İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER İNCE BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA YÜZEY SH DALGALARININ YAYILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Ali DEMİRCİ

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik Mühendisliği

Ocak 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER İNCE BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA YÜZEY SH DALGALARININ YAYILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mat. Müh. Ali DEMİRCİ
(509051002)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Ocak 2008

Tez Danışmanı	**Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR**
Diğer Jüri Üyeleri	**Doç. Dr. Ali ERCENGİZ (İ.T.Ü.)**
	Yrd. Doç. Dr. Semra AHMETOLAN (İ.T.Ü.)

OCAK 2008

ÖNSÖZ

Bana heyecan veren bu çalışmanın her aşamasında, bilgisi ve tecrübesiyle yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Mevlüt Teymür'e bana gösterdiği sabır için teşekkür ederim.

Çalışma boyunca desteğini ve iyi niyetini her zaman arkamda hissettiğim hocam Yrd. Doç. Dr. Semra Ahmetolan'a teşekkürü borç bilirim.

Tezin yazım aşamasında maddi, manevi desteklerinden dolayı arkadaşlarım Araş. Gör. Ali Dinler ve Ercüment Hançer'e çok şey borçluyum.

Maddi desteklerinden dolayı Tübitak Bilim Adamı Yetiştirme grubuna teşekkür ederim.

Son olarak, gelişimimin her döneminde benden desteklerini esirgemeyen, her türlü sorunumda benimle dertlenen, hayata bakış açımı her zaman olumlu yönde şekillendiren anne ve babama teşekkür ederim.

ARALIK 2007 Ali Demirci

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **iv**
ŞEKİL LİSTESİ **v**
SEMBOL LİSTESİ **vi**
ÖZET **vii**
SUMMARY **viii**

1. GİRİŞ **1**

2. BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA NONLİNEER YÜZEY SH DALGALARI **4**

2.1. Giriş 4
2.2. Bir Tabaka ile Kaplı Elastik Bir Yarım Uzayda Nonlineer Yüzey SH Dalgaları 4
2.3. Lineer Yüzey SH Dalgalarının Yayılması 6

3. İNCE TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA NONLİNEER SH DALGALARININ MODÜLASYONU **10**

3.1. Giriş 10
3.2. İnce Tabaka Yaklaşımı Altında Problemin Tanımı 11
3.3. Lineer Dalga ve Dispersiyon Bağıntısı 12
3.4. Nonlineer SH Dalgalarının Modülasyonu 14
3.5. İnce Tabaka Yaklaşımının Etkinliği 24
3.6. NLS Denkleminin Bazı Çözümleri ve ΓΔ'nın Dalga Sayısına Göre Değişimleri 28

SONUÇLAR **32**

EK A. NEO-HOOKEAN ELASTİK MALZEMELERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ KAYMA HAREKETİ **34**

KAYNAKLAR **42**
ÖZGEÇMİŞ **44**

KISALTMALAR

SH : Shear Horizontal (Enine Kayma)
c.c. : Kompleks Eşlenik
NLS : Nonlineer Schrödinger
sbt. : Sabit

ŞEKİL LİSTESİ

		Sayfa No
Şekil 3.1	**:** Faz hızlarının kh ile değişimi	25
Şekil 3.2	**:** Grup hızlarının kh ile değişimi	26
Şekil 3.3	**:** Γ katsayılarının kh ile değişimi	26
Şekil 3.4	**:** Farklı nonlineer malzeme parametreleri için Δ katsayılarının kh ile değişimi	27
Şekil 3.5	**:** Farklı nonlineer malzeme parametreleri için Δ katsayılarının kh ile değişimi	27
Şekil 3.6	**:** (Sertleşen-Sertleşen) modelinde çeşitli nonlineer malzeme parametreleri için ΓΔ'nın kh'ye göre değişimi	30
Şekil 3.7	**:** (Yumuşayan-Yumuşayan) modeli için çeşitli malzeme tipleri için ΓΔ'nın kh'ye göre değişimi	30
Şekil 3.8	**:** (Yumuşayan-Sertleşen) modeli için çeşitli malzeme tipleri için ΓΔ'nın kh'ye göre değişimi	31

SEMBOL LİSTESİ

w	**:** Açısal Frekans
k	**:** Dalga Sayısı
c	**:** Faz Hızı
V_g	**:** Grup Hızı
μ	**:** Lame Sabiti
β_i	**:** Nonlineer Malzeme Parametreleri
γ	**:** Lineer Malzeme Parametresi
u,v	**:** Yerdeğiştirme Fonksiyonları
ρ	**:** Yoğunluk
n_i	**:** Nonlineer Malzeme Parametreleri
h	**:** Tabaka Kalınlığı
ϵ	**:** Nonlineerliğin Mertebesini Belirten Küçük Bir Parametre

Üst indisler

T	**:** Transpozu

NONLİNEER İNCE BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA YÜZEY SH DALGALARININ YAYILMASI

ÖZET

Bu çalışmada ince tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılmasını modelleyen bir sınır değer probleminin, bu ortamdaki yayılma olayını karakterize eden çözümleri, değişik ölçekler metodu olarak bilinen bir asimptotik yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde elastik dalgaların ve elastik yüzey dalgalarının yayılması ile ilgili problemlerin kısa bir tarihi gelişimi ile birlikte güncel bazı problemler hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, önce farklı bir elastik malzemeden oluşan sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda nonlineer yüzey kayma (SH) dalgalarının yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları verilmektedir. Daha sonra bu problem için lineer harmonik yüzey SH dalgaları incelenmiş ve dispersiyon bağıntısı verilmiştir.

Üçüncü bölümde, önce sonlu kalınlıklı bir tabaka ile kaplı bir yarım uzayda yayılmayı betimleyen denklemler ve sınır koşulları ince tabaka varsayımı altında, yani $h \to 0$ için, yaklaştırılmıştır. Yaklaşım sonucunda yalnızca yarım uzayın yerdeğiştirme fonksiyonu cinsinden yeni bir sınır değer problemi türetilmiştir. Daha sonra ince tabaka yaklaşımı altında türetilen bu sınır değer problemi değişik ölçekler metodu kullanılarak asimptotik olarak incelenmiş ve bu dalgaların self modülasyonunun asimptotik olarak bir nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Bu denklemin nonlineer teriminin katsayısı tabakanın nonlineer özelliklerine bağlıdır. Daha sonra, bu yaklaşımının sonuçlarını tartışmak amacıyla, NLS denkleminin lineer ve nonlineer katsayılarının, seçilen malzeme modelleri için kh ile değişimlerinin grafikleri çizilmiş ve bunlar sonlu tabaka ve lineer ince tabaka sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Son olarak ise, NLS denkleminin katsayılarının çarpımlarının ($\Gamma\Delta$) işaretinin NLS denkleminin çözüm şekillerine etkisi gösterilmiş ve $\Gamma\Delta$ çarpımının kh ile değişimleri çizilerek tabakanın ve yarım uzayın nonlineer özelliklerinin çözüm şeklini kuvvetli bir şekilde etkilediği gösterilmiştir.

PROPAGATION OF SURFACE SH WAVES ON A HALF SPACE COATED WITH A NONLINEAR THIN LAYER

SUMMARY

In this work, we derived solution of a boundary value problem characterizing the propagation of nonlinear surface SH waves on a half space coated with a thin layer by using an asymptotic perturbation method called multiple scales method. The work is formed by three sections.

In the first section, A short history about the development of problems related with the propagation of elastic waves and elastic surface waves is given. In the second section, The equations of motion and boundary conditions, which represent the propagation of nonlinear surface SH waves on a half space coated with a layer, are presented. The layer has a finite and uniform thickness and it is made of a different elastic material that of the half space. Then, the linear harmonic surface SH waves are examined and dispersion relation is given for this problem.

In the third section, equations and boundary conditions which represent the propagation of waves on a half space coated with finite layer are approximated under the thin layer assumption (i.e. $h \rightarrow 0$). Under this approximation, a new boundary value problem involving only the diplacement function of the half space as an unkonwn is derived. In additon to this, the derived boundary value problem is examined asymptotically by using the method of multiple scales and it is shown that the nonlinear self modulation of surface SH waves can be characterized asymptotically by a Nonlinear Schrödinger (NLS) equation. The coefficient of the nonlinear term of NLS equation depends on the nonlinear properties of the layer. Then, for examining the result of the thin layer approximation, the change of linear and nonlinear terms of NLS equation with respect to kh is drawn and they are compared with the results of the finite layer case and the linear thin layer approximation. Finally, the effect of the products of the terms of NLS equation on the solutions characteristics of NLS equation is presented. Also, the change of $\Gamma\Delta$ with respect to kh is drawn and by the way, the strong effect of nonlinear properties of layer and half space on solution characteristics of NLS equation is demonstrated.

1. GİRİŞ

Günümüzde sismoloji, malzemelerin tahribatsız muayenesi ve elektronik sinyal işleme cihazları gibi birçok alanda uygulamalara sahip olan elastik ortamlarda dalga yayılması ile ilgili çalışmaların başlangıcı 19. yüzyılda ışığın yayılımı konusunda yapılan çalışmalarla paralellik göstermektedir. Navier'in 1821 yılında Paris Akademesine sunduğu elastik katıların titreşim ve denge denklemlerinin türetildiği çalışması bir başlangıç olarak kabul görmektedir [1,20]. Bu çalışmanın sonuçlarını Fresnel; kendisinin ve Young' un ayrı ayrı yaptıkları birbirine dik iki düzlemde polarize olmuş iki ışık demetinin girişim yapmadıklarını ortaya çıkaran deneysel araştırmalarının yorumunun enine titreşimler hipoteziyle yapılabileceğini savunarak kullanmıştır. Fresnel'in vurguladığı bu paralellik (ışık ve elastisite arasında) yine aynı dönemdeki matematikçiler Cauchy ve Poisson'un konuyla ilgilenmelerine yol açmıştır[20]. 1822 yılına gelindiğinde Cauchy şimdiki sürekli ortamlar mekaniğinin temelleri de sayılan,elastiside teorisine hareketin gerilme ve yerdeğiştirme denklemleri kavramlarını getirmiştir. Bu temelle birlikte 1829 senesinde Poisson sonsuz ortamda elastik dalga yayılımı olayının genel halde enine (kayma) ve boyuna (sıkışma) dalgalarının bir birleşimi olduğunu gösterdi [20]. Daha sonra 1852 yılında Láme, Poisson'un çalışmalarını daha ileri bir boyuta taşıyarak, genel bir elastodinamik yerdeğiştirme alanının herbiri bir dalga denklemini sağlayan bir skaler potansiyelin gradyantı ile bir vektör potansiyelin rotasyonelinin toplamı olarak temsil edilebileceğini göstermiştir.

Elastodinamik yerdeğiştirmeler üzerine yapılan çalışmalar 19. yüzyılın ikinci yarısında da devam etmiş,1849 yılına gelindiğinde Stokes sınırsız homojen izotrop elastik bir lineer ortamda Poisson'un ürettiği sonuçları tekrar üretmiştir. Yine aynı dönemlerde, Cauchy ve Green düzlem dalgaların kristal yapıya sahip ortamlarda yayılmasını incelemişlerdir. Ayrıca, sınırsız bir elastik ortamın bir noktasına ani olarak etkiyen kuvvetlerin oluşturduğu yerdeğiştimeleri temsil eden temel tekil çözümler ilk defa Stokes tarafından incelenmiş, daha sonra Love gecikmiş potansiyelleri kullanarak zamana bağlı yük problemini çözmüştür [1,20]. Buna ek olarak, Love 1882'de Kirchoff tarafından homojen olmayan dalga denkleminin çözümleri için geliştirilen integral temsilini elastodinamik için genelleştirmiştir [1].

1887 senesine gelindiğinde Rayleigh, homojen izotrop bir yarım uzayın serbest yüzünde yayılan, yerdeğiştirme vektörü, yüzeyin normal vektörü ile yayılma doğrultusunun oluşturduğu düzlemde uzanan yüzey dalgalarının varolduğunu göstermiştir [1,2,3,18]. Daha

sonraki tarihlerde sismografik kayıtlardan yararlanarak Rayleigh ve Stokes tarafından ortaya atıldığı gibi, yerdeğiştirmelerin boyuna,enine ve Rayleigh yüzey dalgalarına karşı gelen üç parçadan oluştuğu doğrulanmıştır[3].

Enine, boyuna ve Rayleigh yüzey dalgalarında dalgaların faz hızları değişmezdir. Diğer taraftan çubuklar, plaklar ve tabakalı yarım uzaylar gibi homojen, izotrop,linear elastik malzemelerden meydana gelen ve dalga kılavuzları olarak adlandırılan ortamlarda yayılan dalgaların faz hızları, sınır yüzeylerinde oluşan yansımalar nedeniyle, dalga sayısına bağlı olarak değişirler, yani dispersif olurlar. Hem non-dispersif hem de dispersif lineer elastik dalgalara ait birçok problem pratik uygulamala alanlarındaki gelişmelere paralel olarak ağırlıklı olarak 20. yüzyılın başından günümüze kadar pek çok araştırmanın konusu olmuşlardır [1,2,18].

Son 50 yıla gelindiğinde lineer teorinin yanında elastik dalgaların yayılmasına bünyesel nonlineerliğin etkilerinin de incelenmeye başlandığı görülmektedir. Bu konudaki ilk çalışmalar sonsuz ortamlarda ivme ve şok dalgalarının yayılması üzerine yapılmışlardır [8]. Daha sonraları hem sınırlı hem de sonsuz ve yarı sonsuz ortamlarda sonlu statik yerdeğiştirmeler üzerine eklenen sonsuz küçük yerdeğiştirmelere sahip dalga yayılması problemleri incelenmiştir. Bu problemlerin yapılarına bakıldığında lineer kısmi türevli denklemlerle modellendikleri, buna karşılık malzemelerin nonlineer etkilerinin katsayı fonksiyonlarında ortaya çıktığı görülmektedir. Bu şekilde yapılan modellerde zamandan bağımsız şekil değiştirmelerin (bünyenin nonlineer özelliklerinin) lineer yayılma olayına etkileri incelenmeye çalışılmıştır[8]. Bu çalışmalara ek olarak, daha önce farklı türden çalışmalarda (hidrodinamik, plazma fiziği gibi) oldukça sık kullanılan asimptotik yöntemler kullanılarak, dalga yayılması olaylarında dispersiyon etkisinin ortaya çıkmasına neden olan sınırlara sahip nonlineer elastik ortamlarda çeşitli problemler incelenmiştir.[12,13,14,21].

