ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

QUASİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bahar AYDEMİR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Bahar AYDEMİR tarafından hazırlanan **"Quasi Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri"** adlı tez çalışması 25.02.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gonca Durmaz GÜNGÖR

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. İshak ALTUN
Matematik Anabilim Dalı
Kırıkkale Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca Durmaz GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ASLANTAŞ
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Quasi Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim
(25.02.2022).

Bahar AYDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

QUASİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bahar AYDEMİR

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gonca Durmaz GÜNGÖR

Çalışılmış olan bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş, Literatür Özeti ve Tartışma-Sonuç bölümleri alışıldığı gibi ilk ve son bölüm olarak verilmiştir. Üçüncü bölümde tez içerisinde kullanılacak metrik uzaylar kavramlarının yanı sıra bu uzaylardaki genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca yine bu uzaylarda bazı önemli sabit nokta teoremlerine de değinilmiştir. Yine bölümde quasi metrik uzaylar kavramına yer verilmiştir. Dördüncü bölüm olan araştırma bulguları bölümünde ise özgün çalışmalar verilmiştir. Bu kısımda, α- geçişli dönüşümler kavramı tanımlanıp bu tip dönüşümlerin quasi metrik uzaylardaki durumları için sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

2022, 45 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta, Quasi metrik uzay, α-Geçişli dönüşüm, θ-Büzülme dönüşümü, θ^*-Büzülme dönüşümü

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SOME FIXED POINT THEOREMS ON QUASI METRIC SPACES

Bahar AYDEMİR

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

This thesis studied consists of five chapters. Introduction, Literature Summary and Discussion-Conclusion sections are given as the first and last sections as usual. In the third chapter, the concepts of metric spaces to be used in the thesis, as well as general definitions and theorems in these spaces are given. In addition, some important fixed point theorems in these spaces are also mentioned. In the chapter again, the concept of quasi metric spaces is given. In the fourth section, the research findings section, original studies are given. In this section, the concept of α-admissible map is defined and fixed point theorems are obtained for the cases of such transformations in quasi metric spaces.

2022, 45 pages

Keywords: Fixed point, Quasi metric space, α-Admissible map, θ-Contraction map, θ^*-Contraction map.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmasında, göstermiş olduğu ilgiden dolayı danışmanım Sayın Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR'e çok değerli katkı ve emekleri için teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca tez çalışması esnasında bana şans getiren canım oğluma ve benim hep yanımda olan canım eşime teşekkür ederim.

Bahar AYDEMİR

Çankırı, Şubat 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
1. GİRİŞ **1**
2. LİTERATÜR ÖZETİ **3**
3. MATERYAL VE METOT **4**
3.1 Metrik Uzaylar **4**
3.2 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri **10**
3.3 Quasi Metrik Kavramlar **16**
4. BULGULAR VE TARTIŞMA **33**
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **42**
KAYNAKLAR **43**
ÖZGEÇMİŞ **45**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar
$\in$	Eleman
$\{x_n\}$	Dizi
(X, d)	Metrik uzay
(X, q)	Quasi metrik uzay

1. GİRİŞ

$T: X \to X$ bir dönüşüm ve X boştan farklı bir küme olsun. $Tx = x$ olacak şekildeki $x \in X$ noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani, dönüşüm altında değişmeyen nokta sabit noktadır.

Matematiğin alt bilim dallarının temel konularından biri olan sabit nokta teorisinin daha çok topoloji ve fonksiyonel analiz alt bilim dallarında kullanımı yaygındır. Bunun en önemli sebeplerinden bir tanesi diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığını, varsa bu çözümlerin kaç tane olduğu dahası bu çözümlerin nasıl bulunabileceğini araştırmasıdır.

1922 yılında Banach tam metrik uzaylarda ilk sabit nokta teoremini büzülme ve büzülme tip dönüşümler için

"(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0, 1)$ var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar."

şeklinde ifade ve ispat etmiştir.

Cauchy dizisi ve metrik uzayın tamlığı tanımları metrik uzaylardaki sabit nokta teori çalışmalarındaki en önemli unsurlardır. Bundan dolayı tam metrik uzayda oluşturulan bir iterasyon dizisinin Cauchy dizisi olması metrik uzaylarda yapılan çalışmalarda temel metot olarak kullanılır.

Duffin ve Karlovitz tarafından 1968 yılında asimetrik uzay olarak da adlandırılabilen quasi metrik uzay tanımını vermiştir. Bu uzayda simetri şartı kaldırılarak şartlar hafifletilmiştir. Değişik topolojik uzaylarda ve bilgisayar teknolojisinde kullanılabilirliğinden dolayı metrik uzaylarda yapılan birçok çalışma quasi metrikte araştırılmaya başlanmıştır.

Bu araştırmalarda ilk olarak Cauchy dizisi ve tamlık tanımları yapılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda quasi metrik uzayda 7 farklı Cauchy dizisi tanımı ve bu uzaydan elde edilen topolojilere bağlı olarak 3 farklı yakınsaklık tanımı elde edilmiştir. Seçilen Cauchy dizisinin türü ve dizinin yakınsaklık çeşidine göre uygun tamlık kullanıldığından quasi metrik uzayda yapılan sabit nokta çalışmaları literatürde önemli bir yer almaktadır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Mahmut K. 'nın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar", Osman Mucuk'un "Topoloji ve Kategori" ile Yüksel S.'nin "Metrik Uzaylar ve Topolojisi" isimli kitapları genel tanım ve teoremler için kullanılmıştır. Tam metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmelerini incelemek için Altun' un "On a general class of weakly Picard operators", Jleli' nin "A new generalization of the Banach contraction principle" ve Liu' nin "Some fixed point theorems corcerning (ψ, ϕ) -type contraction in complete metric spaces" adlı çalışmaları incelenmiştir. α -geçişlilik kavramı ve bu kavram üzerine yapılmış olan çalışmaları incelemek için Ali' nin "Best proximity point for α-ψ-proximal contractive multimaps", Durmaz'ın "Fixed point results for α-ψ-contractive mapping including almost contractions and applications", Kumam'ın "Fixed points for weak α-ψ -contractions in partial metric space" ve Samet'in "Fixed point theorems for α-ψ -contractive type mappings" adlı çalışmalar kullanılmıştır. Ayrıca Durmaz'ın "Fixed point results with θ-function on quasi metric space" adlı konferans sunumu bu tez içerisinde detaylı bir şekilde incelenmiştir. Quasi metrik uzayda sınıflandırmalarını, bunlara dair çeşitli örnekleri ve sabit noktanın varlığını içeren birçok teoremin incelenmesi için Alegre'nin "Fixed point theorem for generalized contractions involving ω-distances on complete quasi-metric spaces", Altun'un "Classification of completeness of quasi metric space and some new fixed point results" Gaba'nın "Startpoints and (α-γ)-contractions in quasi-pseudometric spaces", Künzi'nin "Weighted quasi-metrics", Latif'in "Fixed point results in quasimetric spaces", Marin'in "Weakly contractive multivalued maps and ω-distances on complete quasi-metric spaces". Reilly'nin "Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces" ve Romeguera'nın "Left K-completeness in quasi-metric spaces" adlı çalışmaları göz önünde bulundurulmuştur.

3. MATERYAL VE METOT

Materyal ve yöntem bölümünde, tezin okunulabilirliğine ve anlaşılabilirliğine yardımcı olmak amacıyla literatürdeki bazı temel tanım ve bunların bilinen sonuçları verilip, verilen bu ifadelerin diğer bölümlerde kullanılabilmesi için hatırlatma yapmak amaçlanmıştır.

3.1 Metrik Uzaylar

3.1.1 Tanım $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve X boş olmayan bir küme olsun.

i. Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii. Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,
iii. Her $x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine metrik uzay denir. Bu durumda X in elemanlarına noktalar ve $d(x,y)$ değerine de x noktası ile y noktası arasındaki uzaklık denir.

3.1.1 Örnek d_1 ve d_2 boş olmayan bir X kümesi üzerinde iki metrik olsun. Her $x, y \in X$ için

$$e(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$$

ve

$$p(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

şeklinde tanımlanan e ve p fonksiyonları X üzerinde birer metriktir.

3.1.2 Örnek $\mathfrak{d}$: $J\mathrm{X} \times J\mathrm{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu i ve ii şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$p(\jmath\mathrm{x}, \jmath\mathrm{y}) = \mathfrak{d}(\jmath\mathrm{x}, \jmath\mathrm{y}) + \mathfrak{d}(\jmath\mathrm{y}, \jmath\mathrm{x})$$

Şeklinde tanımlanan p fonksiyonu $J\mathrm{X}$ üzerinde bir metriktir.

3.1.2 Tanım $(J\mathrm{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay, $t \in J\mathrm{X}$ ve $\beta > 0$ bir reel sayı olsun. $B_{(J\mathrm{X},\mathfrak{d})}(\mathfrak{t}, \beta) = \{\jmath\mathrm{x} \in J\mathrm{X}: \mathfrak{d}(\jmath\mathrm{x}, \mathfrak{t}) < \beta\}$ kümesine β-yarıçaplı $\mathfrak{t}$ merkezli açık yuvar, $D_{(J\mathrm{X},\mathfrak{d})}(\mathfrak{t}, \beta) = \{\jmath\mathrm{x} \in J\mathrm{X}: \mathfrak{d}(\jmath\mathrm{x}, \mathfrak{t}) \leq \beta\}$ kümesine β-yarıçaplı $\mathfrak{t}$ merkezli kapalı yuvar ve $S_{(J\mathrm{X},\mathfrak{d})}(\mathfrak{t}, \beta) = \{\jmath\mathrm{x} \in J\mathrm{X}: \mathfrak{d}(\jmath\mathrm{x}, \mathfrak{t}) = \beta\}$ kümesine β-yarıçaplı $\mathfrak{t}$ merkezli yuvar yüzeyi denir.

3.1.3 Tanım $(J\mathrm{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay ve $N \subseteq J\mathrm{X}$ olsun. Her $\jmath\mathrm{x} \in N$ için $B(\jmath\mathrm{x}, \varepsilon) \subseteq N$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa N kümesine $\mathfrak{d}$-açık küme veya kısaca açık küme denir. $J\mathrm{X} \setminus N$ kümesi açıksa N kümesine kapalı küme denir.

3.1.1 Teorem Her $(J\mathrm{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayında her $B(\jmath\mathrm{x}, \varepsilon)$ açık yuvarı açık bir kümedir.

3.1.2 Teorem Her $(J\mathrm{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayında her $D(\jmath\mathrm{x}, \varepsilon)$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.

3.1.4 Tanım $J\mathrm{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere her $f : \mathbb{N} \to J\mathrm{X}$ fonksiyonuna $J\mathrm{X}$ de bir dizi veya terimleri $J\mathrm{X}$ in elemanlarından oluşan bir dizi denir. $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = \jmath\mathrm{x}_n$ ise bu şekilde tanımlanmış dizi çoğunlukla $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ veya $\jmath\mathrm{x}_1, \jmath\mathrm{x}_2, \jmath\mathrm{x}_3, \cdots$ şeklinde gösterilir. $n \in \mathbb{N}$ için $\jmath\mathrm{x}_n$ değerine dizinin n. terimi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\jmath\mathrm{x}_n = \jmath\mathrm{x}$ ise $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ dizisine $\jmath\mathrm{x}$ değerli sabit dizi denir ve genellikle $\{\jmath\mathrm{x}\}$ ile gösterilir.

