makalelerde, ya zaman domeninde çözümler yapılıyor ya da frekans domeninde integral denklemler çözülüyor ve MoM kullanılıyor. Böylece hem çözüm uzamış oluyor hem de hassasiyet önemli derecede azalabiliyor. Hedef mozaik şeklinde küçük parçalara bölünerek hesap yapılıyor. Bu tezde ise, integral denklem ve MoM kullanılmasına lüzum kalmamış ve kesin çözüm elde edilmiştir. Ayrıca hesap süresi de önemli ölçüde azaltılmıştır.

Bu çalışmada incelenen problemde, havadan toprağa dik doğrultuda ilerleyen doğrusal (lineer) polarizasyonlu bir düzlemsel dalganın, toprak içindeki bir iletken küreden saçılarak tekrar havaya çıkması problemi kesin olarak çözülmüştür.

Havadan toprağa ilerleyen doğrusal polarizasyonlu dalganın oluşturulması, Türkoğlu (2001)'nun **"**İnce anten dizisi kullanarak düzlemsel yakın alan elde edilmesi**"** adlı doktora çalışmasında yapılmıştır.

Hedef yokken topraktan yansıyan dalganın polarizasyonu, gelen dalganın polarizasyonu ile aynıdır. Küre varken, toprağa giren alan ve küreden saçılan alan (topraktan tekrar geri yansıyan ve böylece devam eden alanlar), iki tip alan olarak

ifade edilmiştir. Topraktan havaya çıkan alan da üçüncü tipi oluşturmuştur. Bu üç tip dalgaya ait seriye açılım katsayıları; küresel dalgaları, silindirik dalgaların süperpozisyonu olarak ifade eden integral bağıntılar kullanılarak verilmiştir (Akkaya 1978, 1994 ve 2002). Sınır şartlarının kullanıldığı yüzeyler, toprak yüzeyi ve hedef yüzeyidir. Bu şartların uygulanması sonucu, her üç tip alana ait seriye açılım katsayıları tespit edilmiştir. Topraktan havaya geri dönen alanda, gelen alana dik bir bileşen de bulunur. Bu bileşenin tespiti, hedefin varlığını gösterecektir. Zeminden sabit yükseklikte bir düzlemsel alıcılar dizisi kullanılarak, hedefin konumu tek bir işlemle tespit edilebilmektedir. Halbuki, C-tarama yapan bir GPRın hedefi tespit etmek için, x-ekseni boyunca m tane ve y-ekseni boyunca da n tane, toplam ($m \times n$) tane, ölçü alması gerekmektedir. Bizim bulduğumuz sonuçlarda ise bir tek yansımış alan bize hedefin merkez koordinatlarını vermektedir. Bu da yaptığımız çalışmanın orijinalliğini ve önemini belirtmektedir. Problemi çözerken yansıyan alana ait sonsuz bilinmeyenli sonsuz sayıda lineer denklem elde edilmiştir. Fakat bilinmeyen katsayıların kullanıldığı alan ifadelerinin, düşük frekanslar için, 6 terimde, yüksek frekanslar için de, en fazla 24 terimde yakınsadığı gözlenmiştir. Böylece Cui, Chew ve El-Shenawee'nin kullandıkları integral denklem çözümlerinden çok daha kısa ve çok daha kesin sonuçlara varılmıştır.

2 TOPRAK İÇİNDE GÖMÜLÜ MÜKEMMEL İLETKEN BİR KÜREDEN SAÇILMANIN TEORİSİ

2.1 Yaklaşık Çözüm ve Uygun Frekansın Seçilmesi

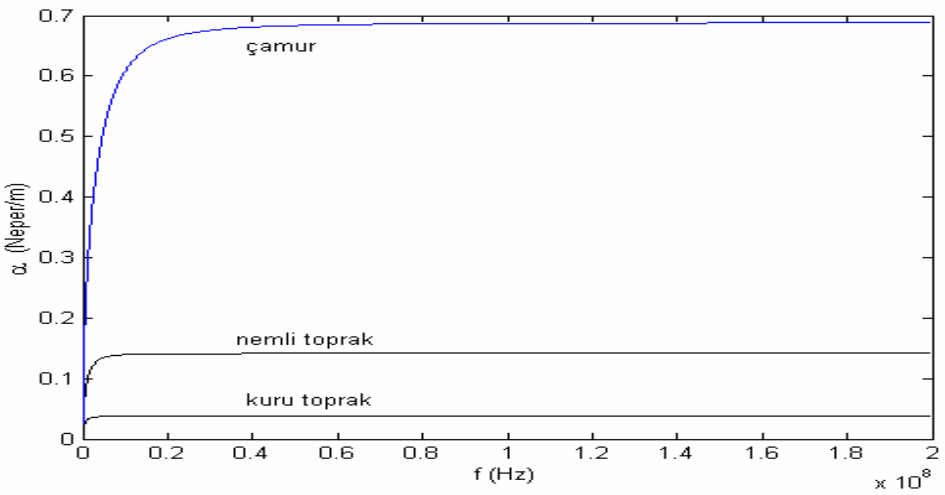
Toprak, hem havanın dielektrik sabiti ε_0 'dan farklı bir $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ dielektrik sabiti hem de σ iletkenliği olan bir ortamdır. Magnetik permabilitesi ise havanınkine eşittir.

Çok nemli bir toprakta (çamurda) $\varepsilon_r = 30$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-2}$ (S/m), kuru toprakta ise $\varepsilon_r = 4$, $\sigma = 10^{-4}$ (S/m) alınabilir. Nemlilik derecesine göre, toprağın elektriksel sabitleri, bu iki uç değerin arasında değişir. Toprak içindeki yayılma sabiti β ve zayıflama sabiti α 'nın, frekans ve elektriksel sabitler cinsinden ifadelerini,

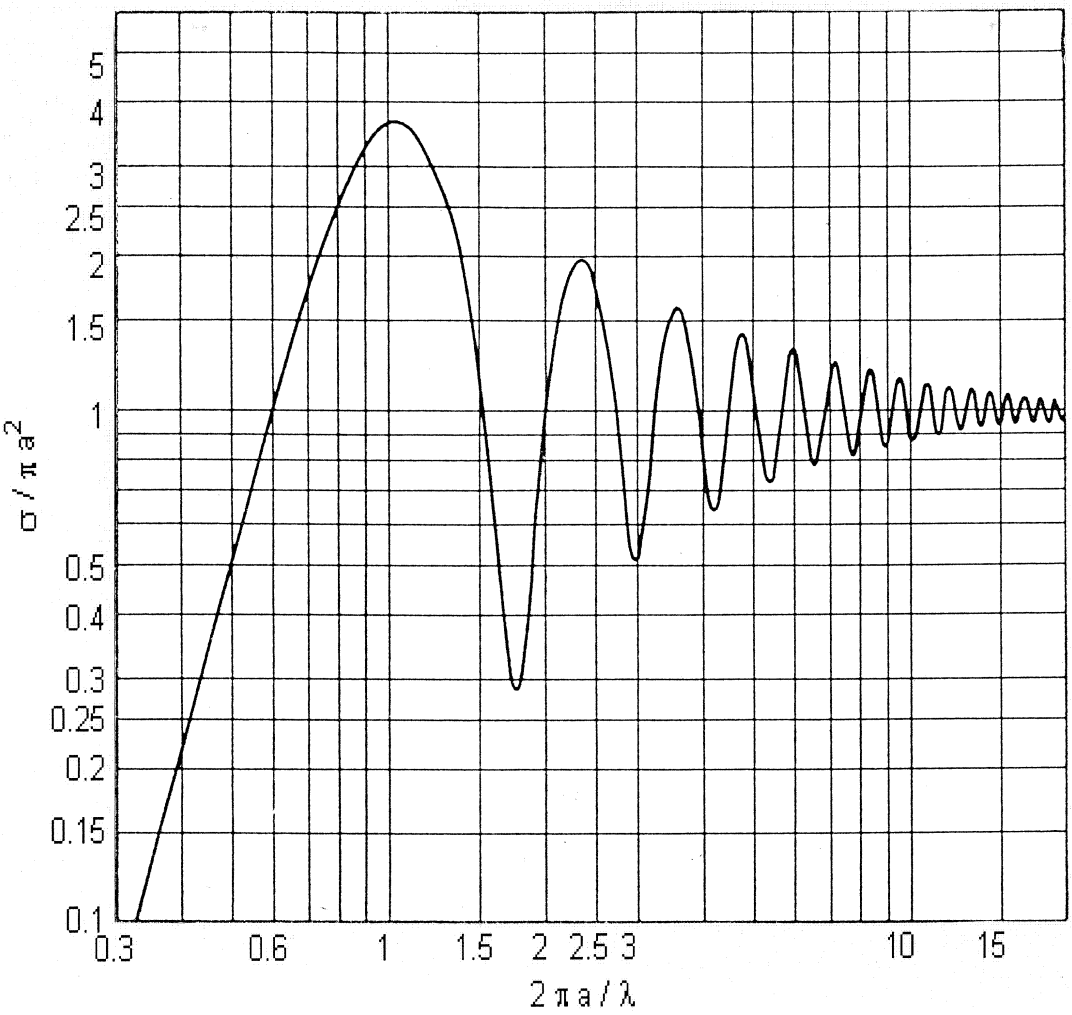
$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2}\left[\omega\varepsilon_0\varepsilon_r + \sqrt{\omega^2 {\varepsilon_0}^2 {\varepsilon_r}^2 + \sigma^2}\right]}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2}\left[-\omega\varepsilon_0\varepsilon_r + \sqrt{\omega^2 {\varepsilon_0}^2 {\varepsilon_r}^2 + \sigma^2}\right]}$$

olarak yazabiliriz. Bu ifadeler kullanılarak, zayıflama sabiti α 'nın, üç değişik toprak tipi için, frekansla değişimi şekil 2.1'de verilmiştir. Frekansın artması, α 'nın da büyümesine neden olmaktadır.



Şekil 2.1- Toprak içinde zayıflama sabitinin frekansla değişimi



Şekil 2.2- Kayıpsız bir ortamda bulunan a yarıçaplı iletken bir kürenin radar kesitinin $2\pi a/\lambda$ ile değişimi (Barton, 1964)

Kayıpsız bir ortamda bulunan a yarıçaplı iletken bir kürenin radar kesitinin $2\pi a/\lambda$ ile değişimi Şekil 2.2'de görülmektedir. İlk yaklaşıklık olarak, zayıflamasız ortam için bulunan radar kesiti sonucu kullanılabilir (Akkaya 2001). Şekil 2.2'den,

$$\lambda_{kritik} = \frac{2\pi a}{0.6} \cong 10a$$

için

Radar kesiti= $S(\lambda_{kritik}) = \pi a^2$

olduğu görülmektedir. $\lambda = 0.628\lambda_{kritik} = 6.28a$ için, $S = 3.7\pi a^2$'dir. $S_{radar} \geq \pi a^2$ olması için şekildeki rezonans bölgesinin ilk dalgası kullanılırsa,

$$4.19a \le \lambda \le 10a$$

olmalıdır. Kürenin içinde bulunduğu ortam hava olmadığı fakat kayıpsız (veya az kayıplı) dielektrik olduğu zaman ortamdaki dalgaboyu $\lambda_{or} = 2\pi/\beta$

$$\lambda_{or} = \frac{3 \cdot 10^8}{f \cdot \sqrt{\varepsilon_r}}, \qquad (\sigma << \omega\varepsilon)$$

olur. Burada λ_{or} söz konusu dielektrik içindeki dalgaboyudur. Bu değeri yukarda elde edilen dalgaboyu aralığı ifadesine taşırsak, gereken frekans bandını,

$$\frac{2.86 \cdot 10^7}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}} < f < \frac{7.16 \cdot 10^7}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}}$$

elde ederiz. Eğrinin maksimum noktasında ($\lambda = 2\pi a$) çalışmak için frekans,

$$f_{mak.\ kazanç} = \frac{4.77 \cdot 10^7}{a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}}$$

bulunur. Rezonans bölgesinin 2., 3., 4. veya 5. dalgalarını da kullanmak, 1. dalganın verdiği büyük radar kesitine ulaşmamakla beraber, mümkündür. Böylece 1, 2, 3, 4, ve 5 frekans bandları ,sırasıylaTablo 2.1'deki gibi elde edilir;

Tablo 2.1- Seçilmesi uygun olan frekans bölgeleri (a (cm) , f (GHz) olarak).

1. Tepe	$2.86/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 7.16/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
2. Tepe	$9.55/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 12.89/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
3. Tepe	$15.25/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 18.7/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
4. Tepe	$21/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 24.11/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$
5. Tepe	$26.26/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r}) < f < 30.56/(a \cdot \sqrt{\varepsilon_r})$

Dikkat edilecek bir nokta, şudur: Radar kesitinin hesabından yola çıkarak frekans aralıkları bulunurken kullanılan şekil kayıpsız ortamdaki iletken küre için elde edilmiştir. Oysa toprak kayıplı bir ortamdır; bulunan değerlerin %100 doğru olmayacağı, aşikardır.

2.2 Problemin Formülasyonu ve Kesin Çözüm

2.2.1 Homogen Bir Toprağa Gelen Düzlemsel Dalganın Kırılma ve Yansıması:

Bir ince anten dizisinden elde edilen düzlemsel dalga ($\vec{E}_1, \vec{H}_1$) toprak yüzeyine dik doğrultuda yayılmaktadır (Türkoğlu, 2001). Toprak yüzeyinin bulunduğu $z = D$ düzleminde, toprağa geçen ($\vec{E}_3^t, \vec{H}_3^t$) ve topraktan yansıyan ($\vec{E}_2, \vec{H}_2$) dalgaları oluşmaktadır (Şekil 2.3). Bu durumda elektrik ve magnetik alan ifadeleri, $\vec{k}_{01} = -k_0.\vec{u}_z$, $\vec{k}_{02} = k_0.\vec{u}_z$ ve $\vec{k}_3 = -k.\vec{u}_z$ olmak üzere, şu şekilde bulunur:

$$\vec{E}_1 = E_{01}e^{-ik_0 z} \cdot \vec{u}_x, \quad \vec{H}_1 = H_{01}e^{-ik_0 z} \cdot \vec{u}_y \tag{2.1a}$$

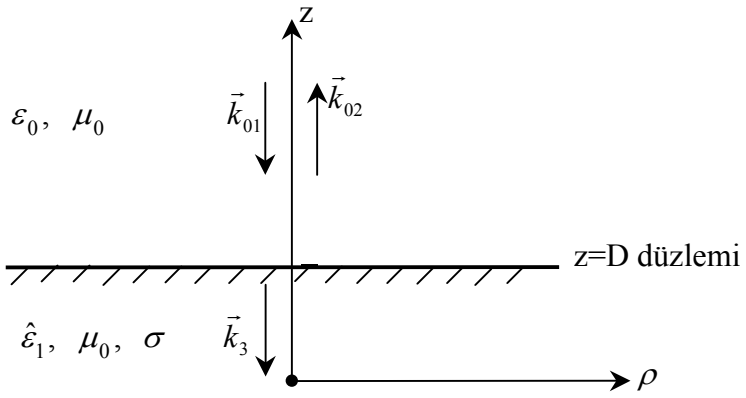
$$\vec{E}_2 = E_{02}e^{ik_0 z} \cdot \vec{u}_x, \quad \vec{H}_2 = H_{02}e^{ik_0 z} \cdot \vec{u}_y \tag{2.1b}$$

$$\vec{E}_3^t = E_{03}e^{-ikz} \cdot \vec{u}_x, \quad \vec{H}_3^t = H_{03}e^{-ikz} \cdot \vec{u}_y \tag{2.1c}$$

Bu ifadelerde

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \quad k = \omega\sqrt{\hat{\varepsilon}_1\mu_0} \text{ ve } \hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) \tag{2.2}$$

şeklindedir. $\vec{E}_3^t$'deki t üst işareti, toplam anlamına gelir. Nedeni (2.17) ve (2.18) formüllerinde görülecektir. Magnetik alan ifadelerindeki genlik katsayılarını, Maxwell-Faraday denklemi yardımıyla,



Şekil 2.3 – Gelen, yansıyan ve kırılan dalgalar

$$\vec{H} = \frac{-i}{\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E} = \frac{-i}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-i}{\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{u}_y \tag{2.3}$$

aşağıdaki gibi buluruz.

$$H_{01} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{01}\ , \qquad H_{02} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{02}\ , \qquad H_{03} = -\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\mu_0}}E_{03}$$

$z = D$ düzleminde sınır koşulları, teğetsel elektrik ve magnetik alan bileşenlerinin sürekliliği;

$$E_{1x}(x, y, z = D^+) + E_{2x}(x, y, z = D^+) = E_{3x}(x, y, z = D^-) \tag{2.4a}$$

$$H_{1y}(x, y, z = D^+) + H_{2y}(x, y, z = D^+) = H_{3y}(x, y, z = D^-) \tag{2.4b}$$

uygulandığında,

$$E_{01}e^{-ik_0D} + E_{02}e^{ik_0D} = E_{03}e^{-ikD} \tag{2.5a}$$

$$E_{01}e^{-ik_0D} - E_{02}e^{ik_0D} = \sqrt{\hat{\varepsilon}_r}E_{03}e^{-ikD} \tag{2.5b}$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklemin çözümünden,

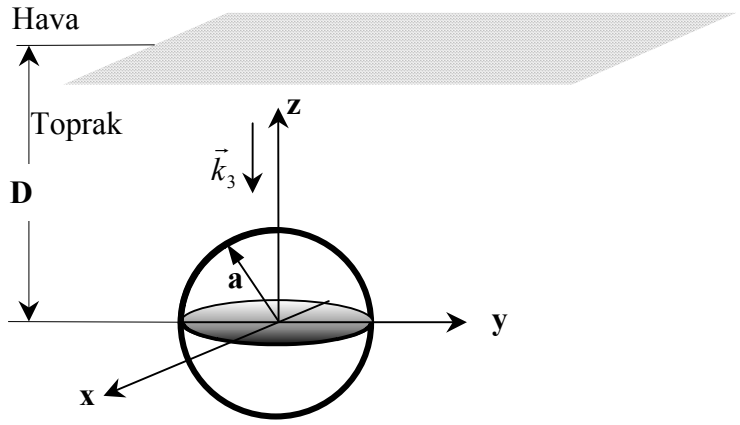
$$\frac{E_{02}}{E_{01}} = R_0 = \frac{1-\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}}{1+\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}}e^{-ik_0 2D} \tag{2.6a}$$

$$\frac{E_{03}}{E_{01}} = T_0 = \frac{2}{1+\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}}e^{-i(k_0-k)D} \tag{2.6b}$$

bulunur.

2.2.2 Toprak İçinde Küre Varken Oluşan Alanlar:

2.2.1'de toprağa (ikinci ortama) giren düzlemsel olan elektromagnetik dalga ($\vec{E}_3^t, \vec{H}_3^t$) belli oldu. Bundan sonra kayıplı ortam olarak alacağımız toprak içindeki bu alan ifadelerini kullanıp, geometrisi Şekil 2.4'de görülen ve toprak düzleminin hemen altında bulunan küreden saçılan alanlar araştırılacaktır.



Şekil 2.4 – Problemin geometrisi

Küre yokken toprak içine giren dalganın elektrik ve magnetik alanını, $z = r\cos\theta$ olmak üzere, küresel koordinatlarda ifade edersek;

$$\vec{E}_3^{\,t} = E_{03} e^{-ikr\cdot\cos\theta} \cdot (\sin\theta\cos\phi\vec{u}_r + \cos\theta\cos\phi\vec{u}_\theta - \sin\phi\vec{u}_\phi) \tag{2.7a}$$

$$\vec{H}_3^{\,t} = H_{03} e^{-ikr\cdot\cos\theta} \cdot (\sin\theta\sin\phi\vec{u}_r + \cos\theta\sin\phi\vec{u}_\theta + \cos\phi\vec{u}_\phi) \tag{2.7b}$$

buluruz. Böylece 3 no'lu düzlemsel dalga için alan bileşenleri;

$$E_{3r}^t = E_{03}\frac{\cos\phi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{-ikr\cdot\cos\theta}), \quad H_{3r}^t = H_{03}\frac{\sin\phi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{-ikr\cdot\cos\theta}) \tag{2.8a}$$

$$E_{3\theta}^t = E_{03}\cos\theta\cdot\cos\phi\cdot e^{-ikr\cdot\cos\theta}, \quad H_{3\theta}^t = H_{03}\cos\theta\cdot\sin\phi\cdot e^{-ikr\cdot\cos\theta} \tag{2.8b}$$

$$E_{3\phi}^t = -E_{03}\sin\phi\cdot e^{-ikr\cdot\cos\theta}, \qquad H_{3\phi}^t = H_{03}\cos\phi\cdot e^{-ikr\cdot\cos\theta} \tag{2.8c}$$

bulunur. Bu alan toprak içindeki toplam alanın bir kısmıdır. Küre yüzeyindeki sınır şartlarını uygulayabilmek için, 3 no'lu alanı, dalga dönüşümü kullanılarak küresel harmoniklerin seri toplamı olarak ifade etmeliyiz. Dönüşüm özdeşliği; (Ek-B)

$$e^{-ikr\cdot\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta) \tag{2.9}$$

kullanılırsa elektrik alan bileşenleri,

$$E_{3r}^t = E_{03}\frac{\cos\phi}{ikr}\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta) \tag{2.10a}$$

$$E_{3\theta}^{t} = E_{03}\cos\phi\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta)\cos\theta \tag{2.10b}$$

$$E_{3\phi}^{t} = -E_{03}\sin\phi\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta) \tag{2.10c}$$

ve magnetik alan bileşenleri de,

$$H_{3r}^{t} = -\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\mu_0}}E_{03}\frac{\sin\phi}{ikr}\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta) \tag{2.11a}$$

$$H_{3\theta}^{t} = -\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\mu_0}}E_{03}\sin\phi\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta)\cos\theta \tag{2.11b}$$

$$H_{3\phi}^{t} = -\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\mu_0}}E_{03}\cos\phi\cdot\sum_{n=0}^{\infty} i^{-n}(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta) \tag{2.11c}$$

elde edilir. Burada $j_n(kr)$ ve $P_n(\cos\theta)$, sırasıyla, küresel Bessel ve Legendre fonksiyonlarını göstermektedirler. Gelen dalga ve küreden saçılan dalga TM^r ve TE^r modlarının süperpozisyonudur. (2.10a)'de E_r bileşeni ve (2.11a)'de H_r bileşeni olduğu için, (2.10) ve (2.11) ile verilen elektromagnetik dalga hem TE^r hem TM^r modlarını içermektedir. Bu durumda, alanlar $\vec{A}$ ve $\vec{F}$ vektör potansiyellerinin cinsinden yazılır. TE^r modları için, $\vec{A}$ = 0 ve $\vec{F} = F_r\vec{u}_r$ alınır; TM^r modları için ise $\vec{A} = A_r\vec{u}_r$ ve $\vec{F}$ =0 alınır ve alanlar bulunur (Harrington, 1961). E_{3r}^{t} alanına ait A_{3r}'yi oluşturalım, bunun için,

$$E_{3r}^{t} = \frac{1}{-i\omega\hat{\varepsilon}}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)A_{3r} \tag{2.12}$$

denkleminden yararlanıp,

$$A_{3r} = \frac{E_{03}}{\omega\mu_0}\cos\phi\sum_{n=0}^{\infty} a_n\hat{J}_n(kr)P_n^{\,1}(\cos\theta) \tag{2.13}$$

yazılabilir. Burada $P_n^{\,1}(\cos\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta)$ ve $\hat{J}_n(kr) = (kr)\cdot j_n(kr)$'dır. a_n'nin değeri, A_{3r} ifadesini r'ye göre iki kez türetip (2.12) denkleminde yerine yazdıktan sonra (2.10a) de E_{3r} ifadesi ile eşitlenerek;

$$a_n = -i^{-n}\frac{(2n+1)}{n(n+1)} \tag{2.14}$$

bulunabilir. Aynı yol izlenerek, H_{3r}^{t} alanına ait F_{3r} vektör potansiyeli;

$$H_{3r}^{t} = \frac{1}{-i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)F_{3r} \tag{2.15}$$

denkleminden,

$$F_{3r} = -\frac{E_{03}}{k}\sin\phi\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{J}_n(kr) P_n^{\,1}(\cos\theta) \tag{2.16}$$

yazılabilir. Böylece 3 no'lu dalgaya ait alan bileşenleri Ek-E'deki ilgili formüllerden, TE modu için;

$$E_{3r} = 0 \tag{2.17a}$$

$$E_{3\theta} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{kr}\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\cos\phi \tag{2.17b}$$

$$E_{3\phi} = -E_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{kr}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\sin\phi \tag{2.17c}$$

$$H_{3r} = -iE_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{(kr)^2}\right]P_n^{\,1}(\cos\theta)\sin\phi \tag{2.17d}$$

$$H_{3\theta} = -iE_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{kr}\frac{\partial\hat{J}_n(kr)}{\partial(kr)}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\sin\phi \tag{2.17e}$$

$$H_{3\phi} = -iE_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{kr}\frac{\partial\hat{J}_n(kr)}{\partial(kr)}\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\cos\phi \tag{2.17f}$$

ve TM modu için de;

$$H_{3r}' = 0 \tag{2.18a}$$

$$H_{3\theta}' = -E_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{kr}\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin\phi \tag{2.18b}$$

$$H_{3\phi}' = -E_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{kr}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\cos\phi \tag{2.18c}$$

$$E_{3r}' = iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{(kr)^2}\right]P_n^{\,1}(\cos\theta)\cos\phi \tag{2.18d}$$

$$E_{3\theta}' = iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{kr}\frac{\partial\hat{J}_n(kr)}{\partial(kr)}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\cos\phi \tag{2.18e}$$

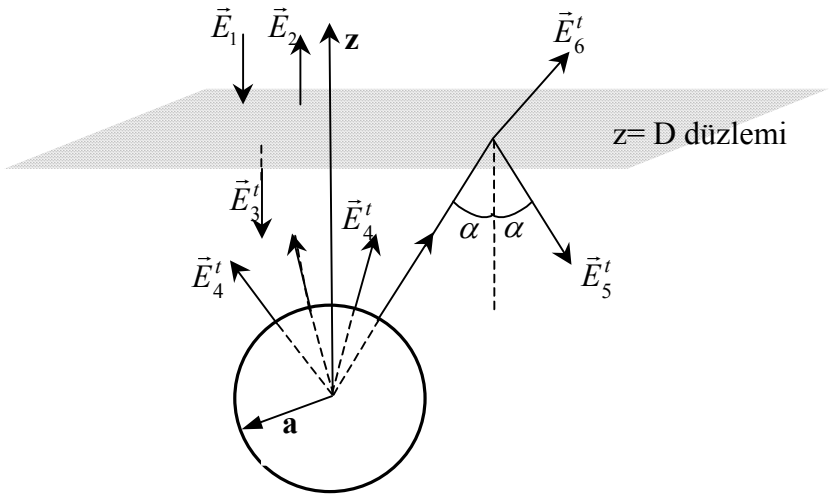
$$E_{3\phi}' = iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{kr}\frac{\partial\hat{J}_n(kr)}{\partial(kr)}\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin\phi \tag{2.18f}$$

bulunur. Buraya kadar, yalnızca, toprağa gelen düzlemsel dalganın ve (sanki küre yokmuş gibi) $z = D$ düzleminden yansıyan ve toprağa giren 2 ve 3 no'lu alanlardan bahsettik. Gerçekte, mükemmel iletken kürenin varlığı, bir yansıtıcı olarak rol oynamaktadır. Böylece, küreden etrafa yayılan elektromagnetik dalgalar olacağı gibi, bu dalgaların $z = D$ sınırına çarpınca geri yansımalarından hasıl olan yeni dalgalar da oluşacaktır.

Ayrıca, $z = D$ düzleminden havaya çıkan dalgalar da oluşacaktır. Ne var ki, küreden gelen ve $z = D$ den yansıyan alanlar tekrar küreye çarpacak ve bu olaylar zincirleme olarak devam edecektir. Bütün bu peşpeşe yansıma ve kırılma olayları sırasında oluşan alanları, Şekil 2.5'te görüldüğü gibi, altı sınıfa ayırıyoruz:

1) Havadan gelen ve $\vec{E}_1$ ile tanımladığımız düzlemsel dalga,

2) Topraktan geri yansımış olan ve $\vec{E}_2$ ile tanımladığımız düzlemsel dalga,



Şekil 2.5- Problemdeki çeşitli alanlar

3) Toprağa giren ve $\vec{E}_3^t$ ile tanımladığımız düzlemsel dalga (bu dalgayı küresel TE ve küresel TM modları olarak ifade ettik.)

4) Küreden saçılan (zincirleme olayların oluşturduğu) toplam dalgalar, bu dalgaları 4 no'lu olarak ifade edeceğiz.

5) $z = D$ düzleminden toprağa geri saçılan küresel dalgalar, bu dalgaları 5 no'lu dalgalar diye isimlendirecegiz ve 5 no'lu dalgalar 3 no'lu dalgaları içermemektedir.

6) $z = D$ düzleminde topraktan dışarı çıkan 6 no'lu küresel dalgalar. 6 no'lu dalgalar 2 no'lu dalgaları içermemektedir.