Homojen,izotrop ve sıkıştırılabilir farklı türden malzemelerden oluşturulan sonlu kalınlıklı bir tabaka ile kaplı elastik bir yarı sonsuz uzayda sonlu genlikli nonlineer yüzey kayma dalgalarının (yüzey SH dalgaları) yayılımı problemi [12]'de incelenmiştir. [12]'de yayılma olayını betimleyen bir nonlineer sınır değer probleminin asimptotik çözümü inşa edilmiştir. Asimptotik analizde, zayıf nonlineerlikle dispersiyon etkisi dengelenerek, dalga modülasyonunun asimptotik olarak bir nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra aynı problem tabakanın ince ve lineer elastik bir malzemeden yapıldığı varsaılarak ele alınmış ve farklı bir analizle dalga modülasyonu için bir NLS denklemi türetilmiştir[14]. Bu son çalışma daha önce [12]'de yapılan çalışmayla karşılaştırıldığında şu gözlemler yapılabilir. [12]'de yapılan çalışmada tabaka kalınlığı ile ilgili bir kısıtlama yoktur. Dolayısı ile elde edilen NLS denkleminin katsayıları dispersiyon bağıntısının bütün dalları için geçerlidir. Diğer

taraftan nonlineer terimin katsayısı da hem yarım uzayın hem de tabakanın nonlineerliğine bağlı olarak hesaplanmıştır. [14]'de ise tabaka lineer kabul edildiği için tabakanın nonlineerliğine bağlılık ortaya çıkmamaktadır. [12]'de gözlendiği gibi k dalga sayısını, h 'da tabaka kalınlığını göstermek üzere $kh \to 0$ için NLS denkleminin nonlineer teriminin katsayısının davranışını yarım uzayın nonlineerliğinin baskın olarak etkilemesine rağmen büyük kh 'lar için tabakanın nonlineerliği etkin olmaya başlamaktadır. Bu nedenle bu çalışmada ince fakat nonlineer bir tabaka ile kaplı bir yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması tekrar ele alınmıştır.

2. Bölümde [12]'de incelenen problem tanımlanmış ve karşılaştırma yapmak için gerekli olduğundan harmonik lineer dalgaların yayılması özetlenmiş ve dispersiyon bağıntısı türetilmiştir. 3. Bölümde ise bölüm 2'de verilen ve problemi betimleyen nonlineer sınır değer problemi ince tabaka varsayımı altında, $h \to 0$ için yaklaştırılmıştır. Tabakaya ait denklem tabaka kalınlığı üzerinde integre edilerek ve serbest yüzey ve ara yüzey üzerindeki sınır koşulları da kullanılarak, üst tabakanın hareket denklemi ve bu sınır koşullarını yaklaşık olarak temsil eden yarım uzayın yerdeğiştirme fonksiyonu cinsinden tek bir sınır koşulu elde edilmiştir. Yalnızca yarım uzayın yerdeğiştirme fonksiyonunu içeren bu yeni sınır değer problemi [12]'de kullanılan ve değişik ölçekler yöntemi olarak adlandırılan asimptotik yöntemle incelenmiş ve nonlineer dalgaların self modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden bir NLS denklemi elde edilmiştir. Bu denklemin nonlineer teriminin katsayısı tabakanın nonlineer özelliklerine bağlıdır. Daha sonra bu yaklaşımının sonuçlarını tartışmak için NLS denkleminin lineer ve nonlineer terimlerinin katsayılarının, seçilen malzeme modelleri için, kh ile değişimlerinin grafikleri çizilmiş ve bunlar [12]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Genel olarak dispersiyon bağıntısının ilk dalı üzerinde $kh < 1$ için sonuçlar iyi bir uyuşma sergilemektedir. Ayrıca $kh \ll 1$ için tabakanın nonlineerliğinin etkisi çok çok küçük olmasına rağmen $kh = \mathcal{O}(1)$ civarında bile bu nonlineerliğin etkisi ortaya çıkmaktadır. Son olarak, bilindiği üzere NLS denkleminin çözümlerinin davranışları, denklemin katsayı fonksiyonlarının çarpımının işaretine bağlı olduğu için[10-11], tabakaları meydana getiren malzemelerin lineer özellikleri sabit tutulup, nonlineer malzeme sabitleri değiştirilerek yapılan analizle NLS denkleminin katsayılarının dalga sayısına göre değişimleri elde edilerek, çözüm karekteristiği üzerindeki etkisi tartışılmıştır.

2. BİR TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA NONLİNEER YÜZEY SH DALGALARI

2.1 Giriş

Bu bölümde farklı bir elastik malzemeden oluşan sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda nonlineer yüzey kayma (SH) dalgalarının yayılmasını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları verilmektedir. Yüzey SH dalgaları, genelleştirilmiş kayma hareketi olduklarından bu denklemler ve sınır koşulları Ek. A'da verilen sonuçlar kullanılarak elde edilmektedirler.

Çalışmada sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılması inceleneceğinden, denklemler ve sınır koşulları kubik nonlineer terimlerden yüksek mertebeden olanlar ihmal edilerek yaklaştırılmışlardır. Daha sonra da ileriki bölümlerde yapılacak karşılaştırmalarda gerektiği için lineer harmonik yüzey SH dalgaları incelenmiş ve dispersiyon bağıntısı verilmiştir.

2.2 Bir Tabaka İle Kaplı Elastik Bir Yarım Uzayda Nonlineer Yüzey SH Dalgaları

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatlarını sıra ile (x_1,x_2,x_3) ve (X_1,X_2,X_3) sıralı sayıları ile gösterelim. Doğal durumda, h tabakanın kalınlığı olmak üzere,

$$P_1 = \{(X_1,X_2,X_3)|\ 0 \le X_2 \le h,\ -\infty < (X_1,X_3) < \infty\} \tag{2.1a}$$

bölgesini dolduran ve elastik bir malzemeden oluşan sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka, başlangıç konumunda

$$P_2 = \{(X_1,X_2,X_3)|\ -\infty \le X_2 \le 0,\ -\infty < (X_1,X_3) < \infty\} \tag{2.1b}$$

bölgesini dolduran ve tabakadan farklı bir elastik malzemelerden oluşan yarım uzayı kaplamaktadır. Bu tabakalı yarım uzayda X_1 ekseni boyunca yayılan ve

$$x_k = X_K\delta_{kK} + u_3^{(m)}(X_\Delta,t)\delta_{k3} \quad m = 1,2 \tag{2.2}$$

denklemleri ile tanımlanan kayma dalgalarını (SH dalgalarını) gözönüne alalım. Burada $u_3^{(1)}$ ve $u_3^{(2)}$, sırası ile P_1 ve P_2 tabakalarındaki noktaların X_3 yönündeki yerdeğiştirmelerini belirtmektedirler. Başta buradaki yerdeğiştirmeler olmak üzere alan büyüklükleri üze-

rindeki büyüklükler ait oldukları tabakayı belirtmektedir (üst indis 1 P_1 'e, üst indis 2 ise P_2 tabakasına ait olduğunu belirtmektedir). $X_2 = 0$ ara yüzeyi boyunca yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğunu ve $X_2 = h$ serbest yüzeyinde de gerilmelerin sıfir olduğunu; ayrıca $X_2 \longrightarrow -\infty$ için yerdeğiştirmenin de sıfira gittiğini kabul edelim.

Tabakaların sıkışmaz hiperelastik neo-Hookean malzemelerden oluştuğunu ve bunların iç enerji fonksiyonlarının

$$\Sigma^{(m)} = \Sigma^{(m)}(I^{(m)}) \quad m = 1,2 \tag{2.3}$$

şeklinde olduklarını varsayalım. Bu aşamada maddesel koordinatlar (X_1, X_2, X_3) yerine (X, Y, Z) ve $u_3^{(1)} = u$, $u_3^{(2)} = v$ kullanalım. Bu şekide incelenen probleme ait hareket denklemleri (A.38)'den

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\Phi^{(1)}\frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Phi^{(1)}\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = \rho_0^{(1)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\Phi^{(2)}\frac{\partial v}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\Phi^{(2)}\frac{\partial v}{\partial Y}\right) = \rho_0^{(2)}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\Phi^{(m)} = 2\frac{\partial \Sigma^{(m)}}{\partial I^{(m)}}$$

dır.

$Y = 0$ da yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu ve $Y = h$ serbest yüzeyinde gerilmenin sıfir olduğu ayrıca $Y \longrightarrow -\infty$ iken $v \longrightarrow 0$ olduğu kabul edilmişti. Bu varsayımlar dikkate alınarak ve (A.37) 'de kullanılarak aşağıdaki sınır koşulları elde edilir [19,22];

$$Y = h \text{ 'de} \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \tag{2.6}$$

$$Y = 0 \text{ 'da} \quad u = v \qquad \text{ve} \qquad \Phi^{(1)}\frac{\partial u}{\partial Y} = \Phi^{(2)}\frac{\partial v}{\partial Y} \tag{2.7a,b}$$

$$Y \longrightarrow -\infty \qquad v \longrightarrow 0 \quad . \tag{2.8}$$

Sonlu fakat küçük genlikli dalgalar inceleneceği için bir önceki kısımda yapılan analiz ile K^4 [K , (A.6) 'da tanımlandığı gibi yerdeğiştirme gradyanlarına bağlıdır.] ve daha yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse (2.4-8) denklemleri ve sınır koşulları aşağıdaki yaklaşık formları alırlar;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = n_1\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}Q(u)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right)\right\} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\right) = n_2\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial v}{\partial X}Q(v)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v)\right)\right\} \tag{2.10}$$

$$Y = h \text{ ıde} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \tag{2.11}$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u = v \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma\frac{\partial v}{\partial Y} = \gamma\beta_2\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v) - \beta_1\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u) \tag{2.12a,b}$$

$$Y \longrightarrow -\infty \qquad\qquad v \longrightarrow 0 \tag{2.13}$$

Yukarıdaki denklemlerdeki c_m , n_m , γ , β_m malzeme sabitleri, $m = 1,2$ aşağıda tanımlanmaktadırlar (A.49);

$$c_m^2 = \frac{\mu_m}{\rho_0} \ , \ n_m = \frac{4\alpha_2^{(m)}}{\rho_0} \ , \ \mu_m = 2\alpha_1^{(m)}$$

$$\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1} \ , \ \beta_m = \frac{n_m}{c_m^2} \tag{2.14}$$

ve Q nonlineer operatörü de (A.51)'de tanımlandığı gibi

$$Q(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y}\right)^2 \tag{2.15}$$

dir. Ayrıca c_1 birinci ortamda, c_2 de ikinci ortamda yayılan lineer kayma dalgalarının hızlarını göstermektedirler.

2.3 Lineer Yüzey SH Dalgalarının Yayılması

Sonlu ve küçük genlikli SH tipi yüzey dalgalarının yayılımını ifade eden (2.9-13) nonlineer sınır değer probleminin çözüm karakterlerinin daha sonraki bölümde tanımlayacağımız ince tabaka yaklaşımı ile elde edeceğimiz sınır değer probleminin çözüm karakterleriyle karşılaştırmak için gerekli olacak lineer dalga yayılma probleminin çözümünün karakterini belirleyen dispersiyon bağıntısı adı verilen bağıntı bu bölümde elde edilecektir. Bu amaçla, lineer dalgaları modelleyen sınır değer problemi, (2.9-10)'da $n_1$ve n_2 nonlineer malzeme parametreleri sıfır alınarak aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) = 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = 0 \tag{2.17}$$

$$Y = h \text{ 'de} \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \tag{2.18}$$

$$Y = 0 \text{ 'da } u = v \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} - \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \tag{2.19}$$

$$Y \longrightarrow -\infty \qquad v \longrightarrow 0 \tag{2.20}$$

Pozitif X ekseni boyunca yayılan harmonik dalgalar için (2.16-20) sınır değer probleminin çözümlerini

$$u = U(Y) e^{i(kX - wt)} + c.c. \tag{2.21}$$

$$v = V(Y) e^{i(kX - wt)} + c.c. \tag{2.22}$$

şeklinde arayabiliriz. Burada k dalga sayısını, w açısal frekansı ve "c.c." sembolü de önceki terimin kompleks eşleniğini göstermektedir. Dalgaların faz hızı

$$c = \frac{w}{k} \tag{2.23}$$

olmak üzere (2.21-22) çözümlerini sırasıyla (2.16-17) denklemlerinde kullanılırsa U ve V için

$$\frac{d^2 U}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) U = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{d^2 V}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) V = 0 \tag{2.25}$$

denklemi elde edilir. (2.20) sınır koşulunun sağlanması için (2.25) denkleminin çözümlerinin hiperbolik olması gereklidir. Bu tür bir çözüm için de

$$c < c_2 \tag{2.26}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Lineer kayma dalgalarının yayılma hızları ile faz hızı arasındaki $c_1 < c_2$ kabulü altında oluşan $c_1 < c < c_2$ ve $c < c_1 < c_2$ durumları farklı karakterdeki çözümleri ortaya çıkarmaktadırlar. İlk olarak, $c_1 < c < c_2$ durumunu inceleyelim.

Bu aşamada (2.24-25) denklemlerinin çözümleri (2.20) sınır koşulu da dikkate alınarak ve (2.23) 'de kullanılarak,

$$p_1^2 = \left(\frac{w^2}{c_1^2} - k^2\right) > 0 \ , \ p^2 = \left(k^2 - \frac{w^2}{c_2^2}\right) > 0 \tag{2.27}$$

olmak üzere,

$$U = Ae^{ip_1 Y} + Be^{-ip_1 Y} \tag{2.28}$$

$$V = Ce^{pY} \tag{2.29}$$

olarak elde edilirler. Bu sonuçlarla birlikte (2.21) ve (2.22) 'de verilen çözümler (2.18-19) sınır koşullarında kullanılırlarsa

$$\mathbf{U} = (A, B, C)^T \tag{2.30}$$

ve

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} ip_1 e^{ip_1 h} & -ip_1 e^{-ip_1 h} & 0 \\ ip_1 & -ip_1 & -\gamma p \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

olarak tanımlanmak üzere $\mathbf{U}$ vektörü için

$$\mathbf{WU} = 0 \tag{2.32}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Sıfırdan farklı u ve v çözümleri için (2.32) sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması gereklidir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için de

$$\det \mathbf{W} = 0 \tag{2.33}$$

olması gereklidir. Bu koşuldan

$$\det W = \gamma p - p_1 \tan(hp_1) = 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. (2.34) bağıntısı lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısıdır ve dalga yayılımının karakterinde çok büyük öneme sahiptir. Bu bağıntı değişkenleri (w,k) olan bir denklemdir. (2.34) denklemi

$$D_1(w,k) = 0 \tag{2.35}$$

şeklinde ifade edilirse, bu yapının k dalga sayısına bağlılığı açık formda çalışmanın ilerleyen aşamalarında elde edilecektir.