3.1.5 Tanım $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ elemanları $J\mathrm{X}$ den alınarak oluşturulan bir dizi ve $(J\mathrm{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay olsun.

i. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisine $\mathcal{J}x \in \mathcal{J}X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda $\mathcal{J}x$ e $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisinin limitidir denir. $\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}x_n = \mathcal{J}x$ veya $\mathcal{J}x_n \to \mathcal{J}x$ şeklinde gösterilir.

ii. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x) < \varepsilon$ ve $n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $\mathcal{J}x \in \mathcal{J}X$noktasına $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası denir.

iii. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ olduğunda $\mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

3.1.3 Teorem Herhangi bir $(\mathcal{J}X, \mathcal{d})$ metrik uzayında yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar.

3.1.4 Teorem Herhangi bir $(\mathcal{J}X, \mathcal{d})$ metrik uzayında her yakınsak $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

3.1.1 Sonuç $\mathbb{R}$ standart uzayında her Cauchy dizisi yakınsaktır.

3.1.6 Tanım $(\mathcal{J}X, \mathcal{d})$ bir metrik uzayındaki her Cauchy dizisi $\mathcal{J}X$ uzayının bir noktasına yakınsıyorsa $\mathcal{J}X$ uzayına tam metrik uzay denir. $A \subseteq \mathcal{J}X$ ve $(A, \mathcal{d}_A)$ uzayı tamsa A kümesine $\mathcal{J}X$ in tam alt kümesi denir.

3.1.3 Örnek $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de tam değildir.

$\mathcal{J}x_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için $\mathcal{J}x_{n+1} = \frac{1}{\mathcal{J}x_n} + \frac{\mathcal{J}x_n}{2}$ olmak üzere $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi yani

$$\mathcal{J}x_1 = 1, \mathcal{J}x_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \mathcal{J}x_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}, \mathcal{J}x_4 = \frac{577}{408}, \ldots$$

dizisi verilisin. Bu durumda

$$\mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_m) = |\mathcal{J}x_m - \mathcal{J}x_n| \to 0$$

olup bu dizi rasyonel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisidir. $\{ƛx_n\}$ dizisinin bir ƛx rasyonel sayısına yakınsadığını kabul edelim. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $ƛx_n > 1$ olup $ƛx \geq 1$ dir. Ayrıca $ƛx_{n+1} = \frac{1}{ƛx_n} + \frac{ƛx_n}{2}$ ve

$$\lim_{n\to\infty} ƛx_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{ƛx_n} + \frac{ƛx_n}{2}\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} ƛx_n} + \frac{\lim_{n\to\infty} ƛx_n}{2}$$

olur Buradan

$$ƛx = \frac{1}{ƛx} + \frac{ƛx}{2}$$

olur. Böylece $ƛx^2 = 2$, $ƛx_n \geq 0$ olduğundan $ƛx = \sqrt{2}$ elde edilir. dahası $\sqrt{2}$ sayısı bir irrasyonel sayı olduğundan bu bir çelişkidir. Yani $\{ƛx_n\}$dizisi rasyonel sayıların hiçbir noktasına yakınsamaz. Bu durumda rasyonel sayılar kümesi tam değildir.

3.1.4 Örnek $(ƛX, ƈ)$ ayrık metrik uzayı tam uzaydır.

Bir Cauchy dizisi $\{ƛx_n\}$ olsun. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$ƈ(ƛx_n, ƛx_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$ƈ\left(ƛx_n, ƛx_{n_0}\right) < \frac{1}{2}$$

olur. Diğer yandan

$\mathcal{d}(\mathcal{x}_n, \mathcal{x}_{n_0}) = 0$ veya $\mathcal{d}(\mathcal{x}_n, \mathcal{x}_{n_0}) = 1$ olacağından $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{d}(\mathcal{x}_n, \mathcal{x}_{n_0}) = 0$ olur. Böylece $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{x}_n = \mathcal{x}_{n_0}$ olur ki bu dizide belirli bir terimden sonra dizi sabittir. Yani

$$\mathcal{x}_1, \mathcal{x}_2, \mathcal{x}_3, \dots, \mathcal{x}_{n_0-1}, \mathcal{x}_{n_0}, \mathcal{x}_{n_0}, \dots$$

şeklindedir. Buradan bu dizi yakınsak ve limiti $\mathcal{x}_{n_0}$ olduğundan $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ ayrık metrik uzayı tamdır.

3.1.7 Tanım $(\mathcal{X}, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{X}$ kümesinin farklı her iki noktasının en az birinin diğerini içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya T_0-uzayı denir. Diğer bir ifadeyle $\mathcal{x} \neq \mathcal{y}$ özelliğindeki her $\mathcal{x}, \mathcal{y} \in \mathcal{X}$ noktaları için

$$\mathcal{x} \in U \text{ ve } \mathcal{y} \notin U \text{ veya } \mathcal{y} \in U \text{ ve } \mathcal{x} \notin U$$

olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa bu uzaya bir T_0-uzayı denir.

3.1.5 Örnek $\mathcal{X} = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}\}$ olmak üzere $(\mathcal{X}, \tau)$ uzayı bir T_0-uzayıdır.

3.1.6 Örnek $\mathcal{X} = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ olmak üzere $(\mathcal{X}, \tau)$ uzayı bir T_0-uzayı değildir.

3.1.8 Tanım $(\mathcal{X}, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{X}$ kümesinin farklı her iki noktasının her birinin diğer noktayı içermeyecek şekilde bir komşuluğu varsa bu uzaya T_1-uzayı denir. Diğer bir ifadeyle $\mathcal{x} \neq \mathcal{y}$ özelliğindeki her $\mathcal{x}, \mathcal{y} \in \mathcal{X}$ noktaları için

$$\mathcal{x} \in U,\ \mathcal{y} \notin U \text{ ve } \mathcal{y} \in V,\ \mathcal{x} \notin V$$

olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa bu uzaya bir T_1-uzayı denir.

3.1.5 Teorem Her $(J\text{X}, \text{ơ})$ metrik uzayı bir T_1-uzayıdır.

3.1.5 İspat $\text{ɲx} \neq \text{ɥ}$ olmak üzere $\text{ɲx}, \text{ɥ} \in J\text{X}$ ve $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\,\text{ơ}(\text{ɲx}, \text{ɥ})$ olsun.Bu durumda

$$\text{ɲx} \in \text{B}(\text{ɲx}, \varepsilon),\ \ \text{ɥ} \notin \text{B}(\text{ɲx}, \varepsilon) \text{ ve } \text{ɥ} \in \text{B}(\text{ɥ}, \varepsilon),\ \ \text{ɲx} \notin \text{B}(\text{ɥ}, \varepsilon)$$

dur. Üstelik $\text{B}(\text{ɲx}, \varepsilon)$, $\text{B}(\text{ɥ}, \varepsilon)$ açık yuvarları birer açık kümedir. O halde $(J\text{X}, \text{ơ})$ metrik uzayı bir T_1-uzayıdır.

3.1.7 Örnek Herhangi bir $(J\text{X}, \tau)$ sonlu tümleyenler uzayı T_1-uzayıdır.

3.1.8 Örnek Herhangi bir $\big(J\text{X}, \tau(a)\big)$ topolojik uzayı T_1-uzayı değildir.

3.1.9 Tanım $(J\text{X}, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $\text{ɲx} \neq \text{ɥ}$ özelliğindeki her $\text{ɲx}, \text{ɥ} \in J\text{X}$ noktaları için

$$\text{ɲx} \in \text{U},\ \ \text{ɥ} \in \text{V} \text{ ve } \text{U} \cap \text{V} = \emptyset$$

olacak şekilde $\text{U}, \text{V} \in \tau$ kümeleri varsa $(J\text{X}, \tau)$ uzayına bir Hausdorff uzayı veya bir T_2-uzayı denir.

3.1.9 Örnek Herhangi bir $\big(J\text{X}, P(J\text{X})\big)$ ayrık uzayı bir Hausdorff uzayıdır.

3.1.10 Örnek $J\text{X} = [0, \infty)$, $\tau = \{(a, \infty) | a \geq 0\} \cup \{\emptyset, J\text{X}\}$ olmak üzere $(J\text{X}, \tau)$ uzayı bir Hausdorff uzayı değildir.

3.1.6 Teorem Her $(J\text{X}, \text{ơ})$ metrik uzayı bir T_2 uzayıdır.

3.1.6 İspat $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. Bu durumda $d(x,y) > 0$ dır. $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ olsun. Bu durumda $x \in B(x,\varepsilon)$, $y \in B(y,\varepsilon)$ ve üstelik $B(x,\varepsilon)$ ve $B(y,\varepsilon)$ açık yuvarları bir açık kümedir. Şimdi

$$B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$ dir. Bu durumda $z \in B(x,\varepsilon)$ ve $z \in B(y,\varepsilon)$ dır. Metrik uzayın üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$< \varepsilon + \varepsilon$$

$$= 2\varepsilon$$

$$< d(x,y)$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ dır. Böylece (X,d) metrik uzayı bir T_2 uzayıdır.

3.2 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Tam metrik uzaylardaki sabit nokta teori ilk olarak Banach ile 1922 yılında çalışılmıştır.

3.2.1 Teorem $T: X \to X$ bir dönüşüm ve (X,d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ var ise $\mathcal{T}$ dönüşümünün $\mathcal{J}X$ de tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca her $\mathcal{J}x_0 \in \mathcal{J}X$ için $\{\mathcal{T}^n \mathcal{J}x_0\}$ dizisi $\mathcal{T}$ nin bu sabit noktasına yakınsar.

Jleli ve Samet bilinen büzülme dönüşümü kavramını da kapsayan θ -büzülme dönüşümü tanımını 2014 yılında vererek bu tanım aracılığı ile yeni bir teorem ifade ve ispat etmişlerdir. Ayrıca, Jleli ve Samet bu çalışmalarında θ-büzülme dönüşümü ile ifade ve ispat ettikleri teoremin Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olduğunu bir örnek yardımıyla göstermişlerdir.

θ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ dönüşümlerinin ailesi Θ olsun:

(θ_1) θ azalmayan

(θ_2) Her $\{\mathfrak{t}_n\} \subset (0,\infty)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \theta(\mathfrak{t}_n) = 1$ ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}_n = 0^+$

(θ_3) $\lim_{\mathfrak{t}\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{\mathfrak{t}^r} = \ell$ olacak şekilde $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ vardır.

3.2.1 Tanım $(\mathcal{J}X, \mathcal{d})$ bir metrik uzay $\mathcal{T}: \mathcal{J}X \to \mathcal{J}X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $\mathcal{d}(\mathcal{T}\mathcal{J}x, \mathcal{T}\mathcal{J}y) > 0$ olacak şekildeki her $\mathcal{J}x, \mathcal{J}y \in \mathcal{J}X$ için

$$\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}\mathcal{J}x, \mathcal{T}\mathcal{J}y)\big) \leq \big[\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{J}x, \mathcal{J}y)\big)\big]^k \qquad (3.2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ ye θ- büzülme dönüşümü denir.

Θ ailesine ait olan bazı özel θ fonksiyonları aşağıdaki gibi alınırsa bilinen birtakım büzülmeler elde edebilir.