Kullanacağımız sınır şartları:

i) $z = D$ düzleminde toprak ve havadaki alanların teğetsel bileşenlerinin sürekliliği;

$$E_{1x}(x,y,z=D^+) + E_{2x}(x,y,z=D^+) + E_{6x}(x,y,z=D^+) = E_{3x}(x,y,z=D^-) + E_{4x}(x,y,z=D^-) + E_{5x}(x,y,z=D^-) \quad (2.19a)$$

$$E_{1y}(x,y,z=D^+) + E_{2y}(x,y,z=D^+) + E_{6y}(x,y,z=D^+) = E_{3y}(x,y,z=D^-) + E_{4y}(x,y,z=D^-) + E_{5y}(x,y,z=D^-)$$

ya da

$$E_{1y}(x,y,z=D^+) = E_{2y}(x,y,z=D^+) = E_{3y}(x,y,z=D^+) = 0$$

olduğundan,

$$E_{6y}(x,y,z=D^+) = E_{4y}(x,y,z=D^-) + E_{5y}(x,y,z=D^-). \quad (2.19b)$$

$$H_{1x}(x,y,z=D^+) + H_{2x}(x,y,z=D^+) + H_{6x}(x,y,z=D^+) = H_{3x}(x,y,z=D^-) + H_{4x}(x,y,z=D^-) + H_{5x}(x,y,z=D^-)$$

ya da

$$H_{1x}(x,y,z=D^+) = H_{2x}(x,y,z=D^+) = H_{3x}(x,y,z=D^-) = 0$$

olduğundan

$$H_{6x}(x,y,z=D^+) = H_{4x}(x,y,z=D^-) + H_{5x}(x,y,z=D^-)\,. \tag{2.19c}$$

$$\begin{aligned} &H_{1y}(x,y,z=D^+) + H_{2y}(x,y,z=D^+) + H_{6y}(x,y,z=D^+) \\ &\quad = H_{3y}(x,y,z=D^-) + H_{4y}(x,y,z=D^-) + H_{5y}(x,y,z=D^-) \end{aligned} \tag{2.19d}$$

(2.4) no' lu denklemler daha önce kullanıldığı için; (2.19a) no'lu denklemden (2.4a) no'lu denklemi taraf tarafa çıkarırsak,

$$E_{6x}(x,y,z=D^+) = E_{4x}(x,y,z=D^-) + E_{5x}(x,y,z=D^-) \tag{2.19e}$$

elde edilir. Yine (2.19d) no'lu denklemden (2.4b) no'lu denklemi taraf tarafa çıkarırsak,

$$H_{6y}(x,y,z=D^+) = H_{4y}(x,y,z=D^-) + H_{5y}(x,y,z=D^-) \tag{2.19f}$$

denklemi elde edilir.

ii) $r=a$ küre yüzeyinde teğetsel elektrik alan bileşenleri sıfırdır:

$$E_\theta{}^t(r=a,\theta,\phi) = E^t_{3\theta}(r=a,\theta,\phi) + E^t_{4\theta}(r=a,\theta,\phi) + E^t_{5\theta}(r=a,\theta,\phi) = 0 \tag{2.20a}$$

$$E_\phi{}^t(r=a,\theta,\phi) = E^t_{3\phi}(r=a,\theta,\phi) + E^t_{4\phi}(r=a,\theta,\phi) + E^t_{5\phi}(r=a,\theta,\phi) = 0 \tag{2.20b}$$

2.2.3 Alanların Küresel Koordinatlarla İfadeleri ve Çözümler:

Vektör potansiyel fonksiyonları, küresel koordinatlarla ifade edilirken, küresel TM modları ve küresel TE modlarını türetirler. 4 no'lu dalgalar için bu modların ikisi de olacaktır. Vektör potansiyel fonksiyonları genel halde, küresel TM modları için

$$A_r = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n} A_{nm}(r,\theta,\phi) \tag{2.21a}$$

$$A_{nm}(r,\theta,\phi) = \frac{H_{nm0}}{\omega\mu_0}\hat{Z}_n(kr)P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{2.21b}$$

ve küresel TE modları için

$$F_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} F_{nm}(r,\theta,\phi) \tag{2.21c}$$

$$F_{nm}(r,\theta,\phi) = \frac{E_{nm0}}{k} \hat{Z}_n(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{2.21d}$$

olsun. Bu ifadelerde $\hat{Z}_n(kr)$, birinci ve ikinci nev'i şapkalı Bessel ve şapkalı Hankel fonksiyonlarının ($\hat{J}_n(kr)$, $\hat{N}_n(kr)$, $\hat{H}_n^{(1)}(kr)$ ve $\hat{H}_n^{(2)}(kr)$) herhangi biri olabilir. Yine aynı ifadelerde toplam ifadelerini,

$$A_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{nm}(r,\theta,\phi) = A_{00}(r,\theta,\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=-n}^{-1} A_{nm}(r,\theta,\phi) + \sum_{m=+1}^{+n} A_{nm}(r,\theta,\phi) \right]$$

$$= A_{00}(r,\theta,\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=n}^{1} A_{nm_1}(r,\theta,\phi)\Big|_{m_1=-m} + \sum_{m=+1}^{+n} A_{nm}(r,\theta,\phi) \right]$$

$$= A_{00}(r,\theta,\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{+n} \left[A_{nm_1}(r,\theta,\phi)\Big|_{m_1=-m} + A_{nm}(r,\theta,\phi) \right]$$

şeklinde yazılabilir. (2.21b)'ye göre de

$$A_{n(-m)}(r,\theta,\phi) + A_{nm}(r,\theta,\phi) = \frac{H_{n(-m)0}}{\omega\mu_0} \hat{Z}_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{-im\phi} + \frac{H_{nm0}}{\omega\mu_0} \hat{Z}_n(kr) P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

$$= \frac{1}{\omega\mu_0} \hat{Z}_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \left[H_{nm0} e^{im\phi} + H_{n(-m)0} e^{-im\phi} \right]$$

olur. Şimdi yeni b_{nm}^{+} ve b_{nm}^{-} katsayılarını tanımlayalım. Öyle ki,

$$H_{nm0} e^{im\phi} + H_{n(-m)0} e^{-im\phi} = (H_{nm0} + H_{n(-m)0}) \cos m\phi + i(H_{nm0} - H_{n(-m)0}) \sin m\phi$$

$$= E_{03} \left[b_{nm}^{+} \cos m\phi + b_{nm}^{-} \sin m\phi \right]$$

olsun. Bu yeni katsayılarla,

$$A_r = A_{00}(r,\theta,\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{E_{03}}{\omega\mu_0} \hat{Z}_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \left[b_{nm}^{+} \cos m\phi + b_{nm}^{-} \sin m\phi \right] \tag{2.21e}$$

halini alır. Aynı şekilde elektrik vektör potansiyeli için de, c_{nm}^{+} ve c_{nm}^{-} katsayılarını getirerek,

$$F_r = F_{00}(r,\theta,\phi) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{E_{03}}{k}\hat{Z}_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \qquad (2.21f)$$

yazılabilir. Burada

$$A_{00} = \frac{E_{03}}{\omega\mu_0} b_{00}\hat{Z}_0(kr)$$

$$F_{00} = \frac{E_{03}}{k} c_{00}\hat{Z}_0(kr)$$

olduğu açıktır. (2.21e) ve (2.21f) ifadelerindeki vektör potansiyeller Ek-E'de verilen formüllerde kullanılarak, küresel TE_{nm} modu için, alan bileşenleri;

$$E_r = 0 \qquad (2.22a)$$

$$E_\theta = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \qquad (2.22b)$$

$$E_\phi = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \qquad (2.22c)$$

$$H_r = E_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} in(n+1)\frac{\hat{Z}_n(kr)}{(kr)^2}P_n^m(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \qquad (2.22d)$$

$$H_\theta = E_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i\frac{1}{kr}\frac{d\hat{Z}_n(kr)}{d(kr)}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \qquad (2.22e)$$

$$H_\phi = E_{03}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\frac{1}{kr}\frac{d\hat{Z}_n(kr)}{d(kr)}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \qquad (2.22f)$$

şeklinde elde edilir. Küresel olan bu bileşenleri, silindirik bileşenler olarak ifade edelim:

$$E_\rho = \sin\theta E_r + \cos\theta E_\theta \qquad (2.23a)$$

$$E_\phi = E_\phi \qquad (2.23b)$$

$$E_z = \cos\theta E_r - \sin\theta E_\theta \qquad (2.23c)$$

$\vec{H}$ magnetik alan bileşenleri için de benzer formüller geçerli olacaktır. (2.22) ve (2.23) bağıntılarına göre,

$$E_\rho = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\cot\theta P_n^m(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \qquad (2.\ .24\ a)$$

$$E_\phi = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \qquad (2.24b)$$

$$E_z = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \qquad (2.24c)$$

olur. Assosiye Legendre polinomları için,

$$f_1(\theta) = \cot\theta P_n^m(\cos\theta) = \left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2m}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) + \frac{1}{2m}P_n^{m+1}(\cos\theta) \qquad (2.25a)$$

$$f_2(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right] = \left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2}P_n^{m+1}(\cos\theta) \qquad (2.25b)$$

bağıntılarını E_ρ ve E_ϕ ifadelerine taşıyalım:

$$E_\rho = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2m}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) + \frac{1}{2m}P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \qquad (2.26a)$$
$$\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]$$

$$E_\phi = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2}P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \qquad (2.26b)$$
$$\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]$$

buluruz. 4 no'lu dalgaya ait ifadelere yukardaki bağıntıları uygulayacağız. Küreden saçılan alan oldukları için 4 no'lu ifadelerde sadece birinci nev'i küresel Hankel fonksiyonları geçecektir. Yani

$$\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr} = z_n(kr) = h_n^{(1)}(kr) \qquad (2.27)$$

fonksiyonunu kullanmamız gerekmektedir. Bu durumda 4 no'lu dalganın TE modundaki bileşenleri,

$$E_{4\rho} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]h_n^{(1)}(kr)P_n^{m-1}(\cos\theta)+\frac{1}{2}h_n^{(1)}(kr)P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.28a}$$

$$E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]h_n^{(1)}(kr)P_n^{m-1}(\cos\theta)-\frac{1}{2}h_n^{(1)}(kr)P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.28b}$$

$$E_{4z} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)h_n^{(1)}(kr)P_n^{m}(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.28c}$$

halini alır. Bu bileşenlerin içinde $h_n^{(1)}(kr)P_n^q(\cos\theta)$ çarpımı için Ek-B'de ıspatı verilmiş olan (Akkaya, 1978, 1994, 2002),

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^q(\cos\theta) = i^{q-n}\int_C J_q(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^q(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \tag{2.29}$$

formülü kullanılacaktır. Burada C integral yolu Şekil B.1'de çizilmiş olan ve $(\cos\alpha)$'nın $i\infty$'dan 1'e kadar değiştiği ve her iki uçta integrandın sönümlü olduğu bir eğridir. Böylece,

$$\begin{aligned} E_{4\rho} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\Big\{&\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]\cdot i^{m-1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m-1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m-1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \\ &+\frac{1}{2}\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m+1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m+1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m+1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha)\Big\} \end{aligned} \tag{2.30a}$$

$$\begin{aligned} E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\Big\{&\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]\cdot i^{m-1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m-1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m-1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \\ &-\frac{1}{2}\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot i^{m+1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m+1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m+1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha)\Big\} \end{aligned} \tag{2.30b}$$

$$E_{4z} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)i^{m-n}\int_{C} J_m(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^m(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.30c}$$

elde ederiz. Ayrıca Bessel fonksiyonlarına ait

$$J_{m-1}(t) = \frac{m}{t}J_m(t) + \frac{d}{dt}\left[J_m(t)\right] \tag{2.31a}$$

$$J_{m+1}(t) = \frac{m}{t}J_m(t) - \frac{d}{dt}\left[J_m(t)\right] \tag{2.31b}$$

bağıntıları da (2.30a) ve (2.30b)'de kullanıldığında,

$$E_{4\rho} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot\int_{C} e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \tag{2.32a}$$

$$E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-i)\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot\int_{C} e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)m^2\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \tag{2.32b}$$

$$E_{4z} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot\int_{C} e^{ikz\cos\alpha} f_1(\alpha)tg\alpha\cdot J_m(k\rho\sin\alpha)d(\cos\alpha) \tag{2.32c}$$

bulunur. $f_1(\alpha)$ ve $f_2(\alpha)$ (2.25a) ve (2.25b) ile tanımlanan fonksiyonlardır. Kısaca, küresel TE_{nm} modunun integral ifadesi,

$$\vec{E}_4 = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{c_{nm}^{+}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{e}_{41} + f_2(\alpha)\vec{e}_{42}\right]d(\cos\alpha) + c_{nm}^{-}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{e}_{43} + f_2(\alpha)\vec{e}_{44}\right]d(\cos\alpha)\right\} \tag{2.33a}$$

şeklinde yazılabilir. (2.33a) ifadesi, küresel TE_{nm} modunun, silindirik modların kombinezonlarının integrali olduğunu göstermektedir (Akkaya, 1978, 1994). Bu silindirik modların ifadeleri şöyledir:

$$\vec{e}_{41} = -i^m \left[im \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\rho + im^2 \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\phi + m(tg\alpha) g(\rho,z) \sin m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33b)$$

$$\vec{e}_{42} = -i^m \left[im \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\rho + i \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33c)$$

$$\vec{e}_{43} = i^m \left[im \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - im^2 \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\phi + m(tg\alpha) g(\rho,z) \cos m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33d)$$

$$\vec{e}_{44} = i^m \left[im \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\rho - i \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33e)$$

$\vec{e}_{41}$ ve $\vec{e}_{43}$ silindirik TM modları, $\vec{e}_{42}$ ve $\vec{e}_{44}$ silindirik TE modlarıdır. Burada $g(\rho,z) = J_m(k\rho\sin\alpha) e^{ikz\cos\alpha}$ olarak tanımlanmaktadır. Küresel TE moduna ait magnetik alan bileşenleri ise, (2.33a) denkleminden, rotasyonel alarak

$$\vec{H}_4 = \frac{1}{i\omega\mu_0} E_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{-n} \nabla \times \left\{ c_{nm}^{+} \int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{41} + f_2(\alpha)\vec{e}_{42} \right] \cdot d(\cos\alpha) + c_{nm}^{-} \int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{43} + f_2(\alpha)\vec{e}_{44} \right] \cdot d(\cos\alpha) \right\} \quad (2.33f)$$

yazılabilir. (2.33f)'daki rotasyonel işlemini (.2.33)-(2.33e)'ten,

$$\vec{h}_{41} = \frac{\nabla \times \vec{e}_{41}}{i\omega\mu_0} = \frac{im}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\rho - \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33g)$$

$$\vec{h}_{42} = i\cos\alpha \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha g(\rho,z) \cos m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33h)$$

$$\vec{h}_{43} = \frac{\nabla \times \vec{e}_{43}}{i\omega\mu_0} = \frac{im}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\rho + \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33i)$$

$$\vec{h}_{44} = i\cos\alpha \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\rho + m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha g(\rho,z) \sin m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33j)$$

bulunur.

4 no'lu alanın küresel TM modunda alan bileşenleri için, küresel TE modu için yaptığımıza benzer bir yol izlenir. Bu kez b_{nm}^{+} ve b_{nm}^{-} katsayıları kullanılacaktır.

Ayrıca küresel TE modundan ayırt etmek için, küresel TM moduna ait alan bileşenleri üslü harflerle belirtilecektir.

$$H_r' = 0 \tag{2.34a}$$

$$H_\theta' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.34b}$$

$$H_\phi' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.34c}$$

$$E_r' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} in(n+1)\frac{h_n^{(1)}(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.34d}$$

$$E_\theta' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i\left[h_{n-1}^{(1)}(kr) - \frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.34e}$$

$$E_\phi' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[h_{n-1}^{(1)}(kr) - \frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.34f}$$

olarak ifade edelim. Küresel olan bu bileşenleri, silindirik bileşenler olarak ifade edelim:

$$H_\rho' = \cos\theta H_\theta' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\cot\theta P_n^m(\cos\theta)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.35a}$$

$$H_\phi' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.35b}$$

$$H_z' = -\sin\theta H_\theta' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.35c}$$

Legendre polinomlarına ait (2.25) bağıntıları ile Bessel fonksiyonlarına ait (2.31) özdeşliklerinin kullanılması sonucu,

$$\begin{aligned} H_{4\rho}' = {} & H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \\ & \cdot\int_C e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \end{aligned} \tag{2.36a}$$

$$H_{4\phi}' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-i)\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot \int_{C} e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)m^2\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \quad (2.36b)$$

$$H_{4z}' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot \int_{C} e^{ikz\cos\alpha} f_1(\alpha)tg\alpha\cdot J_m(k\rho\sin\alpha)d(\cos\alpha) \quad (2.36c)$$

bulunur. Kısaca, küresel TM_{nm} modunun integral ifadesi,

$$\vec{H}_4' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{b_{nm}^{+}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{41}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{42}'\right]d(\cos\alpha) + b_{nm}^{-}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{43}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{44}'\right]d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.37a)$$

şeklinde yazılabilir. Küresel TM_{nm} modunun, silindirik modların kombinezonlarının integrali olduğu görülmektedir (Akkaya, 1978, 1994). Bu silindirik modların ifadeleri şöyledir:

$$\vec{h}_{41}' = -i^m\left[im\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\rho + im^2\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\phi + mtg\alpha g(\rho,z)\sin m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37b)$$

$$\vec{h}_{42}' = -i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\rho + i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37c)$$

$$\vec{h}_{43}' = i^m\left[im\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\rho - im^2\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\phi + mtg\alpha g(\rho,z)\cos m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37d)$$

$$\vec{h}_{44}' = i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\rho - i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37e)$$

Burada $g(\rho,z) = J_m(k\rho\sin\alpha)e^{ikz\cos\alpha}$ olarak tanımlanmaktadır. Küresel TM moduna ait elektrik alan bileşenleri ise, (2.37a) denkleminden, rotasyonel alarak

$$\vec{E}_4' = -\frac{1}{i\omega\hat{\varepsilon}}H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n} \nabla\times\left\{b_{nm}^{+}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{41}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{42}'\right]d(\cos\alpha) + b_{nm}^{-}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{43}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{44}'\right]d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.37f)$$

yazılabilir.(2.37f)'teki rotasyonel işlemini (2.37b)-(2.37e)'den,

$$\vec{e}_{41}'=\frac{\nabla\times\vec{h}_{41}'}{-i\omega\hat{\varepsilon}}=-\frac{m}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\rho-i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37g)$$

$$\vec{e}_{42}'=-\cos\alpha\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\rho-im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\phi+tg\alpha g(\rho,z)\cos m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37h)$$

$$\vec{e}_{43}'=\frac{\nabla\times\vec{h}_{43}'}{-i\omega\hat{\varepsilon}}=-\frac{m}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\rho+i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37i)$$

$$\vec{e}_{44}'=-\cos\alpha\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\rho+im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\phi+tg\alpha g(\rho,z)\sin m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37j)$$

bulunur. (2.33)-(2.33e) ile (2.37g)-(2.37j)'de elde ettiğimiz $\vec{e}_{4j}$'ler ile $\vec{e}_{4j}$''ler arasında şu bağıntıların mevcut olduğu görülmektedir;

$$\vec{e}_{41}'=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{m}{\cos\alpha}\vec{e}_{44} \quad (2.38a)$$

$$\vec{e}_{42}'=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{\cos\alpha}{m}\cdot\vec{e}_{43} \quad (2.38b)$$

$$\vec{e}_{43}'=\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{m}{\cos\alpha}\vec{e}_{42} \quad (2.38c)$$

$$\vec{e}_{44}'=\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{\cos\alpha}{m}\cdot\vec{e}_{41} \quad (2.38d)$$

$E_{03}=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}H_{03}$ bağıntısı ile $f_1'(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{m}f_2(\alpha)$ ve $f_2'(\alpha)=\frac{m}{\cos\alpha}f_1(\alpha)$ tanımları göz önüne alınıp, (2.38) bağıntılarının da (2.37f) ifadesinde kullanılması sonucu,

$$\vec{E}_4'=E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}i^{-n}\left\{b_{nm}^{+}\int_C\left[f_1'(\alpha)\vec{e}_{43}+f_2'(\alpha)\vec{e}_{44}\right]d(\cos\alpha)-b_{nm}^{-}\int_C\left[f_1'(\alpha)\vec{e}_{41}+f_2'(\alpha)\vec{e}_{42}\right]d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.39)$$

elde edilir. Böylece 4 no'lu dalgaların (2.33a) - (2.33f) ile özetlediğimiz küresel TE modları ve (2.37a) - (2.37f) ile özetlediğimiz küresel TM modları şeklinde ifade ettik. Bu ifadelerde yer alan $(\vec{e}_{41},\vec{h}_{41})$, $(\vec{e}_{42},\vec{h}_{42})$,$(\vec{e}_{43},\vec{h}_{43})$, $(\vec{e}_{44},\vec{h}_{44})$, $(\vec{e}_{41}',\vec{h}_{41}')$, $(\vec{e}_{42}',\vec{h}_{42}')$ $(\vec{e}_{43}',\vec{h}_{43}')$, $(\vec{e}_{44}',\vec{h}_{44}')$ alanlarının silindirik modlar olduklarını gördük.

Silindirik dalgaları, diferansiyel düzlemsel dalgaların integralleri olarak ifade etmek mümkündür. Yukarda ise, küresel dalgaların diferansiyel silindirik dalgaların integralleri olarak ifade ettik. Dolayısıyla, her küresel dalgayı, diferansiyel düzlemsel dalgaların iki katlı integrali (ψ ve α integralleri) olarak yazmak mümkündür. Bunu gerçekleştirmek için Ek-C'de elde ettiğimiz Bessel fonksiyonları ve türevlerinin integral ifadelerini kullanacağız. $\vec{e}_{41}$, $\vec{e}_{42}$, $\vec{e}_{43}$ ve $\vec{e}_{44}$ ifadelerini, $k\sin\alpha = k_t$ ve $k\cos\alpha = k_z$ olmak üzere, tek tek inceleyelim;

$$\vec{e}_{41} = -im\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \sin m\phi \vec{u}_\rho + mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \cos m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho) \sin m\phi \vec{u}_z \right] \cdot e^{ik_z z}$$

yukardaki ifadede sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını üstel yazıp, ifade $e^{im\phi}$ ve $e^{-im\phi}$ ortak parantezlerine alındığında,

$$\begin{aligned}\bar{e}_{41} = &-\frac{m}{2}\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho + mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z} \\ &+\frac{m}{2}\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho - mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}\end{aligned}$$

yazılabilir. (C.9) integrallerinin kullanılması ile,

$$\begin{aligned}\bar{e}_{41} = &-\frac{im}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z\right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z} \\ &+\frac{im}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z\right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}\end{aligned}$$

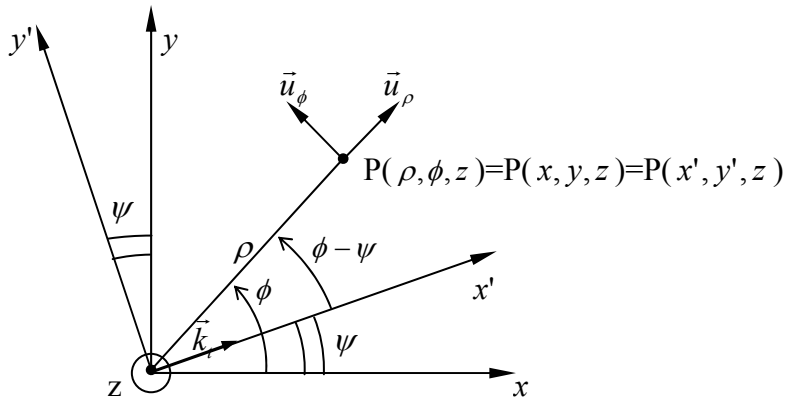
$$\bar{e}_{41} = -\frac{im}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left[e^{im\psi} - e^{-im\psi}\right] e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z\right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{ik_z z}$$

ve Şekil 2.6'nın yardımıyla,

$$x' = \rho\cos(\phi-\psi) \tag{2.40a}$$

$$\vec{u}_{x'} = \cos(\phi-\psi)\vec{u}_\rho - \sin(\phi-\psi)\vec{u}_\phi \tag{2.40b}$$

$$\vec{u}_{y'} = \sin(\phi-\psi)\vec{u}_\rho + \cos(\phi-\psi)\vec{u}_\phi \tag{2.40c}$$



Şekil 2.6- Problemin geometrisine ait $z=0$ kesiti

ifadeleri kullanılarak,

$$\vec{e}_{41}=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} m\cdot\sin m\psi\cdot e^{ik_t x'}e^{ik_z z}\left(\vec{u}_{x'}-\frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi) \tag{2.41a}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi integralin içindeki ifade diferansiyel bir düzlemsel dalgadan ibarettir. Aynı yol izlenerek diğer silindirik modlar için ,

$$\vec{e}_{42}=-\left[mi^{m+1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\rho+i^{m+1}\frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\right]\cdot e^{ik_z z}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[mi^{m}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\vec{u}_\rho+i^{m+1}\frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)}\vec{u}_\phi\right]\cdot e^{im\phi}e^{ik_z z}$$

$$+\frac{1}{2}\left[mi^{m}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\vec{u}_\rho-i^{m+1}\frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)}\vec{u}_\phi\right]\cdot e^{-im\phi}e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{42}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t x'}\left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right]\cdot d(\psi-\phi)e^{im\phi}e^{ik_z z}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{-im(\psi-\phi)}e^{ik_t x'}\left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right]\cdot d(\psi-\phi)\cdot e^{-im\phi}e^{ik_z z}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}\left[e^{im\psi}+e^{-im\psi}\right]e^{ik_t x'}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi)e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{42}=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}\cos m\psi\cdot e^{ik_t x'}e^{ik_z z}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi) \tag{2.41b}$$

olarak ifade edilir. Yine, integralin içindeki ifade diferansiyel düzlemsel dalgadır,

$$\vec{e}_{43} = im\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \sin m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\cos m\phi \vec{u}_z \right] \cdot e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{43} = \frac{m}{2}\left[i^{m+1} \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho - mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$+ \frac{m}{2}\left[i^{m+1} \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho + mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

yazılabilir. (C.9) integrallerinin kullanılması ile,

$$\vec{e}_{43} = \frac{m}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + tg\alpha\vec{u}_z \right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$+ \frac{m}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + tg\alpha\vec{u}_z \right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{43} = -\frac{m}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left[e^{im\psi} + e^{-im\psi} \right] e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z \right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{43} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} m \cdot \cos m\psi \cdot e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \left(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z \right) \cdot d(\psi-\phi) \qquad (2.41c)$$

olarak ifade edilmiş olur. Dikkat edildiğinde diferansiyel düzlemsel dalga $\vec{e}_{41}$'de bulunan diferansiyel düzlemsel dalga ile aynıdır. Son olarak,

$$\vec{e}_{44} = \left[mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - i^{m+1} \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \sin m\phi \vec{u}_\phi \right] \cdot e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{44} = \frac{1}{2}\left[mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \vec{u}_\rho - i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\phi \right] \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \vec{u}_\rho + i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\phi \right] \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t x'} \left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi \right] \cdot d(\psi-\phi) e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$- \frac{i}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t x'} \left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi \right] \cdot d(\psi-\phi) \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

$$= -\frac{i}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left[e^{im\psi} - e^{-im\psi} \right] e^{ik_t x'} \vec{u}_{y'} \cdot d(\psi-\phi) e^{ik_z z}$$

$\vec{H}$ magnetik alan bileşenleri için de benzer formüller geçerli olacaktır. (2.22) ve (2.23) bağıntılarına göre,

$$E_\rho = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\cot\theta P_n^m(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \qquad (2.\ .24\ a)$$

$$E_\phi = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \qquad (2.24b)$$

$$E_z = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \qquad (2.24c)$$

olur. Assosiye Legendre polinomları için,

$$f_1(\theta) = \cot\theta P_n^m(\cos\theta) = \left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2m}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) + \frac{1}{2m}P_n^{m+1}(\cos\theta) \qquad (2.25a)$$

$$f_2(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right] = \left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2}P_n^{m+1}(\cos\theta) \qquad (2.25b)$$

bağıntılarını E_ρ ve E_ϕ ifadelerine taşıyalım:

$$E_\rho = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2m}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) + \frac{1}{2m}P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \qquad (2.26a)$$
$$\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]$$

$$E_\phi = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]P_n^{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2}P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \qquad (2.26b)$$
$$\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]$$

buluruz. 4 no'lu dalgaya ait ifadelere yukardaki bağıntıları uygulayacağız. Küreden saçılan alan oldukları için 4 no'lu ifadelerde sadece birinci nev'i küresel Hankel fonksiyonları geçecektir. Yani

$$\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr} = z_n(kr) = h_n^{(1)}(kr) \qquad (2.27)$$

fonksiyonunu kullanmamız gerekmektedir. Bu durumda 4 no'lu dalganın TE modundaki bileşenleri,

$$E_{4\rho} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]h_n^{(1)}(kr)P_n^{m-1}(\cos\theta)+\frac{1}{2}h_n^{(1)}(kr)P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.28a}$$

$$E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]h_n^{(1)}(kr)P_n^{m-1}(\cos\theta)-\frac{1}{2}h_n^{(1)}(kr)P_n^{m+1}(\cos\theta)\right\} \left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.28b}$$

$$E_{4z} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)h_n^{(1)}(kr)P_n^{m}(\cos\theta)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.28c}$$

halini alır. Bu bileşenlerin içinde $h_n^{(1)}(kr)P_n^q(\cos\theta)$ çarpımı için Ek-B'de ıspatı verilmiş olan (Akkaya, 1978, 1994, 2002),

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^q(\cos\theta) = i^{q-n}\int_C J_q(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^q(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \tag{2.29}$$

formülü kullanılacaktır. Burada C integral yolu Şekil B.1'de çizilmiş olan ve $(\cos\alpha)$'nın $i\infty$'dan 1'e kadar değiştiği ve her iki uçta integrandın sönümlü olduğu bir eğridir. Böylece,

$$\begin{aligned} E_{4\rho} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\Big\{&\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]\cdot i^{m-1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m-1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m-1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \\ &+\frac{1}{2}\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m+1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m+1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m+1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha)\Big\} \end{aligned} \tag{2.30a}$$

$$\begin{aligned} E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\Big\{&\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot\left[\frac{n(n+1)-m(m-1)}{2}\right]\cdot i^{m-1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m-1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m-1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \\ &-\frac{1}{2}\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot i^{m+1-n} \\ &\cdot\int_C J_{m+1}(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^{m+1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha)\Big\} \end{aligned} \tag{2.30b}$$

$$E_{4z} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)i^{m-n}\int_{C} J_m(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^m(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.30c}$$

elde ederiz. Ayrıca Bessel fonksiyonlarına ait

$$J_{m-1}(t) = \frac{m}{t}J_m(t) + \frac{d}{dt}\left[J_m(t)\right] \tag{2.31a}$$

$$J_{m+1}(t) = \frac{m}{t}J_m(t) - \frac{d}{dt}\left[J_m(t)\right] \tag{2.31b}$$

bağıntıları da (2.30a) ve (2.30b)'de kullanıldığında,

$$E_{4\rho} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot\int_{C} e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \tag{2.32a}$$

$$E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-i)\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot\int_{C} e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)m^2\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \tag{2.32b}$$

$$E_{4z} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot\int_{C} e^{ikz\cos\alpha} f_1(\alpha)tg\alpha\cdot J_m(k\rho\sin\alpha)d(\cos\alpha) \tag{2.32c}$$

bulunur. $f_1(\alpha)$ ve $f_2(\alpha)$ (2.25a) ve (2.25b) ile tanımlanan fonksiyonlardır. Kısaca, küresel TE_{nm} modunun integral ifadesi,

$$\vec{E}_4 = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{c_{nm}^{+}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{e}_{41} + f_2(\alpha)\vec{e}_{42}\right]d(\cos\alpha) + c_{nm}^{-}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{e}_{43} + f_2(\alpha)\vec{e}_{44}\right]d(\cos\alpha)\right\} \tag{2.33a}$$

şeklinde yazılabilir. (2.33a) ifadesi, küresel TE_{nm} modunun, silindirik modların kombinezonlarının integrali olduğunu göstermektedir (Akkaya, 1978, 1994). Bu silindirik modların ifadeleri şöyledir:

$$\vec{e}_{41} = -i^m \left[im \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\rho + im^2 \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\phi + m(tg\alpha) g(\rho,z) \sin m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33b)$$

$$\vec{e}_{42} = -i^m \left[im \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\rho + i \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33c)$$

$$\vec{e}_{43} = i^m \left[im \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - im^2 \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\phi + m(tg\alpha) g(\rho,z) \cos m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33d)$$

$$\vec{e}_{44} = i^m \left[im \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\rho - i \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33e)$$

$\vec{e}_{41}$ ve $\vec{e}_{43}$ silindirik TM modları, $\vec{e}_{42}$ ve $\vec{e}_{44}$ silindirik TE modlarıdır. Burada $g(\rho,z) = J_m(k\rho\sin\alpha) e^{ikz\cos\alpha}$ olarak tanımlanmaktadır. Küresel TE moduna ait magnetik alan bileşenleri ise, (2.33a) denkleminden, rotasyonel alarak

$$\vec{H}_4 = \frac{1}{i\omega\mu_0} E_{03} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{-n} \nabla \times \left\{ c_{nm}^{+} \int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{41} + f_2(\alpha)\vec{e}_{42} \right] \cdot d(\cos\alpha) + c_{nm}^{-} \int_C \left[f_1(\alpha)\vec{e}_{43} + f_2(\alpha)\vec{e}_{44} \right] \cdot d(\cos\alpha) \right\} \quad (2.33f)$$

yazılabilir. (2.33f)'daki rotasyonel işlemini (.2.33)-(2.33e)'ten,

$$\vec{h}_{41} = \frac{\nabla \times \vec{e}_{41}}{i\omega\mu_0} = \frac{im}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\rho - \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33g)$$

$$\vec{h}_{42} = i\cos\alpha \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha g(\rho,z) \cos m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33h)$$

$$\vec{h}_{43} = \frac{\nabla \times \vec{e}_{43}}{i\omega\mu_0} = \frac{im}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \sin m\phi \vec{u}_\rho + \frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \cos m\phi \vec{u}_\phi \right] \quad (2.33i)$$

$$\vec{h}_{44} = i\cos\alpha \sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}} i^m \left[\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)} \sin m\phi \vec{u}_\rho + m \frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha} \cos m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha g(\rho,z) \sin m\phi \vec{u}_z \right] \quad (2.33j)$$

bulunur.

4 no'lu alanın küresel TM modunda alan bileşenleri için, küresel TE modu için yaptığımıza benzer bir yol izlenir. Bu kez b_{nm}^{+} ve b_{nm}^{-} katsayıları kullanılacaktır.