Son olarak, $c < c_1 < c_2$ durumunu inceleyelim. Bu eşitsizliğin sağlandığı durumda (2.24-25) denklemlerinin çözümleri (2.20) sınır koşulu da dikkate alınarak ve (2.23) 'de kullanılırlarsa,

$$z_1^2 = \left(k^2 - \frac{w^2}{c_1^2}\right) > 0 \ , \ z_2^2 = \left(k^2 - \frac{w^2}{c_2^2}\right) > 0 \tag{2.36}$$

olmak üzere,

$$U = Ae^{z_1 Y} + Be^{z_2 Y} \tag{2.37}$$

$$V = Ce^{z_2 Y} \tag{2.38}$$

olarak elde edilirler. Bir önceki durumda olduğu gibi, bulduğumuz (2.37-38) çözümlerini (2.21-22) çözümleriyle birlikte (2.18-19) sınır koşullarında yerine kullanırsak

$$\mathbf{U}^{'} = (A, B, C)^T \tag{2.39}$$

ve

$$\mathbf{W}^{'} = \begin{bmatrix} z_1 e^{z_1 h} & z_1 e^{z_1 h} & 0 \\ z_1 & z_1 & -\gamma z_2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

olarak tanımlanmak üzere $\mathbf{U}'$ vektörü için

$$\mathbf{W}^{'}\mathbf{U}^{'} = 0 \tag{2.41}$$

homojen cebrik denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin de sıfır olmayan çözümlerinin olabilmesi için

$$\det \mathbf{W}^{'} = 0 \tag{2.42}$$

olması gereklidir. Buradan da

$$z_1 + \gamma z_2 \tanh(h z_1) = 0 \tag{2.43}$$

bağıntısının sağlanması gerektiği ortaya çıkmaktadır.Bu denklemin sol tarafı $c < c_1 < c_2$ olduğu için daima pozitiftir ve dolayısı ile bir reel k değeri için w çözümü yoktur. Sonuç olarak faz hızı $c < c_1 < c_2$ eşitsizliğini sağlayan SH tipi yüzey dalgaları ilgilendiğimiz tabakalı ortamda var olamazlar.

3. İNCE TABAKA İLE KAPLI ELASTİK BİR YARIM UZAYDA NONLİNEER YÜZEY SH DALGALARININ MODÜLASYONU

3.1 Giriş

Farklı bir elatik malzemeden oluşan sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılmasını modelleyen denklemler [(2.9) ve (2.10) denklemleri] ve sınır koşulları [(2.11), (2.12) ve (2.13) denklemleri] bir önceki bölümde verilmişlerdir. Bu nonlineer sınır değer probleminin nonlineer dalga modülasyonunu karakterize eden asimptotik çözümü [12]'de verilmiş ve self modülasyonun bir NLS denklemi ile betimleneceği gösterilmiştir. Daha sonra bu problem nonlineer bir yarım uzayın lineer malzemeden oluşan ince tabaka ile kaplı olması kabulü altında incelenmiş [14] ve self modülasyonu için bir NLS denklemi türetilmiştir. Giriş kısmında da bahsedildiği gibi bu çalışmada elde edilen sonuçlar çok küçük dalga sayıları için ve dispersiyon bağıntısının ilk dalı üzerinde geçerlidir. Ayrıca tabaka lineer kabul edildiği için NLS denkleminin nonlineer katsayısı yalnızca yarım uzayın nonlineer parametresine bağlı olmaktadır. Diğer taraftan [12] 'de gözlemlendiği gibi $kh \to 0$ için NLS denkleminin nonlineer teriminin katsayısının davranışını yarım uzayın nonlineerliğinin baskın olarak etkilemesine rağmen $kh \to 1$ ve $kh > 1$ için tabakanın nonlineerliğinin de etkisi başlamaktadır. Hatta $kh \gg 1$ için tabakanın nonlineerliğinin etkisi daha baskın olmaktadır. Bu nedenle bu bölümde ince fakat nonlineer bir tabaka ile kaplı bir yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması incelenmektedir. Bu amaçla önce sonlu kalınlıklı bir tabaka ile kaplı bir yarım uzayda yayılmayı betimleyen (2.9)-(2.13) denklemleri ince tabaka varsayımı altında, yani $h \to 0$ için, yaklaştırılmaktadır. Yaklaşım sonucunda yalnızca yarım uzayın yerdeğiştirme fonksiyonu cinsinden yeni bir sınır değer problemi türetilmektedir. Daha sonra bu yeni problem değişik ölçekler yöntemi kullanılarak asimptotik olarak incelenmekte ve nonlineer self modülasyonu asimptotik olarak karakterize eden bir NLS denklemi türetilmektedir. Bu denklemin nonlineer teriminin katsayısı tabakanın nonlineer özelliklerine bağlıdır. Daha sonra bu yaklaşımın sonuçlarını tartışmak için NLS denkleminin lineer ve nonlineer terimlerinin katsayılarının, seçilen malzeme modelleri için, kh ile değişimlerinin grafikleri çizilmiş ve bunlar [12] 'de elde edilen sonuçlarla ve lineer tabaka sonuçları ile karşılaştırılmışlardır.

3.2 İnce Tabaka Yaklaşımı Altında Problemin Tanımı

Bu bölümde ince tabakalı ile kaplı elastik bir yarım uzayda Nonlineer Yüzey SH Dalgalarının yayılımı probleminin denklemlerini (2.9-13) sınır değer problemi kullanarak üreteceğiz. İlgilendiğimiz problemde h kalınlığında üst ince tabakanın etkisini incelemek istediğimizden artı olarak bir analize ihtiyacımız olacaktır. Bu aşamada (2.9) denklemini kalınlık aralığında $[0,h]$, Y üzerinden integre edip, (2.11) sınır koşulunu da kullanırsak,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^h u dY - c_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}\int_0^h u dY - \left.\frac{\partial u}{\partial Y}\right|_{Y=0}\right)$$

$$+n_1\left(\left.\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right|_{Y=0} - \frac{\partial}{\partial X}\int_0^h \frac{\partial u}{\partial X}Q(u)dY\right) = 0 \tag{3.1}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, (2.12b) koşulunun her terimi c_1^2 ile çarpılıp düzenlenirse,

$$Y = 0 \text{ 'da, } \quad c_1^2\frac{\partial u}{\partial Y} + n_1\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u) = c_1^2\gamma\beta_2\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v) + c_1^2\gamma\frac{\partial v}{\partial Y} \tag{3.2}$$

elde edilir. Bu sonuç (3.1)'de kullanılırsa,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^h u dY - c_1^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}\int_0^h u dY + \left. c_1^2\gamma\frac{\partial v}{\partial Y}\right|_{Y=0}$$

$$+ \left. c_1^2\gamma\beta_2\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v)\right|_{Y=0} - n_1\frac{\partial}{\partial X}\int_0^h \frac{\partial u}{\partial X}Q(u)dY = 0 \tag{3.3}$$

bağıntısı elde edilir. (2.12b) de $\dfrac{\partial u}{\partial Y}$ dışındaki terimler sağ tarafta toplanır ve sonuç ifadenin karesi alınırsa

$$\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 = \gamma^2\left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2 + 2\gamma^2\beta_2\left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2 Q(v) + ... \tag{3.4}$$

yazılır. Bu çalışmada çok küçük yer değiştirmeleri incelediğimiz için (3.4) 'ün sağ taraftaki ilk terimi almak yeterli olacaktır. Diğer terimler yerdeğiştirme gradyanlarına göre dördüncü mertebedendirler. Böylece,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 \simeq \gamma^2\left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2 \tag{3.5}$$

yaklaşımı yapılabilir. Buna ek olarak, ince tabakanın kalınlığı h yeterince küçük olduğu için (3.3)'deki integral içeren terimlere Euler yaklaşımı

$$\int_0^h f(x)dx \cong \int_0^h f(0)dx = hf(0) \ , \ f(x) = u(x,0,t) \tag{3.6}$$

uygulanırsa ve (2.12a)'den elde edilen $\dfrac{\partial u(X,0,t)}{\partial X} = \dfrac{\partial v(X,0,t)}{\partial X}$ ile (3.5) bağıntısı (3.3)'te kullanılırsa

$$h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - hc_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + c_1^2\gamma\frac{\partial v}{\partial Y} + c_1^2\gamma\beta_2\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v)$$

$$= hn_1\frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{\partial v}{\partial X}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2\right]\right\} \ , \ Y = 0 \tag{3.7}$$

elde edilir.

Bu şekilde yapılan yaklaştırma ile ince tabaka için yazılan denklem ve $Y = h$ ve $Y = 0$ 'daki sınır koşulları alttaki tabaka için yazılan denklemin $Y = 0$ 'daki sınır koşuluna indirgenmiştir. Böylece problemimiz (2.10),(2.13) ve (3.7) kullanılarak aşağıdaki sınır değer problemi olarak ifade edilebilir:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\right) = n_2\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial v}{\partial X}Q(v)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v)\right)\right\} \tag{3.8}$$

$Y = 0^{'}$ da $h\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - hc_1^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2} + c_1^2\gamma\dfrac{\partial v}{\partial Y} + c_1^2\gamma\beta_2\dfrac{\partial v}{\partial Y}Q(v)$

$$= hn_1\frac{\partial}{\partial X}\left\{\frac{\partial v}{\partial X}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2\right]\right\} \tag{3.9}$$

$$Y \longrightarrow -\infty \qquad\qquad v \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

3.3 Lineer Dalga ve Dispersiyon Bağıntısı

Sonlu ve küçük genlikli SH tipi dalgalarının yayılımını ifade eden (3.8-10) nonlineer sınır değer probleminin asimptotik çözümlerini bulmadan önce daha sonraki analizlerimizde birçok noktayı açıklamamızı kolaylaştırması için bölüm 2.3'te yaptığımız gibi, önce incelenen ortamdaki lineer dalgaların yayılımı incelenecektir. Lineer dalgaları modelleyen sınır değer problemi, (3.8-10)'da n_1, n_2 ve β_2 katsayıları sıfır alınarak şu şekilde ifade edilir;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = 0 \tag{3.11}$$

$$Y = 0\text{'da} \qquad h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - h c_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + c_1^2 \gamma \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \tag{3.12}$$

$$Y \longrightarrow -\infty \qquad\qquad v \longrightarrow 0 \tag{3.13}$$

Pozitif X ekseni boyunca yayılan harmonik dalga için (3.11-13) sınır değer probleminin çözümünü

$$v = V(Y) e^{i(kx - wt)} + c.c \tag{3.14}$$

şeklinde arayabiliriz.(3.14) çözümü (3.11)'de kullanılırsa V için

$$\frac{d^2 V}{dY^2} + k^2 \left(\frac{c^2}{c_2^2} - 1 \right) V = 0 \tag{3.15}$$

denklemi elde edilir. (3.13) sınır koşulunun sağlanması için (3.15) denkleminin çözümleri hiperbolik fonksiyonlar olmalıdırlar. Bu tür bir çözüm için de

$$c < c_2 \tag{3.16}$$

olmalıdır. Lineer kayma dalgalarının yayılma hızları ile faz hızı arasındaki $c_1 < c_2$ kabulü altında oluşan $c < c_1 < c_2$ ve $c_1 < c < c_2$ durumları çözüm şekline bir etkisi bulunmamaktadır.Fakat, bölüm 2.3'te gösterildiği gibi tabakalı ortam için $c < c_1 < c_2$ durumunda yüzey SH dalgaları bulunmadığından, diğer kısımlarda yapacağımız karşılaştırmalar sebebiyle ince tabaka yaklaşımında sadece $c_1 < c < c_2$ koşulunda inceleme yapılacaktır. Bu aşamada (3.15) denkleminin (3.13) koşulu altında çözümü

$$p^2 = k^2 - \frac{w^2}{c_2^2} > 0 \tag{3.17}$$

olmak üzere

$$V = A e^{pY} \tag{3.18}$$

şeklinde bulunur. Bulduğumuz (3.18) çözümü (3.14) önerilen çözümü ile (3.12)'de yerine koyup (sıfırdan farklı) çözüme sahip olmak için ($A \neq 0$)

$$-hw^2 + hc_1^2 k^2 + c_1^2 \gamma p = 0 \tag{3.19}$$

bağıntısı sağlanmalıdır. (3.19) bağıntısı lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısıdır. (3.19) denklemi

$$D_2(w,k) = 0 \tag{3.20}$$

şeklinde ifade edilirse, çalışmamızın daha sonraki bölümlerinde tabakalı ortamdaki dispersiyon bağıntısı ile birlikte dalga sayısı k'ya bağımlılığı açık bir formda elde edilecektir.Son olarak lineer sınır değer problemin çözümü

$$v = Ae^{py}e^{i(kx-wt)} + c.c \ , \ A = \text{sbt.} \tag{3.21}$$

olarak bulunur.