3.2.1 Örnek $\theta(\mathfrak{t}) = e^{\sqrt{\mathfrak{t}}}$ olmak üzere $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ verilsin. Buradan $\theta \in \Theta$ olduğu açıktır. Yukarıdaki eşitisizlikten, $\mathcal{T}\mathcal{J}x \neq \mathcal{T}\mathcal{J}y$ olmak üzere her $\mathcal{J}x, \mathcal{J}y \in \mathcal{J}X$ için

$$\mathcal{d}(\mathcal{T}\mathcal{J}x, \mathcal{T}\mathcal{J}y) \leq k^2\, \mathcal{d}(\mathcal{J}x, \mathcal{J}y)$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{T}\mathcal{J}x = \mathcal{T}\mathcal{J}y$ olmak üzere her $\mathcal{J}x, \mathcal{J}y \in \mathcal{J}X$ için

$$\mathcal{d}(\mathcal{T}\mathcal{J}x, \mathcal{T}\mathcal{J}y) \leq k^2\, \mathcal{d}(\mathcal{J}x, \mathcal{J}y)$$

dir. O halde $\mathfrak{T}$ bilinen büzülme dönüşümüdür.

3.2.2 Örnek $\theta(\mathfrak{t}) = e^{\sqrt{\mathfrak{t}e^{\mathfrak{t}}}}$ olmak üzere $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ verilsin. Buradan $\theta \in \Theta$ olduğu açıktır. Tanımdan yola çıkarak $\mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x} \neq \mathfrak{T}\mathfrak{y}$ olmak üzere her $\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathcal{J}X$ için

$$\frac{\mathfrak{d}(\mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}\mathfrak{y})}{\mathfrak{d}(\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} e^{\mathfrak{d}(\mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}\mathfrak{y}) - \mathfrak{d}(\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \leq k^2$$

elde edilir. Ayrıca, θ nın tanımı göz önünde bulundurulursa $\mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x} \neq \mathfrak{T}\mathfrak{y}$ olmak üzere her $\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathcal{J}X$ için

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}\mathfrak{y}) \leq \mathfrak{d}(\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

dir. Bu durumda $\mathfrak{T}$ bir büzülebilir dönüşümdür. Yani her θ-büzülme dönüşümü bir sürekli dönüşümdür.

θ-büzülme dönüşümü dikkate alındığında, aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilmiştir. Bu teorem Banach büzülme dönüşümü prensibinin bir genelleştirilmiş halidir.

3.2.2 Teorem $\mathfrak{T}: \mathcal{J}X \to \mathcal{J}X$ bir θ-büzülme dönüşümü ve $(\mathcal{J}X, \mathfrak{d})$ bir tam metrik uzay olsun. O zaman $\mathfrak{T}$, $\mathcal{J}X$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2.2 İspat $\mathcal{J}\mathfrak{x} \in \mathcal{J}X$ keyfi bir nokta olsun. Eğer bazı $p \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{T}^p\mathcal{J}\mathfrak{x} = \mathfrak{T}^{p+1}\mathcal{J}\mathfrak{x}$ ise, $\mathfrak{T}^p\mathcal{J}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{T}$ nin bir sabit noktası olur. Bundan dolayı genelliği bozmaksınızın her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{d}(\mathfrak{T}^n\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}^{n+1}\mathcal{J}\mathfrak{x}) > 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ ve eşitsizlik (3.2.1) den

$$\begin{aligned}
\theta\big(\mathfrak{d}(\mathfrak{T}^n\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}^{n+1}\mathcal{J}\mathfrak{x})\big) &\leq \big[\theta\big(\mathfrak{d}(\mathfrak{T}^{n-1}\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}^n\mathcal{J}\mathfrak{x})\big)\big]^k \\
&\leq \big[\theta\big(\mathfrak{d}(\mathfrak{T}^{n-2}\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}^{n-1}\mathcal{J}\mathfrak{x})\big)\big]^{k^2} \\
&\vdots \\
&\leq \big[\theta\big(\mathfrak{d}(\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x})\big)\big]^{k^n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 \leq \theta\big(\mathfrak{d}(\mathfrak{T}^n\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}^{n+1}\mathcal{J}\mathfrak{x})\big) \leq \big[\theta\big(\mathfrak{d}(\mathcal{J}\mathfrak{x}, \mathfrak{T}\mathcal{J}\mathfrak{x})\big)\big]^{k^n} \qquad (3.2.2)$$

elde edilir. Eşitsizlik (3.2.2) den $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) \to 1$$

olup (θ_{2}) şartı sağlandığından

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x) = 0 \tag{3.2.3}$$

3.2.3dır. (θ_{3}) şartından

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) - 1}{[\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)]^{r}} = \ell$$

olacak şelikde $\ell \in (0, \infty]$ ve $r \in (0,1)$ vardır. Varsayalım ki $\ell < \infty$ olsun. Ayrıca $B = \frac{\ell}{2} > 0$ olsun. Verilen limit tanımıyla her $n \geq n_0$ için

$$\left|\frac{\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) - 1}{[\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)]^{r}} - \ell\right| \leq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $n \geq n_0$

$$\frac{\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) - 1}{[\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)]^{r}} - \ell \geq \ell - B = B$$

sağlanır. $A = \frac{1}{B}$ olarak kabul edilirse her $n \geq n_0$ için

$$n[\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)]^{r} \leq An\big[\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) - 1\big]$$

olur. Kabul edelim ki $\ell = \infty$ ve B, keyfi bir pozitif sayı olsun. Limit tanımından $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) - 1}{[\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)]^{r}} \geq B$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $A = \frac{1}{B}$ olup her $n \geq n_0$

$$n[\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)]^{r} \leq An\big[\theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}x)\big) - 1\big]$$

olur. Bütün durumlar göz öününd bulundurulduğunda her $n \geq n_0$ için

$$n[\mathcal{d}(\mathcal{T}^n \mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1} \mathcal{J}x)]^r \leq An\left[\theta\left(\mathcal{d}(\mathcal{T}^n \mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1} \mathcal{J}x)\right) - 1\right]$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (3.2.2) eşitsizliği kullanıldığında her $n \geq n_0$ için

$$n[\mathcal{d}(\mathcal{T}^n \mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1} \mathcal{J}x)]^r \leq An\left(\left[\theta\left(\mathcal{d}(\mathcal{J}x, \mathcal{T}\mathcal{J}x)\right)\right]^{k^n} - 1\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n[\mathcal{d}(\mathcal{T}^n \mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1} \mathcal{J}x)]^r = 0$$

elde edilir. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$\mathcal{d}(\mathcal{T}^n \mathcal{J}x, \mathcal{T}^{n+1} \mathcal{J}x) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \tag{3.2.4}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

Elde edilen bu bilgiler doğrultusunda $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $n > m \geq n_1$ olmak üzere m, n doğal sayılarını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_m) &\leq \mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_{n+1}) + \mathcal{d}(\mathcal{J}x_{n+1}, \mathcal{J}x_{n+2}) + \cdots + \mathcal{d}(\mathcal{J}x_{m-1}, \mathcal{J}x_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{d}(\mathcal{J}x_i, \mathcal{J}x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{d}(\mathcal{J}x_i, \mathcal{J}x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{1}{r} > 1$ ve $\sum_i \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}$ serisi yakınsak olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında $\mathcal{d}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_m) \to 0$ olur. Bu durumda $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi $(\mathcal{J}X, \mathcal{d})$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(\mathcal{J}X, \mathcal{d})$ bir tam metrik uzay olduğundan $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi $z \in \mathcal{J}X$ noktasına yakınsar. Ayrıca $\mathcal{T}$ nin sürekliliği ve (θ_2) den, $\mathcal{T}\mathcal{J}x \neq \mathcal{T}\mathcal{J}y$ olmak üzere her $\mathcal{J}x, \mathcal{J}y \in \mathcal{J}X$ için

$$\mathcal{d}(\mathcal{T}\mathcal{J}\mathcal{x}, \mathcal{T}\mathcal{y}) \leq \mathcal{d}(\mathcal{J}\mathcal{x}, \mathcal{y})$$

sağlanır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{d}(\mathcal{T}^{n+1}\mathcal{J}\mathrm{x}, \mathcal{T}\mathrm{z}) \leq \mathcal{d}(\mathcal{T}^{n}\mathcal{J}\mathrm{x}, \mathrm{z})$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $\mathcal{d}(\mathcal{T}z, \mathrm{z}) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $z = \mathcal{T}\mathrm{z}$ dir.

Kabul edelim ki u , $\mathcal{T}$ nin başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda $\mathcal{d}(\mathrm{z}, \mathrm{u}) = \mathcal{d}(\mathcal{T}\mathrm{z}, \mathcal{T}\mathrm{u}) > 0$ olup (3.2.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\theta\big(\mathcal{d}(\mathrm{z}, \mathrm{u})\big) = \theta\big(\mathcal{d}(\mathcal{T}\mathrm{z}, \mathcal{T}\mathrm{u})\big) \leq \big[\theta\big(\mathcal{d}(\mathrm{z}, \mathrm{u})\big)\big]^{k} < \theta\big(\mathcal{d}(\mathrm{z}, \mathrm{u})\big)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda sabit nokta tektir.

θ-büzülme dönüşümüyle ilgili birçok çalışmayı literatürde bulabiliriz. *J*X.-D. Liu, (θ_3) şartını

(θ_3^*) θ, $(0, \infty)$ da süreklidir

şeklinde kullanarak $(\theta_1), (\theta_2)$ ve (θ_3^*) şartlarını sağlayan dönüşümlerin ailesini Π olarak tanımlamıştır. $\theta_1(\mathfrak{t}) = e^{\mathfrak{t}}$, $\theta_2(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} + e^{\mathfrak{t}}, \theta_3(\mathfrak{t}) = 1 + sinh\mathfrak{t}$ ve $\theta_4(\mathfrak{t}) = cosh\mathfrak{t}$ fonksiyonları Π ailesine ait olan fonksiyonlara örnek olarak verilebilir. Ayrıca aşağıdaki örnekler incelendiğinde (θ_3) ve (θ_3^*) şartlarının birbirinden bağımsız olduğunu görülebilmektedir. Örneğin, $\theta(\mathfrak{t}) = e^{\mathfrak{t}}$ fonksiyonu (θ_1) ve(θ_2) şartlarını sağlamasına rağmen (θ_3) şartını sağlamaz fakat (θ_3^*) şartını sağlar. Yani $\Pi \not\subseteq \Theta$ dır. Yine;

$$\theta(\mathfrak{t}) = \begin{cases} e^{\sqrt{\mathfrak{t}}} & , \mathfrak{t} \leq 1 \\ 9 & , \mathfrak{t} > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu (θ_1) ve(θ_2) şartlarını sağlar fakat (θ_3^*)sağlamazken (θ_3) şartını sağlar. Bu durumda $\Theta \not\subseteq \Pi$ dir. Dahası $\theta(\mathfrak{t}) = e^{\sqrt{\mathfrak{t}}}$ fonksiyonu için $\theta \in \Theta \cap \Pi$ olup $\Theta \cap \Pi \neq \emptyset$ dır.

Yukarıda verilen tanımlar dikkate alındığında $\mathcal{T}$: *J*X $\to$ *J*X e bir dönüşüm, $\theta \in \Pi$ ve (3.2.1) eşitsizliğini sağlarsa θ^*-büzülme dönüşümü denir. θ^*-büzülme dönüşümü göz önüne alınarak aşağıdaki teorem ifade ve ispat verilmiştir.