Ayrıca küresel TE modundan ayırt etmek için, küresel TM moduna ait alan bileşenleri üslü harflerle belirtilecektir.

$$H_r' = 0 \tag{2.34a}$$

$$H_\theta' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.34b}$$

$$H_\phi' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.34c}$$

$$E_r' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} in(n+1)\frac{h_n^{(1)}(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.34d}$$

$$E_\theta' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i\left[h_{n-1}^{(1)}(kr) - \frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.34e}$$

$$E_\phi' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[h_{n-1}^{(1)}(kr) - \frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.34f}$$

olarak ifade edelim. Küresel olan bu bileşenleri, silindirik bileşenler olarak ifade edelim:

$$H_\rho' = \cos\theta H_\theta' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\cot\theta P_n^m(\cos\theta)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.35a}$$

$$H_\phi' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \tag{2.35b}$$

$$H_z' = -\sin\theta H_\theta' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\frac{\hat{Z}_n(kr)}{kr}P_n^m(\cos\theta)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \tag{2.35c}$$

Legendre polinomlarına ait (2.25) bağıntıları ile Bessel fonksiyonlarına ait (2.31) özdeşliklerinin kullanılması sonucu,

$$\begin{aligned} H_{4\rho}' = {} & H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \\ & \cdot\int_C e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \end{aligned} \tag{2.36a}$$

$$H_{4\phi}' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-i)\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot \int_{C} e^{ikz\cos\alpha}\left\{f_1(\alpha)m^2\frac{J_m(k\rho\sin\alpha)}{(k\rho\sin\alpha)} + f_2(\alpha)\frac{d\left[J_m(k\rho\sin\alpha)\right]}{d(k\rho\sin\alpha)}\right\}d(\cos\alpha) \quad (2.36b)$$

$$H_{4z}' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-m)\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\cdot i^{m-n} \cdot \int_{C} e^{ikz\cos\alpha} f_1(\alpha)tg\alpha\cdot J_m(k\rho\sin\alpha)d(\cos\alpha) \quad (2.36c)$$

bulunur. Kısaca, küresel TM_{nm} modunun integral ifadesi,

$$\vec{H}_4' = H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{b_{nm}^{+}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{41}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{42}'\right]d(\cos\alpha) + b_{nm}^{-}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{43}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{44}'\right]d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.37a)$$

şeklinde yazılabilir. Küresel TM_{nm} modunun, silindirik modların kombinezonlarının integrali olduğu görülmektedir (Akkaya, 1978, 1994). Bu silindirik modların ifadeleri şöyledir:

$$\vec{h}_{41}' = -i^m\left[im\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\rho + im^2\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\phi + mtg\alpha g(\rho,z)\sin m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37b)$$

$$\vec{h}_{42}' = -i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\rho + i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37c)$$

$$\vec{h}_{43}' = i^m\left[im\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\rho - im^2\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\phi + mtg\alpha g(\rho,z)\cos m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37d)$$

$$\vec{h}_{44}' = i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\rho - i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37e)$$

Burada $g(\rho,z) = J_m(k\rho\sin\alpha)e^{ikz\cos\alpha}$ olarak tanımlanmaktadır. Küresel TM moduna ait elektrik alan bileşenleri ise, (2.37a) denkleminden, rotasyonel alarak

$$\vec{E}_4' = -\frac{1}{i\omega\hat{\varepsilon}}H_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n} \nabla\times\left\{b_{nm}^{+}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{41}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{42}'\right]d(\cos\alpha) + b_{nm}^{-}\int_{C}\left[f_1(\alpha)\vec{h}_{43}' + f_2(\alpha)\vec{h}_{44}'\right]d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.37f)$$

yazılabilir.(2.37f)'teki rotasyonel işlemini (2.37b)-(2.37e)'den,

$$\vec{e}_{41}'=\frac{\nabla\times\vec{h}_{41}'}{-i\omega\hat{\varepsilon}}=-\frac{m}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\rho-i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37g)$$

$$\vec{e}_{42}'=-\cos\alpha\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\rho-im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\phi+tg\alpha g(\rho,z)\cos m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37h)$$

$$\vec{e}_{43}'=\frac{\nabla\times\vec{h}_{43}'}{-i\omega\hat{\varepsilon}}=-\frac{m}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\sin m\phi\vec{u}_\rho+i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\right] \quad (2.37i)$$

$$\vec{e}_{44}'=-\cos\alpha\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}i^m\left[i\frac{\partial g(\rho,z)}{\partial(k\rho\sin\alpha)}\sin m\phi\vec{u}_\rho+im\frac{g(\rho,z)}{k\rho\sin\alpha}\cos m\phi\vec{u}_\phi+tg\alpha g(\rho,z)\sin m\phi\vec{u}_z\right] \quad (2.37j)$$

bulunur. (2.33)-(2.33e) ile (2.37g)-(2.37j)'de elde ettiğimiz $\vec{e}_{4j}$'ler ile $\vec{e}_{4j}$''ler arasında şu bağıntıların mevcut olduğu görülmektedir;

$$\vec{e}_{41}'=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{m}{\cos\alpha}\vec{e}_{44} \quad (2.38a)$$

$$\vec{e}_{42}'=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{\cos\alpha}{m}\cdot\vec{e}_{43} \quad (2.38b)$$

$$\vec{e}_{43}'=\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{m}{\cos\alpha}\vec{e}_{42} \quad (2.38c)$$

$$\vec{e}_{44}'=\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}\frac{\cos\alpha}{m}\cdot\vec{e}_{41} \quad (2.38d)$$

$E_{03}=-\sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\varepsilon}}}H_{03}$ bağıntısı ile $f_1'(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{m}f_2(\alpha)$ ve $f_2'(\alpha)=\frac{m}{\cos\alpha}f_1(\alpha)$ tanımları göz önüne alınıp, (2.38) bağıntılarının da (2.37f) ifadesinde kullanılması sonucu,

$$\vec{E}_4'=E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}i^{-n}\left\{b_{nm}^{+}\int_C\left[f_1'(\alpha)\vec{e}_{43}+f_2'(\alpha)\vec{e}_{44}\right]d(\cos\alpha)-b_{nm}^{-}\int_C\left[f_1'(\alpha)\vec{e}_{41}+f_2'(\alpha)\vec{e}_{42}\right]d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.39)$$

elde edilir. Böylece 4 no'lu dalgaların (2.33a) - (2.33f) ile özetlediğimiz küresel TE modları ve (2.37a) - (2.37f) ile özetlediğimiz küresel TM modları şeklinde ifade ettik. Bu ifadelerde yer alan $(\vec{e}_{41},\vec{h}_{41})$, $(\vec{e}_{42},\vec{h}_{42})$,$(\vec{e}_{43},\vec{h}_{43})$, $(\vec{e}_{44},\vec{h}_{44})$, $(\vec{e}_{41}',\vec{h}_{41}')$, $(\vec{e}_{42}',\vec{h}_{42}')$ $(\vec{e}_{43}',\vec{h}_{43}')$, $(\vec{e}_{44}',\vec{h}_{44}')$ alanlarının silindirik modlar olduklarını gördük.

Silindirik dalgaları, diferansiyel düzlemsel dalgaların integralleri olarak ifade etmek mümkündür. Yukarda ise, küresel dalgaların diferansiyel silindirik dalgaların integralleri olarak ifade ettik. Dolayısıyla, her küresel dalgayı, diferansiyel düzlemsel dalgaların iki katlı integrali (ψ ve α integralleri) olarak yazmak mümkündür. Bunu gerçekleştirmek için Ek-C'de elde ettiğimiz Bessel fonksiyonları ve türevlerinin integral ifadelerini kullanacağız. $\vec{e}_{41}$, $\vec{e}_{42}$, $\vec{e}_{43}$ ve $\vec{e}_{44}$ ifadelerini, $k\sin\alpha = k_t$ ve $k\cos\alpha = k_z$ olmak üzere, tek tek inceleyelim;

$$\vec{e}_{41} = -im\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \sin m\phi \vec{u}_\rho + mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \cos m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho) \sin m\phi \vec{u}_z \right] \cdot e^{ik_z z}$$

yukardaki ifadede sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını üstel yazıp, ifade $e^{im\phi}$ ve $e^{-im\phi}$ ortak parantezlerine alındığında,

$$\begin{aligned}\bar{e}_{41} = &-\frac{m}{2}\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho + mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z} \\ &+\frac{m}{2}\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho - mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}\end{aligned}$$

yazılabilir. (C.9) integrallerinin kullanılması ile,

$$\begin{aligned}\bar{e}_{41} = &-\frac{im}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z\right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z} \\ &+\frac{im}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z\right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}\end{aligned}$$

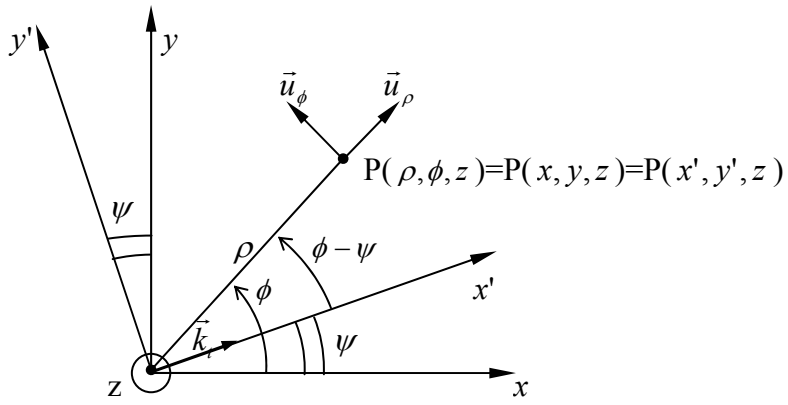
$$\bar{e}_{41} = -\frac{im}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left[e^{im\psi} - e^{-im\psi}\right] e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z\right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{ik_z z}$$

ve Şekil 2.6'nın yardımıyla,

$$x' = \rho\cos(\phi-\psi) \tag{2.40a}$$

$$\vec{u}_{x'} = \cos(\phi-\psi)\vec{u}_\rho - \sin(\phi-\psi)\vec{u}_\phi \tag{2.40b}$$

$$\vec{u}_{y'} = \sin(\phi-\psi)\vec{u}_\rho + \cos(\phi-\psi)\vec{u}_\phi \tag{2.40c}$$



Şekil 2.6- Problemin geometrisine ait $z=0$ kesiti

ifadeleri kullanılarak,

$$\vec{e}_{41}=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} m\cdot\sin m\psi\cdot e^{ik_t x'}e^{ik_z z}\left(\vec{u}_{x'}-\frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi) \tag{2.41a}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi integralin içindeki ifade diferansiyel bir düzlemsel dalgadan ibarettir. Aynı yol izlenerek diğer silindirik modlar için ,

$$\vec{e}_{42}=-\left[mi^{m+1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\rho+i^{m+1}\frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\right]\cdot e^{ik_z z}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[mi^{m}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\vec{u}_\rho+i^{m+1}\frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)}\vec{u}_\phi\right]\cdot e^{im\phi}e^{ik_z z}$$

$$+\frac{1}{2}\left[mi^{m}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\vec{u}_\rho-i^{m+1}\frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)}\vec{u}_\phi\right]\cdot e^{-im\phi}e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{42}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t x'}\left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right]\cdot d(\psi-\phi)e^{im\phi}e^{ik_z z}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{-im(\psi-\phi)}e^{ik_t x'}\left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right]\cdot d(\psi-\phi)\cdot e^{-im\phi}e^{ik_z z}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}\left[e^{im\psi}+e^{-im\psi}\right]e^{ik_t x'}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi)e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{42}=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}\cos m\psi\cdot e^{ik_t x'}e^{ik_z z}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi) \tag{2.41b}$$

olarak ifade edilir. Yine, integralin içindeki ifade diferansiyel düzlemsel dalgadır,

$$\vec{e}_{43} = im\left[i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \sin m\phi \vec{u}_\phi - itg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\cos m\phi \vec{u}_z \right] \cdot e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{43} = \frac{m}{2}\left[i^{m+1} \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho - mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$+ \frac{m}{2}\left[i^{m+1} \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\rho + mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} \vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\vec{u}_z \right] \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

yazılabilir. (C.9) integrallerinin kullanılması ile,

$$\vec{e}_{43} = \frac{m}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + tg\alpha\vec{u}_z \right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$+ \frac{m}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[-\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + tg\alpha\vec{u}_z \right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{43} = -\frac{m}{4\pi}\left\{ \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left[e^{im\psi} + e^{-im\psi} \right] e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \left[\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi - tg\alpha\vec{u}_z \right] d(\psi-\phi) \right\} \cdot e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{43} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} m \cdot \cos m\psi \cdot e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \left(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z \right) \cdot d(\psi-\phi) \qquad (2.41c)$$

olarak ifade edilmiş olur. Dikkat edildiğinde diferansiyel düzlemsel dalga $\vec{e}_{41}$'de bulunan diferansiyel düzlemsel dalga ile aynıdır. Son olarak,

$$\vec{e}_{44} = \left[mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \cos m\phi \vec{u}_\rho - i^{m+1} \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \sin m\phi \vec{u}_\phi \right] \cdot e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{44} = \frac{1}{2}\left[mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \vec{u}_\rho - i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\phi \right] \cdot e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[mi^{m+1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \vec{u}_\rho + i^m \frac{\partial J_m(k_t\rho)}{\partial(k_t\rho)} \vec{u}_\phi \right] \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t x'} \left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi \right] \cdot d(\psi-\phi) e^{im\phi} e^{ik_z z}$$
$$- \frac{i}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t x'} \left[\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi \right] \cdot d(\psi-\phi) \cdot e^{-im\phi} e^{ik_z z}$$

$$= -\frac{i}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left[e^{im\psi} - e^{-im\psi} \right] e^{ik_t x'} \vec{u}_{y'} \cdot d(\psi-\phi) e^{ik_z z}$$

$$\vec{e}_{44} = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi \cdot e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \vec{u}_{y'} \cdot d(\psi-\phi) \tag{2.41d}$$

bulunabilir. Yine, integralin içindeki ifade diferansiyel bir düzlemsel dalga olup $\vec{e}_{42}$ ile aynıdır. Şimdi (2.33a) ve (2.39)'da elde edilen 4 no'lu dalgaya ait elektrik alan ifadelerine (2.41) ifadeleri yazılırsa,

$$\vec{E}_4 = \frac{E_{03}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{-n} \int_C \left[mf_1(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(c_{nm}^{+} \cdot \sin m\psi - c_{nm}^{-} \cdot \cos m\psi \right) \cdot e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \left(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_z} \vec{u}_z \right) \cdot d(\psi-\phi) \right. \tag{2.42a}$$
$$\left. + f_2(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(c_{nm}^{+} \cdot \cos m\psi \cdot + c_{nm}^{-} \cdot \sin m\psi \right) e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \vec{u}_{y'} \cdot d(\psi-\phi) \right] d(\cos\alpha)$$

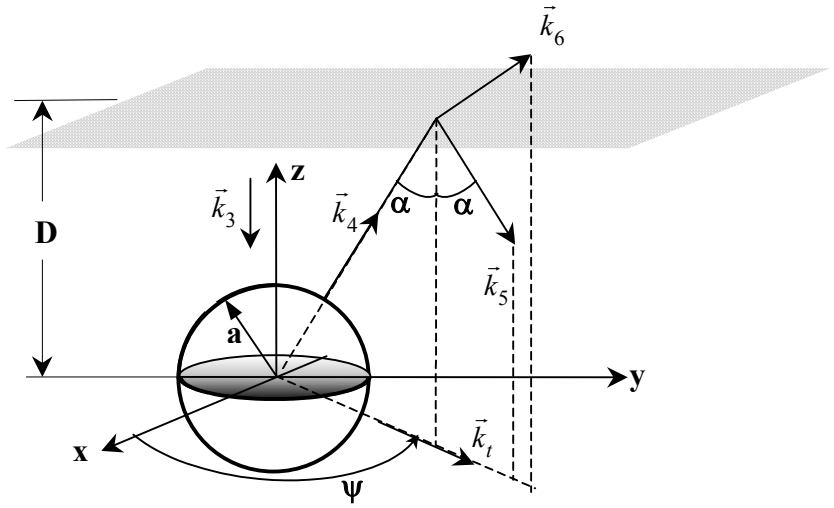
$$\vec{E}_4' = \frac{E_{03}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{-n} \int_C \left[-mf_1'(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(b_{nm}^{+} \cdot \cos m\psi + b_{nm}^{-} \cdot \sin m\psi \right) \cdot e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \left(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_z} \vec{u}_z \right) \cdot d(\psi-\phi) \right. \tag{2.42b}$$
$$\left. + f_2'(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(b_{nm}^{+} \cdot \sin m\psi - b_{nm}^{-} \cdot \cos m\psi \right) e^{ik_t x'} e^{ik_z z} \vec{u}_{y'} \cdot d(\psi-\phi) \right] d(\cos\alpha)$$

elde edilir.

2.2.4 $z = D$ Düzleminden Kırılma ve Yansıma:

(2. 41a), (2. 41b), (2. 41c) ve (2. 41d) eşitliklerinden silindirik alanların düzlemsel dalgaların süperpozisyonu olarak ifade edildiklerini gördük. Şimdi 4 no'lu alanların $z = D$ toprak-hava sınır düzleminde, nasıl kırılmaya ve yansımaya uğradıklarını görelim: Toprağın içine geri yansıyan (5 no'lu) dalgaların ifadelerini, (Şekil 2.7 göz önünde tutularak), TE ve TM modları için $\vec{E}_5^{\,t} = \vec{E}_5 + \vec{E}_5'$ şeklinde ifade edelim: Burada $\vec{E}_5$ küresel TE modu, $\vec{E}_5'$ küresel TM modu alanlar olsun.

$$\vec{E}_5 = \frac{E_{03}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{-n} \int_C \left[mf_1(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(-c_{nm}^{+} \cdot \sin m\psi + c_{nm}^{-} \cdot \cos m\psi \right) \cdot R_1(\alpha) \cdot e^{ik_t x'} e^{-ik_z z} \left(\vec{u}_{x'} + \frac{k_t}{k_z} \vec{u}_z \right) \cdot d(\psi-\phi) \right. \tag{2.42c}$$
$$\left. + f_2(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(c_{nm}^{+} \cdot \cos m\psi \cdot + c_{nm}^{-} \cdot \sin m\psi \right) \cdot R_2(\alpha) \cdot e^{ik_t x'} e^{-ik_z z} \vec{u}_{y'} \cdot d(\psi-\phi) \right] d(\cos\alpha)$$



Şekil 2.7- $r = a$ ve $z = D$ de sınır koşullarının uygulanması.

$$\vec{E}_5' = \frac{E_{03}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\int_C \left[mf_1'(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(b_{nm}^{+}\cdot\cos m\psi + b_{nm}^{-}\cdot\sin m\psi\right)\cdot R_1(\alpha) e^{ik_t x'} e^{-ik_z z}\left(\vec{u}_{x'} + \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi) \right. \\ \left. + f_2'(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(b_{nm}^{+}\cdot\sin m\psi - b_{nm}^{-}\cdot\cos m\psi\right)\cdot R_2(\alpha)\cdot e^{ik_t x'} e^{-ik_z z}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi) \right] d(\cos\alpha) \tag{2.42d}$$

Burada $R_1(\alpha)$ ve $R_2(\alpha)$ α açısına bağlı olan yansıma katsayılarıdır.

Kırılarak havaya geçen (6 no'lu) dalgaların ifadelerini de, yine TE ve TM modları için $\vec{E}_6^{\,t} = \vec{E}_6 + \vec{E}_6'$ olarak,

$$\vec{E}_6' = \frac{E_{03}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\int_C \left[-mf_1'(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(b_{nm}^{+}\cdot\cos m\psi + b_{nm}^{-}\cdot\sin m\psi\right)\cdot T_1(\alpha) e^{ik_t x'} e^{ik_{0z} z}\left(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_{0z}}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi) \right. \\ \left. + f_2'(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(b_{nm}^{+}\cdot\sin m\psi - b_{nm}^{-}\cdot\cos m\psi\right)\cdot T_2(\alpha)\cdot e^{ik_t x'} e^{ik_{0z} z}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi) \right] d(\cos\alpha) \tag{2.42e}$$

$$\vec{E}_6 = \frac{E_{03}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\left\{\int_C \left[mf_1(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(c_{nm}^{+}\cdot\sin m\psi - c_{nm}^{-}\cdot\cos m\psi\right)\cdot T_1(\alpha)\cdot e^{ik_t x'} e^{ik_{0z} z}\left(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_{0z}}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi) \right. \right. \\ \left. \left. + f_2(\alpha) \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \left(c_{nm}^{+}\cdot\cos m\psi\cdot + c_{nm}^{-}\cdot\sin m\psi\right)\cdot T_2(\alpha)\cdot e^{ik_t x'} e^{ik_{0z} z}\vec{u}_{y'}\cdot d(\psi-\phi) \right] d(\cos\alpha) \right. \tag{2.42f}$$

yazabiliriz. Burada da $T_1(\alpha)$ ve $T_2(\alpha)$ α açısına bağlı olan transmisyon katsayılarıdır. $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$, $T_1(\alpha)$ ve $T_2(\alpha)$'nın hesapları Ek-D'de yapılmıştır.

Küre yüzeyindeki sınır koşullarının uygulanabilmesi için yansıyan 5 dalgalarının θ ve ϕ bileşenlerini hesaplayalım: önce (2.40) ile verilen bağıntıları kullanacağız,

$$\vec{E}_5 = \frac{E_{03}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}$$
$$\left\{ -c_{nm}^{+}\int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi)\right.\right.$$
$$\left. + f_2(\alpha)R_2(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right)\cdot d(\psi-\phi)\right] d(\cos\alpha)$$
$$+ c_{nm}^{-}\int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi)\right.$$
$$\left.\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right)\cdot d(\psi-\phi)\right] d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.43a)$$

$$\vec{E}_5' = \frac{E_{03}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}$$
$$\left\{ b_{nm}^{+}\int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi)\right.\right.$$
$$\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right)\cdot d(\psi-\phi)\right] d(\cos\alpha)$$
$$+ b_{nm}^{-}\int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\cos(\psi-\phi)\vec{u}_\rho + \sin(\psi-\phi)\vec{u}_\phi + \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z\right)\cdot d(\psi-\phi)\right.$$
$$\left.\left. + f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi \cdot e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\left(\sin(\psi-\phi)\vec{u}_\rho - \cos(\psi-\phi)\vec{u}_\phi\right)\cdot d(\psi-\phi)\right] d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.43b)$$

Ek-C'de elde edilen, (2.43a) ve (2.43b) ifadelerindeki ψ integrallerinin Bessel fonksiyonları cinsinden ifadeleri kullanılırsa,

$$\vec{E}_5 = -E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\Bigg\{c_{nm}^{+}\int_C e^{-ik_z z}$$
$$\Bigg[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\rho + mi^{m-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\sin m\phi\vec{u}_z\Bigg)$$
$$+ f_2(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(imi^m\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\rho - i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\Bigg)d(\cos\alpha)\Bigg]$$
$$- c_{nm}^{-}\int_C e^{-ik_z z}$$
$$\Bigg[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\rho + imi^m\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\cos m\phi\vec{u}_z\Bigg)$$
$$- f_2(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(mi^{m-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\rho - i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\phi\Bigg)\cdot d(\psi-\phi)\Bigg]d(\cos\alpha)\Bigg\} \tag{2.44a}$$

$$\vec{E}_5' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{-n}\Bigg\{b_{nm}^{+}\int_C e^{-ik_z z}$$
$$\Bigg[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\rho + imi^m\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\sin m\phi\vec{u}_z\Bigg)$$
$$- f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(mi^{m-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\rho - i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\phi\Bigg)\Bigg]d(\cos\alpha)$$
$$+ b_{nm}^{-}\int_C e^{-ik_z z}$$
$$\Bigg[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\rho + mi^{m-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\phi + tg\alpha i^m J_m(k_t\rho)\sin m\phi\vec{u}_z\Bigg)$$
$$+ f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(imi^m\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi\vec{u}_\rho - i^{m-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos m\phi\vec{u}_\phi\Bigg)\Bigg]d(\cos\alpha)\Bigg\} \tag{2.44b}$$

bulunur. 5 no'lu (yansıyan) dalga'ya ait bu ifadeler silindirik alan bileşenleridir. Şimdi a yarıçaplı kürenin yüzeyindeki sınır şartlarını yazalım: (2.20a) ve (2.20b) denklemlerinde (2.44) ifadelerindeki silindirik bileşenleri kullanmak için, θ bileşenine ait sınır şartı için, $E_\theta = \cos\theta E_\rho - \sin\theta E_z$ ifadesinden yararlanılacaktır:

$$E_{5\theta} = -E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}$$

$$\left\{ c_{nm}^{+} \sin m\phi \int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos\theta - tg\alpha i J_m(k_t\rho)\sin\theta \right) \right.\right.$$

$$\left. + f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(im\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos\theta \right) d(\cos\alpha) \right] \qquad (2.45a)$$

$$- c_{nm}^{-} \cos m\phi \int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos\theta - tg\alpha J_m(k_t\rho)\sin\theta \right) \right.$$

$$\left.\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(mi^{-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \right\}$$

$$E_{5\theta}' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}$$

$$\left\{ b_{nm}^{+} \cos m\phi \int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos\theta - tg\alpha J_m(k_t\rho)\sin\theta \right) \right.\right.$$

$$\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(mi^{-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \qquad (2.45b)$$

$$+ b_{nm}^{-} \sin m\phi \int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\cos\theta - tg\alpha i J_m(k_t\rho)\sin\theta \right) \right.$$

$$\left.\left. + f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(im\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \right\}$$

dır. ϕ bileşenleri ise (2.44) no'lu ifadelerden,

$$E_{5\phi} = -E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}\left\{ c_{nm}^{+} \cos m\phi \int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(mi^{-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \right) \right.\right.$$

$$\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)} \right) d(\cos\alpha) \right] \qquad (2.45c)$$

$$- c_{nm}^{-} \sin m\phi \int_C e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(im\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \right) \right.$$

$$\left.\left. + f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)} \right) \right] d(\cos\alpha) \right\}$$

$$E_{5\phi}' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}\left\{ b_{nm}^{+}\sin m\phi \int_{C} e^{-ik_z z}\left[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(im\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\right)\right.\right.$$
$$\left. + f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\right)\right] d(\cos\alpha)$$
$$+ b_{nm}^{-}\cos m\phi \int_{C} e^{-ik_z z}\left[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(mi^{-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\right)\right.$$
$$\left.\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\right)\right] d(\cos\alpha)\right\} \quad (2.45d)$$

dır. 4 no'lu dalgaya ait elektrik alan bileşenleri ise, (2.22) ve (2.34) ifadelerinden,

$$E_{4\theta} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} mh_n^{(1)}(kr)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \quad (2.45e)$$

$$E_{4\theta}' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i\left[h_{n-1}^{(1)}(kr) - \frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\left[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \quad (2.45f)$$

$$E_{4\phi} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} h_n^{(1)}(kr)\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi + c_{nm}^{-}\sin m\phi\right] \quad (2.45g)$$

$$E_{4\phi}' = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[h_{n-1}^{(1)}(kr) - \frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi - b_{nm}^{-}\cos m\phi\right] \quad (2.45h)$$

idi. Yine 3 no'lu dalgaya ait elektrik alan bileşenleri , (2.17) ve (2.18) ile verilmişti:

$$E_{3\theta} = E_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{kr}\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\cos\phi \quad (2.45i)$$

$$E_{3\theta}' = iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{kr}\frac{\partial\hat{J}_n(kr)}{\partial(kr)}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\cos\phi \quad (2.45j)$$

$$E_{3\phi} = -E_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{\hat{J}_n(kr)}{kr}\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\sin\phi \quad (2.45k)$$

$$E_{3\phi}' = iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{kr}\frac{\partial\hat{J}_n(kr)}{\partial(kr)}\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin\phi \quad (2.45l)$$

2.2.5 b_n ve c_n Saçılma Katsayılarının Hesabı:

Küre yüzeyindeki θ'ya ait (2.20a) sınır şartından,

$$
\begin{aligned}
&-E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}\Bigg\{c_{nm}^{+}\sin m\phi\int_{C} e^{-ik_z a\cos\theta}\\
&\quad\Bigg[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)}\cos\theta - tg\alpha i J_m(k_t a\sin\theta)\sin\theta\Bigg)\\
&\quad + f_2(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(im\frac{J_m(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)}\cos\theta\Bigg)d(\cos\alpha)\Bigg]\\
&\quad - c_{nm}^{-}\cos m\phi\int_{C} e^{-ik_z a\cos\theta}\\
&\quad\Bigg[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)}\cos\theta - tg\alpha J_m(k_t a\sin\theta)\sin\theta\Bigg)\\
&\quad - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(mi^{-1}\frac{J_m(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)}\cos\theta\Bigg)\Bigg]d(\cos\alpha)\Bigg\}\\
&+E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}\Bigg\{b_{nm}^{+}\cos m\phi\int_{C} e^{-ik_z a\cos\theta}\\
&\quad\Bigg[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)}\cos\theta - tg\alpha J_m(k_t a\sin\theta)\sin\theta\Bigg)\\
&\quad - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(mi^{-1}\frac{J_m(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)}\cos\theta\Bigg)\Bigg]d(\cos\alpha)\\
&\quad + b_{nm}^{-}\sin m\phi\int_{C} e^{-ik_z a\cos\theta}\\
&\quad\Bigg[mf_1'(\alpha)R_1(\alpha)\Bigg(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)}\cos\theta - tg\alpha i J_m(k_t a\sin\theta)\sin\theta\Bigg)\\
&\quad + f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\Bigg(im\frac{J_m(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)}\cos\theta\Bigg)\Bigg]d(\cos\alpha)\Bigg\}\\
&+E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} mh_n^{(1)}(ka)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\Big[c_{nm}^{+}\sin m\phi - c_{nm}^{-}\cos m\phi\Big]\\
&+E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i\Big[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\Big]\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\Big[b_{nm}^{+}\cos m\phi + b_{nm}^{-}\sin m\phi\Big]\\
&=-E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}a_n j_n(ka)\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta}\cos\phi - iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Big[j_{n-1}(ka) - \frac{n}{ka}j_n(ka)\Big]\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[P_n^{\,1}(\cos\theta)\Big]\cos\phi
\end{aligned}
\tag{2.46a}
$$

yazılır. Küre yüzeyindeki ϕ 'ye ait (2.20b) sınır şartından ise,

$$
\begin{aligned}
&-E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}\left\{c_{nm}^{+}\cos m\phi\int_{C} e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(mi^{-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.-f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\right)d(\cos\alpha)\right]\\
&\quad -c_{nm}^{-}\sin m\phi\int_{C} e^{-ik_z z}\left[mf_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(im\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\right)\right.\\
&\qquad\left.\left.+f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\right)\right]d(\cos\alpha)\right\}\\
&+E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} i^{m-n}\left\{b_{nm}^{+}\sin m\phi\int_{C} e^{-ik_z z}\left[mf_1{}'(\alpha)R_1(\alpha)\left(im\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.+f_2{}'(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\right)\right]d(\cos\alpha)\\
&\quad +b_{nm}^{-}\cos m\phi\int_{C} e^{-ik_z z}\left[mf_1{}'(\alpha)R_1(\alpha)\left(mi^{-1}\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\right)\right.\\
&\qquad\left.\left.-f_2{}'(\alpha)R_2(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\right)\right]d(\cos\alpha)\right\}\\
&+E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} h_n^{(1)}(kr)\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\left[c_{nm}^{+}\cos m\phi+c_{nm}^{-}\sin m\phi\right]\\
&+E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-im)\left[h_{n-1}^{(1)}(kr)-\frac{n}{kr}h_n^{(1)}(kr)\right]\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\left[b_{nm}^{+}\sin m\phi-b_{nm}^{-}\cos m\phi\right]\\
&=E_{03}\sum_{n=1}^{\infty}a_n j_n(kr)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n{}^1(\cos\theta)\right]\sin\phi-iE_{03}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[j_{n-1}(kr)-\frac{n}{kr}j_n(kr)\right]\frac{P_n{}^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin\phi
\end{aligned}
\tag{2.46b}
$$

yazılır. (2.46a) denkleminin her iki tarafı $\cos p\phi$ ile çarpılıp 0'dan 2π'ye integral alındığında, sağ taraf,

$$
I_{\theta sag}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left\{j_n(ka)\frac{P_n{}^1(\cos\theta)}{\sin\theta}+i\left[j_{n-1}(ka)-\frac{n}{ka}j_n(ka)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n{}^1(\cos\theta)\right]\right\}\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos\phi\cos p\phi d\phi
$$

$$I_{\theta sag} = \begin{cases} 0, & p \neq 1 \\ -\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ j_n(ka) \frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta} + i \left[j_{n-1}(ka) - \frac{n}{ka} j_n(ka) \right] \frac{\partial}{\partial\theta} \left[P_n^{\,1}(\cos\theta) \right] \right\}, & p = 1 \end{cases}$$

olur. İntegralin sol tarafı ise,

$$\begin{aligned} I_{\theta sol} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{m-n} \left\{ c_{nm}^{-} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos p\phi \cos m\phi \cdot d\phi \right. \\ & \int_C e^{-ik_z a\cos\theta} \left[m f_1(\alpha) R_1(\alpha) \left(i^{-1} \frac{dJ_m(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)} \cos\theta - tg\alpha J_m(k_t a\sin\theta)\sin\theta \right) \right. \\ & \left. \left. - f_2(\alpha) R_2(\alpha) \left(m i^{-1} \frac{J_m(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)} \cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i^{m-n} \left\{ b_{nm}^{+} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos p\phi \cos m\phi \cdot d\phi \right. \\ & \int_C e^{-ik_z a\cos\theta} \left[m f_1'(\alpha) R_1(\alpha) \left(i^{-1} \frac{dJ_m(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)} \cos\theta - tg\alpha J_m(k_t a\sin\theta)\sin\theta \right) \right. \\ & \left. \left. - f_2'(\alpha) R_2(\alpha) \left(m i^{-1} \frac{J_m(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)} \cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} m h_n^{(1)}(ka) \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \left[-c_{nm}^{-} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos p\phi \cos m\phi \cdot d\phi \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} i \left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka} h_n^{(1)}(ka) \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \left[b_{nm}^{+} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos p\phi \cos m\phi \cdot d\phi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\theta sol} = & \pi \sum_{n=1}^{\infty} i^{1-n} (-i) \left\{ c_{n1}^{-} \int_C e^{-ik_t a\cos\theta} \left[f_1(\alpha) R_1(\alpha) \left(\frac{dJ_1(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)} \cos\theta - itg\alpha J_1(k_t a\sin\theta)\sin\theta \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - f_2(\alpha) R_2(\alpha) \left(\frac{J_1(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)} \cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \right\} \\ & + \pi \sum_{n=1}^{\infty} i^{1-n} (-i) \left\{ b_{n1}^{+} \int_C e^{-ik_z a\cos\theta} \left[f_1'(\alpha) R_1(\alpha) \left(\frac{dJ_1(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)} \cos\theta - itg\alpha J_1(k_t a\sin\theta)\sin\theta \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - f_2'(\alpha) R_2(\alpha) \left(\frac{J_1(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)} \cos\theta \right) \right] d(\cos\alpha) \right\} \\ & - \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^{-} h_n^{(1)}(ka) \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}^{+} i \left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka} h_n^{(1)}(ka) \right] \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ ve sol tarafların eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^{-}\left\{ i^{-n}\int_{C} e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta - itg\alpha J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)\sin\theta\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta\right)\right] d(\cos\alpha) - h_n^{(1)}(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}^{+}\left\{ i^{-n}\int_{C} e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta - itg\alpha J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)\sin\theta\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta\right)\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. + i\left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\right]\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left\{ j_n(ka)\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta} + i\left[j_{n-1}(ka) - \frac{n}{ka}j_n(ka)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.47a}
$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.46a) denkleminin her iki tarafı $\sin p\phi$ ile çarpılıp 0'dan 2π'ye integre edildiğinde,

$$
\begin{aligned}
&-\pi\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^{+}\left\{ i^{1-n}\int_{C} e^{-ik_z a\cos\theta}\left[f_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_1(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)}\cos\theta - tg\alpha i J_1(k_t a\sin\theta)\sin\theta\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. + f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(i\frac{J_1(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)}\cos\theta\right)\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. - h_n^{(1)}(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}\\
&+\pi\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}^{-}\left\{ i^{1-n}\int_{C} e^{-ik_z a\cos\theta}\left[f_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(i^{-1}\frac{dJ_1(k_t a\sin\theta)}{d(k_t a\sin\theta)}\cos\theta - tg\alpha i J_1(k_t a\sin\theta)\sin\theta\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. + f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(i\frac{J_1(k_t a\sin\theta)}{(k_t a\sin\theta)}\cos\theta\right)\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. + i\left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\right]\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\right\} = 0
\end{aligned}
\tag{2.47b}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.46b) denkleminden,