3.4 Nonlineer SH Dalgalarının Modülasyonu

Bir önceki bölümde ilgilendiğimiz probleme ait lineer dalgaların yayılımı ile ilgili analizler yapılmıştır. Bu bölümde ise bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak ilgilendiğimiz elastik ortamda yüzey SH dalgalarının modülasyonu incelenip, bu modülasyonun nihai olarak bir NLS denklemi ile ifade edilebileceği gösterilmiştir. Bu analiz bir önceki bölümde anlattığımız sebepten ötürü sadece $c_1 < c < c_2$ koşulu için yapılacaktır. İlgilendiğimiz SH tipi yüzey dalgaları küçük fakat sonlu genliğe sahip olup, bu dalgaların self modülasyonunu incelemek için değişik ölçekler metodu kullanılacaktır[5]. Yöntemin kullanımı için ,hareketimiz Z yönünde ve dalga yayılımı X doğrultusunda olduğu için X, Y ve t değişkenleri yerine

$$x_i = \varepsilon^i X \ , \ t_i = \varepsilon^i t \ , \ y = Y \qquad i = 0,1,2 \tag{3.22}$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlayıp ve v'yi bu tanımladığımız yeni değişkenlerin fonksiyonu olarak kabul edeceğiz. Burada yeni değişkenlerde geçen $\varepsilon > 0$ parametresi nonlineerliğin mertebesini belirten küçük bir parametre, x_1, x_2, t_1, t_2 değişkenleri ise yayılma hareketinde yavaş değişimi gösteren değişkenlerdir. Bu tanımlamaları yaptıktın sonra, v 'nin aşağıda ifade edildiği gibi ε parametresinin oluşturduğu $\{\varepsilon^n\}$asimptotik dizisine göre uniform bir asimptotik açılıma sahip olduğunu kabul ediyoruz;

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \tag{3.23}$$

Ayrıca, eski ve yeni bağımsız değişkenlere göre türevler şu şekilde birbirine bağlıdır;

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \ , \ \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \ , \ \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{3.24}$$

(3.8-10) ile verilen sınır değer probleminde (3.24) türev dönüşümleri uygulanıp, (3.23) asimptotik açılımı kullanılıp, oluşturulan yeni ifadelerde ε'nun aynı kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenerek v_n bilinmeyenlerinin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problem hiyerarşisi inşa edilir. Bunlardan ilk üçü şu şekildedir:
$\mathscr{O}(\varepsilon)$:

$$\mathscr{L}_0 v_1 = 0 \tag{3.25a}$$

$$y = 0 \text{ 'da} \qquad \mathscr{B}_0 v_1 = 0 \tag{3.25b}$$

$$y \longrightarrow -\infty \qquad v_1 \longrightarrow 0 \tag{3.25c}$$

$\mathscr{O}(\varepsilon^2)$:

$$\mathscr{L}_0 v_2 = \mathscr{L}_1 v_1 \tag{3.26a}$$

$$y = 0 \text{ 'da} \qquad \mathscr{B}_0 v_2 = \mathscr{B}_1 v_1 \tag{3.26b}$$

$$y \longrightarrow -\infty \qquad v_2 \longrightarrow 0 \tag{3.26c}$$

$\mathscr{O}(\varepsilon^3)$:

$$\mathscr{L}_0 v_3 = \mathscr{L}_1 v_2 + \mathscr{L}_2 v_1 + n_2 \mathscr{N}_0^d(v_1) \tag{3.27a}$$

$$y = 0 \text{ 'da} \qquad \mathscr{B}_0 v_3 = \mathscr{B}_1 v_2 + \mathscr{B}_2 v_1 - c_1^2 \gamma \beta_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathscr{Q}_0(v_1) + h n_1 \mathscr{N}_0^s(v_1) \tag{3.27b}$$

$$y \longrightarrow -\infty \qquad v_3 \longrightarrow 0 \tag{3.27c}$$

Burada $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{B}_0, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \mathscr{N}_0^d, \mathscr{N}_0^s$ ve $\mathscr{Q}_0$ diferansiyel operatörleri

$$\mathscr{L}_0 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_0^2} - c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \tag{3.28a}$$

$$\mathscr{L}_1 \phi = -2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_0 \partial t_1} - c_2^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial x_1} \right) \tag{3.28b}$$

$$\mathscr{L}_2 \phi = -2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t_0 \partial t_2} - c_2^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0 \partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \tag{3.28c}$$

$$\mathscr{B}_0\phi = h\frac{\partial^2\phi}{\partial t_0^2} - c_1^2\left(h\frac{\partial^2\phi}{\partial x_0^2} - \gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \tag{3.28d}$$

$$\mathscr{B}_1\phi = -2h\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t_0\partial t_1} - c_1^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_0\partial x_1}\right) \tag{3.28e}$$

$$\mathscr{B}_2\phi = -h\left[2\frac{\partial^2\phi}{\partial t_0\partial t_2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t_1^2} - c_1^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_0\partial x_2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}\right)\right] \tag{3.28f}$$

$$\mathscr{Q}_0(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \tag{3.28g}$$

$$\mathscr{N}_0^d(\phi) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\mathscr{Q}_0(\phi)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathscr{Q}_0(\phi)\right) \tag{3.28h}$$

$$\mathscr{N}_0^s(\phi) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \tag{3.28i}$$

şeklinde tanımlanmaktadırlar.

Problem takımını incelediğimizde ε mertebesindeki problemin bir önceki bölümde incelenen lineer problemle benzer yapıda olduğu görülmektedir. Aranan çözüm

$$v_1 = v_1(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2) \tag{3.29}$$

yapısında olup x_0, t_0 ve y değişkenlerine bağlılığı bu mertebe problemle belirlenebilir. Diğer değişkenlere olan bağlılığı üst mertebeden problemlerle bulunacaktır. Ayrıca, ikinci ve üçüncü mertebe problemlere dikkatle bakıldığında da, sağdaki ifadeler bir önceki mertebeden çözümler tarafından belirleneceği için birinci mertebe problemler gibi lineer yapılarda oldukları görünür. Fakat önceki mertebeden gelen katkılar dolayısı ile denklemler inhomojen yapı kazanmaktadırlar. Şimdi ilk mertebeden başlayarak bu problemlerin çözümlerini inşa edeceğiz.

Birinci mertebe problemin (3.25a) denkleminin (3.25c) sınır koşulunu sağlayan çözümü değişkenlerin ayrılması yöntemi ile

$$v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_1^{(m)}(x_1, x_2, t_1, t_2)e^{mpy}e^{im\phi} + c.c \tag{3.30}$$

şeklinde elde edilir. Burada "$c.c$" sembolü önceki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. Buna ek olarak k dalga sayısı, ω açısal frekans olmak üzere

$$\phi = kx_0 - \omega t_0 \tag{3.31}$$

ve daha önce lineer problemin çözümü için elde edilirken tanımlandığı gibi

$$p^2 = k^2 - \frac{w^2}{c_2^2} \tag{3.32}$$

dir. v_1 çözümünde görülen $A_1^{(m)}$ fonksiyonları dalga genliği fonksiyonlarıdır ve problemin sınır koşullarından elde edileceklerdir. Bu amaçla (3.30) çözümünü (3.25b) sınır koşullarında yerine koyarsak

$$W_m = -h\omega^2 m^2 + hc_1^2 k^2 m^2 + c_1^2 \gamma p m \tag{3.33}$$

olmak üzere her pozitif m tam sayısı için

$$A_1^{(m)} W_m = 0 \tag{3.34}$$

homojen denklemleri elde edilir. Bizim çalışmamızda bir k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının nonlineer self-modülasyonu incelenmektedir. Bu amaçla yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıklarını varsayıyoruz, bu varsayım altında

$$m \succeq 2 \ \text{ için} \qquad W_m \neq 0 \tag{3.35}$$

olur. Bu son koşul gözönüne alındığında (3.34)'ün çözümleri

$$m = 1 \ \text{ için} \qquad A_1^{(1)} = A_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \tag{3.36}$$

ve

$$m \succeq 2 \ \text{ için} \qquad A_1^{(m)} = 0 \tag{3.37}$$

olarak elde edilirler. Bunlara ek olarak, bu mertebe problemde trivial olmayan çözüm elde etmek için ($A_1 \neq 0$) $W_1 = 0$ olarak alınmalıdır, böylece

$$W_1 = D(w,k) = -h\omega^2 + hc_1^2 k^2 + c_1^2 \gamma p = 0 \tag{3.38}$$

(3.19) dispersiyon bağıntısı elde edildiği görülür. (3.36) ve (3.37) ifadeleri (3.30) birinci mertebe çözümünde kullanılırsa

$$v_1 = A_1(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{py} e^{i\phi} + c.c \tag{3.39}$$

şeklinde belirlenir. A_1 dalga modülasyonunun birinci mertebe yavaş değişim gösteren kompleks genliğidir. (3.39) çözümünü tam olarak belirlemek için bu kompleks genlik fonksiyonu belirlenmelidir. Bu fonksiyonun yapısı daha yüksek mertebeden problemlerden belirlenecektir.

(3.39) ile verilen birinci mertebe problemin çözümü, ikinci mertebe pertürbasyon problemindeki (3.26a) denkleminde yerine konursa bu denklem şu şekli almaktadır;

$$\mathscr{L}_0 v_2 = 2i\mathscr{M}_1^d e^{py} e^{i\phi} + c.c \tag{3.40}$$

Burada

$$\mathscr{M}_1^d = \omega \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_2^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \tag{3.41}$$

olarak tanımlanmaktadır. Görüldüğü gibi (3.40) denklemi homojen olmayan lineer bir yapı göstermekte olup, bu denklemin çözümünü

$$v_2 = \overline{v_2} + \widetilde{v_2} \tag{3.42}$$

şeklinde arayacağız. Burda $\overline{v_2}$ (3.40) denkleminin özel bir çözümünü, $\widetilde{v_2}$ ise

$$\mathscr{L}_0 \widetilde{v_2} = 0 \tag{3.43a}$$

homojen denkleminin bir önceki mertebedeki çözüm olan (3.39)'da göz önünde bulundurularak (3.26b,c) tarafından üretilen

$$y = 0 \text{ 'da} \qquad \mathscr{B}_0 \widetilde{v_2} + \mathscr{B}_0 \overline{v_2} = 2ih\mathscr{M}_1^s e^{i\phi} + c.c \tag{3.43b}$$

$$y \longrightarrow -\infty \text{ için} \qquad \overline{v_2} + \widetilde{v_2} \longrightarrow 0 \tag{3.43c}$$

homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun. Burada

$$\mathscr{M}_1^s = \omega \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + kc_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \tag{3.44}$$

şeklinde hesaplanr. (3.40) denkleminin özel çözümünü hesaplamak için belirsiz katsayılar yöntemini kullanabiliriz. Buna göre çözüm formunu

$$\overline{v_2} = \mathscr{C}_1 y e^{py} e^{i\phi} + c.c \tag{3.45}$$

olarak seçebiliriz. Burada $\mathscr{C}_1$ bir sabittir. Bu formu (3.40) denkleminde yerine koyup gerekli hesaplamalar yapılırsa, $\mathscr{C}_1$ katsayısı

$$\mathscr{C}_1 = -\frac{i\mathscr{M}_1^d}{c_2^2 p} \tag{3.46}$$

olarak elde edilir. (3.43a) homojen denklemin çözümünü birinci mertebe probleme benzer şekilde değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak,

$$\widetilde{v_2} = \sum_{m=1}^{\infty} A_2^{(m)}(x_1, x_2, t_1, t_2) e^{mpy} e^{im\phi} + c.c \tag{3.47}$$

olarak elde ederiz. $A_2^{(m)}$ fonksiyonları ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonlarıdır ve (3.43b,c) sınır koşulları tarafından belirleneceklerdir. (3.45),(3.46) ve (3.47) ifadeleri (3.43b) sınır koşulunda yerine konulursa,

$$A_2^{(m)} W_m = b_2^{(m)} \tag{3.48}$$

homojen olmayan denklem takımı elde edilir. Burada $m = 1$ için

$$b_2^{(1)} = 2ih\mathscr{M}_1^s - c_1^2 \gamma \mathscr{C}_1 \tag{3.49}$$

ve

$$m \succeq 2 \quad \text{için} \qquad b_2^{(m)} = 0 \tag{3.50}$$

dir. $m = 1$ için (3.48) denklemi ele alınırsa

$$A_2^{(1)} W_1 = b_2^{(1)} \tag{3.51}$$

denklemin sol tarafindaki W_1'in (aynı zamanda dispersiyon bağıntısı) (3.38)'den sıfir olduğu bilindiği için, (3.51) denkleminde uygunluk şartının sağlanması gerektiğinden denklemin sağ tarafi da sıfir olmalıdır. Bu da

$$2ih\mathscr{M}_1^s - c_1^2 \gamma \mathscr{C}_1 = 0 \tag{3.52}$$

eşitliğini doğurmaktadır. Bu ifadede katsayılar yerine açık halleri olan (3.41),(3.44) ve (3.46) ifadeleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\frac{\partial W_1}{\partial w}\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + \frac{\partial W_1}{\partial k}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0 \tag{3.53}$$

bağıntısı elde edilir. Bu aşamada

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = -\frac{\partial W_1/\partial k}{\partial W_1/\partial w} \tag{3.54}$$

grup hızı olmak üzere,(3.53) bağıntısı tekrar düzenlenirse, A_1 fonksiyonunun

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0 \tag{3.55}$$

bağıntısını sağlaması gerektiği anlaşılır. Bu ifade bize A_1'in V_g grup hızı ile ilerleyen bir referans çevresinde sabit kaldığını gösterir, yani A_1 fonksiyonu

$$A_1 = A_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \tag{3.56}$$

formundadır. $m \succeq 2$ için (3.51) denkleminin çözümünde $W_m \neq 0$ olduğu kabul edildiği için ve $b_2^{(m)} = 0$ olduğundan

$$m \succeq 2 \text{ için} \qquad A_2^{(m)} = 0 \tag{3.57}$$

olarak elde edilir. $m = 1$ için (3.51) denkleminin çözümü, uygunluk koşulu altında,

$$A_2^{(1)} = A_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \tag{3.58}$$

dır. Burada A_2 dalga modülasyonunun yavaş değişen ikinci mertebe genliğini temsil etmekte ve istenirse daha yukarı mertebe pertürbasyon problemlerinden elde edilebilmektedir. Biz çalışmamızda sonlu ve küçük genlikli dalga yayılımı ile ilgilendiğimiz için sadece birinci mertebe uniform geçerli çözüm elde etmeye çalışacağız. Bu amaçla A_1 genlik fonksiyonunu tam olarak belirlemek yeterlidir.

Buraya kadar olan kısımda birinci ve ikinci mertebe problemlerin çözümünü tamamlamış olduk. Buna rağmen A_1 genlik fonksiyonunu tam olarak belirlemekte yetersiz kaldık. Bu fonksiyonu belirlemek için üçüncü mertebe probleme başvuracağız. Birinci ve ikinci mertebe probleme ait çözümleri (3.27a) denkleminde yerine koyup gerekli olan düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathscr{L}_0 v_3 = \left[(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3) e^{py} + \mathscr{E}_4 y e^{py} + \mathscr{E}_5 e^{3py} \right] e^{i\phi} + (e^{i3\phi} \text{lı terimler}) + c.c \tag{3.59}$$

Burada

$$\mathscr{E}_1 = 2i \left(\omega \frac{\partial A_2}{\partial t_1} + k c_2^2 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\mathscr{E}_2 = 2i \left(\omega \frac{\partial A_1}{\partial t_2} + k c_2^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\mathscr{E}_3 = c_2^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2}$$

$$\mathscr{E}_4 = \frac{2}{p c_2^2} \left(\omega^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2} + 2k\omega c_2^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1 \partial x_1} + k^2 c_2^4 \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} \right)$$

$$\mathscr{E}_5 = 3 n_2 (p^4 - k^4) |A_1|^2 A_1 \tag{3.59a-e}$$

olarak tanımlanmaktadırlar. $|A_1|$ de A_1 'in modülünü ifade etmektedir.