3.2.3 Teorem $\mathfrak{G}: J\mathrm{X} \to J\mathrm{X}$ bir dönüşüm bir θ^*-büzülme dönüşümü ve $(J\mathrm{X}, \mathfrak{d})$ bir tam metrik uzay olsun. O zaman $\mathfrak{G}$, $J\mathrm{X}$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.3 Quasi Metrik Kavramlar

3.3.1 Tanım $\mathfrak{Q}: J\mathrm{X} \times J\mathrm{X} \to \mathbb{R}^+$, bir fonksiyon $J\mathrm{X}$ boş olmayan bir küme olsun. Her $\jmath\mathrm{x}, \mathrm{ц}, \mathrm{z} \in J\mathrm{X}$ için

1. $\mathfrak{Q}(\jmath\mathrm{x}, \jmath\mathrm{x}) = 0$

2. $\mathfrak{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{ц}) \leq \mathfrak{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{z}) + \mathfrak{Q}(\mathrm{z}, \mathrm{ц})$

3. $\mathfrak{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{ц}) = \mathfrak{Q}(\mathrm{ц}, \jmath\mathrm{x}) = 0$ ise $\jmath\mathrm{x} = \mathrm{ц}$

4. $\mathfrak{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{ц}) = 0$ ise $\jmath\mathrm{x} = \mathrm{ц}$

koşulları verilsin.

- (1) ve (2) koşulları sağlanıyorsa $\mathfrak{Q}$ fonksiyonuna $J\mathrm{X}$ de quasi-pseudo metrik ve $(J\mathrm{X}, \mathfrak{Q})$ ikilisine quasi-pseudo metrik uzay,

- (1), (2) ve (3) koşulları sağlanıyorsa $\mathfrak{Q}$ fonksiyonuna $J\mathrm{X}$ de quasi metrik ve $(J\mathrm{X}, \mathfrak{Q})$ ikilisine quasi metrik uzay,

- (1), (2) ve (4) koşulları sağlanıyorsa $\mathfrak{Q}$ fonksiyonuna $J\mathrm{X}$ de T_1-quasi metrik ve $(J\mathrm{X}, \mathfrak{Q})$ ikilisine T_1-quasi metrik uzay denir.

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında her metrik uzay (1), (2) ve (4) koşullarını(T_1-quasi metrik uzay) , her T_1-quasi metrik uzay (1), (2) ve (3) koşullarını(quasi metrik uzay) ve her quasi metrik uzayın (1) ve (2) koşullarını(quasi-pseudo metrik uzay) sağladığı görülebilir.

3.3.2 Tanım Quasi-pseudo metrik uzay $(J\text{X}, \text{Ч})$ olsun. $\varepsilon > 0$ reel sayısı ve $\text{ж}_0 \in J\text{X}$ için $\text{B}_{\text{Ч}}(\text{ж}_0, \varepsilon) = \{\text{и} \in J\text{X}: \text{Ч}(\text{ж}_0, \text{и}) < \varepsilon\}$ kümesi ж_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvar, $\text{B}_{\text{Ч}}[\text{ж}_0, \varepsilon] = \{\text{и} \in J\text{X}: \text{Ч}(\text{ж}_0, \text{и}) \leq \varepsilon\}$ kümesi ж_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir.

$\{\text{B}_{\text{Ч}}(\text{ж}, \varepsilon): \text{ж} \in J\text{X} \text{ ve } \varepsilon > 0\}$ açık yuvar ailesini taban olarak alındığında, $J\text{X}$ uzayında tanımlı bütün Ч pseudo metrikleriyle $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ topolojisi üretilir. Eğer Ч fonksiyonu $J\text{X}$ üzerinde bir T_1-quasi metrik ise $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ topolojisi bir T_1-topolojisi, quasi metrik ise $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ topolojisi bir T_0-topolojisidir.

$(J\text{X}, \text{Ч})$ quasi-pseudo metriği ve $\text{Ч}^{-1}, \text{Ч}^{\text{s}}$ ve Ч_+ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

- $\text{Ч}^{-1}(\text{ж}, \text{и}) = \text{Ч}(\text{и}, \text{ж})$
- $\text{Ч}^{\text{s}}(\text{ж}, \text{и}) = \text{maks}\{\text{Ч}(\text{ж}, \text{и}), \text{Ч}^{-1}(\text{ж}, \text{и})\}$
- $\text{Ч}_+(\text{ж}, \text{и}) = \text{Ч}(\text{ж}, \text{и}) + \text{Ч}^{-1}(\text{ж}, \text{и})$

Buradan $\text{Ч}^{-1}, \text{Ч}^{\text{s}}$ ve Ч_+ fonksiyon tanımlarından bu fonksiyonların her biri $J\text{X}$ üzerinde bir quasi-pseudo metriktir. Ayrıca, Ч fonksiyonu quasi metrik ise Ч^{s} ve Ч_+ fonksiyonlarının Ҳ üzerinde birer metriktir. Dahası Ч quasi-pseudo metriği

$$\text{ж} \neq \text{и} \Rightarrow \text{Ч}(\text{ж}, \text{и}) + \text{Ч}^{-1}(\text{ж}, \text{и}) > 0$$

şartını sağlarsa Ч^{s} ve Ч_+ fonksiyonları $J\text{X}$ üzerinde bir metriktir.

3.3.1 Örnek $J\text{X} = \mathbb{R}$ ve Ч fonksiyonu her $\text{ж}, \text{и} \in J\text{X}$ için

$$\text{Ч}(\text{ж}, \text{и}) = \text{maks}\{\text{и}^2 - \text{ж}^2, 0\}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{Q}$ fonksiyonu $J\mathrm{X}$ üzerinde bir quasi metrik değildir fakat quasi-pseudo metriktir.

3.3.2 Örnek $J\mathrm{X}$ boştan farklı bir küme olmak üzere $\mathcal{Q}: J\mathrm{X} \times J\mathrm{X} \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu her $\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{Y}$ için $\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{Q}$, $J\mathrm{X}$ üzerinde bir quasi-pseudo metriktir ve $(J\mathrm{X}, \tau_{\mathcal{Q}})$ uzayı bir kaba uzaydır.

3.3.3 Örnek $J\mathrm{X} = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{Q}$ fonksiyonu her $\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y} \in J\mathrm{X}$ için

$$\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{maks}\{\mathrm{y} - \jmath\mathrm{x}, 0\}$$

şekilde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{Q}$ fonksiyonu Y üzerinde T_1-quasi metrik değildir fakat bir quasi metriktir.

3.3.4 Örnek $J\mathrm{X} = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{Q}$ fonksiyonu her $\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y} \in J\mathrm{X}$ için

$$\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \begin{cases} 0\ , & \jmath\mathrm{x} = \mathrm{y} \\ |\mathrm{y}|\ , & \jmath\mathrm{x} \neq \mathrm{y} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{Q}$ fonksiyonu $J\mathrm{X}$ üzerinde $\mathcal{T}_1$-quasi metrik değildir fakat bir quasi metriktir. $J\mathrm{X}$ uzayının bir alt kümesini $\mathrm{Y}=\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ olarak alalım. Bu küme göz önüne alındığında $(Y, \tau_{\mathcal{Q}})$ sonlu tümleyenler topolojik uzay, $(Y, \tau_{\mathcal{Q}^{-1}})$ uzayı ise ayrık topolojik uzaydır.

3.3.5 Örnek $J\mathrm{X} = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{Q}: J\mathrm{X} \times J\mathrm{X} \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu

$$\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \begin{cases} \mathrm{y} - \jmath\mathrm{x}\ , & \jmath\mathrm{x} \leq \mathrm{y} \\ 1\ , & \jmath\mathrm{x} > \mathrm{y} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{Q}$ bir T_1-quasi metriktir. Ayrıca

$$\text{ч}^s(\text{л}x, \text{д}) = \begin{cases} 0 , & \text{л}x = \text{д} \\ 1 , & \text{л}x \neq \text{д} \end{cases}$$

olur. $\text{л}x \in \text{л}X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\text{B}_{\text{ч}}(\text{л}x, \varepsilon) = \{\text{д} \in \text{л}X: \text{ч}(\text{л}x, \text{д}) < \varepsilon\}$$

$$= \begin{cases} \text{л}X & , \quad \varepsilon \geq 1 \\ [\text{л}x, \text{л}x + \varepsilon) & , \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

olur. Yani $\tau_{\text{ч}}$, $\mathbb{R}$ üzerindeki alt limit topolojisidir. $\tau_{\text{ч}^s}$ in ise ayrık topoloji olduğu açıktır Aynı zamanda $\tau_{\text{ч}^{-1}}$ topolojisi ise $\mathbb{R}$ üzerindeki üst limit topolojisi olur.

3.3.6 Örnek $\text{л}X = \mathbb{R}$ ve $\text{ч}: \text{л}X \times \text{л}X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\text{ч}(\text{л}x, \text{д}) = \text{maks}\{\text{д} - \text{л}x, 0\} = \begin{cases} \text{д} - \text{л}x , & \text{л}x \leq \text{д} \\ 1 , & \text{л}x > \text{д} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda ч bir T_1- quasi metrik değildir fakat quasi metriktir. Ayrıca

$$\text{ч}^s(\text{л}x, \text{д}) = |\text{л}x - \text{д}|$$

olur. Yani $\tau_{\text{ч}^s}$ nin alışılmış topoloji olduğu açıktır. Ancak $\text{л}x \in \text{л}X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\text{B}_{\text{ч}}(\text{л}x, \varepsilon) = \{\text{д} \in \text{л}X: \text{ч}(\text{л}x, \text{д}) < \varepsilon\}$$

$$= (-\infty, \text{л}x + \varepsilon)$$

olacağından $\tau_{\text{ч}}$ topolojisinin bir tabanı $\beta_{\text{ч}} = \{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\}$ olur. Bu durumda $\tau_{\text{ч}^{-1}}$ topolojisinin bir tabanı $\beta_{\text{ч}^{-1}} = \{(b, \infty): b \in \mathbb{R}\}$ olur.

3.3.7 Örnek $Jx = \mathbb{R}$ ve $ч$: $Jx \times Jx \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$ч(лx, ид) = \begin{cases} 0 , & лx = ид \\ |ид| , & лx \neq ид \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $ч$ bir T_1- quasi metrik değildir fakat quasi metriktir. Ayrıca

$$ч^s(лx, ид) = \text{maks}\{ч(лx, ид), ч(ид, лx)\}$$

$$= \begin{cases} 0 , & лx = ид \\ \text{maks}\{|лx|, |ид|\} , & лx \neq ид \end{cases}$$

olur. Şimdi $лx \in \mathbb{R}$ ve $лx \neq 0$ olmak üzere $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ olsun. O zaman

$$B_{ч^s}(лx, \varepsilon) = \{ид \in Jx: ч^s(лx, ид) < \varepsilon\}$$

$$= \{лx\}$$

olur. Diğer taraftan $\varepsilon > 0$ için

$$B_{ч^s}(0, \varepsilon) = \{ид \in Jx: ч^s(0, ид) < \varepsilon\}$$

$$= \{ид \in Jx: |ид| < \varepsilon\}$$

$$= (-\varepsilon, \varepsilon)$$

olur. $\tau_{ч^s}$ topolojisi göz önüne alındığında sıfırdan farklı tüm tek nokta kümeleri açıktır, fakat sıfır noktasını içeren en dar açık küme $(-\varepsilon, \varepsilon)$ şeklindedir. Bu durumda $лx \in Jx$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$B_{q}(x,\varepsilon) = \{y \in X: q(x,y) < \varepsilon\}$$

$$= \{y \in X: |y| < \varepsilon\} \cup \{x\}$$

$$= (-\varepsilon,\varepsilon) \cup \{x\}$$

olur.

$$B_{q^{-1}}(x,\varepsilon) = \{y \in X: q^{-1}(x,y) < \varepsilon\}$$

$$= \{y \in X: q(x,y) < \varepsilon\}$$

$$= X$$

olur.