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^{-}\left\{ i^{-n}\int_{C} e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1(\alpha)R_1(\alpha)\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)} - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. - h_n^{(1)}(ka)\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\right\}\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}^{+}\left\{ i^{-n}\int_{C} e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1'(\alpha)R_1(\alpha)\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)} - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. + i\left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\right]\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left\{ j_n(ka)\frac{dP_n{}^1(\cos\theta)}{d\theta} - i\left[j_{n-1}(ka) - \frac{n}{ka}j_n(ka)\right]\frac{P_n{}^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.47c}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&-\pi\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1}^{+}\left\{ i^{-n}\int_{C} e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1(\alpha)R_1(\alpha)\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. - h_n^{(1)}(ka)\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\right\}\\
&+\pi\sum_{n=1}^{\infty} b_{n1}^{-}\left\{ i^{-n}\int_{C} e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right)\right] d(\cos\alpha)\right.\\
&\qquad\left. - i\left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\right]\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}\right\} = 0
\end{aligned}
\tag{2.47d}
$$

elde edilir. (2.47b) ve (2.47d) sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sisteminden,

$$c_{n1}^{+} = 0$$

$$b_{n1}^{-} = 0$$

olduğu açıktır. (2.47a) ve (2.47c)'nin oluşturduğu sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sistemi ise, $b_n = b_{n1}^{+}$ ve $c_n = c_{n1}^{-}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(\theta)c_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\theta)b_n = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\theta)a_n \tag{2.48a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n'(\theta)c_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_n'(\theta)b_n = \sum_{n=1}^{\infty} K_n'(\theta)a_n \tag{2.48b}$$

şeklindedir. Burada $K_n(\theta), K_n'(\theta)\ L_n(\theta),\ L_n'(\theta),\ M_n(\theta)$ ve $M_n'(\theta)$ katsayıları,

$$L_n(\theta) = -i^{-n}\int_C e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1(\alpha)R_1(\alpha)\left(\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta - itg\alpha J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)\sin\theta\right)\right. \tag{2.49a}$$
$$\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\left(\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta\right)\right]d(\cos\alpha) - h_n^{(1)}(ka)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$M_n(\theta) = -i^{-n}\int_C e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1'(\alpha)R_1(\alpha)\left(\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta - itg\alpha J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)\sin\theta\right)\right.$$
$$\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\left(\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\cos\theta\right)\right]d(\cos\alpha) \tag{2.49b}$$
$$+ i\left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\right]\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$K_n(\theta) = j_n(ka)\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta} + i\left[j_{n-1}(ka) - \frac{n}{ka}j_n(ka)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\left[P_n^{\,1}(\cos\theta)\right] \tag{2.49c}$$

$$L_n'(\theta) = -h_n^{(1)}(ka)\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} - i^{-n}\int_C e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1(\alpha)R_1(\alpha)\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right. \tag{2.49d}$$
$$\left. - f_2(\alpha)R_2(\alpha)\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right]d(\cos\alpha)$$

$$M_n'(\theta) = -i^{-n}\int_C e^{-ika\cos\theta\cos\alpha}\left[f_1'(\alpha)R_1(\alpha)\frac{J_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right.$$
$$\left. - f_2'(\alpha)R_2(\alpha)\frac{dJ_1(ka\sin\theta\sin\alpha)}{d(ka\sin\theta\sin\alpha)}\right]d(\cos\alpha) \tag{2.49e}$$
$$+ i\left[h_{n-1}^{(1)}(ka) - \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka)\right]\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$K_n'(\theta) = j_n(ka)\frac{dP_n^{\,1}(\cos\theta)}{d\theta} - i\left[j_{n-1}(ka) - \frac{n}{ka}j_n(ka)\right]\frac{P_n^{\,1}(\cos\theta)}{\sin\theta} \tag{2.49f}$$

şeklinde tanımlıdırlar. (2.48a) ve (2.48b) ile verilmiş olan sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sistemini çözebilmek amacıyla, bu denklemlerdeki seriler belirli bir N_0 değerinde kesilirse, aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{N_0} L_n(\theta)c_n + \sum_{n=1}^{N_0} M_n(\theta)b_n = \sum_{n=1}^{N_0} K_n(\theta)a_n \tag{2.50a}$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} L_n'(\theta)c_n + \sum_{n=1}^{N_0} M_n'(\theta)b_n = \sum_{n=1}^{N_0} K_n'(\theta)a_n \tag{2.50b}$$

θ değişkenine, $\theta \in (0,\pi)$ aralığında N_0 farklı değer verilerek, yani $\theta_j = j\dfrac{\pi}{N_0}$, ($j = 1,2,3,...N_0$) alınarak, aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$[L]\cdot[c_n] + [M]\cdot[b_n] = [A] \tag{2.51a}$$

$$[L']\cdot[c_n] + [M']\cdot[b_n] = [B] \tag{2.51b}$$

Burada L, L', M, M' matrisleri $N_0 \times N_0$ boyutlarında kare matris, A ve B matrisleri ise $1 \times N_0$ boyutlarında sütun matrislerdir. b_n ve c_n matrislerinin boyutları da $1 \times N_0$'dır.

3 SONUÇLAR

Problemimizi çeşitli küre yarıçapları ($5\ cm,\ 7\ cm\ ve\ 15\ cm$) ve çeşitli toprak tipleri (kuru, nemli ve çamur) için çözdük, havaya çıkan elektrik alanlarının doğrultu ve genliklerini hesapladık. Sonuçta, 2. Bölümün 1.kısmında frekans seçimi için yaklaşık olarak verdiğimiz bölgelerin, gerçekten uygun olduğunu gördük: Farklı durumlar için, havaya çıkan alanın $|E_y|$ bileşenine ait maksimum değerler Tablo 3.1'de verilmiştir. Bu tabloda, çok kuru toprakta $f = 1\ \ GHz$'de $\|E_y\|_{\max}$ en büyük değeri alırken, nemli toprakta $f = 170\ \ MHz$'de $\|E_y\|_{\max}$, en yüksek değeri almıştır. Çamurda ise $f = 100\ \ MHz$'de $\|E_y\|_{\max}$, en yüksek değeri almıştır. Yani, bizim araştırdığımız bileşen olan $|E_y|$, toprak kuru iken en yüksek değerlerini büyük frekansta aldığı halde, toprağın nemlilik oranı arttıkça $|E_y|$'nin en yüksek değerleri daha düşük frekanslarda oluşmaktadır. Bu sonuçlar da 2.1 kısmı ile tam uyum göstermektedir.

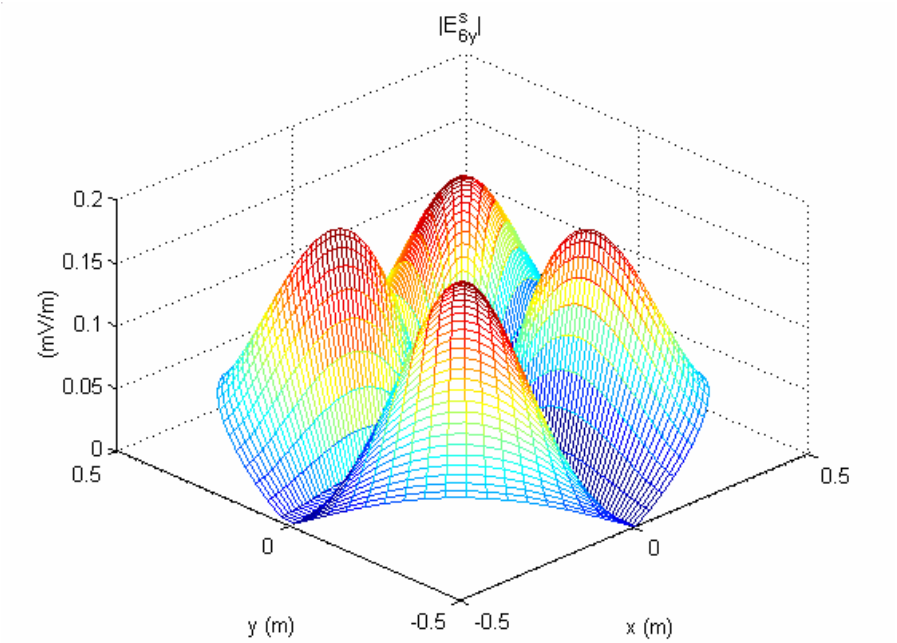
Bu üç frekans için, havadan gelen alan $\vec{E}_1 = e^{-ik_0 z}\vec{u}_x$ (mV/m) seçildi. Havaya geri çıkan elektrik alanının x, y ve z bileşenleri ($|E_{6x}|, |E_{6y}| = |E_y|, |E_{6z}| = |E_z|$) ile bu

Tablo 3.1- Farklı frekans değerlerinde $|E_y|$'nin aldığı maksimum değerler (μV/m).

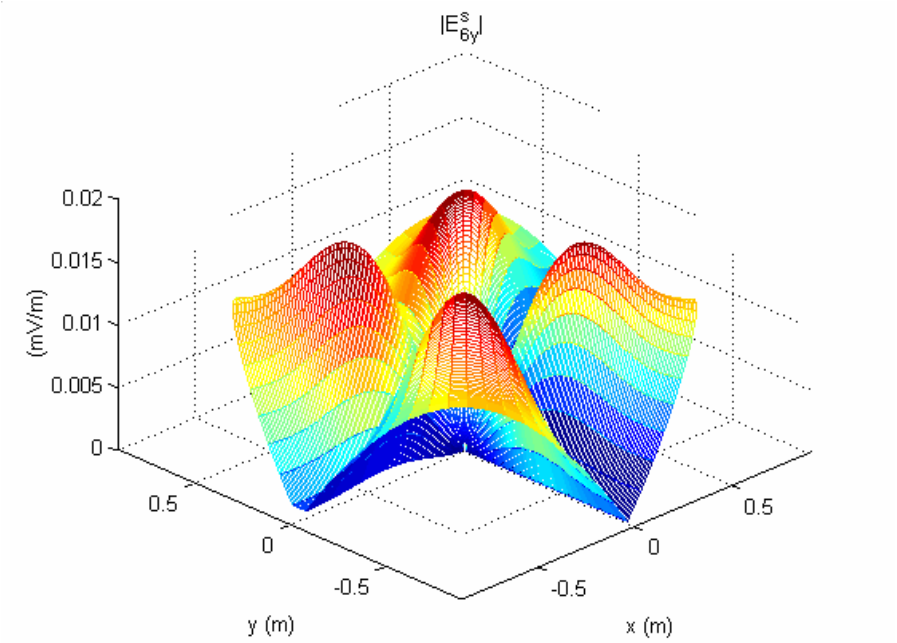
Toprak tipi ⇨		Kuru toprak ($\varepsilon_r = 4,\ \sigma = 4\cdot10^{-4}$)	Nemli toprak ($\varepsilon_r = 16,\ \sigma = 3\cdot10^{-3}$)	Çamur ($\varepsilon_r = 30,\ \sigma = 2\cdot10^{-2}$)
Frekans ⇩	Yarıçap ⇩			
$f = 100\ \ MHz$	a=15 cm	1.45	11.74	8.88
	a=7 cm	2.87	2.12	1.50
	a=5 cm	1.26	0.96	0.66
$f = 170\ \ MHz$	a=15 cm	37.16	16.48	5.09
	a=7 cm	3.50	3.95	3.54
	a=5 cm	1.47	1.35	1.51
$f = 1\ \ GHz$	a=15 cm	176.23	9.65	5.78
	a=7 cm	87.86	14.41	5.55
	a=5 cm	84.58	5.22	4.70

bileşenlerin bileşkesi ($\left|\vec{E}_6^s\right|$) toprağın yüzeyinden $\Delta z = 20 \ \ cm$ yukarda bir düzlemde x ve y koordinatlarının 2-boyutlu fonksiyonu olarak çizildi.

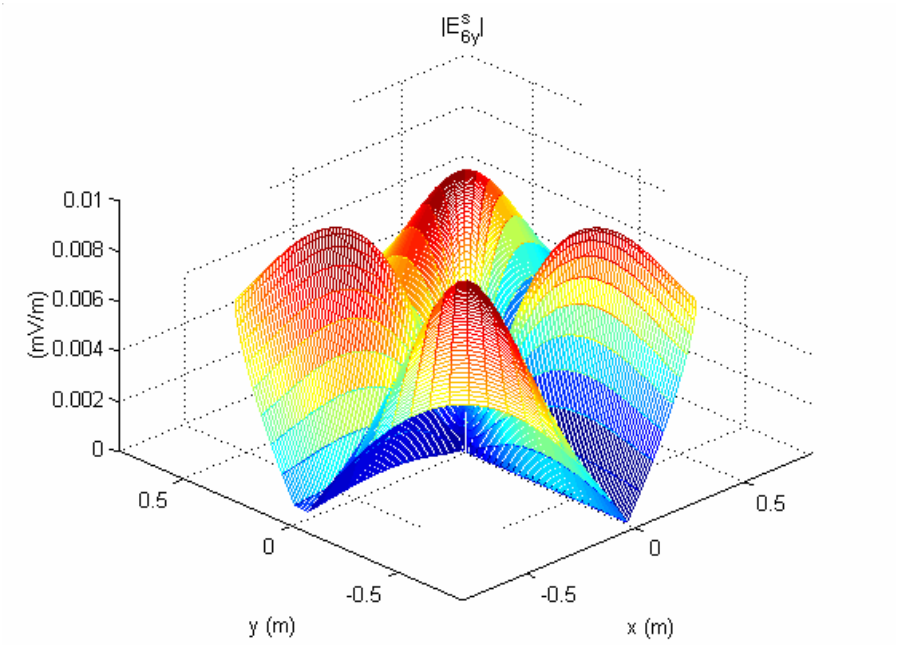
$\left|E_{6y}\right|$ ise ($x=0, y=0$) noktasında minimum genliğe sahip olurken, $x=\mp y$ doğruları üzerinde bulunan 4 tepe meydana çıkmaktadır (Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3).



Şekil 3.1- a=15 cm f=1 GHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının y -bileşeni (kuru toprak).

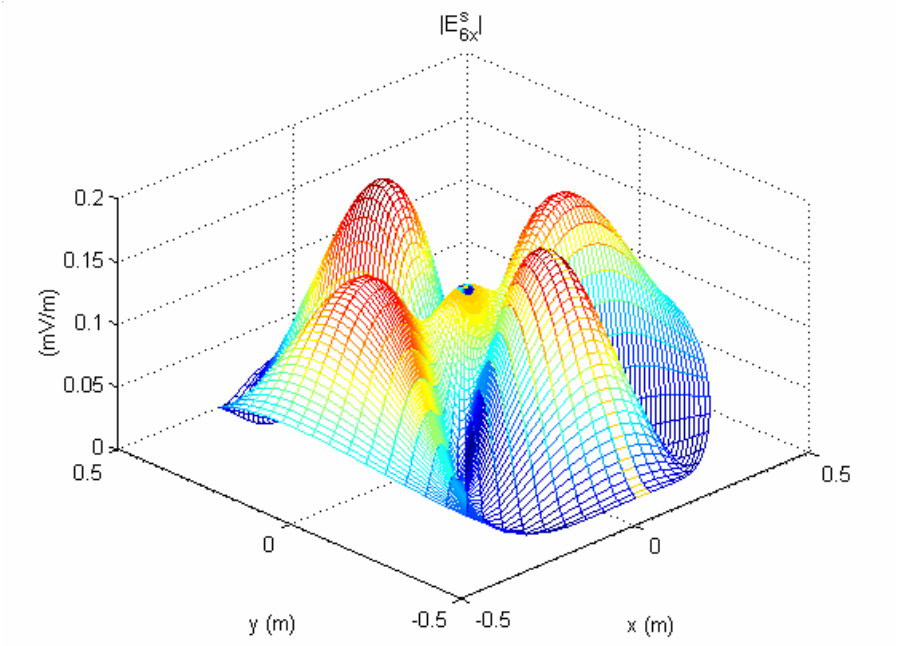


Şekil 3.2- a=15 cm f=170 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının y -bileşeni (nemli toprak).

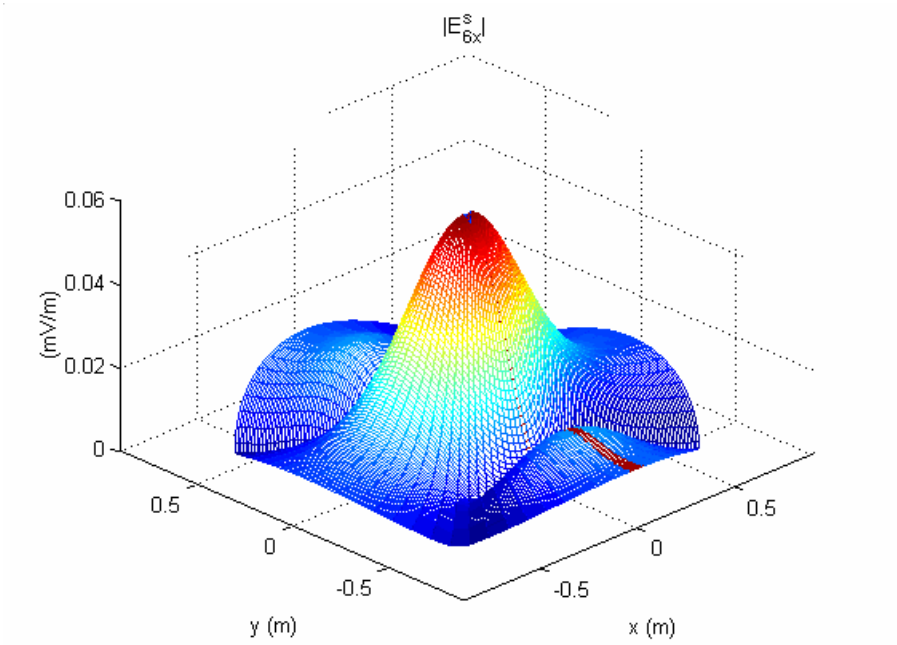


Şekil 3.3- a=15 cm f=100 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının y-bileşeni (çamur).

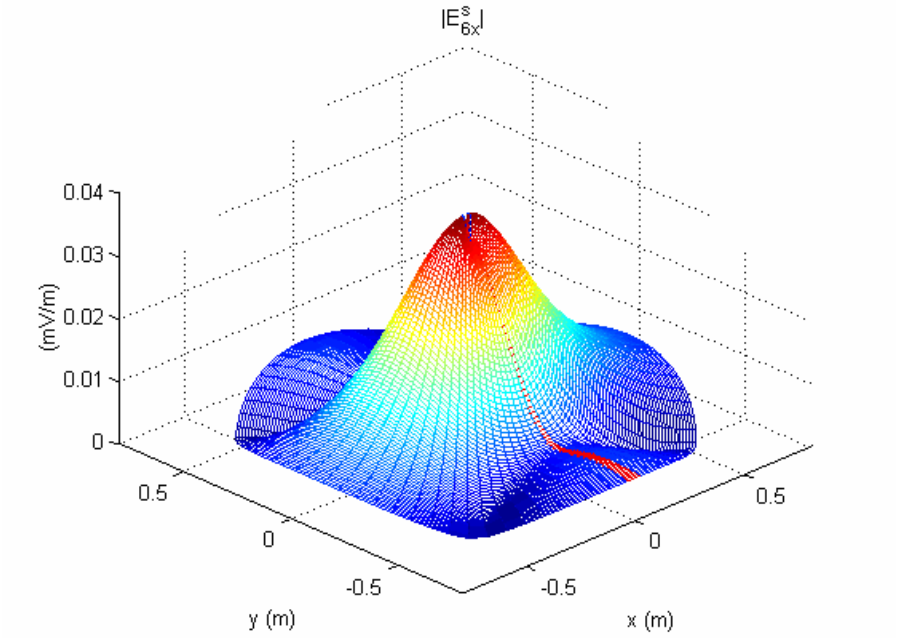
$\left|E_{6x}\right|$'in ise ($x=0, y=0$) noktasında bir maksimum verdiği gözlendi. (Şekil 3.4, Şekil 3.5, Şekil 3.6). Düşük frekanslarda çalışırken bu maksimum diğer maksimumlara göre açık bir şekilde çok yüksek olmaktadır. $f=1$ GHz'de ise diğer maksimumlar daha yüksek genlikli olmuşlardır.



Şekil 3.4- a=15 cm f=1 GHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının x-bileşeni (kuru toprak).



Şekil 3.5- a=15 cm f=170 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının x-bileşeni (nemli toprak).



Şekil 3.6- a=15 cm f=100 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının x-bileşeni (çamur).

Şekil A.1a, Şekil A.2a ve Şekil A.3a'da da $\left|E_{6z}\right|$'nin değişimi gösterilmiştir.

Saçılan elektrik alan, $\left|\vec{E}_6^s\right| = \sqrt{|E_{6x}|^2 + |E_{6y}|^2 + |E_{6z}|^2}$, Şekil A.1b, Şekil A.2b ve Şekil A.3b'de gösterilmiştir.

Kürenin (hedefin) varlığını $\left|E_y\right|$ bileşeninin ortaya çıkması haber vermektedir. Bu nedenle, yukarda sözünü ettiğimiz 4 tepeyi daha yakından inceledik. Maksimumlar

$x = \mp y$ doğruları üzerinde oluştuğu için, örnek olarak, zemin üzerinden yükseklik $\Delta z = 20 \ \ cm$ olan düzlemde her maksimumu kutupsal ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = arctg(y/x)$) koordinatlarını kullanarak göstermeyi uygun bulduk.

Şekil A.4a…Şekil A.4i 'de kuru toprakta 3 farklı yarıçap ve 3 farklı frekans için $\phi = sabit$ düzlemlerinde $\left|E_{6y}\right|$'nin ρ'ya bağlı değişimi görülmektedir.

Benzer biçimde, nemli toprak için, $\phi = sabit$ düzlemlerinde $\left|E_{6y}\right|$'nin ρ'ya bağlı değişimi Şekil A.5a…Şekil A.5i 'de verilmiştir.

Şekil A.6a…Şekil A.6i'de ise, $\left|E_{6y}\right|$'nin, çamurdaki $\phi = sabit$ için eğrileri çizilmiştir.

Sonuç olarak, $\left|E_{6y}\right|$'nin maksimumları, gerçekten, $x = \mp y$ doğruları üzerinde oluştuğu tespit edildi. Tablo 3.2'de, Şekil A.4, Şekil A.5 ve Şekil A.6'dan da okunabilen, $\left|E_{6y}\right|$'nin maksimumlarının oluştuğu, ρ_0 değerleri verilmiştir.

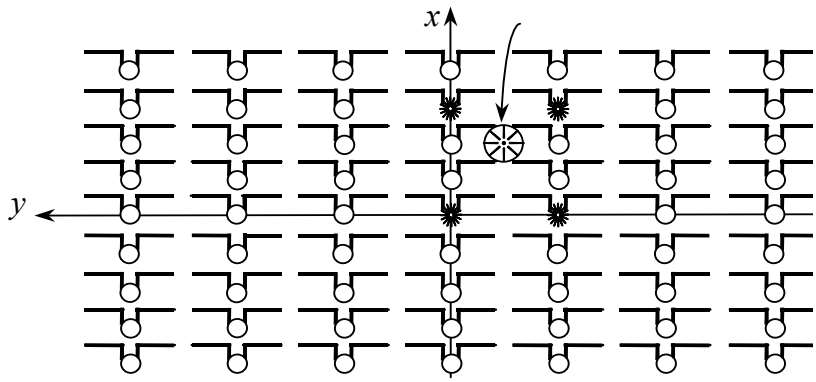
Tablo 3.2- Farklı frekans değerlerinde $\left|E_y\right|$'nin maksimum olduğu ρ_0 değerleri (cm).

Toprak tipi ⟹		Kuru toprak	Nemli toprak	Çamur
Frekans ⇩	Yarıçap ⇩	($\varepsilon_r = 4, \ \sigma = 4 \cdot 10^{-4}$)	($\varepsilon_r = 16, \ \sigma = 3 \cdot 10^{-3}$)	($\varepsilon_r = 30, \ \sigma = 2 \cdot 10^{-2}$)
$f = 100 \ \ MHz$	a=15 cm	24.5	33.5	42
	a=7 cm	22	11	11
	a=5 cm	21	15	7
$f = 170 \ \ MHz$	a=15 cm	98	44	34.5
	a=7 cm	15	45.5	32.5
	a=5 cm	15	48	33.5
$f = 1 \ \ GHz$	a=15 cm	24.5	22.5	22.5
	a=7 cm	27	26	26
	a=5 cm	28	25.5	26

Sonuç olarak, hedefin merkezinin (x, y) koordinatları, $\left|E_{6y}\right|$'nin maksimumlarını veren 4-simetrik tepenin ortasında yer almaktadır. y-polarizasyonlu alanları ölçen bir doğrusal anten dizisi (Şekil 3.7) kullanılarak ve bunların algıları (mesela bir bilgisayarla) değerlendirilerek, söz konusu 4 adet maksimumun ortası tespit edilebilir.

C-tarama yapan bir GPRın hedefi tespit etmek için, x-ekseni boyunca m tane ve y-ekseni boyunca da n tane, toplam ($m \times n$) tane, ölçü alması gerekmektedir. Bizim

bulduğumuz sonuçlarda ise bir tek yansımış alan bize hedefin merkez koordinatlarını vermektedir. Yaptığımız çalışmanın orijinalliği ve önemi ortadadır.



Şekil 3.7- $\Delta z = sabit$ düzleminde alıcı antenler, besledikleri göstericiler (♉) ve göstericileri maksimum işaretle uyarılmış olan (✸) 4 antenin merkezindeki hedefin (x, y) koordinatlarının bulunması

4 İLERDE YAPILABİLECEK DİĞER ÇALIŞMALAR

4.1 İletken Olmayan Küresel Hedefler

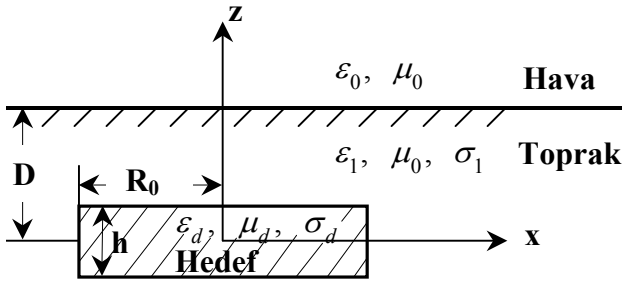
Bu tip hedeflerde, tezin matematiğine gelecek tek fark küre yüzeyi için yazılacak sınır şartı denklemlerinde görülecektir. Çünkü, artık kürenin içinde de elektromagnetik alanlar vardır. Bu alanlar kürsel modlarla ifade edilir. Mod katsayıları yeni bilinmeyenlerdir (mesela d_n^+ ve d_n^-). Küre yüzeyindeki sınır şartları da, hem $\vec{E}$'nin hem $\vec{H}$'nin teğetsel (θ ve ϕ) bileşenlerinin sürekliliği olarak yeni denklemler getirir. Böylece dielektrik, kayıplı dielektrik ve değişken yüzey empedanslı hedefler olabileceği gibi, farklı tabakalardan oluşmuş küresel hedefler de göz önüne alınabilir.

4.2 Silindirik Hedefler

Şekil 4.1'de görülen hedef R_0 yarıçaplı ve h kalınlıklı bir silindirdir. xyz koordinat sisteminin başlangıç noktası silindirin orta (merkez) noktasıdır. Yine gelen alan olarak, gönderilen doğrusal polarizasyonlu bir düzlemsel dalganın –z doğrultusunda toprağa doğru ilerlediğini düşünelim. Bu dalga da aşağıdaki gibidir:

$$\vec{E} = E_0 e^{-ik_0 z} \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{H} = -\frac{E_0}{120\pi} e^{-ik_0 z} \cdot \vec{u}_y$$



Şekil 4.1- Toprak içindeki R_0-yarıçaplı, h-kalınlıklı silindirik hedefin kesit görünümü

Silindirin tavan ve tabanı düzlemsel, yani sozsuz eğrilik yarıçaplı, yüzeyler olduğu için, ortamı kabaca iki bölgeye ayırıyoruz:

I) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > R_0$ bölgesi,

II) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} < R_0$ bölgesi,

I bölgesinde topraktan yansıyan alan (2.6a) ile bulunmuş olup, toplam alan,

$$\vec{E} = E_0 \left[e^{-ik_0 z} + \frac{1 - \sqrt{\hat{\varepsilon}_r}}{1 + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r}} e^{ik_0 (z-2D)} \right] \cdot \vec{u}_x$$

yazılır.

II bölgesinde ise

$z = +h/2$ ve $z = -h/2$

düzlemlerinden de kırılmış ve yansımış alanlar oluşacaktır. Böylece $z > D$ için,

$$\vec{E} \cong \left(E_0 e^{-ik_0 z} + E_6 e^{ik_0 z} \right) \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{H} \cong \left(-\frac{E_0}{120\pi} e^{-ik_0 z} + \frac{E_6}{120\pi} e^{ik_0 z} \right) \cdot \vec{u}_y$$

olsun. $\frac{h}{2} < z < D$ için,

$$\vec{E} \cong \left(E_1 e^{-ik\ z} + E_5 e^{ik\ z} \right) \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{H} \cong \left(-\frac{E_1}{\sqrt{\mu_0 / \hat{\varepsilon}_1}} e^{-ik\ z} + \frac{E_5}{\sqrt{\mu_0 / \hat{\varepsilon}_1}} e^{ik\ z} \right) \cdot \vec{u}_y$$

olsun. $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$'deki hedefin karmaşık dielektrik sabiti $\hat{\varepsilon}_d$ olsun. Bu durumda, $k_d = \omega \sqrt{\mu_0 \hat{\varepsilon}_d}$ olmak üzere,

$$\vec{E} \cong \left(E_2 e^{-ik_d z} + E_4 e^{ik_d z}\right) \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{H} \cong \left(-\frac{E_2}{\sqrt{\mu_0 / \hat{\varepsilon}_d}} e^{-ik_d z} + \frac{E_4}{\sqrt{\mu_0 / \hat{\varepsilon}_d}} e^{ik_d z} \right) \cdot \vec{u}_y$$

olur. $z < -\frac{h}{2}$ için de,

$$\vec{E} \cong E_3 e^{-ik\ z} \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{H} \cong -\frac{E_3}{\sqrt{\mu_0 / \hat{\varepsilon}_1}} e^{-ik\ z} \cdot \vec{u}_y$$

olur. $z = D$, $z = +\frac{h}{2}$ ve $z = -\frac{h}{2}$'de E_x ve H_y bileşenlerinin sürekliliği 6 denklem verir. Bilinmeyenler ise E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ve E_6'dır. Oluşacak denklemlerden E_6 çözülür:

$$\frac{E_6}{E_0} \cong \frac{(1-n_1)\left[(n_1 + \frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{n_2})^2 e^{-ik_d h} - (n_1 - \frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{n_2})^2 e^{ik_d h}\right] e^{-i(k_0+k)D+ikh} + (1+n_1)\left[n_1^2 - \left(\frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{n_2}\right)^2\right] e^{-i(k_0-k)D}\left[e^{-ik_d h} - e^{ik_d h}\right]}{(1+n_1)\left[(n_1 + \frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{n_2})^2 e^{-ik_d h} - (n_1 - \frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{n_2})^2 e^{ik_d h}\right] e^{i(k_0-k)D+ikh} + (1-n_1)\left[n_1^2 - \left(\frac{\hat{\varepsilon}_{r2}}{n_2}\right)^2\right] e^{i(k_0+k)D}\left[e^{-ik_d h} - e^{ik_d h}\right]}$$

Burada $n_1 = \frac{k}{k_0}$, $n_2 = \frac{k_d}{k_0}$, ve $\hat{\varepsilon}_{r2} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} + i\frac{\sigma_d}{\omega\varepsilon_0}$'dır.