İkinci mertebe problemde yapılan işlemlerde olduğu gibi, üçüncü mertebe problemin çözümünü de

$$v_3 = \widetilde{v_3} + \overline{v_3} \tag{3.60}$$

şeklinde iki parçaya ayıralım, öyle ki $\overline{v_3}$ (3.59) denkleminin özel çözümünü, $\widetilde{v_3}$ ise

$$\mathscr{L}_0\widetilde{v_3} = 0 \tag{3.61a}$$

homojen denklemlerinin (3.27b,c) sınır koşullarından (3.39) ve (3.42) yardımıyla oluşturulan

$$y = 0 \text{ 'da} \qquad \mathscr{B}_0\widetilde{v_3} + \mathscr{B}_0\overline{v_3} = h(\mathscr{F}_1 + \mathscr{F}_2 + \mathscr{F}_3)e^{i\phi} + \mathscr{F}_4 e^{i\phi} + (e^{i3\phi} \text{ılı terimler}) + c.c. \tag{3.61b}$$

$$y \longrightarrow -\infty \text{ için} \qquad \widetilde{v_3} + \overline{v_3} \longrightarrow 0 \tag{3.61c}$$

homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun. Burada,

$$\mathscr{F}_1 = 2i\left(w\frac{\partial A_2}{\partial t_1} + kc_1^2\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\mathscr{F}_2 = 2i\left(w\frac{\partial A_1}{\partial t_2} + kc_1^2\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\mathscr{F}_3 = c_1^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2}$$

$$\mathscr{F}_4 = -[hn_1k^2(3k^2 + \gamma^2p^2) + \gamma p\beta_2c_1^2(3p^2 + k^2)]\,|A_1|^2 A_1 \tag{3.62a-d}$$

olarak tanımlanmaktadır. İkinci mertebe problemde olduğu gibi $\overline{v_3}$ özel çözümünü bulmak için belirsiz katsayılar yöntemini kullanacağız. Bu amaçla $\overline{v_3}$ çözümünü

$$\overline{v_3} = \overline{v_3}^{(1)} + \overline{v_3}^{(3)} \tag{3.63}$$

şeklinde lineer bağımsız iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edilebilirler. Bu amaçla aranan lineer bağımsız çözümlerin formları

$$\overline{v_3}^{(1)} = (\mathscr{G}_1 y e^{py} + \mathscr{G}_2 y^2 e^{py} + \mathscr{G}_3 e^{3py})e^{i\phi} + c.c. \tag{3.64a}$$

$$\overline{v_3}^{(3)} = (\mathscr{G}_4 y e^{py} + \mathscr{G}_5 y^2 e^{py} + \mathscr{G}_6 e^{3py})e^{3i\phi} + c.c. \tag{3.64b}$$

şeklinde seçebiliriz. Fakat $\overline{v_3}^{(3)}$ çözümünün açık hali sonraki hesaplamalarda kullanılmayacağı için hesaplanmayacaktır. (3.64a) ifadesi (3.59) denkleminde kullanıp, gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra aranan belirsiz katsayılar

$$\mathscr{G}_1 = -\frac{1}{2pc_2^2}\left(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3-\frac{\mathscr{E}_4}{2p}\right)$$

$$\mathscr{G}_2 = -\frac{\mathscr{E}_4}{4pc_2^2}$$

$$\mathscr{G}_3 = -\frac{\mathscr{E}_5}{8p^2c_2^2} \tag{3.65}$$

şeklinde hesaplanırlar.

Özel çözümün formunu belirledikten sonra, (3.61a) homojen denkleminin çözümü birinci ve ikinci mertebe problemlerdeki gibi

$$\widetilde{v_3} = \sum_{m=1}^{\infty} A_3^{(m)}(x_1,x_2,t_1,t_2)e^{mpy}e^{im\phi} + c.c \tag{3.66}$$

şeklinde belirlenir. Burada $A_3^{(m)}$ fonksiyonları üçüncü mertebe dalga genliği fonksiyonları olarak adlandırılır ve bu fonksiyonlar (3.61b,c) sınır koşulları kullanılarak hesaplanacaklardır. (3.66) ifadesini (3.64a) çözümü ile birlikte (3.61b) sınır koşuluna yerleştirdiğimizde

$$A_3^{(m)}W_m = b_3^{(m)} \tag{3.67}$$

homojen olmayan cebrik denklem takımı elde edilir. Denklemin sağındaki ifade $m=1$ ve $m=3$ için sıfırdan farklı, $m\neq 1,3$ için sıfırdır. $m=1$ için yukarıda tanımladığmız katsayılar da kullanılarak gerekli olan uzun işlem ve sadeleştirmelerden sonra

$$\begin{aligned} b_3^{(1)} &= i\left(-\frac{\partial W_1}{\partial w}\frac{\partial A_2}{\partial t_1}+\frac{\partial W_1}{\partial k}\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)+i\left(-\frac{\partial W_1}{\partial w}\frac{\partial A_1}{\partial t_2}+\frac{\partial W_1}{\partial k}\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial w^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t_1^2}-2\frac{\partial^2 W_1}{\partial w\partial k}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial t_1}+\frac{\partial^2 W_1}{\partial k^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}\right)+F|A_1|^2A_1 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Bu ifadedeki F katsayısı

$$F = -\left[hn_1k^2(3k^2+\gamma^2p^2)+p\gamma\beta_2c_1^2(3p^2+k^2)-\frac{3}{4}\frac{n_2c_1^2\gamma(p^4-k^4)}{c_2^2p}\right] \tag{3.69}$$

olarak hesaplanır. $b_3^{(3)}$ vektörünün açık yapısı daha sonraki hesaplarımızla ilgili olmadığından burada verilmeyecektir. $m=1$ için (3.67) denklemine geri dönersek,$W_1=0$ olduğunu $A_3^{(1)}\neq 0$ şartını göz önünde bulundurarak kullanırsak,

$$b_3^{(1)} = 0 \tag{3.70}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerektiği ortaya çıkar. $m = 3$ için $W_3 \neq 0$ olduğu için istenirse $A_3^{(3)}$ dalga genliği fonksiyonu (3.67) denkleminden elde edilebilir.Ayrıca,$m \neq 1$ ve $m \neq 3$ için ise, $W_m \neq 0$ ve $b_3^{(m)} = 0$ olduğundan (3.67)'den

$$A_3^{(m)} = 0 \qquad\qquad m \neq 1,3 \tag{3.71}$$

olduğu görülür. Bizim amacımız olan uniform geçerli birinci mertebe çözümün inşasında $A_3^{(1)}$ ve $A_3^{(3)}$ dalga genliği fonksiyonları gerekli olmadığı için açıkça formlarını belirlemeye çalışmayacağız.

Bu aşamadan sonra (3.70) uygunluk koşuluna dönersek, (3.54) grup hızı tanımı kullanılarak gerekli olan hesaplamalar yapılırsa

$$i\left(\frac{\partial A_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) + \widetilde{\Gamma}\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \widetilde{\Delta}|A_1|^2 A_1 + i\left(\frac{\partial A_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right) = 0 \tag{3.72}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntıda $\widetilde{\Gamma}$ ve $\widetilde{\Delta}$ sabitleri

$$\widetilde{\Delta} = -\frac{F}{\partial W_1/\partial w} \tag{3.73a}$$

$$\widetilde{\Gamma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D/\partial k^2}{\partial D/\partial w} = \frac{1}{2}\frac{dV_g}{dk} \tag{3.73b}$$

olarak tanımlanmıştır. Dikkat edilirse A_2 fonksiyonunun formu bir şekilde belirlenebilirse (3.72) denklemi kullanılarak A_1 dalga genliği bulunabilir ve bu sayede birinci mertebe uniform geçerli çözümü inşa edebiliriz. (3.72) denkleminin son parçasına bakıldığında A_2 dalga fonksiyonun birinci mertebe problemden elde ettiğimiz formuna benzer bir form olduğu gözükür. Yani A_2'nin t_1 ve x_1 değişkenlerine A_1gibi bağlı olduğu kabul edilirse,

$$A_2 = A_2(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2) \tag{3.74}$$

formundan

$$\frac{\partial A_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = 0 \tag{3.75}$$

olacaktır. Bu şart alında (3.72) sadece A_1 için bir denkleme dönüşür. Bu kabul altında aşağıdaki boyutsuz değişkenler ve sabitler tanımlanıp

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t_2 = \omega\varepsilon t_1 = \omega\varepsilon^2 t\,, \quad \Gamma = k^2\widetilde{\Gamma}/\omega, \qquad \Delta = \widetilde{\Delta}/wk^2 \\ \xi &= k\varepsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2) = k(x_1 - V_g t_1) = \varepsilon k(x - V_g t), \quad A = kA_1 \end{aligned} \tag{3.76}$$

(3.72) denklemi tekrar düzenlenirse şu form elde edilir ;

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau}+\Gamma\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}+\Delta|A|^2 A=0 \tag{3.77}$$

(3.77) denklemi nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi olarak adlandırılır ve literatürde birçok değişik alanda nonlineer dalga modülasyonunun asimptotik olarak karakterize etmek için türetilmiştir. (3.77) denkleminin çözümü

$$A(\xi,0)=A_0(\xi) \tag{3.78}$$

ile verilen başlangıç değeri ile bulunduktan sonra birinci mertebe çözüm (3.39) bağıntıları kullanılarak inşaa edilir.

3.5 İnce Tabaka Yaklaşımının Etkinliği

Bu bölümde, önceki bölümde nonlineer ince tabaka yaklaşımı ile elde edilen NLS denkleminin katsayıları ile, [12] 'de sonlu kalınlıklı bir tabaka için ve [14] 'de lineer ince tabaka yaklaşımı için elde edilen NLS denklemlerinin katsayıları karşılaştırılacaklardır. Önce NLS denkleminin lineer terimi (Γ) için bir karşılaştırma yapılacaktır. Bu amaçla ilk olarak faz hızlarının kh ile değişimi incelenecektir. Sonlu tabaka için hesaplanan dispersiyon bağıntısı (2.34) 'ü ve ince tabaka yaklaşımı altında hesaplanan (3.19) dispersiyon bağıntısını aşağıdaki boyutsuz değişkenleri ve parametreleri ;

$$C=\frac{c}{c_1}\ ,\ K=k\,h\ ,\ p_1^2=C^2-1,\ m=\frac{c_1}{c_2} \tag{3.79}$$

$$p_{20}^2=\frac{1}{m^2}-1>0\ ,\ p^2=m(p_{20}^2-p_1^2)$$

kullanarak yeniden yazarsak; (2.34) için

$$K=\frac{1}{\sqrt{C^2-1}}\tan^{-1}\left(\gamma\sqrt{\frac{1-m^2C^2}{C^2-1}}\right) \tag{3.80}$$

ve (3.19) için de

$$K=\frac{\gamma\sqrt{1-m^2C^2}}{C^2-1} \tag{3.81}$$

ifadeleri elde edilir. Dikkat edilirse

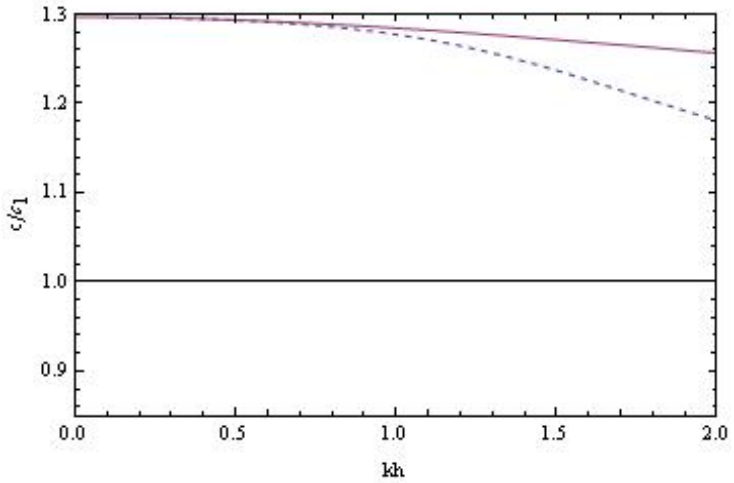
$$\left|\gamma\sqrt{\frac{1-m^2C^2}{C^2-1}}\right|\leq 1$$

için, $|x|\leq 1$ için $\tan x \backsim x$ olduğu hatırlanarak (3.81) bağıntısının bulunacağı görülür. Ayrıca, (3.80) denkleminin $K=K(C)$ veya $C=C(K)$ yapısında sonsuz tane fonksiyonu tanımlayacağı açıktır. Dolayısı ile (3.80) dispersiyon bağıntısı sonsuz tane dala sahiptir. Buna karşılık ince tabaka yaklaşımına ait (3.81) bağıntısı $K>0$, $C>0$ için

tek bir dal tanımlamaktadır. Bu nedenle karşılaştırma yaparken (3.80) 'de tanımlanan dispersiyon bağıntısının ilk dalı göz önüne alınacaktır. Dispersiyon bağıntıları lineer malzeme parametrelerine bağlıdırlar. C 'nin K ile değişiminin grafiklerini çizebilmek için bu parametreler için bir seçim yapacağız. Bu amaçla

$$\gamma = 4.661 \quad , \quad c_2/c_1 = 1/m = 1.297$$

değerleri seçilmiştir. Bunlar kullanılarak elde edilen $C = C(K)$ grafikleri Şekil 1 'de verilmektedir.



Şekil 3.1: $\gamma = 4.661$ ve $c_2/c_1 = 1.297$ lineer malzeme parametreleri için faz hızı c/c_1'in kh 'ye göre değişimi. (Kesikli eğri): Sonlu Tabaka, (Düz eğri):İnce tabaka yaklaşımı

Bu şekilden şu gözlemi yapabiliriz. $0 \leq kh < 1$ aralığında ince tabaka yaklaşımı ile elde edilen faz hızları değeri sonlu tabaka sonuçları ile uyum içerisindedir. $kh > 1$ için fark büyümektedir. Bu da beklenen bir sonuçtur.