3.3.8 Örnek $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$q(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x < y \\ 2 & , \quad x > y \end{cases}$$

ile tanımlı $q: X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. O zaman q bir T_1-quasi metriktir.

3.3.9 Örnek $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$q(x,y) = \begin{cases} x - y & , \quad y \leq x \\ 1 + 10(y - x) & , \quad y > x \end{cases}$$

ile tanımlı $q: X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu bir T_1-quasi metriktir.

3.3.10 Örnek X boştan farklı bir küme ve $f: X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. $q_f: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için

$$q_f(x, y) = \{f(y) - f(y), 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda q_f bir quasi-pseudo metriktir. Dahası f fonksiyonunun birebir olması için gerek yeter şart q_f nin bir quasi metrik olmasıdır.

3.3.11 Örnek (X, q) bir quasi metrik uzay ve $a \in X$ olsun. $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için

$$p(x, y) = q(a, x) + q(x, y) - q(a, y)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda bir quasi metriktir. Gerçekten, quasi metrik tanımının (1) ve (2) şartlarını sağladığı açıktır. Şimdi quasi metrik tanımının (3) şartının sağladığını göstermek için $p(x, y) = 0$ ve $p(y, x) = 0$ olsun. O zaman $q(a, x) + q(x, y) - q(a, y) = 0$ ve $q(a, y) + q(y, x) - q(a, x) = 0$ dır. Son iki eşitlik taraf tarafa toplandığında $q(x, y) + q(y, x) = 0$ elde edilir. ki bu ise $q(x, y) = q(y, x) = 0$ demektir. q, X üzerinde tanımlı p fonksiyonu bir quasi metriktir.

3.3.12 Örnek $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ üzerinde her $x, y \in X$ için

$$q(x, y) = \begin{cases} 0\ , & x = y \\ |y|\ , & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlı q quasi metriği göz önüne alınsın. O zaman X üzerindeki τ_q ve $\tau_{q^{-1}}$ topolojileri sırasıyla sonlu tümleyenler topolojisi ve ayrık topolojidir.

3.3.13 Örnek $J\text{X} = \{0,1\}$ kümesi üzerinde $\text{Ч}: J\text{X} \times J\text{X} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\text{Ч}(0,1) = 1$ ve $\text{Ч}(1,0) = 0$ şeklinde tanımlı quasi-pseudo metriktir. Ayrıca $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ topolojisi Sierpinski topolojisidir.

3.3.1 Not $(J\text{X}, \text{Ч})$ bir quasi-pseudo metrik ise $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ uzayı T_0 olmayabilir. Örnek 3.3.1 deki Ч quasi-pseudo metriğine göre

$\text{Ч}(1,-1) = 0$ ve $\text{Ч}(-1,1) = 0$

olur. Bu durumda 1 in her açık yuvarında -1 ve 1 in her açık yuvarında 1 vardır. Dolayısıyla $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ uzayı T_0 değildir.

3.3.2 Not $(J\text{X}, \text{Ч})$ bir quasi metrik uzay ise $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ uzayı bir T_0 uzayıdır. Yani, $\text{Ж} \neq \text{И}$ olacak şekilde her $\text{Ж}, \text{И} \in J\text{X}$ noktası için Ч bir quasi metrik uzay olduğundan $\text{Ч}(\text{Ж}, \text{И}) > 0$ veya $\text{Ч}(\text{И}, \text{Ж}) > 0$ dır. Eğer $\text{Ч}(\text{Ж}, \text{И}) > 0$ ise $\varepsilon = \frac{\text{Ч}(\text{Ж},\text{И})}{2} > 0$ için $\text{Ж} \in B_{\text{Ч}}(\text{Ж}, \varepsilon)$ ve $\text{И} \notin B_{\text{Ч}}(\text{Ж}, \varepsilon)$ dır. O halde $\tau_{\text{Ч}}$ topolojisi bir T_0 uzayıdır.

3.3.3 Not $(J\text{X}, \text{Ч})$ bir quasi metrik ise $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ uzayı T_1 uzayı olmayabilir. Örnek 3.3.6 daki Ч quasi metriğe göre $\text{Ч}(2,0) = 0$ olur. Bu durumda 2 yi içeren her açık yuvarda 0 vardır. Dolayısıyla $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ uzayı T_1 değildir.

3.3.4 Not $(J\text{X}, \text{Ч})$ bir T_1 -quasi metrik ise $(J\text{X}, \tau_{\text{Ч}})$ uzayı T_1 uzayıdır. Yani $\text{Ж} \neq \text{И}$ olacak şekilde her $\text{Ж}, \text{И} \in J\text{X}$ noktası için Ч bir T_1 -quasi metrik olduğundan $\text{Ч}(\text{Ж}, \text{И}) > 0$ ve $\text{Ч}(\text{И}, \text{Ж}) > 0$ dır. Bu durumda $\varepsilon = \frac{\text{Ч}(\text{Ж},\text{И})}{2} > 0$ ve $\delta = \frac{\text{Ч}(\text{И},\text{Ж})}{2} > 0$ için $\text{Ж} \in B_{\text{Ч}}(\text{Ж}, \varepsilon)$, $\text{И} \notin B_{\text{Ч}}(\text{Ж}, \varepsilon)$ ve $\text{И} \in B_{\text{Ч}}(\text{И}, \delta)$, $\text{Ж} \notin B_{\text{Ч}}(\text{И}, \delta)$ dır. O halde $\tau_{\text{Ч}}$ topolojisi bir T_1 uzayıdır.

Quasi metrik uzaylarda yakınsaklık tanımı üç farklı şekilde aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

3.3.3 Tanım $\mathcal{J}x \in \mathcal{J}X$ ve $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ bir quasi metrik uzay olsun.

1. $\mathcal{J}X$ te $\tau_{\mathcal{Q}}$ topolojisine göre $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi $\mathcal{J}x$ noktasına yakınsıyorsa $\mathcal{Q}$-yakınsak denir ve

$$\mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{J}x \Leftrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{J}x, \mathcal{J}x_n) \to 0$$

şeklinde gösterilir.

2. $\mathcal{J}X$ te $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}}$ topolojisine göre $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi $\mathcal{J}x$ noktasına yakınsıyorsa $\mathcal{Q}^{-1}$-yakınsak denir ve

$$\mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}^{-1}} \mathcal{J}x \Leftrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x) \to 0$$

şeklinde gösterilir.

3. $\mathcal{J}X$ te $\tau_{\mathcal{Q}^s}$ topolojisine göre $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi $\mathcal{J}x$ noktasına yakınsıyorsa $\mathcal{Q}^s$-yakınsak denir ve

$$\mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}^s} \mathcal{J}x \Leftrightarrow \mathcal{Q}^s(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x) \to 0$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki tanımlardan

$$\mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}^s} \mathcal{J}x \Leftrightarrow \mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{J}x \text{ ve } \mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}^{-1}} \mathcal{J}x$$

olduğu görülebilir.

3.3.5 Not Quasi metrik uzayında yakınsak bir dizinin limiti tek olmayabilir.

3.3.14 Örnek $J\mathrm{X} = \mathbb{R}^+$ ve $\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}, \jmath\mathrm{y}) = \text{maks}\{\jmath\mathrm{y} - \jmath\mathrm{x}, 0\}$ ile tanımlı $\mathcal{Q}$ quasi metriği göz önüne alınsın. O zaman $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q})$ uzayındaki her dizi 0 a yakınsar. Gerçekten $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q})$ uzayında bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \{0 - \jmath\mathrm{x}, 0\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

dır. Öte yandan $\jmath\mathrm{x}_n = 1 - \frac{1}{n}$ şeklinde tanımlı $(\jmath\mathrm{x}_n)$ dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}_n, 1) = \lim_{n\to\infty} \text{maks}\left\{\frac{1}{n}, 0\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan 1 noktasına yakınsaktır.

3.3.4 Tanım $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q})$ bir quasi metrik uzay ve $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ $J\mathrm{X}$ içerisinde bir dizi olsun.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}, \jmath\mathrm{x}_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $\jmath\mathrm{x} \in J\mathrm{X}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ dizisine sol $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}_n, \jmath\mathrm{x}) < \varepsilon$ olacak şekilde $\jmath\mathrm{x} \in J\mathrm{X}$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ dizisine sağ $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k \geq n_0$ için $\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}_k, \jmath\mathrm{x}_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ dizisine sol K-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k \geq n_0$ için $\mathcal{Q}(\jmath\mathrm{x}_n, \jmath\mathrm{x}_k) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ dizisine sağ K-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $\mathcal{Q}\left(\jmath\mathrm{x}_{n_0}, \jmath\mathrm{x}_n\right) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\jmath\mathrm{x}_n\}$ dizisine zayıf sol K-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $\text{Ч}\left(\text{Ж}x_n, \text{Ж}x_{n_0}\right) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\text{Ж}x_n\}$ dizisine zayıf sağ K-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n, k \geq n_0$ için $\text{Ч}(\text{Ж}x_n, \text{Ж}x_k) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{\text{Ж}x_n\}$ dizisine Ч^s-Cauchy dizisi denir.

3.3.6 Not Yukarıdaki tanımlardan

- Ч^s-Cauchy⇒ sol K-Cauchy⇒zayıf sol K-Cauchy⇒sol Ч-Cauchy

- Ч^s-Cauchy⇒ sağ K-Cauchy⇒zayıf sağl K-Cauchy⇒sağ Ч-Cauchy

sonuçları elde edilebilir.

3.3.15 Örnek $\text{Ж}X = [0,1]$ ve ЖX üzerindeki Ч quasi metriği

$$\text{Ч}(\text{Ж}x, \text{Ж}y) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{Ж}x \leq \text{Ж}y \\ 1 & , \quad \text{Ж}x > \text{Ж}y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\{\text{Ж}x_n\}$ dizisi ЖX uzayında

$$\text{Ж}x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} & , \quad n \text{ tek sayı ise} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n} & , \quad n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $n \geq 1$ için $\text{Ч}(0, \text{Ж}x_n) = 0$ olduğundan $\{\text{Ж}x_n\}$, Ч-yakınsaktır ve ayrıca $\{\text{Ж}x_n\}$ bir sol Ч-Cauchy dizisidir. Dikkat edilecek olursa

$$\text{maks}\{\text{Ч}(\text{Ж}x_n, \text{Ж}x_{n+1}), \text{Ч}(\text{Ж}x_n, \text{Ж}x_{n+2})\} = 1$$

olup zayıf sol K-Cauchy değildir. Yani $\mathcal{Q}^s$-Cauchy ve sol K-Cauchy de değildir. Dahası her $n \geq 1$ için $\mathcal{Q}(Jx_n, Jx_1) = 0$ olduğundan $\{Jx_n\}$ dizisi $\mathcal{Q}^{-1}$ yakınsaktır ve sağ $\mathcal{Q}$-Cauchy ve zayıf sağ K-Cauchydir. $\mathcal{Q}(Jx_{2n+1}, Jx_{2n}) = 1$ olduğundan sağ K-Cauchy değildir. JX içerisinde $\{y_n\}$ dizisini

$$\{y_n\} = \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\{y_n\}$ dizisi her $n \geq 1$ için $\mathcal{Q}(y_1, y_n) = 0$ ve her $n > k > 1$ için $\mathcal{Q}(y_k, y_n) = 1$ olduğundan sol K-Cauchy değildir fakat zayıf sol K-Cauchy dir.