III. bölge diyebileceğimiz

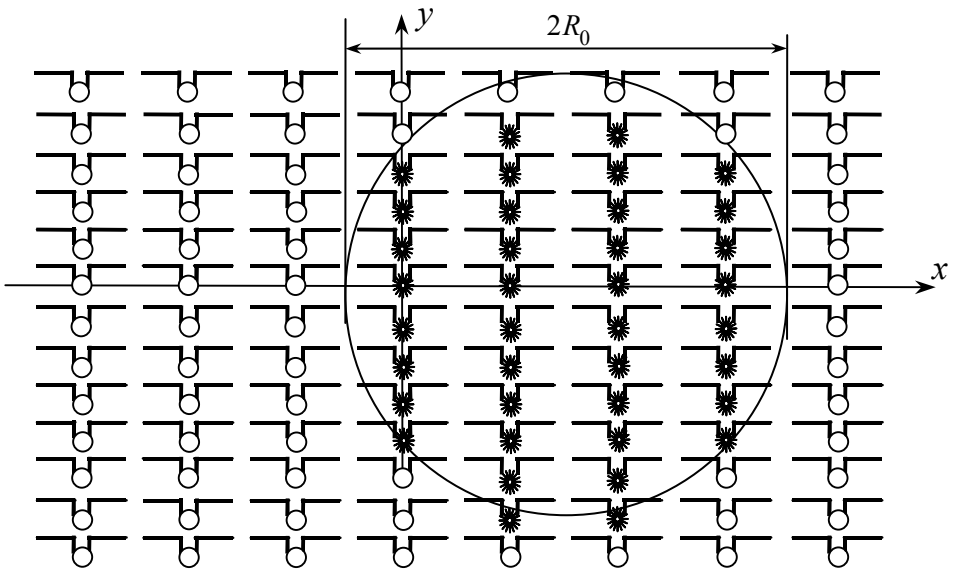
$$R_0 - \Delta R \le \rho \le R_0 + \Delta R$$

bölgesinde $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$ ve $\rho = R_0$ silindir yüzeyindeki teğetsel elektrik ve magnetik alanların sürekliliği gerçekleşmelidir. Böylece yukarda E_6 için bulunan çözüm, ilk kaba yaklaşım olacaktır.

Muhakkak ki, havada II bölgesindeki $\vec{E} = \left(E_0 e^{-ik_0 z} + E_6 e^{ik_0 z}\right) \cdot \vec{u}_x$ alanının genliği I bölgesindeki $\vec{E}$'nin genliğinden farklıdır. Bu durumda 3. Bölümde şekil 3.1 ile

gösterilen alıcı antenler yine kullanılabilir. Fakat bu kez alıcı antenlerin doğrultuları x-eksenine paralel seçilmelidir (Şekil 4.2).

Artık $\rho > R_0$ olan I bölgesindeki E_x işareti ile $\rho < R_0$ olan II bölgesindeki E_x işareti farklı genliktedir. Bu farkı mesela bir bilgisayar yardımı ile tespit etmemiz mümkündür.



Şekil 4.2- Küresel hedef tespitinde kullanılan alıcı anten dizilerini, R_0 yarıçaplı silindirik hedef için kullanılması

4.3 Hedefin Tipinin Tespiti

Dizideki alıcı antenler önce y-eksenine pararlel getirilip küresel hedef araştırılır. Küresel hedef yoksa silindirik hedef olabilir. Bunun için aynı antenler x-eksenine paralel getirilip silindirik hedefler araştırılır. Mümkünse x-eksenine paralel alıcı antenlerden bir dizi ile y-eksenine pararlel alıcı antenlerden ikinci bir dizi farklı $z = sabit$ düzlemlerine yerleştirilerek iki ölçüm bir arada yapılabilir.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1965. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications. Newyork.

Akkaya, İ., 1978. Modal Electromagnetic Field Solutions for Axially Symmetrical, Linear, Homogeneous Media, *Bull. Tech. Univ. İstanbul,* **30-2**. 1-23.

Akkaya, İ., 1994. Anten Problemlerinde Fourier Dönüşümleri. 2. Baskı. İTU. İstanbul.

Akkaya, İ., 2001. Radar Temelleri Ders Notları. İTU. İstanbul.

Akkaya, İ., 2002. Applied Electromagnetic Theory Lecture Notes. İTU. İstanbul.

Annan, A. P., 2002. GPR-History, Trends and Future Developments. *Subsurface Sensing Technologies and Applications,* **3-4**, 253-270.

Annan A. P. and Davis, J. L., 1976. Impulse Radar Soundings in Permafrost. *Radio Science,* **11,** 383-394.

Annan A. P., Davis, J. L. and Johnston, G. B., 1997. Maximizing 3D GPR Image Resolution: A Simple Approach, *Proceedings of the High Resolution Geophysics Workshop,* University of Arizona, Tucson, AZ, Jan. 6-9.

Barton, D. K., 1964. Radar System Analysis. 3. Baskı, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Bergman, T., Blanch, J. O., Robertson, J. O. A. and Holliger, K., 1999. A Simplified Lax-Wendroff correction for straggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave propagation in frequency-dependent media, *Geophysics,* **59,** 1211-1221.

Cook, J. C., 1973. Radar Exploration through Rock in Advance of Mining, *Trans. Society Mining Engineers, AIME*, **254,** 140-146.

Cui, T. J. and Chew, W. C., 1999. Fast Evaluation of Sommerfeld Integrals for EM Scattering and Radiation by Three-Dimensional Buried Objects, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,* **37-2**, March.

Cui, T. J. and Chew, W. C., 1999. Fast Algorithm for Electromagnetic Scattering by buried 3-D Dielectric Objects of Large Size, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,* **37-5**, Sept.

Cui, T. J., Wiesbeck, W. and Herschlein, A., 1998. Electromagnetic Scattering by Multiple Three-Dimensional Scatterers Buried Under Multilayered Media, Part I: Theory, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,* **36-2**, March.

Cui, **T. J., Wiesbeck, W. and Herschlein, A.,** 1998. Electromagnetic Scattering by Multiple Three-Dimensional Scatterers Buried Under Multilayered Media, Part II: Numerical Implementations and Results, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,* **36-2**, March.

Doolittle, J. A. and Asmussen, L. E., 1992. Ten years of Applications of Ground Penetrating Radar by United States Department of Agriculture, *Proceedings of the Fourth International Conference of Ground Penetrating Radar*, Geological Survey of Finland, Special Paper, **16**, 139-147.

Ederra, G., 1999. Mathematical Morphology Techniques Applied to Anti-Personnel Mine Detection, *MS Thesis,* Department of Electronics and Information Processing, Vrije University, Brussel.

Ekstein, R., 1997. Anti-Personnel Mine Detection Signal Processing and Detection Principles, *MS Thesis,* Department of Electronics and Information Processing, Vrije University, Brussel.

El Said, M. A. H., 1956. Geophysical Prospection of Underground Water in the Desert by Means of Electromagnetic Interference Fringes, *Pro. I.R.E.,* **44**, 24-30 and 940.

El-Shenawee, M., Rapparot, C., Miller, E. L. and Slevitch, M. B., 2001. Three-Dimensional Subsurface Analysis of Electromagnetic Scattering from Penetrable/PEC Objects Buried Under Rough Surfaces: Use of the Steepest Descent Fast Multipole Method, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,* **39-6**, June.

Gaunaurd, G.C. and Huang, H., 1996. Sound scattering by a spherical object near a hard flat bottom, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **43-4**, July.

Gaunaurd, G.C. and Huang, H., 1997. Scattering of a plane wave by a spherical elastic shell near a free surface, *Int. J. Solids Structures,* **34-5**, 591-602.

Grasmueck, M., 1996. 3-D Ground Penetrating Radar Applied to Fracture Imaging in Gneiss, *Geophysics,* **61,** 1050-1064.

Hamid, A. K. and Hamid, M., 2000. A Plane Electromagnetic Wave Scattering by a Conducting Sphere Partially Buried in a Ground Plane, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications,* **14**, 615-627.

Harrington, R. F., 1961. Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Inc., New York.

Holser, W. T., Brown, R. J., Roberts, F. A., Fredrikkson, O. A. and Unetrberger, R. R., 1972. Radar Logging on a Salt Dome, *Geophysics,* **37,** 889-906.

Lampe, B. and Holliger, K., 2000, Finite-Difference Modelling of Ground-Penetrating Radar Antenna Raidation, *Proceedings of the 8th International Conference on Ground Penetrating Radar,* Gold Coast, Australia. 556-560.

Lee, T., 1983. The Transient Electromagnetic Response of a Conducting Sphere in an Imperfectly Conducting Half-space**,** *Geophysics Prospecting,* **31**, 766-781.

Olhoeft, G. R., 1975. The Electrical Properties of Permafrost, *PhD Thesis,* University of Toronto, Canada.

Olhoeft, G., 1987. Electrical Properties from 10^{-3} to 10^{+9} Hz –Physics and Chemistry. *American Institute of Physics Conference Proceedings*, **154**, 281-298.

Paik, J., Lee, C. P. and Abidi, M. A., 2002. Image Processing-Based Mine Detection Techniques: A Review, . *Subsurface Sensing Technologies and Applications,* **3-3**, 153-202.

Rumeliotis, J. A. and Fikioris, J. G., 1981. Scattering of Plane Waves from an Eccentrically Coated Metallic Sphere, *Journal of The Franklin Institute*, **312-1**, 41-59.

Şahin, A. and Miller, E. L., 1998. Recursive T-Matrix Methods for Scattering from Multiple Dielectric and Metallic Objects, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* **46-5**, May.

Stratton, J. A., 1941. Electromagnetic Theory, McGraw-Hill Inc., New York.

Thio, Y-C. and Gleeson L. J., 1979. Electromagnetic Fields in a Half-space Scattered by a Buried Sphere by the Method of Transformation of Local Elements, *Geophys. J. R. Astr. Soc.,* **57**, 671-681.

Tierbach, R., 1974. Electromagnetic Reflections in Salt Deposits, *Journal of Geophysics*, **40**, 633-637.

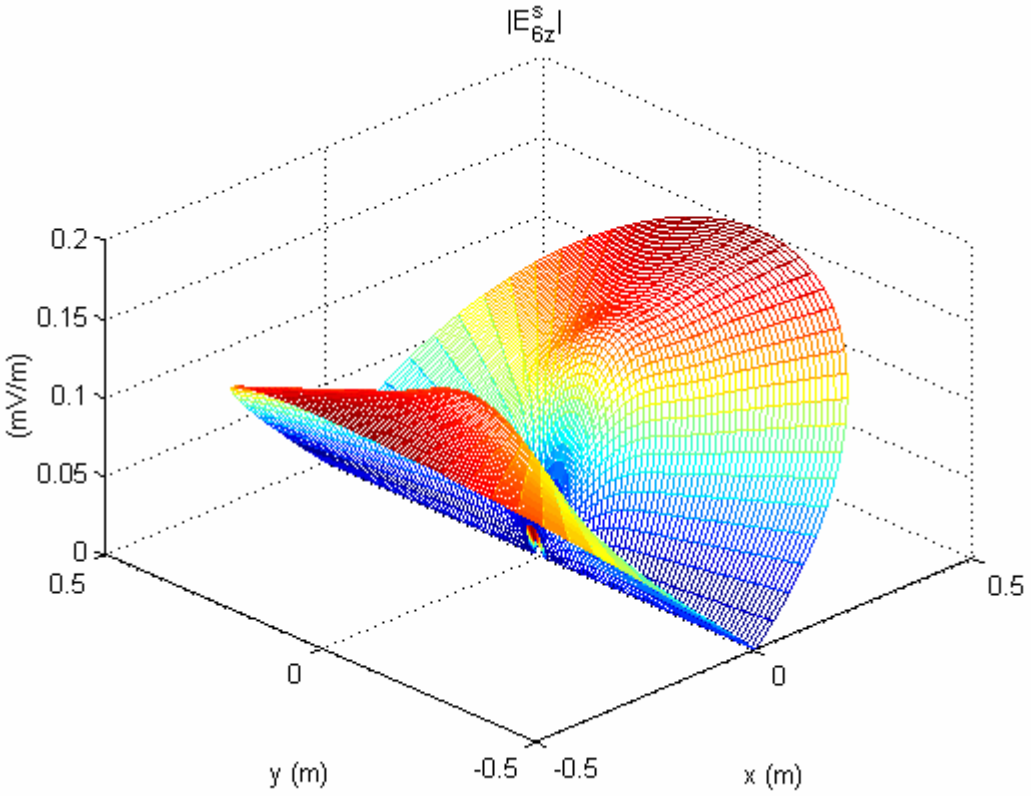
Türkoğlu, Ö., 2001. İnce Anten Dizisi Kullanarak Düzlemsel Yakın Alan Elde Edilmesi, *Doktora Tezi*, , İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Unterberger, R. R., 1978. Radar Propagation in Rock Salt, *Geophysics Prospecting,* **26**, 312-328.

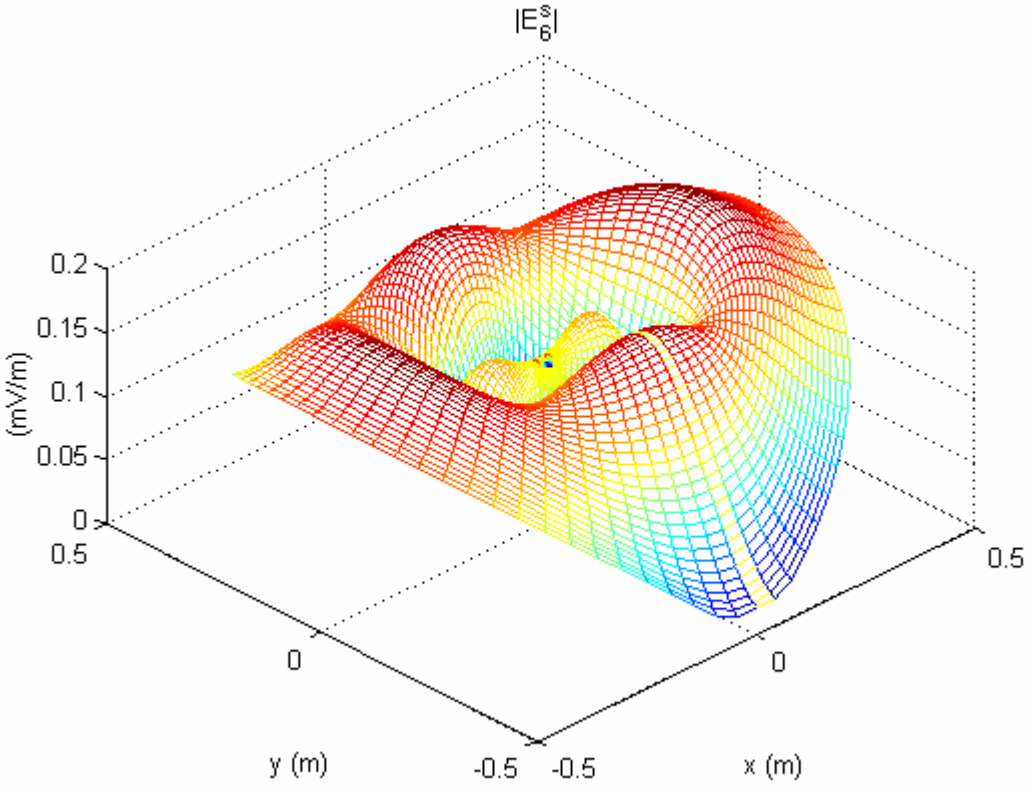
Watts, R. D. and England, A. W., 1976. Radio-echo Sounding of Temperate Glaciers: Ice Properties and Sounder Design Criteria, *Journal of Glaciology*, **21-85**, 39-48.

Waite, A. H. and Schmidt, S. J., 1961. Gross Errors in Height Indication from Pulsed Radar Altimeters Operating over Thick Ice or Snow, IRE International Convention Record, **5**, 38-54.

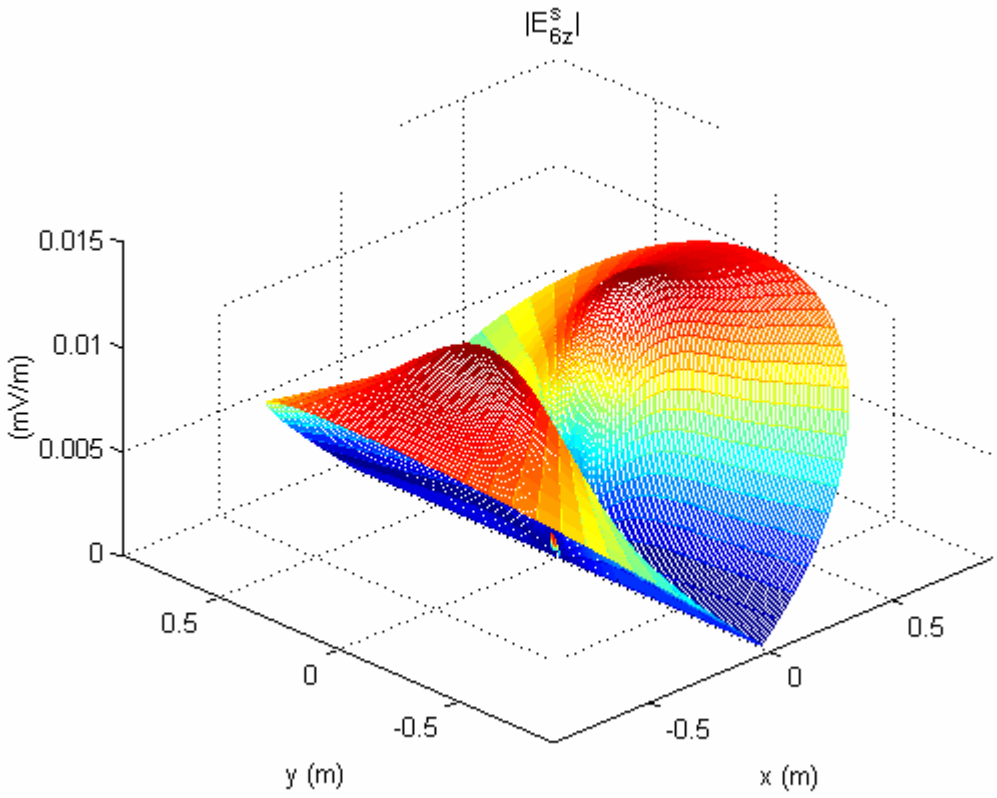
EK A:



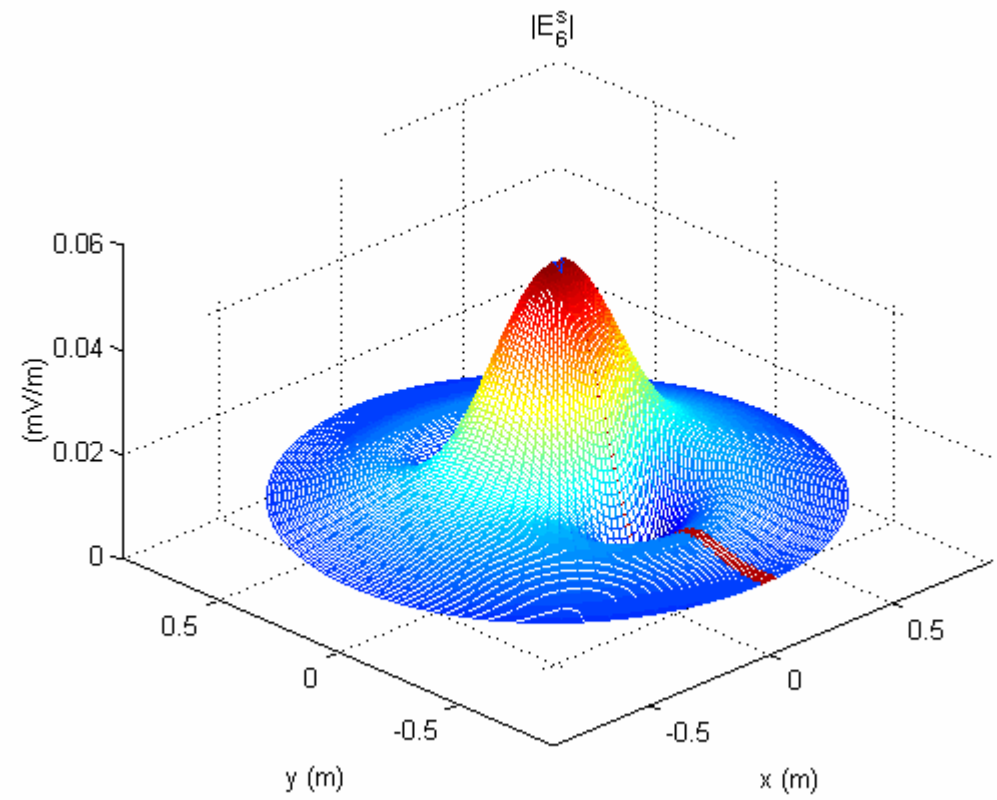
Şekil A.1a- a=15 cm f=1 GHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının z -bileşeni (kuru toprak).



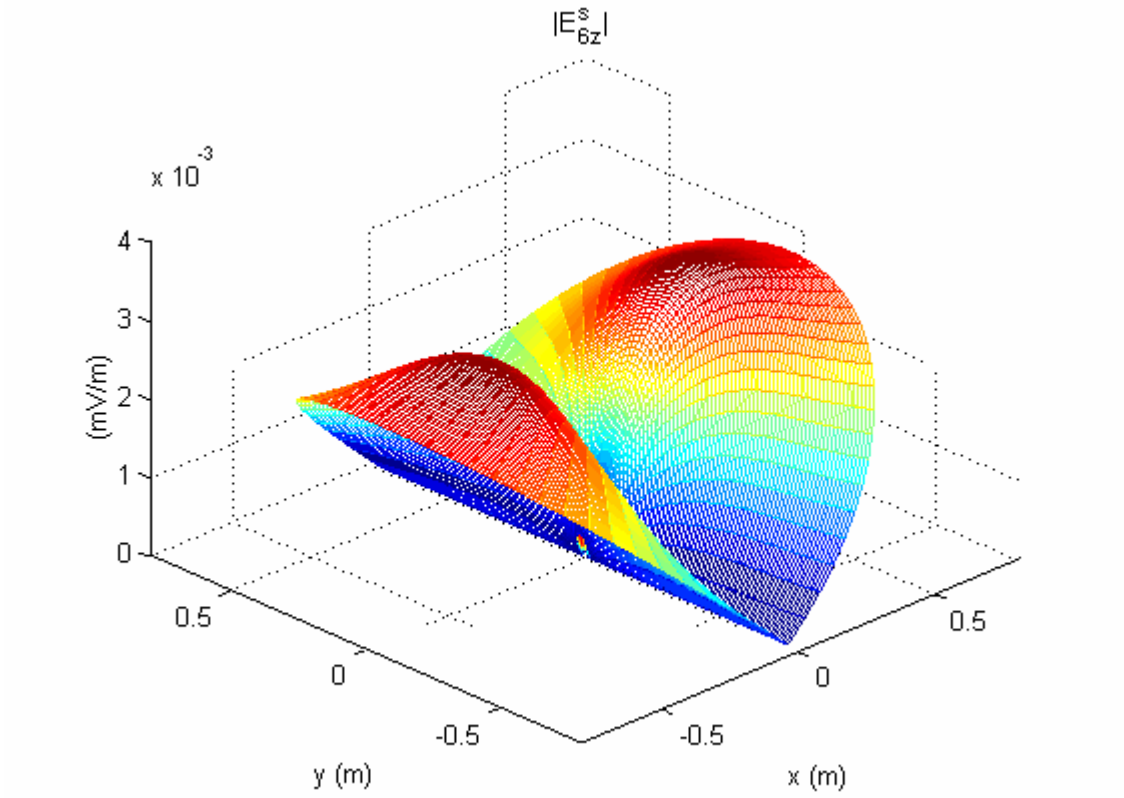
Şekil A.1b- a=15 cm f=1 GHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının genliği (kuru toprak).



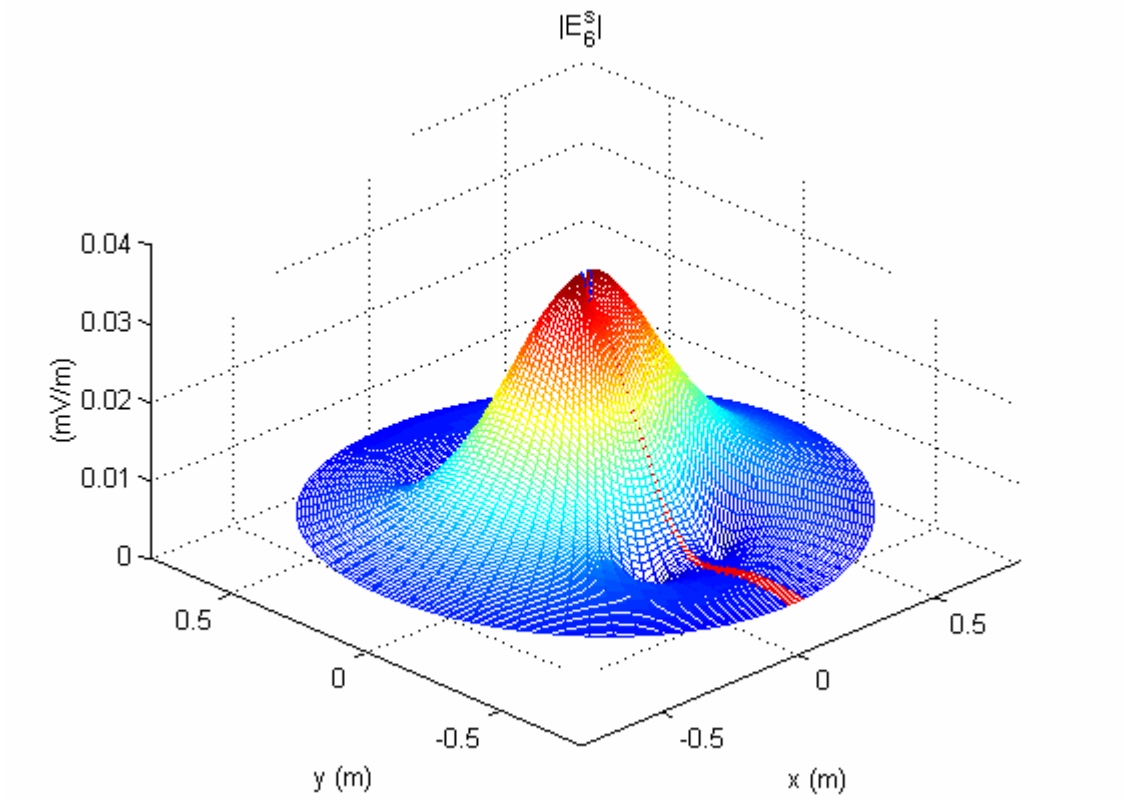
Şekil A.2a- a=15 cm f=170 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının *z* -bileşeni (nemli toprak).



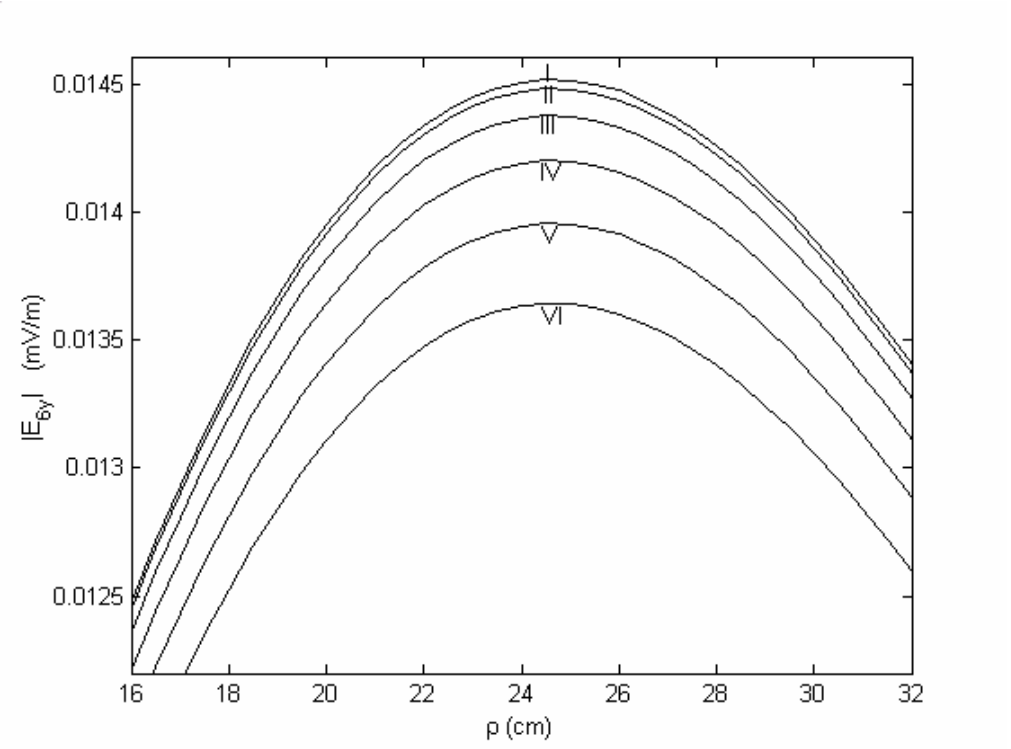
Şekil A.2b- a=15 cm f=170 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının genliği (nemli toprak).



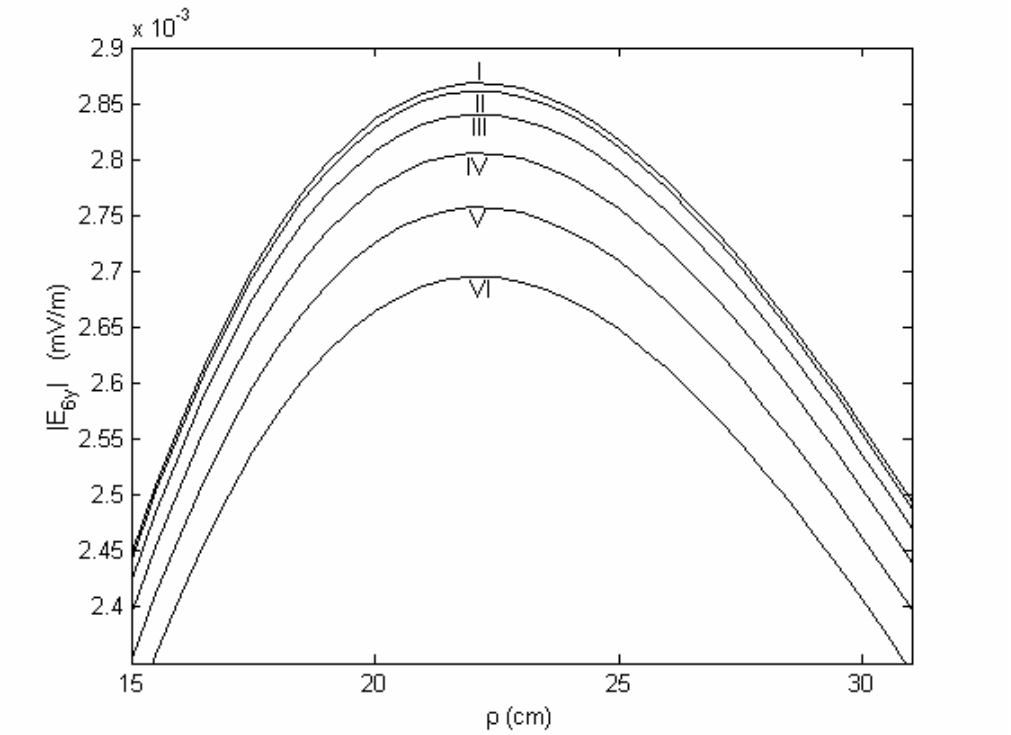
Şekil A.3a- a=15 cm f=100 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının *z* -bileşeni (çamur).