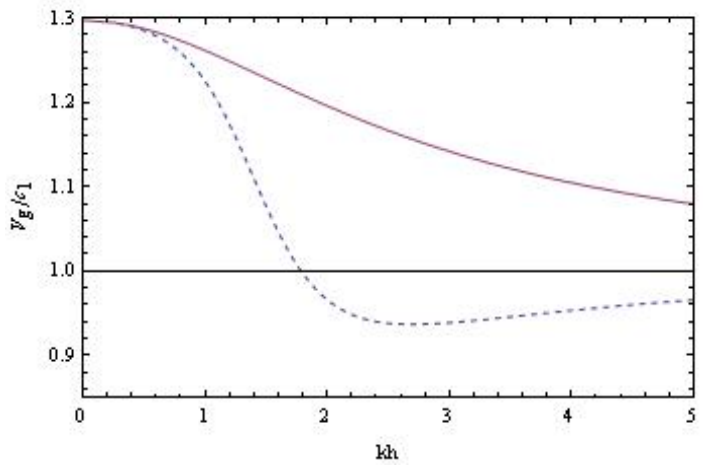
Şimdi de grup hızlarının kh ile değişimlerini karşılaştıracağız. Sonlu tabaka için elde edilen grup hızı ifadesi (3.79) 'da tanımlanan boyutsuz değişkenler kullanılarak aşağıdaki formda elde edilir ;

$$\frac{V_g}{c_1} = \frac{1}{C}\left(\frac{\gamma C^2(1-m^2)+K(C^2-1)(1-m^2C^2)^{1/2}\sec^2\left\{K(C^2-1)^{1/2}\right\}}{\gamma(1-m^2)+K(C^2-1)(1-m^2C^2)^{1/2}\sec^2\left\{K(C^2-1)^{1/2}\right\}}\right) \tag{3.82}$$

İnce tabaka yaklaşımı için grup hızı ise (3.38) ve (3.54) kullanılarak boyutsuz değişkenler cinsinden

$$\frac{V_g}{c_1} = \frac{1}{C}\left(\frac{\gamma+2K(1-m^2C^2)^{1/2}}{m^2\gamma+2K(1-m^2C^2)^{1/2}}\right) \tag{3.83}$$

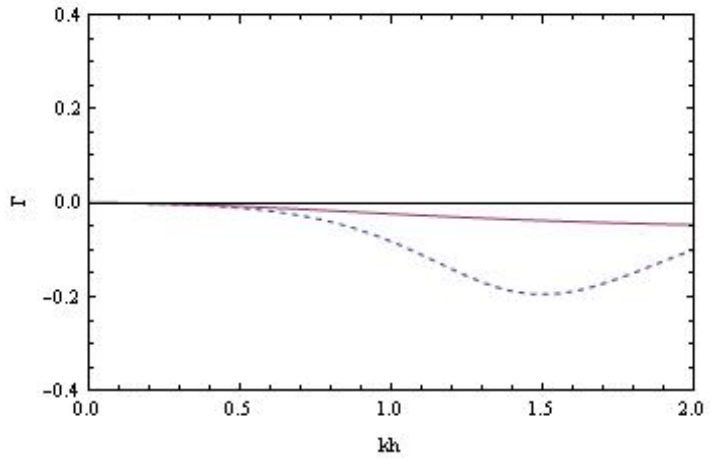
olarak bulunur. (3.82) 'nin birinci dalı ve (3.83) 'den aynı malzeme parametreleri kullanılarak grup hızlarının kh ile değişimi hesaplanarak Şekil 2 'de verilmektedir.



Şekil 3.2: $\gamma = 4.661$ ve $c_2/c_1 = 1.297$ lineer malzeme parametrelerinde için grup hızı V_g/c_1 'in kh 'ye göre değişimi. (Kesikli): Sonlu tabaka, (Düz eğri):İnce tabaka yaklaşımı

Bu şekilden de faz hızları için yaptığımız gözlemin grup hızları için de geçerli olduğunu görmekteyiz.

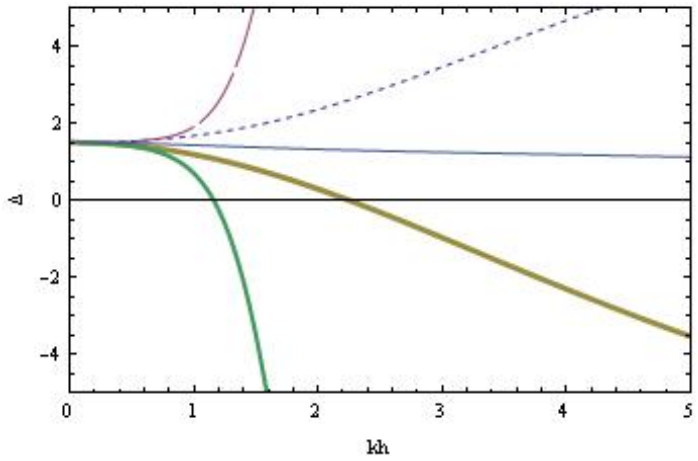
Aynı şekilde NLS denkleminin lineer teriminin katsayısı Γ 'nın kh ile değişimi hesaplanarak Şekil 3 'de verilmektedir. Bu şekilden de yukarıdaki gözlemlerin geçerli oldukları görülmektedir.



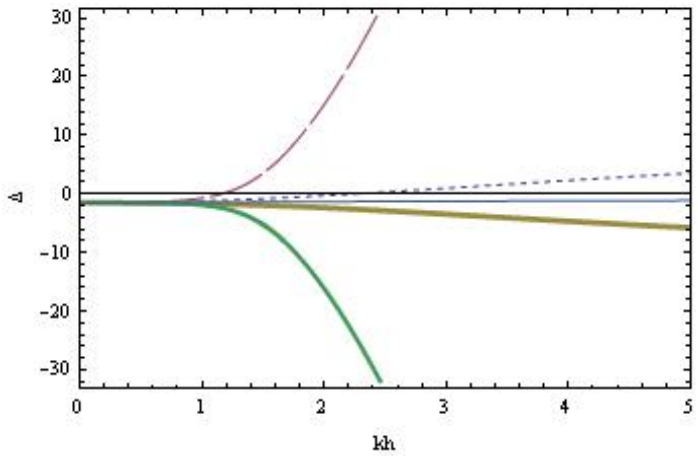
Şekil 3.3: $\gamma = 4.661$ ve $c_2/c_1 = 1.297$ lineer malzeme parametreleri için (Γ)'nın (kh)'ye göre değişimi. (Kesikli eğri): Sonlu tabaka , (Düz eğri):İnce tabaka yaklaşımı

Son olarak NLS denkleminin nonlineer teriminin katsayısı Δ 'nın kh ile değişimi ve sonlu tabaka, nonlineer ince tabaka ve lineer ince tabaka için geçerli olan Δ katsayılarının bir karşılaştırılması yapılacaktır. Bu incelemelerde lineer parametreler ve uzayın nonlineer parametresi sabit tutulmuş, tabakanın nonlineer parametresi değiştirilmiştir. Şekil

4 'de ($\beta_1 = -2.0,\ \beta_2 = -2.0$) ve ($\beta_1 = 2.0,\ \beta_2 = -2.0$) parametre değerleri için Şekil 5 'de de ($\beta_1 = -2.0,\ \beta_2 = 2.0$) ve ($\beta_1 = 2.0,\ \beta_2 = 2.0$) parametre değerleri için Δ 'nın kh ile değişimi verilmektedir.



Şekil 3.4: Farklı (β_1, β_2) nonlineer malzeme parametreleri için Δ 'nın kh'ye göre değişimi. (uzun kesikli eğri): Sonlu tabaka için $(-2.0, -2.0)$, (kısa kesikli eğri): İnce tabaka için $(-2.0, -2.0)$,(ince düz eğri): İnce tabaka için $(0, -2.0)$,(kalın düz eğri):İnce tabaka için $(2.0, -2.0)$, (normal düz eğri): Sonlu tabaka için $(2.0, -2.0)$



Şekil 3.5: Farklı (β_1, β_2) nonlineer malzeme parametreleri için Δ 'nın kh' ye göre değişimi. (uzun kesikli eğri): Sonlu tabaka için $(-2.0, 2.0)$, (kısa kesikli eğri): İnce tabaka için $(-2.0, 2.0)$,(ince düz eğri): İnce tabaka için $(0, 2.0)$,(kalın düz eğri):İnce tabaka için $(2.0, 2.0)$, (normal düz eğri): Sonlu tabaka için $(2.0, 2.0)$

Bu şekillerden de $kh > 0.4$ için tabakanın nonlineerliğinin Δ üzerinde etkin olmaya başladığı görülmektedir. Ayrıca $0 \leq kh < 1$ aralığında ince nonlineer tabaka yaklaşımı ile elde edilen Δ değerlerinin sonlu tabaka sonuçları ile uyumlu oldukları gözlemlenmektedir. Dolayısı ile $kh < 1$ için ince nonlineer tabaka yaklaşımı kullanılabilir.

3.6 NLS Denkleminin Bazı Çözümleri ve $\Gamma\Delta'$nın Dalga Sayısına Göre Değişimleri

Bu bölümde modülasyon sonucunda monokromatik dalganın genliğini belirleyen (3.77) NLS denkleminin bazı çözümlerini inceleyeceğiz ve NLS denkleminde görünen Γ ve Δ katsayılarının çarpımlarının bu çözümlerin yapısındaki etkilerini inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle NLS denkleminin düzlem dalga çözümünü ve düzlem dalgalarının küçük pertürbasyonlar için stabilitisine inceleyeceğiz. NLS denklemi için a_0 bir sabit olmak üzere

$$\mathscr{A} = \frac{k}{2} a_0 e^{i(\Delta/4)k^2 a_0^2 \tau} \tag{3.84}$$

düzlem dalga çözümüdür. Burada

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} a(\xi,\tau) e^{ib(\xi,\tau)} \tag{3.85}$$

olarak alıp (3.77)'de yerine koyarsak, NLS denklemi bilinmeyen a ve b fonksiyonları için

$$a_\tau + \Gamma(a b_{\xi\xi} + 2 a_\xi b_\xi) = 0 \tag{3.86a}$$

$$a b_\tau - \frac{\Delta}{4} a^3 - \Gamma(a_{\xi\xi} - a b_\xi^2) = 0 \tag{3.86b}$$

denklem sistemleri elde edilir. Daha sonra, buradaki a ve b fonksiyonlarının (3.84) ile verilen düzlem dalga üzerine etkiyen küçük pertürbasyonlar tarafından oluşturulduğunu kabul edersek, a_1 ve b_1 küçük pertürbasyonları göstermek üzere

$$a = k a_0 + a_1(\xi,\tau)\ , \quad b = \frac{\Delta}{4} k^2 a_0^2 \tau + b_1(\xi,\tau) \tag{3.87}$$

şeklinde olsunlar. (3.87)'deki ifadeler (3.86a-b)'de yerlerine konur ve a_1 ve b_1'in küçük pertürbasyonlar oldukları kabulu dikkate alınıp nonlineer terimler ihmal edilirse

$$a_{1\tau} + k a_0 \Gamma b_{1\xi\xi} = 0$$

$$k a_0 b_{1\tau} - \frac{3}{4} \Delta k^2 a_0^2 a_1 - \Gamma a_{1\xi\xi} = 0 \tag{3.88}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümleri $\overline{K}$ reel olmak üzere

$$a_1 = A_0 e^{i(\overline{K}\xi - \Omega\tau)} \quad , \quad b_1 = B_0 e^{i(\overline{K}\xi - \Omega\tau)} \tag{3.89}$$

şeklinde aranırsa, sıfırdan farklı çözüm için

$$\Omega^2 = \Gamma^2 \overline{K}^4 \left(1 - \frac{3\Delta k^2 a_0^2}{4\Gamma \overline{K}^2}\right) \tag{3.90}$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Bu bağıntı (3.87) 'deki sonsuz küçük pertürbasyon dalgalarına ait dispersiyon bağıntısıdır. Bu bağıntı kullanılarak NLS denkleminin çözümüne ait stabilite analizi yapılabilir. Bunun için verilen $\overline{K}$ değeri için eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise (3.90) bağıntısından Ω'nın daima reel olacağı görülür ve bu durumda a_1 ve b_1 çözümleri sınırlı kalırlar. Diğer taraftan $\Gamma\Delta > 0$ ve $K < (\sqrt{3}/2)ka_0(\Delta/\Gamma)$ değerleri için Ω kompleks değer alacaktır. Bu koşullarda a_1 ve b_1 çözümleri sınırsız olarak büyürler. Sonuç olarak, $\Gamma\Delta < 0$ olduğunda (3.84) ile verilen düzlem dalgası sonsuz küçük pertürbasyonlar altında stabil kalacağı, $\Gamma\Delta > 0$ olduğunda ise düzlem dalgaların stabil olmayacağı sonucuna ulaşırız.

Yukarıda yaptığımız analize ek olarak, $\Gamma\Delta > 0$ durumunda elde edilen çözüm olan zarf soliton çözümü incelenirse; NLS denkleminin,

$$A(\xi,\tau) = \phi(\eta)e^{i(K\xi-\Omega\tau)} \quad , \quad \eta = \xi - V_0\tau \quad , \quad V_0 = \text{sbt.} \qquad ((3.91))$$

formunda ilerleyen dalga çözümleri Jakobian eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilirler. Bu çözümlerin yapısı da $\Gamma\Delta$ çarpımın işaretine bağlıdır. Şimdi

$$\eta \to \infty \quad \text{için } \phi \to 0 \quad \text{ve } d\phi/d\eta \to 0$$

ve $\Gamma\Delta > 0$ olsun, bu durumda ϕ fonksiyonu için çözüm

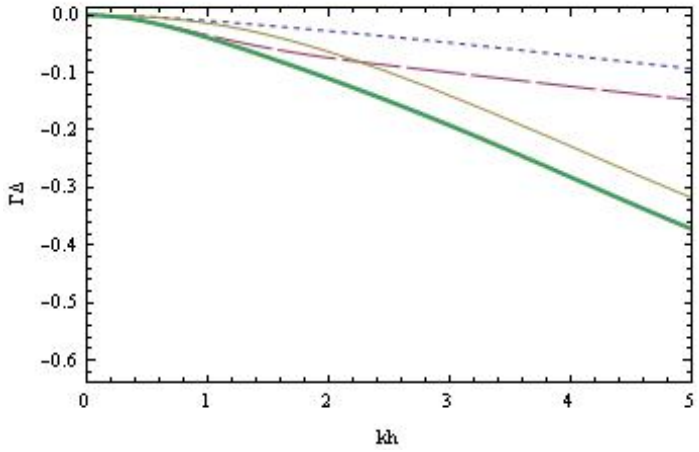
$$\phi(\eta) = \phi_0 \sec h\{\phi_0\xi(\Delta/2\Gamma)^{1/2}\} \qquad (3.92)$$

olarak elde edilir. Burada,

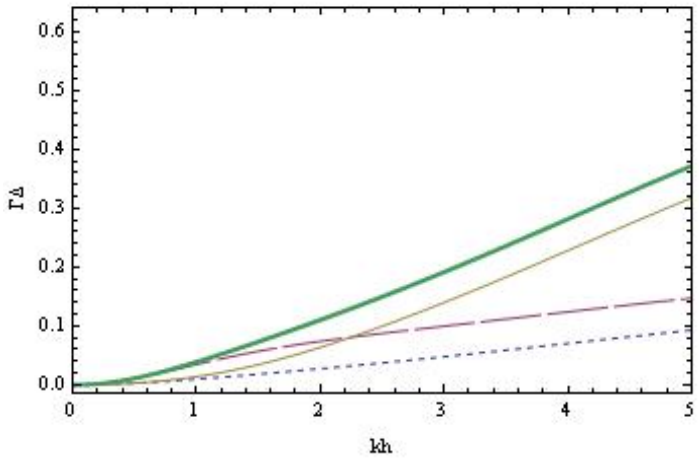
$$V_0 = 2K\Gamma \qquad \text{ve} \qquad \frac{(\Gamma K^2 - \Omega)}{\Delta\phi_0^2} = \frac{1}{2} \qquad (3.93)$$

dir. (3.92) çözümü zarf soliton çözümü olarak adlandırılır[23,24].