3.3.7 Not $\{Jx_n\}$ dizisinin sağ K-Cauchy ve sol K-Cauchy olması için gerek ve yeter şart $\{Jx_n\}$ dizisinin bir $\mathcal{Q}^s$-Cauchy dizisi olmasıdır.

Her yakınsak dizi, metrik uzayda bir Cauchy dizisi olmasına rağmen quasi metrik uzayda bu durum yoktur. Yani $\mathcal{Q}$-yakınsak veya $\mathcal{Q}^{-1}$ yakınsak dizileri quasi metrik uzayda zayıf K-Cauchy $\mathcal{Q}^s$-Cauchy veya K-Cauchy olmayabilir. Ama bir dizi $\mathcal{Q}$-yakınsak ise sol $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisi ve bunun gibi $\mathcal{Q}^{-1}$ yakınsak ise sağ $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisi olur.

3.3.16 Örnek $JX = [0, 1)$ ve $\mathcal{Q}$ quasi metriği

$$\mathcal{Q}(Jx, y) = \text{maks}\{y - Jx, 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $Jx_n = \frac{n}{n+1}$ dizisi $(JX, \mathcal{Q})$ quasi metrik uzayında $\mathcal{Q}^s$-Cauchy olur. Dolayısıyla sol $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisidir ama $\mathcal{Q}$-yakınsak değildir. Gerçekten her $Jx \in JX$ için

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}\left(Jx, \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \text{maks}\left\{\frac{n}{n+1} - Jx, 0\right\} = 1 - Jx \neq 0$$

dır.

Her Cauchy dizisi, metrik uzaylarda yakınsak ise bu uzaydır diye söylenmektedir. Fakat quasi metrik uzayda 7 farklı Cauchy dizisinin tanımının 3 farkli şekilde yakınsamasıyla ortaya pekçok tamlık tanımı çıktığından tamlığın tek bir tanımı yoktur.

3.3.5 Tanım $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ bir quasi metrik uzay olsun.

- Eğer her sol (sağ) $\mathcal{G}$-Cauchy dizisi $\mathcal{G}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına sol (sağ) ζ-tam denir.

- Eğer her sol(sağ) $\mathcal{G}$ -Cauchy dizisi $\mathcal{G}^{-1}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına sol (sağ) η-tam denir.

- Eğer her sol(sağ) $\mathcal{G}$ -Cauchy dizisi $\mathcal{G}^{s}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına sol (sağ) θ-tam (bi-tam) denir.

- Eğer her $\mathcal{G}^{s}$- Cauchy dizisi $\mathcal{G}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına ζ-tam denir.

- Eğer her $\mathcal{G}^{s}$- Cauchy dizisi $\mathcal{G}^{-1}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına η-tam denir.

- Eğer her $\mathcal{G}^{s}$- Cauchy dizisi $\mathcal{G}^{s}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına θ-tam ya da bi tam denir.

- Eğer her (zayıf) sol (sağ) K-Cauchy dizisi $\mathcal{G}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına (zayıf) sol (sağ) $\mathcal{K}$-tam denir.

- Eğer her (zayıf) sol (sağ) K-Cauchy dizisi $\mathcal{G}^{-1}$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{G})$ metrik uzayına (zayıf) sol (sağ) $\mathcal{M}$-tam denir.

- Eğer her (zayıf) sol (sağ) K-Cauchy dizisi $\mathcal{Q}^s$ yakınsak ise $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q})$ metrik uzayına (zayıf) sol (sağ) $Smyth$-tam denir.

3.3.8 Not Verilen tamlık tanımları göz önünde bulundurulduğunda

$$\text{sol } \zeta - \text{tam} \Rightarrow \text{zayıf sol } \mathcal{K} - \text{tam}$$

$$\Rightarrow \text{ sol } \mathcal{K} - \text{tam}$$

$$\Rightarrow \zeta - \text{tam}$$

$$\text{sağ } \zeta - \text{tam} \Rightarrow \text{zayıf sağ } \mathcal{K} - \text{tam}$$

$$\Rightarrow \text{ sağ } \mathcal{K} - \text{tam}$$

$$\Rightarrow \zeta - \text{tam}$$

ifadelerinin sağlandığı görülebilir.

3.3.17 Örnek $J\mathrm{X} = \mathbb{N}$ ve $\mathcal{Q}$ quasi metriği

$$\mathcal{Q}(m,n) = \begin{cases} 0 \ , & m = n \\ \dfrac{1}{n} \ , & m > n, m \text{ çift}, n \text{ tek} \\ 1 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan sağ K-Cauchy dizileri $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q})$ quasi metrik uzayında sonlu sayıda elemanları hariç diğer elemanları aynı dizilerdir. $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q})$ uzayında böyle diziler $\mathcal{Q}$-yakınsak olduğundan uzay sağ $\mathcal{K}$-tamdır. Fakat $\{2,4,6,\dots\}$ dizisi sağ $\mathcal{Q}$-yakınsak olmasına rağmen $\mathcal{Q}$-yakınsak olmadığından bu uzay $\zeta - \text{tam}$ değildir. Yani bu dizi zayıf sol K-Cauchy değildir fakat $(J\mathrm{X}, \mathcal{Q}^{-1})$ uzayında sol $\mathcal{Q}$-Cauchydir.

3.3.9 Not $\{x_n\}$, (X, q) quasi metrik uzayında bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} q(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

şartı var olsun. Böylece $\{x_n\}$ dizisi bir sol K-Cauchy dizisidir.

3.3.1 Teorem Bir quasi metrik uzayın sol $\mathcal{K}$-tam olması için gerek ve yeter şart zayıf sol $\mathcal{K}$-tam olmasıdır.

3.3.10 Not Sol q-Cauchy olma özelliği ile sağ q^{-1}- Cauchy olma özelliği birbirlerini gerektirmelerine rağmen, sol ζ tamlık ve sağ η -tamlık özellikleri birbirlerini gerektirmez. Ama (X, q) quasi metrik uzayının ζ-tam olması için gerek ve yeter şart (X, q^{-1}) uzayının η-tam olmasıdır. Benzer durumlar Cauchy olma ve tam olma durumları için de verilebilir.

3.3.11 Not Bir (X, q) quasi metrik uzayı θ-tam (bi-tam) olması için gerek ve yeter şart hem ζ-tam ve η-tam olmasıdır.

3.3.12 Not (X, q) quasi metrik uzayı sol $\mathcal{M}$-tam olduğunda (X, q), η-tamdır. Dahası (X, q) quasi metrik uzayı sol $\mathcal{K}$ -tam olduğunda (X, q), ζ-tamdır. Yani (X, q), sol $\mathcal{K}$ -tam ve sol $\mathcal{M}$-tam olduğunda θ-tam(bi-tam) dır.

3.3.18 Örnek $X = [0, 1)$ ve (X, q) quasi metrik uzayı

$$q(x, y) = \text{maks}\{y - x, 0\}$$

şeklinde tanımlansın. X uzayında alınan diziler 0 noktasına q^{-1} yakınsak olduğundan (X, q), sol (sağ) η-tam, η-tam ve sol (sağ) $\mathcal{M}$-tamdır. Ayrıca

$$\mathcal{Q}^s(\mathcal{J}x, \mathcal{Y}) = |\mathcal{J}x - \mathcal{Y}|$$

olduğundan $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$, θ-tam (bi-tam) değildir. Bundan dolayı $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$, ζ-tamdır, fakat η-tam değildir.

3.3.19 Örnek $\mathcal{J}X = [0,1]$ ve $\mathcal{Q}$ quasi metriği

$$\mathcal{Q}(\mathcal{J}x, \mathcal{Y}) = \begin{cases} 0 & , \quad \mathcal{J}x \leq \mathcal{Y} \\ 1 & , \quad \mathcal{J}x > \mathcal{Y} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu uzayda her dizi 0 a $\mathcal{Q}$ yakınsak olduğundan $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ sol (sağ) ζ-tam, ζ-tam ve sol (sağ) $\mathcal{K}$ -tamdır.

3.3.20 Örnek $\mathcal{J}X = (0,1)$ ve $\mathcal{Q}$ quasi metriği

$$\mathcal{Q}(\mathcal{J}x, \mathcal{Y}) = \begin{cases} \mathcal{J}x - \mathcal{Y} & , \quad \mathcal{J}x \leq \mathcal{Y} \\ 1 & , \quad \mathcal{J}x > \mathcal{Y} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{J}x_n = \frac{1}{n+1}$ olmak üzere $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi düşünüldüğünde her $n > k$ için $\mathcal{Q}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x) < \frac{1}{k}$ olduğundan $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi sol $\mathcal{K}$-Cauchy dizisi, yani buradan sol $\mathcal{Q}$ -Cauchy dizisidir. Ama bu dizi belli bir noktadan sonra her $\mathcal{J}x \in \mathcal{J}X$ için $\mathcal{Q}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x) = 1$ olduğundan sağ $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisi değildir. Dahası bu dizi $\mathcal{Q}$-yakınsak da değildir. Benzer şekilde $\mathcal{Y}_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ olmak üzere $\{\mathcal{Y}_n\}$ dizisi sağ $\mathcal{Q}$ -Cauchydir. Ayrıca $\{\mathcal{Y}_n\}$ dizisi $n > k$ için $\mathcal{Q}(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_k) < \frac{1}{k}$ ve $n < k$ için $\mathcal{Q}(\mathcal{Y}_n, \mathcal{Y}_k) = 1$ olduğundan $\{\mathcal{Y}_n\}$ dizisi sağK-Cauchy olmasına rağmen $\mathcal{Q}^s$-Cauchy değildir.

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

olmak üzere $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ quasi metrik uzayının bir alt uzayı $(A, \mathcal{Q})$ olsun. Bilinen bir noktadan sonra A uzayındaki daki her sağ $\mathcal{Q}$-Cauchy dizisi sabit dizi olduğundan, A

uzayı sağ ζ -tamdır. Ayrıca sol $\mathfrak{q}$ -Cauchy dizisi $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$, A uzayında $\mathfrak{q}$ -yakınsak olmadığından A sol ζ-tam değildir. Ayrıca A nın sağ $\mathcal{K}$ -tam olduğu görülür. Fakat sol K-Cauchy dizisi $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$, A da $\mathfrak{q}$-yakınsak olmadığından A sol $\mathcal{K}$ -tam değildir. Benzer şekilde

$$B = \left\{1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

olmak üzere $(B, \mathfrak{q}), (J\mathrm{X}, \mathfrak{q})$ quasi metrik uzayının bir alt uzayı olmak üzere $(B, \mathfrak{q})$ uzayı sol ζ ve $\mathcal{K}$ -tamdır. Fakat $\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$ dizisi B de $\mathfrak{q}$-yakınsak olmadığından $(B, \mathfrak{q})$ uzayı ne sağ ζ ve $\mathcal{K}$ -tamdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Quasi Metrik Uzayda α -geçişli dönüşümler için Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Önceki bölümlerde metrik uzaylar kavramı incelenip tam metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir. Daha sonra Quasi metrik kavramı verilip birçok örnek irdelenmiştir. Bu bölümde Quasi metrik uzaylarda θ-büzülme dönüşümleri ele alınıp α -geçişli dönüşümler tanımı dikkate alınarak bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilecektir.