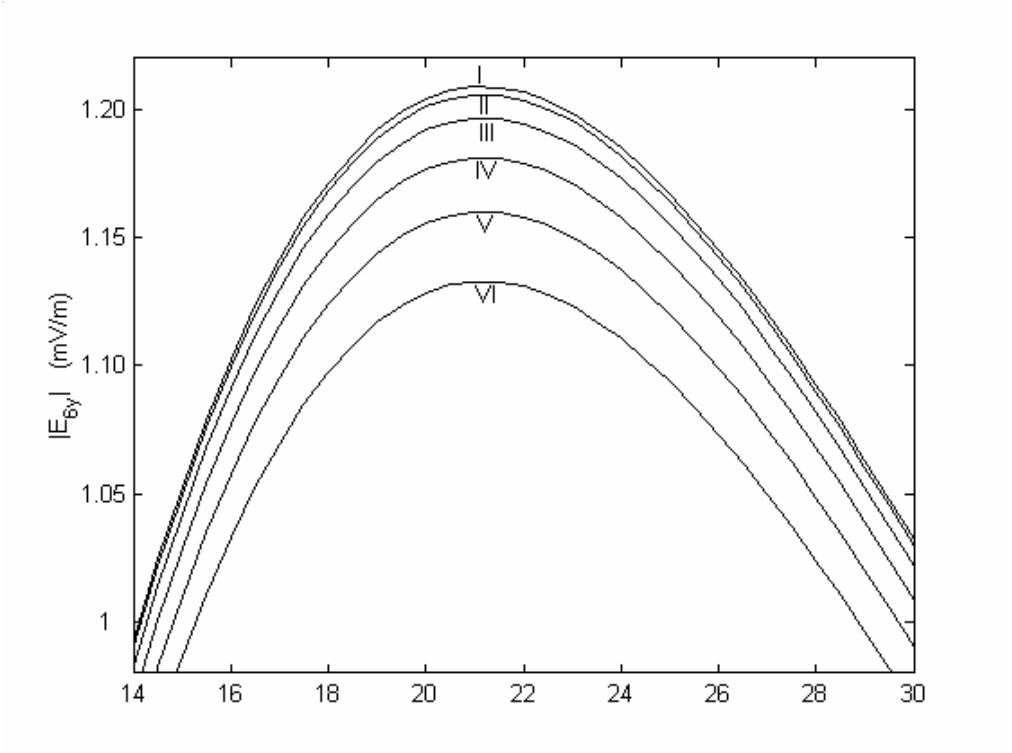
Şekil A.3b- a=15 cm f=100 MHz, için, Δz=20 cm düzleminde saçılan elektrik alanının genliği (çamur).



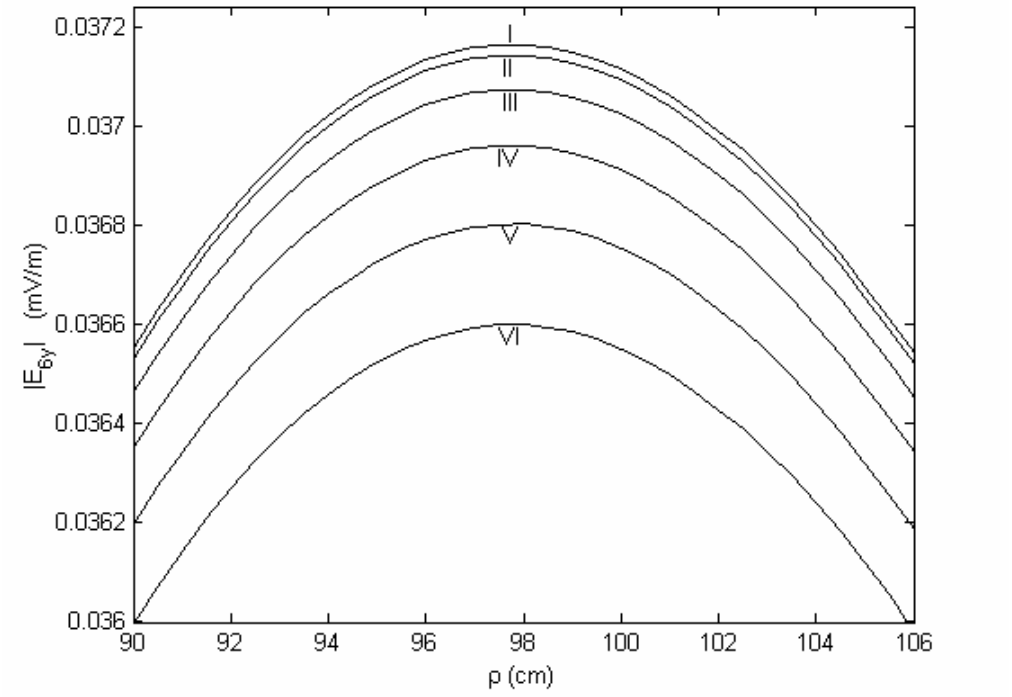
Şekil A.4a- Kuru toprakta f=100 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o, 135^o \pm 2^o, 225^o \pm 2^o, 315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



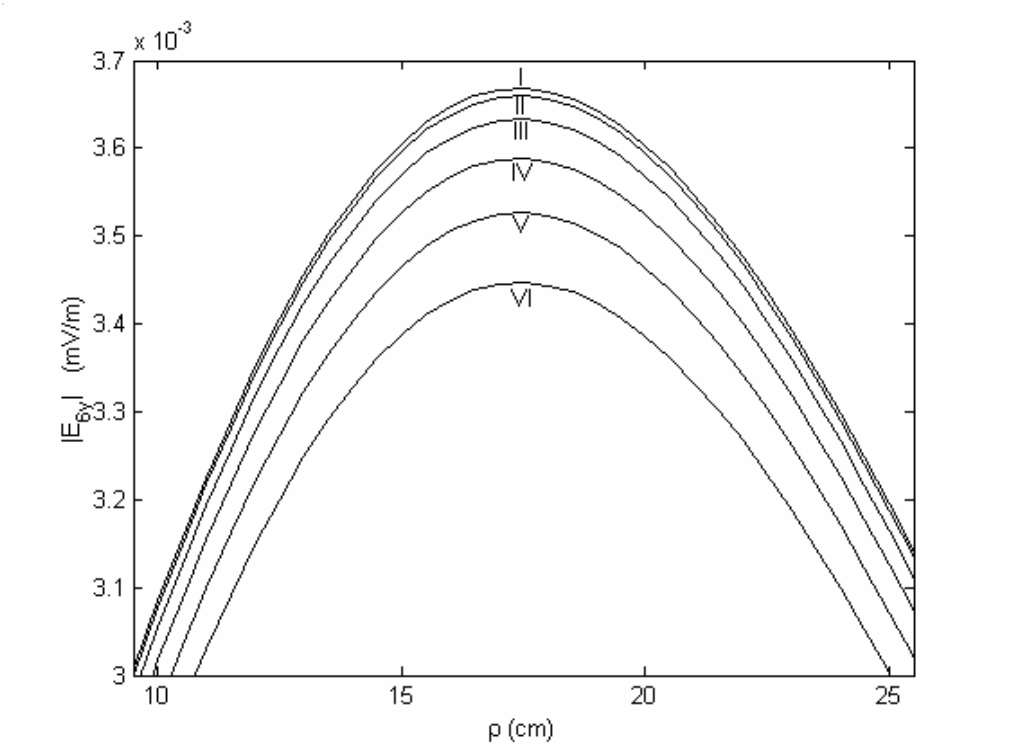
Şekil A.4b- Kuru toprakta f=100 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o, 135^o \pm 2^o, 225^o \pm 2^o, 315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



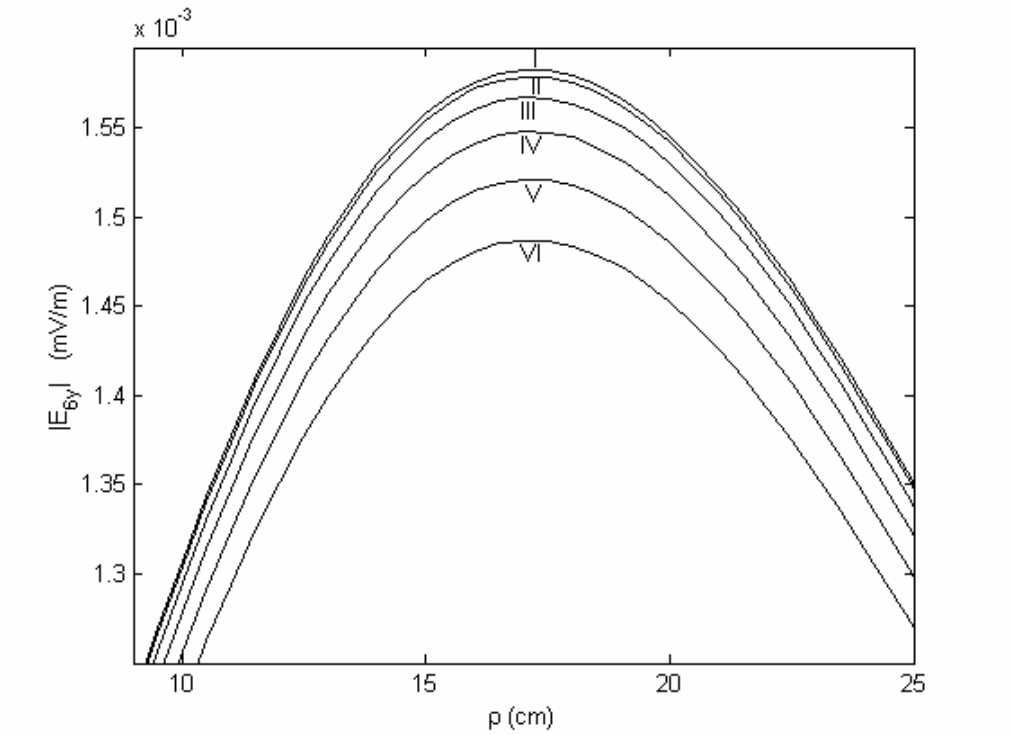
Şekil A.4c- Kuru toprakta f=100 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



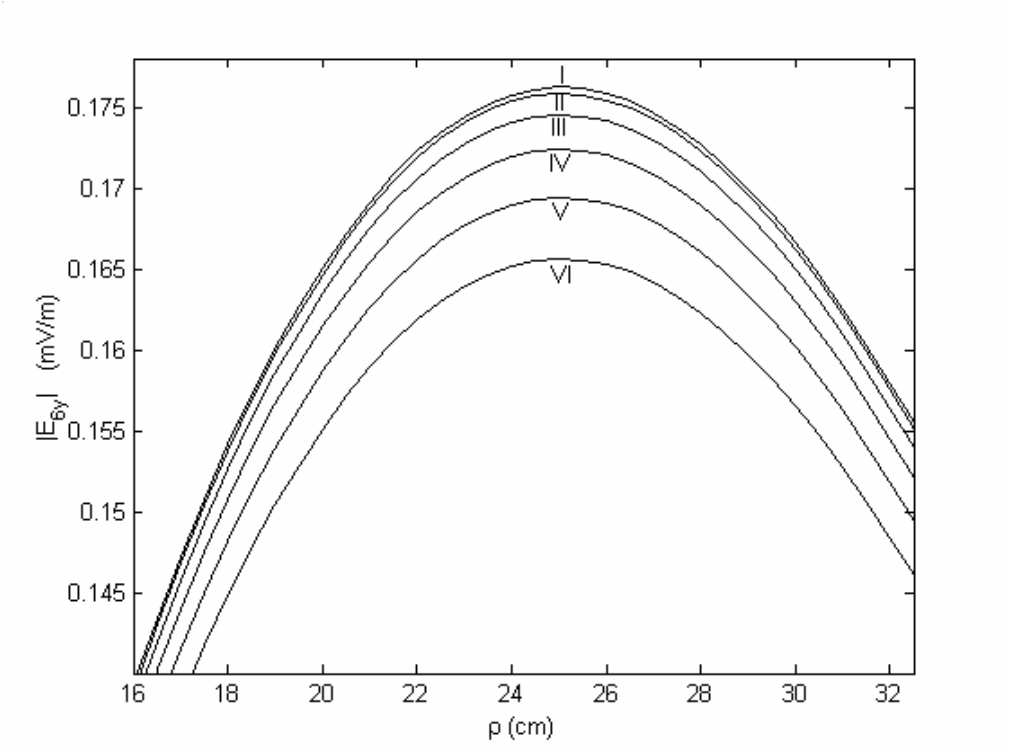
Şekil A.4d- Kuru toprakta f=170 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



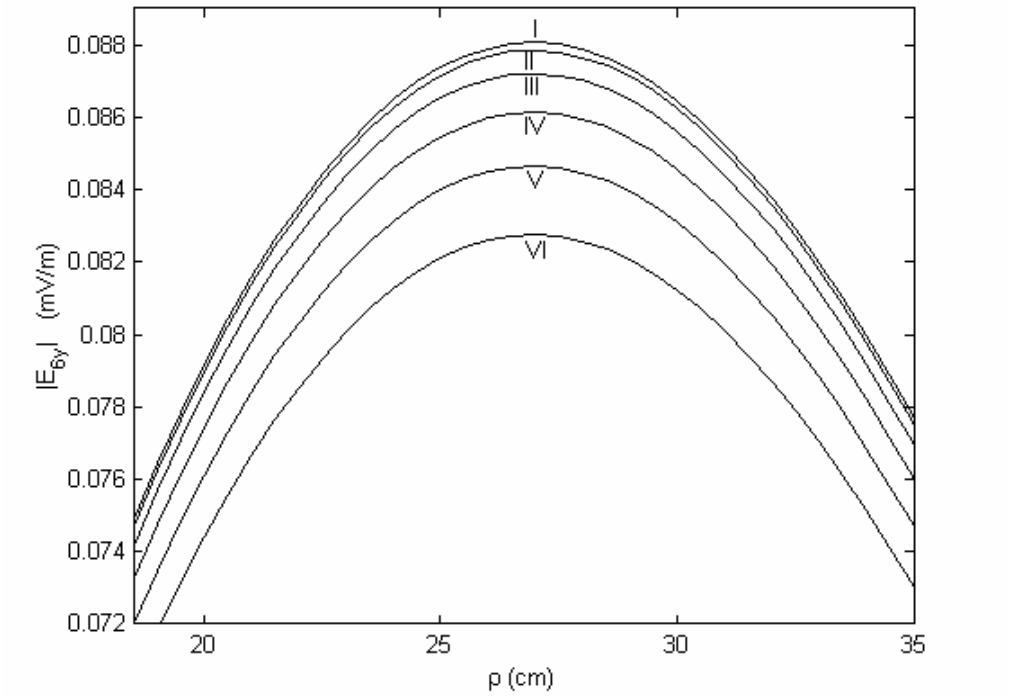
Şekil A.4e- Kuru toprakta f=170 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



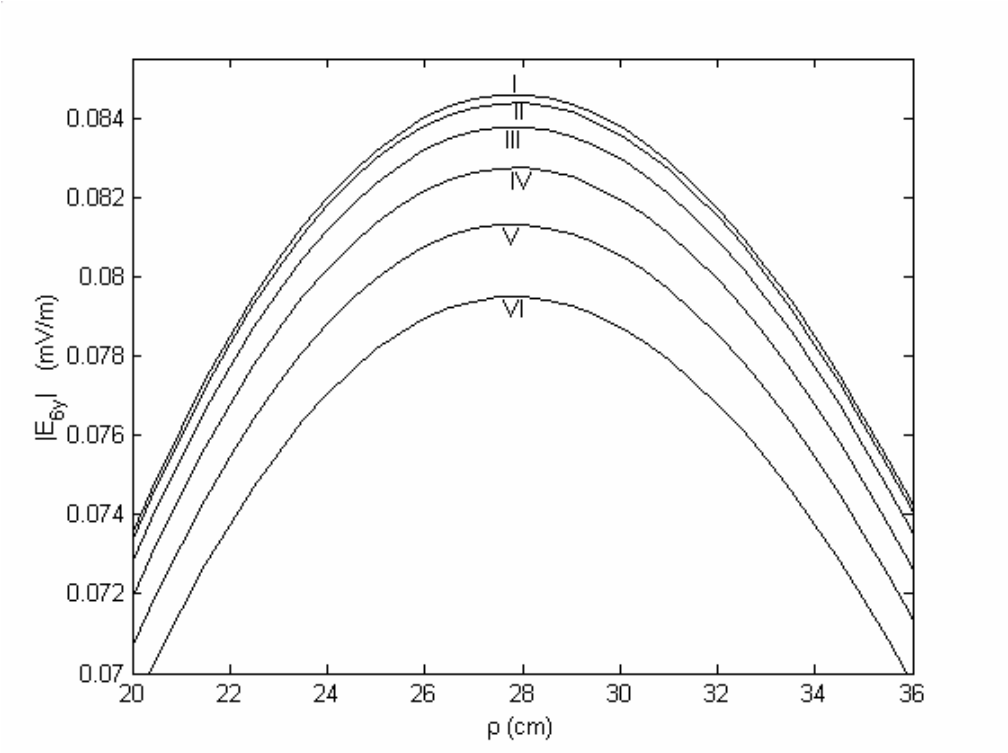
Şekil A.4f- Kuru toprakta f=170 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



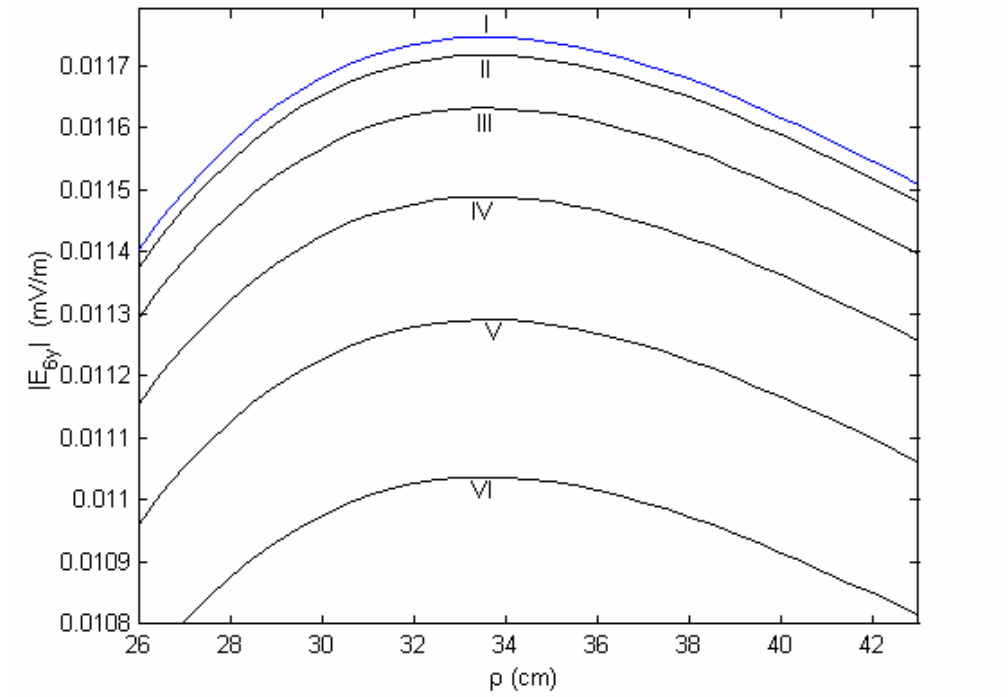
Şekil A.4g- Kuru toprakta f=1 GHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



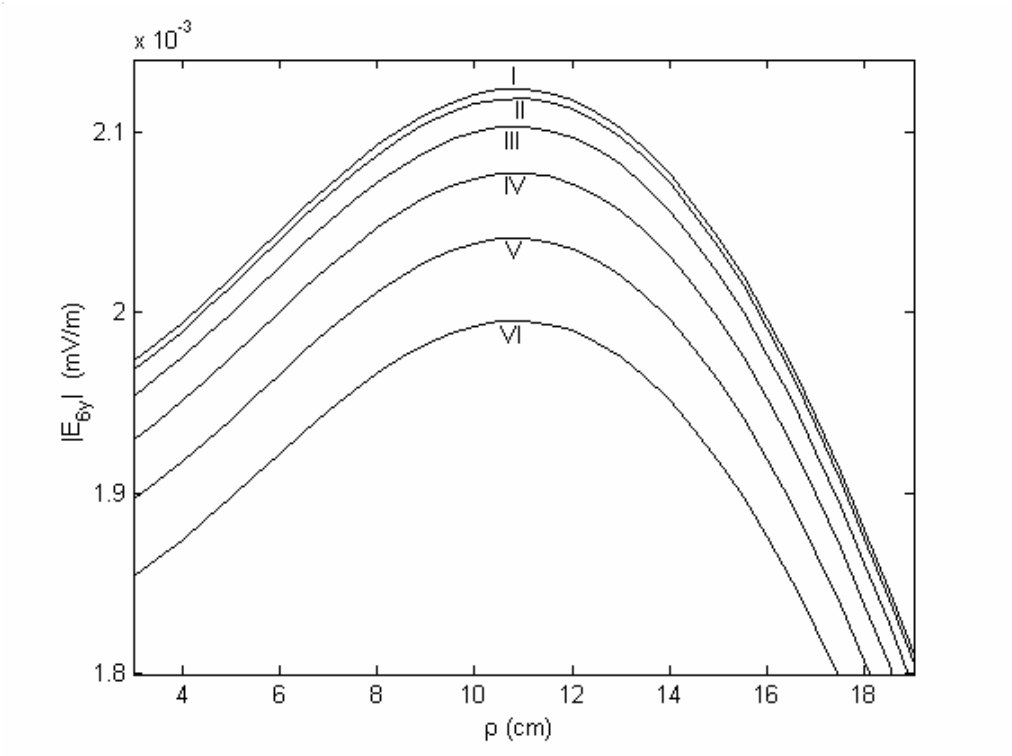
Şekil A.4h- Kuru toprakta f=1 GHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



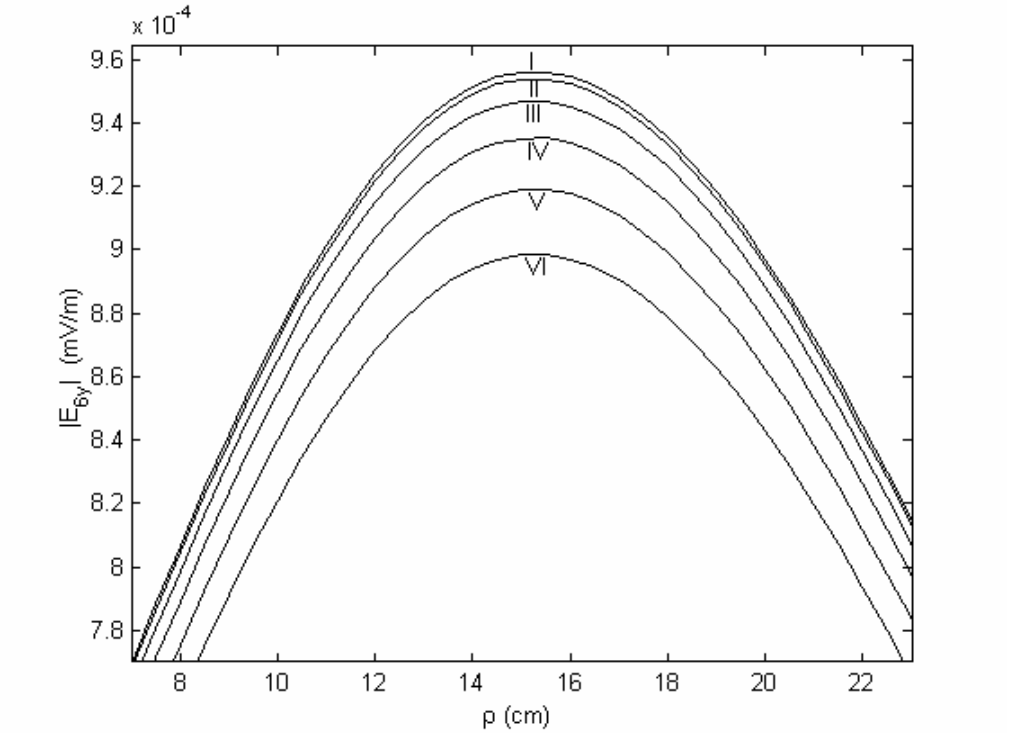
Şekil A.4i- Kuru toprakta f=1 GHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



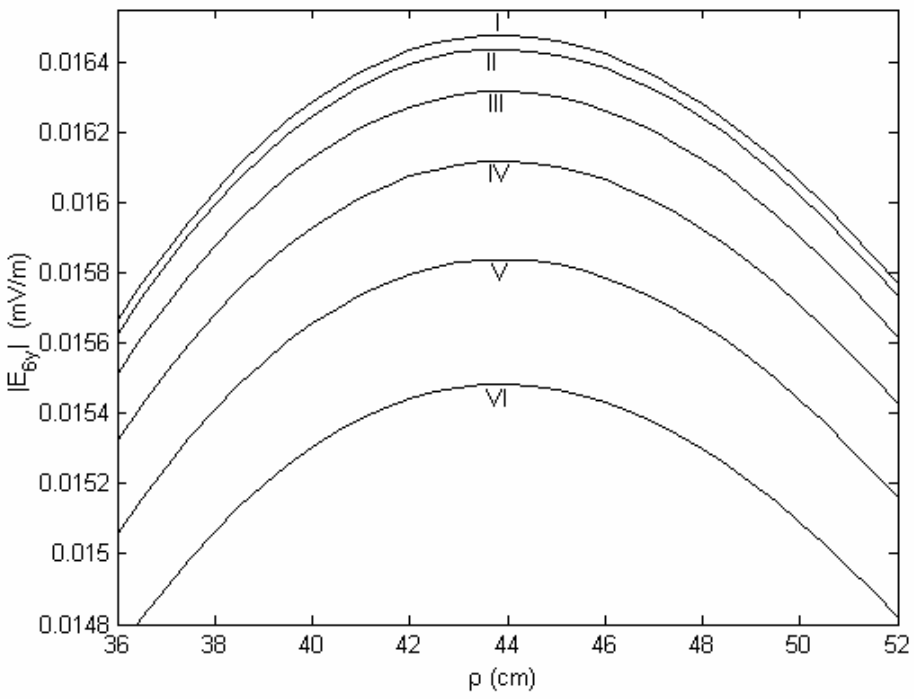
Şekil A.5a- Nemli toprakta f=100 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



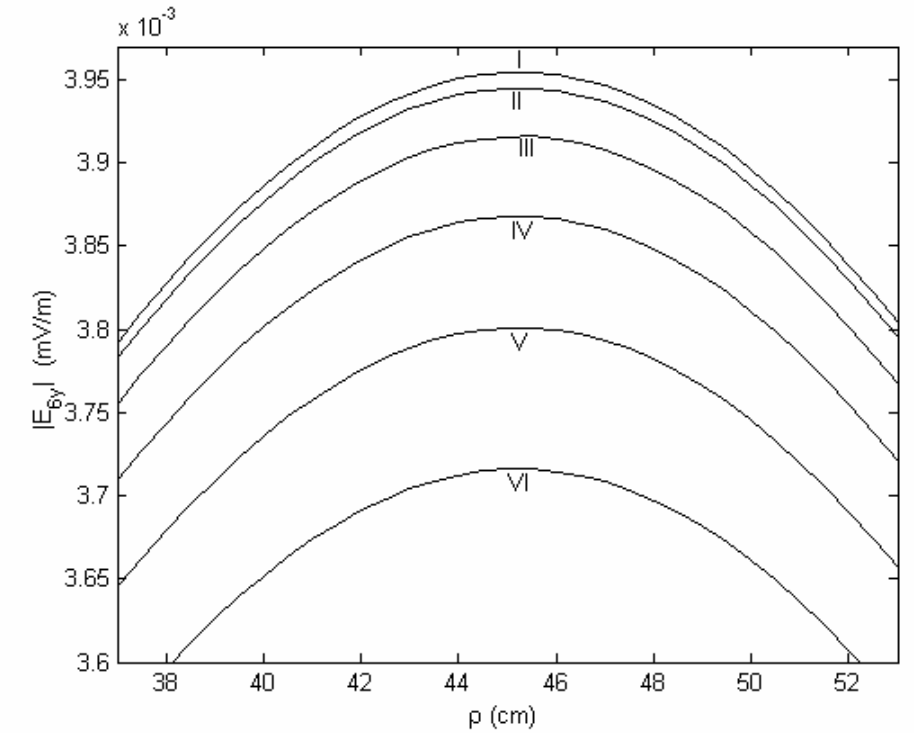
A.5b- Nemli toprakta f=100 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



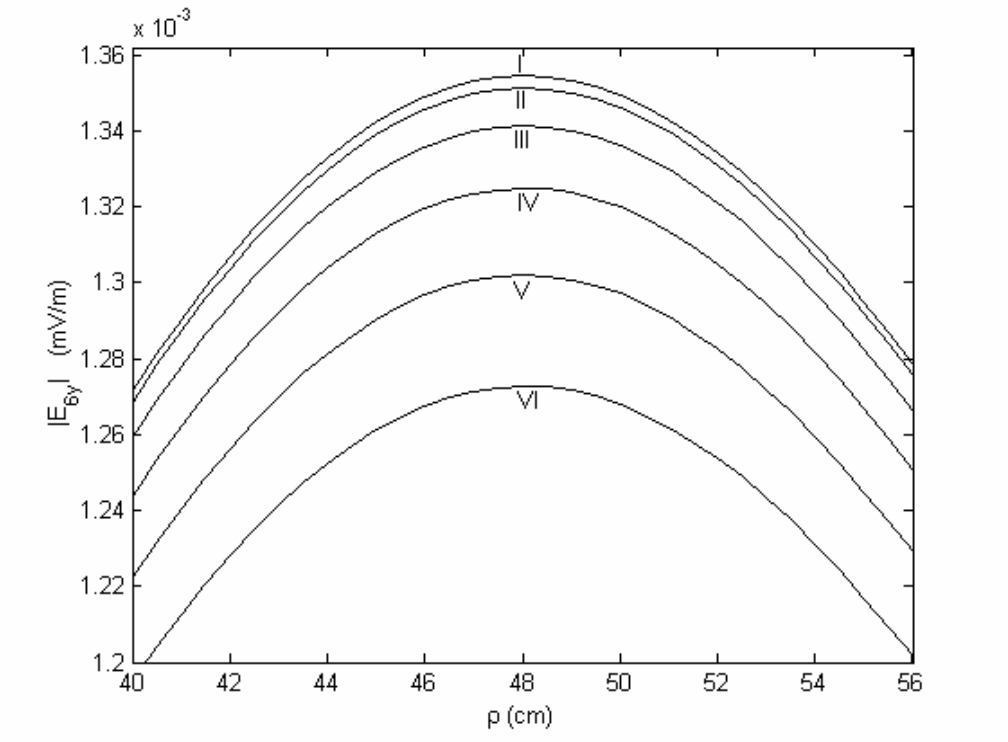
Şekil A.5c- Nemli toprakta f=100 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