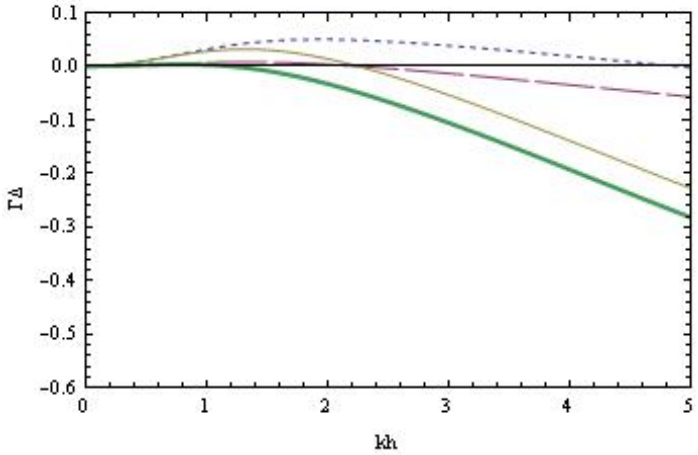
a_1 ve b_1 lineerleştirilmiş çözümleri çok kısa zaman aralığında geçerli olmalarına rağmen $\Gamma\Delta > 0$ veya $\Gamma\Delta < 0$ olması NLS denklem ile karakterize eden asimptotik olarak gerçekleştirilen düzlem dalganın verilen bir başlangıç verisine uzun zaman zarfında nasıl gelişeceğini etkiler. $|\xi| \to \infty$ da sıfira giden bir başlangıç uyarısı eğer $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere, $\Gamma\Delta > 0$ ise soliton tipi çözümler ürettiği bilinmektedir. Bu nedenle $\Gamma\Delta$ işaretinin ortamların mekaniksel özelliklerine göre değişimlerini incelemek gerekir. Bu amaçla ince tabaka yaklaşımı için, ortamın lineer özellikleri olan γ ve c_2/c_1 değerleri sırasıyla 4.661 ve 1.297 alınıp sabit tutularak, nonlineer malzeme parametreleri (β_1,β_2) için sertleşen ve yumuşayan malzemelerden meydana gelen değişik tabakalar için $\Gamma\Delta$'nın kh 'ye göre değişimleri hesaplanmış ve sonuçlar Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8 'de verilmektedir.



Şekil 3.6: (Yumuşayan-Yumuşayan**)** Modeli için β_1 üst tabaka, β_2 alt tabaka nonlineer parametreleri için $\Gamma\Delta'$nın kh'ye göre değişimi. (-0.5,-0.5): (kısa kesikli eğri), (-0.5,-2.0): (uzun kesikli eğri), (-2.0,-0.5): (ince çizgili eğri), (-2.0,-2.0): (kalın düz eğri)



Şekil 3.7: (Sertleşen-Sertleşen**)** Modeli için β_1 üst tabaka, β_2 alt tabaka nonlineer parametreleri için $\Gamma\Delta'$nın kh'ye göre değişimi. (0.5,0.5): (kısa kesikli eğri), (0.5,2.0): (uzun kesikli eğri), (2.0,0.5): (ince çizgili eğri), (2.0,2.0): (kalın düz eğri)



Şekil 3.8: (Yumuşayan-Sertleşen**)** Modeli için β_1 üst tabaka, β_2 alt tabaka nonlineer parametreleri için $\Gamma\Delta'$nın kh'ye göre değişimi. (-0.5,2.0): (kısa kesikli eğri), (-0.5,0.5): (uzun kesikli eğri), (-2.0,2.0): (ince çizgili eğri), (-2.0,0.5): (kalın düz eğri)

Yukarıdaki şekillere bakıldığında seçilen malzemelerin nonlineer özellikleri, $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretini dolayısıyla SH dalga çözüm karakterini kuvvetli bir şekilde etkilediği görülebilir. Ayrıca, Şekil 7 incelenirse bazı kh değerleri için $\Gamma\Delta$ çarpımının sıfır olduğu görülür. Bu $\Gamma\Delta$ çarpımının NLS denkleminin çözümlerine etkisi için yukarıda incelenen iki durumdan farklı bir durum olarak ortaya çıkar. $\Gamma\Delta = 0$ durumu "marjinal stabilite" olarak adlandırılır. $\Delta = 0$ olduğunda NLS denklemi lineer Schrödinger denklemine dönüşür. Bunun anlamı, Δ'nın sıfir olduğu dalga sayıları civarında nonlineerlik ve dispersiyon dengelenmediğidir. Bu dalga sayıları civarında nonlineerlik ile dispersiyonun dengelendiği bir denklem elde edilebilmesi için asimptotik metod dengeyi kuracak şekilde değiştirilmelidir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada ince fakat nonlineer bir tabaka ile kaplı bir yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarının yayılması probleminin asimptotik çözümü incelenmiştir. Dalgaların genliklerinin sonlu fakat küçük oldukları ve buna bağlı olarak da lineer yayılma olayında olduğu gibi yerdeğiştirme doğrultusuna dik düzlemdeki Cauchy gerilmelerinin sıfir oldukları kabul edilmiştir. Bu koşul altında yüzey dalgaları lineer haldeki gibi bu düzlem içindeki etkiyen sürekli kütle kuvvetlerine ihtiyaç duyulmadan yaratılabileceklerdir. Bu varsayım altında; öncelikle sonlu ve düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı elastik bir yarım uzayda nonlineer yüzey SH dalgalarını betimleyen hareket denklemleri ve sınır koşulları kubik nonlineer terimlerden yüksek mertebeden olanlar ihmal edilerek yaklaştırılarak elde edilmişlerdir. Sınır koşulları türetilirken yarım uzayın serbest yüzeyinde gerilmelerin sıfir, ara yüzeylerde ise gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin sürekli oldukları kabul edilmiştir. Daha sonra, tabakalı ortamda elde edilen denklemler ve sınır koşulları ince tabaka varsayımı altında, yani $h \to 0$, için yaklaştırılmıştır. Bu yaklaştırma sonucunda, yalnızca yarım uzayın yerdeğiştirme fonksiyonu cinsinden yeni bir sınır değer problemi üretilmiştir.

İnce tabakalı ortam için bu şekilde tanımlanan nonlineer sınır değer probleminin yüzey SH dalgalarının self modülasyonunu karakterize eden çözümü değişik ölçekler yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu dalgaların nonlineer self modülasyonunun asimptotik olarak, tabakalı bir yarım uzayda olduğu gibi, bir NLS denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

İnce tabaka yaklaşımı ile elde edilen NLS denkleminin katsayıları ile sonlu kalınlıklı bir tabaka için ve lineer ince tabaka yaklaşımı için elde edilen NLS denkleminin katsayıları karşılaştırılmıştır. Bunun için önce dalgaların faz hızları, grup hızları ve NLS denkleminin lineer terimi (Γ) 'nin, seçilen malzeme modelleri için, yeni boyutsuz değişkenler tanımlanarak boyutsuzlaştırıp, kh ile değişimleri çizilmiştir.Çizilen şekillerden, her üç dalga karakteristik özelliği içinde, $0 \leq kh < 1$ aralığında ince tabaka yaklaşımı ile elde edilen davranışın, sonlu tabaka sonuçları ile uyum içerisinde oldukları gözlemlenmiştir. Fakat $kh > 1$ içinse, farkın büyüdüğü görülmüştür. Bu beklenen sonuçtur. Daha sonra; sonlu tabaka, nonlineer ince tabaka ve lineer ince tabaka için geçerli olan NLS denkleminin nonlineer teriminin katsayısı (Δ)' nın, lineer parametreler ve yarım uzayın nonlineer parametresi sabit tutularak, tabakanın nonlineer parametresi değiştirilmiş ve aynı boyutsuz değişkenler kullanılarak boyutsuzlaştırılıp, kh ile değişimleri çizilmiştir. Bu şekillerden, $kh > 0.4$ için tabakanın nonlineerliğinin Δ üzerinde etkin olmaya başladığı,

ayrıca $0 \leq kh < 1$ aralğında ince nonlineer tabaka yaklaşımı ile elde edilen Δ değerlerinin sonlu tabaka sonuçları ile uyumlu oldukları gözlemlenmiştir.

Son olarak, NLS denkleminin çözümlerinin davranışları başlangıç koşulları yanında denklemin katsayları Γ ve Δ 'nın çarpımlarının işaretine de bağlı oldukları için, $\Gamma\Delta$ 'nın ince tabaka yaklaşımı altında tabakanın ve yarım uzayın farklı nonlineer özelliklerine göre değişimleri, aynı boyutsuz değişkenler kullanılarak boyutsuzlaştırılarak, kh ile değişimleri çizilmiştir. Bu şekillerden, $\Gamma\Delta$ çarpımının nonlineer malzeme özelliklerinden kuvvetli bir şekilde etkilendiği gözlemlenmiştir. Bazı nonlineer malzeme modelleri için ise, $\Gamma\Delta = 0$ durumunun ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durum "marjinal stabilite" olarak adlandırılır ve $\Delta = 0$ olduğunda NLS denklemi lineer Schrödinger denklemine dönüşür ve $\Delta = 0$'nın sıfir olduğu dalga sayıları civarında nonlineerlik ile dispersiyonun dengelenmediği sonucuna ulaşılır. Bu dengenin kurulabilmesi için uygun bir asimptotik metod kullanılarak tekrar incelenmelidir.

EK A. NEO-HOOKEAN ELASTİK MALZEMELERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ KAYMA HAREKETİ

Üç boyutlu uzayda bir noktanın, aynı dik kartezyen eksen takımına göre uzaysal ve maddesel koordinatları sırası ile (x_1,x_2,x_3) ve (X_1,X_2,X_3) üçlü sıralı sayıları ile gösterilmek üzere

$$x_k = X_K\delta_{kK} + u_3(X_\Delta,t)\delta_{k3} \tag{A.1}$$

denklemi ile belirtilen bir şekil değiştirme genelleştirilmiş kayma hareketi olarak ifade edilir[4]. (2.1) denkleminde u_3 bir parçacığın X_3 ekseni doğrultusundaki yerdeğiştirme fonksiyonunu, t zamanı, δ_{kK} da Kronecker sembolünü göstermektedir. Latin indislerin (1,2,3), Yunan indislerinin ise (1,2) değerlerini alacaklarını ve (A.1)'de ve bu bölümde bundan sonra, tekrarlanan iki Latin indisi üzerinde 1'den 3'e kadar; tekrarlanan iki Yunan indisi üzerinde ise 1'den 2'ye kadar toplam yapılacağını kabul ediyoruz.

(A.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma hareketine ait şekil değiştirme gradyanları

$$[x_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 \end{bmatrix}, \quad [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -u_{3,1} & -u_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

olarak bulunur. (A.2)'de virgülden sonraki bir alt indis bunun belirttiği kartezyen koordinata göre kısmi türevini belirtmektedir. Eğer şekildeğiştirme gradyanının determinantı hesaplanırsa

$$j = \det[x_{k,K}] = 1 \tag{A.3}$$

olduğu görülür. Bu nedenle (A.1) ile belirtilen genelleştirilmiş kayma hareketi izokorik bir şekil değiştirmedir,yani hareket esnasında hacim değişimi olmaz. Buna bağlı olarak böyle bir hareketin meydana getirdiği sürekli ortamın yoğunluğu, ρ, değişmez. Böylece

$$\rho = \rho_0 = \text{sbt.} \tag{A.4}$$

dir.

Şimdi ortamın sıkışmaz homojen izotrop hiperelastik bir cisim olduğunu ve şekil değiştirme enerji fonksiyonunun, Σ, Finger şekil değiştirme tansörü

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K}x_{l,K} \tag{A.5}$$

'nin sadece birinci invaryantı

$$I = trc^{-1} = 3 + K^2 \quad , K^2 = u_{3,\Delta} u_{3,\Delta} \tag{A.6}$$

'nın fonksiyonu olduğunu kabul edelim,yani

$$\Sigma = \Sigma(I) \tag{A.7}$$

olsun. Bu türdeki malzemelere genelleştirilmiş neo- Hookean malzemeler denir ve bu tür malzemeler için gerilme bünye denklemleri, t_{kl} Cauchy gerilme tansörünün bileşenlerini göstermek üzere,

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \Phi c_{kl}^{-1} \tag{A.8}$$

olarak ifade edilir [8]. (A.8)'de $p = p(X_K, t)$ hidrostatik basınç fonksiyonudur ve harekete bağlı olarak hesaplanır. Φ ise

$$\Phi = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \tag{A.9}$$

olarak tanımlanır.

(A.1) için c_{kl}^{-1} tansörünün bileşenleri (A.2) kullanılarak hesaplanırsa

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{3,1} \\ 0 & 1 & u_{3,2} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+K^2 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlar (A.8)'deki bünye denklemlerine yerleştirildiğinde gerilme bileşenleri

$$t_{11} = -p + \Phi \ , \ t_{12} = t_{21} = 0 \ , \ t_{\alpha 3} = t_{3\alpha} = \Phi u_{3,\alpha}$$

$$t_{33} = -p + (1+K^2)\Phi \ , \ t_{22} = -p + \Phi \tag{A.11}$$

olarak hesaplanırlar. Eğer

$$\tau = \sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2} \tag{A.12}$$

bağıntısı ile kayma gerilmesi tanımlanırsa (A.11)'den

$$\tau = \Phi K \tag{A.13}$$

yazılır. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için, K'nın katsayısı olan Φ ortamın genelleştirilmiş kayma modülü olarak adlandırılır. Bu modülü

$$\widehat{\mu} = \Phi \tag{A.14}$$

ile gösterelim. (A.6) ve (A.9) kullanılırsa

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{K}\frac{d\Sigma}{dK} \tag{A.15}$$

ve (A.13)'de

$$\tau = \widehat{\mu}K = \frac{d\Sigma}{dK} \tag{A.16}$$

olarak yazılabilir. Bütün K'lar için

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{K}\frac{d\Sigma}{dK} > 0 \tag{A.17}$$

olduğunu kabul ediyoruz. Ayrıca, μ klasik Láme sabiti olmak üzere

$$\widehat{\mu}(0) = \mu \tag{A.18}$$

dir.