Samet tarafından verilen α-geçişlik tanımı ile tam metrik uzaylarda Banach sabit nokta teoreminin birçok genelleştirmesi yapılmıştır.

4.1.1 Tanım JX boştan farklı bir küme, $\mathfrak{T}: J\text{X} \to J\text{X}$ bir dönüşüm ve $\alpha: J\text{X} \times J\text{X} \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\alpha(J\text{x}, J\text{ц}) \geq 1$ durumunu sağlayacak her $J\text{x}, J\text{ц} \in J\text{X}$ için $\alpha(\mathfrak{T}J\text{x}, \mathfrak{T}J\text{ц}) \geq 1$ şartı sağlanıyorsa $\mathfrak{T}$ dönüşümüne α-geçişli dönüşüm denir.

4.1.1 Örnek $\mathfrak{T}: J\text{X} \to J\text{X}$ bir dönüşüm $J\text{X} = \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $J\text{x} \in J\text{X}$ için $\mathfrak{T}J\text{x} = J\text{x}$ ve $\alpha: J\text{X} \times J\text{X} \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu

$$\alpha(J\text{x}, J\text{ц}) = \begin{cases} e^{J\text{x}-J\text{ц}}, & J\text{x} \geq J\text{ц} \\ 0, & J\text{x} < J\text{ц} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mathfrak{T}$ dönüşümü α-geçişlidir.

4.1.2 Örnek $J\text{X} = (0, \infty)$ olmak üzere $\mathfrak{T}: J\text{X} \to J\text{X}$ dönüşümü her $J\text{x} \in J\text{X}$ için $\mathfrak{T}J\text{x} = 2^{J\text{x}}$ ve $\alpha: J\text{X} \times J\text{X} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\alpha(J\text{x}, J\text{ц}) = \begin{cases} 2, & J\text{x} \geq J\text{ц} \\ 0, & J\text{x} < J\text{ц} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mathfrak{T}$ dönüşümü α-geçişlidir.

$(X, \mathfrak{Q})$ bir quasi metrik uzay, $\mathfrak{T}: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Quasi metrik uzayda bir dönüşüm θ-büzülme halini

$$\mathfrak{T}_\alpha = \{(x, y) \in X \times X: \alpha(x, y) \geq 1 \text{ ve } \mathfrak{Q}(\mathfrak{T}x, \mathfrak{T}y) > 0\}$$

şeklindeki küme ile göstereceğiz.

4.1.2 Tanım $(X, \mathfrak{Q})$ bir quasi metrik uzay ve $\mathfrak{T}: X \to X$

$$\mathfrak{Q}(x, y) = 0 \Rightarrow \mathfrak{Q}(\mathfrak{T}x, \mathfrak{T}y) = 0 \tag{4.1.1}$$

şartını sağlayan bir dönüşüm, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ ve $\theta \in \Theta$ olacak şekilde iki fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \mathfrak{T}_\alpha$ için

$$\theta\big(\mathfrak{Q}(\mathfrak{T}x, \mathfrak{T}y)\big) \leq \theta\big(\mathfrak{Q}(x, y)\big)^k \tag{4.1.2}$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in (0,1)$ varsa $\mathfrak{T}$- ye $(\alpha, \theta_{\mathfrak{Q}})$ büzülme dönüşümü denir.

4.1.1 Uyarı Eğer $(X, \mathfrak{Q})$ bir T_1 quasi metrik uzay ise $\mathfrak{T}: X \to X$ dönüşüm (4.1.1) i sağlar.

4.1.2 Uyarı $\mathfrak{T}$, $(X, \mathfrak{Q})$ quasi metrik uzayında bir $(\alpha, \theta_{\mathfrak{Q}})$ büzülme dönüşümü ise her $x, y \in X$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ için $\mathfrak{Q}(\mathfrak{T}x, \mathfrak{T}y) \leq \mathfrak{Q}(x, y)$ şartının sağlandığını 4.1.2 tanımından açıkça görülebilir.

4.1.1 Teorem $(X, \mathfrak{Q})$ bir Hausdorff sol $\mathcal{K}$-tam quasi metrik uzay, $\mathfrak{T}: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(i) $\theta \in \Theta$ olmak üzere $\mathcal{T}$ bir α-geçişli ve $(\alpha, \theta_{\mathcal{Q}})$ büzülme dönüşümü,

(ii) $\alpha(\mathcal{J}x_0, \mathcal{T}\mathcal{J}x_0) \geq 1$ olacak şekilde $\mathcal{J}x_0 \in \mathcal{J}X$ var,

(iii) $\mathcal{T}$, $\tau_{\mathcal{Q}}$ sürekli

şartları sağlınıyorsa $\mathcal{T}$, $\mathcal{J}X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

4.1.1 İspat $\mathcal{J}x_0$ noktası $\alpha(\mathcal{J}x_0, \mathcal{T}\mathcal{J}x_0) \geq 1$ olacak şekilde bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{J}x_n = \mathcal{T}\mathcal{J}x_{n-1}$ olacak şekilde $\mathcal{J}X$ de bir $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi tanımlayalım. $\mathcal{T}$, α -geçişli bir dönüşüm olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_{n+1}) \geq 1$ dir. Eğer $\mathcal{J}x_{n_0} = \mathcal{J}x_{n_0+1}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\mathcal{J}x_{n_0}$ $\mathcal{T}$ nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{J}x_n \neq \mathcal{J}x_{n+1}$ olsun. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{Q}$ bir quasi metrik olduğundan

$$\mathcal{Q}\left(\mathcal{J}x_{n,}\mathcal{T}\mathcal{J}x_n\right) = \mathcal{Q}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}x_{n-1}}, \mathcal{T}\mathcal{J}x_n) > 0$$

olur. $\mathcal{T}$, $(\alpha, \theta_{\mathcal{Q}})$ büzülme olduğundan

$$\theta\left(\mathcal{Q}(\mathcal{J}x_{n+1}, \mathcal{J}x_n)\right) = \theta(\mathcal{Q}(\mathcal{T}\mathcal{J}x_n, \mathcal{T}\mathcal{J}x_{n-1}))$$

$$\leq \left[\theta\left(\mathcal{Q}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_{n-1})\right)\right]^k \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n = \mathcal{Q}(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_{n+1})$ olsun. (4.1.3) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \theta(\gamma_n) \leq \left[\theta\left(\mathcal{Q}(\mathcal{J}x_0, \mathcal{J}x_1)\right)\right]^{k^n} \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limt alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \theta(\gamma_n) = 1$$

elde edilir. (θ_2) şartından $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0^+$ bulunur.

Böylece (θ_3) şartından $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0,\infty]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(\gamma_n) - 1}{(\gamma_n)^r} = \ell$$

bulunur. Varsayalım ki $\ell < \infty$ ve $\mathrm{B} = \frac{\ell}{2} > 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için ve limit tanımı dikkate alındığında

$$\left| \frac{\theta(\gamma_n) - 1}{(\gamma_n)^r} - \ell \leq \mathrm{B} \right|$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu eşitsizlikle her $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta(\gamma_n) - 1}{(\gamma_n)^r} \geq \ell - \mathrm{B} = \mathrm{B}$$

sağlanır. Bu durumda $\mathrm{A} = \frac{1}{B}$ olduğunda her $n \geq n_0$ için

$$n.(\gamma_n)^r \leq An[\theta(\gamma_n) - 1]$$

olur. Kabul edelim ki $\ell = \infty$ ve $B > 0$ keyfi bir pozitif sayı olsun. Limit tanımından her $n \geq n_0$ için

$$\frac{\theta(\gamma_n) - 1}{(\gamma_n)^r} \geq \mathrm{B}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\mathrm{A} = \frac{1}{B}$ olduğunda her $n \geq n_0$ için

$$n.(\gamma_n)^r \leq An[\theta(\gamma_n) - 1]$$

sağlanır. Böylece bütün durumlar sonucunda her $n \geq n_0$ için

$$n.(\gamma_n)^r \leq An[\theta(\gamma_n) - 1]$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda (4.1.4) eşitisizliği kullanılarak her $n \geq n_0$ için

$$n.(\gamma_n)^r \leq An\left[\theta(a_0)^{k^n} - 1\right]$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n{\gamma_n}^r = 0$$

elde edilir. Ayrıca $n \geq n_1$ için

$$\mathcal{G}(\jmath x_n, \jmath x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}} \tag{4.1.5}$$

bulunur. Böylece $m > n > n_1$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için (4.1.5) eşitsizliğinden

$$\mathcal{G}(\jmath x_n, \jmath x_m) \leq \mathcal{G}(\jmath x_n, \jmath x_{n+1}) + \mathcal{G}(\jmath x_{n+1}, \jmath x_{n+2}) + \cdots + \mathcal{G}(\jmath x_{m-1}, \jmath x_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}$$

elde edilir. $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}$ serisi yakınsak olduğundan $\{Jx_{n,}\}$ dizisi, $(JX, \mathcal{Q})$ quasi metrik uzayında bir sol K-Cauchy dizisidir. $(JX, \mathcal{Q})$ sol $\mathcal{K}$-tam, $\{Jx_{n,}\}$ dizisi bu uzayda $\mathcal{Q}$-yakınsak olduğundan $n \to \infty$ için $\mathcal{Q}(z, Jx_{n,}) \to 0$ olacak şekilde $z \in JX$ vardır. $\mathcal{T}$, $\tau_{\mathcal{Q}}$ sürekli olduğundan $n \to \infty$ için

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}z, \mathcal{T}Jx_n) = \mathcal{Q}(\mathcal{T}z, Jx_{n+1}) \to 0$$

dır. JX bir Hausdorff uzay olduğundan $z = \mathcal{T}z$ dir.

4.1.2 Teorem $(JX, \mathcal{Q})$ bir Hausdorff sol $\mathcal{M}$ -tam quasi metrik uzay, $\mathcal{T}: JX \to JX$ bir dönüşüm ve $\alpha: JX \times JX \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(i) $\theta \in \Theta$ olmak üzere $\mathcal{T}$ bir α-geçişli ve $(\alpha, \theta_{\mathcal{Q}})$ büzülme dönüşümü,
(ii) $\alpha(Jx_0, \mathcal{T}Jx_0) \geq 1$ olacak şekilde $Jx_0 \in JX$ var,
(iii) $\mathcal{T}$, $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}}$ sürekli

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{T}$, JX de bir sabit noktaya sahiptir.