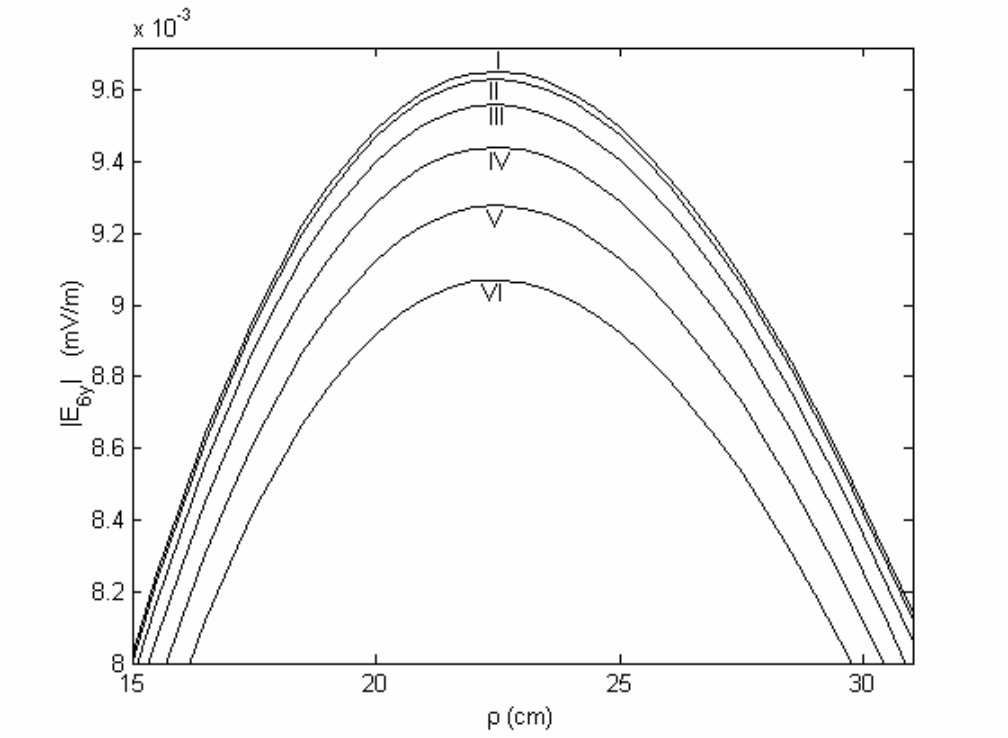
Şekil A.5d- Nemli toprakta f=170 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



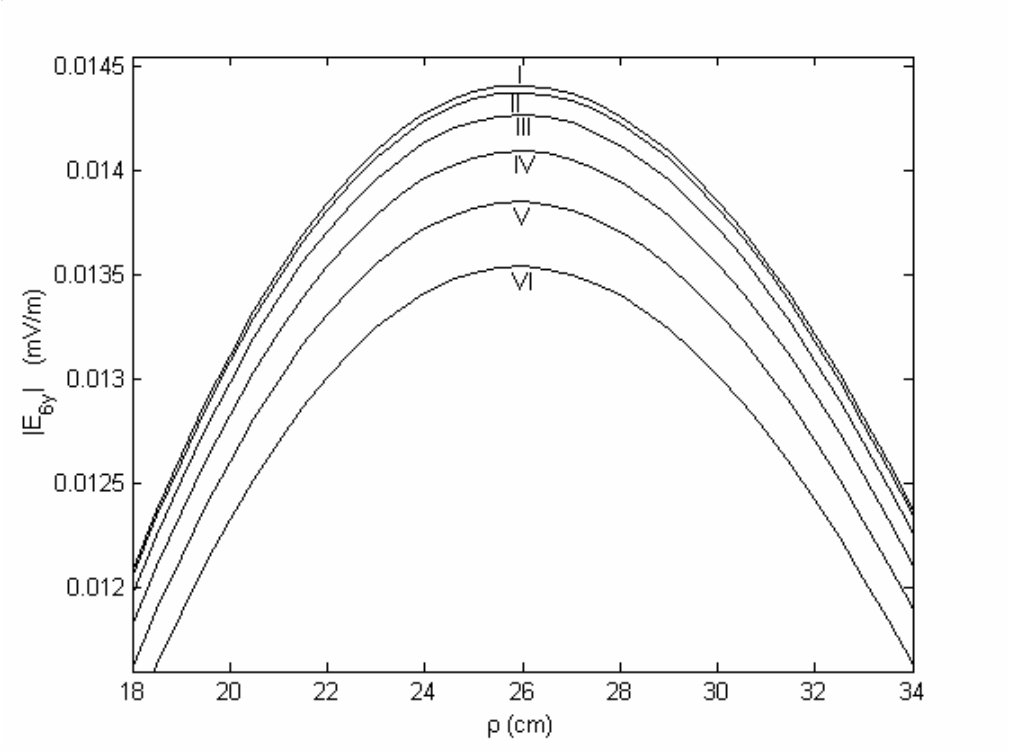
Şekil A.5e- Nemli toprakta f=170 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



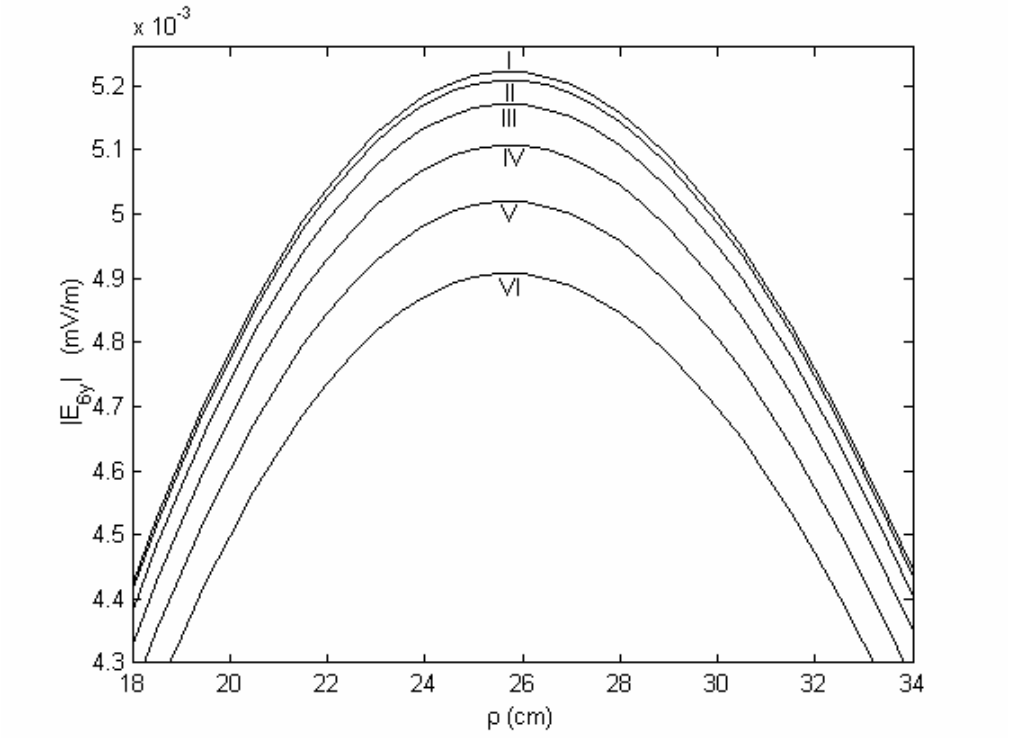
Şekil A.5f- Nemli toprakta f=170 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o, 135^o \pm 2^o, 225^o \pm 2^o, 315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



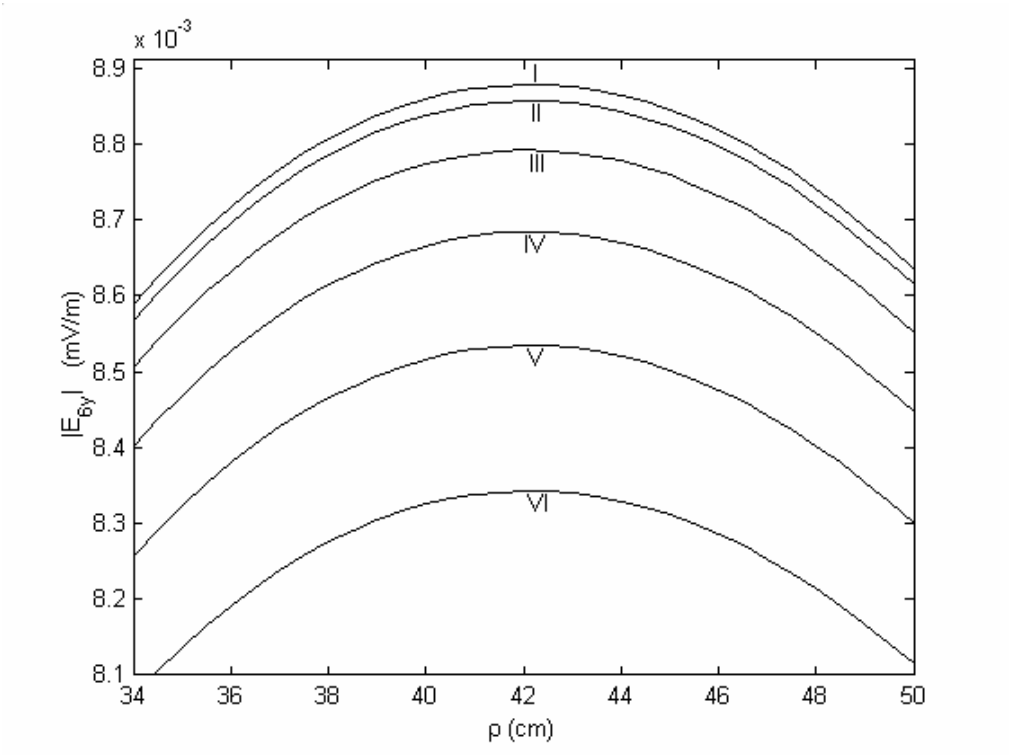
Şekil A.5g- Nemli toprakta f=1 GHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o, 135^o \pm 2^o, 225^o \pm 2^o, 315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



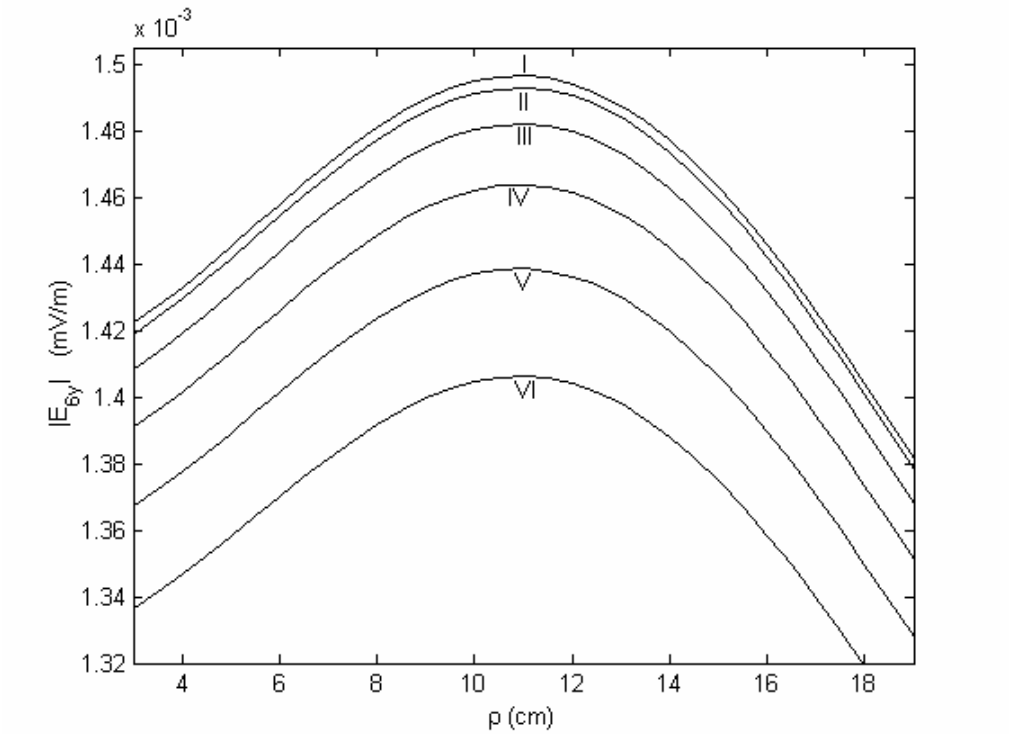
Şekil A.5h- Nemli toprakta f=1 GHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o, 135^o \pm 2^o, 225^o \pm 2^o, 315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



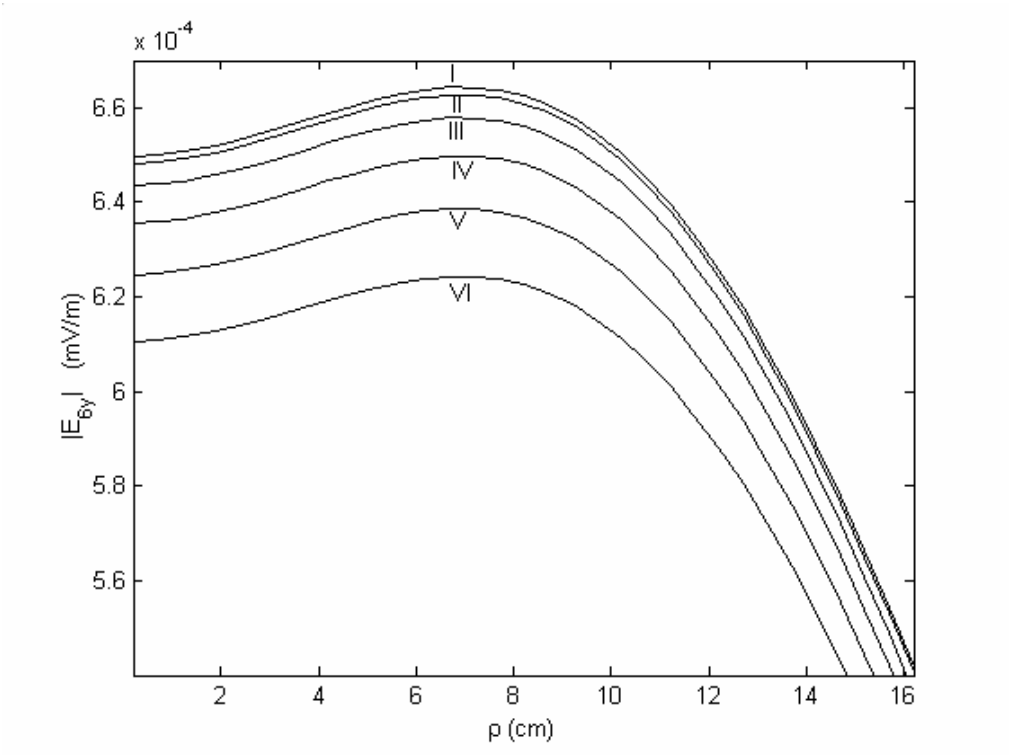
Şekil A.5i- Nemli toprakta f=1 GHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ = sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o, 135^o, 225^o, 315^o$, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o, 135^o \pm 2^o, 225^o \pm 2^o, 315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



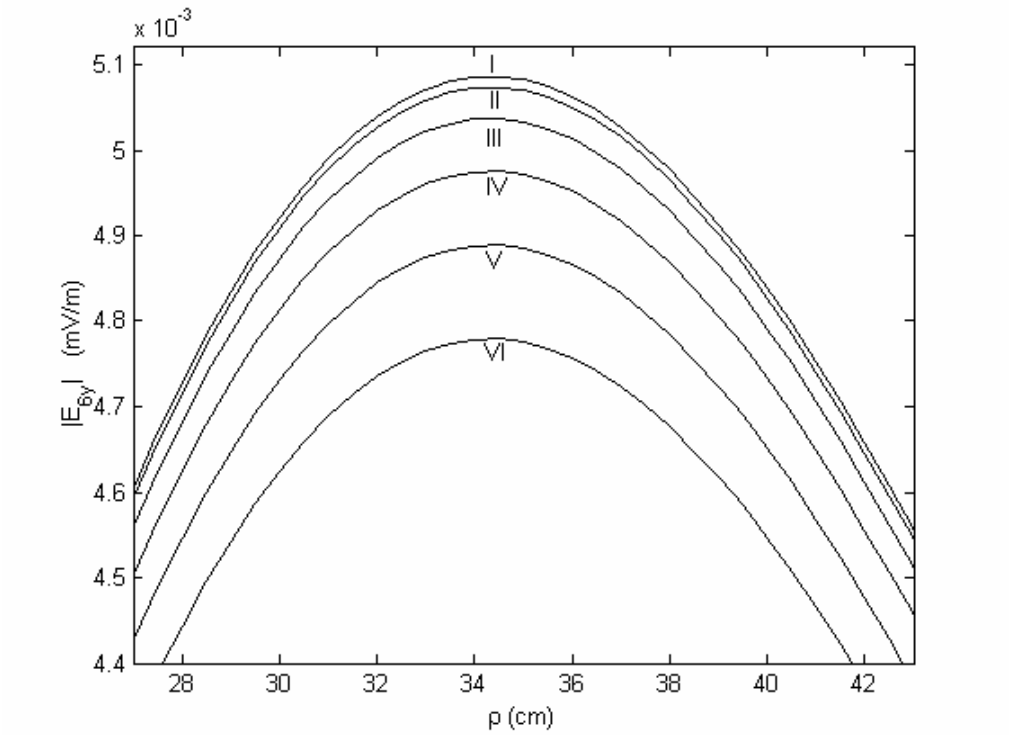
Şekil A.6a- Çamurda f=100 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



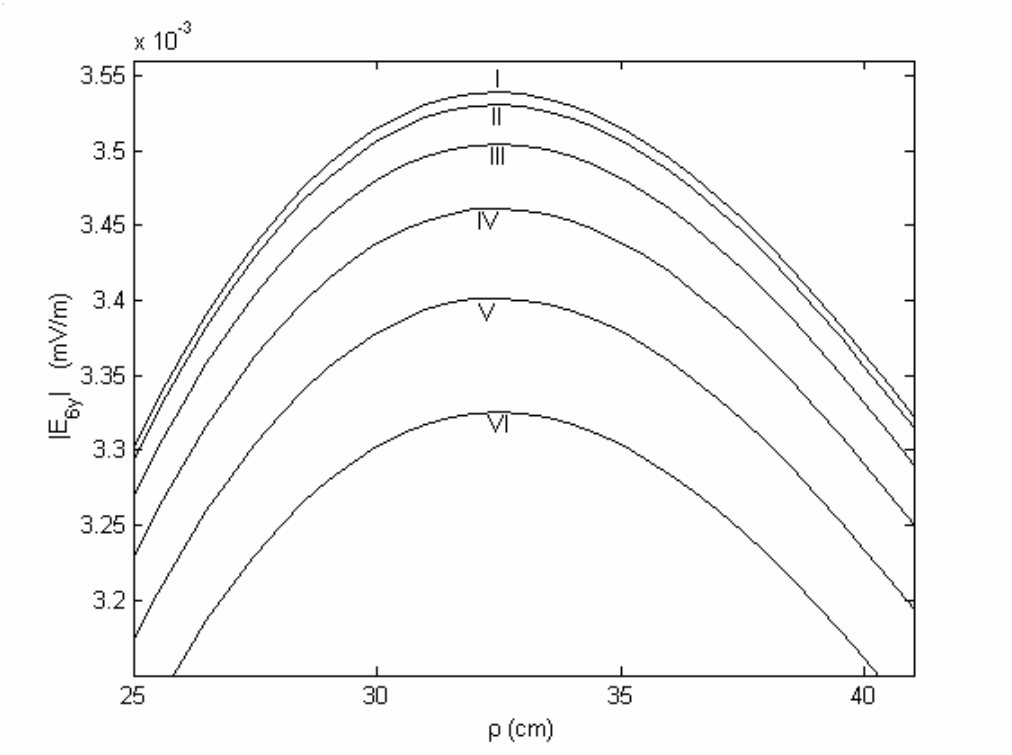
Şekil A.6b- Çamurda f=100 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



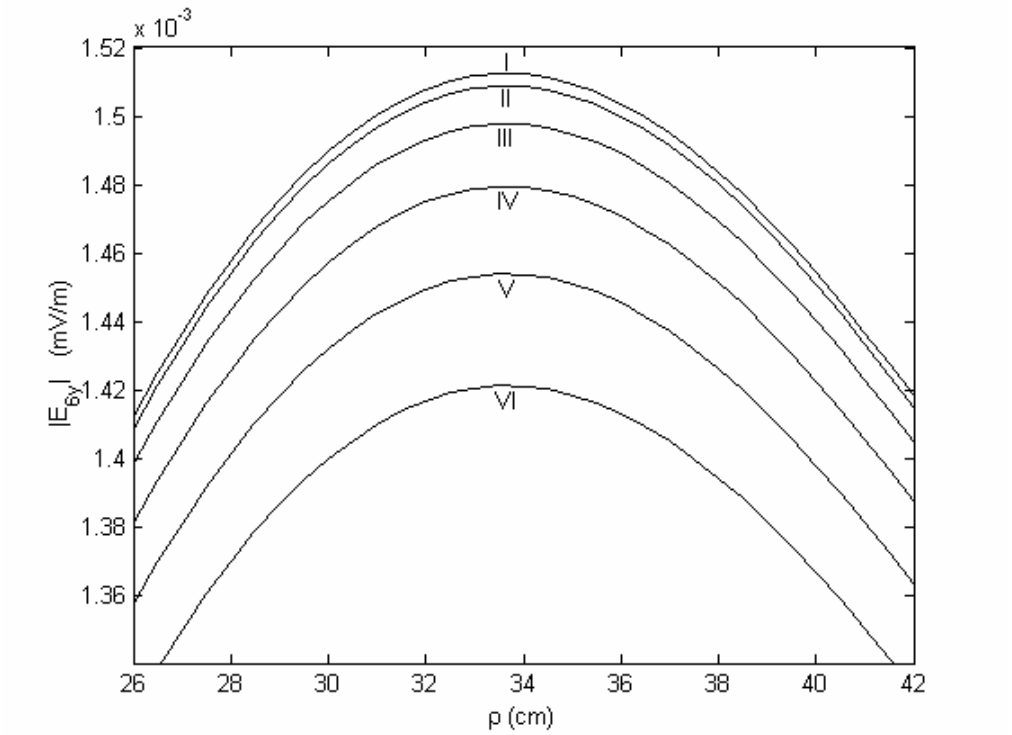
Şekil A.6c- Çamurda f=100 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



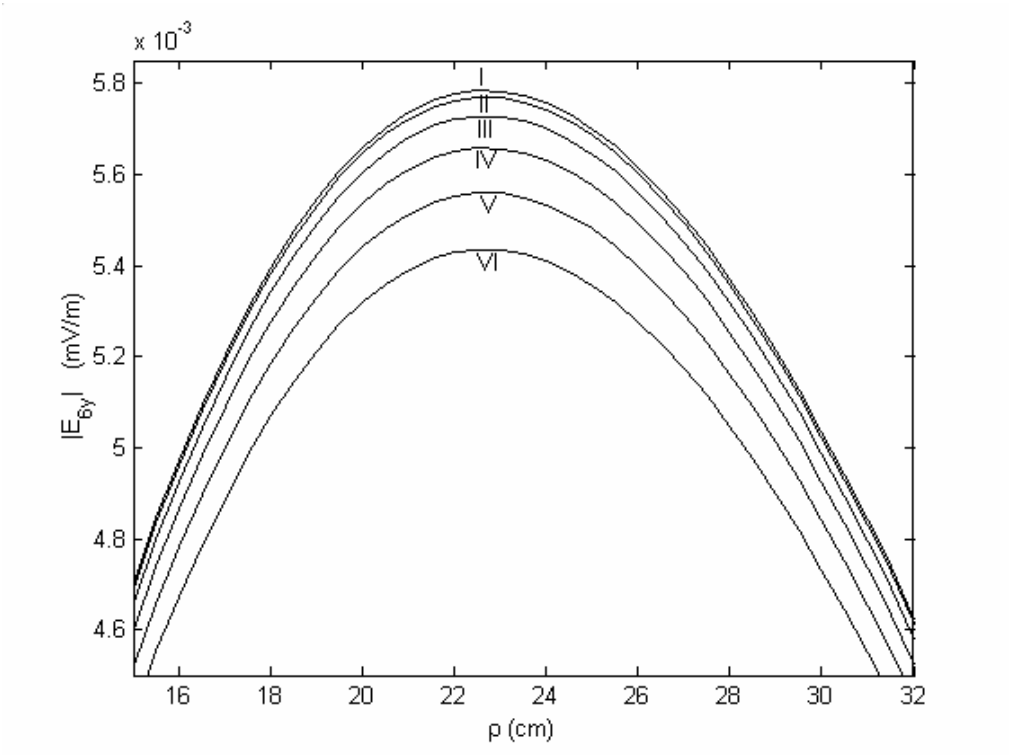
Şekil A.6d- Çamurda f=170 MHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



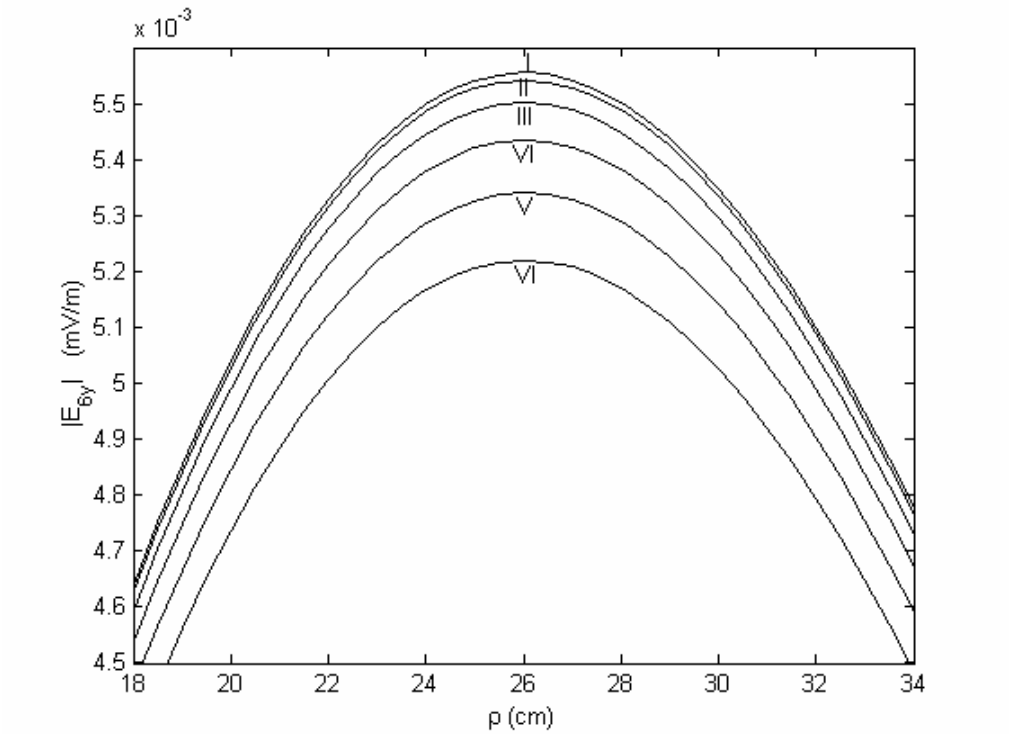
Şekil A.6e- Çamurda f=170 MHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



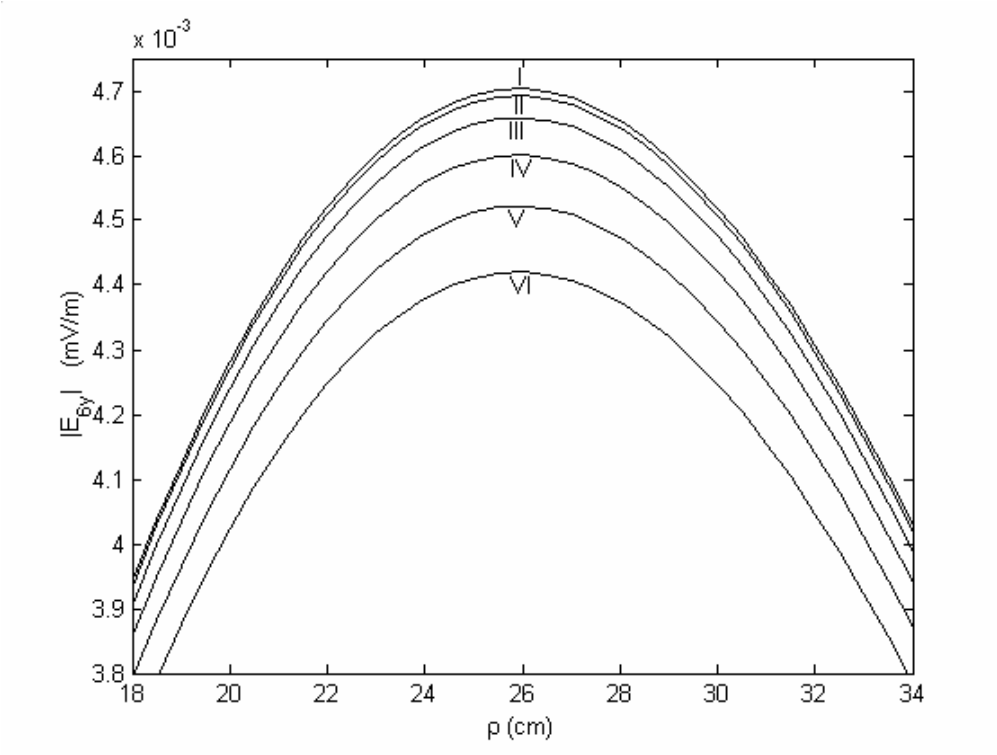
Şekil A.6f- Çamurda f=170 MHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



Şekil A.6g- Çamurda f=1 GHz, a=15 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



Şekil A.6h- Çamurda f=1 GHz, a=7 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)



Şekil A.6i- Çamurda f=1 GHz, a=5 cm için, Δz=20 cm düzleminde $|E_y|$'nin ρ ile değişimi. Her bir eğri ϕ=sabit düzlemi içindir. ($\phi_I = 45^o$, 135^o, 225^o, 315^o, $\phi_{II} = 45^o \pm 2^o$, $135^o \pm 2^o$, $225^o \pm 2^o$, $315^o \pm 2^o$, $\phi_{III} = 45^o \pm 4^o$, $\phi_{IV} = 45^o \pm 6^o$, $\phi_V = 45^o \pm 8^o$, $\phi_{VI} = 45^o \pm 10^o$)

EK B: Tezde Kullanılan Bazı Özdeşlikler ve Formüller:

B.1 Koordinat Dönüşüm Formülleri:

Küresel bileşenlerden silindirik bileşenlere geçiş matrisi, $\vec{B} = \vec{E}$ veya $\vec{H}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\phi \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Silindirik bileşenlerden kartezyen bileşenlere geçiş matrisi ise,

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

B.2 Silindirik Fonksiyonlara ait Özdeşlikler:

$B_m(t)$ birinci veya ikinci nevi Bessel veya Hankel fonksiyonlarından birini göstermek üzere, (Abramowitz ve Stegun, 1965)

$$B_{m-1}(t) = \frac{m}{t} B_m(t) + \frac{\partial}{\partial t} B_m(t) \tag{B.3a}$$

$$B_{m+1}(t) = \frac{m}{t} B_m(t) - \frac{\partial}{\partial t} B_m(t) \tag{B.3b}$$

$$J_m(-\tau) = (-1)^m J_m(\tau) \tag{B.3c}$$

$$H_m^{(2)}(-\tau) = -(-1)^m H_m^{(1)}(\tau) \tag{B.3d}$$

$$H_m^{(1)}(-\tau) = -(-1)^m H_m^{(2)}(\tau) \tag{B.3e}$$

B.3 Legendre Ploinomlarına ait Özdeşlikler:

$$\cot\theta P_n^m(\cos\theta) = \left[\frac{n(n+1) - m(m-1)}{2m}\right] P_n^{m-1}(\cos\theta) + \frac{1}{2m} P_n^{m+1}(\cos\theta) \tag{B.4a}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[P_n^m(\cos\theta)\right] = \left[\frac{n(n+1) - m(m-1)}{2}\right] P_n^{m-1}(\cos\theta) - \frac{1}{2} P_n^{m+1}(\cos\theta) \tag{B.4b}$$

B.4 Düzlemsel bir Dalganın Küresel Harmoniklerin Toplamı Olarak İfadesi: (Stratton, 1941)

$$e^{ikr\cdot\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) P_n(\cos\theta) \tag{B.5}$$

yazılabilir. Burada a_n katsayısını belirlemek için, denklemin her iki tarafını $P_q(\cos\theta)\sin\theta$ ile çapıp 0'dan π'ye integral alalım,

$$\int_{\theta=0}^{\pi} e^{ikr\cdot\cos\theta} P_q(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) \int_{\theta=0}^{\pi} P_n(\cos\theta) P_q(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

denklemin sol tarafı, küresel bessel fonksiyonunun integral formundadır, yani

$$j_q(kr) = \frac{i^{-q}}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{jkr\cdot\cos\theta} P_q(\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{B.6}$$

ifadesinden $2i^q j_q(kr)$ bulunur. Denklemin sağ tarafı ise,

$$\int_{\theta=0}^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_q^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = q \\ 0, & n \neq q \end{cases} \tag{B.7}$$

denkliğinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) \frac{2}{2n+1}\bigg|_{n=q} = \frac{2}{2q+1} a_q j_q(kr)$$

bulunur. O halde,

$$a_n = i^n(2n+1)$$

olduğundan,

$$e^{ikr\cdot\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\theta) \tag{B.8}$$

elde edilir (Harrington, 1961). Düzlemsel dalga, z eksenine paralel değil de, herhangi bir γ açısı ile gelmiş olsa, (örneğin Şekil 1.3'teki 4 dalgasını ele alalım),

$$\vec{k} = k\sin\alpha\cos\psi\vec{u}_x + k\sin\alpha\sin\psi\vec{u}_y + k\cos\alpha\vec{u}_z$$

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\vec{u}_x + r\sin\theta\sin\phi\vec{u}_y + r\cos\theta\vec{u}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{r} &= kr(\sin\alpha\cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\alpha\sin\psi\sin\theta\sin\phi + \cos\alpha\cos\theta)\\ &= kr(\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\phi) + \cos\alpha\cos\theta) = kr\cos\gamma\end{aligned}$$

Şimdi $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\cos\gamma} = e^{ikr[\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\phi)+\cos\alpha\cos\theta]}$ fonksiyonunun seri açılımını,

$$e^{ikr[\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\phi)+\cos\alpha\cos\theta]} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)j_n(kr)\left[P_n(\cos\theta)P_n(\cos\alpha) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\alpha)\cos m(\psi-\phi)\right] \quad \text{(B.9)}$$

şeklinde yazılır.