Eğer bütün K'lar için

$$\frac{d\widehat{\mu}}{dK} < 0 \tag{A.19}$$

ise ortam kaymada düzgün olarak yumuşama (softerning in shear); eğer bütün K 'lar için

$$\frac{d\widehat{\mu}}{dK} > 0 \tag{A.20}$$

ise kaymada düzgün olarak sertleşme (hardening in shear) davranışı gösterir. (A.16) türetilerek

$$K^2\frac{d\widehat{\mu}}{dK} = K\frac{d\tau}{dK} - \tau \tag{A.21}$$

yazılabileceği için yumuşayan malzemeler için

$$K\frac{d\tau}{dK} < \tau \tag{A.22}$$

sertleşen malzemeler için ise

$$K\frac{d\tau}{dK} > \tau \tag{A.23}$$

olacağı görülür.

Bu aşamada p basınç fonksiyonunun genel olarak X_1, X_2 ve X_3''ün fonksiyonu olacağını dikkate alarak (A.1) ile tanımlanan hareketin denklemlerini, hareketi etkileyen kütle kuvvetlerinin bulunmadığında, referans konumunda

$$t_{11,1} - u_{3,1} t_{11,3} = 0 \quad , \quad t_{22,2} - u_{3,2} t_{22,3} = 0$$

$$t_{13,1} + t_{23,2} + t_{33,3} = \rho_0 \ddot{u}_3 \tag{A.24}$$

şeklinde yazabiliriz[8]. (A.24)'de u_3'ün üzerindeki noktalar zamana göre kısmi türevleri göstermektedirler. (A.11)'deki gerilme bileşenleri kullanarak ve bazı ara işlemlerden sonra (A.24) denklemleri

$$(-p + \Phi)_{,1} + u_{3,1} p_{,3} = 0$$

$$(-p + \Phi)_{,2} + u_{3,2} p_{,3} = 0$$

$$(\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} - \rho_0 \ddot{u}_3 = p_{,3} \tag{A.25}$$

formuna indirgenirler. (A.25)'deki son denklemden

$$p_{,3} = \kappa_0(X_1, X_2, t) \tag{A.26}$$

olduğu görülür. Bu denklem integre edilirse

$$p = \kappa_0(X_1, X_2, t) X_3 + \kappa_1(X_1, X_2, t) \tag{A.27}$$

elde edilir. Burada κ_0 ve κ_1 keyfi fonksiyonlardır. (A.27), (A.25)'deki ilk iki denklem kullanılırsa κ_0 keyfi fonksiyonunun

$$\kappa_{0,1} = 0 \quad , \quad \kappa_{0,2} = 0 \tag{A.28}$$

denklemlerini sağlaması gerektiği ortaya çıkar. Buradan f keyfi fonksiyon olmak üzere

$$\kappa_0 = f(t) \tag{A.29}$$

olarak bulunur. Bu sonuç dikkate alınırsa (A.25)'deki ilk iki denklem, sıra ile,

$$-\kappa_{1,1} + u_{3,1} f(t) + \Phi_{,1} = 0 \quad , \quad -\kappa_{1,2} + u_{3,2} f(t) + \Phi_{,2} = 0 \tag{A.30}$$

formlarına dönüşürler. Bu son denklemler integre edilirek, g keyfi fonksiyon olmak üzere κ_1,

$$\kappa_1 = \Phi + u_3 f(t) - g(t) \tag{A.31}$$

olarak elde edilir ve p için

$$p = f(t)X_3 + \Phi + u_3 f(t) - g(t) \tag{A.32}$$

sonucu bulunur. (A.32) kullanılarak (A.11)'de verilen gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilirler;

$$t_{11} = t_{22} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t) \ \ , \ \ t_{12} = t_{21} = 0$$

$$t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha} \ \ , \ \ t_{33} = -f(t)X_3 - u_3 f(t) - g(t) + K^2\Phi \tag{A.33}$$

Dikkat edilirse $|X_3| \longrightarrow \infty$ için $t_{11},\ t_{22},\ t_{33}$ gerilmeleri sonsuza gider. Fakat bu limitte fiziksel tutarlılık için gerilmelerin sınırlı kalmaları gerekir. Bunun sağlanması için

$$f(t) \equiv 0 \tag{A.34}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Diğer taraftan ortamın doğal (başlangıç) durumunu gerilmesiz kabul edersek, bunun sağlanması için

$$g(t) \equiv 0 \tag{A.35}$$

olmalıdır. Sonuçta yaptığımız varsayım altında

$$p = \Phi \tag{A.36}$$

ve

$$t_{\alpha\beta} = 0 \ \ , \ \ t_{\alpha 3} = \Phi u_{3,\alpha} \ \ , \ \ t_{33} = K^2\Phi \tag{A.37}$$

olarak bulunur. Bu sonuçlarla (A.24)'deki ilk iki hareket denklemi özdeş olarak sağlanır ve üçüncü denklem de

$$(\Phi u_{3,1})_{,1} + (\Phi u_{3,2})_{,2} = \rho_0 \ddot{u}_3 \tag{A.38}$$

şeklini alır.

Bu aşamada son elde edilen denklemin hiperbolik olması koşulunun Σ üzerinde getireceği kısıtlamayı bulmaya çalışalım. $\rho_0 > 0$ olduğu için, (A.38) denkleminin sol tarafının bu bölgede eliptik bir operatör olması gereklidir. Bunun içinde

$$\left(\frac{1}{K}\frac{d\Phi}{dK}u_{3,1}^2+\Phi\right)\left(\frac{1}{K}\frac{d\Phi}{dK}u_{3,2}^2+\Phi\right)-\left(\frac{1}{K}\frac{d\Phi^2}{dK}\right)u_{3,1}^2u_{3,2}^2>0 \tag{A.39}$$

olması gereklidir. Buradan da (A.16) ve (A.21) kullanılarak

$$\Phi\left(K\frac{d\Phi}{dK}+\Phi\right)=\Phi\frac{d\tau}{dK}>0 \tag{A.40}$$

şartının sağlanması gerektiği ortaya çıkar. Daha önce tanımlanan $\widehat{\mu}=\Phi>0$ göz önünde bulundurulursa, (A.40) eşitsizliğinin sağlanması için

$$K\frac{d\Phi}{dK}+\Phi=\frac{d\tau}{dK}>0 \tag{A.41}$$

olması gerektiği görülür. (A.16) kullanılırsa (A.41) eşitsizliği

$$\frac{d^2\Sigma}{dK^2}>0 \tag{A.42}$$

şeklinde yazılabilir.

Biz bu çalışmada sonlu ve küçük genlikli bir elastik dalga yayılması probleminin asimptotik çözümü ile ilgileneceğimiz için gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının, (A.37) ve hareket denkleminin, (A.38), yaklaşık formlarını kullanacağız. Bu yaklaşık denklemleri türetmek için Σ 'nın I 'nın analitik fonksiyonu olduğunu kabul ederek, bu fonksiyonu $I-3$ 'ün kuvvetleri cinsinden seri açılıma tabi tutabiliriz. Buradaki 3 doğal durumdaki birinci invaryantı göstermekte olup, enerji potansiyel fonksiyonu Σ 'yı doğal durum civarında seriye açmış olacağız. Bu durumda seri formu

$$\Sigma(I)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p(I-3)^p \tag{A.43}$$

şeklinde olur. Burada α_p sabitleri

$$\alpha_p=\frac{1}{p!}\frac{d^p\Sigma(3)}{dI^p} \tag{A.44}$$

olarak tanımlanmaktadırlar ve referans konumunda enerjinin sıfir olması için

$$\alpha_0=0 \tag{A.45}$$

olması gerekir. Bu dikkate alınarak (A.43)'den

$$\frac{d\Sigma}{dI}=\alpha_1+2\alpha_2K^2+\mathscr{O}(K^4) \tag{A.46}$$

yazılır ve (A.46) kullanılarak gerilme bileşenleri

$$t_{\alpha\beta}=0\ ,\ \ t_{\alpha3}=2(\alpha_1+2\alpha_2K^2)u_{3,\alpha}+\mathscr{O}(K^5)$$

$$t_{33} = 2\alpha_1 K^2 + \mathscr{O}(K^4) \tag{A.47}$$

olarak bulunur. (A.46) kullanılarak (A.38) denklemi de

$$\ddot{u}_3 - c^2 u_{3,\Delta\Delta} = n\mathscr{N}(u_3) + \mathscr{O}(K^5) \tag{A.48}$$

olarak yaklaştırılır. Burada

$$c^2 = \mu/\rho_0 \ , \ \mu = 2\alpha_1 \ , \ n = 4\alpha_2/\rho_0 \tag{A.49}$$

ve

$$\mathscr{N}(u_3) = (u_{3,1}Q(u_3))_{,1} + (u_{3,2}Q(u_3))_{,2} \tag{A.50}$$

$$Q(u_3) = K^2 = u_{3,\Delta}u_{3,\Delta} \tag{A.51}$$

olarak tanımlanmaktadır ve c lineer dalgaların yayılma hızını göstermektedir.

Bu yaklaşımda (yani mertebesi K^4 ve daha yüksek terimler ihmal edildiğinde) (A.14) ile tanımlanan genelleştirilmiş kayma modülü

$$\widehat{\mu} = \rho_0(c^2 + nK^2) \tag{A.52}$$

dir. Burada şuna dikkat edilirse, $c^2 > 0$ olduğu için eğer $n > 0$ ise K arttıkça $\widehat{\mu}$ monoton olarak artacak; $n < 0$ ise monoton olarak azalacaktır. Bu gözlem $n > 0$ olduğunda ortamın kayma hareketinde sertleşen davranış gösterdiğini; $n < 0$ olduğunda ise yumuşayan bir davranış gösterdiğini söylemektedir. $\widehat{\mu}(K) > 0$ kabul edildiği için, bütün K değerlerinde

$$c^2 + nK^2 > 0 \tag{A.53}$$

olmalıdır. Diğer taraftan, (A.48) denkleminin hiperbolik olması için de (A.41) veya (A.42)'den bütün K değerleri için

$$c^2 + 3nK^2 > 0 \tag{A.54}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği anlaşılır. $n > 0$ olduğunda (A.53) ve (A.54) eşitsizlikleri bütün K değerleri için sağlanır. Fakat $n < 0$ olduğunda bu eşitsizliklerin her ikisinin aynı anda sağlanabilmesi için

$$0 < K^2 < \frac{c^2}{3\,|n|} \tag{A.55}$$

koşulunun sağlanması gerekli ve yeterlidir. K kayma deformasyonunu ölçtüğü için (A.55) dalga hareketinin genliğine bir kısıtlama getirir. Biz sonlu fakat küçük genlikli dalga hareketleri ile ilgilendiğimiz için bunun sağlandığını kabul edebiliriz.

KAYNAKLAR

[1] **Eringen, A.C., Şuhubi, E.S.,** 1975. Elastodynamics, Linear Theory, Vol 2, Academic Press, New York.

[2] **Achenbach, J.D.,** 1973. Wave Propagation in Elastic Solids, North Holand Publishing Co., Amsterdam.

[3] **Whitham, G.B.,** 1974. Linear and Nonlineer Waves, John Wiley & Sons.

[4] **Şuhubi, E.S.,** 1993. Sürekli Ortamlar Mekaniği, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

[5] **Jeffrey, A., Kawahara, T.,** 1982. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Pitman, Boston.

[6] **Samsonov, A.M.,** 2001. Strain Solitons in Solids, Chapman & Hall/CRC.

[7] **Drazin, P.G.**, **Johnson, R.S.,** 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

[8] **Eringen, A.C., Şuhubi, E.S.,** 1974. Elastodynamics, Vol.1: Finite Motions, Academic Press, New York.

[9] **Nayfeh, A.H.,** 1981. Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley & Sons, New York.

[10] **Sulem, C., Sulem, P.L.,** 1999. The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse, Springer, New York.

[11] **Remoissenet, M.,** 1999. Waves Called Soliton: Concepts and Experiments, Springer-Verlag, Berlin.

[12] **Teymür, M.,** 1988. Nonlinear Modulation of Love Waves in a Compressible Hyperelastic Layered Half Space, Int. J. Engng. Sci., **26,** 907.

[13] **Teymür, M.,** 1996. Small But Finite Amplitude Waves in a Two-Layered Incompressible Elastic Medium, Int. J. Engng. Sci., **34,** 227.

[14] **Maugin, G.A., Hadouaj, H.,** 1991. Solitary Surface Transverse Waves on an Elastic Substrate Coated With a Thin Film, Phy. Rev. B, **44,** 3, 1246

[15] **Eringen, A.C.,** 1967. Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, Inc. New York.

[16] **Var, H.I., Teymür, M.,** 1997. Tabakalı Bir Hiperelastik Yarım Uzayda Nonlineer Yüzey SH Dalgalarının Yayılması, Doktora Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[17] **Ahmetolan, S., Teymür M.,** 1996. İki Tabakalı Elastik Ortamlarda Nonlineer Dalga Modülasyonu, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[18] **Graff, K.F.,** 1991. Wave Motion in Elastic Solids, Dover Publications, Inc, New York.

[19] **Nayfeh, A.H.,** 1973. Perturbation Methods, Wiley, New York.

[20] **Love, A.E.H.,** 1944. Mathematical Theory of Elasticity, 4th Edition, Dover Publications Inc., New York.

[21] **Teymur, M.,** 1988. in Recent Development in Surface Acoustic Waves (Ed. by D.F.PARKER and G. MAUGIN), pp.54-61, Springer, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İstanbul'da doğdu. Lise öğrenimini Zeytinburnu Adile Mermerci Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2005 yılında bu lisans programındaki eğitimini tamamlayıp, aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans programına başladı. 2002 yılında başladığı İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik Mühendisliği lisans programını 2007 Haziran döneminde bitirdi.2005 Aralık döneminden itibaren İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.