4.1.2 İspat $\{Jx_n\}$ iterasyon dizisinin bir sol K-Cauchy dizisi olduğu Teorem 4.1.1 in ispatındaki gibi gösterilebilir. $\{Jx_n\}$ dizisi bu uzayda $\mathcal{Q}^{-1}$ yakınsak ve $(JX, \mathcal{Q})$ uzayı sol $\mathcal{M}$-tam olduğundan $n \to \infty$ için $\mathcal{Q}(Jx_n, z) \to 0$ olacak şekilde bir $z \in JX$ vardır. Ayrıca $\mathcal{T}$ nin $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}}$ sürekliliği ile $n \to \infty$ için

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}Jx_n, \mathcal{T}z) = \mathcal{Q}(Jx_{n+1,}, \mathcal{T}z) \to 0$$

elde edilir. JX Hausdorff olduğundan $\mathcal{T}z = z$ elde edilir.

Eğer JX uzayında sol Smyth tamlığı dikkate alınacak olursa Hausdorffluk şartını kaldırabiliriz. Ancak bu durumda $\mathcal{Q}$-metriği T_1-quasi metrik olmalıdır.

4.1.3 Teorem (JX, $\mathcal{Q}$) bir sol Smyth tam T_1-quasi metrik uzay, $\mathcal{T}$: JX → JX bir dönüşüm ve α: JX × JX → $[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer;

(i) $\theta \in \Theta$ olmak üzere $\mathcal{T}$ bir α-geçişli ve $(\alpha, \theta_{\mathcal{Q}})$ büzülme dönüşümü,
(ii) $\alpha(Jx_0, \mathcal{T}Jx_0) \geq 1$ olacak şekilde $Jx_0 \in J$X var,
(iii) $\mathcal{T}$, $\tau_{\mathcal{Q}}$ veya $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}}$ sürekli

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{T}$, JX de bir sabit noktaya sahiptir.

4.1.3 İspat Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi $\{Jx_n\}$ iterasyon dizisinin bir sol K-Cauchy dizisidir. (JX, $\mathcal{Q}$) sol Smyth tam ve $\{Jx_n\}$ dizisi bu uzayda $\mathcal{Q}^s$ yakınsak olduğundan $n \to \infty$ için $\mathcal{Q}^s(Jx_n, z) \to 0$ olacak şekilde $z \in J$X vardır.

Diğer taraftan; eğer $\mathcal{T}$, $\tau_{\mathcal{Q}}$-sürekli ise $n \to \infty$ için

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}z, \mathcal{T}Jx_n) = \mathcal{Q}(\mathcal{T}z, Jx_{n+1}) \to 0$$

elde edilir. Böylece $n \to \infty$ için

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}z, z) \leq \mathcal{Q}(\mathcal{T}z, Jx_{n+1}) + \mathcal{Q}(Jx_{n+1}, z) \to 0$$

bulunur. Eğer $\mathcal{T}$, $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}}$ sürekli ise $n \to \infty$ için

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}Jx_n, \mathcal{T}z) = \mathcal{Q}(Jx_{n+1}, \mathcal{T}z) \to 0$$

elde edilir. Böylece $n \to \infty$ için

$$\mathcal{Q}(z, \mathcal{T}z) \leq \mathcal{Q}(z, \mathcal{J}x_{n+1}) + \mathcal{Q}(\mathcal{J}x_{n+1}, \mathcal{T}z) \to 0$$

bulunur. $\mathcal{J}X$, T_1-quasi metrik uzay olduğundan $z = \mathcal{T}z$ elde edilir.

Teorem 4.1.3 de $\mathcal{T}$ nin $\tau_{\mathcal{Q}}$ ve $\tau_{\mathcal{Q}^{-1}}$ sürekliliği yerine $\mathcal{J}X$ uzayına aşağıdaki özellikler eklenebilir.

$(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ quasi metrik uzay $\{\mathcal{J}x_n\}$, $\mathcal{J}X$ de bir dizi ve $\mathcal{J}x \in \mathcal{J}X$ olsun. Eğer $\alpha: \mathcal{J}X \times \mathcal{J}X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(\mathcal{J}x_n, \mathcal{J}x_{n+1}) \geq 1$ ve $\mathcal{J}x_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} z$ iken $\alpha(\mathcal{J}x_n, z) \geq 1$ (sırasıyla $\alpha(z, \mathcal{J}x_n) \geq 1$) şartı sağlıyorsa $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ quasi metrik uzayına $A_{\mathcal{Q}}$ (sırasıyla $B_{\mathcal{Q}}$) özelliğine sahiptir denir.

4.1.4 Teorem $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ bir sol Smyth tam T_1 -quasi metrik uzay, $\mathcal{T}: \mathcal{J}X \to \mathcal{J}X$ bir dönüşüm ve $\alpha: \mathcal{J}X \times \mathcal{J}X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer;

(i) $\theta \in \Theta$ olmak üzere $\mathcal{T}$ bir α-geçişli ve $(\alpha, \theta_{\mathcal{Q}})$ büzülme dönüşümü,
(ii) $\alpha(\mathcal{J}x_0, \mathcal{T}\mathcal{J}x_0) \geq 1$ olacak şekilde $\mathcal{J}x_0 \in \mathcal{Y}$ var,
(iii) $\mathcal{J}X$, $A_{\mathcal{Q}}(A_{\mathcal{Q}^{-1}})$ veya $B_{\mathcal{Q}}(B_{\mathcal{Q}^{-1}})$ özelliğine sahip

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{T}$, $\mathcal{J}X$ de bir sabit noktaya sahiptir.

4.1.4 İspat $\{\mathcal{J}x_n\}$ iterasyon dizisinin bir sol K-Cauchy dizisi olduğu Teorem 4.1.1 in ispatındaki gibi gösterilebilir. $\{\mathcal{J}x_n\}$ dizisi bu uzayda $\mathcal{Q}^s$ yakınsak ve $(\mathcal{J}X, \mathcal{Q})$ uzayı sol Smyth tam olduğundan $n \to \infty$ için $\mathcal{Q}^s(\mathcal{J}x_n, z) \to 0$ olacak şekilde bir $z \in \mathcal{J}X$ vardır. Eğer $\mathcal{J}X$, $(A_{\mathcal{Q}})$ veya $(A_{\mathcal{Q}^{-1}})$ özelliğine sahip olduğundan $\alpha(\mathcal{J}x_n, z) \geq 1$ dir. Böylece

$$\mathcal{Q}(z, \mathcal{T}z) \leq \mathcal{Q}(z, \mathcal{J}x_{n+1}) + \mathcal{Q}(\mathcal{J}x_{n+1}, \mathcal{T}z)$$

$$\leq \mathcal{Q}(z, \mathcal{J}x_{n+1}) + \mathcal{Q}(\mathcal{T}\mathcal{J}x_n, \mathcal{T}z)$$

$$\leq \mathcal{Q}(z, \jmath x_{n+1}) + \mathcal{Q}(\jmath x_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $\mathcal{Q}(z, \mathcal{T}z) \to 0$ elde edilir.

Eğer $(B_{\mathcal{Q}})$ veya $(B_{\mathcal{Q}^{-1}})$ özelliğine sahip ise; $\alpha(z, \jmath x_n) \geq 1$ dir. Böylece,

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T}z, z) \leq \mathcal{Q}(\mathcal{T}z, \mathcal{T}\jmath x_n) + \mathcal{Q}(\mathcal{T}\jmath x_n, z)$$

$$\leq \mathcal{Q}(z, \jmath x_n) + \mathcal{Q}(\jmath x_{n+1}, z)$$

olup, $n \to \infty$ için limit alınırsa $\mathcal{Q}(\mathcal{T}z, z) \to 0$ elde edilir. $\jmath X$, T_1 −quasi metrik uzay olduğundan $\mathcal{T}z = z$ elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez çalışmasında ilk olarak metrik uzaylar ve bu uzaylardaki sabit nokta teoremlerine ve θ- büzülme kavramlarına değinilmiştir. Daha sonra quasi metrik uzayın tanımı ve bu uzayın özellikleri incelenmiştir. Çalışmanın esas bölümünde ise α- geçişlilik tanımı kullanılarak metrik uzaylarda çalışılmış olan θ -büzülme dönüşümlerinin bazı genelleştirmelerini, quasi metrik uzayda verip bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu teoremler bir konferans çalışması olarak da sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Alegre, C., Marin, J. and Romeguera, S., A. 2014. Fixed point theorem for generalized contractions involving ω-distances on complete quasi-metric spaces, Fixed Point Theory Applications, 40: 1-8 .

Ali, M. U., Kamran, T. and Shahzad, N. 2014. Best proximity point for α-ψ-proximal contractive multimaps. Abstract and Applied Analysis, Article ID 181598: 1-6.

Altun, I., Hançer, H. A. and Mınak, G. 2015. On a general class of weakly Picard operators. Miskolc Mathematical Notes, 16(1): 25-32.

Altun, I., Olgun, M. and Mınak, G. 2017. Classification of completeness of quasi metric space and some new fixed point results. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 22(2): 371-384.

Durmaz, G., Mınak, G. and Altun, I. 2014. Fixed point results for α-ψ-contractive mapping including almost contractions and applications. Abstract and Applied Analysis, Article ID 869123: 1-10.

Durmaz, G., and Altun, I. 2019. Fixed point results with θ-function on quasi metric space. 3rd International Conference of Mathematical Sciences ICMS, 4-8 September, Istanbul, Turkey.

Gaba, Y. U. 2014. Startpoints and (α-γ)-contractions in quasi-pseudometric spaces. Journal of Mathematics. Article ID 709253: 1-8.

Jleli, M. and Samet B. 2014. A new generalization of the Banach contraction principle. Journal of Inequalities and Applications, 38: 1-8.

Koçak, M. 2009. Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar. Furkan Ofset, 534 sayfa, Eskişehir.

Kumam, P., Vetro C. and Vetro, F. 2013. Fixed points for weak α-ψ -contractions in partial metric spaces. Abstract and Applied Analysis, Article ID 986028: 1-9.

Künzi, H. P. A. and Vajner, V. 1994. Weighted quasi-metrics. Annals of the New York Academy of Sciences, 728: 64-67.

Latif A. and Al-Mezel S. A. 2011. Fixed point results in quasimetric spaces. Fixed Point Theory and Applications. Article ID 178306: 1-9.

Liu, X. D., Chang, S. S., Xiao, Y. And Zhao, L. C. 2016. Some fixed point theorems corcerning (ψ,ϕ) -type contraction in complete metric spaces. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 9(6): 4127-4136.

Marin J., Romeguera S. and Tirado P. 2011. Weakly contractive multivalued maps and ω -distances on complete quasi-metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2: 1-9.

Mucuk, O. 2010. Topoloji ve kategori. Nobel Yayın Dağıtım, 462 sayfa, Ankara.

Reilly, I. L., Subrahmanyam, P. V. and Vamanamurthy, M. K. 1982. Cauchy sequences in quasi-pseudo-metric spaces. Monatshefte für Mathematik, 93: 127-140.

Romeguera, S. 1982. Left *K*-completeness in quasi-metric spaces. Mathematische Nachrichten, 157: 15-23.

Samet, B., Vetro C. and Vetro, P. 2012. Fixed point theorems for α-ψ -contractive type mappings. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 75: 2154-2165.

Soykan, Y. 2012. Metrik Uzaylar Topolojisi. Nobel Yayın Dağıtım, 548 sayfa, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Bahar AYDEMİR

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2018-Halen
Lisans	Samsun 19 Mayıs Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2005-2010

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2012-Halen	MEB	Matematik Öğretmeni

Akademik Aktiviteler