B.5 Bazı Küresel Harmonikler İçin Özdeşlikler: (Stratton, 1941)

(B.9) denkleminin her iki tarafını $P_q^{m_1}(\cos\alpha)\cos m_1(\psi-\phi)$ ile çarpıp integre edelim, bu durumda sağ taraf,

$$I_{sağ} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)j_n(kr)\left[P_n(\cos\theta)\int_{\cos\alpha=-1}^{1} P_q^{m_1}(\cos\alpha)P_n(\cos\alpha)d(\cos\alpha)\int_0^{2\pi}\cos m_1(\psi-\phi)d(\psi-\phi) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)\int_{\cos\alpha=-1}^{1} P_q^{m_1}(\cos\alpha)P_n^m(\cos\alpha)d(\cos\alpha)\int_0^{2\pi}\cos m(\psi-\phi)\cos m_1(\psi-\phi)d(\psi-\phi)\right]$$

ψ integrali,

$$\int_{\psi=0}^{2\pi}\cos m(\psi-\phi)\cos m_1(\psi-\phi)d(\psi-\phi) = \begin{cases}\pi, & m = m_1\\ 0, & m \neq m_1\end{cases}$$

şeklinde olup, Legendre polinomlarının ortogonalliğinden de,

$$\int_{\cos\alpha=-1}^{1} P_q^{m_1}(\cos\alpha)P_n^m(\cos\alpha)d(\cos\alpha) = \begin{cases}\dfrac{2}{(2n+1)}\dfrac{(n+m_1)!}{(n-m_1)!}, & n = q\\ 0, & n \neq q\end{cases}$$

olduğundan, I integralinin sağ tarafı için,

$$I_{sağ} = i^q(2q+1)j_q(kr)2\frac{(q-m_1)!}{(q+m_1)!}P_q^{m_1}(\cos\theta)\frac{2}{(2q+1)}\frac{(q+m_1)!}{(q-m_1)!}\pi$$

$$I_{sağ} = 4\pi i^q j_q(kr) P_q^{m_1}(\cos\theta) \tag{B.10}$$

elde edilir. İntegralin sol tarafı ise,

$$I_{sol} = \int_{\cos\alpha=-1}^{1} e^{ikr\cos\alpha\cos\theta}\left[\int_0^{2\pi} e^{ikr\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\phi)}\cos m_1(\psi-\phi)d(\psi-\phi)\right]P_q^{m_1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha)$$

integralin ψ katı, $\cos m_1(\psi-\phi) = \dfrac{e^{im_1(\psi-\phi)} + e^{-im_1(\psi-\phi)}}{2}$ yazılıp düzenlendikten sonra,

$$I_\psi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{ikr\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\phi)} e^{im_1(\psi-\phi)} d(\psi-\phi) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{ikr\sin\alpha\sin\theta\cos(\psi-\phi)} e^{-im_1(\psi-\phi)} d(\psi-\phi)$$

$$= \pi\left[i^{m_1} J_{m_1}(kr\sin\alpha\sin\theta) + i^{-m_1} J_{-m_1}(kr\sin\alpha\sin\theta)\right]$$

$$= 2\pi i^{m_1} J_{m_1}(kr\sin\alpha\sin\theta)$$

olduğundan,

$$I_{sol} = 2\pi i^{m_1} \int_{\cos\alpha=-1}^{1} e^{ikr\cos\alpha\cos\theta} J_{m_1}(kr\sin\alpha\sin\theta) P_q^{m_1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \tag{B.11}$$

bulunur. (B.10) ve (B.11)'in eşitliğinden,

$$4\pi i^q j_q(kr) P_q^{m_1}(\cos\theta) = 2\pi i^{m_1} \int_{\cos\alpha=-1}^{1} e^{ikr\cos\alpha\cos\theta} J_{m_1}(kr\sin\alpha\sin\theta) P_q^{m_1}(\cos\alpha)d(\cos\alpha)$$

$$j_n(kr) P_n^m(\cos\theta) = \frac{i^{m-n}}{2} \int_{\cos\alpha=-1}^{1} e^{ikr\cos\alpha\cos\theta} J_m(kr\sin\alpha\sin\theta) P_n^m(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \tag{B.12}$$

özdeşliğini elde ederiz.

B.6 Küresel Hankel Fonksiyonları için İfadeler: (Akkaya, 2002)

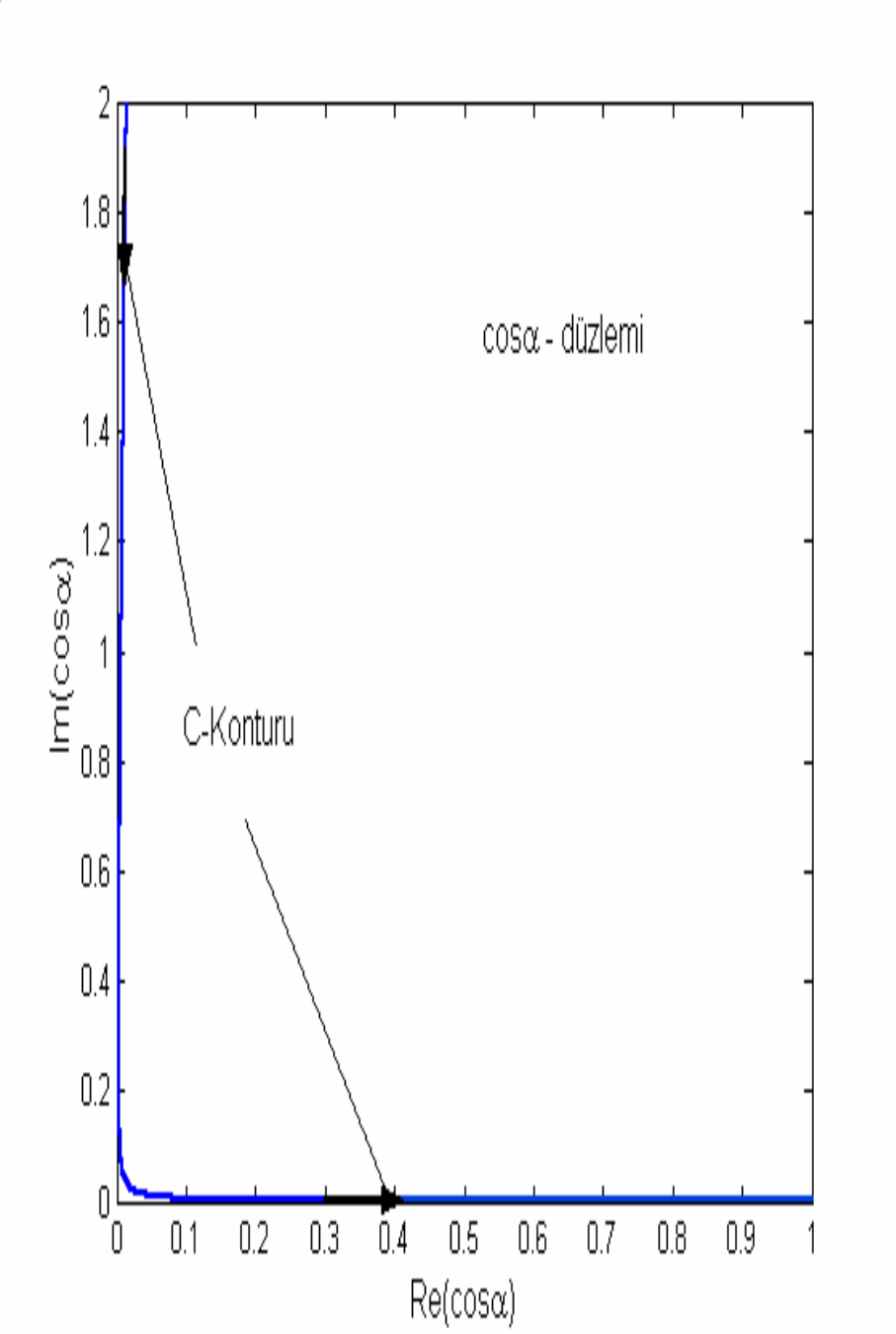
Bessel fonksiyonunun Hankel fonsiyonları cinsinden ifadesi,

$$j_n(kr) = \frac{1}{2}\left[h_n^{(1)}(kr) + h_n^{(2)}(kr)\right] \tag{B.13}$$

(B.12) denkliğinde kullanılırsa,

$$h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\theta) = i^{m-n}\int_C J_m(kr\sin\theta\sin\alpha)e^{ikr\cos\theta\cos\alpha}P_n^m(\cos\alpha)d(\cos\alpha) \qquad \text{(B.14)}$$

Burada k'nın karmaşık bir değere sahip olması nedeni ile, C konturu kompleks $\cos\alpha$ düzleminde konkomitant (concomitant) özelliğe sahip (integrandın her iki limitte yakınsak olması) bir yol olarak seçilmesi gerekir (Stratton, 1941) (Şekil B.1).



Şekil B.1- C intgeral yolunun seçilmesi

EK C: Bazı İntegraller ile Bessel Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar:

Bessel fonksiyonunun integral ifadesi,

$$J_{\mp n}(\tau)=\frac{i^{\pm n}}{2\pi}\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}e^{\mp in\varphi}e^{ik_t\rho\cos\varphi}d\varphi \tag{C.1}$$

ile verilmektedir. Bu tanıma göre aşağıdaki integralleri göz önüne alalım;

$$I_0=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}d(\psi-\phi) \tag{C.2}$$

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\sin(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \tag{C.3}$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \tag{C.4}$$

Bu durumda (C.1) ile verilen tanım integrali kullanılarak I_0 integralini, $\tau=k_t\rho$ ve $n=\mp m$ olmak üzere,

$$I_0=\begin{cases}i^{m}J_{m}(k_t\rho), \\ i^{-m}J_{-m}(k_t\rho),\end{cases}=i^{m}J_{m}(k_t\rho),\qquad \mp m\quad için \tag{C.5}$$

bulunur. I_1 integrali için önce $\sin(\psi-\phi)=\dfrac{e^{i(\psi-\phi)}-e^{-i(\psi-\phi)}}{2i}$ eşitliği kullanılması halinde,

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\frac{e^{i(\psi-\phi)}-e^{-i(\psi-\phi)}}{2i}d(\psi-\phi)$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{i[m+1](\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}d(\psi-\phi)-\frac{1}{4\pi i}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi}e^{i[m-1](\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}d(\psi-\phi)$$

yine $\tau=k_t\rho$ ve $n_1=\mp[m+1]$, $n_2=\mp[m-1]$olmak üzere,

$$I_1=\begin{cases}\dfrac{i^{m+1}}{2i}\left[J_{m+1}(k_t\rho)+J_{m-1}(k_t\rho)\right]=mi^{m}\dfrac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho}, & m\quad için \\ \dfrac{1}{2i}\left[i^{-(m+1)}J_{-(m+1)}(k_t\rho)-i^{-(m-1)}J_{-(m-1)}(k_t\rho)\right]=-mi^{m}\dfrac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho}, & -m\quad için\end{cases} \tag{C.6}$$

ve I_2 integrali de benzer şekilde,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} \frac{e^{i(\psi-\phi)} + e^{-i(\psi-\phi)}}{2} d(\psi-\phi)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{i[m+1](\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} d(\psi-\phi) + \frac{1}{4\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{i[m-1](\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} d(\psi-\phi)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$I_2 = \begin{cases} \dfrac{i^{m+1}}{2}\left[J_{m+1}(k_t\rho) - J_{m-1}(k_t\rho)\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[i^{m+1} J_{m+1}(k_t\rho) + i^{m-1} J_{m-1}(k_t\rho)\right] \end{cases} = -i^{m+1} \frac{d\left[J_m(k_t\rho)\right]}{d(k_t\rho)} \qquad \mp m \quad için \qquad \text{(C.7)}$$

bulunur. Bu integral ifadelerini hesaplarken,

$$J_m(-\tau) = (-1)^m J_m(\tau) \qquad \text{(C.8a)}$$

$$J_{m+1}(k_t\rho) - J_{m-1}(k_t\rho) = -2\frac{d}{d(k_t\rho)}\left[J_m(k_t\rho)\right] \qquad \text{(C.8b)}$$

$$J_{m+1}(k_t\rho) + J_{m-1}(k_t\rho) = \frac{2m}{k_t\rho} J_m(k_t\rho) \qquad \text{(C.8c)}$$

bağıntıları da kullanıldı. Şimdi de , (C.5), (C.6) ve (C.7)' denklemlerini kullanarak, Bessel fonksiyonlarının ve türevlerinin integral ifadelerini açık bir şekilde yazalım:

$$i^m J_m(k_t\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{\mp im(\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} d(\psi-\phi) \qquad \text{(C.9a)}$$

$$mi^m \frac{J_m(k_t\rho)}{k_t\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} \sin(\psi-\phi) d(\psi-\phi) \qquad \text{(C.9b)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} \sin(\psi-\phi) d(\psi-\phi) \qquad \text{(C.9c)}$$

$$i^m \frac{d\left[J_m(k_t\rho)\right]}{d(k_t\rho)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{\mp im(\psi-\phi)} e^{ik_t \rho \cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi) d(\psi-\phi) \qquad \text{(C.9d)}$$

Aşağıda bazı integrallerin Bessel fonksiyonları cinsinden ifadeleri hesaplanmıştır:

$$\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\,d(\psi-\phi) = \frac{e^{im\phi}}{2}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\,d(\psi-\phi)$$
$$+\frac{e^{-im\phi}}{2}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\,d(\psi-\phi)$$
$$= 2\pi\left[\frac{e^{im\phi}}{2}I_0^+ + \frac{e^{-im\phi}}{2}I_0^-\right] \qquad \text{(C.10a)}$$
$$= 2\pi i^m J_m(k_t\rho)\left[\frac{e^{im\phi}}{2}+\frac{e^{-im\phi}}{2}\right]$$
$$= 2\pi i^m J_m(k_t\rho)\cos m\phi$$

$$\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\,d(\psi-\phi) = \frac{e^{im\phi}}{2i}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\,d(\psi-\phi)$$
$$-\frac{e^{-im\phi}}{2i}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\,d(\psi-\phi)$$
$$= 2\pi\left[\frac{e^{im\phi}}{2i}I_0^+ - \frac{e^{-im\phi}}{2i}I_0^-\right] \qquad \text{(C.10b)}$$
$$= 2\pi i^m J_m(k_t\rho)\left[\frac{e^{im\phi}}{2i}-\frac{e^{-im\phi}}{2i}\right]$$
$$= 2\pi i^m J_m(k_t\rho)\sin m\phi$$

$$\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\sin(\psi-\phi)\,d(\psi-\phi)$$
$$= \frac{e^{im\phi}}{2}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\sin(\psi-\phi)\,d(\psi-\phi)$$
$$+\frac{e^{-im\phi}}{2}\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)}e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)}\sin(\psi-\phi)\,d(\psi-\phi) \qquad \text{(C.10c)}$$
$$= 2\pi\left[\frac{e^{im\phi}}{2}I_1^+ + \frac{e^{-im\phi}}{2}I_1^-\right]$$
$$= 2\pi m i^m \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\left[\frac{e^{im\phi}}{2}-\frac{e^{-im\phi}}{2}\right]$$
$$= 2\pi(im)i^m\frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\sin m\phi$$

$$\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \cos m\psi e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{im\phi}}{2} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \\
&+ \frac{e^{-im\phi}}{2} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \\
&= 2\pi\left[\frac{e^{im\phi}}{2} I_2^+ + \frac{e^{-im\phi}}{2} I_2^-\right] \\
&= -2\pi i^{m+1} \frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\left[\frac{e^{im\phi}}{2} + \frac{e^{-im\phi}}{2}\right] \\
&= 2\pi i^{m-1} \frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)} \cos m\phi
\end{aligned} \tag{C.10d}$$

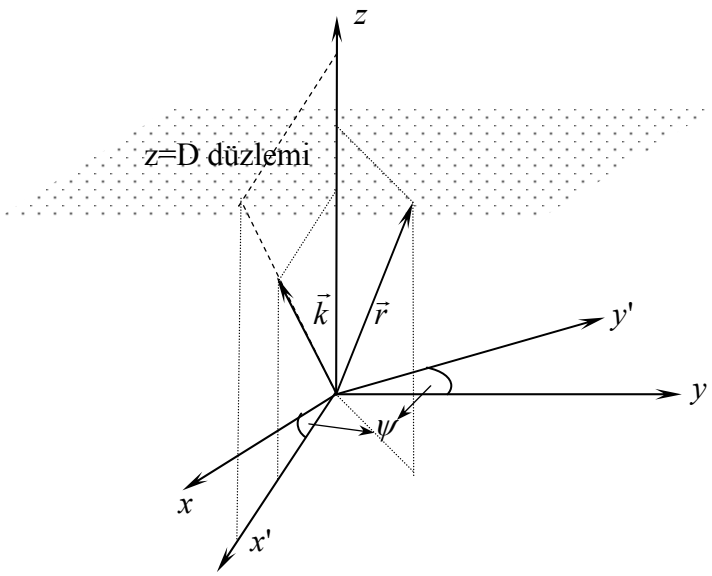
$$\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{im\phi}}{2i} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \\
&- \frac{e^{-im\phi}}{2i} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \cos(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \\
&= 2\pi\left[\frac{e^{im\phi}}{2i} I_2^+ - \frac{e^{-im\phi}}{2i} I_2^-\right] \\
&= -2\pi i^{m+1} \frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)}\left[\frac{e^{im\phi}}{2i} - \frac{e^{-im\phi}}{2i}\right] \\
&= 2\pi i^{m-1} \frac{dJ_m(k_t\rho)}{d(k_t\rho)} \sin m\phi
\end{aligned} \tag{C.10e}$$

$$\int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} \sin m\psi e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \sin(\psi-\phi)d(\psi-\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{im\phi}}{2i} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \sin(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \\
&- \frac{e^{-im\phi}}{2i} \int_{\psi-\phi=-\pi}^{\pi} e^{-im(\psi-\phi)} e^{ik_t\rho\cos(\psi-\phi)} \sin(\psi-\phi)d(\psi-\phi) \\
&= 2\pi\left[\frac{e^{im\phi}}{2i} I_1^+ - \frac{e^{-im\phi}}{2i} I_1^-\right] \\
&= 2\pi m i^m \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)}\left[\frac{e^{im\phi}}{2i} + \frac{e^{-im\phi}}{2i}\right] \\
&= 2\pi m i^{m-1} \frac{J_m(k_t\rho)}{(k_t\rho)} \cos m\phi
\end{aligned} \tag{C.10f}$$

EK D: Düzlemsel Dalgaların Yansıma ve Kırılması



Şekil D.1- xy düzleminin $x'y'$ düzlemine dönüştürülmesi

4 no'lu dalgaya ait elektrik alan ifadelerinde iki elemansel düzlemsel dalga karşımıza çıktı. Bu dalgaların z=D düzleminden yansıması ve kırılmasını inceleyelim; önce gelen dalganın elektrik alanı,

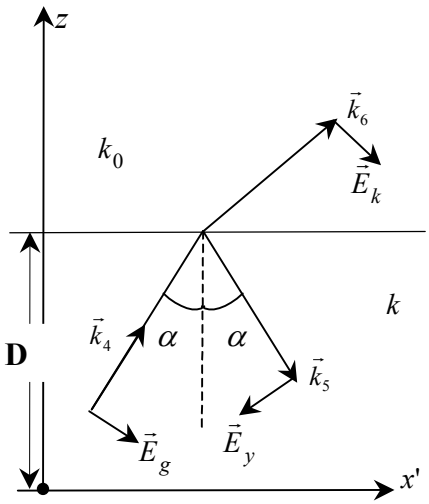
$$\vec{E}_g = e_{0g}(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z)e^{i(k_t x' + k_z z)} \tag{D.1}$$

ve Maxwell-Faraday denkleminden de magnetik alanı,

$$\vec{H}_g = \frac{\nabla \times \vec{E}_g}{i\omega\mu_0} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 & -\frac{k_t}{k_z} \end{vmatrix} \cdot e_{0g}e^{ik_z z}e^{ik_t x'} \tag{D.2a}$$

$$= -\frac{\vec{u}_{y'}}{i\omega\mu_0}(-\frac{k_t}{k_z}ik_t - ik_z)e_{0g}e^{ik_z z}e^{ik_t x'} = e_{0g}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\frac{k}{k_z}\cdot\vec{u}_{y'}e^{ik_z z}e^{ik_t x'} \tag{D.2b}$$

olarak ifade edelim. Yansıyan dalganın alan ifadelerini Şekil D.2 yardımıyla yazalım:



Şekil D.2 Yansıyan ve kırılan dalgalar ($\vec{H}$ sınır düzlemine paralel)

$$\vec{E}_y = -e_{0y}(\vec{u}_{x'} + \frac{k_t}{k_z}\vec{u}_z)e^{i(k_t x' - k_z z)} \tag{D.3}$$

$$\vec{H}_y = \frac{\nabla \times \vec{E}_y}{i\omega\mu_0} = \frac{-1}{i\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 & \frac{k_t}{k_z} \end{vmatrix} \cdot e_{0y}e^{-ik_z z}e^{ik_t x'} \tag{D.4a}$$

$$= \frac{\vec{u}_{y'}}{i\omega\mu_0}(\frac{k_t}{k_z}ik_t + ik_z)e_{0y}e^{-ik_z z}e^{ik_t x'} = e_{0y}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\frac{k}{k_z}\cdot\vec{u}_{y'}e^{-ik_z z}e^{ik_t x'} \tag{D.4b}$$

ve kırılan dalganın alan ifadeleri

$$\vec{E}_k = e_{0k}(\vec{u}_{x'} - \frac{k_t}{k_{0z}}\vec{u}_z)e^{i(k_t x' + k_{0z} z)} \tag{D.5}$$

$$\vec{H}_k = \frac{\nabla \times \vec{E}_k}{i\omega\mu_0} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 & -\frac{k_t}{k_{0z}} \end{vmatrix} \cdot e_{0k}e^{ik_{0z} z}e^{ik_t x'} \tag{D.6a}$$

$$= -\frac{\vec{u}_{y'}}{i\omega\mu_0}(-\frac{k_t}{k_{0z}}ik_t - ik_{0z})e_{0k}e^{ik_{0z} z}e^{ik_t x'} = e_{0k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{k_0}{k_{0z}}\cdot\vec{u}_{y'}e^{ik_{0z} z}e^{ik_t x'} \tag{D.6b}$$

olur. z=D düzlemindeki sınır koşullarından, $k_{0z} = k_0\sqrt{1 - \hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha}$, $k_z = k\cos\alpha$ ve $k_t = k\sin\alpha$ olmak üzere,

$$e_{0k}e^{ik_0(\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D} = e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} - e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D} \tag{D.7a}$$

$$\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,\frac{k_0}{k_{0z}}\cdot e_{0k}e^{ik_0(\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D} = \sqrt{\hat{\varepsilon}/\mu_0}\,\frac{k}{k_z}\cdot e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} + \sqrt{\hat{\varepsilon}/\mu_0}\,\frac{k}{k_z}\cdot e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D} \tag{D.7b}$$

yazılabilir. (D.7a) denklemi ile (D.7b) denklemi taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} - e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D}}{e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} + e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D}}$$

$$R_1(\alpha) = \frac{e_{0y}}{e_{0g}} = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}e^{i(k\cos\alpha)2D} \tag{D.8}$$

bulunur. (D.8) denkleminden e_{0y} çekilip (D.7a) denkleminde yazılırsa,

$$e_{0k}e^{ik_0(\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D} = e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D}\left(1 + \frac{\cos\alpha - \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}\right)$$

$$T_1(\alpha) = \frac{e_{0k}}{e_{0g}} = \left[\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2\sin^2\alpha}}\right]e^{ik_0(\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha - \sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r\sin^2\alpha})D} \tag{D.9}$$

elde edilir.

Şimdi ikinci elemansel düzlemsel dalganın alan ifadelerini yazalım:

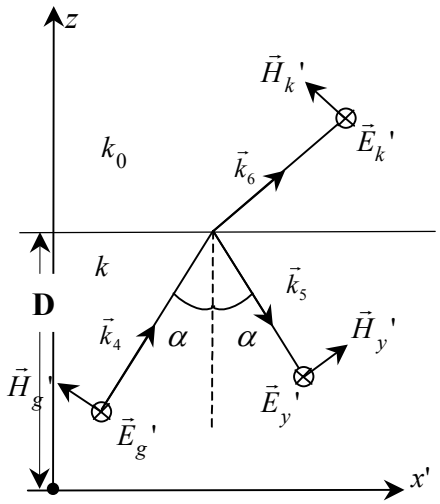
$$\vec{E}_g{}' = e_{0g}\vec{u}_{y'}e^{i(k_t x' + k_z z)} \tag{D.10}$$

$$\vec{H}_g{}' = \frac{1}{i\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_z\\ ik_t & 0 & ik_z\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\cdot e_{0g}e^{ik_z z}e^{ik_t x'} = -e_{0g}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\,\frac{1}{k}(k_z\vec{u}_{x'} - k_t\vec{u}_z)e^{i(k_t x' + k_z z)} \tag{D.11}$$

Yansıyan dalganın alan ifadelerini Şekil D.3 yardımıyla yazalım:

$$\vec{E}_y{}' = e_{0y}\vec{u}_{y'}e^{i(k_t x' - k_z z)} \tag{D.12}$$

$$\vec{H}_y{}' = \frac{1}{i\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_z\\ ik_t & 0 & -ik_z\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}\cdot e_{0y}e^{-ik_z z}e^{ik_t x'} = e_{0y}\sqrt{\frac{\hat{\varepsilon}}{\mu_0}}\,\frac{1}{k}(k_z\vec{u}_{x'} + k_t\vec{u}_z)e^{i(k_t x' - k_z z)} \tag{D.13}$$



Şekil D.3 Yansıyan ve kırılan dalgalar ($\vec{E}$ sınır düzlemine paralel)

ve kırılan dalganın alan ifadeleri

$$\vec{E}_k' = e_{0k}\vec{u}_{y'}e^{i(k_t x' + k_{0z} z)} \tag{D.14}$$

$$\vec{H}_k' = \frac{1}{i\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_z \\ ik_t & 0 & ik_{0z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot e_{0k}e^{ik_{0z}z}e^{ik_t x'} = -e_{0k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{k_0}(k_{0z}\vec{u}_{x'} - k_t\vec{u}_z)e^{i(k_t x' + k_{0z} z)} \tag{D.15}$$

olur. Yine z=D düzlemindeki sınır koşullarından, $k_{0z} = k_0\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha}$, $k_z = k\cos\alpha$ ve $k_t = k\sin\alpha$ olmak üzere

$$e_{0k}e^{ik_0(\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha})D} = e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} + e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D} \tag{D.16a}$$

$$-\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\frac{k_{0z}}{k_0}\cdot e_{0k}e^{ik_0(\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha})D} = -\sqrt{\hat{\varepsilon}/\mu_0}\frac{k_z}{k}\cdot e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} + \sqrt{\hat{\varepsilon}/\mu_0}\frac{k_z}{k}\cdot e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D} \tag{D.16b}$$

yazılabilir. (D.16a) denklemi ile (D.16b) denklemi taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}}\dfrac{k_z}{k}}{\sqrt{\varepsilon_0}\dfrac{k_{0z}}{k_0}} = \frac{e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} + e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D}}{(e_{0g}e^{i(k\cos\alpha)D} - e_{0y}e^{-i(k\cos\alpha)D})}$$

$$R_2 = \frac{e_{0y}}{e_{0g}} = \frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha - \sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha}}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha + \sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha}} e^{i(k\cos\alpha)2D} \tag{D.17}$$

bulunur. (D.17) denkleminden e_{0y} çekilip (D.16a) denkleminde yazılırsa,

$$e_{0k} e^{ik_0(\sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha})D} = e_{0g} e^{i(k\cos\alpha)D} \left(1 + \frac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha - \sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha}}{\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha + \sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha}}\right)$$

$$T_2(\alpha) = \frac{e_{0k}}{e_{0g}} = \left[\frac{2\hat{\varepsilon}_r \cos\alpha}{\hat{\varepsilon}_r \cos\alpha + \sqrt{\hat{\varepsilon}_r - \hat{\varepsilon}_r{}^2 \sin^2\alpha}}\right] e^{ik_0(\sqrt{\hat{\varepsilon}_r}\cos\alpha - \sqrt{1-\hat{\varepsilon}_r \sin^2\alpha})D} \tag{D.18}$$

bulunur.

Dikkat edilecek bir nokta (D.8) ile (D.9)'de bulunan R_1 ile T_1 katsayıları ve (D.17) ile (D.18)'te elde etiğimiz R_2 ile T_2 katsayıları sadece α'nın birer fonksiyonlarıdır.

EK-E: Tezde Kullanılan Vektör Potansiyellerin Tanımı (Harrington, 1961):

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$$

Her iki tarafın diverjansı alınırsa,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0 = i\omega\mu(\nabla \cdot \vec{H})$$

ya da, $\nabla \cdot \vec{H} = 0$

Bu durumda $\vec{H}$ alanı bir vektör fonksiyon olan $\vec{A}$'dan (magnetik vektör potansiyel) türetilebilir. Yani,

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

Benzer şekilde,

$$\nabla \times \vec{H}' = -i\omega\varepsilon\vec{E}'$$

Her iki tarafın diverjansı alınırsa,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}') = 0 = -i\omega\varepsilon(\nabla \cdot \vec{E}')$$

ya da, $\nabla \cdot \vec{E}' = 0$

Bu durumda $\vec{E}'$ alanı bir vektör fonksiyon olan $\vec{F}$'den (elektrik vektör potansiyel) türetilebilir. Yani,

$$\vec{E}' = -\nabla \times \vec{F}$$

$\vec{A} = A_r\vec{u}_r$ ve $\vec{F} = F_r\vec{u}_r$ olmak üzere bir vektör alan TM^r ve TE^r modlarının süperpozisyonu olarak ifade edilebilir. Buna göre,

$$E_{rtop} = \frac{1}{-i\omega\hat{\varepsilon}}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)A_r$$

$$E_{\theta top} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} + \frac{1}{-i\omega\hat{\varepsilon}r}\frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta}$$

$$E_{\phi top} = \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{-i\omega\hat{\varepsilon}r\sin\theta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi}$$

$$H_{rtop} = \frac{1}{-i\omega\mu_0}(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2)F_r$$

$$H_{\theta top} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{1}{-i\omega\mu_0 r}\frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta}$$

$$H_{\phi top} = -\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{-i\omega\mu_0 r\sin\theta}\frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi}$$

olur.

ÖZGEÇMİŞ

Bayram Esen, Midyat/Mardin'de doğduğunda tarih 1 Ocak 1966'yı gösteriyordu. Lise öğrenimini tamamlayıncaya kadar Midyat'ta kaldı. 1985 yılında Bursa'da üniversite hayatına başladı. Uludağ Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme mühendisliği bölümünden Eylül 1989'da mezun oldu. Aynı bölümde, 1990 yılında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1992'de bu bölümde yüksek lisansını tamamladı. Aynı yıl, Dünya Bankasının, yüksek okulların öğretim elemanı ihtiyacını karşılamak için desteklediği proje çerçevesinde Kocaeli Üniversitesi Meslek Yüksekokuluna öğretim görevlisi olarak geçti. 1994'te YÖK bursu ile, Celal Bayar Üniversitesi adına, Texas Tech Üniversitesinde ikinci bir yüksek lisansa başladı ve Ağustos 1996'da tamamladı. Doktora öğrenimine Ocak 1997'de Sakarya Üniversitesinde başlamasına rağmen, 35. maddeye göre doktorasına, Eylül ayında, İTÜ'de devam etmek zorunda kaldı. 1994 yılından beri Celal Bayar Üniversitesinde araştırma görevlisi olarak vazifeli olup İTU'de doktora yapmaktadır. Evli ve çok sevdiği üç çocuk babasıdır.